并行计算

第十一章 快速傅里叶变换

11.1 快速傅里叶变换

11.1.1 离散傅里叶变换(DFT)

11.1.2 DFT的顺序代码

11.1.3 串行FFT递归算法

11.1.4 串行FFT非递归算法

11.2 并行FFT算法

离散傅里叶变换(DFT)

- 定义

给定向量$A=(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})^T$,DFT将A变换为$B=(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})^T$

即 $$b_j=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\omega^{kj} \qquad 0\le j\le n-1$$

这里$\omega=e^{2\pi i/n}$为n次单位元根，$i=\sqrt{-1}$; 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

第十一章 快速傅里叶变换

11.1 快速傅里叶变换

11.1.1 离散傅里叶变换(DFT)

11.1.2 DFT的顺序代码

11.1.3 串行FFT递归算法

11.1.4 串行FFT非递归算法

11.2 并行FFT算法

DFT的顺序代码

- 代码1

```
for j=0 to n-1 do
    b[j]=0
    for k=0 to n-1 do
        b[j]=b[j]+ω^{k*j}a[k]
    end for
end for
```

注：代码1需要计算ω^{k*j}

- 代码2

```
w=ω^0
for j=0 to n-1 do
    b[j]=0, s=ω^0
    for k=0 to n-1 do
        b[j]=b[j]+s*a[k]
        s=s*w
    end for
    w=w*ω
end for
```

代码2的复杂度为$O(n^2)$

第十一章 快速傅里叶变换

11.1 快速傅里叶变换

11.1.1 离散傅里叶变换(DFT)

11.1.2 DFT的顺序代码

11.1.3 串行FFT递归算法

11.1.4 串行FFT非递归算法

11.2 并行FFT算法

串行FFT递归算法（1）

- **蝶式递归计算原理**

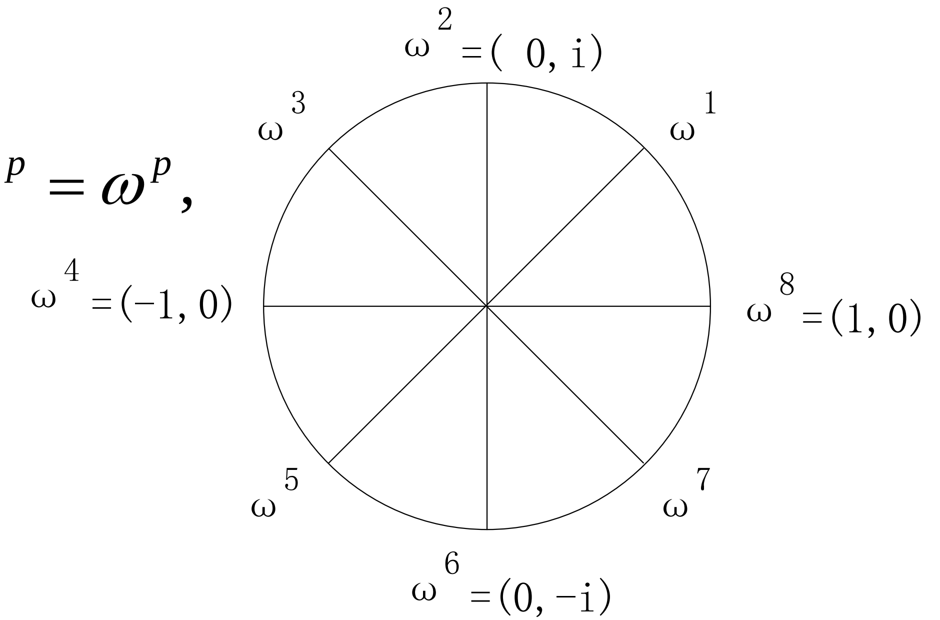
令 $\tilde{\omega}=e^{2\pi i/(n/2)}$ 为n/2次单位元根，则有 $\tilde{\omega}=\omega^2$.

将b向量的偶数项 $(b_0,b_2,\ldots,b_{n-2})^T$ 和奇数项$(b_1,b_3,\ldots,b_{n-1})^T$

分别记为 $(b'_0,b'_1,\ldots,b'_{\frac{n}{2}-1})^T$和 $(b''_0,b''_1,\ldots,b''_{\frac{n}{2}-1})^T$

注意推导中反复使用

$$\omega^n=1,\omega^{n/2}=-1,\omega^{ln}=1,\omega^{sn+p}=\omega^p,$$



串行FFT递归算法（2）

偶数时：$b'_l = b_{2l} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2lk} a_k$

$$= a_0 + \omega^{2l} a_1 + \omega^{4l} a_2 + \cdots + \omega^{2l\left(\frac{n}{2}-1\right)} a_{\frac{n}{2}-1} +$$

$$a_{\frac{n}{2}} + \omega^{2l} a_{\frac{n}{2}+1} + \omega^{4l} a_{\frac{n}{2}+2} + \cdots + \omega^{2l\left(\frac{n}{2}-1\right)} a_{n-1}$$

$$= (a_0 + a_{\frac{n}{2}}) + \omega^{2l}(a_1 + a_{\frac{n}{2}+1}) + \omega^{4l}(a_2 + a_{\frac{n}{2}+2}) +$$

$$\cdots + \omega^{2l\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-1})$$

$$= (a_0 + a_{\frac{n}{2}}) + \tilde{\omega}^{l}(a_1 + a_{\frac{n}{2}+1}) + \tilde{\omega}^{2l}(a_2 + a_{\frac{n}{2}+2}) +$$

$$\cdots + \tilde{\omega}^{l\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \tilde{\omega}^{kl}(a_k + a_{\frac{n}{2}+k}) \qquad l = 0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1$$

因此,向量$(b_0, b_2, \ldots, b_{n-2})^T$是$(a_0 + a_{\frac{n}{2}}, a_1 + a_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, a_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-1})^T$的$DFT$

串行FFT递归算法（3）

奇数时：$b_l'' = b_{2l+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(2l+1)k} a_k$

$$= a_0 + \omega^{2l+1} a_1 + \omega^{2(2l+1)} a_2 + \cdots + \omega^{\left(\frac{n}{2}-1\right)(2l+1)} a_{\frac{n}{2}-1} +$$

$$\omega^{\frac{n}{2}(2l+1)} a_{\frac{n}{2}} + \omega^{\left(\frac{n}{2}+1\right)(2l+1)} a_{\frac{n}{2}+1} + \cdots + \omega^{(n-1)(2l+1)} a_{n-1}$$

$$= a_0 + \omega^{2l} \omega a_1 + \omega^{4l} \omega^2 a_2 + \cdots + \omega^{2l\left(\frac{n}{2}-1\right)} \omega^{\frac{n}{2}-1} a_{\frac{n}{2}-1} -$$

$$a_{\frac{n}{2}} - \omega^{2l} \omega a_{\frac{n}{2}+1} - \cdots - \omega^{2l\left(\frac{n}{2}-1\right)} \omega^{\frac{n}{2}-1} a_{n-1}$$

$$= (a_0 - a_{\frac{n}{2}}) + \omega^{2l} \omega (a_1 - a_{\frac{n}{2}+1}) + \omega^{4l} \omega^2 (a_2 - a_{\frac{n}{2}+2}) + \cdots + \omega^{2l\left(\frac{n}{2}-1\right)} \omega^{\frac{n}{2}-1} (a_{\frac{n}{2}-1} - a_{n-1})$$

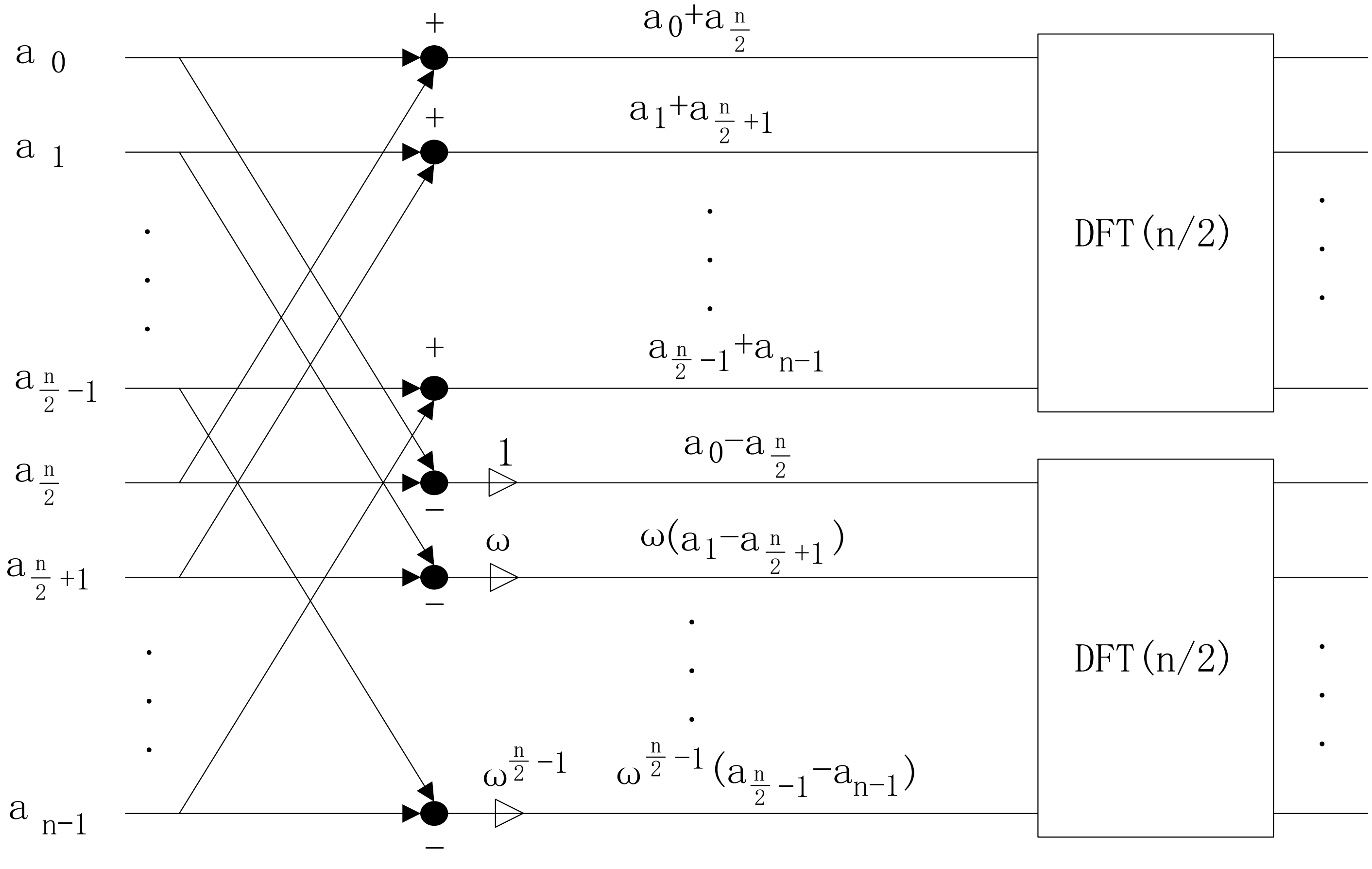
$$= (a_0 - a_{\frac{n}{2}}) + \tilde{\omega}^{l} \omega (a_1 - a_{\frac{n}{2}+1}) + \tilde{\omega}^{2l} \omega^2 (a_2 - a_{\frac{n}{2}+2}) + \cdots + \tilde{\omega}^{l\left(\frac{n}{2}-1\right)} \omega^{\frac{n}{2}-1} (a_{\frac{n}{2}-1} - a_{n-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \tilde{\omega}^{kl} \omega^k (a_k - a_{\frac{n}{2}+k}) \qquad l = 0, 1, \cdots, \frac{n}{2}-1$$

因此，向量$(b_1, b_3, \ldots, b_{n-1})^T$是$((a_0 - a_{\frac{n}{2}}), \omega(a_1 - a_{\frac{n}{2}+1}), \ldots, \omega^{\frac{n}{2}-1}(a_{\frac{n}{2}-1} - a_{n-1}))^T$的$DFT$

串行FFT递归算法（4）

- FFT的蝶式递归计算图(由计算原理推出)



串行FFT递归算法（5）

特别地，n=8的FFT蝶式计算图(展开的)

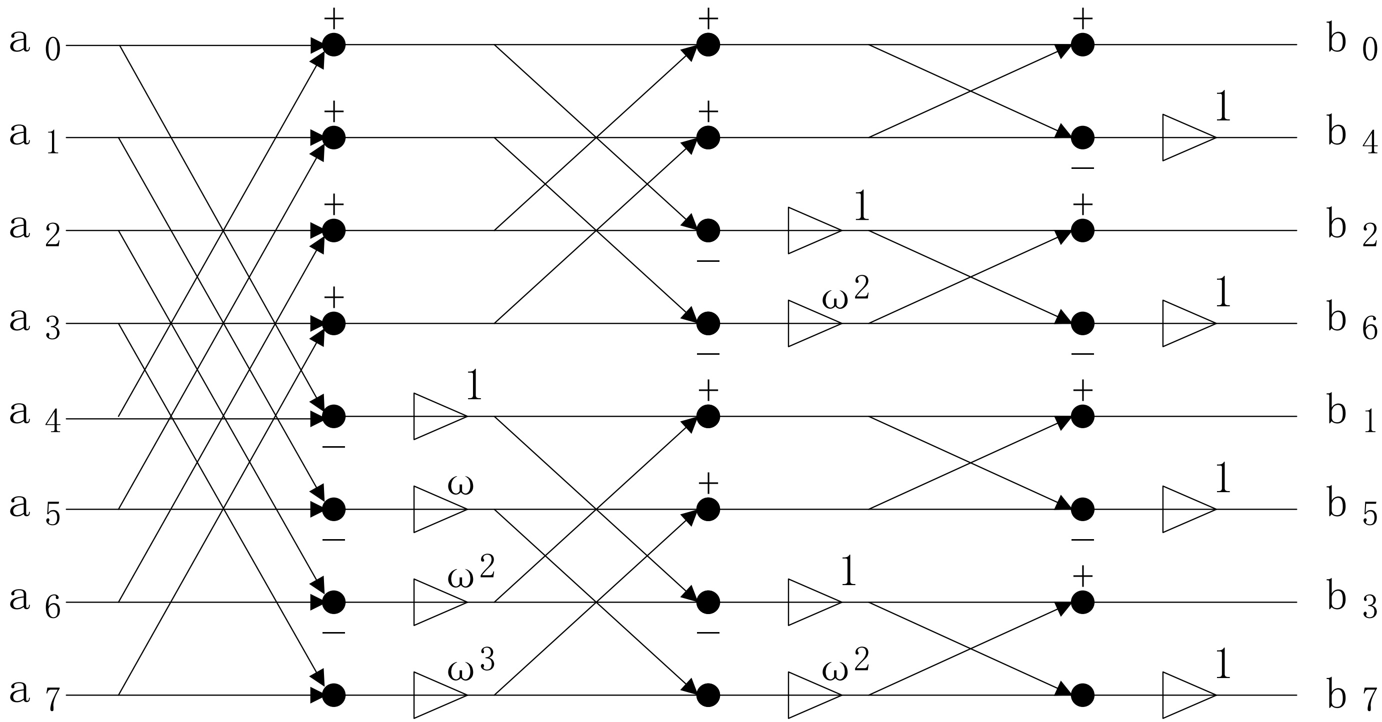


图11.4

串行FFT递归算法（6）

- SISD上的FFT分治递归算法

输入: $A=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$; 输出: $B=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$

Procedure RFFT(A, B)

begin

  if $n=1$ then $b_0=a_0$ else

    (1)RFFT($a_0,a_2,\cdots,a_{n-2}$, $u_0,u_1,\cdots,u_{n/2-1}$)

    (2)RFFT($a_1,a_3,\cdots,a_{n-1}$, $v_0,v_1,\cdots,v_{n/2-1}$)

    (3)$z=1$

    (4)for $j=0$ to $n-1$ do

      (4.1)$b_j=u_{j \bmod n/2}+zv_{j \bmod n/2}$

      (4.2)$z=z\omega$

    endfor

  endif

end

注: (1)算法时间复杂度 $t(n)=2t(n/2)+O(n)$

解得 $t(n)=O(n\log n)$

(2)算法原理?

第十一章 快速傅里叶变换

11.1 快速傅里叶变换

11.1.1 离散傅里叶变换(DFT)

11.1.2 DFT的顺序代码

11.1.3 串行FFT递归算法

11.1.4 串行FFT非递归算法

11.2 并行FFT算法

串行FFT非递归算法（1）

- **蝶式计算示例**

当$n=2$时，$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = a_0 + a_1 \\ b_1 = a_0 - a_1 \end{cases}$

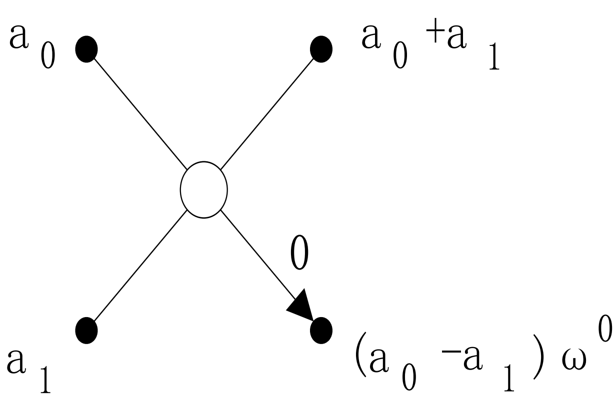
当$n=4$时，$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -1 & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -1 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

对调b_1和b_2，$\Rightarrow$

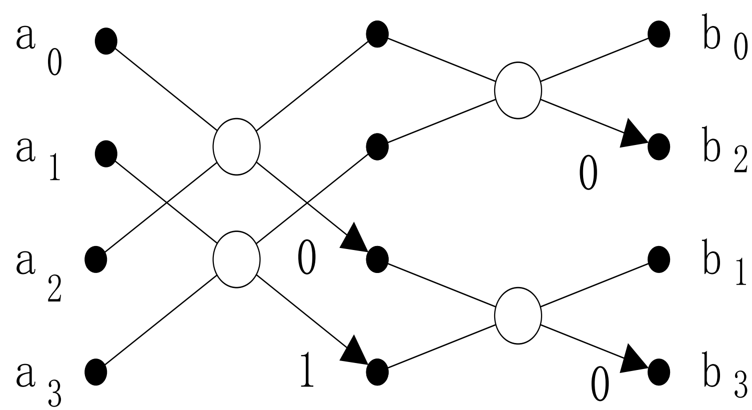
$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = (a_0 + a_2) + (a_1 + a_3) \\ b_2 = (a_0 + a_2) - (a_1 + a_3) \\ b_1 = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)\omega \\ b_3 = (a_0 - a_2) - (a_1 - a_3)\omega \end{cases}$$

串行FFT非递归算法（2）

- **蝶式计算流图**

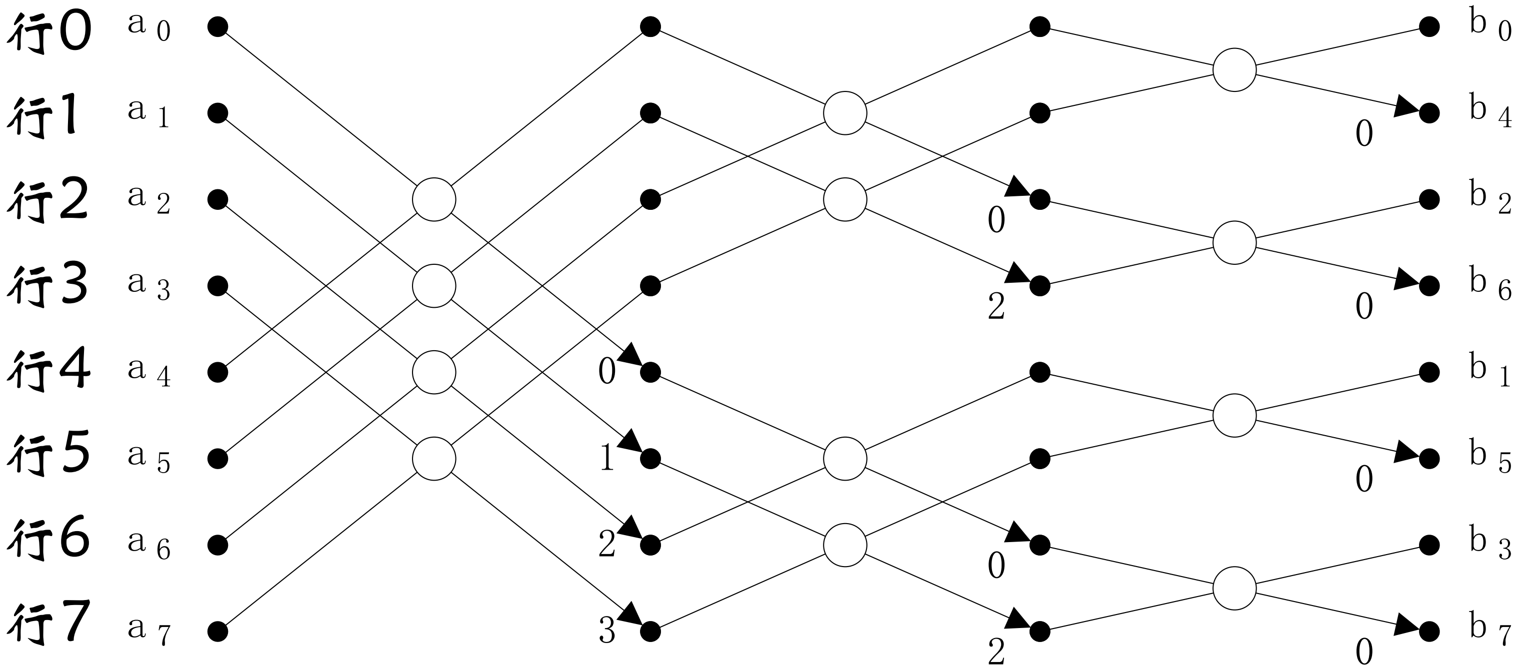


(a)



(b)

串行FFT非递归算法（3）



如: $b_6=[(a_0+a_4)-(a_2+a_6)]-[(a_1+a_5)-(a_3+a_7)]\,\omega^2$

注: ①下行线结点处的权因子的确定问题;

②b_i的下标确定:取行号的位序反。如，行3: $3=(011)_2$ $==>(110)_2=6$, $==>$ 行3的输出为b_6

串行FFT非递归算法（4）

- 算法11.1(P266): SISD上FFT迭代算法

输入: $A=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$; 输出: $B=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$

Begin

(1)for $k=0$ to $n-1$ do $c_k=a_k$ endfor //初始化

(2)for $h=\log n-1$ to 0 do

for $k=0$ to $n-1$ do

(2.1)$p=2^h$ (2.2)$q=n/p$ (2.3)$z=\omega^{q/2}$ //先算出$z=\omega^1$,以后每次$z=z\times z$

(2.4)if (k mod p = k mod 2p) then //(i)和(ii)配对执行

(i) $c_k=c_k+c_{k+p}z$

(ii)$c_{k+p}=(c_k-c_{k+p})z^{k \bmod p}$

endif

endfor

endfor

(3)for $k=0$ to $n-1$ do $b_k=c_{r(k)}$ endfor //r(k)为k的位序反

End

算法时间复杂度：$T(n)=O(n\log n)$

如： n=8

$h=2,\ p=4,\ q=2,\ z=\omega^1$

$h=1,\ p=2,\ q=4,\ z=\omega^2$

$h=0,\ p=1,\ q=8,\ z=\omega^4$

第十一章 快速傅里叶变换

11.1 快速傅里叶变换

11.2 并行FFT算法

11.2.1 SIMD-MC^{2}上的FFT算法

11.2.2 SIMD-BF上的FFT算法

SIMD-MC^{2}上的FFT算法（1）

- 算法描述

  n个处理器组成$n^{1/2}\times n^{1/2}$的方阵，处理器以行主序编号

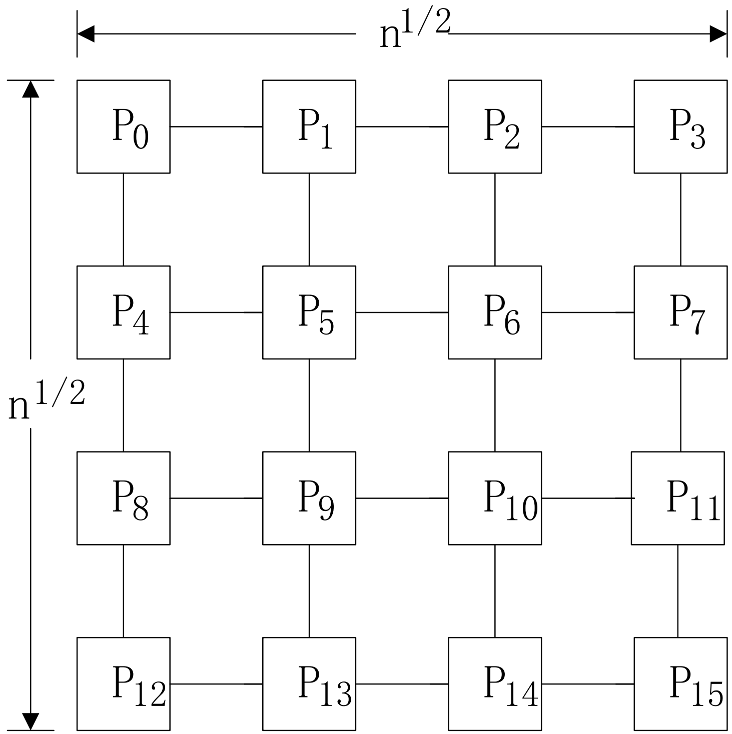


图11.5

SIMD-MC^{2}上的FFT算法（2）

- 算法11.3(P270): 输入: a_k处于P_k中; 输出b_k处于P_k中

如：n=16

h=3, p=8, q=2, $z=\omega^8$

h=2, p=4, q=4, $z=\omega^4$

h=1, p=2, q=8, $z=\omega^2$

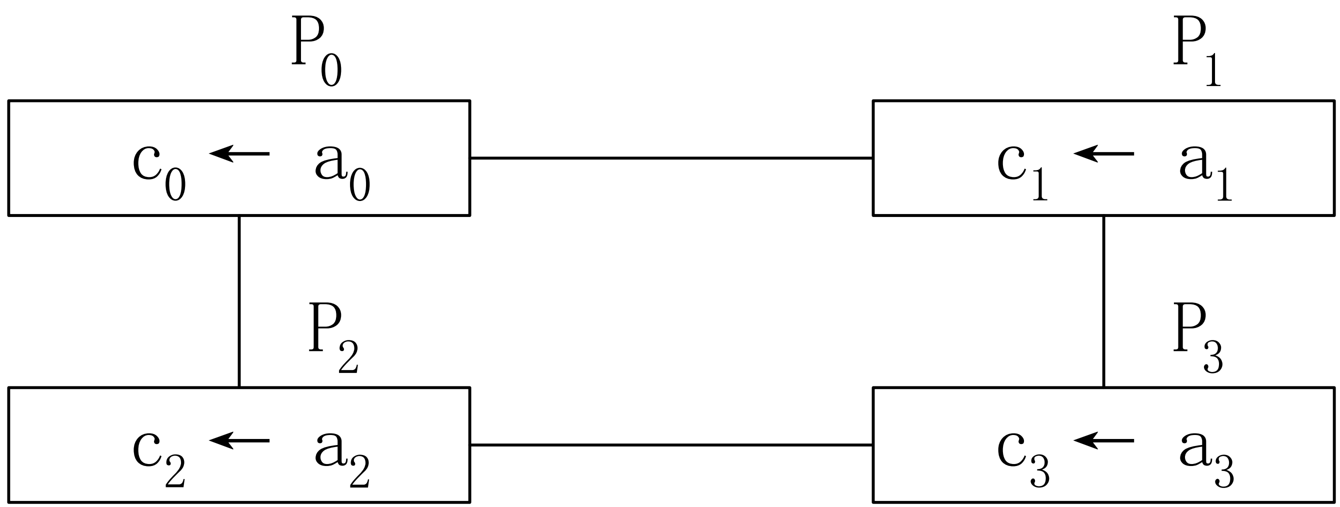
h=0, p=1, q=16, $z=\omega^1$

```
Begin
  (1)for k=0 to n-1 par-do c_k=a_k endfor
  (2)for h=logn-1 to 0 do
       for k=0 to n-1 par-do
         (2.1)p=2^h   (2.2)q=n/p   (2.3)z=ω^p  //先算出ω^(n/2),以后每次z=z^(1/2)
         (2.4)if ( k mod p = k mod 2p) then par-do  //满足条件的处理器同时做
               (i) c_k=c_k+c_(k+p) z^(r(k)modq)          //(i)和(ii)同时执行
               (ii)c_(k+p)=c_k-c_(k+p) z^(r(k)modq)
             endif
       endfor
     endfor
  (3)for k=0 to n-1 par-do b_k=c_(r(k)) endfor     //r(k)为k的位序反
End
```

SIMD-MC^{2}上的FFT算法（3）

- 示例：P272例11.5, n=4

第(1)步：



SIMD-MC^{2}上的FFT算法（4）

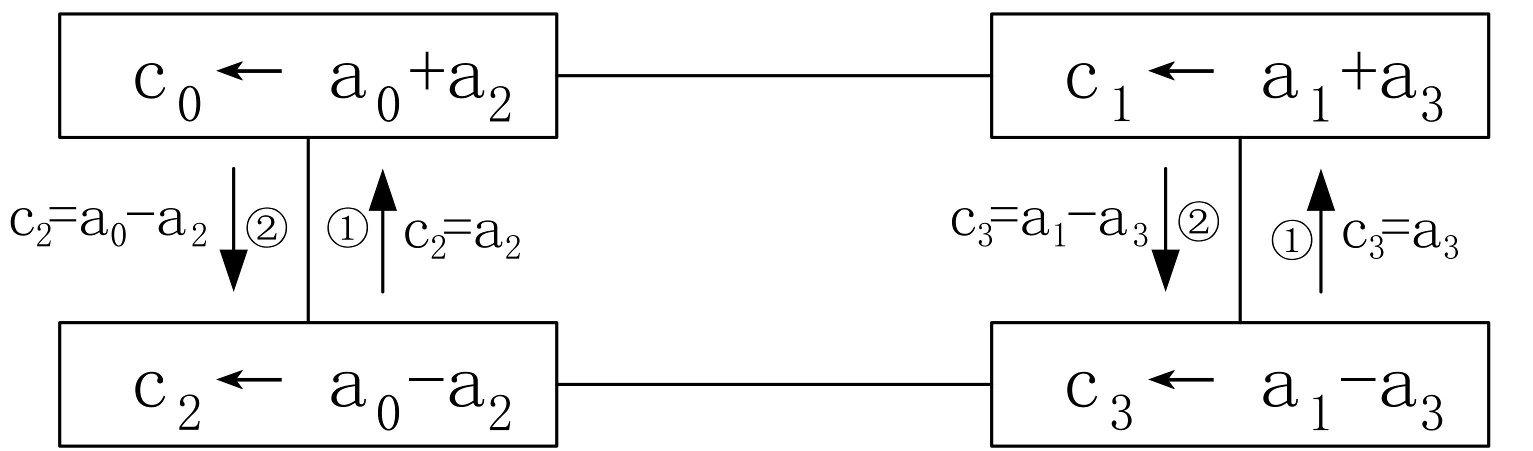
第(2)步：

第1次迭代(h=1): $p=2$, $q=2$, $z=\omega^2$

满足k mod 2 = k mod 4的处理器为P_0和P_1，同时计算

P_0: $c_0=c_0+(\omega^2)^0c_2=a_0+a_2$　　P_1: $c_1=c_1+(\omega^2)^0c_3=a_1+a_3$

$c_2=c_0-(\omega^2)^0c_2=a_0-a_2$　　$c_3=c_1-(\omega^2)^0c_3=a_1-a_3$



SIMD-MC^{2}上的FFT算法（5）

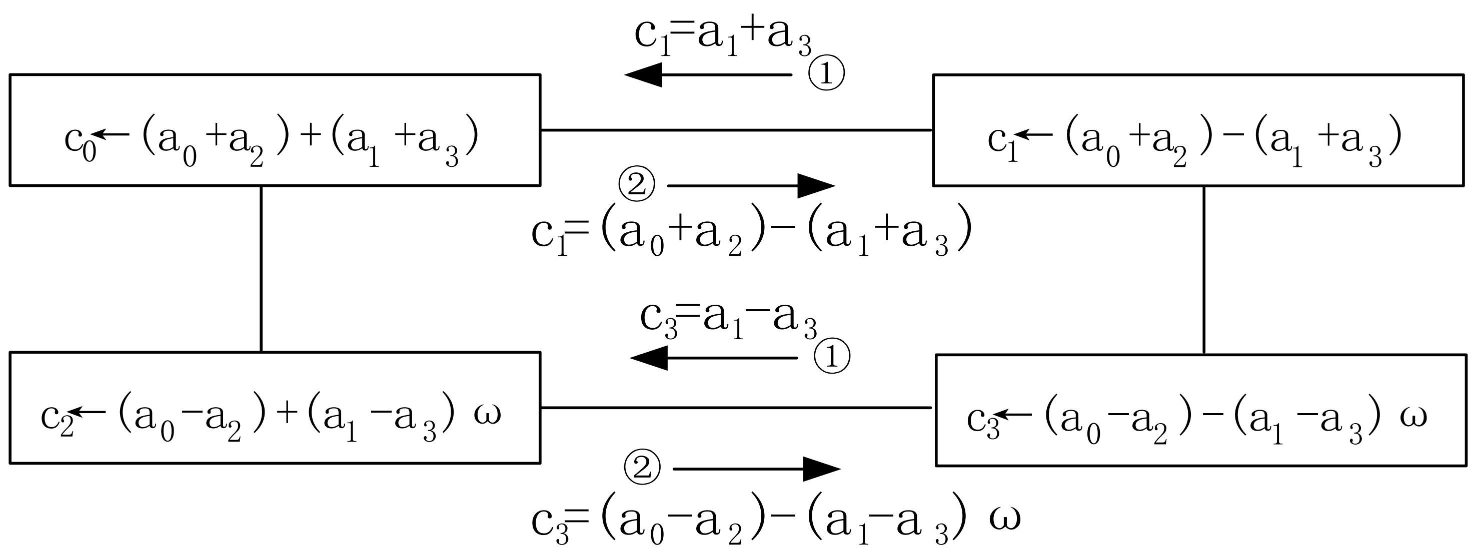
第(2)步：

第2次迭代(h=0): p=1, q=4, z= ω

满足k mod 1 = k mod 2的处理器为P_0和P_2, 同时计算

P_0: $c_0=c_0+\omega^0 c_1=(a_0+a_2)+(a_1+a_3)$ P_2: $c_1=c_1+\omega^1 c_3=(a_0+a_2)+(a_1+a_3)\omega$

$c_1=c_0-\omega^0 c_1=(a_0+a_2)-(a_1+a_3)$ $c_3=c_1-\omega^1 c_3=(a_0+a_2)+(a_1+a_3)\omega$



SIMD-MC^{2}上的FFT算法（6）

第(3)步: $b_0=c_0, b_1=c_2, b_2=c_1, b_3=c_3$

- 算法分析
  - 计算时间: $t_{comp}=O(\log n)$
  - 选路时间: $t_{routing}$: 只涉及(2.4)和(3)

(2.4): $O(n^{1/2})$

(3): $O(n^{1/2})$

综上，当n较大时$t(n)=O(n^{1/2})$

第十一章 快速傅里叶变换

11.1 快速傅里叶变换

11.2 并行FFT算法

11.2.1 SIMD-MC^{2}上的FFT算法

11.2.2 SIMD-BF上的FFT算法

SIMD-BF上的FFT算法（1）

- 蝶形网络
  - 处理器布局

有k+1层，每层有$n=2^k$个处理器，共有$n(1+\log n)$个处理器

第r行第i列的处理器记为$P_{r,i}$，$i=(a_1,a_2,\cdots,a_k)_2$

  - 互连方式

$P_{r,i}$与上层$P_{r-1,i}$，$P_{r-1,j}$相连，这里i的第r位为0

$P_{r,j}$与上层$P_{r-1,i}$，$P_{r-1,j}$相连，这里j与i仅在第r位不同

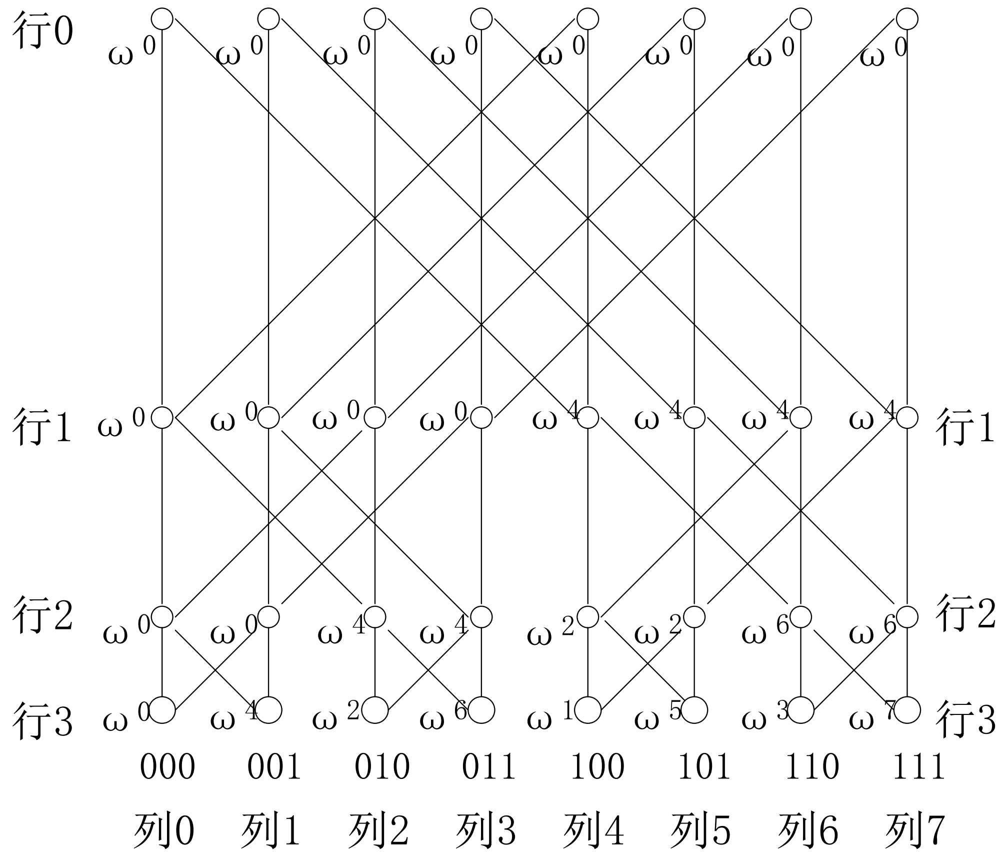
  - 权因子ω在BF网络中的计算方法

$P_{r,i}$中ω的指数为$j=\exp(r,i)$

这里$\exp(r,i)=(a_r,\cdots,a_1,\underbrace{0,\cdots,0}_{k-r})$ //即i的前r位取位序反，再后补0

SIMD-BF上的FFT算法（2）

- 示例：n=8的BF网络表示



r,i与上层$P_{r-1,i}$, $P_{r-1,j}$相连，这里i的第r位为0

$P_{r,j}$与上层$P_{r-1,i}$, $P_{r-1,j}$相连，这里j与i仅在第r位不同

SIMD-BF上的FFT算法（3）

- 算法描述: P273算法11.4
- 算法分析
  - 时间分析

    第(1)步时间: $O(1)$

    (2.1)和(2.2)的计算时间为$O(1)$，(假定$\omega^{exp(r,i)}$已计算好)

    (2.1)和(2.2)的选路时间为$O(1)$　　==>第(2)步时间: $O(\log n)$

    所以 $t(n)=O(\log n)$, $p(n)=n(1+\log n)$, $c(n)=O(n\log^2 n)$

    $S_p(n)=O(n)$, $E_p(n)=O(1/\log n)$　　//本算法的综合指标是较好的
  - $\omega^{exp(r,i)}$的计算

    初始时: $P_{k,i}$读入$\omega^{exp(k,i)}$，$k=\log n$

    若$P_{r+1,i}$已有$\omega^{exp(r+1,i)}$，则$P_{r,i}$中的$\omega^{exp(r,i)}=\omega^{2exp(r+1,i)}$

    所以，经过logn步就可以计算出每个$\omega^{exp(r,i)}$