信号处理作业及答案

Shi Zheng

December 20, 2016

1 Homework 5

project 5.1. 已知$f(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$，为得到离散样值,可选合适的抽样脉冲序列$p(t)$,得到抽样信号$f_s(t)$即$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$

$a:$ 求信号$f(t)$的FT

$b:$ 现不妨设抽样脉冲序列$p(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)$，试求抽样信号$f_s(t)$的FT

$c:$ 分别画出信号$f(t)$的频谱图与抽样信号$f_s(t)$的频谱图

answer :

a:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} e^{-j\omega t}\, dt & (1) \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t+jw^2}{2}}\, dt & (2) \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} & (3) \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} & (4) \end{aligned}$$

b: 由，$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$:

$$
\begin{aligned}
F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F_p(\omega) && (5)\\
&= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} * \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{3} e^{-j\omega i} && (6)\\
&= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} * \sum_{i=1}^{3} e^{-j\omega i} && (7)\\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{3} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot e^{-j(\omega - s)i}\, ds && (8)\\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^{3} \sqrt{2\pi} e^{-j\omega i - \frac{i^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} && (9)\\
&= e^{-j\omega - \frac{1}{2}} + e^{-2j\omega - 2} + e^{-3j\omega - \frac{9}{2}} && (10)
\end{aligned}
$$

c: 如图所示:

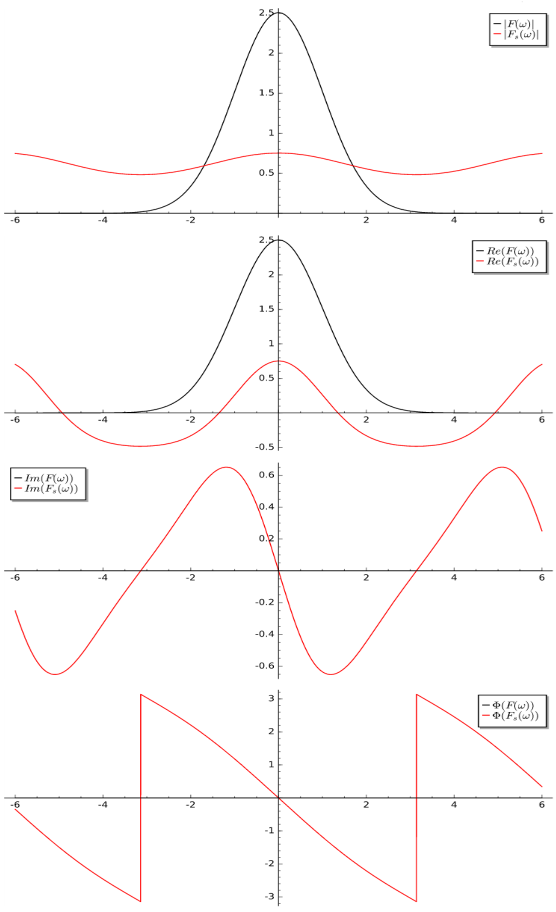

Figure 1:

project 5.2. 现有连续频谱函数$F(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$，为得到离散样值，可选合适的抽样脉冲序列$P(\omega)$，得到抽样后的频谱函数$F_s(\omega)$，即$F_s(\omega)=F(\omega)\cdot P(\omega)$

$a:$ 现不妨取抽样脉冲序列$P(\omega)=\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega-6\pi)$，试求频域抽样所恢复出的信号，即求频谱函数$F_s(t)$的IFT

$b:$ 画出a中所得到的信号$f_s(t)$的图像

answer ：

a:

$$F_s(\omega) = \sqrt{2\pi}[e^{-2\pi^2}\delta(\omega-2\pi)+e^{-8\pi^2}\delta(\omega-4\pi)+e^{-18\pi^2}\delta(\omega-6\pi)] \tag{11}$$

$$f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-2\pi^2+2\pi jt}+e^{-8\pi^2+4\pi jt}+e^{-18\pi^2+6\pi jt}) \tag{12}$$

b: 如图所示：

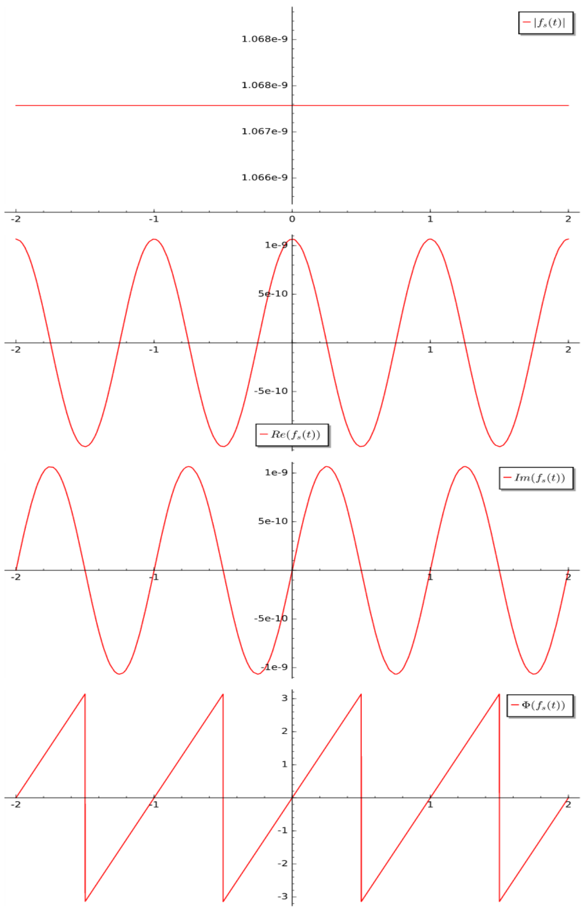

Figure 2:

2 Homework 6

project 6.1. 已知$f(t)$的频谱函数为$F(\omega)$，试证明:

$$T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \tag{13}$$

其中,$\omega_0 = 2\pi/T$

answer ： 设原信号采样后得到的信号为$f_s(t)$，采样周期为T，则采样信号的频谱为

$$F_s(\omega) = \boldsymbol{F}[f_s(t)] = \boldsymbol{F}[f(t) \cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \times P(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=\infty}^{\infty} F\omega - n\omega_n \tag{14}$$

对采样后的信号$f_s(t)$求DTFT得到

$$F_s(\omega) = DTFT[f_s(t)] = \sum_{k=\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jk\omega T} \tag{15}$$

两等式左边都是$F_s(\omega)$,因此右边也相当

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jk\omega T} = \frac{1}{T} \sum_{n=\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \tag{16}$$

将$\omega = 0$代入得:

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} f(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=\infty}^{\infty} F(-n\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{n=\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \tag{17}$$

既有

$$T \cdot \sum_{k=\infty}^{\infty} f(kT) = \sum_{n=\infty}^{\infty} F(n\omega_0) \tag{18}$$

故原结论成立

project 6.2. 已知$x(n)$的DTFT为$X(\omega)$，试求下列各序列的DTFT:

$(a):$ $x(n) * x^*(-n)$

$(b):$ $x(2n+1)$

$(c):$ $x(n) - x(n-2)$

$$(d): \quad x(n)*x(n-1)$$

answer ：

a:

$$DTFT[x(n)*x^*(-n)] = DTFT[x(n)]\cdot DTFT[X*(-n)] = X(\omega)\cdot X*(\omega) = |X(\omega)|^2 \tag{19}$$

b:

$$DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} DTFT[x(2n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(2n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}[x(m)+(-1)^m x(m)]e^{-j\omega\frac{m}{2}} && (21)\\ &= \frac{1}{2} = [\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j\frac{\omega}{2}m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{j\pi m}e^{-j\frac{\omega}{2}m}] && (22)\\ &= \frac{1}{2}[X(\frac{\omega}{2}) + X(\frac{\omega}{2}-\pi)] && (23) \end{aligned}$$

$$DTFT[x(2n+1)] = e^{-j\omega(-1)}DTFT[x(2n)] = \frac{1}{2}e^{j\omega}[X(\frac{\omega}{2}) + X(\frac{\omega}{2}-\pi)] \tag{24}$$

c:

$$\begin{aligned} DTFT[x(n)-x(n-2)] &= DTFT[x(n)] - DTFT[x(n-2)] = X(\omega) - e^{-j2\omega}\cdot X(\omega) && (25)\\ &= (1-e^{-j2\omega})X(\omega) && (26) \end{aligned}$$

d:

$$\begin{aligned} DTFT[x(n)*x(n-1)] &= DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x(n-1)] = X(\omega)\cdot e^{-j\omega}\cdot X(\omega) && (27)\\ &= e^{-j\omega}\cdot X^2(\omega) && (28) \end{aligned}$$

project 6.3. 证明：若$X(\omega)$是$x(n)$的DTFT，则

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, ... \\ 0, & others \end{cases}$$

的DTFT为$Y(\omega) = X(L\omega)$

answer ：

$$DTFT[y(n)] = Y(\omega) = \sum_{n=\infty}^{\infty} y(n)e^{-jn\omega} \tag{29}$$

由$y(n)$的表达式可知，当且仅当$n = kL(k \in Z)$时，$y(n) = x(n/L)$，因此

$$Y(\omega) = \sum_{k=\infty}^{\infty} y(kL)e^{-jk\omega L} = \sum_{k=\infty}^{\infty} x(\frac{kL}{L})e^{-jk\omega L} = \sum_{k=\infty}^{\infty} x(k)e^{-jl\omega L} = X(L\omega) \tag{30}$$

原结论成立

project 6.4. 求$x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$的4点DFT和8点DFT

answer ： 已知$x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$，由DFT公式可知:

$$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=1}^{4} n \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{31}$$

当N等于4时，$x(n)$的4点DFT为

$$X_4(k) = \sum_{n=1}^{4} n \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{2}}, k = 0, 1, 2, 3 \tag{32}$$

当N等于8时，$x(n)$的n点DFT为

$$X_8(k) = \sum_{n=1}^{4} n \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{4}}, k = 0, 1, 2, \cdots, 7 \tag{33}$$

project 6.5. 设周期信号$f(t)$的复数FS谱系数为F_n，在满足抽样定理要求的条件下,对其进行抽样。一个抽样周期可以采的N个采样值，试求此N点有限长序列的N点DFT变换结果与F_n的关系

answer ： 由于$f(t)$为周期信号，因此$f(t)$课展开为FS，即$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{jn\theta_0 t}$，设原信号周期为T，令$\theta_0 = 2\pi f$，可得

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{j\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t} \tag{34}$$

因此采样定理被满足，因此原信号存在频率上限，故$\exists k_m \in N$，使得$\forall k > k_m, F_k = 0$，上式可改写为：

$$f(t) = \sum_{k=0}^{k_m} F_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t} \tag{35}$$

设信号$f(t)$一个周期内的采样序列为$x(n)$，其中$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$，若$x(n)$的N点DFT为$DFT[x(n)] = X(k)$，则

$$x(t) = \tilde{x}(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2nk\pi}{N}} \tag{36}$$

$x(n)$为均匀采样，因此$x(n) = f(\frac{nT}{N})$，代入上式得：

$$f(\frac{nT}{N}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2nk\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}e^{j\frac{2nk\pi}{N}} \tag{37}$$

做变量替换$t = \frac{nT}{N}$可得：

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}e^{j\frac{2k\pi}{N}t}, t = \frac{nT}{N}, n = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{38}$$

因为采样过程满足采样定理，因此上式唯一确定了原信号$f(t)$的形式

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}e^{j\frac{2k\pi}{N}t}, t = \frac{nT}{N}, t \in R \tag{39}$$

对比系数，则有

$$k_m = N-1, F_k = \frac{X(k)}{N}, k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{40}$$

可得最终原信号DFT结果与FS系数的关系为

$$X(k) = NF_k, k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{41}$$

project 6.6. 设信号$x(t)$的理想抽样值序列为$x(n)$，数目(长度)为L，将这L个元素每N个分为一组，其中，$N \le L = rN + s$，$r \ge 1, s \in [0...N)$，不足部分补零，得到R组

抽样值序列分别为:

$$x_m(x)=x(mN+n),n=0,1,\cdots,N-1,m=0,1,\cdots,r-1 \tag{42}$$

将上述各组序列按如下方式相加，得到一个N点有限长序列

$$\tilde{x}_m(n)=\sum_{m=0}^{r-1}x_m(n)=\sum_{m=0}^{r-1}x(mN+n),n=0,1,\cdots,N-1 \tag{43}$$

设$\omega_k=k2\pi/N$，则试证明下列等式成立:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_m(n)e^{-jn\omega_k}=\sum_{n=0}^{L-1}x_m(n)e^{-jn\omega_k},n=0,1,\cdots,N-1 \tag{44}$$

answer ：在$N\leq L=rN+s,r\geq 1,s\in[0,N)$，不足补零的情况下，只有$s=0$时序列才会被分为$r$组抽样值序列，其余情况为$r+1$组，下面的过程默认按照$r+1$组处理，如果$s=0$，则视为添加一组全零序列，等是左边推到过程如下:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jn\omega_k} &= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2nk\pi}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{r}x(mN+n)]e^{-j\frac{2nk\pi}{N}} &(45)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{r}x(mN+n)e^{-j\frac{2nk\pi}{N}} &(46)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{r}x(mN+n)e^{-j\frac{2(mN+n)k\pi}{N}} &(47)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{r}x(mN+n)e^{-j(mN+n)\omega_k} &(48)\end{aligned}$$

设经过补零以后的新序列长度为$L=(r+1)$，则上式化为

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{r}x(mN+n)e^{-j(mN+n)\omega_k}=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jn\omega_k} \tag{49}$$

最终

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-jn\omega_k}=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jn\omega_k},k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{50}$$

project 6.7. 设有限长序列$x(n)$的长度为N，它的的N点DFT结果为$X(k)$，这里N是偶

数。序列$g(n)$是$x(n)$中下表为偶数的的元素组成的子序列，$h(n)$是$x(n)$中下标为奇数的元素组成的子序列，它们的长度是$\frac{N}{2}$,各自对应的$\frac{N}{2}$点DFT结果分别为$G(k)$和$H(k)$。试根据DFT的公式计算(定义证明)：

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{51}$$

answer ： 由DFT的计算公式可得

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\omega_k} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) e^{-j2m\omega_k} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) e^{-j(2m+1)\omega_k} && (52) \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} g(m) e^{-j2m\omega_k} + e^{-j\omega_k} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(m) e^{-j2m\omega_k} && (53) \end{aligned}$$

设$\tilde{\omega}_k = 2\omega_k$，则$\tilde{\omega}_k = \frac{4k\pi}{N} = \frac{2k\pi}{\frac{N}{2}}$，对应$\frac{N}{2}$点DFT的情形，则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} g(m) e^{-jm\tilde{\omega}_k} + e^{-j\omega_k} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(m) e^{-jm\tilde{\omega}_k} = G(k) + e^{-j\omega_k} H(k) && (54) \\ &= G(k) + W_N^k H(k), k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 && (55) \end{aligned}$$

故原结论成立

3 Homework 7

project 7.1. 设有某个用于信号频谱分析的记录仪，能以万分之一秒的采样频率对信号进行采样，如果要求频谱分析是，频谱分辨率不大于10Hz，至少要记录多少时间的信号采样？输入信号的最高频率是多少？

answer ： 由题意可知:

$$f_s = 10000Hz, \Delta f \leq 10Hz \tag{56}$$

$$L \geq \frac{f_s}{\Delta f} = 1000 \tag{57}$$

$$t = \frac{L}{f_s} = 0.1s \tag{58}$$

$$f \leq \frac{f_s}{2} = 5000Hz \tag{59}$$

project 7.2. 对于一个频率为5kHz的正弦信号进行采样， 采样频率为40kHz，共踩得128点数据：

(a)： 为得到这128点数据，要花多长时间?

(b)： 如果对这128点数据进行128点的DFT，则在所得的频谱图中，哪些下表K处会有局部峰值出现?

answer ：

a:

$$t = \frac{L}{f_s} = 3.2ms \tag{60}$$

b:

$$x(n) = sin(\frac{2n\pi}{N}) \tag{61}$$

数字频率为$\omega_0 = \frac{5kHz}{40kHz} \cdot 2\pi = \frac{4}{\pi}$，对于正弦波，频谱在$\frac{\pi}{4}$与$\frac{7\pi}{4}$两处有冲击信号，由频域卷积定理以及Sa函数的性质，局部峰值即在冲激函数位置，即$\frac{\pi}{4}$与$\frac{7\pi}{4}$两处，对应的小标为

$$k_1 = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} \cdot 128 = 16, k_2 = \frac{\frac{7\pi}{4}}{2\pi} \cdot 128 = 112 \tag{62}$$

project 7.3. 以10kHz为采样频率，采得某信号10ms的数据。已知该信号含有3个正弦谐波分量，它们的采样频率满足$f_1 < f_2 < f_3$，其中f_1=1kHz，f_3=2kHz。如果要从采样数据的DFT频谱图中区分处这三个分量的的谱峰，则谐波分量频率f_2的最大最小值分别多少?

answer ： 由题意可知:

$$L = 10kHz \cdot 10ms = 100 \tag{63}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{100} \tag{64}$$

对应

$$\Delta f = \Delta\omega \cdot \frac{f_s}{2\pi} = 100Hz \tag{65}$$

因此

$$f_{min} = 1100Hz, f_{max} = 1900Hz \tag{66}$$

project 7.4. 设有限长序列$x(n)$的取值范围为$0 \sim N-1$，长度N为偶数，若该序列的N点DFT为$X(k)$，试用$X(k)$表示下列各序列的DFT。

(a)： 将$x(n)$以N为周期进行周期延拓，然后对$0 \sim MN-1$点组成的有限长序列求其MN点DFT。

(b)： 将$x(n)$按如下方式进行时域扩展，得到MN点新序列$y(n)$，求其MN点DFT。

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{67}$$

$$y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{M}), & \frac{n}{M} \in Z \\ 0, & \frac{n}{M} \notin Z \end{cases}$$

answer ：

a:

$$DFT[x(n)] = \boldsymbol{A}x, \qquad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} x_n \tag{68}$$

$$\begin{aligned} X'_k &= \sum_{n=0}^{MN-1} W_{MN}^{kn} x'n = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} W_{MN}^{k(mN+n)} x'n = (\sum_{m=0}^{N-1} W_M^{km})(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{k\frac{n}{M}} x_n) & (69) \\ &= (\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\cdot 2\pi m \frac{k}{M}})(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{k\frac{n}{M}} x_n) & (70) \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{k}{M} \notin Z \\ Mx_{\frac{k}{M}}, & \frac{k}{M} \in Z \end{cases} & (71) \end{aligned}$$

b:

$$y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{M}), & \frac{n}{M} \notin Z \\ 0, & \frac{n}{M} \in Z \end{cases} \tag{72}$$

$$Y_k = \sum_{n=0}^{MN-1} W_{MN}^{kn} y_n = \sum_{n=0}^{N-1} W_{MN}^{kMn} y_n M = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} x_n \tag{73}$$

由于$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，则有

$$W_N^{kn} = W_N^{(k\ mod\ N)n}, \qquad Y_k = X_{(k\ mod\ N)} \tag{74}$$

c:

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le NM-1 \end{cases} \tag{75}$$

$$Y_k = \sum_{n=0}^{MN-1} W_{MN}^{kn} y_n = \sum_{n=0}^{N-1} W_{MN}^{kn} x_n = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n\frac{k}{M}} x_n = x_{\frac{k}{M}}, \frac{k}{M} \in Z \tag{76}$$

由于原先只有$x(n)$的DFT，我们没有非采样点上的信息，因而对于$\frac{k}{M} \notin Z$的情况下，Y_k是不可解的，即有：

$$Y_k = \begin{cases} x_{\frac{k}{M}}, & \frac{k}{M} \in Z \\ Not\ \ known, & \frac{k}{M} \notin Z \end{cases} \tag{77}$$

$$\tag{78}$$