

实验 7: 线性方程组的迭代解法

✉ jerryyangs@gmail.com

April 29, 2014

1 题目内容

考虑常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}, 0 < a < 1$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}} (1 - e^{-x/\varepsilon}) + ax$$

对微分方程进行离散化, 把 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 令 $h = \frac{1}{n}$

$$x_i = ih, i = 1, 2, \dots, n-1$$

得到有限差分方程

$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a$$

简化为

$$(\varepsilon + h)y_{i+1} - (2\varepsilon + h)y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{bmatrix}$$

请完成:

- (1) 对于 $\varepsilon = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $n = 100$, 分别用 Jacobi 法、Gauss-Seidel 法和 SOR 法求解上述线性方程组的解, 要求有 4 位有效数字, 然后比较其与精确解的误差;
- (2) 对于 $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$ 的情况下, 考虑重新求解上述问题。

2 实验报告

请完成实验并提交实验报告, 内容包括:

- 实习要求 (题目及初始数据);
- 算法描述 (伪码或框图);
- 程序清单 (以附件形式给出, 和实验报告一起打包);
- 体会与问题 (对算法、程序或计算问题的心得)。

3 参考文献

- [1] Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Yousef Saad, 2000.