信号处理原理第三次作业

黄家晖 2014011330

1．已知 $f(t) = \sin(t)\cos(2t) + 5\cos(3t)\sin(4t)$，求该函数的傅里叶级数
设

$$f(t) = a_0 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

根据 $f(t)$ 定义，可知其周期 $T = 2\pi$，故傅里叶级数中 $\omega_1 = 1$。即

$$f(t) = a_0 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1}$$

首先根据积化和差公式，对 $f(t)$ 进行化简:
下面分别计算傅里叶级数的各项系数（利用积化和差公式）:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t)\cos(2t) + 5\cos(3t)\sin(4t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(3t) - \sin(t)) + \frac{5}{2}(\sin(7t) + \sin(t)) \\ &= \frac{1}{2}\sin(3t) + \frac{5}{2}\sin(7t) + 2\sin(t) \end{aligned}$$

将化简过后的式子对应到公式 (1) 的各项系数，即得 $f(t)$ 的傅里叶级数。

$$f(t) = \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

其中

$$b_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ \frac{1}{2} & n = 3 \\ \frac{5}{2} & n = 7 \\ 0 & else \end{cases}$$

2．已知

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < \tau \\ \tau & \tau \le t < 2\tau \\ 0 & t < 0, t \ge 2\tau \end{cases}$$

求函数的傅里叶变换。

设 $k=-j\omega$，则有:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^{\tau} te^{kt}dt + \tau\int_{\tau}^{2\tau} e^{kt}dt \\
&= \frac{1}{k}(\tau e^{k\tau} - \int_0^{\tau} e^{kt}dt) + \frac{\tau}{k}(e^{2k\tau} - e^{k\tau}) \\
&= \frac{\tau}{k}e^{k\tau} - \frac{1}{k^2}e^{k\tau} + \frac{1}{k^2} + \frac{\tau}{k}(e^{2k\tau} - e^{k\tau}) \\
&= \frac{\tau}{k}e^{2k\tau} - \frac{1}{k^2}e^{k\tau} + \frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

代入 $k=-j\omega$，则:

$$
F(\omega) = \frac{j\tau}{\omega}e^{-2j\omega\tau} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega\tau} - \frac{1}{\omega^2}
$$

上面的式子即为 $f(t)$ 的傅里叶变换（FT）。

特别地，IFT 可以写作:

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega
$$