几何与代数(1)考试样题二

一. 填空题(将答案填在空格内. 每空4分,合计40分)

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{ } .$$

- 2. 设 A, B 都是 3 阶矩阵,满足 AB = 2A + B,已知行列式 |A I| = 1,则行列式 $|B 2I| = ______$.
- 3. 设 A 是 3 阶矩阵,将 A 的第一行的 2 倍加到第三行,再将第二行和第三行对换,得到矩阵 B ,则 BA^{-1} =
- 4. 过点(3, 2, 1)与直线 $\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = z$ 平行且与平面x y + z + 1 = 0垂直的平面的方程为
- 5. 设 R^3 上的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,当a=_____ 时,向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 线性相关.
- 6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,已知矩阵 A 与矩阵 B 相似,则秩 $r(AB-A) = _$ _______.
- 7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & a \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$,则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.
- 8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathbb{R}^3$ 上的向量,其中 α_1, α_2 线性无关,已知 $\beta = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3$,且 $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3$, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解

是______

9. 设A 是 3 阶矩阵,已知 α 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量,B 是与 A 相似的矩阵,

- 10. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 x_3^2 2x_1x_3$ 的规范形为______
- 二. 解答题 (第11,12,13 题各15分,14 题7分,15 题8分,合计60分)
- 11. 已知 R^3 的两个基分别为 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}^T$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}^T$ 和 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \end{pmatrix}^T$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^T$,
- (1) 设 σ 是 R^3 上的线性变换,已知 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

求 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

- (2)设 $\alpha = (1, -1, 1)^T$,求 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标.
- 12. 设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + ax_3^2 x_2x_3$ 的秩为 2,
 - (1) 求参数 a;
- (2) 求正交矩阵Q,作正交替换X = QY,化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形;
- (3) 指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.
- 13. 设齐次线性方程组 (n ≥ 2)

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \dots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 = 0, \\ bx_1 + ax_3 = 0, \\ \dots \\ bx_1 + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $b \neq 0$. 试讨论a,b取何值时,该方程组只有零解; a,b取何值时,有非零解,并在有非零解时,求方程组的通解.

- 14. 设A 是n 阶方阵,已知齐次线性方程组Ax = 0 的一个基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$,若 β 不是方程组Ax = 0 的一个解,试证明向量组 β , $\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \dots, \alpha_t + \beta$ 线性无关.
- 15. 设A是n阶可逆实矩阵, 试证明
 - (1) $A^T A$ 是正定矩阵:
 - (2) A 可分解为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积,即 A = QS,其中 Q 是正交矩阵, S 是正定矩阵.