1. Теория Рамсея

Утверждение Среди $\forall$ 6 чел. либо некоторые 3 знакомы друг с другом, либо некоторые 3 попарно незнакомы.
Определение

$$s, t \in N$$

$R(s,t) = \min\{n \in N$: при $\forall$ раскраске ребер K_n в кр. и синий цвета либо $\exists K_s \subseteq K_n$, у которого все ребра кр., либо $\exists K_t \subseteq K_n$, - синие Эквивалентное определение числа Рамсея $R(s,t) = \min\{n \in N \forall G = (V,E), |V| = n$, либо $\alpha(G) \geq s$, либо $\omega(G) \geq t\}$

$$R(1,t) = 1$$

$$R(2,t) = t$$

Существует раскраска, в которой нет ни красного K_2, ни синего K_t

Th. $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1), \forall s,t \geq 2$ док-во: Пусть $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Нам нужно док., что при любой раскраске либо есть красный K_s, либо есть синий K_t. Зафиксируем произвольную расраску ребер K_n в кр. и синий цвета. Зафиксируем произвольную вершину графа $x \in K_n$.
Утв.Либо красных ребер, выходящих из $x \geq R(s,t-1)$, либо синих ребер $\geq R(s-1,t)$
Пусть красных ребер $\geq R(s-1,t)$. Рассмотрим множество вторых концов этих ребер. В K_n внутри A проведены тоже все возможные ребра. $|A| \geq R(s-1,t)$. Значит в А есть либо K_{s-1} красная, либо K_t синяя. В случае, если есть красная K_{s-1} можно легко достроить красную K_s, в случае синей K_t все доказано.

Следствие $R(s,t) \leq C_{s+t-2}^{s-1} = C_{s+t-2}^{t-1}$ Доказательство По индукции.
База: $R(1,t) = 1, R(s,1) = 1$

$$C_{1+t-2}^{1-1} = C_{t-1}^{0} = 1$$

Шаг:

$$R(s,t) \leq C_{s-1+t-2}^{s-2} + C_{s+t-1-2}^{s-1} = C_{s+t-2}^{s-1}$$

Следствие доказано.
Следствие из следствия

$$R(s,s) \leq C_{2s-2}^{s-1}$$

Следствие из сл-я из сл-я

$$R(s,s) \leq \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi(s-1)}}(1 + o(1)) = (4 + o(1))^s$$

ThПусть n и s таковы, что $C_n^s 2^{q - C_s^2} < 1$. Тогда $R(s,s) > n$ Док-во Нам нужно док-ть существование раскраски ребер K_n в кр. и синий цвета, при которой все $K_s \subset K_n$ неоднoцв. Рассм. случ. раскраску χ ребер у K_n. $C_n^2 \to$ есть различных раскрасок $2^{C_n^2}$

$$P(\chi) = 2^{-C_n^2}$$

$S_1, \ldots, S_{C_n^2}$ - все K_s в K_n
$A_i = \{\chi \in \Omega : S_i$ одноцв. в $\chi\}, A_i \in F$

$$P(A_i) = \frac{2 * 2^{C_n^2 - C_s^2}}{2^{C_n^2}} = 2^{1 - C_s^2}$$

$$P(\cup_{i=1}^{C_n} A_i \leq C_n^2 * 2^{1 - C_s^2} < 1)$$

$$P(\neg \cup A_i) > 0$$

Теорема доказана.

Следствие$R(s,s) \geq \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$
Док-во

$$n := [\frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}]^n \leq \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$$

$$C_n^s \le n^s/s! \le \frac{s^s}{e^s 2^{s/2}} \frac{2^{s^2/2}}{s!}$$

$$C_n^s 2^{1-C_s^2} \le \frac{s^s 2^{s^2/2}}{e^s 2^{3/2} s!} * 2^{1-\frac{s^2-s}{2}} = \ldots < 1$$

Самое лучшее, что известно:

1)

$$R(s,s) \ge \frac{s\sqrt{2}}{e} 2^{s/2}(1+o(1))$$

2)

$$R(s,s) \le 4^s e^{-\gamma \frac{ln^2 s}{lnlns}}$$

Th. (Франк, Уилсон)

$R(s,s) \ge (e^{1/4} + o(1))^{\frac{ln^2 s}{lnlns}} \approx e^{1/4 \frac{ln^2 s}{lnlns}}$

Док-воХотим явно указать нек. раскраску ребер $K_n, n = (e^1/4 + o(1))^{\frac{ln^2 s}{lnlns}}$, при которой все K_s не одноцвенты. Это эквивалентно желанию явно указать такой граф $G = (V, E) : |V| = n$ и $\alpha(G) < s, w(G) < s$.

$$V = \{\neg x = (x_1, \ldots, x_{p^3}) : x + i \in 0, 1, x_1 + \ldots + x_{p^3} = p^2\}$$

$$E = \{\{x, y\} : (x, y) \equiv o(p)\}$$