

# 数值分析实验报告

计 21 杨俊 2012011400

考虑  $n$  阶的希尔伯特 (Hilbert) 矩阵  $H_n$ , 其元素为  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ , 也即是

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

- (1) 按  $\infty$ -范数计算  $H_3$  和  $H_4$  的条件数;
- (2) 令  $n = 10$ , 生成 Hilbert 矩阵, 并构造向量  $b = H_n x$ , 其中  $x$  是所有分量都是 1 的列向量, 用矩阵三角分解 (LU 分解) 的方法求解以  $H_n$  作为系数矩阵的线性方程组  $H_n x = b$ , 得到近似解  $\hat{x}$ , 计算残差  $r = b - H_n \hat{x}$  的  $\infty$ -范数  $\|r\|_\infty$ , 以及误差  $\Delta x = \hat{x} - x$  的  $\infty$ -范数  $\|\Delta x\|_\infty$ ;
- (3) (选做) 由于上述矩阵为对称矩阵, 采用平方根法 (Cholesky 分解) 重新求解上述方程, 并比较其与 LU 分解方法的运行效率;
- (4) 让上述线性方程组的右端项  $b$  产生  $10^{-7}$  的扰动, 然后重新求解上述方程组, 观察得到的解产生的误差的变化情况;
- (5) 减小或增大  $n$  的值, 观察  $\|\Delta x\|_\infty$  的变化情况,  $n$  取大约多少值时, 误差达到 100%?

(1): 算法思路:

- a、求逆矩阵;
- b、求出范数

运行结果:

为三时范数为: 518.933

为四时范数为: 76.8667

(2) 算法思路

主要根据数值分析书上的 LU 分解解法的公式进行计算。

先进行 LU 分解, 分解为下三角矩阵和上三角矩阵。

分别解方程:  $Ly = b$ ,  $Ux = y$ , 得到最终的解向量  $x$ 。

回带计算残差  $r = b - H_n * \hat{x}$ , 和误差  $\Delta x = \hat{x} - x$ 。后计算他们的范数。

得到结果:

$r = b - H_n * \hat{x}$ 为:  $12.66456 * e^{-16}$

$\Delta x = \hat{x} - x$ 为: 0.000382567

(4) 将右端项产生  $10^{-7}$  的误差时, 求解得到误差为:

$r = b - H_n * \hat{x}$ 为:  $2.59477 * e^{-16}$

$\Delta x = \hat{x} - x$ 为: 0.960348

(5) 当  $n$  达到 13 时, 误差达到 100%。