班次 ________ 学号 ________ 姓名 ________

2003(春) 代数与几何 (2) 试题 (B 卷)

说明：题中 R 表示实数域； C 表示复数域.

第一部分：填充题 (48 分).

1. 设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\ g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$, 则其首 1 的最大公因式 $(f(x),g(x))=$ ____________________; 且有 $u(x)=$ ____________________, $v(x)=$ ____________________ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

2. 设 $W_1=\{\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \end{pmatrix}|a,b,c,d\in R\}$, $W_2=\{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix}|x,y,z\in R\}$, 则 $\dim_R(W_1\cap W_2)=$ __________; $\dim_R(W_1+W_2)=$ __________ ; $\dim_R W_1^{\perp}=$ __________.

3. 设 $W=L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ 是 R^3 中向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 生成的子空间。则 $W^{\perp}=$ ______________________________.

4. 在集合 $M_2(Z)$(Z 为整数集) 中定义等价关系 $\sim$: 任给 $A,\ B\in M_2(Z),\ A\sim B \Longleftrightarrow detA\equiv detB(mod2)$. 则它把 $M_2(Z)$ 分成的等价类是 ____, 其中 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 属于 _______________ 等价类.

5. 5. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维向量空间 $(V,F,+,\cdot)$ 的一组基，线性变换 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 σ 在基 $\eta_1=3\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\eta_3=2\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $=$ ____________________; $\dim_F\mathrm{Ker}\sigma=$

__________; 找出 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的一组基 ______________________________.

6. 请用正交化方法将酉空间 C^3 的一组基 $\alpha_1 = ((1,0,1+i)^T, \alpha_2 = (0,1,0)^T, \alpha_3 = (i,1,1)^T$ 化为标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$____. C^3 中的内积在基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 下的表达式为 ______________________________.

7. 设 α, β 是欧氏空间 V 中两向量，$(\alpha,\alpha)=1, (\beta,\beta)=4, (\alpha,\beta)=2$. 则 $\dim_R L(\alpha,\beta) =$ __________; 若向量 γ 与 α 垂直，问 γ 与 β 垂直吗？答 ____________________.

第二部分：计算，证明题 (共 52 分).

8. 设 W_1, W_2 分别是实系数方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间。证明： $W_2 = W_1^{\perp}$ 。

9. 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$ 。求 A 的若当标准形 J ，及可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP = J$ 。

10. 设 $F_n[x]$ 是数域 F 上次数小于 n 的多项式和零多项式所组成的向量空间。令映射 $\phi: F_n[x] \to F_n[x], f(x) \mapsto f(0)x$ 。问 ϕ 是否是线性变换（说明理由）? 求 $\mathrm{Ker}(\phi)$ 的一组基及维数。

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_t$; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是欧氏空间 V 的两个线性无关组；证明：存在 V 的正交变换 σ 使 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i, \forall i$ 当且仅当 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), \forall i, j$ 。