清华大学本科生考试试题专用纸

微积分Ⅲ期终考试 A卷　　　　　　2006年 1月8日

姓名________________ 学号________________ 班级_____________

一、填空题（每空题 3 分，共 39 分）

1. 曲面 $x^2+y^2-z=1$ 在点 $(-1,-1,1)$ 的切平面方程是____________.

2. 设 f 为连续可微函数，$f'(1)=2$. 令 $g(x,y,z)=f(x^2yz)$，则 $\nabla g(1,1,1)=$__________。

3. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上的不与坐标轴相交的一片，则 S 上的点 (x,y,z) 的外侧单位法向量是__________；如果 S 的面积等于 A，则 $\iint_S \frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z}=$__________.

4. 常微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解为_________________________________

5. 设常微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 和 $y_3(x)$. 则微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=0$ 的通解是__________.

6. 假设函数 $y(t)$ 满足方程 $y''+y'+y=1+\cos t$. 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{t}=$__________

7. 设空间光滑曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$，$x^2+y^2\le 2$，上侧为正. 其中函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数. 则 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$__________。

8. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，则三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可以化成球坐标系下的累次积分____

9. D 是由曲线 $y=\ln x$、直线 $x=\mathrm{e}$，以及 x 轴围成的平面区域，则 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________

10. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 内部的面积等于__________

11. 设 L 为曲线 $x^2+y^2=2x\ (y\ge 0)$，则 $\int_L\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}l=$__________

Edited by Hirsch@NewSmth

二、解答题

12.（8 分）Ω是锥面$x^2+y^2=z^2$与平面$z=2$围成的空间区域. 计算$\iiint_\Omega(2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

13.（10 分）设S是抛物$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\le z\le 1$. 在S任意点一点(x,y,z)的质量密度为$\sqrt{1+x^2+y^2}$. 求S的质心.

14. (10 分) 如图，L是有向光滑曲线，起点为原点O，终点为$A(2,2)$. 已知L与线段$\overrightarrow{OA}$围成的区域D的面积等于A. $f(t)$有连续导数. 计算曲线积分$\int_L(y^2\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x-4x)\mathrm{d}y$

15. (8 分) 设L为平面S: $x+y+z=1$在第一卦限中的部分的边界，方向是$A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$. 空间有一个力场$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}$.

求单位质点P在L上某点出发，绕L运动一周时，$\vec{F}$对于质点所做的功.

16. (10 分)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数且$f(0)=f'(0)=1$. 又设对于空间R^3中的任意一张光滑的闭合曲面S，都有$\oiint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求$f(x)$.

17. (12 分)

① 设δ是任意一个正数，L是圆周 $x^2+y^2=\delta^2$ (逆时针方向). 计算积分

$$\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

② 如果将L换成不经过原点但环绕原点的光滑、简单的闭合曲线(逆时针方向). 计算上述积分.

③ 向量场$\dfrac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$在右半平面$x>0$有没有势函数？简述理由.

④ 设L为从$A(2,0)$到$B(4,4)$的有向线段，计算$\int_L\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

18. （6 分）设Ω是圆域: $x^2+y^2<1$. $f(x,y)$在Ω上有连续偏导数，且处处满足方程

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

求证$f(x,y)$在Ω恒等于常数. 如果Ω是不包含原点的圆域，举例说明上述结论未必正确.