

**Zadanie 1.** Średnicę pręta zmierzono używając suwmiarki o dokładności 0,1 mm. Uzyskane wyniki znajdują się w tabeli poniżej.

$d$ [mm]	12,5	12,3	12,6	12,5	12,7	12,3	12,4	12,3	12,4
----------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Podać średnicę pręta wraz z niepewnością.

**Zadanie 2.** W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego  $g$  użyto wahadła matematycznego. Wykonano pomiary okresu drgań wahadła  $T$  i jego długości  $l$ . Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli.

$l$ [cm]	100,1	99,8	100,2	100,1	99,9	99,8	100,0	100,2	99,7	100,3
$T$ [s]	2,02	1,98	2,01	2,00	1,99	1,98	2,01	1,99	2,00	2,01

Do pomiaru długości wahadła matematycznego wykorzystano metrówkę z podziałką milimetrową. Dokładność pomiaru okresu drgań wahadła wynosi 0,01 s (mierzona stoperem elektronicznym). Wyznacz długość oraz okres drgań wahadła matematycznego wraz z niepewnościami.

**Zadanie 3.** W celu wyznaczenia objętości  $V$  prostopadłościanu zmierzono długości jego krawędzi śrubą mikrometryczną z dokładnością 0,01 mm. Otrzymane wyniki przedstawiono poniżej.

$a = 14,00$ mm	$b = 9,31$ mm
$c$ [mm]	3,62    3,63    3,60    3,58    3,62    3,66    3,61    3,60    3,61    3,61

Obliczyć objętość prostopadłościanu wraz z niepewnością.

**Zadanie 4.** W celu wyznaczenia mocy  $P = UI$  wydzielanej na oporniku zmierzono napięcie na jego końcach woltomierzem cyfrowym o dokładności  $2\%rdg + 1dgt$  oraz natężenie prądu płynącego przez opornik innym miernikiem cyfrowym o dokładności  $2,5\%rdg + 4dgt$ . Otrzymano wartości:

$$U = 6,120 \text{ V}$$

$$I = 0,414 \text{ mA}$$

Wyznaczyć moc wydzielaną na rezystorze wraz z niepewnością.

**Zadanie 5.** W celu wyznaczenia oporności przewodnika  $U = RI$  zmierzono napięcie na jego końcach miernikiem analogowym o klasie 1 oraz natężenie prądu miernikiem cyfrowym o dokładności  $0,4\%rgd + 2dgt$ . Uzyskano wyniki:

$$U = 1,95 \text{ V (na zakresie } 3V)$$

$$I = 36,1 \text{ mA}$$

Wyznaczyć wartość oporu przewodnika wraz z niepewnością.

### Rozwiązaania

**Zadanie 1.** Średnicę pręta uzyskano w sposób bezpośredni wykonując serię pomiarową. Wynikiem pomiaru będzie średnia arytmetyczna

$$d = \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i ,$$

, gdzie  $n$  oznacza liczbę wykonanych pomiarów

$$d = \bar{d} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 d_i = 12,444444 \text{ mm} .$$

Niepewność standardowa typu A wynosi:

$$\begin{aligned} u_A(d) &= \sqrt{s_d^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} = \sqrt{\frac{1}{9(9-1)} \sum_{i=1}^9 (d_i - 12,444444)^2} = \\ &= 0,002253 \text{ [mm]} . \end{aligned}$$

Suwmiarka ma działkę elementarną równą 0,1 mm. Zatem dokładność wzorcowania przyrządu wynosi

$$\Delta d = 0,1 \text{ mm} .$$

Niepewność eksperimentalna została przyjęta jako wartość działki elementarne

$$\Delta d_e = 0,1 \text{ mm} .$$

Niepewność standardowa typu B wynosi

$$u_B(d) = \sqrt{\frac{\Delta d^2 + \Delta d_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{0,1^2 + 0,1^2}{3}} = 0,081650 \text{ [mm]} .$$

Całkowita niepewność standardowa wynosi

$$u(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = \sqrt{0,002253^2 + 0,081650^2} = 0,081681 \text{ [mm]} .$$

Średnica pręta wynosi

$$\begin{aligned} d &= 12,445 \text{ mm} & u(d) &= 0,082 \text{ mm} \\ d &= 12,444(0,082) \text{ mm} \\ d &= 12,444(82) \text{ mm} \end{aligned}$$

Niepewność rozszerzona (przydatna np. do porównania z wartością katalogową) wynosi

$$d = 12,44 \text{ mm} \quad U(d) = 2 \cdot u(d) = 0,16 \text{ mm}$$

$$d = (12,44 \pm 0,16) \text{ mm}, k = 2$$

**Zadanie 2.** Długość wahadła wyznaczono bezpośrednio z serii pomiarów zatem wynikiem pomiaru będzie średnia arytmetyczna

$$l = \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} l_i = 100,01 \text{ cm}$$

Niepewność standardowa typu A

$$u_A(l) = \sqrt{s_l^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{10(10-9)} \sum_{i=1}^{10} (l_i - 100,01)^2} = 0,0041 \text{ [cm]}$$

Pomiar długości wykonywany był metrówką o najmniejszej podziałce równej 1 mm. Dokładność wzorcowania przyrządu

$$\Delta l = 0,1 \text{ cm}$$

Niepewność eksperymentalna została przyjęta jako wartość połowy najmniejszej podziałki

$$\Delta l_e = 0,05 \text{ cm}$$

Niepewność standardowa typu B

$$u_B(l) = \sqrt{\frac{\Delta l^2 + \Delta l_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{0,1^2 + 0,05^2}{3}} = 0,064550 \text{ [cm]}$$

Całkowita niepewność standardowa wynosi

$$u(l) = \sqrt{u_A^2(l) + u_B^2(l)} = \sqrt{0,0041^2 + 0,064550^2} = 0,064680 \text{ [cm]}$$

Zatem długość wahadła matematycznego wynosi

$$l = 100,010(65) \text{ cm}$$

Analogicznie postępujemy z okresem drgań wahadła  $T$ .

Jako wynik pomiaru przyjmujemy średnią arytmetyczną z serii pomiarowej

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i = 1,999 \text{ [s]}$$

Niepewność standardowa typu A wynosi

$$u_A(T) = \sqrt{s_{\bar{T}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} \sum_{i=1}^{10} (T_i - 1,999)^2} = 0,004333 \text{ [s]}$$

Pomiar okresu drgań wahadła wykonywany był stoperem elektronicznym o rozdzielczości równej 0,01 s. Zatem niepewność typu B wynosi (wynik na urządzeniu pomiarowym wyświetlany był stabilnie, zatem możemy pominać niepewność eksperymentalną)

$$u_B(T) = \sqrt{\frac{\Delta T^2}{3}} = \frac{\Delta T}{\sqrt{3}} = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,0057735 [s]$$

Całkowita niepewność standardowa pomiaru okresu drgań wahadła wynosi

$$u(T) = \sqrt{u_A^2(T) + u_B^2(T)} = \sqrt{0,004333^2 + 0,0057735^2} = 0,0072188 [s]$$

Okres drgań wahadła matematycznego wynosi

$$T = 1,9990(72) s$$

Niepewność rozszerzona wynosi

$$T = 1,999 s \quad U(T) = 2u(T) = 0,014 s$$

$$T = 1,999(14) s, k = 2$$

**Zadanie 3.** Dwa wymiary prostopadłościanu zostały uzyskane w wyniku jednokrotnego pomiaru bezpośredniego i wynoszą

$$a = 14,00 mm \quad b = 9,31 mm$$

Oba pomiary wykonane zostały śrubą mikrometryczną o najmniejszej podziałce równej 0,01 mm, zatem pomiary obarczone są wyłącznie niepewnością standardową typu B

$$u_B(a) = \sqrt{\frac{\Delta a^2 + \Delta a_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{0,01^2 + 0,01^2}{3}} = 0,008165 [mm]$$

$$u_B(b) = \sqrt{\frac{\Delta b^2 + \Delta b_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{0,01^2 + 0,01^2}{3}} = 0,008165 [mm]$$

W obu przypadkach dokładność wzorcowania wynosi

$$\Delta a = 0,01 mm \quad \Delta b = 0,01 mm$$

Natomiast za niepewność eksperymentalną przyjęto wartość podziałki elementarnej przyrządu

$$\Delta a_e = 0,01 mm \quad \Delta b_e = 0,01 mm$$

Wartość trzeciego wymiaru uzyskano w wyniku wykonania serii pomiarów bezpośrednich. Wynikiem takiego pomiaru jest średnia arytmetyczna

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} c_i = \frac{1}{10} \cdot 36,14 = 3,614 \text{ [mm]},$$

gdzie  $n$  – liczba wykonanych pomiarów.  
Niepewność standardowa typu A wynosi

$$u_A(c) = \sqrt{s_{\bar{c}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2} = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} \sum_{i=1}^{10} (c_i - 3,614)^2} = 0,0067 \text{ [mm]}$$

Pomiarów wykonane były tym samym przyrządem, co wymiarów  $a$  i  $b$ , dlatego niepewności standardowe typu B wszystkich wymiarów są jednakowe

$$u_B(a) = u_B(b) = u_B(c) = 0,008165 \text{ mm}$$

Niepewność całkowita wymiaru  $c$  wynosi

$$u(c) = \sqrt{u_A^2(c) + u_B^2(c)} = \sqrt{0,0067^2 + 0,008165^2} = 0,010562 \text{ [mm]}$$

Otrzymano następujące wartości wymiarów prostopadłościanu

$$a = 14,0000 \text{ (82) mm}$$

$$b = 9,3100 \text{ (82) mm}$$

$$c = 3,614 \text{ (11) mm}$$

Objętość prostopadłościanu obliczymy korzystając z zależności

$$V(a, b, c) = V = abc = 471,04876 \text{ mm}^3$$

Niepewność pomiaru pośredniego wyznaczamy korzystając z metody propagacji niepewności

$$\begin{aligned} u(V) &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c} \cdot u(c)\right)^2} = \\ &= \sqrt{(bc \cdot u(a))^2 + (ac \cdot u(b))^2 + (ab \cdot u(c))^2} = 1,517848 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Objętość prostopadłościanu wraz z niepewnością wynosi

$$V = 471,1 \text{ mm}^3 \quad u(V) = 1,5 \text{ mm}^3$$

$$V = 471,0(1,5) \text{ mm}^3$$

$$V = 471,0(1,5) \text{ mm}^3$$

Niepewność rozszerzona wynosi

$$V = 471,0 \text{ mm}^3 \quad U(V) = 2u(V) = 3,0 \text{ mm}^3$$

$$V = (471,0 \pm 3,0) \text{ mm}^3, k = 2$$

**Zadanie 4 .** Wartość napięcia prądu uzyskano w wyniku jednokrotnego bezpośredniego pomiaru urządzeniem cyfrowym

$$U = 6,120 \text{ V}$$

Niepewność wzorcowania miernika wyznaczamy według danych zawartych w instrukcji przyrządu

$$\Delta U = 2\%rdg + 1dgt = 0,02 \cdot 6,120 + 0,001 = 0,1234 \text{ [V]}$$

Jeżeli uzyskany wynik pomiaru wyświetlany był stabilnie, można pominąć niepewność eksperymentatora i niepewność standardową napięcia obliczyć można ze wzoru

$$u(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = 0,071245 \text{ V}$$

Analogicznie postępujemy w przypadku pomiaru natężenia prądu.

Niepewność wzorcowania wynosi

$$\Delta I = 2,5\%rdg + 4dgt = 0,025 \cdot 0,414 + 0,004 = 0,01435 \text{ [mA]}$$

Niepewność standardowa pomiaru prądu wynosi

$$u(I) = \frac{\Delta I}{\sqrt{3}} = 0,008285 \text{ [mA]}$$

Moc wydzielaną na oporniku wyznaczamy korzystając z zależności

$$P = UI = 2,53368 \text{ mW},$$

gdzie  $U = 6,120(71)$  V oraz  $I = 0,4140(83)$  mA.

Moc wyznaczana jest w sposób pośredni, zatem w celu wyznaczenia niepewności skorzystamy z metody propagacji niepewności

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \cdot u(U)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} \cdot u(I)\right)^2} = \sqrt{(I \cdot u(U))^2 + (U \cdot u(I))^2} = 0,058659 \text{ mW}$$

Moc wydzielana na oporniku wraz z niepewnością wynosi

$$\begin{aligned} P &= 2,534 \text{ mW} & u(P) &= 0,059 \text{ mW} \\ P &= 2,534(0,059) \text{ mW} \\ P &= 2,534(59) \text{ mW} \end{aligned}$$

Niepewność rozszerzona wynosi

$$P = 2,53 \text{ mW} \quad U(P) = 0,12 \text{ mW}$$

$$P = (2,53 \pm 0,12) \text{ mW}, k = 2, p = 95\%$$

**Zadanie 5.** Wykonano jednokrotny pomiar napięcia prądu miernikiem analogowym i uzyskano

$$U = 1,95 \text{ V}$$

Niepewność wzorcowania dla miernika o klasie 1 i pomiaru wykonywanego na zakresie 3V wynosi

$$u(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = 0,017320 \text{ V}$$

Natężenie prądu uzyskano w wyniku jednokrotnego bezpośredniego pomiaru miernikiem cyfrowym i uzyskano

$$I = 36,1 \text{ mA}$$

Niepewność wzorcowania przyrządu liczymy zgodnie z danymi dostarczonymi przez producenta w instrukcji

$$\Delta I = 0,4\%rdg + 2dgt = 0,004 \cdot 36,1 + 0,2 = 0,3444 \text{ [mA]}$$

Niepewność standardowa natężenia wynosi

$$u(I) = \frac{\Delta I}{\sqrt{3}} = 0,198839 \text{ mA}$$

Przekształcając zależność  $U = RI$  uzyskamy wzór pozwalający na wyznaczenie rezystancji

$$R = \frac{U}{I}$$

Zatem

$$R = \frac{1,95}{0,0361} = 54,01662 \text{ [\Omega]}$$

Wartość rezystancji wyznaczona była w sposób pośredni, zatem do wyznaczenia niepewności skorzystamy z metody propagacji niepewności

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u(U)\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u(I)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u(U)\right)^2 + \left[\left(-\frac{U}{I^2}\right) \cdot u(I)\right]^2} = 0,564554 \text{ \Omega}$$

Wartość oporu przewodnika wraz z niepewnością wynosi

$$R = 54,02 \Omega \quad u(R) = 0,56 \Omega$$

$$R = 54,02(0,56) \Omega$$

$$R = 54,02(56) \Omega$$

Niepewność rozszerzona rezystancji wynosi

$$R = 54,0 \Omega \quad U(R) = 2u(R) = 1,1 \Omega$$

$$R = (54,0 \pm 1,1) \Omega, k = 2$$