算法基础
Foundation of Algorithms

主讲人 徐云

Fall 2018, USTC

第15章 动态规划

15.1 方法概述

- 历史及研究问题
- 一些术语和概念
- 最优性原理
- 方法的基本思想
- 方法的求解步骤
- 动态规划法的适用条件
- 最优性原理判别举例
- 设计技巧——阶段划分和状态表示
- 存在的问题

历史及研究问题（1）

- *动态规划(dynamic programming)*是运筹学的一个分支，20世纪50年代初美国数学家R.E.Bellman等人在研究*多阶段决策过程(multistep decision process)*的*优化问题*时，提出了著名的*最优化原理(principle of optimality)*，把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法—动态规划。
- *多阶段决策问题：*求解的问题可以划分为一系列相互联系的阶段，在每个阶段都需要作出决策，且一个阶段决策的选择会影响下一个阶段的决策，从而影响整个过程的活动路线，求解的目标是选择各个阶段的决策使整个过程达到最优。

历史及研究问题（2）

- 动态规划主要用于求解以时间划分阶段的动态过程的优化问题，但是一些与时间无关的静态规划(如线性规划、非线性规划)，可以人为地引进时间因素，把它视为多阶段决策过程，也可以用动态规划方法方便地求解。
- 动态规划是考察问题的一种途径，或是求解某类问题的一种方法。
- 动态规划问世以来，在经济管理、生产调度、工程技术和最优控制等方面得到了广泛的应用。例如最短路线、库存管理、资源分配、设备更新、排序、装载等问题，用动态规划方法比用其它方法求解更为方便。

一些术语和概念

- 阶段：把所给的问题的求解过程恰当地划分为若干个相互联系的阶段。
- 状态：状态表示每个阶段开始时，问题或系统所处的客观状况。状态既是该阶段的某个起点，又是前一个阶段的某个终点。通常一个阶段有若干个状态。
  - 状态的无后效性：如果某阶段状态给定后，则该阶段以后过程的发展不受该阶段以前各阶段状态的影响，也就是说状态具有马尔科夫性。

  注：适于动态规划法求解的问题具有状态的无后效性
- 策略：各个阶段决策的确定后，就组成了一个决策序列，该序列称之为一个策略。由某个阶段开始到终止阶段的过程称为子过程，其对应的某个策略称为子策略。

最优性原理

- Bellman的原定义如下：

  An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, then remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from first decision.

- Bellman最优性原理：

  求解问题的一个最优策略序列的子策略序列总是最优的，则称该问题满足最优性原理。

  注：对具有最优性原理性质的问题而言，如果有一决策序列包含有非最优的决策子序列，则该决策序列一定不是最优的。

方法的基本思想

- 动态规划的思想实质是分治思想和解决冗余。
- 与分治法类似的是

  将原问题分解成若干个子问题，先求解子问题，然后从这些子问题的解得到原问题的解。
- 与分治法不同的是

  经分解的子问题往往不是互相独立的。若用分治法来解，有些共同部分（子问题或子子问题）被重复计算了很多次。
- 如果能够保存已解决的子问题的答案，在需要时再查找，这样就可以避免重复计算、节省时间。动态规划法用一个表来记录所有已解的子问题的答案。这就是动态规划法的基本思路。具体的动态规划算法多种多样，但它们具有相同的填表方式。

方法的求解步骤

①找出最优解的性质，并刻画其最优子结构特征；

②递归地定义最优值（写出动态规划方程）；

③以自底向上的方式计算出最优值；

④根据计算最优值时记录的信息，构造最优解。

注：

- 步骤①~③是动态规划算法的基本步骤。如果对于只需要求出最优值的情形，步骤④可以省略；
- 若需要求出问题的一个最优解，则必须执行步骤④，步骤③中记录的信息是构造最优解的基础。

适用条件

动态规划法的有效性依赖于问题本身所具有的两个重要的适用性质

- 最优子结构

  如果问题的最优解是由其子问题的最优解来构造，则称该问题具有最优子结构性质。

- 重叠子问题

  在用递归算法自顶向下解问题时，每次产生的子问题并不总是新问题，有些子问题被反复计算多次。动态规划算法正是利用了这种子问题的重叠性质，对每一个子问题只解一次，而后将其解保存在一个表格中，在以后该子问题的求解时直接查表。

最优性原理判别举例（1）

- 例1：设G是一个有向加权图，则G从顶点i到顶点j之间的最短路径问题满足最优性原理。

证明：（反证）

设$i \sim i_p \sim i_q \sim j$是一条最短路径，但其中子路径$i_p \sim i_q \sim j$不是最优的，

假设最优的路径为$i_p \sim i_q' \sim j$

则我们重新构造一条路径：$i \sim i_p \sim i_q' \sim j$

显然该路径长度小于$i \sim i_p \sim i_q \sim j$，与$i \sim i_p \sim i_q \sim j$是顶点i到顶点j的最短路径相矛盾.

所以，原问题满足最优性原理。 □

最优性原理判别举例（2）

- 例2：0-1背包问题Knap(1,n,c)满足最优性原理

$$\max \sum_{i=l}^{n} v_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=l}^{n} w_i x_i \le c \\ x_i \in \{0,1\} \qquad l \le i \le n \end{cases} \overset{记}{\Rightarrow} \quad Knap\ (l, n, c)$$

证明：设$(y_1,y_2,\dots,y_n)$是Knap(1,n,c)的一个最优解，下证$(y_2,\dots,y_n)$是Knap$(2,n,c-w_1y_1)$子问题的一个最优解。

若不然，设$(z_2,\dots,z_n)$是Knap$(2,n,c-w_1y_1)$的最优解，因此有

$$\sum_{i=2}^{n} v_i z_i > \sum_{i=2}^{n} v_i y_i \text{ 且 } \sum_{i=2}^{n} w_i z_i \le c - w_1 y_1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} v_i z_i > \sum_{i=1}^{n} v_i y_i \text{ 又有 } w_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} w_i z_i \le c$$

说明$(y_1,z_2,\dots,z_n)$是Knap(1,n,c)的一个更优解，矛盾。 □

最优性原理判别举例（3）

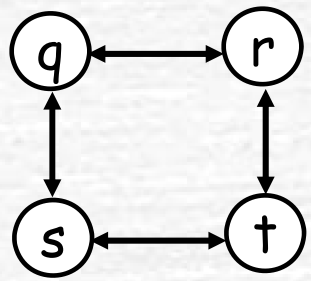
- 例3：最长路径问题不满足最优性原理。

证明：

p: q→r→t是q到t的最长路径，

而q→r的最长路径是q→s→t→r

r→t的最长路径是r→q→s→t



但q→r和r→t的最长路径合起来并不是q到t的最长路径。所以，原问题并不满足最优性原理。□

注：因为q→r和r→t的子问题都共享路径s→t，组合成原问题解时，有重复的路径对原问题是不允许的。

设计技巧

- 动态规划的设计技巧：阶段的划分、状态的表示和存储表的设计；
- 在动态规划的设计过程中，阶段的划分和状态的表示是其中重要的两步，这两步会直接影响该问题的计算复杂性和存储表设计，有时候阶段划分或状态表示的不合理还会使得动态规划法不适用。
- 记忆型递归——动态规划的变种
  - 每个子问题的解对应一表项；
  - 每表项初值为一特殊值，表示尚未填入；
  - 递归时，第一次遇到子问题进行计算并填表，以后查表取值；

如：矩阵链乘的记忆型递归算法P220

存在的问题

- 问题的阶段划分和状态表示，需要具体问题具体分析，没有一个清晰明朗的方法；
- 空间溢出的问题，是动态规划解决问题时一个普遍遇到的问题；
  - 动态规划需要很大的空间以存储中间产生的结果，这样可以使包含同一个子问题的所有问题共用一个子问题解，从而体现动态规划的优越性，但这是以牺牲空间为代价的，为了有效地访问已有结果，数据也不易压缩存储，因而空间矛盾是比较突出的。

第15章 动态规划

15.2 多段图规划

- 问题描述及举例
- 问题满足最优性原理
- 递归关系推导
- 算法
- 时间分析

问题描述及举例（1）

- 问题描述

多段图G=(V, E)是一个有向图，且具有以下特征：

(1)划为$k\ge 2$个不相交的集合V_i，$1\le i\le k$；

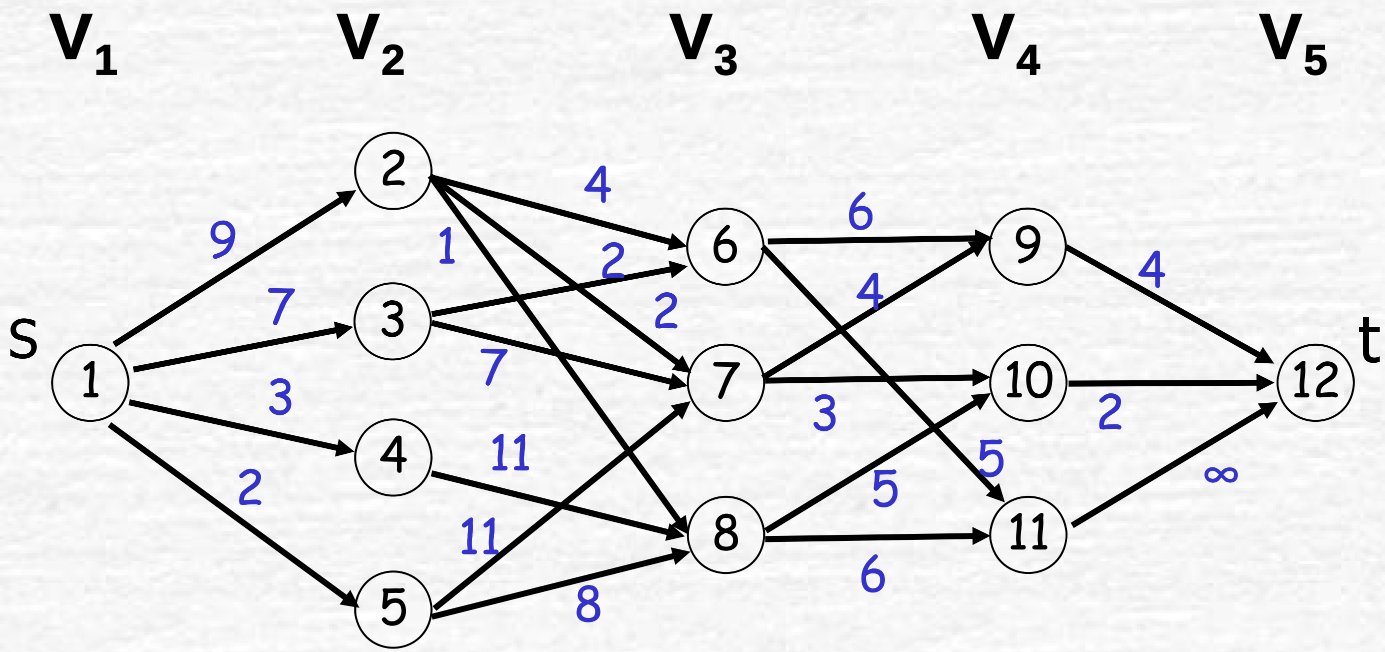
(2) V_1和V_k分别只有一个结点s(源点)和t(汇点)；

(3)若$\langle u, v\rangle \in E(G)$，$u\in V_i$，则$v\in V_{i+1}$ $1\le i\le k$，边上成本记$c(u,v)$；若$\langle u, v\rangle \notin E(G)$，边上成本记$c(u,v)=\infty$；

求由s到t的最小成本路径。

问题描述及举例（2）

- 举例：一个5-段图



求一条由s到t的成本最小的路径？

最优性原理和递归式

- 多段图问题满足最优性原理

  设s,…, V_{i_p},…, V_{i_q}, …,t是一条由s到t的最短路径，则V_{i_p},…, V_{i_q}, …,t也是由V_{i_p}到t的最短路径。（反证即可）

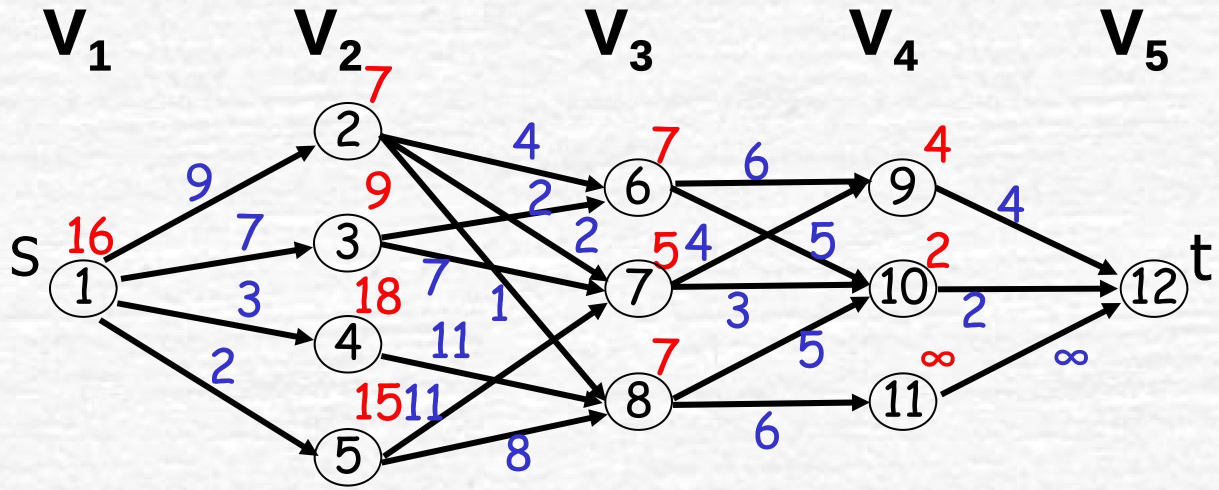
- 递归式推导

  设cost(i,j)是V_i中结点v_j到汇点t的最小成本路径的成本，递归式为：

$$
\cos t(i,\ j) = \begin{cases} c(j,t) & i = k-1 \\ \min\limits_{\substack{v_l \in V_{i+1} \\ <j,l> \in E(G)}} \{c(j,l) + \cos t(i+1,l)\} & 1 \le i < k-1 \end{cases}
$$

多段图规划算法（1）

- 计算过程(以5-段图为例)



cost(4,9)=4， cost(4,10)=2， cost(4,11)=∞

cost(3,6)=7， cost(3,7)=5， cost(3,8)=7

cost(2,2)=7， cost(2,3)=9， cost(2,4)=18， cost(2,5)=15

cost(1,1)=min{9+cost(2,2),7+cost(2,3),3+cost(2,4),
2+cost(2,5)}=16

构造解： 解1(1,2,7,10,12)， 解2(1,3,6,10,12)

多段图规划算法（2）

```
MultiStageGraph( G, k, n, p[] )
{//输入n个结点的k段图，假设顶点按段的顺序编号
 //E(G)是边集，p[1..k]是最小成本路径
   new cost[n];     //生成数组cost, cost[j]相当于前面的cost(i,j)
   new d[n];        //生成数组d, d[j]保存vj与下一阶段的最优连接点
   cost[n]=0;
   for i=n-1 dwonto 1 do   //计算cost[i]和d[i]
   {   cost[i]=∞;
        while( 任意<i, r>∈E(G) )   //r是下一阶段中的顶点
          if( c(i, r)+cost[r]<cost[i] )
          {     cost[i]=c(i, r)+cost[r]; d[i]=r;
           }
    }                                                    O(n+e)
   p[1]=1; p[k]=n;    //以下是找一条最小成本路径（构造解）
   for i=2 to k-1 do    p[i]=d[p[i-1]];                 O(k)
}              ∴ T(n)=O(n+e)
```

第15章 动态规划

15.1 方法概述

15.2 多段图规划

15.3 矩阵链乘法

15.4 最大子段和

15.5 最长公共子序列

15.6 0-1背包

15.3 矩阵链乘法

- 问题描述
- 加括号的方案数
- 动态规划算法

问题描述

- 问题描述：

  给定n个矩阵$A_1, A_2, \ldots, A_n$，A_i的维数为$p_{i-1} \times p_i (1 \leqslant i \leq n)$，以一种最小化标量乘法次数的方式进行完全括号化。

- Remark：

  1. 设$A_{p \times q}, A_{q \times r}$两矩阵相乘，普通乘法的次数为$p \times q \times r$
  2. 加括号对乘法次数的影响

  如：$A_{10 \times 100} \times B_{100 \times 5} \times C_{5 \times 50}$

  ((AB)C): 7500次　　　(A(BC)): 75000次

加括号的方案数

用p(n)表示n个矩阵链乘的穷举法计算成本，如果将n个矩阵从第k和第k+1处隔开，对两个子序列再分别加扩号，用p(n)表示则可以得到下面递归式：

$$p(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ \sum_{k=1}^{n-1}p(k)p(n-k) & n>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow p(n)=C(n-1)\text{为}Catalan\text{数}$$

$$C(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\Omega\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$$ 呈指数增长

因此，穷举法不是一个有效算法

动态规划算法（1）

- 最优性原理分析

1.矩阵链乘问题满足最优性原理

记A[i:j]为$A_iA_{i+1}\ldots A_j$链乘的一个最优括号方案，设A[i:j]的最优次序中含有二个子链A[i:k]和A[k+1:j]，则A[i:k]和A[k+1:j]也是最优的。（反证可得）

2.矩阵链乘的子问题空间：A[i:j]，$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$

A[1:1], A[1:2], A[1:3], … , A[1:n]
A[2:2], A[2:3], … , A[2:n]
… … …
A[n-1:n-1], A[n-1:n]
A[n:n]

动态规划算法（2）

- 递归求解最优解的值

记m[i][j]为计算A[i:j]的最少乘法数，则原问题的最优值为m[1][n]，那么有

$$m[i][j]=\begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i\le k<j}\{m[i][k]+m[k+1][j]+p_{i-1}p_kp_j\} & i<j \end{cases}$$

这里，

$$\underbrace{(A_iA_{i+1}\ldots A_k)_{p_{i-1}\times p_k}}\times\underbrace{(A_{k+1}A_{k+2}\ldots A_j)_{p_k\times p_j}}$$

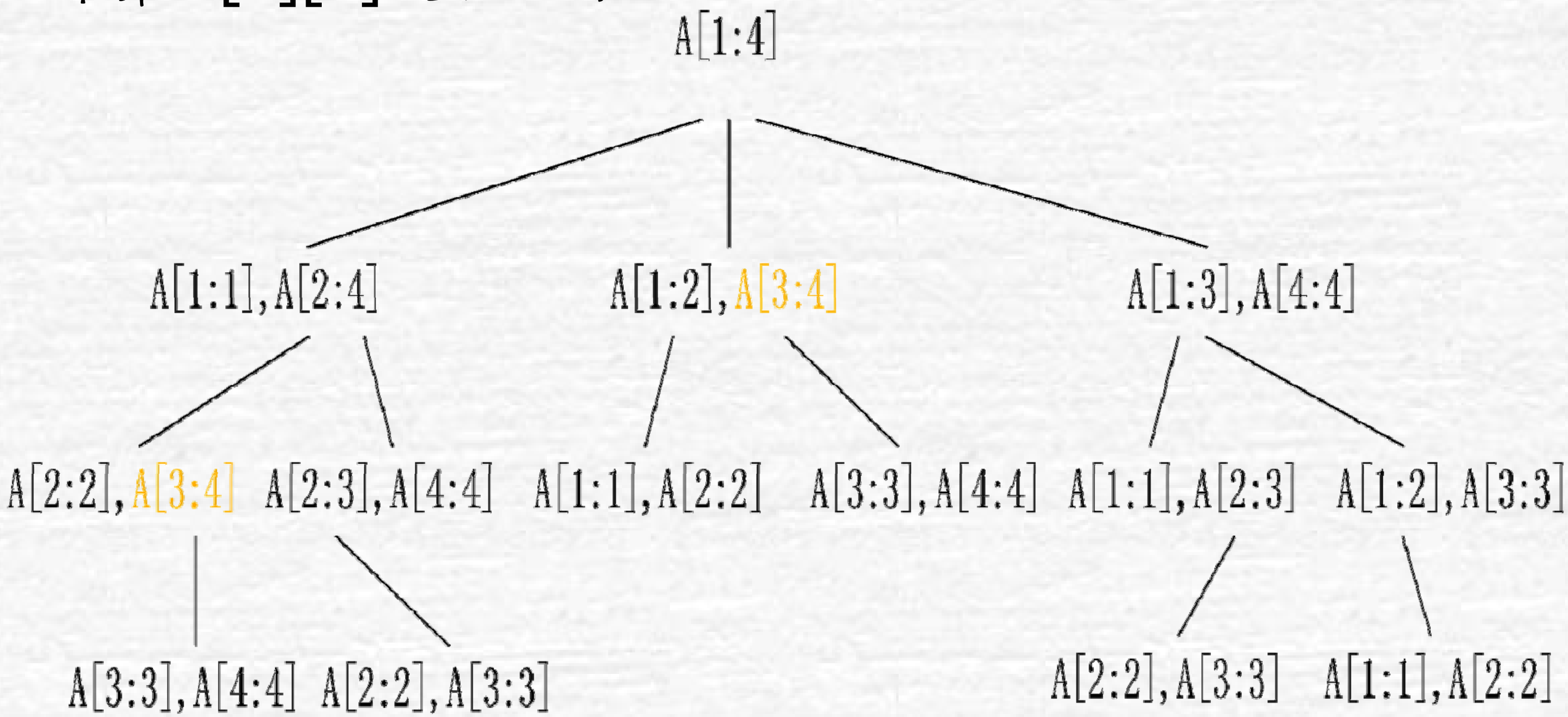
取得的k为A[i:j]最优次序中的断开位置，并记录到表s[i][j]中，即s[i][j] ← k

注：m[i][j]实际是子问题最优解的解值，保存下来避免重复计算。

动态规划算法（3）

- 递归求解最优解的值(Cont.)

计算m[1][4]过程如下：



如A[3:4]被计算了2次，保存下来可以节省许多时间

动态规划算法（4）

- 自底向上记忆化方式求解m[i][j]
  - 计算方向：以链长l递增方向。

$$
\begin{array}{cc}
 & j \\
i & \left(\begin{array}{cccccc}
m[1][1], & m[1][2], & m[1][3], & \ldots, & & m[1][n] \\
 & m[2][2], & m[2][3], & \ldots, & & m[2][n] \\
 & & \ldots & \ldots & & \ldots \\
 & & & & m[n-1][n-1], & m[n-1][n] \\
 & & & & & m[n][n]
\end{array}\right)
\end{array}
$$

  - 计算最优值的算法(Godbole,1973)：P213

    $T(n)=O(n^3)$, $S(n)=O(n^2)$

  - 注：①如果自顶向下计算(含重复计算)，这样效率较低(为$\Omega(2^n)$)。

    ②也可以采用自顶向下的记忆型递归算法P220。

    ③Hu和Shing(1980,1982,1984)找到O(nlogn)算法

动态规划算法（5）

- 构造最优解
  - 利用s[i][j]中保存的k，进行对A[i:j]的最佳划分，加括号为$(A_i A_{i+1} \ldots A_k) \times (A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_j)$
  - 构造最优解的算法：P215

```
PrintOptimalParens(s, i, j)
{   if i=j then
        print "A"i;
    else
    { print "(";
      PrintOptimalParens(s, i, s[i,j]);
      PrintOptimalParens(s, s[i,j]+1, j);
      print ")";
    }
}
```

动态规划算法（6）

- 计算示例：

	行 x 列
A1	30x35
A2	35x15
A3	15x5
A4	5x10
A5	10x20
A6	20x25

s (i \ j)	1	2	3	4	5	6
1		1	1	3	3	3
2			2	3	3	3
3				3	3	3
4					4	5
5						5
6						

m (i \ j)	1	2	3	4	5	6
1	0	15750	7875	9375	11875	15125
2		0	2625	4375	7125	10500
3			0	750	2500	5375
4				0	1000	3500
5					0	5000
6						0

Result

$((A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6))$

$$m[2][5]=\min\begin{cases} m[2][2]+m[3][5]+p_1p_2p_5 = 0+2500+35\times15\times20=13000 \\ m[2][3]+m[4][5]+p_1p_3p_5 = 2625+1000+35\times5\times20=7125 \\ m[2][4]+m[5][5]+p_1p_4p_5 = 4375+0+35\times10\times20=11375 \end{cases}$$

第15章 动态规划

15.1 方法概述

15.2 多段图规划

15.3 矩阵链乘法

15.4 最大子段和

15.5 最长公共子序列

15.6 0-1背包

15.4 最大子段和

- 问题描述
- 直接算法：$T(n)=O(n^2)$
- 分治算法：$T(n)=O(n\log n)$
- 动态规划算法：$T(n)=O(n)$

问题描述

- 给定整数序列$a_1, a_2, \ldots, a_n$，求形如$\sum_{k=i}^{j} a_k$的子段和的最大值。规定子段和为负整数时，定义其最大子段和为0，即

$$\max_{1\le i\le j\le n}\left\{\max\left\{0, \sum_{k=i}^{j} a_k\right\}\right\}$$

- 例如，$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)=(-2,11,-4,13,-5,-2)$
最大子段和为

$$\sum_{k=2}^{4} a_k = 20$$

直接算法

```
MaxSubSum1(n, a[], besti, bestj)
{ //数组a[]存储ai，返回最大子段和，保存起止位置到Besti,Bbestj中
    sum=0;
    for i=1 to n do
        for j=i to n do
        {   thissum=0;
            for k=i to j do           //可以改进，省略此循环
                thissum += a[k];
            if(thissum>sum)
            {   sum=thissum;
                besti=i; bestj=j;
            }
        }
    return sum;
}
```

注：原算法： $T(n)=O(n^3)$;

思考题：对k循环可以省略，改进后的算法： $T(n)=O(n^2)$;

分治算法（1）

- 基本思想

将A[1..n]分为a[1..n/2]和a[n/2+1..n]，分别对两区段求最大子段和，这时有三种情形：

Case 1：a[1..n]的最大子段和的子段落在a[1..n/2]；

Case 2：a[1..n]的最大子段和的子段落在a[n/2..n]；

Case 3：a[1..n]的最大子段和的子段跨在a[1..n/2]和a[n/2..n]之间；

分治算法（2）

- 基本思想(Cont.)

对Case 1和Case 2可递归求解；

对Case 3，可知a[n/2]和a[n/2+1]一定在最大和的子段中，因此

在a[1..n/2]中计算： $S_1 = \max_{1 \le i \le n/2} \sum_{k=i}^{n/2} a_k$

在a[n/2..n]中计算： $S_2 = \max_{n/2+1 \le i \le n} \sum_{k=n/2+1}^{i} a_k$

易知：S_1+S_2是Case 3的最大值

分治算法（3）

- 算法

```
MaxSubSum2(a[], left, right)
{ //返回最大子段和
   sum=0;
   if( left=right )
     sum=a[left]>0?a[left]:0;
   else
   { center=(left+right)/2;
     leftsum=
          MaxSubSum2(a, left,center);
     rightsum=
          MaxSubSum2(a, center+1, right);
     s1=0; leftmidsum=0;
     for i=center to left do
     {   leftminsum += a[i];
         if (leftmidsum>s1)  then
             s1=leftmidsum;
     }
     s2=0; rightmidsum=0;
     for i=center+1 to right do
     {   rightminsum += a[i];
         if(rightmidsum>s2) then
             s2=rightmidsum;
     }
     sum=s1+s2;
     if(sum<leftsum) then sum=leftsum;
     if(sum<rightsum) then sum=rightsum;
   } //end if
   return sum;
}//end
```

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 2T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T(n)=O(n\log n)$$

动态规划算法（1）

- **基本思想**
  - 子问题定义

    考虑所有下标以j结束的最大子段和b[j]，即

$$b[j]=\max_{1\le i\le j}\left\{\max\left\{0,\ \sum_{k=i}^{j}a_k\right\}\right\}\quad j=1,2,\ldots,n$$

  - 原问题与子问题的关系

$$\max_{1\le i\le j\le n}\left\{\max\left\{0,\ \sum_{k=i}^{j}a_k\right\}\right\}=\max_{1\le j\le n}\left\{\max_{1\le i\le j}\left\{\max\left\{0,\ \sum_{k=i}^{j}a_k\right\}\right\}\right\}=\max_{1\le j\le n}\{b[j]\}$$

  - 子问题解的递归关系

$$b[j]=\begin{cases}\max\{a_1,0\} & j=1\\ \max\{b[j-1]+a_j,0\} & j>1\end{cases}$$

动态规划算法（2）

- 算法

```
int MaxSubSum3(int n, int a[])
{
    int sum=0, b=0;   //sum存储当前最大的b[j], b存储b[j]
    for(int j=1; j<=n; j++)
    {   b += a[j];
        if(b<0) then b=0;        // b[j]
        if(b>sum) then sum=b;
     }
    return sum;
 }
```

- 运行时间： T(n)=O(n)
- 思考题

如果要记录最大子段的区间，如何修改程序？

第15章 动态规划

15.5 最长公共子序列（LCS）

- 问题描述
- 如何求X、Y的LCS
  - LCS最优解结构特征（step1）
  - 子问题的递归解（step2）
  - 计算最优解值（step3）
  - 构造一个LCS（step4）

问题描述（1）

- 子序列定义

给定序列$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$，序列$Z=(z_1,z_2,\ldots,z_k)$是X的一子序列，必须满足：若X的索引中存在一个严格增的序列$i_1,i_2,\ldots,i_k$，使得对所有的j=1~k，均有$x_{i_j}=z_j$

例如，序列Z={B，C，D，B}是序列X={A，B，C，B，D，A，B}的子序列，相应的递增下标序列为{2，3，5，7}。

- 两个序列的公共子序列

Z是X和Y的子序列，则Z是两者的公共子序列CS。

- 最长的公共子序列(LCS)

在X和Y的CS中，长度最大者为一个最长公共子序列LCS。

问题描述 (2)

- Example:

In biological application, given two DNA sequences, for instance

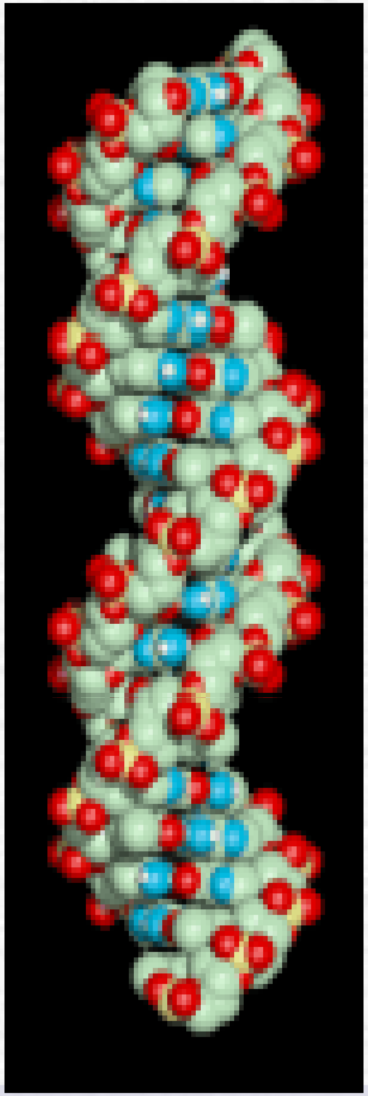
S_1 = ACCGGTCGAGTGCGCGGAAGCCGGCCGAA

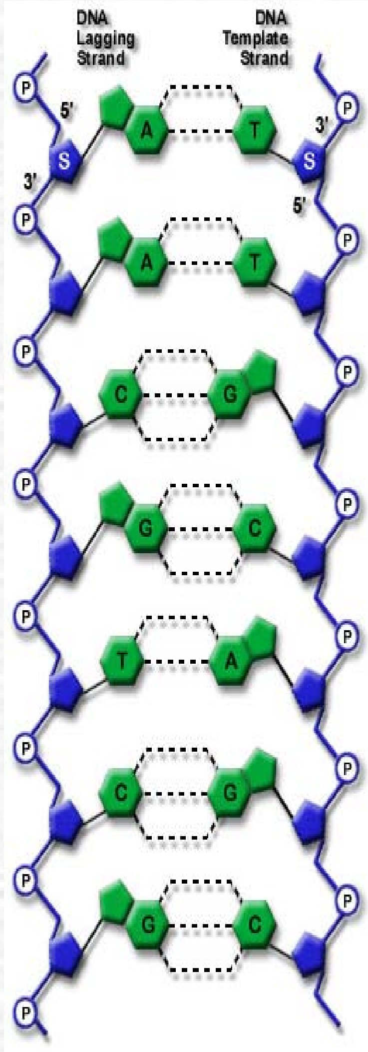
and

S_2 = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA,

how to compare them?

We have various standards of similarity for distinct purposes. While, the LCS of S_1 and S_2 is S_3 = GTCGTCGGAAGCCGGCCGAA.





© 2001 Regents of N.M. State Univ./SWBIC

求LCS的step1（1）

- Step1: LCS最优解的结构特征

  定义X的i^{th}前缀：$X_i=(x_1,x_2,\ldots,x_i)$，$i=1\sim m$

  $X_0=\varphi$　　φ为空集

- Th15.1 (一个LCS的最优子结构)

  设序列$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$和$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$，$Z=(z_1,z_2,\ldots,z_k)$是X和Y的任意一个LCS，则

  (1)若$x_m=y_n$, ==> $z_k=x_m=y_n$且Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的一个LCS;

  (2)若$x_m<>y_n$且$z_k<>x_m$, ==> Z是X_{m-1}和Y的一个LCS;

  (3)若$x_m<>y_n$且$z_k<>y_n$, ==> Z是X和Y_{n-1}的一个LCS;

注：由此可见，2个序列的最长公共子序列可由(1)(2)(3)算出，(2)(3)的解是对应子问题的最优解。因此，最长公共子序列问题具有最优子结构性质。

求LCS的step1（2）

- Th15.1 的证明

  (1)若$x_m=y_n$, ==> $z_k=x_m=y_n$且Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的一个LCS;

  （应用反证法）

  先证：$z_k=x_m=y_n$。

  若$z_k<>x_m$(也有$z_k<>y_n$)，则将x_m加到Z后，于是获得X和Y的长度为k+1的CS，与Z是X和Y的LCS矛盾。

  ==> $z_k=x_m=y_n$

  再证：Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的一个LCS。

  由Z的定义 ==> 前缀Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的CS(长度为k-1)

  若Z_{k-1}不是X_{m-1}和Y_{n-1}的LCS，则存在一个X_{m-1}和Y_{n-1}的公共子序列W，W的长度>k-1，于是将z_k加入W之后，则产生的公共子序列长度>k，与Z是X和Y的LCS矛盾。

  ==> Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的一个LCS

求LCS的step1（3）

- Th15.1 的证明

(2)若x_m<>y_n且z_k<>x_m, ==> Z是X_{m-1}和Y的一个LCS;

∵ z_k<>x_m，则Z是 X_{m-1}和Y的一个CS

下证：Z是X_{m-1}和Y的LCS

（反证）若不然，则存在长度>k的CS序列W,

显然，W也是X和Y的CS，但其长度>k，矛盾。

(3)若x_m<>y_n且z_k<>y_n, ==> Z是X和Y_{n-1}的一个LCS;

(3)与(2)对称，类似可证。

综上，定理15.1证毕。 □

求LCS的step2

- Step2: 子问题的递归解
  - 定理15.1将X和Y的LCS分解为：

    (1)if $x_m=y_n$ then　　//解一个子问题

    　　找X_{m-1}和Y_{n-1}的LCS；

    (2)if $x_m<>y_n$ then　　//解二个子问题

    　　找X_{m-1}和Y的LCS 和 找X和Y_{n-1}的LCS；

    　　取两者中的最大的；
  - c[i,j]定义为X_i和Y_j的LCS长度，i=0~m, j=0~n；

$$c[i,j]=\begin{cases} 0 & i=0 \; or \; j=0 \\ c[i-1,j-1]+1 & i,j>0 \; and \; x_i=y_j \\ \max\{c[i,j-1],c[i-1,j]\} & i,j>0 \; and \; x_i<>y_j \end{cases}$$

求LCS的step3（1）

- Step3: 计算最优解值
  - 数据结构设计

    c[0..m, 0..n]　//存放最优解值，计算时行优先

    b[1..m, 1..n]　//解矩阵，存放构造最优解信息

$$
b[i, j] = \begin{cases} \nwarrow & \text{如果} c[i, j] \text{由} c[i-1, j-1] \text{确定} \\ \uparrow & \text{如果} c[i, j] \text{由} c[i-1, j] \text{确定} \\ \leftarrow & \text{如果} c[i, j] \text{由} c[i, j-1] \text{确定} \end{cases}
$$

当构造解时，从b[m,n]出发，上溯至i=0或j=0止

上溯过程中，当b[i,j]包含“↖”时打印出xi(yj)

求LCS的step3（2）

- Step3: 计算最优解值
  - 算法

```
LCS_Length(X, Y)
{    m ←length[X];  n ←length[Y];
     for  i←0  to m  do  c[i,0] ←0;     //0列
     for  j←0  to n  do  c[0,j] ←0;     //0行
     for  i←1  to m  do
          for j←1  to n  do
               if x_i=y_j  then
                { c[i, j]←c[i-1, j-1] +1; b[i, j] ← "↖"; }
               else
                    if c[i-1, j]>=c[i, j-1] then
                    {  c[i, j]←c[i-1, j]; b[i, j] ← "↑"; }   //由X_{i-1}和Y_j确定
               else
                    { c[i, j]←c[i, j-1]; b[i, j] ←  "←" ; }  //由X_i和Y_{j-1}确定
   return  b and  c;
  }
```

时间： θ (mn)

求LCS的step3（3）

Example

i \ j		0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

求LCS的step4

- **Step4: 构造一个LCS**
  - 算法

```
Print_LCS(b, X, i, j)
{   if i=0 or j=0 then return;
    if b[i,j]="↖"  then
    {   Print_LCS(b, X, i-1, j-1);
        print  x_i;
    }
    else
        if b[i,j]="↑" then Print_LCS(b, X, i-1, j);
        else  Print_LCS(b, X, i, j-1);
}
```

时间：Θ(m+n)

第15章 动态规划

15.6 0-1背包问题

- 问题描述及举例
- 问题满足最优性原理
- 递归关系推导
- 算法
- 时间分析

问题描述及举例

- 问题描述：Knap(1,n,c)

  $Knap(l,n,c)$定义如下：

$$\max\sum_{i=l}^{n} v_i x_i \qquad v_i > 0$$

$$\begin{cases} \sum_{i=l}^{n} w_i x_i \le c & w_i > 0 \\ x_i \in \{0,1\} & l \le i \le n \end{cases} \qquad 求(x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)使目标函数最大$$

- 例如： $w=(w_1,w_2,w_3)=(2,3,4)$, $v=(v_1,v_2,v_3)=(2,3,4)$,

  n=3, c=6, 求Knap(1,3,6)

  取x=(1,0,1)时，$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 5\cdot 1 = 6$ 最大

  用穷举法求解，时间复杂度为$O(n2^n)$

- 最优性原理证明：（见第1节）

递归关系

- 考虑子问题：

子问题的背包容量在变化

Knap(i, n, j) j≤c (假设c, w_i取整数)

设其最优值为m(i, j), 即m(i, j)是背包容量为j, 可选物品为i,i+1,…,n的0-1背包问题的最优值。

- 递归式如下：

不取物品i

$$m(i,\ j)=\begin{cases}\max\{m(i+1,\ j),\ m(i+1,\ j-w_i)+v_i\} & j\ge w_i \quad (1)\\ m(i+1,\ j) & 0\le j<w_i \quad (2)\end{cases}$$

取物品i

说明：当$j<w_i$时，只有$x_i=0,\ \therefore m(i,\ j)=m(i+1,\ j);$

$$当j\ge w_i时，\begin{cases}取x_i=0时， & 为m(i+1,\ j)\\ 取x_i=1时， & 为m(i+1,\ j-w_i)+v_i\end{cases}$$

$$临界条件：\ m(n,\ j)=\begin{cases}v_n & j\ge w_n \quad (3)\\ 0 & 0\le j<w_n \quad (4)\end{cases}$$

0-1背包问题算法（1）

```
Knapsack( v[], w[], c, n, m[][] )
{//输出m[1][c]
    jMax=min(w[n]-1, c);  //j≤jMax, 即0≤j<w_n; j>jMax, 即j≥ w_n
    for j=0 to jMax do  m[n][j]=0;      //0≤j<w_n, (4)式
    for j=w[n] to c do   m[n][j]=v[n];   //j≥ w_n, (3)式
    for i=n-1 dwonto 2 do  //i>1表示对i=1暂不处理, i=1时只需求m[1][c]
    {   jMax=min(w[i]-1, c);
        for j=0 to jMax do  //0≤j<w_i, (2)式
            m[i][j]=m[i+1][j];
        for j=w[i]  to c  do    //j≥ w_i, (1)式
            m[i][j]=max(m[i+1][j], m[i+1][j-w[i]]+v[i]);
     }
    if c>=w[1]  then  m[1][c]=max(m[2][c], m[2][c-w[1]]+v[1]);
    else m[1][c]=m[2][c];
 }
```

0-1背包问题算法（2）

```
Traceback( w[], c, n, m[][], x[])
{//输出解x[1..n]
    for i=0 to n do
        if(m[i][c]=m[i+1][c])  x[i]=0;
        else
        {   x[i]=1;
            c -= w[i];
        }
    x[n]=(m[n][c])?1:0;
}
```

- 运行时间： T(n)=O(cn)

注： 当c>2^n时， 算法仍需O($n2^n$)

End of Ch15