1. Теория Рамсея

Предложение 1. *Среди любых 6 человек либо некоторые 3 знакомы друг с другом, либо некоторые 3 попарно незнакомы.*

Определение 1. Число Рамсея $R(s,t)$, где $s,t \in \mathbb{N}$

$R(s,t) = \min\{n \in N$: при $\forall$ раскраске ребер K_n в красный и синий цвета либо $\exists K_s \subseteq K_n$, у которого все ребра красные, либо $\exists K_t \subseteq K_n$ у которого все ребра синие$\}$

$R(s,t) = \min\{n \in N \forall G = (V,E), |V| = n$, либо $\alpha(G) \geq s$, либо $\omega(G) \geq t\}$

$R(1,t) = 1$ $R(2,t) = t$

Теорема 1. (Рамсея) $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1), \forall s,t \geq 2.$

Доказательство. Пусть $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Нам нужно доказать, что при любой раскраске либо есть красный K_s, либо есть синий K_t. Зафиксируем произвольную расраску ребер K_n в красный и синий цвета. Зафиксируем произвольную вершину графа $x \in K_n$. Либо красных ребер, выходящих из x не меньше $R(s,t-1)$, либо синих ребер - не меньше $R(s-1,t)$. Пусть красных ребер $\geq R(s-1,t)$. Рассмотрим множество вторых концов этих ребер. В K_n внутри A проведены тоже все возможные ребра. $|A| \geq R(s-1,t)$. Значит в А есть либо K_{s-1} красная, либо K_t синяя. В случае, если есть красная K_{s-1} можно легко достроить красную K_s, в случае синей K_t все доказано. □

Следствие 1. $R(s,t) \leq C_{s+t-2}^{s-1} = C_{s+t-2}^{t-1}$

Доказательство. По индукции по s и t.

База: $R(1,t) = 1, R(s,1) = 1$

$$C_{1+t-2}^{1-1} = C_{t-1}^{0} = 1$$

Шаг:

$$R(s,t) \leq C_{s-1+t-2}^{s-2} + C_{s+t-1-2}^{s-1} = C_{s+t-2}^{s-1}$$

Следствие 2. (из следствия)

$$R(s,s) \leq C_{2s-2}^{s-1}$$

Следствие 3. (из следствия из следствия)

$$R(s,s) \leq \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi(s-1)}}(1+o(1)) = (4+o(1))^s$$

Теорема 2. *Пусть n и $s \in \mathbb{N}$ таковы, что $C_n^s 2^{q-C_s^2} < 1$. Тогда $R(s,s) > n$.*

Доказательство. Нам нужно доказать существование раскраски ребер K_n в красный и синий цвета, при которой все $K_s \subset K_n$ неодноцветные. Рассмотрим случайную раскраску χ ребер у K_n. Всего ребебер $C_n^2 \Rightarrow$ есть различных раскрасок $2^{C_n^2}$

$$P(\chi) = 2^{-C_n^2}$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$\Omega = \{\chi\}, |\Omega| = 2^{C_n^2}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

$S_1, \ldots, S_{C_n^2}$ - все K_s в K_n

$A_i = \{\chi \in \Omega : S_i$ одноцв. в $\chi\}, A_i \in F$

$$P(A_i) = \frac{2 * 2^{C_n^2 - C_s^2}}{2^{C_n^2}} = 2^{1-C_s^2}$$

$$P(\cup_{i=1}^{C_n} A_i \le C_n^2 * 2^{1-C_s^2} < 1)$$
$$P(\neg \cup A_i) > 0$$

□

Следствие 4. $R(s,s) \ge \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$

Доказательство.
$$n := \left[\frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}\right]^n \le \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$$
$$C_n^s \le \frac{n^s}{s!} \le \frac{s^s}{e^s 2^{s/2}} \frac{2^{s^2/2}}{s!}$$
$$C_n^s 2^{1-C_s^2} \le \frac{s^s 2^{s^2/2}}{e^s 2^{3/2} s!} * 2^{1-\frac{s^2-s}{2}} = \ldots < 1$$

Самое лучшее, что известно:

1. $R(s,s) \ge \frac{s\sqrt{2}}{e} 2^{s/2}(1+o(1))$
2. $R(s,s) \le 4^s e^{-\gamma \frac{ln^2 s}{ln ln s}}$

Теорема 3. (Франк, Уилсон) $R(s,s) \ge (e^{1/4} + o(1))^{\frac{ln^2 s}{ln ln s}} \approx e^{1/4 \frac{ln^2 s}{ln ln s}}$

Доказательство. Хотим явно указать некоторую раскраску ребер K_n, $n = (e^1/4 + o(1))^{\frac{ln^2 s}{ln ln s}}$, при которой все K_s не одноцвенты. Это эквивалентно желанию явно указать такой граф $G = (V, E) : |V| = n$ и $\alpha(G) < s, w(G) < s$.

$$V = \{\neg x = (x_1, \ldots, x_{p^3}) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \ldots + x_{p^3} = p^2\}$$
$$E = \{\{x,y\} : (x,y) \equiv 0(p)\}$$
$$|V| = C_{p^3}^{p^2}$$

Лемма 1. $\alpha(G) \le (m+2)C_m^p$, $\omega(G) \le (m+2)C_m^p$

Доказательство. Рассмотрим произвольное независимое множество вершин
$$W = \{x_1, \cdots, x_s\} : \forall i \ne j < x_i, x_j > \ne 0(modp)$$
Возьмем произвольный $x \in V$ и построим полином
$$F_{\bar{x}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \cdots, y_m]$$
$$F_{\bar{x}}(y_1, \cdots, y_m) = F_x(y) = \prod_{i=1}^{p-1} (i - < x, y >)$$
Свойство:
$$F_{\bar{x}}(\bar{y}) \equiv 0(modp) \Leftrightarrow < \bar{x}, \bar{y} > \not\equiv 0(modp) \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$$

Рассмторим многочлены $F_{x_1}, \cdots, F_{x_s}$ (с волной). Эти многочлены линейно независимы над $(FIXME)Z_p$ $c_1 F_{x_1} + \cdots + c_s F_{x_s} = 0$ $\forall y \in V c_1 F_{x_1}(y) + \cdots + c_s F_{x_s}(y) = 0$ Возьмем $y = x_1$. $F_{x_1}(x_1) \ne 0(modp)$.

$< x_1, x_1 >= p^2 = 0(mod p)$ $F_{x_i}(x_1) = 0(mod p)$ $c_i = 0(mod p)$ Стало быть, многочлены линейно независимы, а значит их количество не больше размерности пространства $< F_{x_1}, \dots, F_{x_s} >$. В этом пространстве мономы: $1, y_i, y_i y_j, \cdots, y_{i_1}, \cdots y_{i_p}$. $s \leq \sum_{k=0}^{p-1} C_m^k < pC_m^p < (m+2)C_m^p$ Докажем теперь, что $\omega(G) \leq (m+2)C_m^p$. Рассмотрим произвольную $W = x_1, \cdots, x_s$ - клику в G: $\forall i \neq j < x_i, x_j >= 0(mod p)$ $< x_i, x_j >\in 0, p, 2p, \dots, p^2 - p$, мощностью p. $x \in V \to F_x(FIXME)R[y_1, \cdots, y_m]$ $F_x(y_=(< x, y >)(< x, y > -p)(< x, y > -2p) \cdots (< x, y > -(p^2 - p))$.

(тут было много текста...)

$R_k(s,t) = \min\{n \in N$ при люювой раскраске полного k-однородного гиперграфа на n вершинах в красный и синий цвета. либо найдется s-клика, в которой все ребра красны, либо t - синие$\}$

Теорема 4. $R_k(s,t) \leq R_{k-1}(R_k(s-1,t), R_k(s,t-1)) + 1$

Доказательство. Возьмем $n = R_{k-1}(R_k(s-1,t), R_k(s,t-1)) + 1$. Рассмотрим k-однородные гиперграфы на n вершинах. Зафиксируем раскраску ϕ. Раскраска ξ индуцирует раскарску ξ' ребер полного $(k-1)$ - однородного гиперграфа $H'\{x\}$ У H' не меньше $n-1$ вершин $\Rightarrow$ по определению чисел Рамсея либо $\exists$ множество A, $x \notin A$: все $(k-1)$-ребра в нем красные в ξ' и $|A| \geq R_k(s-1,t)$, либо $\exists$ множество B, $x \notin B \cdots$ Случаи аналогичные, рассмотрим только для A.

$|A| \geq R_k(s-1,t) \Rightarrow$ по определению числа Рамсея либо $\exists A_1 \subset A$, $|A_1| = s-1$, в котором все k-ребра красные в ξ, либо $\exists A_2 \subset A$, $|A_2| = t, \cdots$.

Все k-ребра красные в ξ, все $k-1$-ребра в A_1 красные в $\xi' \Rightarrow$ все k-ребра, получаемые из $(k-1)$-ребер в A_1, объединенных с x, кравсное в ξ. Других ребер не бывает.

2. Двудольные числа Рамсея

$b(k,k)$ - диагональное число Рамсея

$$b(k,k) \geq \frac{1}{e} k 2^{k/2} (1 + o(1))$$

Теорема 5. $b(m,k) \leq (1 + o(1)) 2^{k+1} \log k$

Определение 2. Пусть $G \subset H$. Плотностью G в H называется $\frac{|E(G)|}{|E(H)|}$

Вопрос: Пусть даны некоторые $m, n \in \mathbb{N}$. Расммотрим $K_{m,n}$ и возьмем некоторое $p \in (0,1)$. При каких условиях на $r, s \in \mathbb{N}$ мы можем гарантировать, что в $\forall$ подграфе G графа $K_{m,n}$, имеющем плотность не менее p, содержащимся $K_{r,s}$.

Лемма 2. (псевдо-)

Если m значительно больше, чем r^2, а n чуть больше, чем $p^{-r}(s-1)$, то ответ на поставленный вопрос положительный.

Лемма 3. *Пусть $\omega(n)$ - произвольная функция: $\omega(r) \to \infty (r \to \infty)$. Пусть $\epsilon \in (0,1)$. Тогда $\exists \phi = \phi(r, \omega, \epsilon)$.*

$\phi \to 0 (r \to 0) \forall r, s, p \in (\epsilon, 1) \forall m \geq r^2 \omega(r) \forall n \geq (1 + \phi) p^{-r} (s-1)$.

$\forall G \subset K_{m,n} : G \geq p$ *в* G *есть* $K_{r,s}$.

Доказательство. Зафиксируем $\omega, \epsilon \in (0,1), r, s, p, m \geq r^2 \omega(r)$. Нам нужно доказать, что для наличия $K_{r,s}$ в произвольном G плотности $\geq p$ достаточно, чтобы $n \geq (1+\phi) p^{-r}(s-1)$ с некоторым $\phi \to 0 (r \to 0)$. Предположим на минуту, что в G нет $K_{r,s}$. Подсчитаем, сколько в этом графе $K_{r,1}$. Это число $\leq C_m^r (s-1)$.

Через $d_1, \cdots, d_n$ обозначим степени вершин в нижней грани G. Количество $K_{r,1}$ в G равно $\sum_{i=1}^n C_{d_i}^r$. Итак, $\sum_{i=1}^n C_{d_i}^r \leq C_m^r (s-1)$. Если же $\sum_{i=1}^n C_{d_i}^r > C_m^r (s-1)$, то $K_{r,s}$ есть в G.

Предложение 2.

$$\frac{C_{d_i}x + \dots + C_{d_n}^x}{n} \geq C^x_{\frac{d_1+\dots+d_n}{n}}$$

Следовательно,

$$nC^r_{\frac{d_1+\dots+d_n}{n}} > C^r_m(s-1)$$

$$nC^r_{mp} > C^r_m(s-1)$$

$$n > \frac{c^r_m}{c_{mp}r}(s-1)$$

$K^2 = o(n) \Rightarrow C_n^k\ \frac{n^k}{k!}$.
$C^r_m \sim \frac{m^r}{r!}; p \geq \epsilon \Rightarrow mp \geq r^2w'(r) \to \infty$
$C^r_{mp} \sim \frac{(mp)^r}{r!}$

Доказательство. (теоремы)
$n = (1+o(1))2^{k+1}\log k$. Нужно доказать, что $b(k,k) \leq n$. Рассмотрим $K_{n,n}$ и зафиксируем раскраску χ его ребер в красный и синий цвета. Докажем, что в этой раскраске есть одноцветный $K_{k,k}$ (ка-ка-ка!). В соотвествии с этой раскраской покрасим вершины из нижней доли - каждую вершину красим в тот цвет, в которой окрашено не менее половины выходящих из этой вершины ребер. При равенстве синих и красных красим в красный.

M - верхняя доля, N - нижняя. N_R, N_B - красные и синие вершины из N соответственно.

Предположим, что $|N_R| \geq |N_B|$ (второй случай аналогично. В этом случае ищем красный $K_{k,k}$).

$m_l = n$, $M_l = M$. Индекс l - отсылка к лемме.

$n_l = |N_R| \geq n/2$, $N_l = N_R$

K_{m_l,n_l}, G_l - подграф, состоящий из всех красных ребер в раскраске χ.

$p_l \geq 1/2$.

$r_l = k - 2\log k$, $s_l = k^2\log k$.

Чтобы лемма была применима, надо:

1. $m_l \leq r_l^2 w\omega(r_l)$
2. $n_l \geq (1+o(1))p_l^{-r_l}(s_l - 1)$

Для первого условия: $n = (1+o(1))2^{k+1}\log k \geq (k-2\log k)^2\omega(r_l)$.

Для второго: $2^k(\log k)(1+o(1)) \geq (1+o(1))2^{r_l}(k^2\log k - 1)$, равное $2^k(\log k)(1+o(1)) \geq (1+o(1))2^{k-2\log k}(k^2\log k - 1)$

Раз оба условия выполнены, по лемме следует, что G_l содержит K_{r_l,s_l}.

Когда лемму будем применять второй раз, будем юзать индекс ll.

$m_{ll} = k^2\log k,\ \ M_{ll} = S_l,\ \ N_{ll} = M$
$\{$ верхние вершины K_{r_l,s_l} $\}$, $n_{ll} = n - (k - 2\log k)$, G_{ll} - подграф, состояния из красных ребер, $p_{ll} \geq \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}$, $r_{ll} = K$, $s_{ll} = 2\log k$.

Лемма применима, если

1. $m_{ll} \geq r_{ll}^2\omega(r_{ll})$,
2. $n_{ll} \geq (1+o(1))p_{ll}^{-r_{ll}}(s_{ll} - 1)$

Проверка первого: $k^2\log k \geq k^2\omega(r_{ll})$

Проверка второго: $n - k + 2\log k \geq (1+o(1))(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^k})^{-k}(2\log k - 1)$. Правая часть $\sim 2^k 2\log k = 2^{k+1}\log k$, а левая $\sim n$.