黄家晖 计43
2014011330

教 案 纸

№

信号处理原理 第六次作业

1. 证明：设 $f(t)$ 的抽样信号 $\hat{f}(t)$ 定义为

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT).$$

易得 $\hat{f}(t)$ 的 FT 为 $\hat{F}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - m\omega_s)$.

其中 $\omega_s = 2\pi/T$,

以另一种形式表示 $\hat{F}(\omega)$, 有:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\,e^{-j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,e^{-j\omega kT} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - m\omega_s)$$

令 $\omega = 0$, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(-m\omega_s).$$

注意到 ω_s 即为题干定义中的 ω_0, 代入.

$$T\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)$$

2. 解: (a) $\text{DTFT}\ x(n) * x^*(-n)$

$$= \text{DTFT}\ x(n) \cdot \text{DTFT}\ x^*(-n)$$

$$= X(\omega)\cdot X^*(\omega)$$

(b) $\text{DTFT}\ x(2n+1) = e^{\frac{1}{2}j\omega} X(\frac{1}{2}\omega)$.

~~$= \text{DTFT}\ x_{(\frac{1}{2})}(n+\frac{1}{2})$~~

~~$= e$~~

根据定义

$\text{DTFT}[x(2n+1)]$

$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(2n+1)\,e^{-jn\omega}$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,e^{-j\frac{m}{2}\omega}\cdot e^{\frac{1}{2}j\omega}$

$= X(\frac{1}{2}\omega)\,e^{\frac{1}{2}j\omega}$, 但必须要求 $x(n)=0$, n 为偶数

(c) $\text{DTFT}\ x(n) - x(n-2)$

$$= \text{DTFT}\ x(n) - \text{DTFT}\ x(n-2)$$

$$= X(\omega) - e^{-2j\omega}X(\omega) = (1-e^{-2j\omega})X(\omega)$$

(d) $\text{DTFT}\ x(n) * x(n-1)$

$= \text{DTFT}\ x(n) \cdot \text{DTFT}\ x(n-1)$

$= X(\omega) \cdot e^{-j\omega} X(\omega)$

$= e^{-j\omega} X^2(\omega)$

3. 证明: $Y(\omega) = \text{DTFT}\ y(n)$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega n}$ 代入 $y(n)$

$= \sum_{n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots} x(\frac{n}{L}) e^{-j\omega n}$, 设 $m = \frac{n}{L}$, 则 $n = Lm$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega L m}$

$= X(L\omega)$ 得证.

4. 解: $L = 4$.

(1) 当 $N=4$ 时. $X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4} 0 \cdot n} = 10$

$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot n} = -2+2j$

$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot n} = -2$

$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3n} = -2-2j$

(2) 当 $N = 8$ 时, (fft(1:4,8);)

$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{8} 0 \cdot n} = 10$

同理可得 $X(1) = (1-\sqrt{2}) - 3(1+\sqrt{2})j$ $X(5) = (1+\sqrt{2}) + 3(\sqrt{2}-1)j$

$X(2) = -2+2j$ $X(6) = -2-2j$

$X(3) = (1+\sqrt{2}) + 3(1-\sqrt{2})j$ $X(7) = (1-\sqrt{2}) + 3(\sqrt{2}+1)j$

$X(4) = -2$

5. 解：对周期信号 $f(t)$，时间 T 内采 N 个值的频率下，能够满足采样定理，即 $\omega_s \geq 2\omega_M$，则 ω_M 不能过大。

具体地，$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi \frac{N}{T}$

$\omega_M = n_{max}\omega_0$，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$2\pi \frac{N}{T} \geq 2 n_{max} \frac{2\pi}{T}$ $\quad n_{max} \leq \frac{N}{2}$

意即对 $f(t)$ 的 FS 系数 F_n 来说 $|n| \leq n_{max} \leq \frac{N}{2}$

$\therefore \quad |n| \leq \frac{N}{2}$

再求 DFT. $x(m) = f(\frac{m}{N}T)$，$m = 0, 1, 2, \dots N-1$.

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{m}{N}T\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1.$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} F_n e^{j\frac{m}{N}T\omega_0 n} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \quad \text{FS展开}.$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} F_n e^{j\frac{m}{N}\cancel{T}\frac{2\pi}{\cancel{T}} n} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi m}{N}(n-k)} \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} F_n. = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} F_n \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}m(n-k)}$$

分析 $\sum e^{j\frac{2\pi}{N}m(n-k)}$，当 $(n-k) \bmod N \neq 0$ 时，

设 $t = j2\pi\frac{n-k}{N}$，则 $\sum_{m=0}^{N-1} e^{tm} = \frac{1-(e^t)^N}{1-e^t}$

分子 $= 1 - e^{j2\pi(n-k)} = 0$. ~~$X(k) =$~~

当 $(n-k) \bmod N = 0$ 时，由于 $n-k \in [-\frac{N}{2}, \frac{3}{2}N]$，

仅在 $n = k$ 和 $N+k$ 时有值.

则 $\sum_{m=0}^{N-1} 1 = N$. $\quad X(k) = \sum_{\substack{|n| \leq \frac{N}{2} \\ (n-k) \bmod N = 0 \\ (n-k = -N,\ 0)}} N \cdot F_n. = N(F_{-N+k} + F_k)$ *

注意 $k-N$ 与 k 的范围不一定在 $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ 之间.（因为需满足 Nyquist 定理），实际取值时应舍掉下标不在范围内的 F 值.

6. 证明：下面仿照课堂所讲方式给出证明：即序列 N 回绕后 DFT 不变.

设列向量 $\tilde{X}$, $\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jn\omega_k}$

则有 $\tilde{X}=B\tilde{x}$ 的形式，其中 B 为 $N\times N$ 矩阵.

且 $B(k,n)=e^{-jn\omega_k}$.

同理，设列向量 X, $X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jn\omega_k}$.

则 $X=Ax$, A 为 $N\times L$ 的矩阵. $A(k,n)=e^{-jn\omega_k}=e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$ N为周期

由于 $L=rN+s$, 则 $A=[\underbrace{B\ B\cdots}_{r个B}\ \underbrace{\quad}_{B的前s列}]$

故 $Ax=[B\ B\cdots]x=B([\underbrace{I\ I\cdots}_{r个I}\ \underbrace{\quad}_{I的前s列}]x)=B\tilde{x}$

故 $X=\tilde{X}$, 即 $\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jn\omega_k}=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jn\omega_k}$, $\forall k=0,\cdots N-1$ 成立.

7. 证明：设 $W_N^t=e^{-2\pi j\frac{t}{N}}$.

由DFT定义，$X(k)=\sum_{n=0}^{N}x(n)W_N^{kn}$ $(k=0,1,\cdots N-1)$.

$G(k)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}x(2m)W_{\frac{N}{2}}^{km}$ $(k=0,1,\cdots\frac{N}{2})$

$=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}x(2m)W_N^{2km}$ (由 W_N^t 性质).

$H(k)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}\cancel{(x}\ x(2m+1)W_{\frac{N}{2}}^{km}$ $(k=0,1,\cdots\frac{N}{2})$

$=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}x(2m+1)W_N^{2km}$

因此 $G(k)+W_N^kH(k)$

$=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}x(2m)W_N^{2km}+\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}}x(2m+1)W_N^{\cancel{2k}(2m+1)k}$.

$=\sum_{m=0}^{N}x(m)W_N^{km}=X(k)$. 得证.