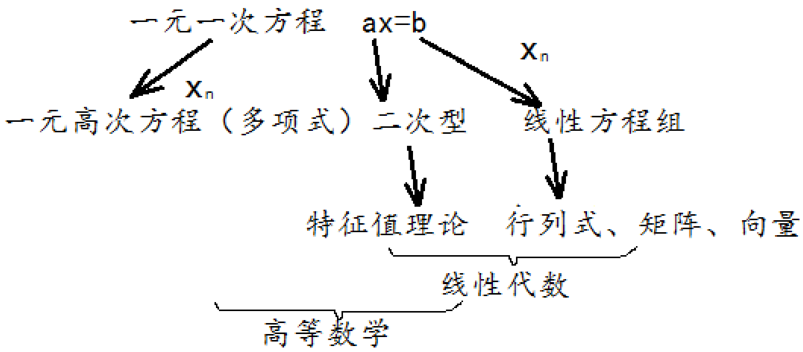
线性代数（基础）



第一讲 行列式

一、行列式的概念

1、排列、逆序与对换

（1）排列 $1,2,\cdots,n$ 按一定顺序排成 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为 n 级排列

$1,2,3$ 3 级排列（标准排列）

$5,1,3,4,2$ 5 级排列

注：所有 n 级排列共有 $n!$ 个

（2）逆序与逆序数

$$\tau\left(j_1,j_2,j_3,\cdots,j_n\right)\begin{cases}\text{偶，偶排列}\\ \text{奇，奇排列}\end{cases}$$

（3）对换 $j_1,j_2,j_3,\cdots j_k,\cdots,j_n$ $j_1,j_k,j_3,\cdots j_2,\cdots,j_n$

（4）如 $\tau(1,2,3)=0,\tau(3,2,1)=3$ 对换一次改变奇偶性

一般地，对换奇数次改变排列的奇偶性，对换偶数次不改变排列的奇偶性。

2、n 阶行列式的定义

（1）引例 求 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ 的解。$\Rightarrow x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\cdots$

设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\ b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12};x=\frac{D_1}{D}$

结果特点：①项数；②每一项的构成（必须来自不同行，不同列）；③符号确定（看列标逆序数）

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}$$

推广：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

（对角线法则只用于 2,3 阶行列式）

（二）定义 $D_n = \Delta(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$

注：D_n 是一个数值，是 $n!$ 项代数和，每项均取自不同行，不同列的 n 个元素乘积。

例 1 计算上三角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

注：同样地 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ * & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

类似地 $\begin{vmatrix} * & a_{1n} \\ a_{n1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{1n} \\ a_{n1} & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} \cdots a_{n1}$

类似地 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$； $\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

（2）行列式中零元素较多时，才考虑用定义求。

二、行列式的性质

性质 1 行列互换，其值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：记 $D = \Delta(a_{ij}), D^T = \Delta(b_{ij})$，则 $a_{ij} = b_{ji}$，于是有 $D^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D$$

性质 2 互换行列式中两行或两列其值变换

注：1）若 D 中某两行（列）元素相同，则 $D=0$；

2）换奇数次变号，换偶数次仍是原行列式；

性质 3 在行列式中某一行或某一列有公因子可以提出来，即

$$\begin{vmatrix} & * & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ & * & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & ka_{1j_1} & \\ * & ka_{2j_2} & * \\ & \vdots & \\ & ka_{nj_n} & \end{vmatrix} = k\left| \quad \right| = kD$$

证：$h=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = k\sum(\ ) = kD$

注：1）若 D 中有一行（列）元素为零，则 $D=0$；

2）若 D 中有两行（列）对应成比例则 $D=0$；

性质 4 若行列式的某一行（列）元素均为两数之和则可分为两个行列式的和。

$$\begin{vmatrix} & * & & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ & * & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & * & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & * & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ & * & & \end{vmatrix}$$

注：$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & e \\ c_1+d_1 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e \\ c_1 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & e \\ d_1 & f \end{vmatrix}$ 正确

$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$ 错误

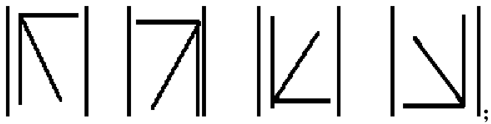
性质 5 将行列式的某行（列）的 k 倍加到第一行（列）上其值不变。

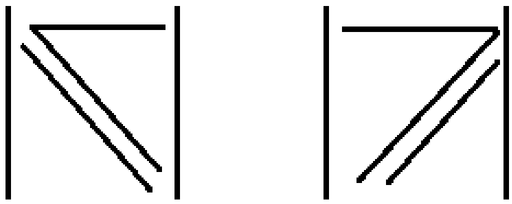
例 2 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$ $a_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$

【分析】三角形法：利用性质化行列式为上（下）三角行列式

解：$$D \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_1-\frac{1}{a_i}r_i} \begin{vmatrix} a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix} = \left(a_i-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_2\cdots a_n$$

推广：两边夹一对角线

1） $\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$；2）所有两边夹一对角线；

3）两边对角线一边（三角形法）

Ex：计算$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & \cdots & a_n \\ -1 & x & & \cdots & \\ & -1 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & x \end{vmatrix}$,结果$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, (x \neq 0)$

例 3 计算$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & a & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

【分析】行和列和相等，$\cdots$三角形法

$\begin{cases} \text{行和相等，列加} \\ \text{列和相等，行加} \end{cases}$，解：$D_n \overset{c_1+c_2}{\underset{i=1,2,\cdots,n}{===}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 4 设$D_n = \Delta(a_{ij})$，若$a_{ij} = a_{ji}$，则D_n称n阶对称行列式，若$a_{ij} = -a_{ji}$，则D_n为n阶反对称行列式。

证：由$a_{ij} = -a_{ji}$，则$i = j$时则$a_{ii} = 0$

$$D_n = n1\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & \\ & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ & & & \ddots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{n1} \\ a_{12} & 0 & & \\ & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ & & & \ddots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D_n$$

若 n 为奇数时，$D_n = -D_n$，即 $D_n = 0$

三、行列式按行（列）展开

1、引例

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

余子式，代数余子式 $\underbrace{A_{ij}}_{\text{代数余子式}} = (-1)^{i+j}\underbrace{M_{ij}}_{\text{余子式}}$

注：1）A_{ij}, M_{ij} 都是行列式，数值只与 a_{ij} 的位置有关，而与 a_{ij} 的值无关。

如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\quad$ 1与a,2与b,3与c $\quad \Delta_{ij}, M_{ij}$ 相等；

2）A_{ij}, M_{ij} 最多只差一个符号；

2、行列式展开定理

$$D_n = \Delta(a_{ij}) = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{cases}$$

注：1）在降阶时运用展开定理，降阶之前应先用性质将某一行（列）只剩一个非零元素；

2）$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{13}A_{13} \text{则} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 0$$

例：$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2x & 2x & x & x-3 \\ -1+x & 1 & 2-x & -x \\ 1 & x & -x & 2-x \end{vmatrix}=0$ 求 x 的值。

解：$D\overset{C_2+C_1}{===}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2x & 0 & x & x-3 \\ -1+x & x & 2-x & -x \\ 1 & 1+x & -x & 2-x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x & x-3 \\ x & 2-x & -x \\ 1+x & -x & 2-x \end{vmatrix}\overset{r_3-r_2}{===}\begin{vmatrix} 0 & x & x-3 \\ x & 2-x & -x \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$\overset{r_2-xr_3}{===}\begin{vmatrix} 0 & x & x-3 \\ 0 & 2+x & -3x \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x-3 \\ x+2 & -3x \end{vmatrix}=-4x^2+x+6=0$

例 6 计算范德蒙行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

【分析】数学归纳法 递推公式

解：$D_2=a_2-a_1$，

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) \end{vmatrix}=$$

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})=\prod_{1\le j\le i\le n}(a_i-a_j)$$

练习：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{===}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & b+c+a & c+a+b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

四、克莱姆法则 $A_{n\times n}x=b$

$ax=b\begin{cases} a\neq 0，\text{有唯一解}x=\frac{b}{a} \\ a=0\text{时}\begin{cases} b=0,\text{无穷多解} \\ b\neq 0，\text{无解} \end{cases} \end{cases}$；$ax=0\begin{cases} a\neq 0，\text{只有零解} \\ a=0,\text{只有非零解，且有无穷多个} \end{cases}$

对于非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ $(*1)$

（1）若 $D=\Delta(a_{ij})\neq 0$ 则 $(*1)$ 有唯一解，$x_i=\frac{D_i}{D}$，D_i 为 D 的第 i 列换为常数列；

（2）若$(*1)$无解或有无穷多解，则$D=0$；

注：$D=0$仅是$(*1)$有无穷多解或无解的必要条件而非充分条件；

对于齐次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ $(*2)$

1）若$D\neq 0$则$(*2)$只有零解；2）$(*2)$有非零解$\Leftrightarrow D=0$（充要条件）

例 7 解方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=1 \\ 4x_1+9x_2+16x_3+25x_4=1 \\ 8x_1+27x_2+64x_3+125x_4=1 \end{cases}$。

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(5-2)(5-3)(4-3)(5-4)=12\neq 0$

$\therefore$方程组有唯一解。

$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 16 & 25 \\ 1 & 9 & 64 & 125 \end{vmatrix}=48$；$D_2=-72, D_3=48, D_4=-12$，$x_i=\frac{D_i}{D}$

例 18 设方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=2 \end{cases}$有无穷多解，则$a=?$

$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0$，则$a=-2$或$a=1$

“三讨论”$\begin{cases} \text{求出参数结果不唯一时} \\ \text{参数当分母时} \\ \text{参数位于行阶梯形行首时} \end{cases}$

当$a=1$时无解；当$a=-2$时，无穷多解。

Ex：已知$\begin{cases} \lambda x_1+x_2=0 \\ 2x_1+x_3+x_4=0 \\ x_3+2x_4=0 \\ x_1+\lambda x_3=0 \end{cases}$

第二讲　矩阵及其运算

一、矩阵的概念

1、引例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} ;\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2、定义 $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ；　$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

注：矩阵与行列式是不一样的：①矩阵的行列数不一定相等；②矩阵是一个数表，而行列式是一个数值；

3、同型矩阵与相等 若 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$， $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

A 与 B 同型　若 $a_{ij} = b_{ij}$ 则 $A = B$

4、几个特殊类型的矩阵

（1）零矩阵　不同型的零矩阵是不一样的；（2）行矩阵　列矩阵

$A = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$（行向量）$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n\right)^T$

（3）方阵　$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

几个常数的矩阵：$1'$、单位阵 $E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = I_n$；$2'$、数量矩阵 $kE = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}$；

$3'$、对角矩阵 $A_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$；$4'$、上下三角矩阵；$5'$、对称矩阵与反对称矩阵；

$6'$、正交矩阵 $A^T A = AA^T = E$

二、矩阵的运算

1、线性运算

（1）加减 $A \pm B = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)$，其中 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

注：矩阵的加减满足交换律和结合律：$A \pm B = B \pm A$

（2）数乘 $kA = Ak = (ka_{ij})$，k 为实数；

注：若 $kA = 0 \Leftrightarrow k = 0 或 A = 0$；

数乘矩阵也满足交换律，结合律，分配律，如 $A(kB) = (kA)B = k(AB)$;

2、矩阵的乘法

$$AB\begin{cases} 能不能乘：左因子的列数 = 右因子的行数 \\ 怎么乘：左行右列对应元素相乘再相加 \end{cases};$$

$A_{m\times s} \cdot B_{s\times n} = C_{m\times n}$；$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{1s}b_{sj}$

如：$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

注：① $AB \neq BA$ 但 $A(BC) = (AB)C$; $A(B + C) = AB + AC$ ；

（注：即使 AB, BA 但 AB 未必等于 AB ）

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$； $AB \neq BA$；

②矩阵乘法也不满足消去律

$AB = 0 \not\Longrightarrow A = 0 或 B = 0$； $AB = AC$ 且 $A \neq 0 \not\Longrightarrow B = C$

③ $A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A$

单位矩阵的灵活运用　　招之即来，挥之即去，变来变去

例 1 设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$， $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，求 AB, BA 。

解： $AB = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

$BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，秩$=1$

注：行列为积，列行为矩（秩为 1 的矩阵）

行行，列列不能乘

例 2 用矩阵表示方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

解：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$； $A\vec{x}=\vec{b}$；（齐次）

3、方阵的乘幂与方项式（只有方阵才有幂，行列式，可逆，特征值）

设 A 为方阵则：（1）乘幂 $A^2=AA$　　$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}$，规定 $A^0=E$；

（2）方阵的多项式：

设 $f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$，则 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$ 称为方阵 A 的多项式（仍为 A 同阶的方阵）

注：1） $A^k+A^l=A^{k+l}$　；$(A^k)^l=A^{kl}$，但 $(AB)^k\neq(BA)^k\neq A^kB^k$；2）方阵 A 的多项式可因式分解，即 $A^2-E=(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$，$(A+E)^2=A^2+2A+E$

$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

例 3 求例 1 中的 $(AB)^n,(BA)^n$。

解：$(AB)^n=(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^n$；$(BA)^n=\underbrace{BA\cdot BA\cdots BA}_{n个}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^{n-1}BA$

注：求方阵 n 次幂的一般方法

$1'$、秩一法：若 $r(A_{n\times n})=1$ 则先将 A 分解成一列乘以行形式，再用矩阵乘法结合律计算，如

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，求 A^n。

因 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\alpha\beta^T$，故 $A^n=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)^{n-1}\alpha\beta^T$

$2'$、对角化；$3'$、数学归纳法

（1）定义　$A=(a_{ij})_{m\times n}\Rightarrow A^T=(a_{ji})_{m\times n}$；

（2）性质　$(A^T)^T=A$　　$(kA)^T=kA^T$　　$(AB)^T=B^TA^T$　　$(aA+bB)^T=aA^T+bB^T$

5、方阵的行列式　$|A_{m\times n}|$ 运算性质

$1'$、$\left|A^T\right|=|A|$；$2'$、$\left|kA_{n\times n}\right|=k^n|A|$；$3'$、$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$；如

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}；\ |AB|=0,|BA|=0$$

推广：$\left|A^k\right|=|A|^k$

注：1）$|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$;2)若 $A=0$，则 $|A|=0$，但 $|A|=0 \not\Longrightarrow A=0$；

例 4 n 阶行列式 $|A|$ 的各个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下方阵：

$$A^*=\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$称为 A 的伴随矩阵，求证 $AA^*=A^*A=|A|E$

证:设 $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}=A$ 则

$$AA^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&&&\\&|A|&&\\&&\ddots&\\&&&|A|\end{pmatrix}=|A|E=A^*A\text{Z}$$

注：1）见到 A^* 就要想到用 $AA^*=A^*A=|A|E$ 来处理；2）$AA^*=|A|\Rightarrow\left|AA^*\right|=\left||A|E\right|$,即

$|A|\left|A^*\right|=|A|^n$，当 $|A|\neq0$ 时，有 $|A^*|=|A|^{n-1}$。 A 为 n 阶方阵，$A=0$ 也成立；

3）$E^*=E,\left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^*,(kA)^*=k^{n-1}A^*,A$ 为 n 阶方阵；

4）若 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则 $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\rightarrow$ 主对调，副变号。

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，求 $|B|$。

【分析】抽象行列式求值（已知矩阵等式）：求谁就先分解出谁然后两边再取行列式即可。

解：条件等式两边同右乘 A，$ABA^*A=2BA^*A+A$

即 $|A|AB=2|A|B+A$，又 $|A|=3$，于是有 $3AB=6B+A$

即 $3AB-6B=A \quad 3(A-2E)B=A\Rightarrow|3(A-2E)B|=|A|,27|A-2E||B|=|A|$

而$\left|A-2E\right|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=1$,故$\left|B\right|=\frac{1}{9}$

Ex:$\left|B^*\right|=\frac{1}{81}$

三、逆矩阵

1、背景　$ax=b,a\neq 0$时$a^{-1}ax=ba^{-1}$，$x=a^{-1}b$

$$Ax=B?A^{-1},A^{-1}Ax=A^{-1}B,x=A^{-1}B$$

2、定义：若$AB=BA=E$，则$A^{-1}=B,B^{-1}=A$，其中A,B为同阶方阵。

注：1）可逆矩阵A的逆矩阵唯一；

证：设B_1,B_2均为A的逆矩阵，$AB_1=B_1A=E,AB_2=B_2A=E$

$B_1=B_1E=B_1\left(AB_2\right)=\left(B_1A\right)B_2=EB_2=B_2$。

2）$E^{-1}=E$

$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\lambda_i\neq 0$，则$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$

3、方阵可逆条件与求逆公式

方阵可逆$\Leftrightarrow\left|A\right|\neq 0$

证：必要性$\left(\Rightarrow\right)$由A可逆知，存在A^{-1}使$AA^{-1}=E$，故$\left|AA^{-1}\right|=1,\left|A\right|\left|A^{-1}\right|=1\Rightarrow\left|A\right|\neq 0$

充分性$\left(\Leftarrow\right)$已知$\left|A\right|\neq 0$，因$AA^*=A^*A=\left|A\right|E$,又$\left|A\right|\neq 0$,故有$A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E$

从而A可逆。

注：1）求逆公式　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$;2)$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\left|A\right|^{-1}$;3)$\left|A\right|\neq 0$，有$\frac{A}{|A|}A^*=A^*\frac{A}{|A|}=E\Rightarrow\left(A^*\right)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

如：$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则$\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{2}A$

推论：设A,B为n阶方阵，若$AB=E$（或$BA=E$），则A,B均可逆，且$A^{-1}=B,B^{-1}=A$.

此推论给出了已知一矩阵方程，求抽象矩阵逆矩阵的方法——求谁先分解出谁，使乘积等于单位矩阵即可。

例 6 设n阶矩阵A满足$A^2+A-4E=0$,求$\left(A-E\right)^{-1}$。

【分析】$(A-E)(\quad)=E$ 或 $(\quad)(A-E)=E$

解：$A^2+A-4E=0$, $A^2-A+2A-2E=2E$, $A(A-E)+2(A-E)=2E$

$(A+2E)(A-E)=2E$, $\frac{A+2E}{2}(A-E)=E$,故 $(A-E)^{-1}=\frac{A+2E}{2}$

4、逆矩阵的性质

设 A,B 可逆，则 $1'$ 、$(A^{-1})^{-1}=A$；$2'$ 、$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$；$3'$ 、$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}(k\neq 0)$；

$4'$ 、$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$； $5'$ 、$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$, $\left[A^*(A^{-1})^*=(AA^{-1})^*=E\right]$；

例 7 设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，证（1）$(AB)^*=B^*A^*$;(2) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$。

证：（1）由 $|AB|=|A||B|\neq 0$ 知 AB 可逆，又由 $A^*=|A|A^{-1}$ 有

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|B|B^{-1}|A|A^{-1}=B^*A^*$$

(2)仍由 $A^*=|A|A^{-1}$，有 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A$

四、分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

1、分块矩阵的运算

（1）加减 $A\pm B$ 分法要求：分法一致；

（2）数乘 kA 分法无要求；

（3）乘法 AB；要求$\begin{cases}A\text{的列分法与B的行分法一致;}\\ \text{A的行分法与B的列分法任意;}\end{cases}$如 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}E_2&A_1\end{bmatrix}, B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}, AB=\begin{bmatrix}E_2&A_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=B_1+A_1B_2$$

而 $A_1B_2=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-4\end{pmatrix}$，故

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&-3\end{pmatrix}$$

(4）转置（子块也跟着转置）

(5）分块对角阵的行列式与逆

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_5 \end{pmatrix}$$，其中 A_i 均为方阵，且均可逆 $\Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_5|$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_5^{-1} \end{pmatrix}$$

例 8 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $|A|, A^{-1}$。

解：因 $A=[\ ]=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix}$，其中 $A_1=5$，$A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，故

$|A|=|A_1||A_2||A_3|=10$

而 $A_1^{-1}=\frac{1}{5}, A_2^{-1}=\frac{A_2^*}{|A_2|}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A_3^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

注：1）$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$;2)$\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & C \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A_m||B_n|$；

3）$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s \\ & & \cdots & \\ & A_2 & & \\ A_1 & & & \end{bmatrix}$；

两种常用的分块法

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\overset{\text{行分}}{=\!=}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vec{\alpha}_2\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_m\end{pmatrix}\overset{\text{列分}}{=\!=}\begin{pmatrix}\vec{\beta}_1&\vec{\beta}_2&\cdots&\vec{\beta}_n\end{pmatrix}$$

注：1）任一$m\times n$矩阵既可看成m个n维行向量组成也可看成由n个m维列向量组成；

$$A_{m\times n}\vec{x}=\vec{b}\qquad A_{m\times n}\overset{\text{列分}}{=\!=}\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{b}$$

$x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_n\vec{\alpha}_n=\vec{b}$（方程组的向量形式）

$x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$

五、矩阵的初等变换

1、定义：矩阵的三种初等变换或列变换　$r_i\leftrightarrow r_j$或$c_i\leftrightarrow c_j$；kr_i或kc_i；r_i+kj或c_i+kc_j

注：1）初等变换均可逆；2）方程组的初等变换时保持解不变的，矩阵的初等变换保秩；

2、初等矩阵　（1）定义：由单位矩阵经过一次初等变化所得到的矩阵，即$E\to E_{ij}$，$E_{i(k)}$，

$E_{ij(k)}$（把第i行的k倍加到第j行或把第j列的k倍加到第i列）

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ E_{13}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ E_{3(k)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix},\ E_{12(k)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）初等矩阵的作用

对A实施一次初等行（列）变换相当于左（右）乘相应的初等变换，如

$$E_{12}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{12}}\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix},\ E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};$$

注：1）“行左列右”原则；2）用$E_{ij}(k)$左乘或右乘矩阵时，注意“左一右二”原则（左行右列）；

3、性质

$1'$、$E_{ij}{}^T=E_{ij}\qquad E_{i(k)}{}^T=E_{i(k)}\qquad E_{ij(k)}{}^T=E_{ji(k)}$；

$2'$、$E_{ij}{}^{-1}=E_{ij}\qquad E_{i(k)}{}^{-1}=E_{i\left(\frac{1}{k}\right)}\qquad E_{ij(k)}{}^{-1}=E_{ij(-k)}$

$3'$、$E_{ij}{}^*=\left|E_{ij}\right|E_{ij}{}^{-1}=-E_{ij}\qquad E_i^*(k)=\left|E_{i(k)}\right|E_i^{-1}(k)=kE_{i\left(\frac{1}{k}\right)}$

$E_{ij}{}^*(k)=\left|E_{ij(k)}\right|E_{ij}{}^{-1}(k)=E_{ij(-k)}$

注：在矩阵乘法与求逆运算中，如果有初等矩阵参与，则要利用初等矩阵的作用性，而不要去计算。

如$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&-2&9\end{pmatrix}$

4、等价矩阵：若存在可逆矩阵P,Q，使$PAQ=B$，则$A\cong b$

注：1）等价关系满足“三性”；2)同型矩阵等价$A\cong B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$；3)若$A$可逆，则$A\cong E$；

5、利用初等变换求逆

$A^{-1}(A,E)=(E,A)\Rightarrow(A,E)\xrightarrow{\text{行变换}}(\mathrm{E},\mathrm{A}^{-1})$ （一般三阶方阵）

Ex:求$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\-1&2&3\end{pmatrix}$的逆。

解：$(A,E)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&1&2&0&-1&1\end{pmatrix}$

第三讲　　向量

一、向量的运算与概念

1、概念：$\vec{\alpha}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$　　$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)^T$

2、线性运算：（1）加法；（2）数乘

例 1 设$\alpha_1=(2\quad 0\quad 0)^T$，$\alpha_2=(0\quad -1\quad 0)^T,\alpha_3=(0\quad 0\quad 1)^T$，求$\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3$

解：$\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3=(2\quad 0\quad 0)^T-(0\quad -3\quad 0)^T+(0\quad 0\quad 4)^T=(2\quad 3\quad 4)^T$

二、向量组的线性相关性

1、线性组合与线性表示

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$　线性组合$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s$

线性表示：对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量$\beta$，若存在一组$k_1,k_2,\cdots,k_s$使

$\beta=k_1\alpha_1+k_1\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$则称$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。

注：1）向量组中任一向量均可由该向量组本身线性表示；2）若β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$部分线性表示，则必可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$现行表示。

2、线性相关与线性无关

（1）引例　同一平面$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$（不共线）　则$\vec{\alpha}_3=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2\Rightarrow k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2-\alpha_3=0$；

（2）定义　对于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$若存在一组不全为零的数使得$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}\ldots(a-1)$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关。

若只有当$k_1=k_2=\cdots=k_s$时才有$(a-1)$成立，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关；

注：1）含有零向量的向量组现行相关；2）单个的零向量是线性无关的，$k\vec{\alpha}=\vec{0}$，$\vec{\alpha}\neq\vec{0}\Leftrightarrow k=0$

例 2 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明（1）$\alpha_1-\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_3-\alpha_2$线性相关；（2）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关；

【分析】讨论向量组线性相关的方法：设$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0}\Rightarrow$恒等变形

$\begin{cases}\text{同乘：左乘矩阵或行向量}\\ \qquad\text{重组}\end{cases}$；$k_1=k_2=\cdots=k_s$(线性无关)或不全为零（线性相关）

解：（1）令$k_1(\alpha_1-\alpha_3)+k_2(2\alpha_1-\alpha_2)+k_3(2\alpha_3-\alpha_2)=\vec{0}$

$(k_1+2k_2)\alpha_1+(-k_2-k_3)\alpha_2+(k_3-k_2)\alpha_3=\vec{0}$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则系数全为零；故有

$\begin{cases}k_1+2k_2=0\\-k_2-k_3=0(*)\\k_3-k_2=0\end{cases}$又$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{vmatrix}=0$，故方程组（*）有非零解，

因此$\alpha_1-\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_3-\alpha_2$线性相关；

（2）令$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+(k_3-k_2)\alpha_3=0$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则

$\begin{cases}k_1+k_3=0\\-k_1+k_2=0\\-k_2+k_3=0\end{cases}$　又$\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=2\neq0$次方程组只有零解，从而$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关；

例 3 设A是n阶矩阵，α是n维列向量，若$A^{m-1}\alpha\neq\vec{0},A^m\alpha=\vec{0}$，证明：向量组 $A\alpha$，

$A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

证：设 $k_1\alpha+k_2A^1\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0$，同左乘 A^{m-1} 得 $k_1A^{m-1}\alpha+k_2A^m\alpha+\cdots+k_mA^{2(m-1)}\alpha=0$，

而 $A^m\alpha=\vec{0}$，故有 $k_1A^{m-1}\alpha=\vec{0}$，又，故 $k_1=0$

从而 $k_2A^1\alpha+k_3A^2\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0$，同时左乘 A^{m-2} 得 $k_2=0$；同理得 $k_3=k_4=\cdots=k_m=0$

因此向量组 $A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

$1'$、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 0)$ 线性相关 $\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个线性表示。

注：两个向量 α_1,α_2 线性 $\begin{matrix}\text{相关}\\\text{无关}\end{matrix}\Leftrightarrow\alpha_1\begin{matrix}\text{可以}\\\text{不可以}\end{matrix}$ 由 α_2 线性表示 $\Leftrightarrow\begin{matrix}\text{存在}\\\text{不存在}\end{matrix}$ 数 k，使 $\alpha_1=k\alpha_2\Leftrightarrow$

对应分量 $\begin{matrix}\text{不成}\\\text{成}\end{matrix}$ 比例；

$2'$、若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一部分线性相关，则整个向量组线性相关，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则其任一部分向量组也线性无关；

$3'$、若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且表示唯一；

证：因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则必存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$ 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0$，其中 $k\neq 0$，否则，若 $k=0$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

知 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，这与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$ 不全为零矛盾，故有

$\beta=\frac{k_1}{k}\alpha_1+\frac{k_2}{k}\alpha_2+\cdots+\frac{k_s}{k}\alpha_s$，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示；

设有任意两个表达式 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s$，即有

$(l_1-k_1)\alpha_1+(l_2-k_2)\alpha_2+\cdots+(l_s-k_s)\alpha_s=0$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关知

$l_1=k_1,l_2=k_2,\cdots,l_s=k_s$ 得证

三、向量组的极大无关组与秩

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rightarrow$ 最多有多少个线性无关组（极大线无关组）

1、定义：设有一向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$；$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jr}$ 是其部分组，若满足;

$1'$、$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jr}$线性无关；$2'$、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任一向量均可由$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jr}$线性表示，则$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jr}$——极大无关组

$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$

注：1) $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le s$；2）若$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r$个线性无关的部分组均可作为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组，任意$r+1$个向量必线性相关。

2、两个向量组等价

若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$中每个向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则称向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，若两个向量组可互相线性表示，则这两个向量组等价。

注：1）向量组的等价也满足“三性”；2）任一向量组与其极大无关组等价；3）两个向量组等价$\Leftrightarrow$其极大无关组等价$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$两个向量组的秩相等；

如I　$(1,0,0)$　$(0,1,0)$　　II $(1,0,0)$　$(0,0,1)$

3、向量组秩的有关性质

$1'$、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性$\begin{cases}相关\\无关\end{cases}\Leftrightarrow r(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s)\begin{cases}<s\\=s\end{cases}$；

$2'$、若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

如I　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　II　$\vec{i},\vec{j}$，而I可由II线性表示　$r(I)\le r(II)$

Δ高维空间不可能放入低维空间中，反之不一定。

$3'$、若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，且$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关则$t\le s$；

$4'$、若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，且$t>s$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性相关

四、矩阵的秩

1、矩阵的k阶子式：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，任取其中k行k列，交叉点处k^2个元素构成的k阶行列式称为A的一个k阶子式。

如：$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-3&-1&-2\\1&2&3&1\end{pmatrix}_{3\times4}$

2、矩阵秩的子式

定义：$r(A)\overset{\Delta}{=}A$中不为零子式的最高阶数；

注：1）$r(A_{m\times n})\le\min\{m,n\}$；2）$r(A)=r(A^T)$；$r(A)=r(kA),k\ne0$；3）若$A$中有一个$k$阶子式不等于零，则$r(A)\ge k$，若$A$中所有$k$阶子式均为零，则$r(A)<k$

3、矩阵秩的基本性质

$1'$、初等变换不改变矩阵的秩

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

$r(A)=r(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n)=r(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_m)^T$——三秩相等；

$2'$、$r(A_{n\times n})=n\Leftrightarrow A$为非奇异矩阵（可逆、满秩）；

$3'$、$r(A)\le r(A,B)$；$4'$、$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$；

$5'$、$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$——矩阵越乘秩越小；

证：有矩阵$A_{m\times n},B_{n\times s}$，则$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}_{n\times s}=\begin{pmatrix}\vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \cdots & \vec{r}_s\end{pmatrix}$

即$r_1,r_2,\cdots,r_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示。

即$r(r_1,r_2,\cdots,r_s)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，也即$r(AB)\le r(A)$,同理$r(AB)\le r(B)$

注：利用矩阵的初等变换求（1）可逆矩阵的秩；（2）判断矩阵是否可逆；（3）求一向量组的秩，进而判断向量组的线性相关性，求极大无关组。

例 4 设向量组$\vec{\alpha}_1=(1\quad1\quad1\quad3)^T$，$\vec{\alpha}_2=(-1\quad-3\quad5\quad1)^T$，$\vec{\alpha}_3=(3\quad2\quad-1\quad p+2)^T$，$\vec{\alpha}_4=(-2\quad-6\quad10\quad p)^T$；$p$为何值时，该向量组（1）线性无关；（2）线性相关，并在此时求出它的秩和一个极大无关组，并把其余向量由此极大无关组线性表示。

【分析】列排作行变换

解：对矩阵$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)$作出等行变换

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 2 & -6\\ 1 & 5 & -1 & 10\\ 3 & 1 & p+2 & p\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p-2\end{pmatrix}$$

（1）当$p\ne2$时，$r(r_1,r_2,r_3,r_4)=4$，此时r_1,r_2,r_3,r_4线性无关；

（2）当 $p=2$ 时，$r(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)=3<4$，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$（或 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）为一个极大无关组。

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\0 & -2 & -1 & -4\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & p-2\end{pmatrix}\xrightarrow{p=2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，故：$\alpha_4=2\alpha_2$

五、向量空间

1、向量空间的基本概念（数一）

内积：$\alpha=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)^T$，$\beta=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)^T$

（1）内积 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

注：$(\alpha,\alpha)=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2$，且 $(\alpha,\alpha)=\alpha^T\alpha=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$

（2）正交　$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=0$；

（3）模　　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

3、施密特正交化方法

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$ 仍为线性无关，且两两正交。

4、规范正交基

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一组基：$1'$、先正交化，得 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$；$2'$、再单位化，得 $\eta_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}(1\le i\le n)$，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为 R^n 的一组规范正交基，令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则 $Q^TQ=QQ^T=E$，故 $Q^{-1}=Q^T$

第四讲　　线性方程组

一、概述

1、线性方程组的三种形式

代数形式 $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

向量形式：$x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_n\vec{\alpha}_n=b$

$x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_n\vec{\alpha}_n=0$，其中 $A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n)$

矩阵形式：

2、线性方程组的特解、通解

3、公共解：若 $A\bar{x}_0=b_1,B\bar{x}_0=b_2$，则 $\bar{x}_0$ 为 $A\bar{x}=b_1,B\bar{x}=b_2$ 的公共解。

二、齐次方程组有非零解的条件

1、引例 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 5x_1+5x_2+5x_3=0 \end{cases}$，显然有非零解。

2、有效方程 $x_1+x_2+x_3=0$，两个自由变量。

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ \quad x_2+x_3=0 \\ \qquad x_3=0 \end{cases}$，只有零解。

有效方程个数为 3，无自由变量。

$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得等价方程组为

$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ \quad x_2+2x_3=0 \end{cases}$

思考：有效方程个数$=r(A)$，$n-r(A)=$自由变量个数

Th：$A_{m\times n}\bar{x}=\bar{0}$ 只有零解 $\begin{array}{l} \text{只有零解} \Leftrightarrow \mathrm{R(A)=n} \\ \text{有非零解} \Leftrightarrow \mathrm{R(A)<n} \end{array}$

特别地，$A_{m\times n}\bar{x}=\bar{0}$ $\begin{array}{c} \text{只有} \\ \text{有非零解} \end{array} \Leftrightarrow r(A)\begin{array}{c} = \\ < \end{array} n \Leftrightarrow |A|\begin{array}{l} \neq 0 \\ =0 \end{array}$

注：1）$A_{m\times n}\bar{x}=\bar{0}$，若 $m<n$，则 $A_{m\times n}\bar{x}=\bar{0}$ 必有非零解；

2）$x_1\bar{\alpha}_1+x_2\bar{\alpha}_2+\cdots+x_n\bar{\alpha}_n=\bar{0}$ $\begin{array}{c} \text{有非} \\ \text{只有} \end{array}$零解 $\Leftrightarrow \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2,\cdots, \bar{\alpha}_{\mathrm{n}}$ 线性$\begin{array}{c} \text{相关} \\ \text{无关} \end{array} \Leftrightarrow \mathrm{A}_{\text{列}}$线性$\begin{array}{c} \text{相关} \\ \text{无关} \end{array}$

3、解的结构

（1）解的基本性质

Th：若 x_1,x_2 为 $Ax=0$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2$ 仍是 $Ax=0$ 的解，$A(k_1x_1+k_2x_2)=k_1Ax_1+k_2Ax_2=0$

推广：若 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 均为 $Ax=0$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$ 仍为 $Ax=0$ 的解。

（2）基础解系（解集合的极大线性无关组）

设 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 是 $Ax=0$ 的解向量，若$1'$、若 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 线性无关；$2'$、$Ax=0$ 任一解向量均可由 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 线性表示，则 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（3）通解　基础解系的线性组合

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 5x_1+5x_2+5x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组 $x_1+x_2+x_3=0$，$r(A)=1<3$，自由变量个数$=n-r(A)=2$，选 x_1,x_3 为自由变量，即有

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3 \\ x_2=x_2 \\ x_3=x_3 \end{cases} \qquad \bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix};\ \bar{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}x_3$$

（4）求解齐次线性方程组的方法步骤如下：$\left(A_{m\times n}\bar{x}=\vec{0}\right)$

$1'$、用初等变换化 A 为行阶梯形，看 $r(A)\overset{=}{\underset{<}{}}n$；$2'$、若 $r(A)=n$，无基础解系，只有零解，若 $r(A)<n$，化行阶梯形为行最简形，写出等价方程组，确定自由变量，并把所有变量用自由变量表示，得基础解系 $\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\cdots,\bar{\xi}_{n-r}$；$3'$、写出通解 $x=k_1\bar{\xi}_1+k_2\bar{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\bar{\xi}_{n-r}$，其中 $\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\cdots,\bar{\xi}_{n-r}$ 为任意常数；

例 1　λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 只有零解，有非零解，写出一组基础解系，并求通解。

解：因 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$

故当 $\lambda\neq5$ 时，$r(A)=3$，方程组只有零解；

当 $\lambda=5$ 时，$r(A)=2<3$，方程有非零解；此时

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得同解方程组 $\begin{cases} x_1+3x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$

选 x_3 为自由变量，$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$，即 $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$

可见 $\xi = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 为方程组的一组基础解系，通解为 $\vec{x} = k\vec{\xi}, k$ 为任意常数；

例 2 设 $A_{m\times n}B_{n\times s} = 0$，证明 $r(A) + r(B) \le n$。

证明：记 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{pmatrix}$，由 $AB = 0 \Rightarrow A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow Ab_j = \vec{0}, j = 1,2,\cdots,s$

故 $b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_s$ 均为 $Ax = 0$ 的解，从而可由 $Ax = 0$ 的基础解系线性表示，于是

$r\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{pmatrix} \le n - r(A)$，即 $r(B) \le n - r(A)$，亦即 $r(B) + r(A) \le n$

三、非奇次线性方程组有解的条件及解的结构。

1、引例 ①$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；0=1矛盾方程，$r(A) \ne r(A,b)$

②$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$；$r(A) = r(A,b) = 3$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$；$r(A) = r(A,b) = 2 < 3$

2、解的判定

Th：$Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A,b)$，且 $r(A) = r(A,b) \begin{cases} = n, \text{有唯一解} \\ < n, \text{有无穷多解} \end{cases}$；

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) < r(A,b)$

注：1）若 $m = n$，则 $|A| = 0$ 只是 $Ax = b$ 无解或有无数解的必要条件；

2）$x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n = 0 \begin{matrix} \text{有解} \\ \text{无解} \end{matrix} \Leftrightarrow \bar{b} \begin{matrix} \text{可由} \\ \text{不可由} \end{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示；

$r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \ne r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow b$ 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

$r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow b$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，

且有 $r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & b \end{pmatrix} = n$ 表示唯一；

$r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & b \end{pmatrix} < n$ 表示不唯一；

3、解的结构

（1）解的基本性质

1、设 x_1, x_2 均为 $Ax=b$ 的解 $\Rightarrow A(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=0$，即 x_1-x_2 是对应奇次方程组的解；

2、设 $Ax_1=b$，$Ax_0=0 \Rightarrow A(\bar{x}_1+\bar{x}_0)=b$，即 x_1+x_0 是 $Ax=b$ 的解；

（2）非奇次的通解

Th:若 $Ax=b$ 有无穷多解，则其通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\xi$，其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，ξ 为 $Ax=b$ 的一个特解；

（3）求解非奇次方程组的方法步骤：

$1'$、用初等变换化增广矩阵 (A,b) 为行阶梯形，看 $r(A)\overset{?}{=}r\le(A,b)$；

$2'$、若 $r(A)\ne r\le(A,b)$，则 $Ax=b$ 无解；若 $r(A)=r\le(A,b)$，化行阶梯形为行最简形，写出等价方程组，看有无自由变量，若无则由行最简形得唯一解；若有则把所有变量用自由变量表示，可得通解；

例 3 设 $\vec{\alpha}_1=(1\ \ -1\ \ 2\ \ -1)^T, \vec{\alpha}_2=(-3\ \ 4\ \ -1\ \ 2)^T, \vec{\alpha}_3=(4\ \ -5\ \ 3\ \ b-2)^T, \vec{\beta}=(0\ \ a\ \ 5\ \ -1)^T$

试问 a,b 满足什么条件时，有

（1）$\vec{\beta}$不能由α_1，α_2，α_3线性表示；

（2）能，且唯一，求表达式；

（3）能，不唯一，求表达式；

解：令 $x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+x_3\vec{\alpha}_3=\vec{\beta}$，则

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 0\\ -1 & 4 & -5 & a\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ -1 & 2 & b-2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & b+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}$$

（1）$a\ne1$，b 任意时，$r(A)<r(A,b)$，方程组无解，此时 $\vec{\beta}$不能由α_1，α_2，α_3线性表示；

（2）$a=1$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & b+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

i) $b\ne-1$时，$r(A)=r(A,b)=3$，此时方程组有唯一解，$\vec{\beta}$可由α_1，α_2，α_3线性表示，且唯一；

此时 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$； $x_1=3,x_2=1,x_3=0$； $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$

ii) $b=-1$时，$r(A)=r(A,b)=2$，此时方程组有无穷多解，$\vec{\beta}$可由α_1，α_2，α_3线性表示，且不唯一；此时

$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$得同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_3=3\\x_2-x_3=1\end{cases}$

选 x_3 为自由变量，即

$\begin{cases}x_1=-x_3+3\\x_2=x_3+1\\x_3=x_3\end{cases}$ （方程组通解）$\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

一般表示式 $\vec{\beta}=(-x_3+3)\vec{\alpha}_1+(x_3+1)\vec{\alpha}_2+x_3\vec{\alpha}_3$ 其中 x_3 为任意常数；

第五讲　　相似矩阵

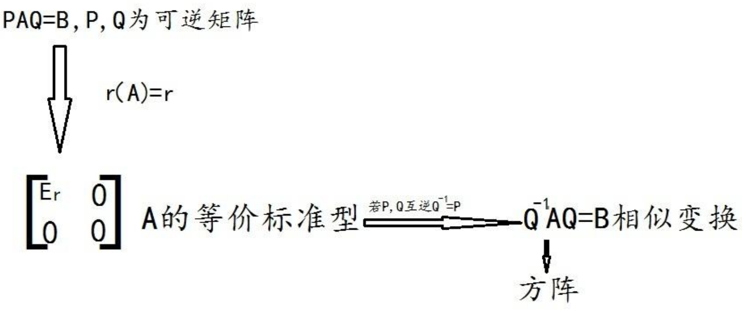
方阵的特征值与特征向量

一、引言　　$Ax=0$

$A\xrightarrow{\text{行变换}}\mathrm{T}(\text{行阶梯形矩阵})$

$Ax=0\to Tx=0$

对 A 实施等价变换，$PA=T$



问题：$1'$、相似变换把方阵化简到什么程度$\to$对角阵

$2'$、为什么要这么做？

二、相似矩阵的概念与性质

方阵可以对角化的条件：

1、概念：对于矩阵 A 与 B，若存在可逆矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=B$，则 A 与 B 相似，记作

$A \sim B$，若$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$则称$A$可对角化，其中$Q$为相似变换矩阵；

注：1)相似变换是一种特殊的等价变换，仅针对方阵而言；

2）相似关系也满足“三性”；

3）定义也可写成$QAQ^{-1}=B,\left(Q^{-1}\right)^{-1}AQ^{-1}=B$；

2、性质　若$A \sim B$，则

（1）$A^T \sim B^T, A^k \sim B^k, A^* \sim B^*, A^{-1} \sim B^{-1}$；

（2）$|A|=|B|, r(A)=r(B)$；

证：（1）因$A \sim B$，故存在可逆矩阵Q使$Q^{-1}AQ=B \Rightarrow \left(Q^{-1}AQ\right)^k=B^k$，即

$\underbrace{Q^{-1}AQ\cdots Q^{-1}AQ}_{k个}=B^k$；

$Q^{-1}A^kQ=B^k \Rightarrow A^k \sim B^k$

（2）$\left|Q^{-1}AQ\right|=|B|$，即$\left|Q^{-1}\right||A||Q|=|B|$，即$\left|Q^{-1}\right||Q||A|=|B| \Rightarrow |A|=|B|$

3、方阵可对角化的充要条件

n阶方阵A可对角化$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵Q，使$Q^{-1}AQ=b=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

假设A可对角化，即上式成立，上式左乘Q

$AQ=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$；令$Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}$，则有

$$A\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}A\eta_1 & A\eta_2 & \cdots & A\eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\eta_1 & \lambda_2\eta_2 & \cdots & \lambda_n\eta_n\end{pmatrix}$$

$$A\vec{\eta}_1=\lambda_1\vec{\eta}_1, A\vec{\eta}_2=\lambda_2\vec{\eta}_2\cdots A\vec{\eta}_n=\lambda_n\vec{\eta}_n$$

$A\vec{\eta}_i=\lambda_i\vec{\eta}_i$　　λ_i −−A的特征值；η_i −−A的属于λ_i的特征向量。

Th:（方阵可对角化的充要条件）
n 阶方阵可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量；
三、方阵的特征值与特征向量

1、概念　　$A\vec{x}=\lambda\vec{x},\vec{x}\neq\vec{0},\left(A_{n\times n}\right)$，$\lambda$ 为 A 的特征值，$\vec{x}$ 为相应的特征向量；

注：1）$A\vec{x}=\lambda\vec{x},\vec{x}\neq\vec{0}$，则有 $A(k\vec{x})=\lambda(k\vec{x})$；2）若 $\vec{x}$ 为 A 的特征向量，则 $A\vec{x}$ 与 $\vec{x}$ 必线性相关；

2、求法

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}\Leftrightarrow\lambda\vec{x}-A\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow(\lambda E-A)\vec{x}=\vec{0},\vec{x}\neq\vec{0}\Leftrightarrow|\lambda E-A|=0\quad\lambda_i\quad(\lambda_i E-A)\vec{x}=\vec{0}$，基础解系；

（1）特征值的求法：解特征方程：$|\lambda E-A|=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$；

（2）特征向量的求法：每一个特征值 λ_i 都对应一个特征方程组 $(\lambda_i E-A)\vec{x}=\vec{0}$，求基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-r}$，$r_i=r(\lambda_i E-A)$，则属于 λ_i 的全部特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r_i}\eta_{n-r_i}$，$k_1,k_2,\cdots k_{n-r_i}$ 是不全为零的常数；

例 1 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-2&\lambda-3&0\\-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=3$，对于 $\lambda_1=1$，解方程组 $(E-A)\vec{x}=\vec{0}$

由 $E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-2&0\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

得同解方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-2x_3\\x_3=x_3\end{cases}$

基础解系为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}2&-2&1\end{pmatrix}^T$，因此属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $k_1\vec{\xi}_1$，k_1 为不为 0 的常数；

对于 $\lambda_2=\lambda_3=3$，解方程组 $(3E-A)\vec{x}=\vec{0}$ 由 $3E-A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得同解方程组为$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=x_3 \end{cases}$ 基础解系为$\xi_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，因此属于$\lambda_2=\lambda_3=3$的全部特征向量为$k_2\xi_2$，$k_2$为不等于$0$的常数；

注：1）上（下）三角阵，对角阵的特征值即为其主对角线上的元素；

2）k重特征值对应的线性无关的特征向量的个数必不超过k个；

3、特征值、特征向量的基本性质

性质$1'$ 设$A\bar{x}=\lambda\bar{x},\bar{x}\neq\bar{0}$,则（1）$(kA)\bar{x}=(k\lambda)\bar{x}$；（3）$A^k\bar{x}=\lambda^k\bar{x}$；

（2）$(aA+bE)\bar{x}=aA\bar{x}+bE\bar{x}=a\lambda\bar{x}+b\bar{x}=(a\lambda+b)\bar{x}$；（4）$A^{-1}\bar{x}=\lambda^{-1}\bar{x}$；

$\left(A\bar{x}=\lambda\bar{x}\text{左乘}\mathrm{A}^{-1},\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}\bar{x}=\lambda A^{-1}\bar{x}\Rightarrow A^{-1}\bar{x}=\lambda^{-1}\bar{x}\right)$；

2）$A^*\bar{x}=\frac{|A|}{\lambda}\bar{x}(A\text{可逆})$；

注：A^T与A有相同的特征值，但特征向量不一定相同；

$\left|\lambda E-A^T\right|=\left|\lambda E^T-A^T\right|=\left|(\lambda E-A)^T\right|=|\lambda E-A|$

但$(\lambda E-A^T)x=0$与$(\lambda E-A)x=0$的基础解系不一定相同（$A^T=A$时相同）

性质$2'$ 若x_1,x_2都是A的属于特征值λ_0的特征向量，则$k_1\bar{x}_1+k_2\bar{x}_2$仍是$A$的属于特征值$\lambda_0$的特征向量，$k_1,k_2$是任意常数，但$k_1\bar{x}_1+k_2\bar{x}_2\neq\bar{0}$；

证：因$(\lambda_0E-A)\bar{x}_1=\bar{0}$ $(\lambda_0E-A)\bar{x}_2=\bar{0}$ 故$(\lambda_0E-A)(k_1\bar{x}_1+k_2\bar{x}_2)=\bar{0}$

性质$3'$ A的属于不同特征值的特征向量必线性无关；

性质$4'$ 设n阶矩阵A的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$则（1）$\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n a_{ii}=trA(\text{迹})$；

二、$\prod_{i=1}^n\lambda_i=|A|$；$A=(a_{ij})_{3\times3}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为三个特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=\lambda^3+C_1\lambda^2+C_2\lambda+C_3$$

含λ^2项$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})$，$C_1=-(a_{11}+a_{22}+a_{33})$，$C_3=-|A|$，又$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$是$A$的三个特征值，故$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+C_2\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

$\Rightarrow a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

注：$A_{n\times n}$可逆$\Leftrightarrow\begin{cases}|\mathrm{A}|\neq 0\\ \exists \mathrm{B}使\mathrm{AB}=\mathrm{E}(或\mathrm{BA}=\mathrm{E})\\ \mathrm{r}(A)=n\\ A_{列}、\mathrm{A}_{行}均线性无关\\ \mathrm{A}\cong\mathrm{E}\\ \mathrm{A}\vec{x}=\begin{cases}\vec{0},只有零解\\ \vec{b},有唯一解\end{cases}\\ A的特征值都不为零\end{cases}$

例 2 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，问$A$能否相似对角化，若$A$可以相似对角化，求可逆矩阵 Q

使$Q^{-1}AQ$为对角阵，并求A^n。

【分析】A可以对角化$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow A$的任一个k重特征值λ_i有k

个线性无关的特征向量，即$n-r(\lambda_i E-A)=k$或$r(\lambda_i E-A)=n-k$

解：由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda+2&-2\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}$，找零，行列和

$\overset{r_1+r_3}{==}\begin{vmatrix}\lambda&0&\lambda\\-2&\lambda+2&-2\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)$得$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-2$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$解方程组$(\lambda_1 E-A)\vec{x}=\vec{0}$即$A\vec{x}=\vec{0}$由

$\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得同解方程组$x_1-x_2+x_3=0$

即有$\begin{cases}x_1=x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$ 得到两个线性无关的特征向量$\vec{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\vec{\alpha}_2=(-1,0,1)^T$

同理$\lambda_3=-2$对应的特征向量为$\vec{\alpha}_3=(-1,-2,1)^T$，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故$A$可以对角化

由$A\vec{\alpha}_i=\lambda_i\vec{\alpha}_i,i=1,2,3$；有$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3)$

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$，令$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$|Q|\neq 0$，于是

$$AQ=Q\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -2\end{pmatrix}=Q\Lambda\ ,\ A=Q\Lambda Q^{-1}, A^n=Q\Lambda Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1}\cdots Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda^n Q^{-1}$$

四、实对称矩阵的对角化

一、实对称阵特征值、特征向量的性质

性质 $1'$ 实对称阵的特征值必为实数；

性质 $2'$ 实对称阵不同特征值所对应的特征向量必正交；

证：设 $A\vec{\alpha}_1=\lambda_1\vec{\alpha}_1; A\vec{\alpha}_2=\lambda_2\vec{\alpha}_2$， $\lambda_1\neq\lambda_2, A^T=A$

要证: $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)=0$,将 $A\vec{\alpha}_1=\lambda\vec{\alpha}_1$ 转置，得 $\vec{\alpha}_1^T A^T=\lambda\vec{\alpha}_1^T$ 即 $\vec{\alpha}_1^T A=\lambda\vec{\alpha}_1^T$ 右乘 $\vec{\alpha}_2$ 得

$\vec{\alpha}_1^T A\vec{\alpha}_2=\lambda\vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_2$, 又 $A\vec{\alpha}_2=\lambda\vec{\alpha}_2$, 故有 $\lambda_2\vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_2=\lambda_1\vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_2$, $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_2=\vec{0}$ 而 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 故

$\vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_2=\vec{0}$

性质 $3'$ 实对称矩阵 A 的 k 重特征值 λ_0 必有 k 个线性无关的特征向量，故必可对角化，且必可找到一个正交阵 Q , 使 $(QQ^T=Q^TQ=E)$ $\quad Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 λ_i 是 A 的特征值， Q 为相应的特征向量，先正交化，再单位化组成；

二、实对称阵对角化的方法：

$1'$ 、先求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m(m\le n)$；

$2'$ 、对每个特征值 λ_i 求 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系，得相应的特征向量；

i)若 λ_i 是单根，则只有一个线性无关的特征向量 α_{i1} ， 将 α_{i1} 标准化；

ii）若 λ_i 是 k 重根，则有 k 个线性无关的特征向量 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots\alpha_{ik}$ ，先将其正交化，再单位化，

得到 n 个单位正交的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n$ ；

$3'$ 、令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)$，则 Q 即为所求正交矩阵；

注：i)位置问题；ii)必须先正交化再单位化；

例 3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，求正交阵 α ，使 $Q^{-1}A\alpha$ 为对角阵

解：由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

得$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$，故$\alpha_1=(2,-1,0)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T,\alpha_3=(1,2,-2)^T$

先正交化α_1,α_2，得$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$

再将β_1,β_2,β_3单位化，$\beta_1'=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix};\beta_2'=\frac{\sqrt5}{15}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix};\beta_3'=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

令$Q=\left(\beta_1',\beta_2',\beta_3'\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2\sqrt5}{15} & \frac13\\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{4\sqrt5}{15} & \frac23\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & -\frac23\end{pmatrix}$,则$Q$即为所求,即$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{pmatrix}$

第六讲 二次型

一、引言

二次型是二次齐次函数 ① $f(x,y)=5x^2+5y^2-6xy$；② $f(x,y,z)=2xy+4xz$

1、研究的问题

问：$5x^2+5y^2-6xy=2$是何曲线？

令$\begin{cases}x=x_1\cos\frac{\pi}{4}-y_1\sin\frac{\pi}{4}\\ y=x_1\sin\frac{\pi}{4}-y_1\cos\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow 2x_1^{\ 2}+8y_1^{\ 2}=2$

问：$f(x,y)=5x^2+5y^2-6xy在xoy$面内是否取得极值？

$f(x,y)=5x^2+5y^2-6xy=5(x-\frac35 y)^2+\frac{16}{5}y^2=5x_1^{\ 2}+\frac{16}{5}y_1^{\ 2}$，当$x_1,y_1$不全为零时，必有

$f(x,y)>0\Rightarrow f$是正定二次型；

2、如何研究

工具——实对称矩阵及特征值、特征向量

二、二次项的定义和矩阵表示

1、定义：n个变量的二次齐次函数

$f(x_1\cdots x_n)=a_{11}x_1^{\ 2}+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^{\ 2}+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^{\ 2}$

2、二次型的矩阵表示、二次型的秩

$f(x_1\cdots x_n)=a_{11}x_1^{\ 2}+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^{\ 2}+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^{\ 2}$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{x}=\vec{x}^TA\vec{x} \qquad A^T=A\text{ 规定 }r(f)\overset{\Delta}{=}r(A)$$

例 1 写出二次型对应的矩阵（1） $f(x,y,z)=2xy+4xz$；（2） $f(x,y)=5x^2+5y^2-6xy$

解：（1） $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ （2） $A=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}$

$f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$； $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

$f(x,y)\overset{?}{=}(x_1,y_1)C^TAC\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=(x_1,y_1)\begin{pmatrix}2&\\&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

3、合同变换

对于矩阵 A,B，若存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$,则称 A与B 合同，记 $A\simeq B$

注：i)合同关系也满足“三性”；ii）合同变换不改变矩阵的对称性与秩；

三、化二次型为标准型

1、定义：只含变量平方项的二次型称为标准二次型，其中正项的项数称为二次型的正贯性指数，负项的项数称为负贯性指数；

2、方法：（1）正交变换法

例 2 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2；则 1）求参数 C；2）用正交变换化二次型为标准型；

解：1） $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&C\end{pmatrix}$ 因 $r(A)=2$，故 $|A|=0,C=3$

2）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$； $\vec{\eta}_1=\frac{\vec{\alpha}_1}{|\vec{\alpha}_1|},\vec{\eta}_2=\frac{\vec{\alpha}_2}{|\vec{\alpha}_2|},\vec{\eta}_3=\frac{\vec{\alpha}_3}{|\vec{\alpha}_3|}$，令 $Q=(\eta_1\quad\eta_2\quad\eta_3)$则 Q 为

正交阵，且有 $Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 4 & \\ & & 9\end{pmatrix}$

从而此二次型 f 作正交变换 $\bar{x}=Q\bar{y}$，即有 $f(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2y_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 4 & \\ & & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=0y_1^2+4y_2^2+9y_3^2$

（2）配方法

例 3 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$，并求所用的坐标变换 $\bar{x}=C\bar{y}$ 及其变换矩阵 C，和二次型的秩，正负贯性指数

解：$f=(2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3)+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3=2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)]+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3$

$=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\ y_2=x_2-2x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2$

$\begin{cases}x_1=\\ x_2=\\ x_3=y_3\end{cases}$；$r(f)=3$，正贯性指数为 2，负贯性指数为 1

四、正定二次型和正定矩阵

1、若对于任意 $\bar{x}\neq\bar{0}$ 恒有 $\bar{x}^{T}A\bar{x}>0$ 则称 $\bar{x}^{T}A\bar{x}$ 为正定二次型，称 A 为正定矩阵；

2、二次型（或矩阵 A）正定充要条件

$$A_{n\times n}\text{正定}\Leftrightarrow\begin{cases}1、\forall\bar{x}\neq\bar{0},\bar{x}^{T}A\bar{x}>0;\\ 2、A\text{的正贯性指数为n;}\\ 3、A\text{的特征值全大于零;}\\ 4、A\text{的所有的顺序主子式全大于零;}\end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，$\cdots$，$\Delta_n=|A|$

注：正定阵必是对称阵