信号处理原理复习提纲

张宏辉

杨植麟

THU | BEIJING

信号

- 分类
- 典型信号
- 运算
  - 线性，乘除
  - 微分，积分
  - 时移，压扩，反褶
  - 卷积，相关
- 奇异信号
  - 单位斜变信号，单位阶跃信号，单位矩形脉冲信号，单位冲激信号

卷积

- 卷积定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

- 性质
  - 交换律，分配率，结合律
  - 微分，积分
- 几何作图法

相关

- 相关运算

$$R_{f_1 f_2}(t) = R\left(f_1(t), f_2(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2^*(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau + t) f_2^*(\tau) d\tau$$

- 性质
  - 相关与次序有关 $R_{f_1 f_2}(t) = R_{f_2 f_1}^*(-t)$
  - 相关于卷积的关系 $R_{f_2 f_1}(t) = f_1^*(-t) * f_2(t)$
  - 自相关 $R_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f^*(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau + t) f^*(\tau) d\tau$

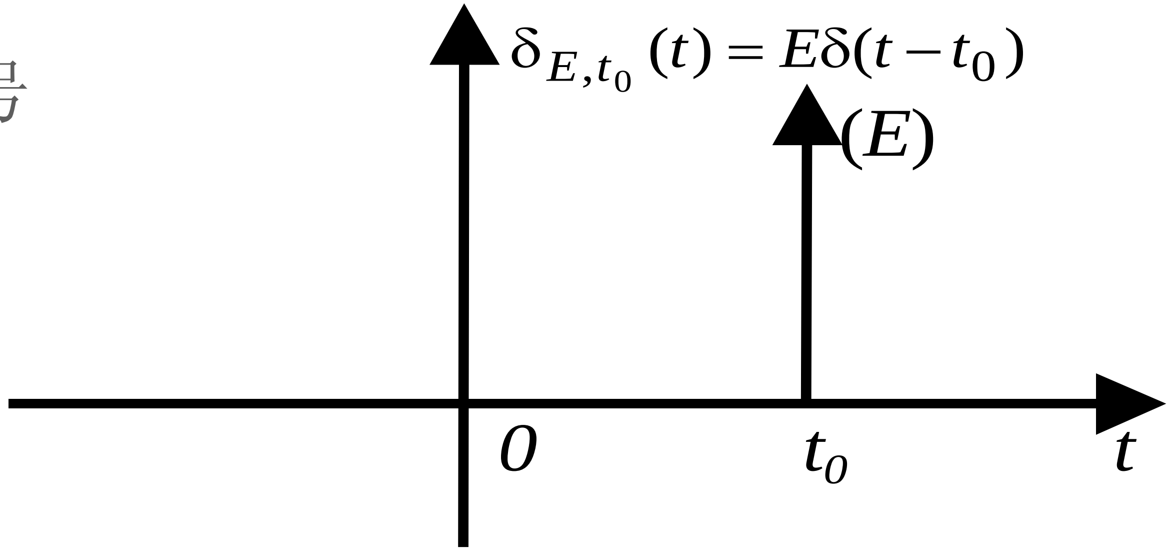
单位冲激信号

- 狄拉克定义式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \delta(t) = 0 \ (t \neq 0)$$

- 波形表示

冲激点在t0、强度为E的冲激信号
（单位冲击信号E=1）



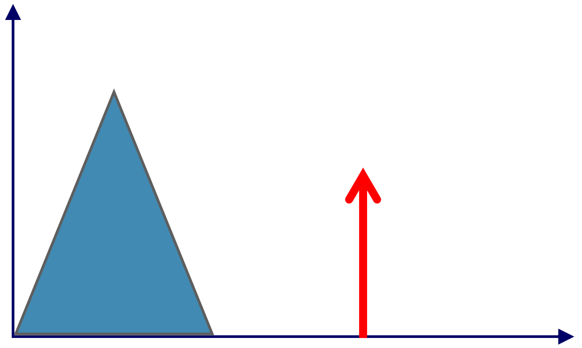
单位冲激信号

- 性质
  - 对称性，时域压缩性，积分
  - <u>抽样特性</u>（筛选特性）

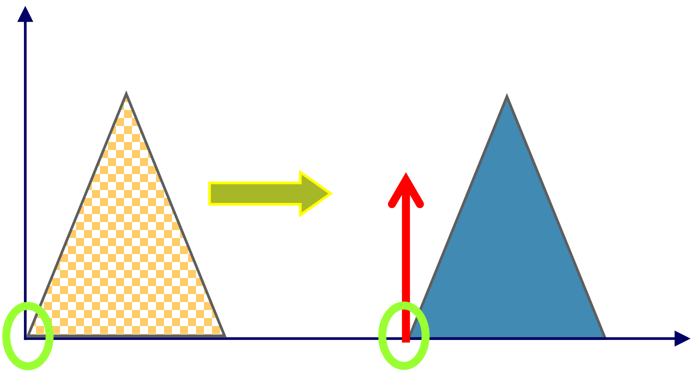
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)}$$

  - <u>搬移特性</u>

$$\boxed{f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)}$$



卷积运算（搬移特性）



注 意 参 考 点 位 置 的 变 化

傅里叶级数(FS)

- 连续，周期函数，离散频率

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

傅里叶变换(FT)

- 连续，非周期函数，连续频率

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

- 与FS的关系

$$F_n = F(n\omega_1)/T_1$$

- FT的性质
  - 线性性，反褶和共轭性，奇偶虚实性，对偶性，尺度变换特性，乘积卷积

傅里叶变换(FT)

- 周期信号FT

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 F_0(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$$

- 与非周期信号FT的关系

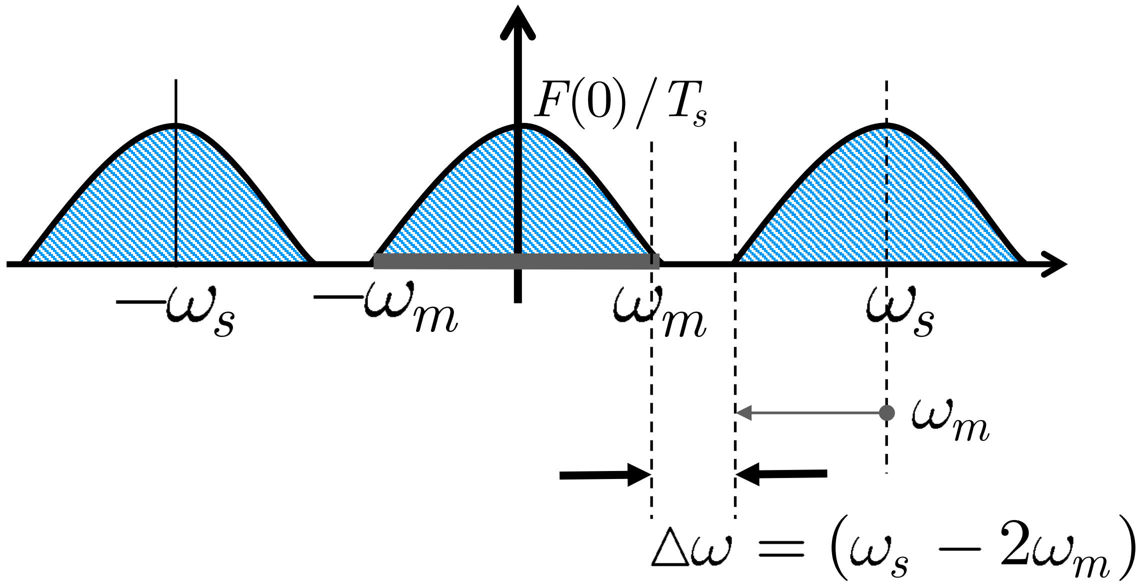
$$F(\omega) = F_0(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \delta(\omega - n\omega_1)$$

- 与FS的关系

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_1)$$

抽样定理

- 设信号的频带宽度为 $-\omega_m \sim \omega_m$ 则抽样后的离散时间信号的频谱为：



要不混叠，必须

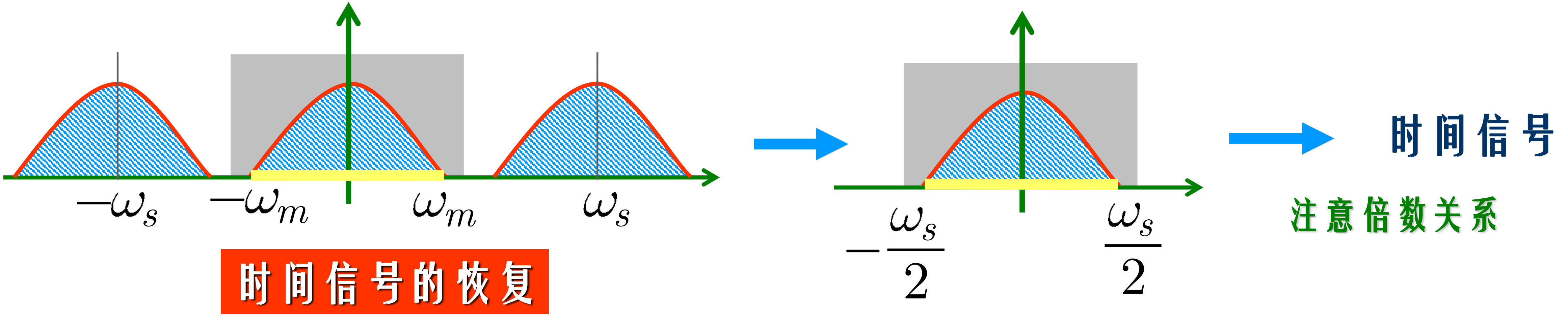
$$\Delta\omega = (\omega_s - 2\omega_m) \geq 0$$

抽样定理

- 要保证从信号抽样后的离散时间信号无失真地恢复原始时间连续信号，必须满足：

  （1）信号是频带受限的；

  （2）采样率至少是信号最高频率的两倍。



抽样信号与频谱函数

- 抽样信号

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

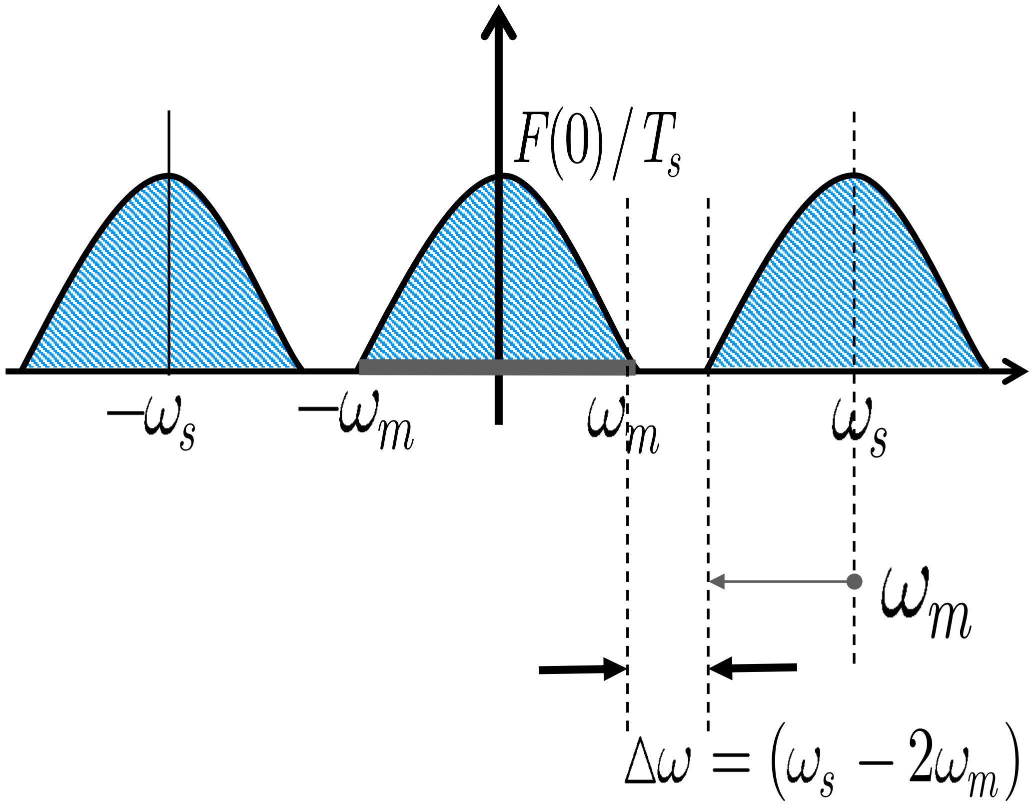
- 频谱函数

$$F(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - m\omega_s)$$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 频率归一化

不同采样间隔的离散信号，频谱函数都是原始频谱的周期重复，决定信号性质的频谱密度分布的形状与重复间隔无关，即序列频谱之间的差异与采样间隔的大小无关。



离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 定义

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT}$$

- 数学上严格成立

$$\lim_{T\to 0} T\hat{F}(\omega) = F(\omega)$$

- 逆变换

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)e^{jn\omega T}d\omega$$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 数字信号：

  时间间隔诡异的离散信号（序列），记为 $x(n)$

- 数字频谱

  数字信号（序列）DTFT归一化频谱，记为 $X(\omega)$

- DTFT与IDTFT

$$X(\omega) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 性质
- DTFT频谱密度函数是周期函数

$$X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$$

- DTFT是线性变换

$$\mathrm{DTFT}\left[\sum_k a_k \cdot x_k(n)\right] = \sum_k a_k \cdot \mathrm{DTFT}\ \ x_k(n)$$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 性质
- 平移性质
  - 时域平移 $\mathrm{DTFT}\ x(n-n_0) = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$
  - 频域平移 $\mathrm{DTFT}\ e^{j\omega_0 n}x(n) = X\ \ \omega-\omega_0$
- 反褶与共轭
  - 反褶 $\mathrm{DTFT}\ x(-n) = X(-\omega)$
  - 共轭 $\mathrm{DTFT}\left[x^*(n)\right] = X^*(-\omega)$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 性质
- 时域拓展
  - 定义

$$x_{(a)}(n) = \begin{cases} x \dfrac{n}{a}, & \dfrac{n}{a} \in Z \\ 0, & others \end{cases} \quad (a \in Z, \quad a \neq 0)$$

  - 相应的DTFT

$$\mathrm{DTFT} \; x_{\,a}\,(n) \; = X(a\omega) \quad a \in Z, \; a \neq 0$$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 性质
- 频域微分（时域线性加权） $\mathrm{DTFT}\ \ nx(n) \ = j\left[\dfrac{d}{d\omega}X(\omega)\right]$
- 时域卷积 $\mathrm{DTFT}\ \ x_1(n) * x_2(n) \ = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
- 频域卷积（注：频谱是周期的）

$$\mathrm{DTFT}\left[x_1(n)\cdot x_2(n)\right] = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\ \ \omega'\ \ X_2\ \ \omega-\omega'\ \ d\omega'$$

离散时间傅里叶变换(DTFT)

- 性质
- 帕斯瓦尔定理（能量定理）

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X_\omega(\omega)|^2 \, d\omega$$

序列的总能量等于其傅里叶变换模平方在一个周期内积分取平均，即时域能量等于频域一周期内总能量。

离散傅里叶变换(DFT)

- DTFT虽然可以使时间离散化，而且有限长序列的DTFT也可以使时间有限，但频率连续的问题仍无法解决。
- 定义

序列长度为**L**，求其DTFT谱上$[0,2\pi]$区间上均匀分布的**N**个谱值

由 $x(n), n=0,1,\cdots L-1$ **直接计算** $X(k), k=0,1,\cdots N-1$ 的过程：

$$\omega_k = 0 + k\cdot\frac{2\pi}{N} = 2k\pi / N \quad k = 0,1,\cdots N-1$$

$$\boxed{X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}}$$

DFT

离散傅里叶变换(DFT)

- 定义（续）

为了表示方便（因为 $\omega_k = 2\pi k / N$ 只与k有关）

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad X(\omega_k) \to X(k)$$

DFT $$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{nk}, k = 0, 1, \cdots N-1$$

离散傅里叶变换(DFT)

- 理解

$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{L-1}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{DFT}}X=\begin{bmatrix}X_0\\X_1\\\vdots\\X_{N-1}\end{bmatrix}$$

时 域L点　　　　频 域N点

$$X_k=\sum_{n=0}^{L-1}A_{kn}x_n\ ,\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$A_{kn}=W_N^{kn}$$

L是数据记录中时域样本的数目，它可能是无限的；而N则是对DTFT进行抽样时的频率点的数目。理论上两者可单独确定。在讨论和使用DFT（特别是编程实现）时，**一般会令L=N**。

离散傅里叶变换(DFT)

- 性质
- 离散的；周期的
- 实序列的DFT频谱是共轭对称的
- 线性变换的：

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] \qquad Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)] \qquad \mathrm{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k)$$

- 帕斯瓦尔定理：

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2}$$

离散傅里叶变换(DFT)

- 性质
- 奇偶虚实性

x(n)	X(k)
实函数	实部为偶、虚部为奇
实偶函数	实偶函数
实奇函数	虚奇函数
虚函数	实部为奇、虚部为偶
虚偶函数	虚偶函数
虚奇函数	实奇函数

离散傅里叶变换(DFT)

- 反褶与共轭

时 域	频 域
反 褶	反 褶
共 轭	共 轭 + 反 褶
共 轭 + 反 褶	共 轭

- 时移特性；卷积定理等
- DFT快速算法——FFT

线卷积&圆卷积

- 线卷积：

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

- 圆卷积：

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N$$

- 时域离散圆卷积定理：

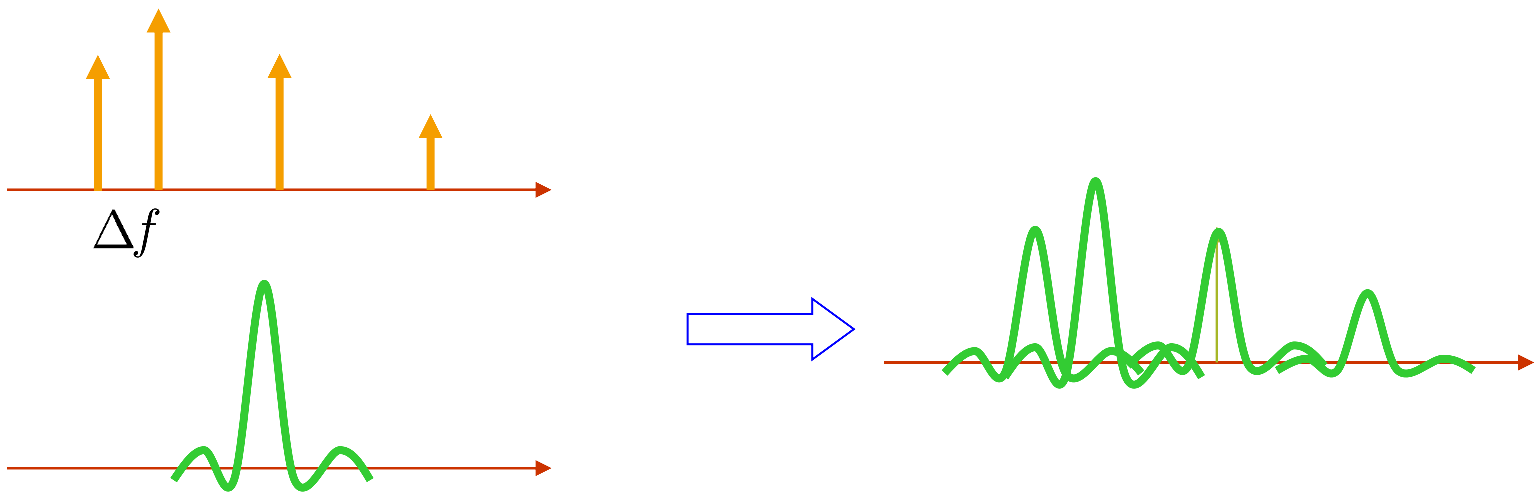
$$\mathrm{DFT}_N[x(n) \otimes y(n)] = X(k) \bullet Y(k)$$

- 频域离散圆卷积定理：

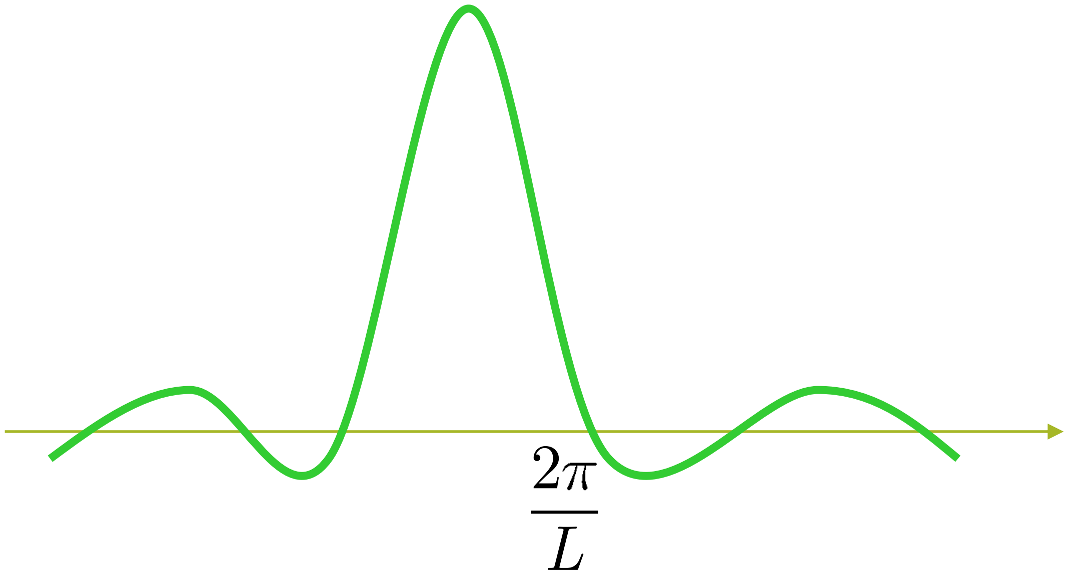
$$\mathrm{DFT}_N[x(n) \bullet y(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$$

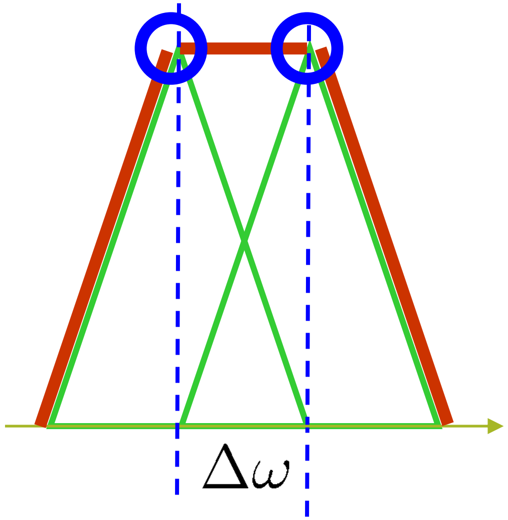
频率分辨率

- DTFT的频率分辨率---物理频率分辨率
  - 定义1：在由序列求得的连续频谱中，谐波分量之间的最小间隔
  - 定义2：序列被截断后，在新的连续频谱中，可分辨出来的最小谐波分量间隔



频率分辨率





因此，若要找到信号频谱中的分量位置，则上图中的波峰应可分辨出，这要求

$$\Delta\omega \ge \frac{2\pi}{L} \to 2\pi(\Delta f / f_s) \ge \frac{2\pi}{L} \to$$

$$\Delta f \ge \frac{f_s}{L}$$ 采样率和数据点数确定时，频率位置的精度就定了

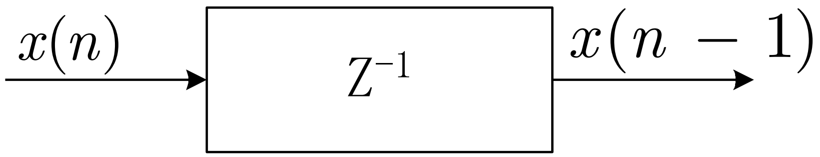
$$L \ge f_s / \Delta f$$ 采样率确定时，要达到某频率分量位置精度，数据点数须…

系统

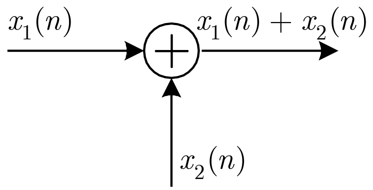
- 基本概念
  - 连续时间系统，离散时间系统
  - 线性系统，时不变系统，线性时不变系统
  - 因果系统：所有实际系统都是因果系统
  - 稳定系统：BIBO

系统

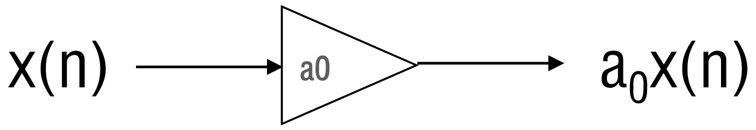
- 描述方法
  - 信号流图
    - 延时



    - 加法



    - 数乘



系统

- 描述方法
  - 差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

系统

- 描述方法
  - 差分方程
    - 非递归差分方程：FIR滤波器

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}a(k)x(n-k)$$

    - 递归差分方程：IIR滤波器

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}a(k)x(n-k)+\sum_{k=1}^{N}b(k)y(n-k)$$

系统

- 系统响应
  - 系统零输入响应
  - 系统零状态响应
    - 单位脉冲响应

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

可以用来计算滤波器输出

系统

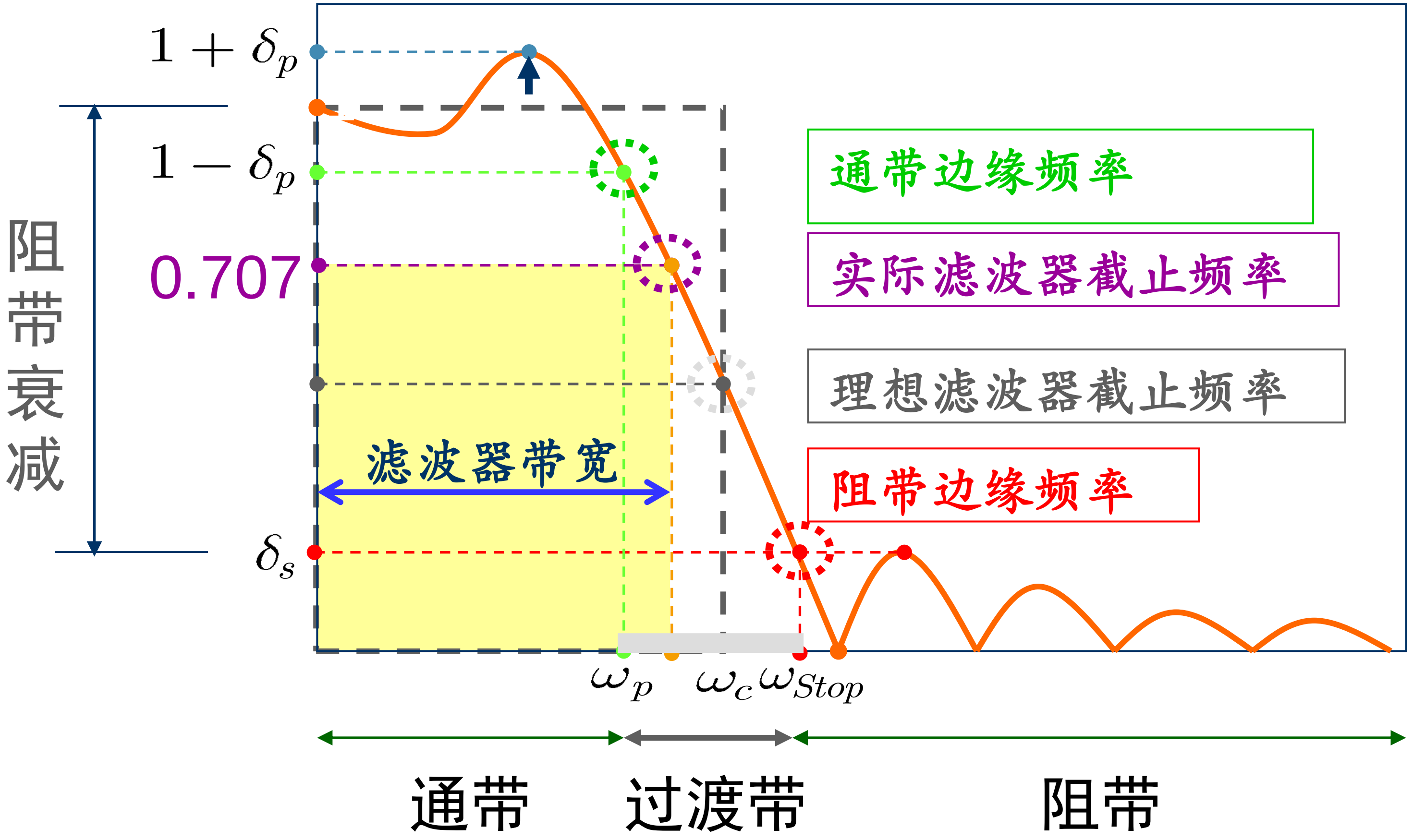
- 脉冲响应应用
  - 因果性
    - 因果系统的单位冲激响应 $h(n)$ 是因果序列
  - 稳定性
    - LTI系统稳定的充要条件是： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$
  - 串并联分析
    - 系统串联：脉冲响应函数卷积
    - 系统并联：脉冲响应函数加法

滤波器

- 基本类别
  - LP低通滤波器
  - BP带通滤波器
  - HP高通滤波器
  - BS带阻滤波器
  - AP全通滤波器

滤波器

- 滤波特性参数
  - 通带边缘频率
  - 实际滤波器截止频率
  - 理想滤波器截止频率
  - 阻带边缘频率



滤波器

- 频率响应

$$H(\omega) = Y(\omega) / X(\omega)$$

  - 滤波器的频率响应等于脉冲响应的DTFT

$$\mathrm{DTFT}\ \ h(n) \ = H(\omega)$$

  - 差分方程系数与滤波器频率响应的关系

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} {\color{red}b(k)} e^{-jk\omega} \Big/ \sum_{k=0}^{N} {\color{blue}a(k)} e^{-jk\omega}$$

Z变换

- 定义

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$Z[x(n)] = X(z)$$

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

Z变换

- 收敛域(ROC)
  - 特定序列的收敛域（充分条件）
    - 有限长序列：ROC至少是 $0 < |z| < \infty$
    - 右边序列：半径为R_{x1}的圆外部分（**实际信号**）
    - 左边序列：半径为R_{x2} 的圆内部分
    - 双边序列：$R_{x1} < |z| < R_{x2}$ 圆环，若为空集则不存在

Z变换

- 常见序列的Z变换
  - 单位冲激序列
  - 单位阶跃序列
  - 矩形脉冲序列
  - 单位指数序列

Z变换

- Z变换的性质
  - 线性性
  - 时域平移性
  - 时域扩展性
  - 奇偶性
  - 时域共轭性
  - 尺度变换（序列指数加权）
  - 微分（序列线性加权）
  - 初值定理
  - 终值定理
  - 时域卷积定理
  - 帕斯瓦尔定理

Z变换

- 求解逆Z变换

Z变换

- 传递函数（系统函数）

$$H(z)=Y(z)/X(z)$$

  - 是单位冲激响应函数的Z变换

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

  - 与差分方程关系

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{R}b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{K}a_k z^{-k}}$$

Z变换

- 应用
  - 求解差分方程
  - 判定系统稳定性和因果性
  - 几何作图法求频率响应

滤波器设计

- 低通FIR滤波器的设计步骤
  - 在过度带宽度中间，选择理想低通滤波器的截止频率 f_c
  - 计算截止频率的数字频率，并代入

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} \qquad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$$

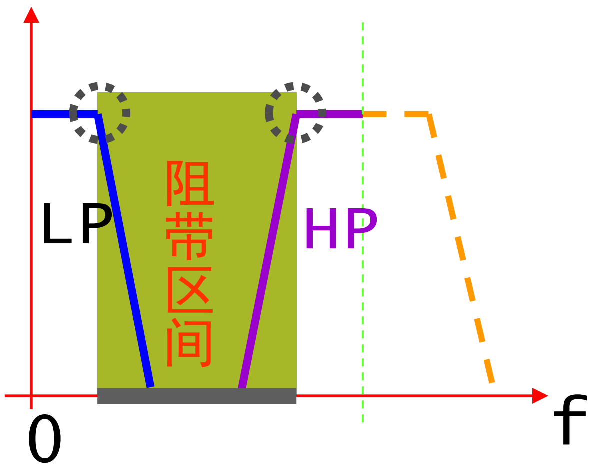
  - 从表中选择满足阻带衰减及其他要求的窗函数，计算窗内非零项的数目，选择奇数项，计算出窗函数表达式
  - 用窗函数与 $h(n)$ 相乘，计算有限长脉冲响应
  - 将脉冲响应右移 $(N-1)/2$,使得第一个非零值在 $n=0$处

滤波器设计

- FIR滤波器设计
  - 带通，高通：频移

$$h'(n) = h(n)w(n)\cos(n\omega_0)$$

  - 带阻
    - 低通+高通



滤波器设计

- 低通巴特沃斯滤波器的设计步骤
  - 求滤波器的通带边缘频率 f_{p1}，阻带边缘频率 f_{s1}，阻带边缘增益 δ_s
  - 求数字域的通带边缘频率ω_{p1}，阻带边缘频率 ω_{s1}

$$\omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s} \qquad \omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_s}$$

  - 求模拟滤波器的通带边缘频率 Ω_{p1}，阻带边缘频率 Ω_{s1}

$$\Omega_{p1} = 2 f_s \tan\frac{\omega_{p1}}{2} \qquad \Omega_{s1} = 2 f_s \tan\frac{\omega_{s1}}{2}$$

  - 求滤波器阶数

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\delta_s^2} - 1\right)}{2\log\left(\frac{\Omega_{s1}}{\Omega_{p1}}\right)}, \quad n \in N$$

滤波器设计

- 低通巴特沃斯滤波器的设计步骤(cont.)
  - 由阶数查表得到模拟滤波器的传递函数 $H(s)$
  - 进行双线性变换得到数字滤波器的传递函数 $H(z)$

$$s = 2f_s \frac{z-1}{z+1}$$

滤波器设计

- 其他类型IIR滤波器
  - 设低通IIR的传递函数为 $H_L(s)$，模拟通带频率为 Ω_p
  - 高通IIR

$$H_{\mathrm{HP}}(s) = H_{\mathrm{L}}\left(\frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}\right)$$

  - 带通IIR

$$H_{\mathrm{BP}}(s) = H_{\mathrm{L}}\left(\Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}\right)$$

  - 带阻IIR

$$H_{\mathrm{BS}}(s) = H_{\mathrm{L}}\left(\Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}\right)$$