清华大学本科生考试试题专用纸

微积分Ⅲ期终考试 **A** 卷　　　　2006 年 1　月 8 日

一、填空题（每空题 3 分，共 39 分）

1．曲面 $x^2+y^2-z=1$ 在点 $(-1,-1,1)$ 的切平面方程是

2．设 f 为连续可微函数，$f'(1)=2$．令 $g(x,y,z)=f(x^2yz)$，则 $\nabla g(1,1,1)=$。

3．设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上的不与坐标轴相交的一片，则 S 上的点 (x,y,z) 的外侧单位法向量是___；如果 S 的面积等于 A，则

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z}=.$$

4．常微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解为

5．设常微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 和 $y_3(x)$．则微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=0$ 的通解是

6．假设函数 $y(t)$ 满足方程 $y''+y'+y=1+\cos t$．则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{t}=$__。

7．设空间光滑曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$，$x^2+y^2\le 2$，上侧为正．其中函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数．则 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$。

8．设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，则三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可以化成球坐标系下的累次积分

9．D 是由曲线 $y=\ln x$、直线 $x=\mathrm{e}$，以及 x 轴围成的平面区域，则 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$.

10．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 内部的面积等于。

11．设 L 为曲线 $x^2+y^2=2x\ (y\ge 0)$，则 $\int_L\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}l=$。

二、解答题

12．（8 分）Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=2$ 围成的空间区域．计算

$$\iiint_\Omega (2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

13．（10 分）设 S 是抛物 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，$0\le z\le 1$．在 S 任意点一点 (x,y,z) 的质量密度为

$\sqrt{1+x^2+y^2}$．求 S 的质心．

14．(10 分)如图，L 是有向光滑曲线，起点为原点 O，终点为 $A(2,2)$．已知 L 与线段 $\overrightarrow{OA}$ 围成的区域 D 的面积等于 A． $f(t)$ 有连续导数．计算曲线积分

$$\int_L (y^2\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x-4x)\mathrm{d}y$$

15． (8 分)设 L 为平面 S: $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分的边界，方向是 $A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$．空间有一个力场

$$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}\text{．}$$

求单位质点 P 在 L 上某点出发，绕 L 运动一周时，$\vec{F}$ 对于质点所做的功．

16．(10 分)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数且 $f(0)=f'(0)=1$．又设对于空间 R^3 中的任意一张光滑的闭合曲面 S，都有 $\oiint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求 $f(x)$．

17． (12 分)

① 设 δ 是任意一个正数，L 是圆周 $x^2+y^2=\delta^2$ (逆时针方向)．计算积分

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

② 如果将 L 换成不经过原点但环绕原点的光滑、简单的闭合曲线(逆时针方向)．计算上述积分.

③ 向量场 $\dfrac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $x>0$ 有没有势函数？简述理由.

④ 设 L 为从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段，计算

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\text{．}$$

18．(6 分) 设 Ω 是圆域：$x^2+y^2<1$．$f(x,y)$ 在 Ω 上有连续偏导数，且处处满足方程

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\text{．}$$

求证 $f(x,y)$ 在 Ω 恒等于常数．如果 Ω 是不包含原点的圆域，举例说明上述结论未必正确.