拉伸法和动力学法测量弹性模量
实验报告

双 33A 组

石健

2007010241

实验日期：2008 年 12 月 17 日

第一部分 拉伸法测弹性模量

1.1 实验目的

(1) 学习用拉伸法测量弹性模量的方法；

(2) 掌握螺旋测微计和读数显微镜的使用；

(3) 学习用逐差法处理数据。

1.2 实验原理

1.2.1 弹性模量及其测量方法

本实验讨论最简单的形变——拉伸形变，即棒状物体（或金属丝）仅受轴向外力作用而发生伸长的形变（称拉伸形变）。设有一长度为L，截面积为S的均匀金属丝，沿长度方向受一外力F后金属丝伸长δL。单位横截面积上的垂直作用力F/S成为正应力，金属丝的相对伸长$\delta L/L$称为线应变。实验结果指出，在弹性形变范围内，正应力与线应变成正比，即

$$\frac{F}{S}=E\frac{\delta L}{L}$$

该规律称为胡克定律。式中比例系数

$$E=\frac{F/S}{\delta L/L}$$

称为材料的弹性模量。它表征材料本身的性质，E越大的材料，要使他发生一定的相对形变所需的单位横截面积上的作用力也越大。一些常用材料的E值见表 1。E的单位为Pa（$1\mathrm{Pa}=1\mathrm{N/m^2}$；$1\mathrm{GPa}=10^9\mathrm{Pa}$）。

表 1　一些常用材料的弹性模量

材料名称	钢	铁	铜	铝	铅	玻璃	橡胶
E/GPa	196~216	113~157	73~127	约 70	约 17	约 55	约 0.0078

本实验测量的是钢丝的弹性模量，如果测得钢丝的直径为D，则可以进一步把E写成：

$$E=\frac{4FL}{\pi D^2\delta L}$$

测量钢丝的弹性模量的方法是将钢丝悬挂于支架上，上端固定，下端加砝码对钢丝施力F，测出钢丝相应的伸长量δL，即可求出E。钢丝长度L用钢尺测量，钢丝直径D用螺旋测微计测量，力F由砝码的重力$F=mg$求出。实验的主要问题是测准δL。δL一般很小，约$10^{-1}\mathrm{mm}$数量级，在本实验中用读数显微镜测量（也可利用光杠杆法或其他方法测量）。为了使测量的δL更准确些，采用测量多个δL的方法以减少测量的随机误差，即在钢丝下端每加一个砝码测一次伸长位置，逐个累加砝码，逐次记录伸长位置。通过数据处理求出δL。

1.2.2 逐差法处理数据

如果用上述方法测量 10 次得到相应的伸长位置$y_1,y_2,\dots,y_{10}$，如何处理数据，算出钢丝的伸长

量δL呢？

我们可以由相邻伸长位置的差值求出 9 个δL，然后取平均，则

$$\delta L=\frac{(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\cdots+(y_{10}-y_9)}{9}$$

从上式可以看出中间各y_i都消去了，只剩下$y_{10}-y_1/9$，用这样的方法处理数据，中间各次测量结果均未起作用。

为了发挥多次测量的优越性，可以改变一下数据处理的方法，把前后数据分成两组，y_1,y_2,y_3,y_4,y_5一组，y_6,y_7,y_8,y_9,y_{10}为另一组。讲两组中相应的数据想见得出 5 个l_i，$l_i=5\delta L$，则

$$\delta L=\frac{(y_6-y_1)+(y_7-y_2)+(y_8-y_3)+(y_9-y_4)+(y_{10}-y_5)}{5\times 5}$$

这种数据处理的方法称为逐差法，其优点是充分利用的所测数据，可以减小测量的随机误差，而且也可以减少测量仪器带来的误差。因此是实验中常用的一种数据处理的方法。

1.3 实验仪器

实验装置如图 1 所示。

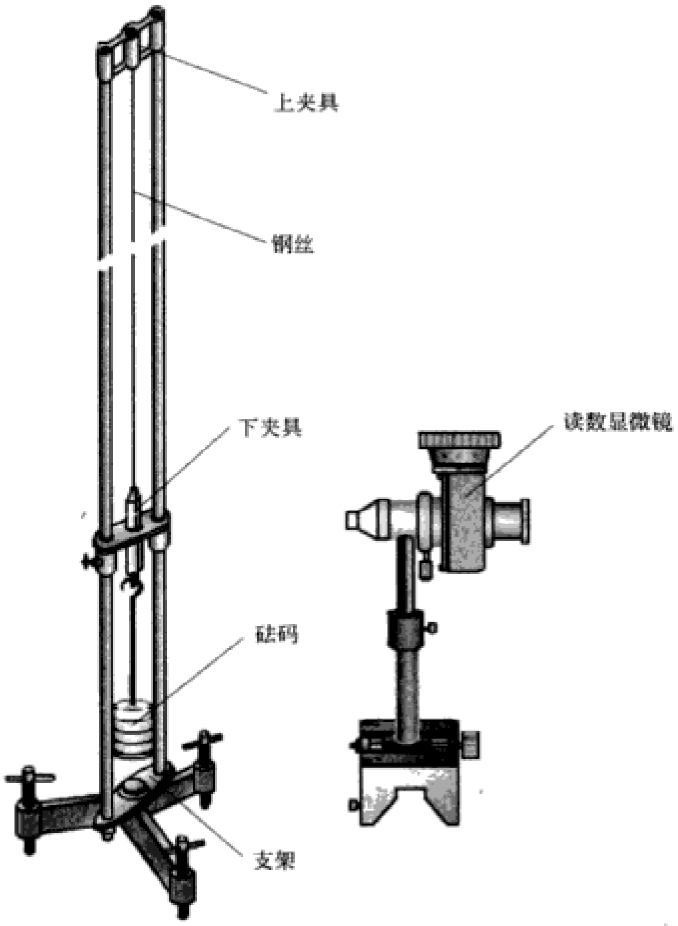


图 1　测量弹性模量的实验装置

1.4 数据处理

1. 测钢丝长度L及其伸长量δL

仪器编号___2___；钢丝长度L=___999___mm

序号	$F_i(F_i=mg)$/N	y_i/mm		$l_i'(l_i'=y_{i+5}-y_i)$/mm		$l_i\left(l_i=\frac{l_++l_-}{2}\right)$/mm
		增砝码时	减砝码时	增砝码时l_+	减砝码时l_-	
1	0.200×1×9.80	0.739	0.715	1.321	1.341	1.331
2	0.200×2×9.80	1.011	1.003	1.337	1.342	1.3395
3	0.200×3×9.80	1.312	1.294	1.272	1.289	1.2805
4	0.200×4×9.80	1.538	1.560	1.295	1.265	1.280
5	0.200×5×9.80	1.802	1.809	1.283	1.305	1.294
6	0.200×6×9.80	2.060	2.056			
7	0.200×7×9.80	2.348	2.345			$\bar{l}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}l_i$
8	0.200×8×9.80	2.584	2.583			=_1.305_mm
9	0.200×9×9.80	2.833	2.825			标准偏差
10	0.200×10×9.80	3.085	3.114			s_l=_0.0253_mm

$\therefore \delta L=\frac{1}{5}\bar{l}=\frac{1}{5}\times 1.305=0.2616\text{mm}$

不确定度计算：

$$\Delta_l=\sqrt{\left(\Delta_{l仪}\right)^2+(s_l)^2}$$

本实验读数显微镜测某一位置y_i的仪器误差为 0.01mm，因此用它测量一段伸长量$l=y_{i+5}-y_i$，则l的仪器误差为$\Delta_{l仪}=\sqrt{\left(\Delta_{y_{i+5}仪}\right)^2+\left(\Delta_{y_i仪}\right)^2}=\sqrt{2}\times 0.01\text{mm}$

所以$\Delta_l=\sqrt{\left(\Delta_{l仪}\right)^2+(s_l)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\times 0.01\right)^2+0.0253^2}=0.02898\text{mm}$

又因为$\delta L=\frac{1}{5}l$，所以$\Delta_{\delta L}=\frac{1}{5}\Delta_l=5.7969\times 10^{-3}\text{mm}$

$\therefore \delta L\pm\Delta_{\delta L}=(0.2616\pm 0.0058)\text{mm}$

2. 测钢丝直径D

测定螺旋测微计的零点d（单位为 mm）

测量前-0.015，-0.020，-0.015，

测量后-0.019，-0.015，-0.021；平均值$\bar{d}$=-0.0175mm

序号	1	2	3	4	5	6
D_i/mm	0.208	0.205	0.204	0.205	0.203	0.205

钢丝的平均直径$\bar{D}$=<u>0.2225</u>mm，s_D=<u>1.528×10^{-3}</u>mm

$$\Delta_D=\sqrt{\left(\Delta_{仪}\right)^2+(s_D)^2}=\sqrt{0.004^2+(1.528\times10^{-3})^2}=4.2819\times10^{-3}\text{mm}$$

$$\therefore D\pm\Delta_D=(0.2225\pm0.0043)\text{mm}$$

由以上数据可求出：$E=\dfrac{4FL}{\pi D^2\delta L}=\dfrac{4\times0.2\times9.8\times0.999}{\pi\times0.2225^2\times0.2616\times10^{-3}}=1.9250\times10^{11}\text{Pa}=192.50\text{GPa}$

3. 总不确定度的计算

$$\frac{\Delta_E}{E}=\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial F}\ln E\right)^2(\Delta_F)^2+\left(\frac{\partial}{\partial L}\ln E\right)^2(\Delta_L)^2+\left(\frac{\partial}{\partial D}\ln E\right)^2(\Delta_D)^2+\left(\frac{\partial}{\partial(\delta L)}\ln E\right)^2(\Delta_{\delta L})^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\Delta_F}{F}\right)^2+\left(\frac{\Delta_L}{L}\right)^2+\left(\frac{2\Delta_D}{D}\right)^2+\left(\frac{\Delta_{\delta L}}{\delta L}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(0.5\%)^2+\left(\frac{3}{999}\right)^2+\left(\frac{2\times4.2819\times10^{-3}}{0.2225}\right)^2+\left(\frac{5.7969\times10^{-3}}{0.2616}\right)^2}$$

$$=0.0447935$$

$$\therefore \Delta_E=0.0447935E=0.0862\times10^{11}\text{Pa}$$

$$\therefore E\pm\Delta_E=(192.50\pm8.62)\text{GPa}$$

第二部分 动力学法测弹性模量

2.1 实验目的

(1) 学习一种更实用，更准确的测量弹性模量的方法；

(2) 学习用实验方法研究与修正系统误差。

2.2 实验原理

如图 2 所示，一根细长棒（长度比横向尺寸大很多）的横振动（又称弯曲振动）满足动力学方程：

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{EI}{\rho S}\cdot\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0$$

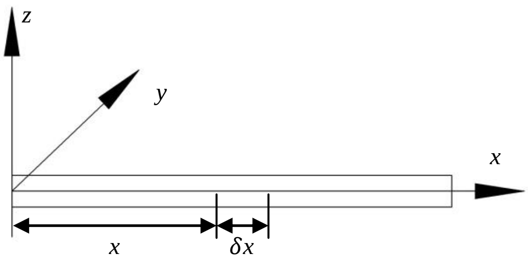


图 2 细长棒的弯曲振动

棒的轴线沿x方向，式中η为棒上距左端x处截面的z方向位移，E为该棒的弹性模量，ρ为材料密度，S为棒的

横截面积，I为某一截面的惯性矩$\left(I = \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S\right)$。

该方程的通解为

$$\eta(y,t) = (B_1 \mathrm{ch}Kx + B_2 \mathrm{sh}Kx + B_3 \cos Kx + B_4 \sin Kx) A\cos(\omega t + \varphi)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{K^4 EI}{\rho S}}$$

称为频率公式，它对任意形状截面的试样，不同的边界条件下都是成立的。我们只要根据特定的边界条件定出常数K，代入特定界面的惯量矩I，就可以得到具体条件下的关系式。

对于用细线悬挂起来的棒，若悬线位于棒作横振动的节点若悬线位于棒作振动的节点J、J_1点附近，并且棒的两端均处于自由状态，那么在两端面上，横向作用力F与弯矩均为零。横向作用力$F = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$，弯矩$M = -EI\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$，则边界条件有 4 个，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^3 X}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^3 X}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=l} = 0$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=l} = 0$$

l为棒长。将通解带入边界条件得

$$\cos Kl \cdot \mathrm{ch}Kl = 1$$

用数值解法可求得满足上式的一系列根$K_n l$，其值为$K_n l$ =0，4.730，7.853，10.966，14.137，⋯。

其中$K_0 l = 0$的根对应于静止状态。因此将$K_1 l = 4.730$记作第一个根，对应的振动频率称为基振频率，此时棒的振幅分布如图 3(a)所示，$K_2 l$、$K_3 l$对应的振形依次为图 3(b)、(c)。从图 3(a)可以看出试样在作基频振动的时候，存在两个节点，根据计算，它们的位置分别距端面在 0.224l 和 0.776l 处。对应于 n=2 的振动，其振动频率约为基频的 2.5~2.8 倍，节点位置在 0.132l，0.500l，0.868l 处。

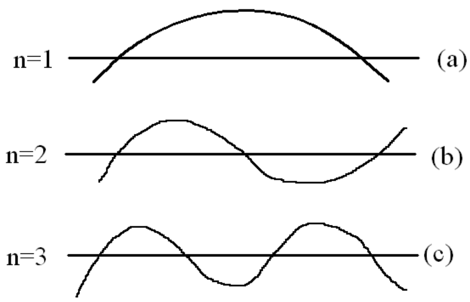


图 3　两端自由的棒弯曲振动的前三阶振幅分布

将第一个$K = \frac{4.730}{l}$的K值带入 $\omega = \sqrt{\frac{K^4 EI}{\rho S}}$中，得到棒作基频振动的固有频率

$$\omega=\sqrt{\frac{4.730^4 EI}{\rho l^4 S}}$$

解出弹性模量

$$E=1.997\,8\times10^{-3}\times\frac{\rho l^4 S}{I}\omega^2=7.887\,0\times10^{-2}\frac{l^3 m}{I}f^2$$

上式中m为棒的质量，$m=\rho lS$；f为圆棒的基振频率。对于直径为d的圆棒，惯量矩$I=\iint_S z^2\mathrm{d}S=\frac{\pi d^4}{64}$，带入上式得

$$E=1.606\,7\frac{l^3 m}{d^4}f^2$$

这就是本实验用的计算公式。

实际测量时，由于不能满足$d\ll l$，此时上式应乘上一修正系数T_1，即

$$E=1.606\,7\frac{l^3 m}{d^4}f^2 T_1$$

T_1可根据d/l的不同数值和材料的泊松比查表得到。

2.3 实验装置

实验装置见图 4。

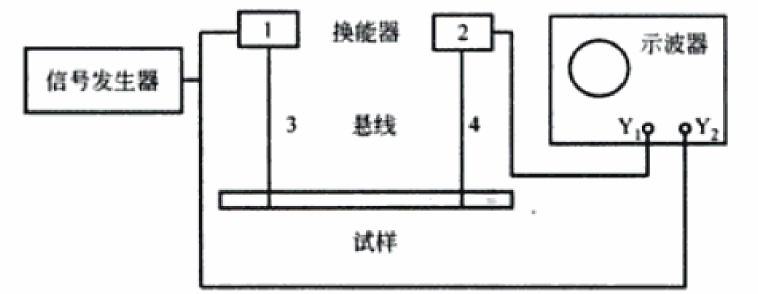


图 4　动力学法测弹性模量实验装置

2.4 实验任务

(1) 连接线路，阅读信号发生器及示波器的有关资料，学习调节和使用方法。

(2) 测量被测样品的长度、直径（在不同部位测 6 次取平均值）及质量。质量测量用数显电子天平。本实验用的样品为黄铜棒。

(3) 测样品的弯曲振动基振频率。

理论上样品作基频共振时，悬点应置于节点处，即悬点应置于距棒两端面分别为 0.224l 和 0.776l 处。但是在这种情况下，棒的振动无法被激发。欲激发棒的振动，悬点必须离开节点位置。这样又与理论条件不一致，势必产生系统误差。故实验上采用下述方法测棒的弯曲振动基频频率：在基频节点处正负 30mm 范围内同时改变两悬线位置，每隔 5mm~10mm 测一次共振频率。**画出共振频率与悬线位置关系曲线**。由该图可准确求出悬线在节点位置

的基频共振频率，其值约在几百赫兹量级。

2.5 数据记录及处理

1. 被测样品的长度、直径和质量

长度l=__20.922cm___，质量__49.37g__

螺旋测微计零点位置d（单位为 mm）

测量前__0.000__，__0.000__，__0.000__，

测量后__0.000__，__0.000__，__0.000__；平均值$\bar{d}$=__0.000__

序号	1	2	3	4	5	6
D_i/mm	5.976	5.976	5.980	5.977	5.975	5.978

则黄铜棒的平均直径钢丝的平均直径$\bar{D}$=__5.977__mm，s_D=_0.001633_mm

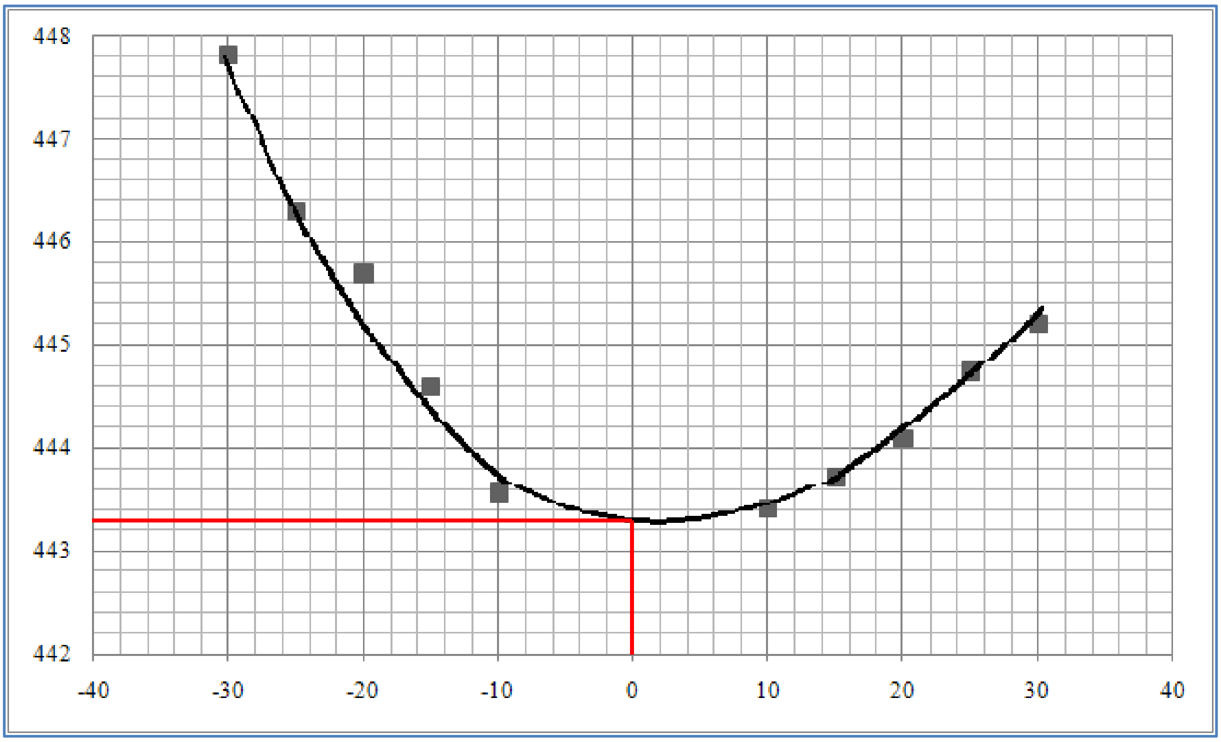
$$\Delta_D = \sqrt{\left(\Delta_{仪}\right)^2 + (s_D)^2} = \sqrt{0.004^2 + (1.633\times10^{-3})^2} = 4.3205\times10^{-3}\text{mm}$$

$$\therefore D \pm \Delta_D = (5.977 \pm 0.004)\text{mm}$$

2. 测基振频率

悬线位置 x/mm	-30	-25	-20	-15	-10	10	15	20	25	30
共振频率 f/Hz	447.82	446.30	445.70	444.60	443.57	443.42	443.72	444.10	444.75	445.21

作出 f-x 曲线如图 5。



由图线上读出：在 x=0 处，f=443.26Hz。

由以上数据可求得

$$E = 1.6067\frac{l^3m}{D^4}f^2T_1$$

$$= 1.6067\times\frac{0.20922^3\times 49.37\times 10^{-3}}{(5.977\times 10^{-3})^4}\times 443.26^2\times 1.0046$$

$$= 1.1683\times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$$

$$= 116.83\mathrm{GPa}$$

下面计算E的不确定度Δ_E

$$\frac{\Delta_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial l}\ln E\right)^2(\Delta_l)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial m}\ln E\right)^2(\Delta_m)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial f}\ln E\right)^2\left(\Delta_f\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial D}\ln E\right)^2(\Delta_D)^2}$$

其中，

$$\ln E = \ln 1.6067 + \ln T_1 + 3\ln l + \ln m + 2\ln f - 4\ln D$$

故

$$\frac{\partial \ln E}{\partial l} = \frac{3}{l},\quad \frac{\partial \ln E}{\partial m} = \frac{1}{m},\quad \frac{\partial \ln E}{\partial f} = \frac{2}{f},\quad \frac{\partial \ln E}{\partial D} = -\frac{4}{D}$$

$$\therefore \frac{\Delta_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta_D}{D}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3\times 0.002}{20.922}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{49.37}\right)^2 + \left(\frac{2\times 0.10}{443.26}\right)^2 + \left(\frac{4\times 4.3205\times 10^{-3}}{5.977}\right)^2}$$

$$= 0.00311$$

$$\therefore \Delta_E = 0.00311E = 0.0036\times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$$

$$\therefore E \pm \Delta_E = (116.83 \pm 0.36)\mathrm{GPa}$$

第三部分 实验总结

拉伸法和动力学法相比，操作比较简单，但是如果用拉伸法测铜棒的弹性模量就不太可行，因为铜棒的截面积比较大，要产生读数显微镜可辨的伸长量，需加的外力就要很大。而对于细钢丝的弹性模量，动力学法也是不合适的，因为钢丝太细了，质量也很小，在振动过程中受到其他扰动也比较大，随机误差较大，而且共振点不容易判断。

在我做过的几个涉及到振动的实验当中，共振点的判断都是比较困难的。我之前做过的理论力学实验“单自由度振动系统固有频率和阻尼比测定”当中，用传感器采集振动信息，并能在计算机中显示幅值和相位的即时值，但共振点仍然很难找，确切地说是“找不出来”，因为振动情况的随机波动太大了。本次实验中用的是示波器，随机误差相比会更大。

从相对不确定度来看，拉伸法的$\Delta_E/E = 0.045$，动力学法的$\Delta_E/E = 0.003$，远小于前者，说明了动力学法的系统误差更小。

对于作 f-x 图线所使用的最小二乘法，我有一个疑问。这种方法的确是能“充分发挥所有数据用途”，但似乎只有当我们预先清楚地知道 x-y 图的性质（线性、抛物线 etc.）时才能这么做。如果面对一个未知的 x-y 关系，需要通过实验得到的数据（或蕴藏在极复杂的隐函数 $z=F(x,y)$中[*]）来将其揭示出来，如果使用了最小二乘法，没有通过每一个数据点，那么数据点的那些“拐弯”、“凸起”等趋势不也就浪费了吗？而且还会造成错误。

2008 年 12 月 22 日

（原始数据表格见附页）