中国科学技术大学

算法基础

第二讲：渐近记号与递归方程

主　讲: 顾乃杰　教授
单　位: 计算机科学技术学院
学　期: 2015-2016 (秋)

3. Growth of Functions

- 算法运行时间增长的量级很好地刻划了算法的效率，展现了算法的相对性能。
- 对于足够大的输入规模，由于输入规模的影响，常数和低阶项可以忽略。
- When input size is large enough, we concern with how the running time of an algorithm increases with the size of the input *in the limit*, i.e. studying the ***asymptotic*** efficiency of algorithms.
- Usually, an algorithm that is asymptotically more efficient will be the best choice for all but very small inputs.

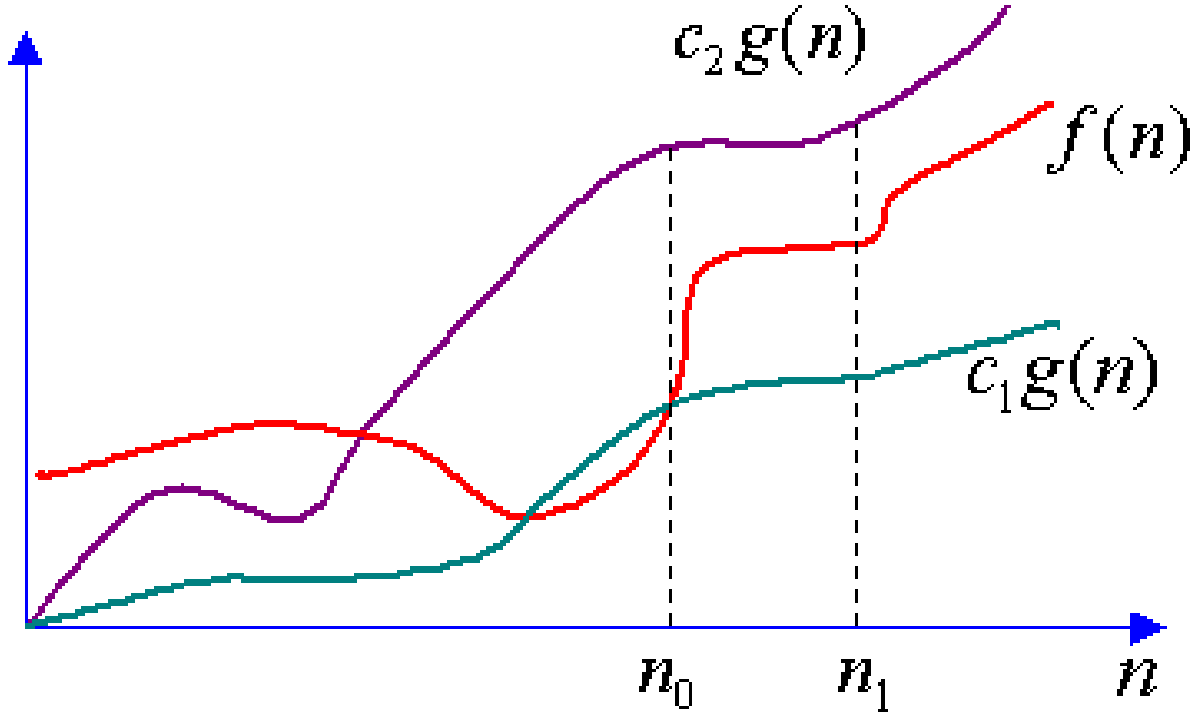
3.1 渐近记号Asymptotic notation

Θ-notation:

定义： $f(n)=\Theta(g(n))$ 意味着存在正常数 C_1, C_2 和 n_0使得当 $n \geq n_0$, 均有 $0 \leq C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$成立。

- $f(n)=\Theta(g(n))$表明，当 $n \to \infty$ 时， $f(n)$ 和$g(n)$趋于无穷大的阶是相同的。
- $f(n)$ 和$g(n)$均是渐近非负的，即：对足够大的， $f(n)$和$g(n)$均大于等于0。

The curves for $f(n) = \Theta(g(n))$



图中的n_0点的精确值一般难以得到, 在分析和证明过程中可以用一个大于n_0而且易于求得的值n_1替代。

Example: $n^2/2 - 3n = \Theta(n^2)$

Proof: We need to chose positive constants C_1, C_2 , and n_0 , such that $C_1n^2 \le n^2/2\text{-}3n \le C_2n^2$.

To do so, we let $C_1=1/6$, $C_2=1$, $n_0=9$:

Since $n^2/3\text{-}3n = (n/3\text{-}3)n \ge 0$, for $n \ge 9$

Then $n^2/6 \le n^2/6+(n^2/3\text{-}3n) = n^2/2\text{-}3n$, for $n \ge 9$

And $n^2/2\text{-}3n \le n^2$, for $n \ge 0$

So $C_1n^2 \le n^2/2\text{-}3n \le C_2n^2$ holds for all $n \ge 9$.

Example: $n^2/2-3n=\Theta(n^2)$

在证明中 C_1，C_2 和 n_0 的选取可以有多种不同的方式，可取各种不同的值，例如在上题中可以取 C_1=1/4，C_2 =1/2，n_0 =12，也同样可以证明。

Example: $an^3+bn^2+cn+d=\Theta(n^3)\quad a>0$

Proof: We Choose $n_0=\lceil 2(|b|+|c|+|d|)/a+1\rceil$, $c_1=a/2$

$c_2=a+|b|+|c|+|d|$, If $n\ge n_0$, we have:

$$an^3+bn^2+cn+d=an^3/2+(an^3/2+bn^2+cn+d)$$

$$\ge an^3/2+(an^3/2-|b|n^2-|c|n-|d|)$$

$$\ge an^3/2+(an/2-|b|-|c|-|d|)n^2$$

$$\ge an^3/2+(a\cdot\lceil 2(|b|+|c|+|d|)/a+1\rceil/2-|b|-|c|-|d|)n^2 \quad (\because\ n\ge 1)$$

$$\ge an^3/2=c_1n^3$$

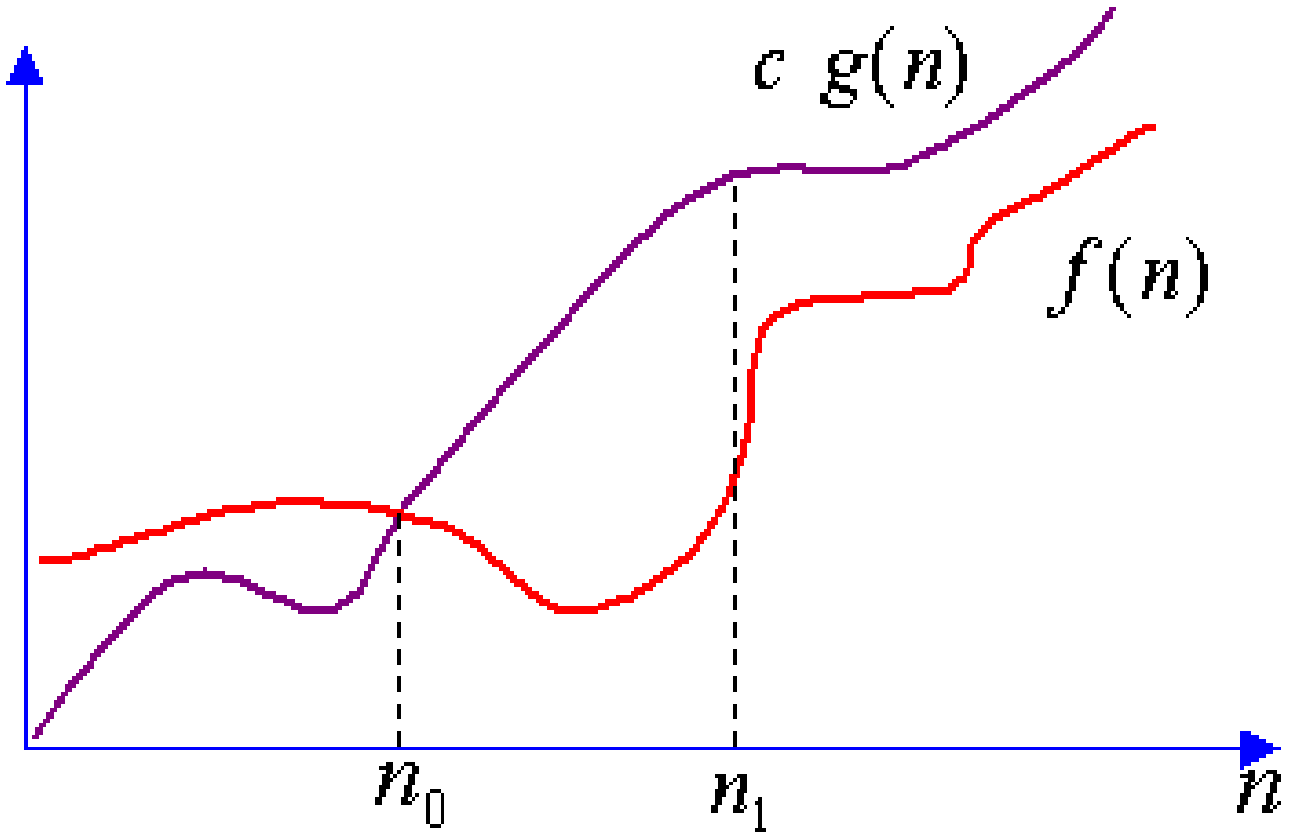
$$an^3+bn^2+cn+d\le an^3+|b|n^2+|c|n+|d|)\le c_2n^3$$

So, $c_1n^3\le an^3+bn^2+cn+d\le c_2n^3$ holds for all $n\ge n_0$

O-notation

- 定义: $f(n)=O(g(n))$ 意味着存在正常数 C 和 n_0,使得
  当 $n \geq n_0$, 均有 $0 \leq f(n) \leq C\,g(n)$ 成立。
- $f(n)=O(g(n))$表明，当 $n \to \infty$ 时， $f(n)$趋于无穷大的阶不大于(即小于等于) $g(n)$趋于无穷大的阶.
- 若$f(n)=\Theta(g(n))$, 则一定有$f(n)=O(g(n))$

The curves for $f(n) = O(g(n))$



Examples for *O*-notation

1) $an^3+bn^2+cn+d=O(n^3)$, $a>0$

Proof: 前面的例子已经表明 $an^3+bn^2+cn+d=\Theta(n^3)$

2) $an^2+bn+d=O(n^3)$, $a>0$

Proof: We let $c=|a|+|b|+|d|$, $n_0=1$, then:

$$an^2+bn+d\le|a|n^2+|b|n+d\le(|a|+|b|+|c|)n^3=cn^3$$

So, $an^2+bn+d=O(n^3)$

Examples of functions in $O(n^2)$

n^2

$n^2 + n$

$n^2 + 1000n$

$1000n^2 + 1000n$

n

$n/1000$

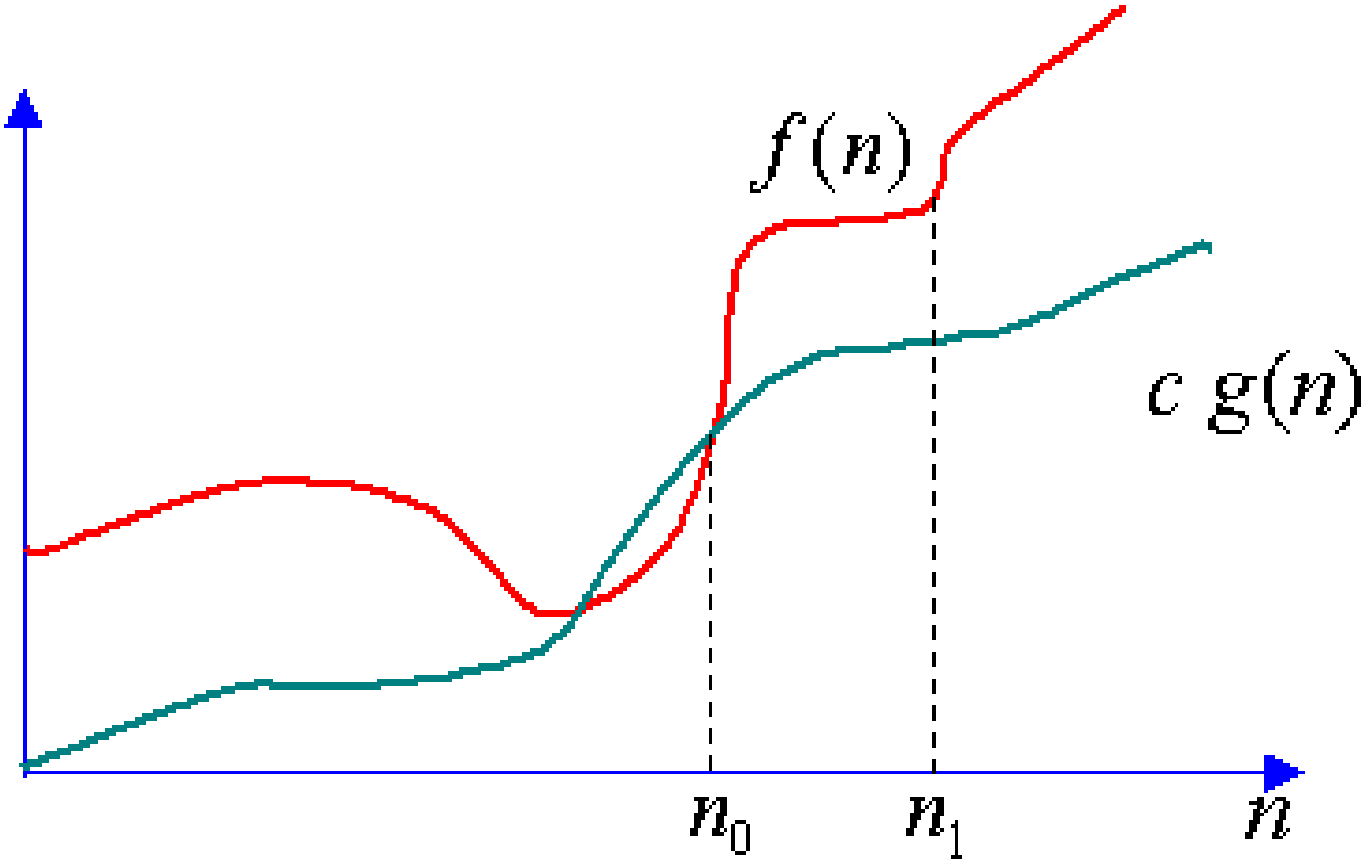
$n^{1.99999}$

$n^2/\lg\lg\lg n$

Ω-notation

- 定义: $f(n)=\Omega(g(n))$ 意味着存在正常数 C 和 n_0,使得当 $n \geq n_0$, 均有 $0 \leq C\,g(n) \leq f(n)$ 成立。
- $f(n)=\Omega(g(n))$表明，当 $n \to \infty$ 时， $f(n)$趋于无穷大的阶不小于 $g(n)$ 趋于无穷大的阶.
- 若$f(n)=\Theta(g(n))$, 则一定有 $f(n) = \Omega(g(n))$

The curves for $f(n) = \Omega(g(n))$



Example: $an^3+bn^2+d=\Omega(n^2)\quad a>0$

- Proof: Let $c=a$, $n_0 \geq \frac{2(|b|+|d|)}{a}+1$, If $n \geq n_0$, we have:

$$\frac{a}{2}n^3+bn^2+d \geq \frac{a}{2}n^2\cdot(\frac{2(|b|+|d|)}{a}+1)+bn^2+d$$

$$\geq n^2\cdot(|b|+|d|)+bn^2+d+\frac{a}{2}n^2 \geq \frac{a}{2}n^2 \qquad (\because\ n \geq 1)$$

$$an^3+bn^2+d \geq \frac{a}{2}n^3+\frac{a}{2}n^2 \geq an^{`2}=cn^2$$

在证明过程中，我们可以让和选取不同的值也同样可以证明。

Example 3.6: $an^3+bn^2+d=\Omega(2n^2+3n\log n)$

Proof: Let $c=a/2$, $n_0 \geq \frac{2(|b|+|d|)}{a}+5$, If $n \geq n_0$,

we have:

$$an^3+bn^2+d \geq \frac{a}{2}n^3+(\frac{a}{2}n^3+bn^2+d)$$

$$\geq \frac{a}{2}n^3+(\frac{a}{2}n^2\frac{2(|b|+|d|)}{a}+bn^2+d) \geq \frac{a}{2}n^3$$

$$\geq \frac{a}{2}\cdot 5n^2 \geq \frac{a}{2}\cdot 2n^2+\frac{a}{2}\cdot 3n^2 \geq \frac{a}{2}\cdot 2n^2+\frac{a}{2}\cdot 3n\log n$$

$$=\frac{a}{2}\cdot(2n^2+3n\log n)=c\cdot(2n^2+3n\log n)$$

Examples of functions in $\Omega(n^2)$

n^2

$n^2 + n$

$n^2 - n$

$1000n^2 + 1000n$

$1000n^2 - 1000n$

n^3

$n^{2.00001}$

$n^2 \lg\lg\lg n$

2^{2^n}

Insertion Sort 运行时间

- The best-case running time of insertion sort is $\Omega(n)$
- The worst-case running time of insertion sort is $O(n^2)$
- The running time of insertion sort is between $\Omega(n)$ and $O(n^2)$
- When we say the *running time* of an algorithm is $\Omega(g(n))$, we mean that *no matter what particular input of size n is chosen for each value of n*, the running time on that input is at least a constant times $g(n)$, for sufficiently large n.

o-notation

- 定义：$f(n)=o(g(n))$意味着对任意正常数 c，存在正常数 n_0 使得对所有 $n \geq n_0$，$0 \leq f(n) < cg(n)$ 成立。
- O符号和 o 符号的主要区别在于：在 $f(n)=O(g(n))$ 的定义中，$0 \leq f(n) \leq cg(n)$ 对某些正常数 c 成立，而在 $f(n)=o(g(n))$的定义中，$0 \leq f(n) < cg(n)$对所有正常数 c 成立。

- **Example 3.7：** $15n=o(n\log n)$，而 $2n^2+d \neq o(n^2)$
- **Example 3.8：** $15n=o(n\log n)$ $2\log^2 n+d=o(n^{1/2})$

ω-notation

- 定义： $f(n)=\omega(g(n))$ 意味着对任意正常数 c，存在正常数 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$， $0 \leq cg(n) < f(n)$ 成立。

- Ω 符号和 ω 符号的主要区别在于：在 $f(n)=\Omega(g(n))$ 的定义中， $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ 对某些正常数 C 成立， 而在 $f(n)=\omega(g(n))$ 的定义中， $0 \leq cg(n) < f(n)$ 对所有正常 C 数成立。

- **Example 3.9：** $2n^2+bn+d=\omega(n)$，而 $3n^2 \neq \omega(n^2)$

Asymptotic notation in equations

- ***When on right-hand side:***

  $O(n^2)$ stands for some anonymous function in the set $O(n^2)$.

如：$2n^2+3n+1 = 2n^2+\Theta(n)$ 意味着对某些 $f(n) \in \Theta(n)$，公式 $2n^2+3n+1 = 2n^2+f(n)$ 成立. 比如, $f(n) = 3n + 1$ 时成立.

- By the way, we interpret # of anonymous functions as = # of times the asymptotic notation appears:

- $\sum_{i=1}^{n} O(i)$ OK: 1 anonymous function

- $O(1) + O(2) + \cdots + O(n)$ not OK: n hidden constants

  $\Rightarrow$no clean interpretation

Asymptotic notation in equations

- ***When on left-hand side:***

  No matter how the anonymous functions are chosen on the left-hand side, there is a way to choose the anonymous functions on the right hand side to make the equation valid.

- Interpret $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$ as meaning *for all* functions $f(n) \in \Theta(n)$, there exists a function $g(n) \in \Theta(n^2)$ such that $2n^2 + f(n) = g(n)$.

- Can chain together: $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$.

渐近关系的传递性: Transitivity

- $f(n) = \Theta(g(n))$ and $g(n) = \Theta(h(n))$ imply $f(n) = \Theta(h(n))$,
- $f(n) = O(g(n))$ and $g(n) = O(h(n))$ imply $f(n) = O(h(n))$,
- $f(n) = \Omega(g(n))$ and $g(n) = \Omega(h(n))$ imply $f(n) = \Omega(h(n))$,
- $f(n) = o(g(n))$ and $g(n) = o(h(n))$ imply $f(n) = o(h(n))$,
- $f(n) = \omega(g(n))$ and $g(n) = \omega(h(n))$ imply $f(n) = \omega(h(n))$.

渐近关系的自反性： Reflexivity

- $f(n) = \Theta(f(n))$,
- $f(n) = O(f(n))$,
- $f(n) = \Omega(f(n))$.

对称性 & 置换对称性

- $f(n) = \Theta(g(n))$ if and only if $g(n) = \Theta(f(n))$

- $f(n) = O(g(n))$ if and only if $g(n) = \Omega(f(n))$
- $f(n) = o(g(n))$ if and only if $g(n) = \omega(f(n))$

- **注意：不是任意两个函数都是渐近可比的，存在函数$f(n)$和$g(n)$，使得$f(n)=O(g(n))$不成立，且$f(n)=\Omega(g(n))$也不成立。如：n和$n^{1+\sin n}$**

Homework 3.1:

- Page 31, 3.1-2, 3.1-4, 3.1-6

3.2 常见函数

- 上取整和下取整— Ceilings and Floors

  $\lceil x \rceil$ is the least integer greater than or equal to x

  $\lfloor x \rfloor$ is the greatest integer less than or equal to x

For all real x: $x-1<\lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

For any integer n: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$

上取整和下取整 相关公式

$$\left\lceil \frac{\lceil n/a \rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil \qquad \left\lfloor \frac{\lfloor n/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$$

$$\lceil a/b \rceil \le (a+(b-1))/b$$

$$\lfloor a/b \rfloor \ge (a-(b-1))/b$$

补充定理

$f(x)$ 是任何连续单调上升函数，且 $f(x)$ 在整数点才可能取整数值，则：

1）
$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

2）
$$\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

模运算：Modular arithmetic

$$a \mod n = a - \lfloor a / n \rfloor n$$

$a \equiv b \pmod{n}$ means $(a \mod n) = (b \mod n)$

指数： Exponentials

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots = \sum_{ki=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x \geq 1 + x$$

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$$

$$e^x = 1 + x + \Theta\ (x^2)$$

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

对数： Logarithms

- We shall use the following notations:

$$\log n = \lg n = \log_2 n$$

$$\ln n = \log_e n$$

$$\log^k n = (\log n)^k$$

$$\log\log n = \log(\log n) = \log^{(2)} n$$

阶乘 和 Stirling 公式

$$n! = \begin{cases} 1 & \textbf{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \textbf{if } n > 0 \end{cases}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$n! = o(n^n) \qquad n! = \omega\ (2^n)$$

$$\log(n!) = \Theta\ (n \log n)$$

函数迭代： Functional iteration

- For integers $i \geq 0$, recursively define:

$$f^{(i)}(n) = \begin{cases} n & \textbf{if } i = 0 \\ f(f^{(i-1)}(n)) & \textbf{if } i > 0 \end{cases}$$

- $\log^* n$ (read "log star of n") is the iterated logarithm, which is defined as follows:

$$\log^* n = \min\{i \geq 0 : \log^{(i)} n \leq 1\}$$

- $\log^{(i)} n$ and $\log^i n$ are two different functions.

例子：对数迭代

The iterated logarithm is a *very* slowly growing function:

$$\log^* 2 = 1 \qquad \log^* 4 = 2 \qquad \log^* 16 = 3$$

$$\log^* 65536 = 4 \qquad \log^* 2^{65536} = 5$$

Since the number of atoms in the observable universe is estimated to be about 10^{80}, which is much less than 2^{65536}, we rarely encounter an input size n such that $\log^* n \geq 5$.

斐波那契数：Fibonacci numbers

- The Smallest 12 Fibonacci numbers are:

  0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

$$F_i = \begin{cases} 0 & \textbf{if } i = 0 \\ 1 & \textbf{if } i = 1 \\ F_{i-1} + F_{i-2} & \textbf{if } i \geq 2 \end{cases}$$

斐波那契数：Fibonacci numbers

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

其中：

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\cdots$$

$$\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\cdots$$

由于 $|\hat{\phi}| < 1$ 且 $\left|\frac{\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < 1/2$

所以：

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Homework 3.2:

- Page 35 , 3.2-2, 3.2-4

4 递归：Recurrences

- 在我们分析算法时，通常是将运行时间和空间复杂度表示成输入规模的函数，并且得到有关函数的递归关系式，通过求解递归方程得到运行时间和空间复杂度。
- 例如：归并排序算法的运行时间可以表示成如下的关系式：

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \textbf{if } n=1\\ 2T(n/2)+\Theta(n) & \textbf{if } n>1\end{cases}$$

- 该递归方程的解为：

$$T(n)=\Theta(n\log n)$$

处理技巧：Technicality

- 在求解递归方程时，通常会忽略一些技术细节，比如，假定函数自变量是整数，忽视上、下取整符号.
- 通常会忽略递归方程的边界条件，对于足够小的 n ，将 $T(n)$看作是一个常数，令 $T(n) = \Theta(1)$。
- 在有些特殊情况，技术细节非常重要，我们仍然会重视上、下取整符号和边界条件，以期得到更好的结论。

4.1 替代法-Substitution method

- 替代法主要包含两个步骤：

1) Guess the form of the solution.

2) Use mathematical induction to find the constants and show that the solution works.

- 替代法主要用于解的形式易于猜得的情况。
- 替代法既可以用于确定递归方程解的上界，也可以用于确定递归方程解的下界。

Example 4.1 ：

- 确定下述递归方程解的上界：

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

- 解：猜测其解为 $T(n) = O(n\log n)$

我们需要证明对适当选取的常数 $c > 0$，一定有 $T(n) \le cn\log n$ 成立。可以用数学归纳法加以证明，选取 $c > T(2) + 1$

注意：在证明过程中，归纳基础不是从 n=1 开始，而是从 n=2 开始 .

另一种更宜接受的方法是选取 C > T(1)+1 , 证明

T(n)≤Cnlogn+T(1)

则归纳基础可以从 n=1 开始。

如何获得好的猜测解

- 熟能生巧，猜测解通常需要一些经验。
- 可以通过构建递归树获得猜测解。
- 如果某个递归方程与以往的某方程相似，则有理由猜测其解也相似。
- 没有通用的有效方法获得递归方程正确的猜测解。

Example 4.2:

- 求下述递归方程解的上界：

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

- 如果没有右端的17，我们已经知道其解为

$$T(n) = O(n \log n)$$

- 现在仍然猜测其解与上式相同，证明对所有的n≥1，均有下式成立：

$$T(n) \le cn \log n + c$$

替代法中需要注意的问题:

- Sometimes, you make a correct guess of asymptotic bound on the solution of a recurrence, but the math doesn't seem to work out in the induction.
- Usually, the problem is that the inductive assumption isn't strong enough to prove the detailed bound.
- When you face such a situation, revising the guess by subtracting a lower-order term often permits the math to go through.

Example 4.3 :

- 求下述递归方程解的上界:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

- 猜测其解为 $T(n) = O(n)$
- 直接替代，这时发现归纳推理无法继续下去

$$T(n) = c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1$$

Example 4.3（续）：

- 由于无法用直接替代的方法证明，试图将猜测解无理由的放大，这也是一种常见的错误：

$$T(n) = O(n^2)$$

- 为了证明这一结论，我们修改原有的结论，将其加强，而不是去减弱它：

$$T(n) \le cn - 1$$

在用归纳法证明的过程中，可以通过引入一个更强的假设，从而证明出一个更强的结论。

小心地雷！

- 错误使用渐近记号
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ 证明 $T(n) = O(n)$
- 猜测 $T(n) \le cn$ ，推导出下式：

$$T(n) \le 2(c \cdot \lfloor n/2 \rfloor) + n \le cn + n = O(n)$$

Wrong !!!

变量代换： Changing variables

- 有时通过变量代换可以简化递归方程的求解，考虑下述看起来比较复杂的递归方程：

$$T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$$

设 $m = \log n$，可得 $T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$

令 $S(m) = T(2^m)$， 得到新的递归方程：

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

其解为：

$$S(m) = O(m \log m)$$

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log \log n)$$

Homework 4.1:

- Page 40 , 4.1-1, 4.1-3, 4.1-5

4.2 递归树--The recursion-tree

- 替代法可以用来证明某个递归方程的解是正确的，但有时要得到一个准确的猜测解是困难的。画一个递归树可以有助于获得一个好的猜测解。
- 在递归树中，每个结点代表一个相应子问题的代价；
- 递归树中每行结点的代价之和（每行代价）称为行和；
- 对所有的行和求和，可得总的代价。

递归树用途:

- Recursion trees are particularly useful when the recurrence describes the running time of a divide-and-conquer algorithm.
- 由于递归树方法通常用来获取好的猜测解，其解的正确性可以用替代法来证实。因此，在构造递归树时通常省略一些无关紧要的细节，如：上取整和下取整等。
- 如果在构造递归树以及求和时就非常认真仔细，也可以直接用递归树方法求解递归方程。

Example 4.4:

- 求解递归方程：

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

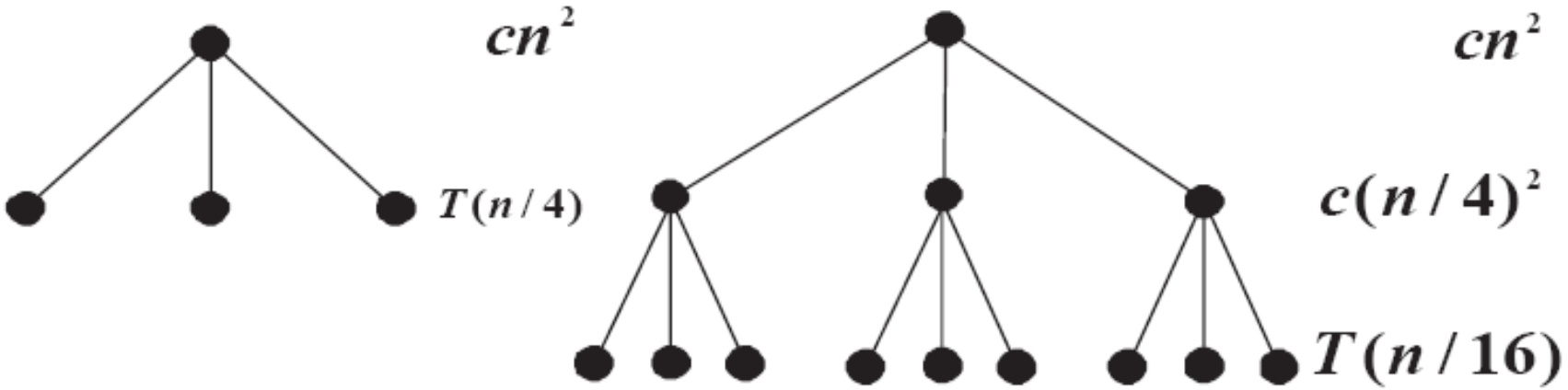
解：首先求该方程解的一个上界，由于一般情况上整和下整函数对递归方程解的影响不大，将原方程简化为：

$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$$

其中 c 是一个常数。

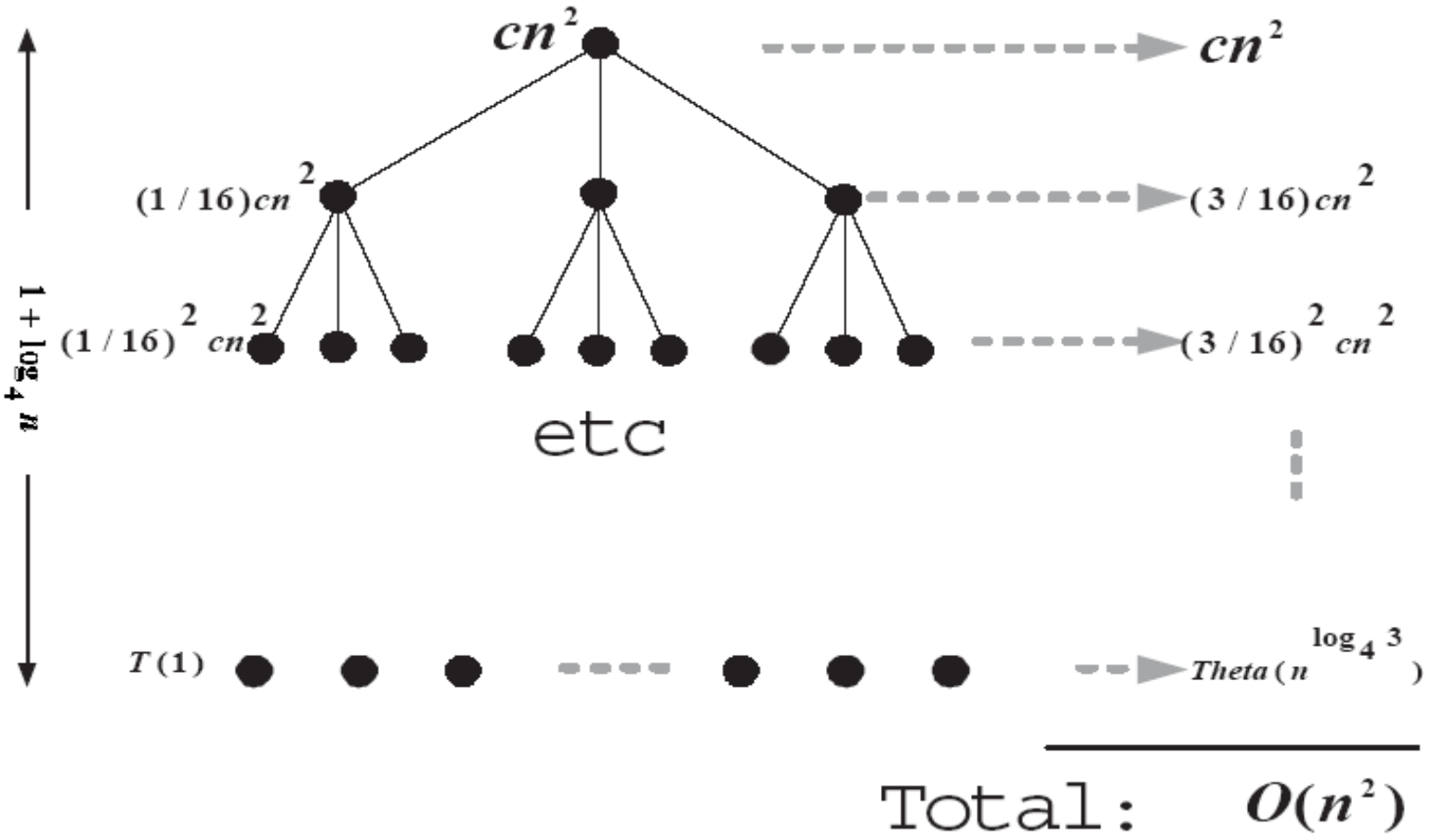
Example 4.4（续）：

- 为了叙述时的方便，假定n为4的方幂。下图给出了方程所对应的递归树的前三层。



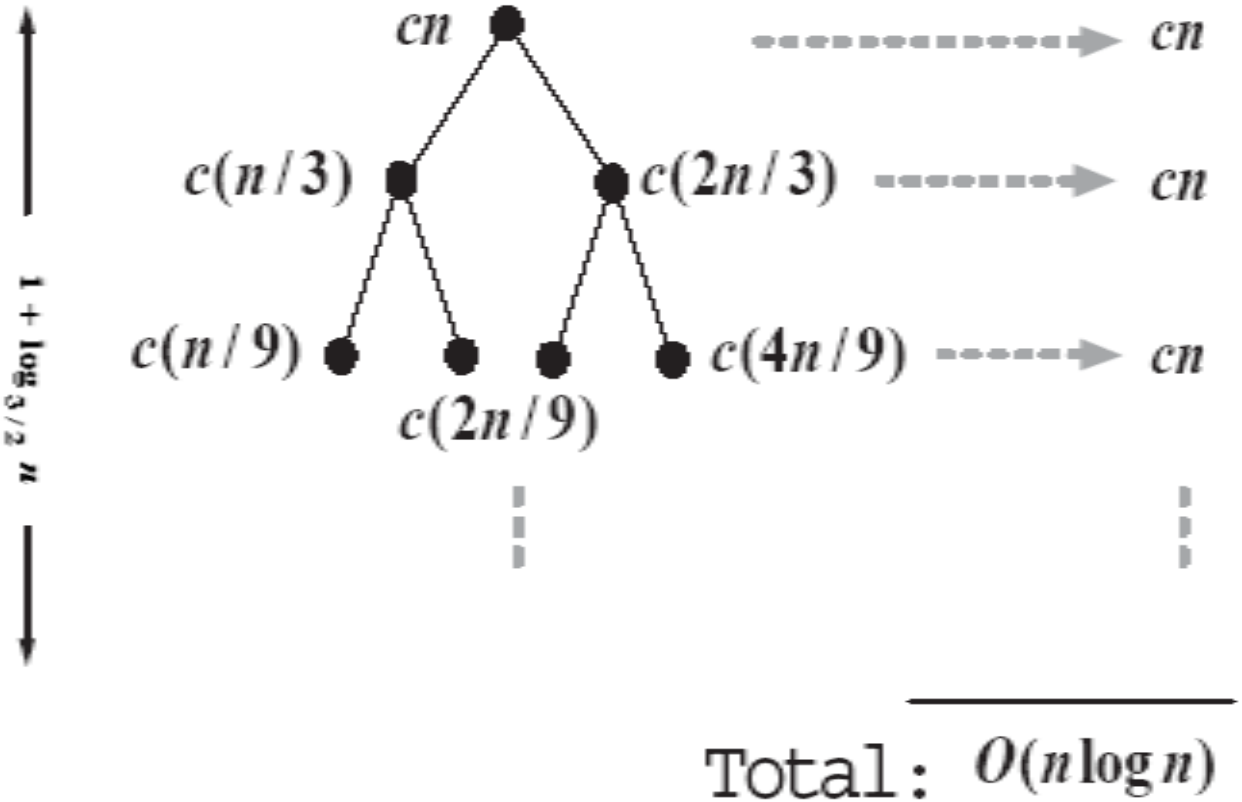
- 对该递归树继续展开，当子问题规模为1时终止，最终可得到完整的递归树

Example 4.4 （续）：


cn^2
cn^2
$(1/16)cn^2$
$(3/16)cn^2$
$(1/16)^2 cn^2$
$(3/16)^2 cn^2$
etc
$1+\log_4 n$
$T(1)$
$Theta(n^{\log_4 3})$
Total: $O(n^2)$

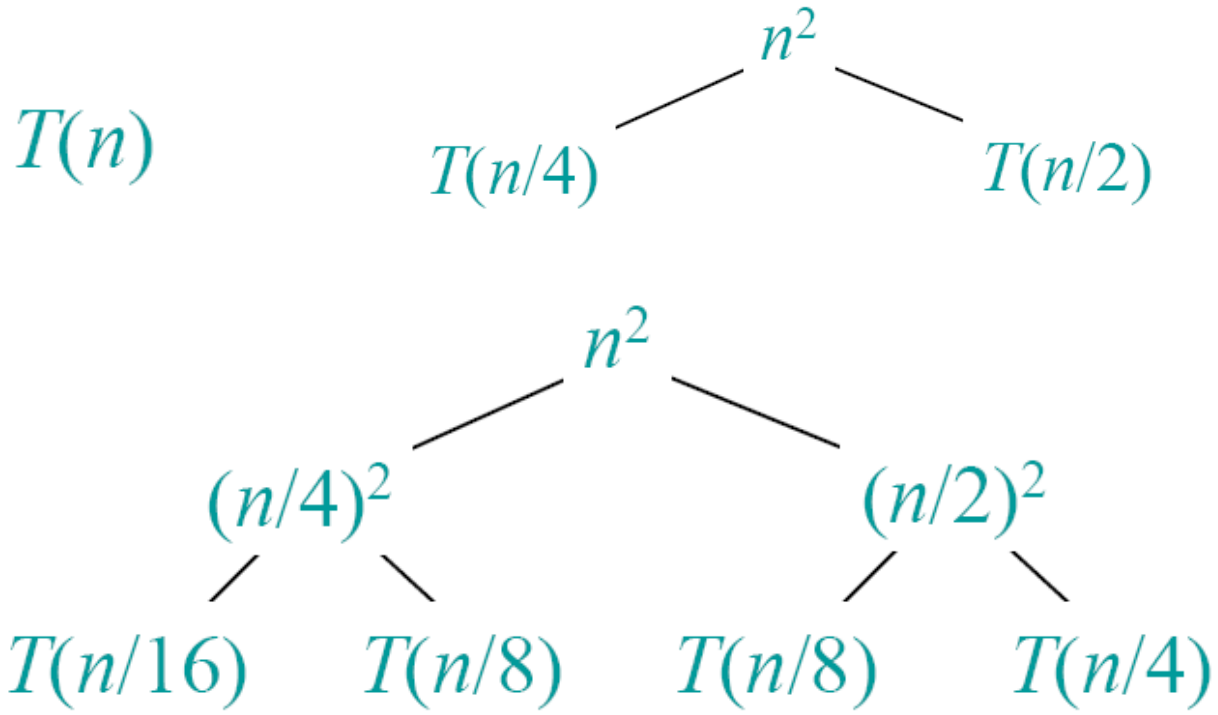
Example 4.5:

- 求解递归方程： $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)$

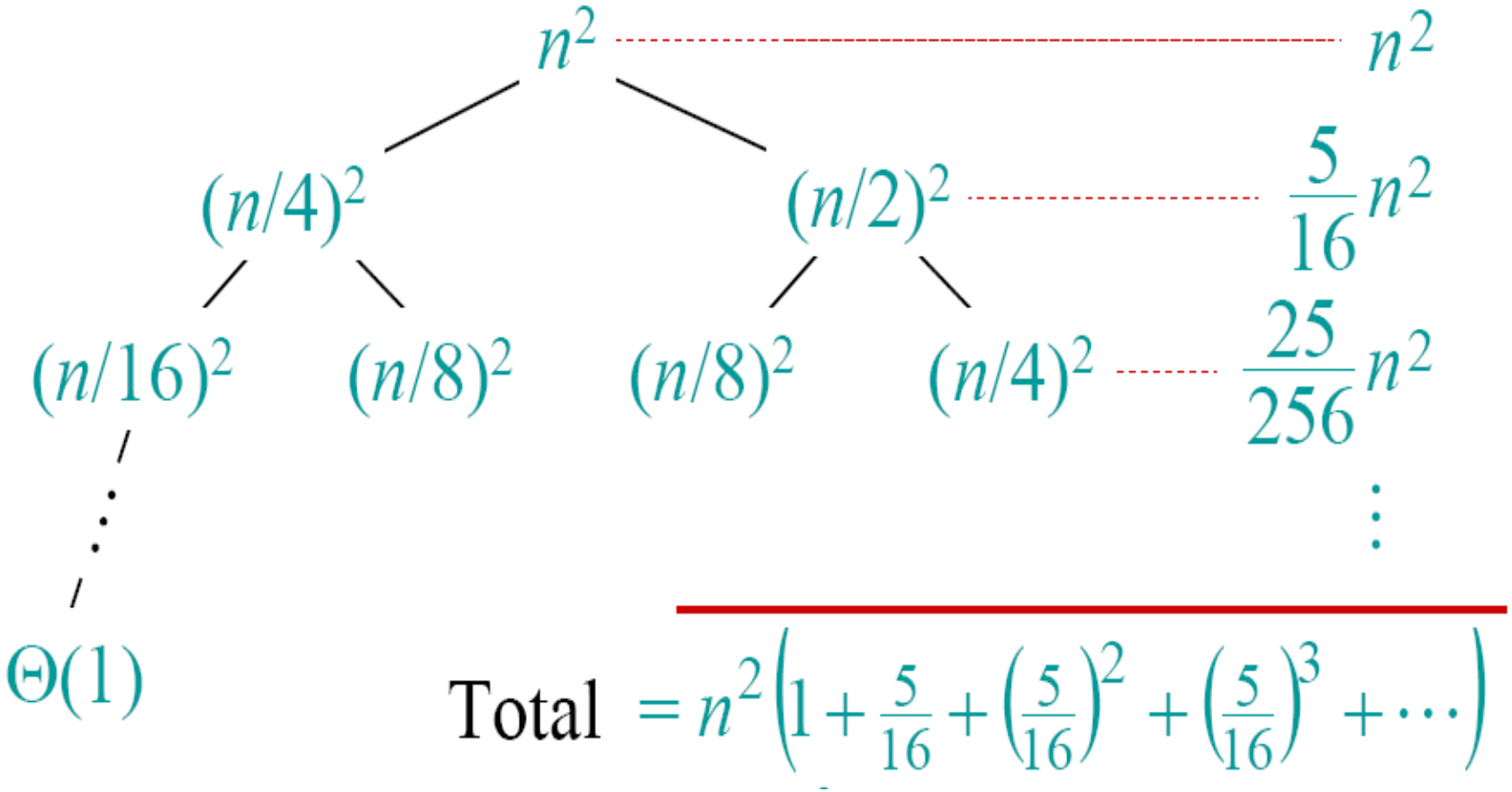


Example 4.6:

- 求解递归方程 $T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2$



Example 4.6（续）：


n^2
n^2
$(n/4)^2$
$(n/2)^2$
$\frac{5}{16}n^2$
$(n/16)^2$
$(n/8)^2$
$(n/8)^2$
$(n/4)^2$
$\frac{25}{256}n^2$
$\Theta(1)$
Total $= n^2\left(1+\frac{5}{16}+\left(\frac{5}{16}\right)^2+\left(\frac{5}{16}\right)^3+\cdots\right)$

小结

- **如何求 Row sum 与 Total sum:**

  在用递归树方法时，关键是求出行和与总的代价，为了求得行和，一个有效的办法是根据递归方程本身，推导出下一行的和与上一行的和之间的关系，由此，可使求和过程变得有章可循，从而也更为简单。

Homework 4.2:

- Page 43 , 4.2-2, 4.2-5

4.3 主方法：The master method

- 主方法主要适用于下列形式的递归方程：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \qquad (4.5)$$

- 其中 $a \geqslant 1$, $b > 1$, 且 f 是渐近非负的。
- 用 n/b 代替 $\lfloor n/b \rfloor$ 或 $\lceil n/b \rceil$。
- Then $T(n)$ can be bounded asymptotically as Master theorem .

主定理：The master theorem

- If $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ for some constant $\varepsilon > 0$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$。
- If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$, then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
- If $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ for some constant $\varepsilon > 0$, and if $af(n/b) \le cf(n)$ for some constant $c < 1$ and all sufficiently large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$

注意事项

- It is important to realize that the three cases do not cover all the possibilities for $f(n)$.
- There is a gap between cases 1 and 2 when $f(n)$ is smaller than but not polynomially smaller.
- Similarly, there is a gap between cases 2 and 3 when $f(n)$ is larger than but not polynomially larger.
- If the function $f(n)$ falls into one of these gaps, or if the regularity condition in case 3 fails to hold, the master method cannot be used to solve the recurrence.

Example 4.7: Not polynomially larger

$$T(n) = 3T(n/3) + n \cdot \log^2 n$$

- 其中： $a = b = 3$ ， $f(n) = n\log^2 n$ ， $f(n)$ is asymptotically larger than $n^{\log_b a} = n$ ， but $f(n)/n^{\log_b a} = \log^2 n$ is less than n^{ε} ， for any positive $\varepsilon > 0$ ， master method does not apply for this recurrence.

Example 4.8: Using the master method

- $T(n) = 9T(n/3) + n$
- 解： $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$, $n^{\log_b a} = n^2$, 取 $\varepsilon = 0.5$, 则 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$，因此，由主定理的case 1可知其解为：

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$$

Example 4.9: Using the master method

- $T(n) = T(2n/3) + 1$
- 解： $a = 1, b = 3/2, f(n) = 1,$ $n^{\log_b a} = 1$ ， 则

$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ ，由主定理的case 2 知其解为

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n) = \Theta(\log n)$$

Example 4.10: Using the master method

- $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$
- 解：$a = 3$, $b = 4$, $f(n) = n \log n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$

取 $\varepsilon = 0.1$，则 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$，

而且 $af(n/b) = 3f(n/4) = 3n/4 \cdot \log(n/4)$

$\leq 3/4 \cdot n \log n = cf(n)$

其中 $c = 3/4$， 由定理的case 3 知方程的解为

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \log n)$$

Example 4.11: Using the master method

- $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

解：主方法对该递归方程不适用，因为 $a = 2, b = 2,$ $n^{\log_b a} = n$,该递归方程恰好处于主方法的 case 2 和 case 3 之间.

- $T(n) = 4T(n/2) + n^2/\log n$

解：主方法同样对该递归方程不适用。因为，$a = 4, b = 2,$ $f(n) = n^2 / \log n$ ，该递归方程恰好处于主方法的 case 1 和 case 2 之间.

Homework 4.3:

- Page 45 , 4.3-2, 4.3-3