第四次习题课

May 27, 2016

1. 如果$X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$. 试证：

(1).$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$;

(2).$X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

2. 设随机变量 X_n 服从柯西分布, 其密度函数为

$$p_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, -\infty < x < +\infty.$$

试证：$X_n \xrightarrow{P} 0$.

3.设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(0,1)$. 令

$$Y_n = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{(\frac{1}{n})},$$

试证明: $Y_n \xrightarrow{P} c$, 其中 c 为常数,并求出 c.

4. 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 数学期望、方差均存在, 且 $E(X_n) = \mu$, 试证:

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \cdot X_k \xrightarrow{P} \mu.$$

5. 将 n 个编号为 1 至 n 的球放入 n 个编号为 1 至 n 的盒子中,每个盒子只能放一个球, 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{编号为 } i \text{ 的球放入编号为 } i \text{ 的盒子;} \\ 0, & \text{反之.} \end{cases}$$

且$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, 试证明:

$$\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{P}0.$$

6. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 试用特征函数的方法求 X 的 3 阶及 4 阶中心距.

7. (泊松大数定律) 设 S_n 为 n 次独立试验中, 事件 A 出现的次数, 而事件 A 在第 i 次试验出现的概率为 $p_i, i=0,1,2,\cdots,n,\cdots$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i|<\varepsilon)=1.$$

8. 掷一颗骰子 100 次, 记第 i 次掷出的点数为 $X_i, i=1,2,\cdots,100$, 点数之平均为

$$\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i,$$

试求概率$P\{3\le\overline{X}\le4\}$.