数学实验第一次实验报告

计算机系　计 43　2014011330　黄家晖

2017 年 3 月 15 日

1　实验目的

- 掌握用 MATLAB 计算拉格朗日、分段线性和三次样条三种插值的方法；
- 掌握在 MATLAB 中利用梯形公式和辛普森公式计算数值积分；
- 通过实例学习用插值和数值积分解决问题。

2　计算题

2.1　CH3-T10 机翼剖面

2.1.1　算法设计

本题仅仅给出了很稀疏的机翼形状边缘的采样点值，因此在进行加工的时候需要对这些点进行插值加密。我将机翼剖面的轮廓线分为两段，即 y_1 和 y_2 分别进行插值，并采用了拉格朗日插值（老师编写好的 `lagr`函数）、分段线性插值（MATLAB 自带的 `interp1`函数）和三次样条插值（MATLAB 自带的 `spline`函数）进行插值结果的分析和对比。

在计算剖面面积的时候，我使用上一步中加密过后的数据点进行数值积分计算，采用了梯形积分公式（MATLAB 自带的 `trapz`函数）和辛普森公式（自己编写的计算函数）进行面积的估算。

2.1.2　MATLAB 程序

```
%% Math Exp Homework 1 T10
% Draw the curve of a plane wing and calculate its surface area.

%% Import Data
x = [0 3 5 7 9 11 12 13 14 15];
y1 = [0 1.8 2.2 2.7 3.0 3.1 2.9 2.5 2.0 1.6];
y2 = [0 1.2 1.7 2.0 2.1 2.0 1.8 1.2 1.0 1.6];

%% Interpolation
xInterp = 0:0.1:15;
% Lagrange Interpolation
y1Interp_lagr = lagr(x, y1, xInterp);
y2Interp_lagr = lagr(x, y2, xInterp);

% Segment Interpolation
y1Interp_seg = interp1(x, y1, xInterp);
y2Interp_seg = interp1(x, y2, xInterp);
```

```
% Spline Interpolation
y1Interp_spline = spline(x, y1, xInterp);
y2Interp_spline = spline(x, y2, xInterp);

%% Plot
figure;
hold on;
scatter(x, y1, 'k');
scatter(x, y2, 'k');

plot(xInterp, y1Interp_lagr, 'r');
plot(xInterp, y2Interp_lagr, 'r');

figure;
hold on;
scatter(x, y1, 'k');
scatter(x, y2, 'k');

plot(xInterp, y1Interp_seg, 'r');
plot(xInterp, y2Interp_seg, 'r');

figure;
hold on;
scatter(x, y1, 'k');
scatter(x, y2, 'k');

plot(xInterp, y1Interp_spline, 'r');
plot(xInterp, y2Interp_spline, 'r');

%% Calculate the surface area
sa_lagr = trapz(xInterp, y1Interp_lagr) - trapz(xInterp, y2Interp_lagr)
sa_seg = trapz(xInterp, y1Interp_seg) - trapz(xInterp, y2Interp_seg)
sa_spline = trapz(xInterp, y1Interp_spline) - trapz(xInterp, y2Interp_spline)

sa_spline_simpson = simpson(xInterp, y1Interp_lagr) - simpson(xInterp, y2Interp_lagr)
```

其中对于等距数据点编写的辛普森求积公式 `simpson`如下所示：

```
function [ integral ] = simpson( X, Y )
%simpson: Calculate the integral using simpson formula
% Input X and Y are discrete values of y = f(x)
% X is supposed to be evenly distributed.
% Notice that length(X)=length(Y) must be odd.

m = (length(X) - 1) / 2;
h = (max(X) - min(X)) / (2 * m);
integral = Y(1) + Y(2 * m + 1) + 4 * Y(2);
for k = 1:(m-1)
    integral = integral + 4 * Y(2 * k + 2) + 2 * Y(2 * k + 1);
end
integral = integral * h / 3;

end
```

2.1.3 计算结果

使用各个插值方法计算得到的结果和机翼剖面面积如表??所示。

使用拉格朗日插值法得到的加工曲线如图??所示。

使用分段线性插值法得到的加工曲线如图??所示。

插值方法	$x \to y_1$（y_2 省略）								
	0.0	**0.1**	**0.2**	**0.3**		**14.7**	**14.8**	**14.9**	**15.0**
拉格朗日插值法	0	0.55	1.01	1.39	…	1.69	1.66	1.63	1.6
分段线性插值法	0	0.06	0.12	0.18		1.72	1.68	1.64	1.6
三次样条插值法	0	0.11	0.21	0.31		1.70	1.66	1.63	1.6

插值方法	梯形公式计算的面积	辛普森公式计算的面积
拉格朗日插值法	40.3	40.3
分段线性插值法	10.75	10.75
三次样条插值法	11.34	11.35

表 1: 各类插值方法对应的加工细节和面积计算

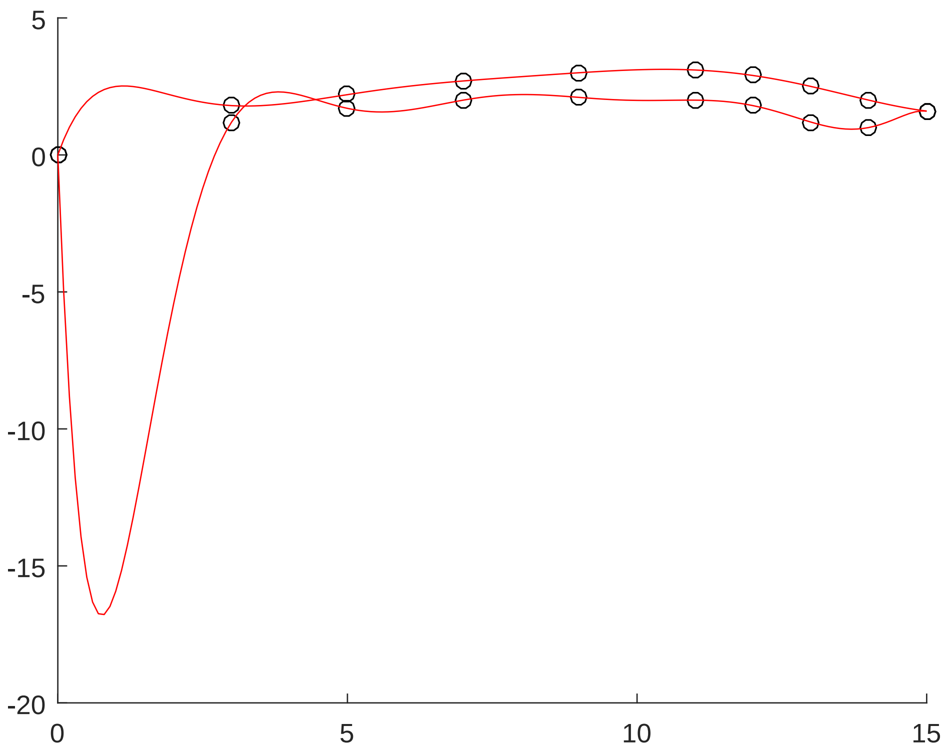

图 1: 拉格朗日插值法得到的加工曲线

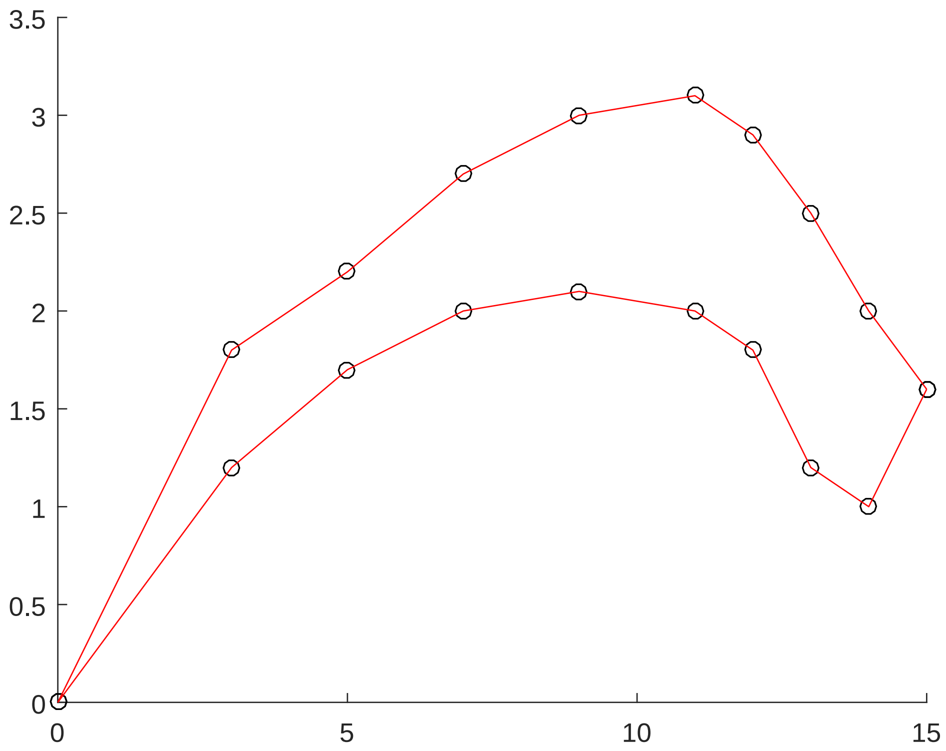

图 2: 分段线性插值法得到的加工曲线

使用三次样条插值法得到的加工曲线如图??所示。

注：机翼剖面面积已经在表 1 中给出。

2.1.4 结果分析

从上述结果中可以看出，使用拉格朗日线性插值法出现了“龙格问题”，曲线震荡非常严重，完全不能作为加工的曲线使用，同时使用拉格朗日插值之后的数据点来进行面积计算时也有很大的偏移，不适合在该问题中使用。

而分段线性插值和样条插值法给出的加工数据则更加合理，二者拟合的曲线也比较相近，但是如果需要用在工业生产中，还是样条插值给出的曲线更加平滑，能够给予机翼更好的流线，应该在该问题中被采用。

至于梯形公式和辛普森积分公式的面积计算，从结果上看二者表现相近，差距不大。

2.1.5 结论

实际采用的加工曲线应该如图 3 所示使用样条插值得到，这样加工得到的机翼剖面面积为 11.34。

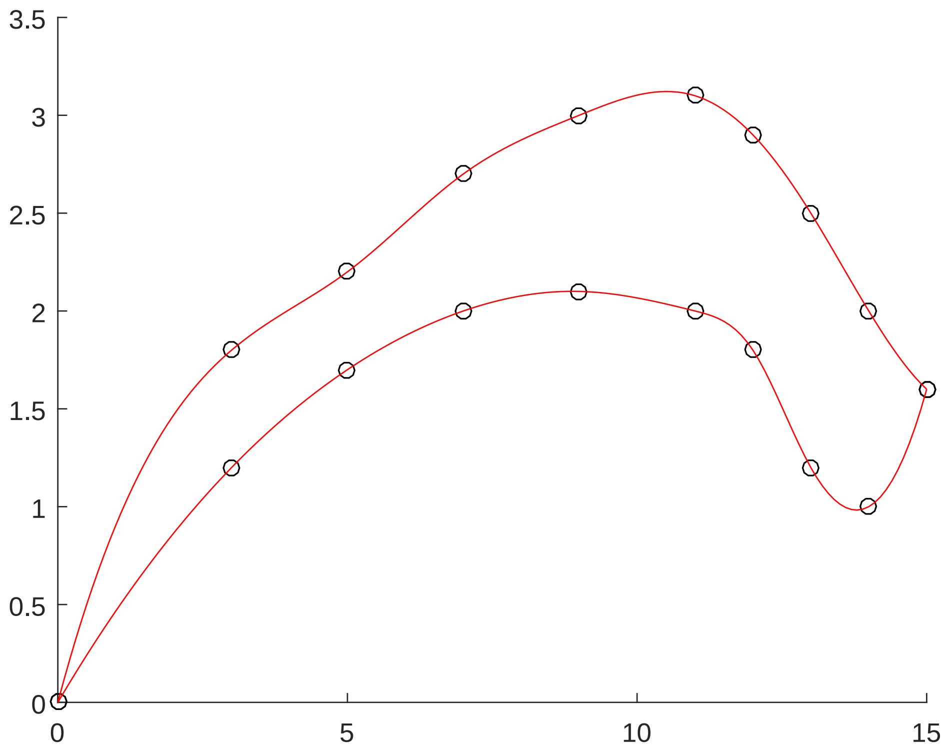

图 3: 三次样条插值法得到的加工曲线

2.2 CH3-T11 国土面积

2.2.1 算法设计

本题的算法流程较为简单，直接通过 MATLAB 自带的 `trapz`函数进行数值积分计算即可。本题我使用了分段线性插值和三次样条插值两种插值方法，首先算出 y_1 的积分面积 S_1，再计算 y_2 的积分面积 S_2，最后的国土面积即为：

$$S = (S_2 - S_1) \cdot (\frac{20}{9})^2 km^2$$

2.2.2 MATLAB 程序

```
%% Math Exp Homework 1 T11
% Calculate the area of a European country.

%% Import data
x = [7.0 10.5 13.0 17.5 34.0 40.5 44.5 48.0 56.0 61.0 68.5 76.5 80.5 91.0 96.0 101.0 104.0
    106.5 111.5 118.0 123.5 136.5 142.0 146.0 150.0 157.0 158.0];
y1= [44  45  47  50  50  38  30  30  34  36  34  41  45  46  43  37  33  28
       32   65   55   54   52   50   66   66   68];
y2= [44  59  70  72  93  100  110  110  110  117  118  116  118  118  121  124  121  121
       121  122  116  83   81   82   86   85   68];

%% Calculate area
area = trapz(x, y2) - trapz(x, y1);
area * 400 / 81
```

```
% Prepare spline interpolate data
xInterp = min(x):0.1:max(x);
yInterp1 = spline(x, y1, xInterp);
yInterp2 = spline(x, y2, xInterp);
area_spline = trapz(xInterp, yInterp2) - trapz(xInterp, yInterp1);
area_spline * 400 / 81

%% Plot
figure;
hold on;
grid on;
plot([x fliplr(x)], [y1 fliplr(y2)], 'b');
plot([xInterp fliplr(xInterp)], [yInterp1 fliplr(yInterp2)], 'r');
legend('        •', '          ´');
legend();
```

2.2.3 计算结果

两种插值函数描绘的国土轮廓形状如图??所示。

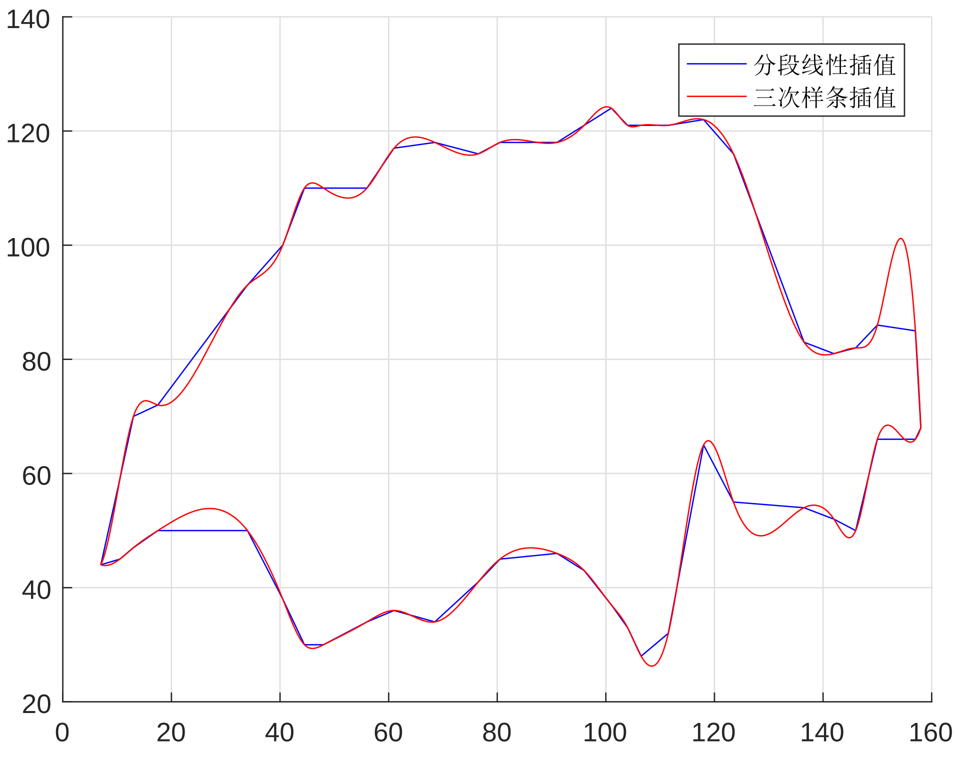

图 4: 两种插值函数描绘的国土轮廓形状

分段线性插值计算的面积值为 $42414km^2$。这与精确值 $41288km^2$ 的差距为 2.7%。
三次样条插值计算的面积为 $42468km^2$。这与精确值的差距为 2.8%。

2.2.4 结果分析

使用梯形公式计算的面积与真实值最小相差 2.7%，在对精确度要求不高的应用中属于可以接受的数值范围。且采用分段线性插值在本题中取得了比三次样条插值更精确的结果。当然，如果需要进一步提高精确度，可以尝试的方法有：

- 增加测量的精度，获取更多数据点；
- 通过插值的方法增加数据，但要注意插值方法的选择应该符合实际情况。

2.2.5 结论

使用分段线性插值和梯形公式得到的国土面积比样条插值更准确，计算得到的面积为 $42414km^2$。与精确值的差距为 2.7%。

3 应用题

3.1 CH3-T12 估算车流量

3.1.1 问题分析

本题要求估算一天的车流量，但是并未给出每分钟的车流量，必须要设法求出或估计出其他各个时刻的车流量分布，才能计算出一天的车流量。

3.1.2 模型假设与模型建立

本题我将车流量抽象成关于时间（单位为分钟）的函数 $f(t)$，函数值即为在 t 分钟到 $t+1$ 分钟经过桥梁的车辆个数。根据题意，$f(0)=2$，$f(120)=2$，以此类推。显然 $f(t)\geq 0, \forall t\geq 0$。

对于函数 f 我给出两个约束，他们分别为：

约束 A f 是关于时间的连续函数；

约束 B f 的二阶导数连续（保证车流变化的平滑性）。

而本题的目标即为求解：

$$\int_0^{1439} f(t)dt$$

3.1.3 算法设计

由于本题仅仅需要给出数值解。在不考虑**约束 B**的情况下，仅仅需要利用当前的数据点对 $f(t)$ 利用梯形公式进行数值积分即可，可以使用 MATLAB 的 `trapz`函数实现；而在考虑**约束 B**的情况下则比较复杂，需要首先进行三次样条插值到确定精度，然后再利用插值过后的数据点带入梯形公式进行数值积分。

3.1.4 MATLAB 程序

```
%% Math Exp Homework 1 T12
% Estimate the number of cars passing the bridge

%% Import data
x = [0 2 4 5 6 7 8 9 10.5 11.5 12.5 14 16 17 18 19 20 21 22 23 24] * 60;
y = [2 2 0 2 5 8 25 12 5 10 12 7 9 28 22 10 9 11 8 9 3];

figure;
```

```
plot(x, y);
xlabel('Time/min');
ylabel('Cars');

%% Calculate the total cars without constraint B.
totalA = trapz(x, y)

%% Interpolcate data using spline function
xInterp = 0:(24*60);
yInterp = spline(x, y, xInterp);
% Trim y >= 0
yInterp = max(yInterp, 0);

figure;
plot(xInterp, yInterp);
xlabel('Time/min');
ylabel('Cars');

%% Calculate the total cars with constraint B.
totalB = trapz(xInterp, yInterp)
```

3.1.5 计算结果

不考虑约束 B 的情况，简单求解得到一天车流量为 12990 辆，绘制出的车流量随时间变化曲线如图??所示；

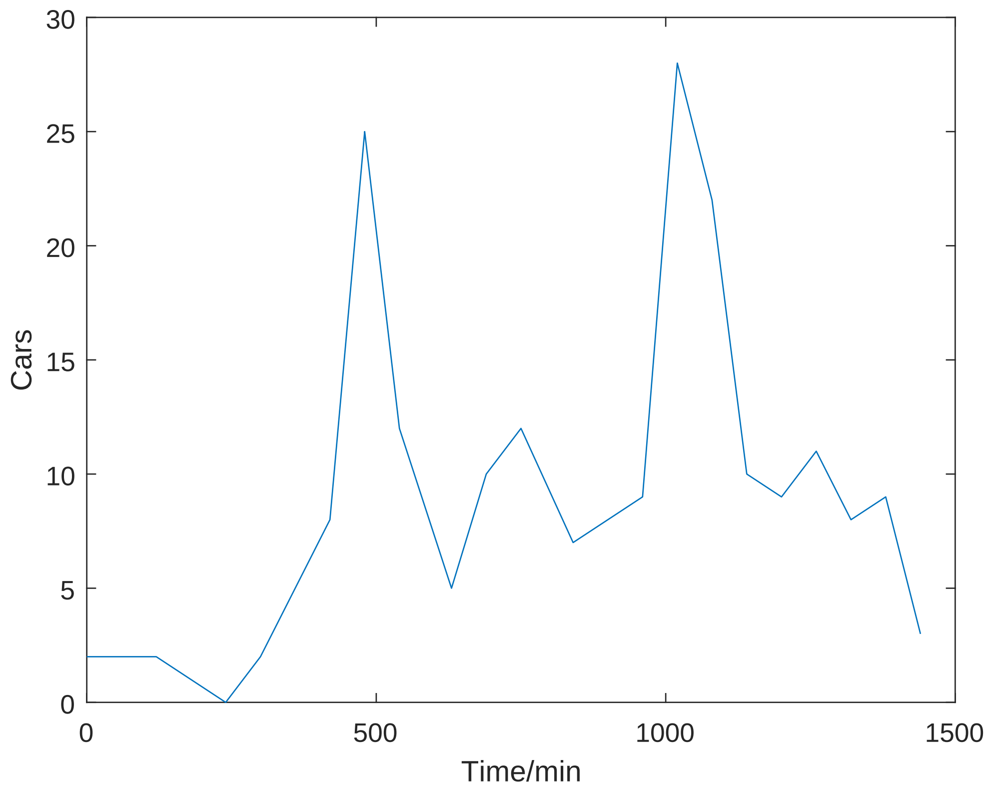

图 5: 不考虑约束 B 的情况车流量随时间变化曲线

如果考虑约束 B，可以得到一天车流量为 12670 辆，绘制出的车流量随时间变化曲线如图??所示。

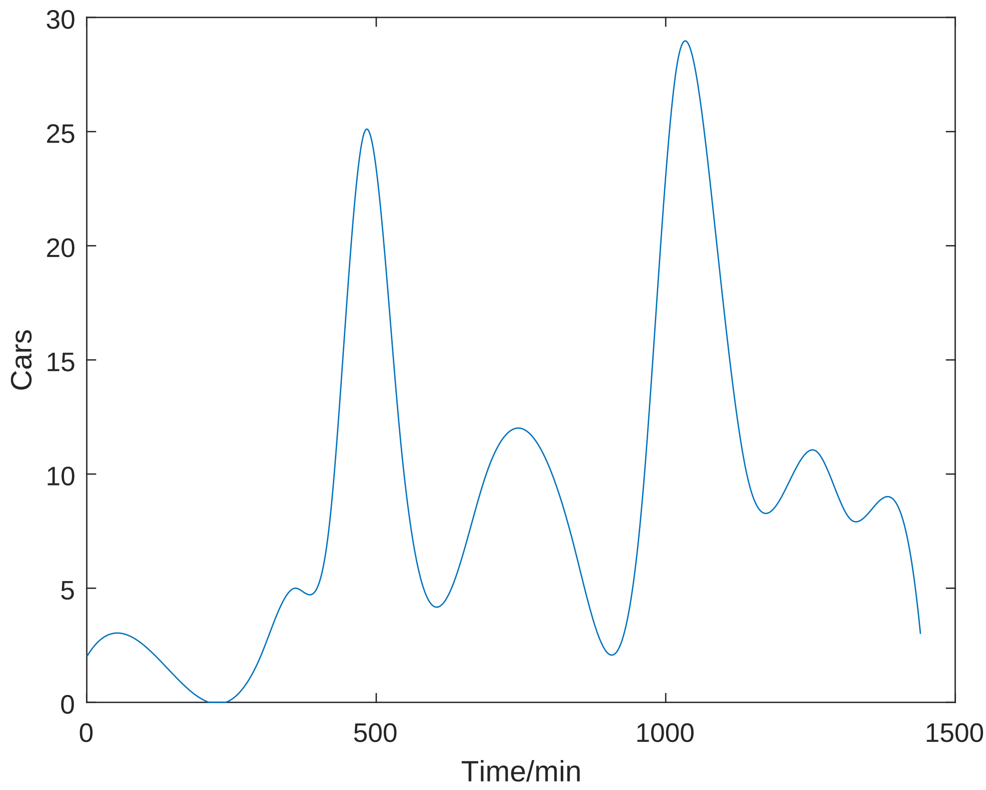

图 6: 考虑约束 B 的情况车流量随时间变化曲线

3.1.6 结果的数学分析及实际意义

根据上述分析和计算结果，可以看出车流量一天的变化情况，使用线性分段插值的结果简单却略显粗糙，考虑了平滑性的曲线则在某些时刻误差较大（例如 900 分钟左右的低谷）；但总体看来，由于取样的数据点比较少，所以给出的车流量估计的精确性会受到限制。考虑到各类误差，可以给出大致答案，即一天车流量约为 1.2 万 -1.3 万辆。

3.1.7 结论

一天通过桥梁的车流量约为 1.2 万 -1.3 万辆（插值计算精确值请见计算结果部分）。

4 收获与建议

通过这次的实验，我对 MATLAB 中提供的插值函数和数值积分函数理解更加深刻，通过画图的方式观察并体会了不同方式的差别与优缺点，这是书本上无法学到的知识。同时，在做上机实验的过程中，我对 MATLAB 这款软件的使用也更加熟练了。希望在之后的课堂上老师能够当堂进行相关的技巧演示并给出题目的分步解答。