信号处理原理第四次作业

黄家晖 2014011330

1. 分析信号 $f(t)=e^{-\frac{t^2}{20}}$ 局部频谱和全区间频谱的区别。

(a) 由所给提示可以得出，当 $m\in R, c\in R$ 时，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(m^2t^2+2jcmt)}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{me^{c^2}}$$

代入

$$m=\frac{1}{\sqrt{20}}, \quad c=\sqrt{5}\omega$$

可以得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{20}+j\omega t)}dt = \frac{2\sqrt{5\pi}}{e^{5\omega^2}}$$

因此信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{20}} e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{20}+j\omega t)}dt \\ &= \frac{2\sqrt{5\pi}}{e^{5\omega^2}} \end{aligned}$$

(b)

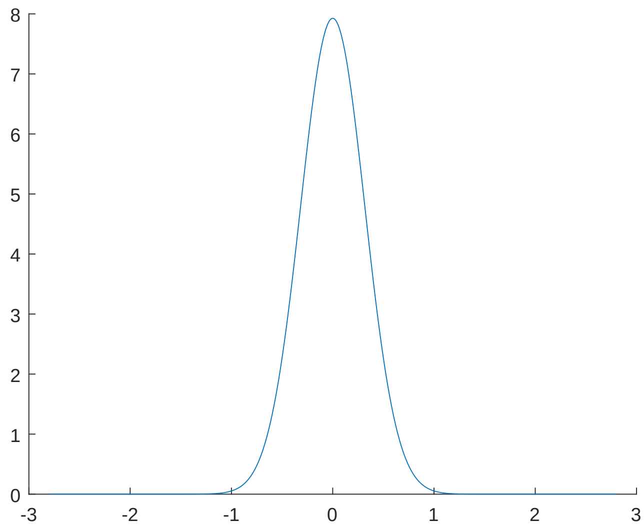
$$f_w(t,0)=f(t)\cdot w(t,0)=e^{-\frac{t^2}{20}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}=e^{-\frac{11t^2}{20}}$$

信号 $f_w(t,0)$ 的傅里叶变换为:

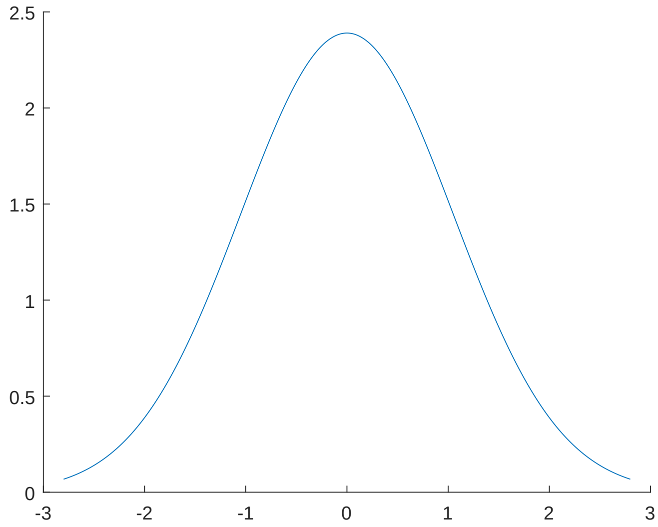
$$
\begin{aligned}
F_w(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{11t^2}{20}} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{11t^2}{20}+j\omega t)} dt \\
&= 2\sqrt{\frac{5\pi}{11}} e^{-\frac{5\omega^2}{11}}
\end{aligned}
$$

(c)

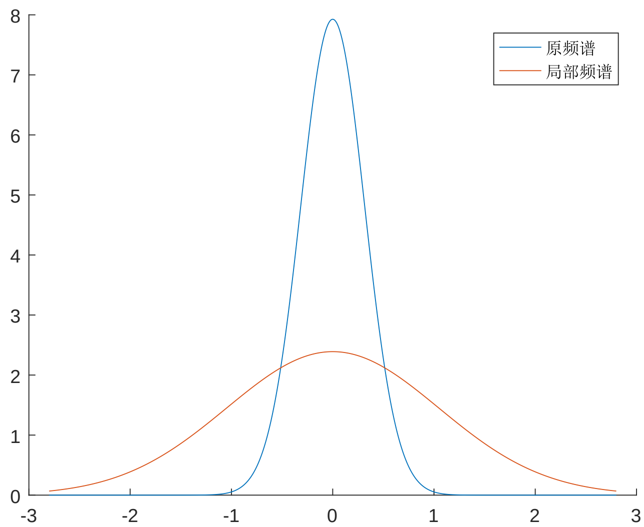
$f(t)$ 的频谱图如下:



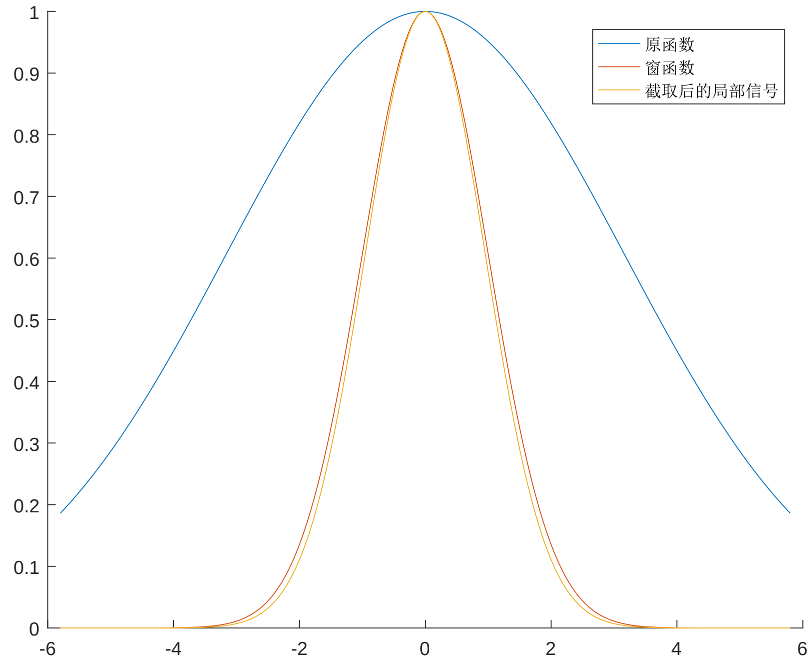
$f(t)$ 在 $t_0 = 0$ 时刻下的“局部频谱”图如下:



将二者进行对比



可以看出局部频谱相对于原本的频谱带宽更大，同时 $\omega = 0$ 时的最大值减小，为了进一步对比 FT 与 IFT，画出原函数的图像：



窗函数的截取对应到频谱图即为傅里叶变换的卷积，由于原函数在截取之后变得更加瘦长，FT 则变得更加宽，这体现了二者的尺度变换特性；但与此同时，截取后的函数频谱面积和原频谱面积大抵相当，这是由于 $f(0) = f_w(0)$ 的缘故，体现了二者这方面的对应关系。

2. 求符号函数

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

的傅里叶变换。

设双边指数衰减函数

$$g(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ -e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

其中 $a > 0$，显然 $g(t)$ 满足绝对可积条件，可以求出其傅里叶变换 $G(\omega)$：

$$
\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt \\
&= -\frac{1}{a-j\omega}e^{(a-j\omega)t}|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}|_{0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{a-j\omega}(1 - 0\cdot e^{-j\omega t}|_{t=-\infty}) - \frac{1}{a+j\omega}(0\cdot e^{-j\omega t}|_{t=\infty} - 1) \\
&= -\frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \\
&= \frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

注意到当 $a \to 0$ 时，$g(t)$ 即化为符号函数 $sgn(t)$，因此 $sgn(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 为:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \lim_{a\to 0} G(\omega) \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2} \\
&= \frac{2}{j\omega}
\end{aligned}
$$