1. Вероятностно-статистическая модель

Определение 1. Пусть X - некот. наблюдение. Мн-во всех значений X наз. выборочным пространством и обозначается X.

X - результат случ. выбора элемента X с неизвестгным распределением P.

Определение 2. Тройка (X, B_x, P),где X - выборочное пространство, B_x - σ-алгебра на X, $P = \{P : P$ - вер.мера на $(X, B_x)\}$ - семейство распределений на (X, B_x).

Если P параметризовано, т.е. $P = \{P_\theta : \Theta \in O\}$, то модель (X, B_x, P) наз. параметрической. Обычно $(X, B_x) = (R^n, B(R^n))$.

Пример 1. Выборка. Пусть прибор работает некоторое случайное время. Все приборы однородны, а потому можно считать, что их времена работы - это независимые однородно распределенные СВ $\xi_1 \dots \xi_n \dots$. Пусть распр. времени работы определяется средним значением: $\Theta = E\xi_i$. Задача - оценить Θ?

Пример 2. Линейная регрессия. Объект движется из положения Θ_1 в положение Θ_2 с нек. скоростью. Засекаем его положение в нек. моменты времени. Известны результаты измерений положения объекта в моменты времени $t_1 \dots t_n$.

$$X_i = \Theta_1 + t_1\Theta_2 + \varepsilon_i$$

ε_i - ошибка измерения. Задача - оценить Θ_1, Θ_2

Определение 3. Набор $X_1 \dots X_n$ - независимых одинаково распределнных СВ с распр. P называется выборкой размера n из распределения P.

Определение 4. Пусть $X_1 \dots X_n$ - выборка. Тогда $\forall B \in B(R)$ обозначим $P_n^*(B) = U_n(B)/n$ где $U_n(B)$ - число элементов выборки, попавших в B, т е $P_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n I\{X_i \in B\}}{n}$

Утверждение 1. Пусть $X_1 \dots X_n \dots$ - выборка неогр. размера из P_x. Тогда $\forall B \in B(R) : P_n^* \xrightarrow{a.s} P_x(B)$

Доказательство. $P_n^*(B) = \frac{1}{n}\sum i = 1nI\{X_i \in B\}$. Согласно УЗБЧ $P_n^* \xrightarrow{a.s} EP_n^*(B) = EI\{X_i \in B\} = P(X_i \in B) = P_x(B)$ □

Определение 5. Пусть $X_1 \dots X_n$ - выборка. Тогда $F_n(x) = P_n^*(-\infty; x] = \frac{1}{n}\sum i = 1nI\{X_i \le x\}$

Теорема 1 <Гливенко-Кантелли>. *Пусть $X_1 \dots X_n \dots$ - выборка неогр. размера.с ф.р. F(x). задана на вер. пр-ве (Ω, F, P). Тогда* $\sup_{x\in R} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{a.s} 0$

Доказательство. Пусть Q - мн-вол рац. чисел на R. $\forall\omega \in \Omega \longrightarrow |F_n(x,\omega) - F(x)|$ - непрерын. справа, поэтому $\sup_{x\in R} |F_n(x,\omega) - F(x)| \ge \sup_{x\in Q} |F_n(x,\omega) - F(x)|$

Тогда $D_n(x) = \sup_{x\in Q} |F_n(x,\omega) - F(x)|$ - есть sup счетного мн-ва случ. величин $D_n(\omega)$ - тоже СВ.

Пусть $N \in N$ Посмотрим $\forall k = 1 \dots N-1 \longrightarrow X_{k,N} = min\{x : F(x) \ge k/n\}$ Для удобства положим $x_{0,N} = -\infty, x_{N,N} = +\infty$ Пусть $x \in [x_{k,N}, x_{k+1,N}]$ $F_n(x) - F(x) \le F_n(x_{k+1,N} - 0) - F(x_{k,N}) = (F_n(x_{k+1,N} - 0) - F(x_{k+1,N} - 0)) + (F(x_{k+1,N} - 0) - F(x_{k,N}))$ Аналогично,... $F_n(x) - F(x) \ge F_n(x_{k,N}) - F(x_{k,N}) + F(x_{k,N}) - F(x_{k+1,N} - 0) \ge F_n(x_{k,N}) - F(x_{k,N}) - 1/N$ Т.о. $\forall x \in R \longrightarrow |F_n(x) - F(x)| \le \max_{0\le k\le N-1, 1\le l\le N}\{F_n(x_{k+1,N} - 0) - F(x_{k+1,N} - 0)|, |F_n(x_{k,N})$