（A 卷）

2009 年“数值分析”期末试卷

一. 选择题与填空题（19 分）

1. 判断下面哪个命题是正确的：___

(A) 高精度运算可以改善问题的病态性.

(B) 无论问题是否病态，只要算法稳定都能得到好的近似解.

(C) 数值计算结果的准确度主要受初始数据误差、截断误差、舍入误差三者的影响.

(D) 条件数是反映问题病态性的量，其值越小说明问题越病态.

2. 下面哪两个数值方法（或算法）可能存在数值稳定性问题：___ ， ___

(A) 求解线性方程组的列选主元高斯消元法.

(B) 对称正定矩阵的 Cholesky 分解算法.

(C) 以$\{1, x, x^2, \cdots\}$为基求解最佳平方逼近多项式的法方程法.

(D) 求解矩阵特征值问题的 QR 算法.

(E) 分段低次插值方法.

(F) 计算数值积分的高阶 Newton-Cotes 方法.

(G) 计算数值积分的高斯积分方法.

3. 假设函数$f(x,y)$对 y 满足 Lipschitz 条件，对于满足$y' = f(x,y)$的常微分初值问题，下面哪种解法不收敛：___

(A) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f(x_n, y_n) + 2f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$

(B) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$

(C) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{5}\left[f(x_n, y_n) + 4f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))\right]$

(D) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1})]$

4. 采用迭代公式$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^3 - 1}{9x_k^2}$求方程$x^3 - \frac{1}{3} = 0, x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1\right]$的根，则对其收敛性的正确描述为：______ （不定项选择）

(A)在区间$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1\right]$上全局收敛， (B)局部 1 阶收敛， (C)局部 2 阶收敛， (D)局部 3 阶收敛.

5. 设x的相对误差限为 2%，则计算x^{10}的相对误差限约为______.

6. 写出求解非线性方程$x\sin x = 1$的迭代计算公式.

(1) 牛顿法：____________________

(2) 弦截法(割线法)：__________________________

二. 设$y(x)$是关于x的函数，在下述 4 个离散点上函数值为：（6 分）

x_i	0	1	2	3
y_i	1	1	2	0

(1) 采用分段线性插值，求$y(1.5)$的近似值;

(2) 用最小二乘法得到形如$y(x) = a + bx$的拟合曲线，并且根据它求$y(1.5)$的近似值.

三．已知函数$P(x)$满足$P(0)=0,\ P(1)=P(2)=1, P(3)=4$，（8 分）
(1)请使用 Newton 插值法，写出多项式函数$P(x)$的表达式；
(2)若增加一条件：$P''(1)=-3$，求满足这些条件的次数不高于 4 次的多项式$P(x)$.

四．Gauss-Legendre 求积公式的积分节点x_k和系数$A_k\ (k=0,1,\cdots,n)$列于右表。（8 分）
(1) 求 n=1 时的x_k和A_k.
(2) 用具有 3 次代数精度的 Gauss-Legendre 公式计算$\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+2}dx$.

n	x_k	A_k
0	0.0000000	2.0000000
1		
2	±0.7745967, 0	0.5555556, 0.8888889
3	±0.8611363, ±0.3399810	0.3478548, 0.6521452
…	…	…

五.若$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$为对称正定矩阵，则求解方程$Ax=b$常常利用矩阵 A 的 Cholesky 分解$A=LL^T$，下面是相应的算法描述：（6 分）

(1) For $j=1,2,\cdots,n$
(2) $\quad l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2)^{1/2}$
(3) $\quad$ For $i=j+1,j+2,\cdots,n$
(4) $\quad\quad l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{kj})/l_{jj}$
(5) $\quad$ EndFor
(6) EndFor
(7) For $i=1,2,\cdots,n$
(8) $\quad y_i=(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k)/l_{ii}$
(9) EndFor
(10) For $i=n,n-1,\cdots,1$
(11) $\quad x_i=(b_i-\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k)/l_{ii}$
(12) EndFor

请问上述算法描述中哪两行有错误？应如何改正？

六．矩阵$A=\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & 6 & \frac{3}{2}\\ 2 & \frac{3}{2} & 4\end{bmatrix}$，　　（8 分）
(1)用圆盘定理估计$\mathrm{cond}(A)_2$的上限。
(2)设初始向量$x_0=[1,1,1]^T$，使用改进的幂法做两次迭代，求矩阵A最大特征值的近似值.

七．矩阵$A=A_1=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，完成求特征值的基本 QR 算法的第一步迭代，写出矩阵Q_1,R_1，和A_2（要求使用 Householder 变换）．（8 分）

八．矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$，采用 Gauss-Seidel 迭代法求解方程组$Ax=b$．（7 分）
(1)写出 Gauss-Seidel 迭代法的矩阵分裂形式$A=M-N$;
(2)写出 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵 B;
(3)讨论 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性.