1 Линейное однородное уравнение с переменными коэффициентами.

В этой главе мы будем изучать свойства решений линейных уравнений 2го порядка

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, t \in (a, b) \qquad 6.1$$

ниже предполагается, что $p(t) \in C^1(a, b), q(t) \in C(a, b)$

1.1 Теорема Штурма

Лемма Пусть $x(t), t \in (a, b)$ - решение уравнения (6.1); Тогда мн-во его нулей на (содержащихся в (a, b)) любых отрезках $[t_1, t_2] \subset (a, b)$ конечно.

Доказательство

Если $x(t), t \in (a, b)$ - решение уравнения (6.1), то $x(t) \in C^1(a, b)$
Предположим, противное, т.е. решение $x(t)$ имеет бесконечное число нулей на $[t_1, t_2]$.
Выберем сходящуюся посл-ть нулей $\{t_k\}, t_k \to t_0, k \to \infty$ В силу непрерывности решения $x(t)$ мы имеем $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x(t_0) = 0$, т.к. $\forall k \to x(t_k) = 0$

$$x'(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t_k \to t_0} \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k - t_0} = 0$$

$$x(t_0) = x'(t_0) = 0$$

По теореме о существовании и единственности решения ЗК - единственное решение $x(t) \equiv 0, t \in [t_1, t_2]$ - противоречие.

Следствие

Если нетривиальное решение $x(t) \in (a, b)$ имеет конечное число нулей, то их можно перенумеровать. Назовем t_1, t_2 последовательными нулями решения $x(t)$, если $x(t)$ не имеет нулей на (t_1, t_2)
Произведем замену функции $x(t)$ в уравнении (6.1) на ф-ию $y(t)$ согласно формуле

$$x(t) = y(t)e^{-1/2\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \qquad 6.2$$

В результате подстановки (6.2) получим уравнение для $y(t)$:

$$y'' + Q(t)y(t) = 0, t \in (a, b) \qquad 6.3$$

$$Q(t) = q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2} \in C(a, b)$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' + Q_1(t)y = 0 \qquad 6.4$$

$$z'' + Q_2(t)z = 0 \qquad 6.5$$

$$Q_2(t), Q_1(t) \in C(a, b), t \in (a, b)$$

Th. Штурма о сравнении

Пусть $Q_1(t) \leq Q_2(t), t \in (a, b)$, t_1, t_2 - два последовательных нуля решения $y(t)$ уравнения (6.4).

Тогда любое решение $z(t)$ уравнения (6.5) имеет хотя бы 1 ноль на $[t_1, t_2]$.

Доказательство

По условию Th. решение $y(t)$ уравнения (6.4) на (t_1, t_2) не меняет знак.

Предположим обратное: решение $z(t)$ уравнения (6.5) не имеет нулей на $[t_1, t_2]$ и будем считать, что $z(t) > 0, t \in [t1, t2]$

Умножим уравнение (6.4) на $z(t)$, а уравнение (6.5) на $y(t)$ и вычтем одно из другого, тогда

$$zy'' - yz'' = (Q_2(t) - Q_1(t))yz \qquad 6.6$$

Нетрудно видеть, что левая часть (6.6) преставима в виде

$$zy'' - yz'' = d(zy' - yz')$$

Тогда

$$d/dt(zy' - yz') = (Q_2 - Q_1)yz \qquad 6.7$$

Проинтегрируем (6.7) на $[t_1, t_2]$, получим

$$(zy' - yz')_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (Q_2(t) - Q_1(t))yzdt$$

Т.к. $y(t_1) = y(t_2) = 0$, то мы получим