1. Линейное однородное уравнение с переменными коэффициентами.

В этой главе мы будем изучать свойства решений линейных уравнений 2го порядка

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, t \in (a, b) \qquad 6.1$$

ниже предполагается, что $p(t) \in C^1(a, b), q(t) \in C(a, b)$

1.1. Теоремы Штурма

Лемма 1. *Пусть $x(t), t \in (a, b)$ - решение уравнения (6.1); Тогда мн-во его нулей на (содержащихся в (a, b)) любых отрезках $[t_1, t_2] \subset (a, b)$ конечно.*

Доказательство. Если $x(t), t \in (a, b)$ - решение уравнения (6.1), то $x(t) \in C^1(a, b)$
Предположим, противное, т.е. решение $x(t)$ имеет бесконечное число нулей на $[t_1, t_2]$.
Выберем сходящуюся посл-ть нулей $\{t_k\}, t_k \to t_0, k \to \infty$ В силу непрерывности решения $x(t)$ мы имеем $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x(t_0) = 0$, т.к. $\forall k \to x(t_k) = 0$

$$x'(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t_k \to t_0} \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k - t_0} = 0$$

$$x(t_0) = x'(t_0) = 0$$

По теореме о существовании и единственности решения ЗК - единственное решение $x(t) \equiv 0, t \in [t_1, t_2]$ - противоречие.

□

Следствие 1. *Если нетривиальное решение $x(t) \in (a, b)$ имеет конечное число нулей, то их можно перенумеровать.*

Доказательство. Назовем t_1, t_2 последовательными нулями решения $x(t)$, если $x(t)$ не имеет нулей на (t_1, t_2)
Произведем замену функции $x(t)$ в уравнении (6.1) на ф-ию $y(t)$ согласно формуле

$$x(t) = y(t)e^{-1/2\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \qquad 6.2$$

В результате подстановки (6.2) получим уравнение для $y(t)$:

$$y'' + Q(t)y(t) = 0, t \in (a, b) \qquad 6.3$$

$$Q(t) = q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2} \in C(a, b)$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' + Q_1(t)y = 0 \qquad 6.4$$

$$z'' + Q_2(t)z = 0 \qquad 6.5$$

$$Q_2(t), Q_1(t) \in C(a, b), t \in (a, b)$$

□

Теорема 1 <Штурма о сравнении>. *Пусть $Q_1(t) \le Q_2(t), t \in (a, b)$, t_1, t_2 - два последовательных нуля решения $y(t)$ уравнения (6.4).*
Тогда любое решение $z(t)$ уравнения (6.5) имеет хотя бы 1 ноль на $[t_1, t_2]$.

Доказательство. По условию Th. решение $y(t)$ уравнения (6.4) на (t_1, t_2) не меняет знак.
Предположим обратное: решение $z(t)$ уравнения (6.5) не имеет нулей на $[t_1, t_2]$ и будем считать, что $z(t) > 0, t \in [t1, t2]$
Умножим уравнение (6.4) на $z(t)$, а уравнение (6.5) на $y(t)$ и вычтем одно из другого, тогда

$$zy'' - yz'' = (Q_2(t) - Q_1(t))yz \tag{6.6}$$

Нетрудно видеть, что левая часть (6.6) преставима в виде

$$zy'' - yz'' = d(zy' - yz')$$

Тогда

$$d/dt(zy' - yz') = (Q_2 - Q_1)yz \tag{6.7}$$

Проинтегрируем (6.7) на $[t_1, t_2]$, получим

$$(zy' - yz')_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (Q_2(t) - Q_1(t))yzdt$$

Т.к. $y(t_1) = y(t_2) = 0$,

$$y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q_2(t) - Q_1(t))yzdt \tag{6.8}$$

Исследуем знак левой части (6.8). $y'(t_1) > 0, y'(t_2) < 0$
Согласно формуле Тейлора $y(t) = y(t_1) + y'(t_1)(t - t_1) + o(t - t_1)$
Если $t \to t_1 + 0$, то $t - t_1 > 0, y(t) > 0 \Rightarrow y'(t_1) > 0$. Аналогично $y'(t_2) < 0$.
$0 > y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}(Q_2(t) - Q_1(t))yzdt \geq 0 \Rightarrow$ противоречие.

□

Замечание 1. Пусть на $(a, b) Q_2(t) > Q_1(t)$,тогда:

1. Если решение $z(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$, то опять приходим к противоречию. Получаем, что любое решение $z(t)$ уравнения (6.5) имеет хотя бы один нуль на (t_1, t_2).

2. Если $z(t_1) = 0$, то следующий нуль $(z(t) = 0), t = t_* : t_* < t_2$

Теорема 2 <О разделении нулей>. *Пусть $y_1(t), y_2(t), t \in (a, b)$ - ЛНЗ уравнения. $y'' + Q(t)y = 0, t \in (a, b)$ Если t_1, t_2 - последовательные нули решения $y_1(t)$, то решение $y_2(t)$ имеет на (t_1, t_2) ровно 1 нуль.*

Доказательство. Рассмотрим уравнения (6.4), (6.5) при условии $Q_1(t) = Q_2)t = Q(t)$. Покажем, что $y_2(t)$ имеет на (t_1, t_2) хотя бы 1 нуль, по теореме сравнения он имеет хотя бы 1 нуль на $[t_1, t_2]$. Кроме того, $y_2(t) \neq 0, y_2(t_1) \neq 0$. (Т.е. если $y_2(t_1) = 0$, то определитель Вронского $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = 0$ при $t = t_1 \Rightarrow y_1(t), y_2(t)$ - ЛЗ $\Rightarrow$ противоречие.)
Предположим противное. Пусть η, θ - последовательные нули $y_2(t)$ на $(t_1, t_2) : y_2(\eta) = y_2(\theta) = 0$.
$y_1(\eta) \neq 0, y_1(\theta) \neq 0$ по условию. Значит по теореме сравнения y_1 должно иметь 0 на $(\eta, \theta) \Rightarrow$ противоречие.

□

Следствие 2 <из теорем Штурма>. *Если $Q(t) \leq 0$, то любое решение уравнения*

$$y'' + Q(t)y = 0, t \in (a, b) \tag{6.9}$$

имеет не более 1 нуля на (a,b).

Доказательство. От противного. Пусть $\exists$ решение (6.9), имеющее > 1 нуля. Пусть t_1, t_2 - его последовательные нули. Рассмотрим (6.5). $Q_2(t) = 0$. Т.о. $Q_2(t) \geq a_1(t)$
По теореме сравнения любое решение уравнения

$$z'' = 0 \tag{6.10}$$

Будет иметь хотя бы 1 ноль на $[t_1, t_2]$, а это не так (решение $z = 1, t \in (a, b)$ вообще не имеет нулей) $\Rightarrow$ противоречие.

$\square$

Следствие 3. *Предположим*

$$0 < m^2 \leq Q(t) \leq M^2, t \in (a, b) \qquad 6.11$$

Обозначим через δ расстояние между последовательными нулями уравнения (6.9). Если $Q(t)$ удовлетворяет (6.11) на (a,b), то $\pi/M \leq \delta \leq \pi/m$.

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$y'' + m^2 y = 0, y'' + M^2 y = 0 \qquad 6.12$$

Их общее решение задается формулой $???WTF??$