作业

计算机科学与技术系 52 班杨定澄　　学号：2015011274
E-mail:892431401@qq.com

第一题

(a)

$P(z_{i1}, z_{i2}, \cdots z_{in}|P(\omega_i)) = P(z_{i1}|z_{i2}, \cdots, z_{in}, P(\omega_i))P(z_{i2}|, z_{i3}, \cdots z_{in}, P(\omega_i)) \cdots P(z_{in}|P(\omega_i))$。由于 z_{ij} 互相独立，故 上式 $= \prod\limits_{k=1}^{n} P(z_{ik}|P(\omega_i))$

而事实上 $P(z_{ik} = 0|P(\omega_i)) = 1 - P(\omega_i), P(z_{ik} = 1|P(\omega_i) = P(\omega_i)$，综上，$P(z_{ik}|P(\omega_i) = P(\omega_i)^{z_{ik}}(1 - P(\omega_i))^{1-z_{ik}}$

故 $P(z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in}|P(\omega_i)) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(\omega_i)^{z_{ik}}(1 - P(\omega_i))^{1-z_{ik}}$

(b)

$$\frac{\partial \ln P(z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in}|P(\omega_i))}{\partial P(\omega_i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_{ik}}{P(\omega_i)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - z_{ik}}{P(\omega_i)}$$

令 $\frac{\partial \ln P(z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in}|P(\omega_i))}{\partial P(\omega_i)} = 0$，并设 $S = \sum\limits_{k=1}^{n} z_{ik}$，有方程 $\frac{S}{P(\omega_i)} = \frac{n-S}{1-P(\omega_i)}$

解得 $\hat{P}(\omega_i) = \frac{S}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} z_{ik}$

这个结果是因为，单独针对 i 类来看，可以看做一个二项分布，也就是一个事情有 $P(\omega_i)$ 的概率成功，$1 - P(\omega_i)$ 的概率失败。

我们想要估算这个事情的成功率，假设实践了 n 次，有 m 次成功，一个符合我们直觉的估计是，这件事情的成功率是 $\frac{m}{n}$

第二题

假设有 n 组样本，记第 i 组样本的第 j 维向量是 $x_{i,j}$，我们要确定参数 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)^T$ 使得 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta)$ 最大。

$$\begin{aligned}
\text{记} L(\theta) &= \ln P(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta) \\
&= \ln[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d}\theta_j^{x_{i,j}}(1-\theta_j)^{1-x_{i,j}}] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}(x_{i,j}\ln\theta_j + (1-x_{i,j})\ln(1-x_{i,j}) \\
\text{有} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_{i,j}}{\theta_j} - \frac{1-x_{i,j}}{1-\theta_j}) = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i,j}}{\theta_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1-x_{i,j}}{1-\theta_j} \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}x_{i,j}(1-\theta_j) = \sum_{i=1}^{n}(1-x_{i,j})\theta_j \\
&\Longrightarrow \theta_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i,j} \\
&\Longrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k
\end{aligned}$$

第三题

(a)

$$
\begin{aligned}
\text{记} L(p) &= \ln P(x_1, x_2, \cdots, x_d | p, \omega_1) \\
&= \ln[\prod_{i=1}^{d} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}] \\
&= \sum_{i=1}^{d} (x_i \ln p + (1-x_i)\ln(1-p)) \\
\text{有} \frac{dL}{dp} &= \sum_{i=1}^{d} (\frac{x_i}{p} - \frac{1-x_i}{1-p}) = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i}{p} = \sum_{i=1}^{d} \frac{1-x_i}{1-p} \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{d} x_i(1-p) = \sum_{i=1}^{d} (1-x_i)p \\
&\Longrightarrow p = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i
\end{aligned}
$$

(b)

先证明该估计的无偏性：

$$E(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} E(x_i) = \frac{1}{d}dp = p$$

接着要说明当 d 趋于无穷时错误概率趋于 0，首先算该估计的方差。由于样本两两独立，故协方差均为 0。

$$var(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i) = \frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{n} var(x_i) = \frac{1}{d^2}dp(1-p) = \frac{p(1-p)}{d}$$

$$\lim_{d\to\infty} var(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i) = 0$$

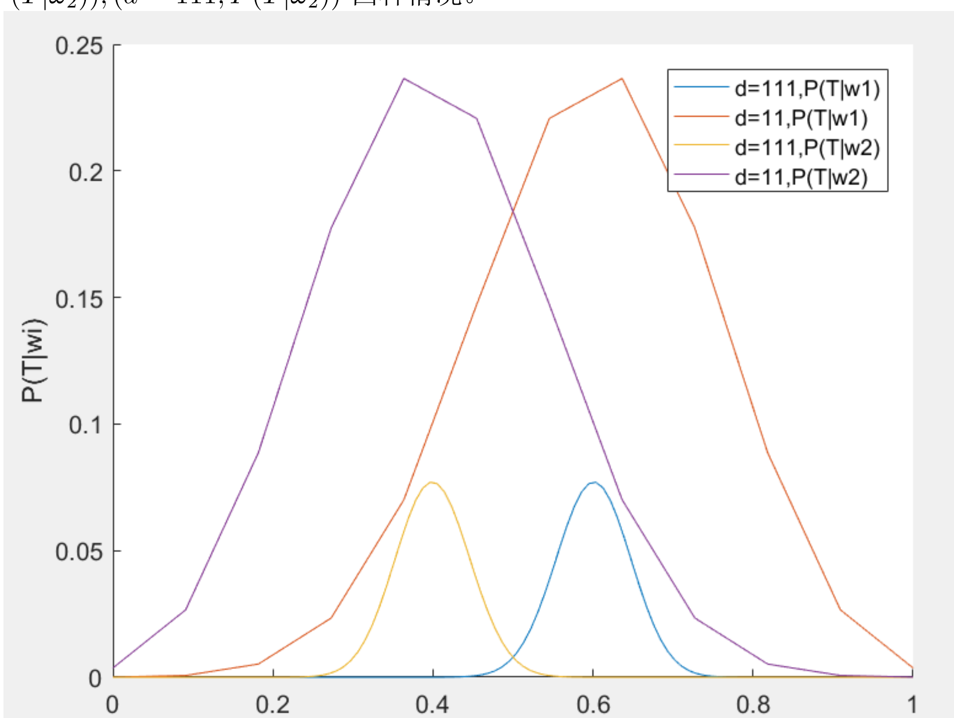
根据切比雪夫不等式

$$P(|p-\hat{p}| \geq \epsilon) \leq \frac{var(\hat{p})}{\epsilon^2}$$

而 $var(\hat{p}) = 0$，故错误概率为 0。

(c)

我用 MATLAB 分别画了 $(d = 11, P(T|\omega_1)), (d = 111, P(T|\omega_1)), (d = 11, P(T|\omega_2)), (d = 111, P(T|\omega_2))$ 四种情况。



也可以在 plot.fig 中打开或运行 draw.m 程序。

大概有如下几个特点：

1. d 比较小时，$P(T|\omega_i)$ 相对较大，这是由于此时情况比较少导致的。

2. d 比较小时，函数在极值点周围变化较慢；d 比较大时，极值点可以看做是一个峰值。这验证了中心极限定理（样本不断增加，就会越来越汇聚在期望值处）

3. d 相同时，$P(T|\omega_1)$ 与 $P(T|\omega_2)$ 会对称，这是由于概率密度函数的对称性导致的。