Modellierung und Optimierung mit OPL
1 Grundlagen der linearen Optimierung

Andreas Popp

Inhalt

1.1 Modellierung

1.2 Lineare Optimierung

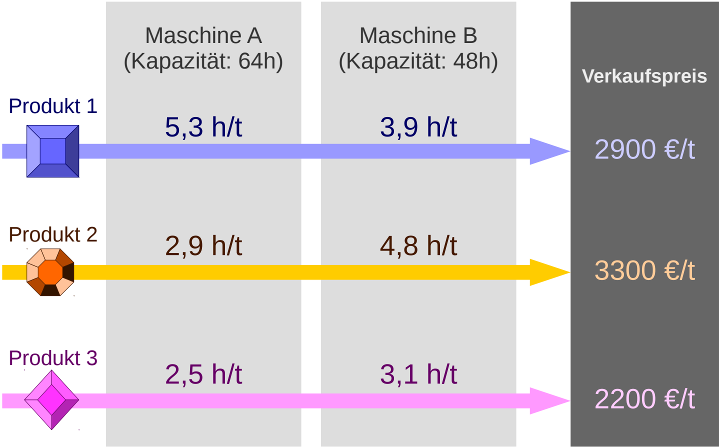
Eigenschaften

Lösung von linearen Modellen

1.3 Modell und Modellinstanz

1.1 Modellierung

Beispiel: Produktionsproblem (Lewig Sanstetten)



Wie viel soll von jedem Produkt produziert werden?

Was ist ein Modell?

- Abstrakte Abbildung eines realen Systems
- Zum Beispiel nützlich
  - zum Systemdesign
  - zur Performanceanalyse
  - **zur Entscheidungsunterstützung**
- Grundsatz: so genau wie nötig, so einfach wie möglich

Mathematische Optimierungsmodelle zur Entscheidungsunterstützung

Bestandteile eines mathematischen Optimierungsmodells[1]:

Entscheidungsvariablen Die Größen des Systems, die durch den Entscheider gesetzt werden können

- Im Beispiel: Die Produktionsmengen der Produkte

Nebenbedingungen Bedingungen, welche von den Entscheidungsvariablen eingehalten werden müssen um eine sinnvolle Lösung zu erhalten

- Im Beispiel: Die Kapazität der Maschinen

Zielfunktion Eine Funktion der Entscheidungsvariablen, die vom Entscheider optimiert – d.h. maximiert oder minimiert – werden soll.

- Im Beispiel: Der Gesamtumsatz

[1] auch: mathematisches Programm

A. Popp

Beispiel: Produktionsproblem – Entscheidungsvariablen

x_1 Produktionsmenge von Produkt 1

x_2 Produktionsmenge von Produkt 2

x_3 Produktionsmenge von Produkt 3

Definition: Lösung eines Optimierungsmodells

Weisen wir den Entscheidungsvariablen konkrete Werte zu, so heißt dies eine Lösung des Optimierungsmodells.

Beispiel: Produktionsproblem – Nebenbedingungen

Kapazität von Maschine A muss eingehalten werden

- $5{,}3 \cdot x_1 + 2{,}9 \cdot x_2 + 2{,}5 \cdot x_3 \leq 64$

Kapazität von Maschine B muss eingehalten werden

- $3{,}9 \cdot x_1 + 4{,}8 \cdot x_2 + 3{,}1 \cdot x_3 \leq 48$

Definition: Zulässige Lösungen eines Optimierungsmodells

Eine Lösung, welche alle Nebenbedingungen einhält, heißt zulässige Lösung. Die Menge aller zulässigen Lösungen heißt Lösungsraum.

Beispiel: Produktionsproblem – Zielfunktion

Maximiere den Umsatz (in k€):

- $\max U(x_1, x_2, x_3) = 2{,}9 \cdot x_1 + 3{,}3 \cdot x_2 + 2{,}2 \cdot x_3$

Definition: Optimallösung und Optimalwert eines Optimierungsmodells

Gibt es eine zulässige Lösung, in der die Zielfunktion ihr Maximum bzw. Minimum über alle zulässigen Lösungen annimmt (was nicht zwingend der Fall sein muss), so ist dies eine Optimallösung und der zugehörige Zielfunktionswert ist der Optimalwert.

Beispiel: Produktionsproblem – Vollständiges Optimierungsmodell

$$\begin{array}{lll} \max & 2{,}9 \cdot x_1 + 3{,}3 \cdot x_2 + 2{,}2 \cdot x_3 & \textit{(Zielfunktion)} \\ \text{s.t.} & 5{,}3 \cdot x_1 + 2{,}9 \cdot x_2 + 2{,}5 \cdot x_3 \leq 64 & \textit{(Nebenbedingung I)} \\ & 3{,}9 \cdot x_1 + 4{,}8 \cdot x_2 + 3{,}1 \cdot x_3 \leq 48 & \textit{(Nebenbedingung II)} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \textit{(Nicht-Negativitäts-Bedingung)} \end{array}$$

1.2 Lineare Optimierung

Lineare Funktionen und Nebenbedingungen

Lineare Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot x_n$$

Lineare Nebenbedingung

Sei f eine lineare Funktion:

$$f(x_1, \ldots, x_N) = b$$
$$f(x_1, \ldots, x_N) \leq b$$
$$f(x_1, \ldots, x_N) \geq b$$

Lineares Optimierungsmodell

Zielfunktion und Nebenbedingung linear in den Entscheidungsvariablen $\Longrightarrow$ lineares Optimierungsmodell

Eigenschaften linearer Funktionen

Proportionalität Jede Variable trägt einen proportionalen Wert zur Funktion bei.

Unabhängigkeit Der Wert, den eine Variable zur Funktion beiträgt ist unabhängig von der Ausprägung der anderen Variablen.

Typische Anzeichen für Nichtlinearität

- Variablen haben einen anderen Exponenten als 1
  - andere natürliche Exponenten, z.B.: x^2
  - Wurzlen, z.B.: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
  - Variablen im Nenner, z.B.: $\frac{1}{x} = x^{-1}$
- Variablen werden miteinander multipliziert, z.B.: $x_1 \cdot x_2$
- Exponentialfunktionen, z.B.: 2^x
- Absolutbeträge, z.B. $|x|$

Besonderheit: Konstanten

Konstanten sind grundsätzlich nicht linear, stören aber in linearen Optimierungsmodellen nicht, da sie stets auflösbar sind.

deterministische vs. stochastische Optimierungsmodelle

deterministische Optimierungsmodelle: alle Paramter und Funktionswerte sind stets eindeutig bekannt

stochastische Optimierungsmodelle: Parameter und Funktionswerte unterliegen zufälligen Schwankung

Lineare Optimierungsmodelle sind grundsätzlich deterministisch.

kontinuierliche vs. ganzzahlige Optimierungsmodelle

kontinuierliche Optimierungsmodelle: die Werte der Entscheidungsvariablen sind beliebig teilbar (reelle Werte)

ganzzahlige Optimierungsmodelle: die Werte der Entscheidungsvariablen können nur ganzzahlige Werte annehmen

Arten von linearen Optimierungsmodellen nach zulässigen Werten für Entscheidungsvariablen:

- kontinuierliche Entscheidungsvariablen $\Longrightarrow$ (kontinuierliches) lineares Optimierungsmodell
- ganzzahlige Entscheidungsvariablen $\Longrightarrow$ ganzzahliges lineares Optimierungsmodell
- sowohl kontinuierliche als auch ganzzahlige Entscheidungsvariablen $\Longrightarrow$ gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsmodell

Lösungsstrukturen für lineare Optimierungsmodelle

Mögliche Lösungsstrukturen:

- es gibt genau eine Optimallösung
- es gibt unendlich viele Optimallösung
- es gibt keine Optimallösung
  - der Lösungsraum ist leer
  - der Lösungsraum ist unbeschränkt und die Zielfunktion geht gegen unendlich

Gängige Lösungsverfahren für lineare Optimierungsmodelle

Lösungsverfahren für (kontinuierliche) lineare Optimierungsmodelle

- Simplex-Verfahren von Dantzig
- Innere-Punkte-Verfahren von Karmarkar

Lösungsverfahren für (gemischt-)ganzzahlige lineare Optimierungsmodelle

- Branch-and-Bound-Verfahren
- Schnittebenenverfahren

1.3 Modell und Modellinstanz

Optimierungsmodell aus Beispiel “Lewig Sanstetten”

Modell: Produktionsproblem

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2{,}9 \cdot x_1 + 3{,}3 \cdot x_2 + 2{,}2 \cdot x_3 \\
s.t. \quad & 5{,}3 \cdot x_1 + 2{,}9 \cdot x_2 + 2{,}5 \cdot x_3 \leq 64 \\
& 3{,}9 \cdot x_1 + 4{,}8 \cdot x_2 + 3{,}1 \cdot x_3 \leq 48 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ersetzen von Daten durch Parameter (Formvariablen)

Modell: Produktionsproblem

$$
\begin{aligned}
\max\quad & p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 \\
s.t.\quad & v_{A1} \cdot x_1 + v_{A2} \cdot x_2 + v_{A3} \cdot x_3 \le c_A \\
& v_{B1} \cdot x_1 + v_{B2} \cdot x_2 + v_{B3} \cdot x_3 \le c_B \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Indexmengen als spezielle Parameter

Variante 1: Maximalindex als Parameter

Sei $I \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Produkte, dann lautet zum Beispiel die Zielfunktion:

$$\sum_{i=1}^{I} p_i \cdot x_i$$

Variante 2: Indexmenge als Parameter

Sei I die Menge der Produkte, dann lautet zum Beispiel die Zielfunktion:

$$\sum_{i \in I} p_i \cdot x_i$$

Summation über parametrisierte Indexmengen

Modell: Produktionsproblem

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{Ai} \cdot x_i \leq c_A \\
& \sum_{i \in I} v_{Bi} \cdot x_i \leq c_B \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Verwendung des Allquantors

$$\sum_{i \in I} v_{Ai} \cdot x_i \leq c_A$$

$$\sum_{i \in I} v_{Bi} \cdot x_i \leq c_B$$

↓ Indexmenge R der Ressourcen ↓

$$\sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r \qquad \forall r \in R$$

Allgemeines Modell

Modell: Produktionsproblem

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r & \forall r \in R \\
& x_i \geq 0 & \forall i \in I
\end{aligned}
$$

Modell: Produktionsproblem

Indexmengen:

I	Menge der Produkte
R	Menge der Ressourcen

Parameter:

p_i	Preis von Produkt $i \in I$
c_r	Kapazität von Ressource $r \in R$
v_{ri}	Kapazitätsverbrauch von Produkt $i \in I$ auf Ressource $r \in R$

Entscheidungsvariablen:

x_i	Produktionsmenge von Produkt $i \in I$

Modellbeschreibung:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r && \forall r \in R \quad \text{(I)} \\
& x_i \geq 0 && \forall i \in I
\end{aligned}
$$

Modell vs. Modellinstanz

Modell

Die allgemeine Darstellung der Problemstruktur mit allgemeinen Indexmengen und Parametern.

Modellinstanz

Ein konkretes Problem, in welchem den Indexmengen und Parametern konkrete Werte zugewiesen wurden.