概率论与数理统计第一次习题课答案参考

题 1 从一批产品中任取 n 件，以事件 A_i 表示“第 i 件取得正品”，用它们表示下列事件：

1. 没有一件是次品 (全是正品)
   答：$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。
   如果用示性函数表达，则该事件为
   $$I_{A_1}+\cdots+I_{A_n}=n$$
   或等价地，
   $$I_{A_1}\cdots I_{A_n}=1.$$

2. 至少有一件是次品
   答：直接的表示为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，或用对偶律，表示为 $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}$。
   如果用示性函数表达，则该事件为
   $$I_{A_1}+\cdots+I_{A_n}<n.$$

3. 仅仅只有一件是次品
   答：$\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(\overline{A_i}\cdot\bigcap\limits_{1\le j\le n,j\ne i}A_j\right)$，或者 $\overline{\left(\overline{A_1}\cdots\overline{A_n}\right)\cup\bigcup\limits_{1\le i<j\le n}\overline{A_i A_j}}$，这两个形式不同的表达你喜欢哪个？如果用示性函数表达，则该事件为
   $$I_{A_1}+\cdots+I_{A_n}=n-1.$$

4. 至少有两件不是次品
   答：直接表达为 $\bigcup\limits_{1\le i,j\le n;i\ne j}\left(A_iA_j\right)$，也可以间接表达为
   $$\overline{\left(\overline{A_1}\cdots\overline{A_n}\right)\cup\bigcup_{1\le i\le n}\left(A_i\bigcap_{1\le j\le n;j\ne i}\overline{A_j}\right)}.$$
   第一个表达形式简单而且直接，但求和的事件们不是互不相容的，计算概率时会较麻烦；第二个表达虽形式复杂，但表示对立的横线下已表达为互不相容的一些事件，便于概率计算。表达事件的目的是为随后的概率计算提供方便，因此样子略显古怪的后者比样子简单的前者更好。如果用示性函数表达，则该事件为
   $$I_{A_1}+\cdots+I_{A_n}\ge 2.$$

题2 射击室中有10支步枪，其中2支经过校准，用其射击命中率为0.8，用其他8支射击的命中率为0.2。求

1. 任取一支步枪，射击命中目标的概率；

   解：记A为事件“步枪已校准”，B为事件“步枪命中目标”。
   用全概率公式

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{5} \cdot 0.8 + \frac{4}{5} \cdot 0.2 = 0.32,$$

2. 任取一支步枪，射击10次，命中5发的概率；

   记C所求事件，则

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P(C|A) + P(\overline{A})P(C|\overline{A}) \\ &= \frac{1}{5} \cdot C_10^5 \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^5 + \frac{4}{5} \cdot C_10^5 \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^5 \\ &= C_10^5 \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^5 = 0.026. \end{aligned}$$

3. 从室内任取一支步枪对目标射击正好命中，求使用的枪为已校准的概率。

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \\ &= \frac{1/5 \cdot 0.8}{0.32} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

题3 盒中共有5只乒乓球，都是新球。每场比赛从中任取一个使用，比赛后仍放回盒中。求

1. 第三场比赛用球在前两场均未使用的概率；

   解：记A_i为事件”第i场比赛使用了一个从未使用的新球”。则
   $P(A_2) = \frac{4}{5}$, $P(\bar{A}_2) = \frac{1}{5}$,
   于是，利用全概率公式，第3场比赛用球此前未被使用的概率为，

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2)P(A_3|A_2) + P(\bar{A}_2)P(A_3|\bar{A}_2) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

2. 若已知第三场比赛用球在前两场都未使用过，求第三场比赛前恰有4 个球未被使用的概率。

   盒中恰有4个球尚未使用过，即第2场比赛使用了使用了已使用过的球。如果已知第三场用球以前从未被使用，则

$$P(\bar{A}_2|A_3) = \frac{P(\bar{A}_2)P(A_3|\bar{A}_2)}{P(A_2)P(A_3|A_2) + P(\bar{A}_2)P(A_2|\bar{A}_2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{1}{4},$$

题 4 设有来自 3 个地区各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽取两份, 求：

1. 先抽到的一份是女生表的概率。

   解：记 D_i 为事件“抽到第 i 个地区”，G_j 为事件“第 j 次抽到女生”，B_j 为事件“第 j 次抽到男生”（首先交待要使用的符号的含义）。
   按考生的来源进行分类，用全概率公式

$$\begin{aligned}P(G_1) &= P(D_1)P(G_1|D_1) + P(D_2)P(G_1|D_2) + P(D_3)P(G_1|D_3)\\ &\qquad\text{（先用事件符号说明数量之间的关系）}\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}\\ &\qquad\text{（再代入具体数值进行计算）}\\ &= \frac{29}{90}.\end{aligned}$$

2. 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率

   解法 1:

$$\begin{aligned}P(G_1|B_2) &= \frac{P(G_1B_2)}{P(B_2)}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{3} P(D_iG_1B_2)}{P(B_2)}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{3} P(D_i)P(G_1|D_i)P(B_2|D_iG_1)}{1-P(G_2)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}}{1-\frac{29}{90}} = \frac{20}{61},\end{aligned}$$

   其中 $P(G_2)$ 利用了抽签模型与次序无关的性质，所以 $P(G_2) = P(G_1)$。大家也可以用全概率公式计算 $P(G_2)$，会得到同样的结果。上面第三个等号右端分子部分的计算中，我们使用了双重条件的全概率公式。

   解法 2:

$$\begin{aligned}P(G_1|B_2) &= \sum_{i=1}^{3} P(D_i|B_2)P(G_1|D_iB_2)\\ &= P(D_1|B_2)\frac{3}{10-1} + P(D_2|B_2)\frac{7}{15-1} + P(D_3|B_2)\frac{5}{25-1}\end{aligned}$$

   其中

$$P(D_1|B_2) = \frac{P(D_1)P(B_2|D_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(D_i)P(B_2|D_i)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{10-3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{15-7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{25-5}{25}} = \frac{21}{61},$$

同理可得

$$P(D_2|B_2)=\frac{16}{61},\qquad P(D_3|B_2)=\frac{24}{61}.$$

代入第一个等式，得到

$$P(G_1|B_2)=\frac{20}{61}.$$

这里在计算 $P(G_1|B_2)$ 时，我们使用了条件概率形式的全概率公式。

警告提示：有些同学会错误地认为 $P(D_i|B_2)=P(D_i)$，而忽视了已经发生的事件对选择地区时概率的影响。

3. 假设不先确定一个地区，而是从所有报名表中随机抽取两份。如果已知后抽到的一份是一个男生的报名表，那么问先抽到的一份是同地区一个女生的报名表的可能性有多大？

   解：由于不预选地区，所以

$$P(B_2)=P(B_1)=1-\frac{3+7+5}{10+15+25}=\frac{7}{10}.$$

   记 C_i 为事件“两份表格都来自第 i 个地区”。则事件“两份表格来自同一地区”为 $C_1\cup C_2\cup C_3$，

$$\begin{aligned}P((C_1\cup C_2\cup C_3)G_1|B_2)&=\frac{P((C_1\cup C_2\cup C_3)G_1B_2)}{P(B_2)}\\&=\frac{\sum_{i=1}^{3}P(C_iG_1B_2)}{P(B_2)}\\&=\frac{\frac{3\times7}{50\times49}+\frac{7\times8}{50\times49}+\frac{5\times20}{50\times49}}{\frac{7}{10}}=\frac{177}{1715}.\end{aligned}$$

题5 抽查一个家庭，考察两个事件. A: 至多有一个女孩; B: 男女都有. 针对下面两类家庭, 讨论事件是否独立:

1. 3 个孩子之家;

   解： 在 3 个孩子之家，以长幼顺序写出孩子性别，则由 (男、男、男), (男、男、女), (男、女、男), (女、男、男), (男、女、女), (女、男、女), (女、女、男), (女、女、女), 共 8 种可能情况作为样本空间。若假定男女出生率一样，则各样本点出现的概率均为 $\frac{1}{8}$ A 的有利场合为前 4 个样本点, B 的有利场合为当中的 6 个样本点，故 $P(A)=\frac{4}{8}$, $P(B)=\frac{6}{8}$. 而 AB 有利场合为第 2, 第 3, 第 4 个样本点，故 $P(AB)=\frac{3}{8}$. 这时有

$$P(AB)=\frac{3}{8}=\frac{4}{8}\times\frac{6}{8}=P(A)\times P(B).$$

   因此 A 与 B 独立。

2. 4 个孩子之家.

   解： 在 4 个孩子之家，计有 $2^4=16$ 个样本点，也等可能。不难算得

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{5}{16}\ \text{(男孩1 种，或3 男1 女，而1 女可以是任何排行，共4 种，因此共有5 种)}\\P(B)&=\frac{14}{16}\ \text{(扣去全男或全女之后的14 种)}\\P(AB)&=\frac{4}{16}\ \text{(3 男1 女共4 种)}\end{aligned}$$

   这说明 A 与 B 不独立。

3. 如果是 n 个孩子呢？

   解： 在 n 个孩子之家，计有 2^n 个样本点，亦为等可能模型。容易算得

$$P(A)=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}\ (\text{全为男孩和有一个女孩})$$
$$P(B)=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\ (1\ \text{减去全为男孩和全为女孩的的概率})$$
$$P(AB)=\frac{n}{2^n}\ (\text{A, B相交就是正好有一个女孩的情况})$$

   于是有

$$P(AB)-P(A)P(B)=\frac{2^{n-1}-(n+1)}{2^{2n-1}}$$

   稍微考察 $y=x+1$ 与 $y=2^{x-1}$ 两个函数可知，$P(AB)=P(A)P(B)$ 当且仅当 $n=3$. 所以 A 与 B 仅在有3 个孩子的情况时独立，其余情况下不独立。

题6 巴拿赫Banach的火柴问题。波兰数学家巴拿赫随身带着两盒火柴，两个口袋各放一盒，每一盒有n根火柴。任何时候他需要火柴时，就随机地从一个袋中取出一根。当他发现他所取出的一盒已经用完时，问另一盒火柴根数的分布。

解： 为了求得巴拿赫衣袋中的一盒火柴已空，而另一盒还有k根的概率，我们记A为取左衣袋盒中火柴的事件，$\bar{A}$为取右衣袋盒中火柴的事件。将取一次火柴看作一次随机实验，每次实验结果是A或$\bar{A}$发生。显然有$P(A)=P(\bar{A})=\frac{1}{2}$。

若巴拿赫首次发现他左衣袋中的一盒火柴变空，这时事件A已经是第$n+1$ 次发生，而此时他右边衣袋中火柴盒中恰剩k根火柴相当于他在此前已在右衣袋中取走了$n-k$ 根火柴，即$\bar{A}$发生了$n-k$次。即一共做了$2n-k+1$次随机试验，其中事件A发生了$n+1$次，$\bar{A}$发生了$n-k$次。在这$2n-k+1$ 次实验中，第$2n-k+1$是A发生，在前面的$2n-k$次实验中A发生了n次。所以他发现左衣袋火柴盒空，而右衣袋恰有k根火柴的概率为

$$P(A)C_{2n-k}^{n}(P(A))^n(P(\bar{A}))^{n-k}=\frac{1}{2}C_{2n-k}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

由对称性知，当右衣袋中空而左衣袋中恰有k 根火柴的概率也是$\frac{1}{2}C_{2n-k}^{n}(\frac{1}{2})^{2n-k}$。最后得巴拿赫发现他一只衣袋里火柴空而另一只衣袋的盒中恰有k根火柴的概率为$C_{2n-k}^{n}(\frac{1}{2})^{2n-k}, k=0,1,...,n$。

题7 （赌徒输光问题）甲乙两个赌徒,甲有赌本a元，乙有赌本b元。每赌一局，若甲赢则乙给甲1元，若乙赢则甲给乙1 元,没有平局。设每一局中甲胜的概率是p,局与局之间的结果是独立的,他们要一直赌到一个人输光为止。求甲最终获胜的概率。

解： 记q_n为甲初始有n元，最终获胜（赌本变成$a+b$）的概率，显然$q_0=0$，$q_{a+b}=1$ 。如果某时刻甲的赌本有n元，这里$1\le n\le a+b-1$ ，则赌本要变成$a+b$，有两种方式可以实现，一种是接下来赢一局（概率为p）最终赌本变为$a+b$，另一种是接下来输一次（概率为q）最终变成$a+b$ 元，所以按照全概率公式有

$$q_n=pq_{n+1}+qq_{n-1}\ ,n=1,2,...,a+b-1.\ (\text{式1})$$

这样得到关于q_n的二阶差分方程，再用边界条件$q_0=0$，$q_{a+b}=1$，就可以求解。利用这个差分方程系数的特殊性，比较方便的解法是将（式1）写成$p(q_{n+1}-q_n)=q(q_n-q_{n-1})$，若

记$c_n = q_{n+1} - q_n$，$r = q/p$，则又可以写成$c_n = rc_{n-1}$，$n = 1, 2, ..., a+b-1$（式2）。解（式2）可得，

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{n}{a+b} .....r = 1 \\ \dfrac{1-r^n}{1-r^{a+b}} .....r \neq 1 \end{cases} 。$$

本题要求的是$n = a$的情况，那么

$$q_a = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b} .....r = 1 \\ \dfrac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}} .....r \neq 1 \end{cases} 。$$

题 8 设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0; \\ B, & 0 \leq x < 1; \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$$

求：(a) A、B 的值。(b) X 的密度函数。(c) $P(X > 1/3)$ 的值。(d)（补充）X 的数学期望和方差。

解：(a) 因为 X 是连续型随机变量，所以它的概率分布函数处处连续，特别是在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 两处，连续性意味着

$$A = \lim_{x \nearrow 0} F(x) = \lim_{x \searrow 0} F(x) = B, \quad B = \lim_{x \nearrow 1} F(x) = \lim_{x \searrow 1} F(x) = 1 - A,$$

由此解得 $A = B = 1/2$。

(b) X 的概率密度函数为

$$f(x) = F'(x) = Ae^x I_{x<0} + Ae^{-(x-1)} I_{x>1} = \frac{e^x I_{x<0} + e^{-(x-1)} I_{x>1}}{2}$$

(c) 直接利用概率分布函数

$$P(X > 1/3) = 1 - F(1/3) = 1 - B = 0.5.$$

或者利用概率密度函数

$$\begin{aligned} P(X > 1/3) &= \int_{1/3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^x I_{x<0} + e^{-(x-1)} I_{x>1}}{2} \right] \times I_{x>1/3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 0.5. \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\frac{e^x I_{x<0} + e^{-(x-1)} I_{x>1}}{2} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} x e^x dx + \frac{1}{2} \int_{1}^{+\infty} x e^{-(x-1)} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} y e^{-y} dy + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} (y+1) e^{-y} dy \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

类似地，可以计算 EX^2，但是我们注意到 X 的概率密度函数关于 $x = 0.5$ 对称，即

$$
f(0.5 - x) = f(0.5 + x), \quad \forall x,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (y + 0.5)^2 f(y + 0.5) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y^2 + y + \frac{1}{4} \right] f(y + 0.5) dy \\
&= 2 \int_{0}^{+\infty} \left[y^2 + \frac{1}{4} \right] \frac{e^{y+0.5} I_{y<-0.5} + e^{0.5-y} I_{y>0.5}}{2} dy \\
&= \int_{0.5}^{+\infty} \left[y^2 + \frac{1}{4} \right] e^{0.5-y} dy \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[(u + 0.5)^2 + \frac{1}{4} \right] e^{-u} du \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[u^2 + u + \frac{1}{2} \right] e^{-u} du \\
&= -u^2 e^{-u} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_{0}^{+\infty} u e^{-u} du + 1 + 0.5 \\
&= 2 + 1 + 0.5 = \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\mathrm{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.
$$

(d) 的另一种解法

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_0^{+\infty} P(X > x))dx - \int_{-\infty}^{0} P(X < x)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-(x-1)}dx + \int_0^1 \frac{1}{2}dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{u}du + \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

另外，

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^{+\infty} P(X^2 > x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} P(X^2 > u^2)du^2 \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[P(X > u) + P(X < -u)\right]du \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[\frac{e^{-(u-1)}I_{u>1}}{2} + \frac{I_{0<u<1}}{2} + \frac{e^{-u}}{2}\right]du \\
&= \int_1^{+\infty} ue^{-(u-1)}du + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= \int_0^{+\infty} (v+1)e^{-v}dv + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.
$$

题 9 设随机变量 X 服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布。
求：(a) 随机变量 $Y = \cos X$ 的概率密度函数。(b)（补充）Y 的数学期望和方差。

解：(a) 先求 Y 的概率分布函数，

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\cos X \le y) \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\left[P\left(-\frac{\pi}{2} < X \le -\arccos y\right) + P\left(\arccos y \le X < \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\left[-\arccos y + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos y\right]}{\pi} \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\pi - 2\arccos y}{\pi}.
\end{aligned}
$$

由此解得 Y 的概率密度函数

$$
f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}I_{0\le y<1}.
$$

(a) 的另解。直接利用随机变量函数的概率密度公式

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x:cosx=y} f_X(x)\frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} \\
&= f_X(-\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=-\arccos y}} + f_X(\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=\arccos y}} \\
&= 2\frac{1}{\pi} I_{-\frac{\pi}{2}<\arccos y<\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}\big|_{x=-\arccos y}} \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} I_{0<y<1}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) = \int_0^1 y\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 d\sqrt{1-y^2} = \frac{2}{\pi}.
$$

或者利用随机变量函数的数学期望公式

$$
EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot f_X(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin x}{\pi} = \frac{2}{\pi}.
$$

$$
EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 x \cdot f_X(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)+1}{2\pi}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi}dx = \frac{1}{2}.
$$

从而

$$
\mathrm{Var}Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2-8}{2\pi^2} \approx 0.095.
$$