作业

计算机科学与技术系 52 班杨定澄　　学号：2015011274
E-mail:892431401@qq.com

1　第一题

可以在 HMM.py 中看到程序。

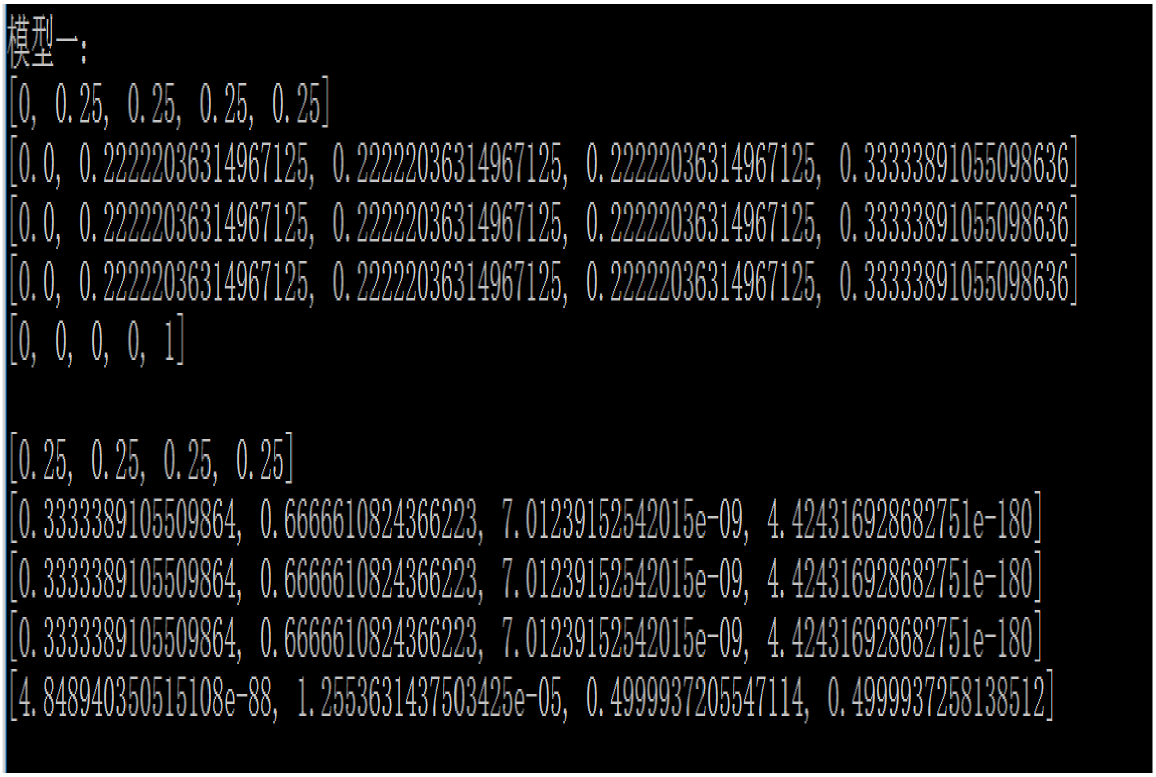
(1)

先看第一问，假设 n 代表显状态数目（ABCD，共 4 个），m 代表隐状态数目（$3+2$，共 5 个。初始节点为 0，终止节点为 4）。我们要根据已知的样本学习 A 矩阵与 B 矩阵，其中 A_{ij} 代表第 i 个隐状态到第 j 个隐状态的转移概率，B_{ij} 表示第 i 个隐状态发射出第 j 个显状态的概率。接着套用书上的 Baum-Welch 算法。

但是这时我们遇到了第一个问题，书上的算法是基于给定一个样本输出 O，来学习一个参数 θ，使得 $P(\theta|O)$ 最大的，这里有一组样本。我分别在两个模型中各取一个样本进行学习。

接着考虑我们要学习的是哪些量，因为有的量是固定的，比如 $A_{i0}=0, A_{44}=1$。

所以一开始我的做法是，隐状态 $0,1,2,3$ 等概率的转移到隐状态 $1,2,3,4$，然后每个隐状态对显状态的发射概率是等概率的，接着让他学习。学习结果如下


```
模型一:
[0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.0, 0.22222036314967125, 0.22222036314967125, 0.22222036314967125, 0.33333891055098636]
[0.0, 0.22222036314967125, 0.22222036314967125, 0.22222036314967125, 0.33333891055098636]
[0.0, 0.22222036314967125, 0.22222036314967125, 0.22222036314967125, 0.33333891055098636]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.3333389105509864, 0.6666610824366223, 7.01239152542015e-09, 4.424316928682751e-180]
[0.3333389105509864, 0.6666610824366223, 7.01239152542015e-09, 4.424316928682751e-180]
[0.3333389105509864, 0.6666610824366223, 7.01239152542015e-09, 4.424316928682751e-180]
[4.848940350515108e-88, 1.2553631437503425e-05, 0.4999937205547114, 0.4999937258138512]
```

对于每个模型，第一个矩阵是 A 矩阵，第二个矩阵是 B 矩阵。结果相当令人诧异，可以看出最后会很快的跑到隐状态的终止节点，让他生成剩下的串。一般会有某个字符几乎百分之百的由终止节点隐状态生成。比如模型一训练的样本是 AABBCCDD，就变成了 AABB 由前 4 个隐状态生成，后面的 CCDD 几乎百分之百的由终止状态生成。

产生这种现象的原因之一，可能还是在于串长不够长、隐状态数大于显状态数，导致了某个字符几乎完全由某组隐状态生成的分工现象。

题目要求是串从起始状态出发，终止状态结束。为了让终止状态的“终止”意义更大，我觉得要求只有第一个字符由起始节点生成、只有最后一个字符由终止节点生成更加合适，所以我将程序改了一下，强制要求只有最后一个字符才能由终止状态生成。

要想做到这一点，我们可以修改 forward-backward 算法，也就是在 dp 的时候要求只有最后一个字符才能走到隐状态上去。如此一来，学习的结果就会变成我想要的结果了。

```
模型一:
[0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0, 0, 0, 0, 1]


[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
```

接着在两组样本中各取第一个样本进行训练，却又遇到了一个问题。

```
模型一:
[0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]

模型二:
[0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.16666666666666663, 0.3333333333333334, 0.33333333333333337, 0.16666666666666666]
[0.16666666666666663, 0.3333333333333334, 0.33333333333333337, 0.16666666666666666]
[0.16666666666666663, 0.3333333333333334, 0.33333333333333337, 0.16666666666666666]
[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
```

可以看出，训练的结果几乎一模一样。

观察发现，我们训练的两个样本分别是 AABBCCDD,DDCCBBAA, 事实上他们只是被置换了一下而已，其实是很像的两个串。

更关键的是，我的初始值设定的是均匀分布（即都是 0.25），这么一来算法对这两个串的运行结果都会是一样的。

事实上，如果两个训练模型的初始值设定一样，对这两个串训练出来的结果也都会是一样的。

为此，我们可以修改初始值，比如第一个样本不是均匀分布而是 $[0.1, 0.2, 0.3, 0.4]$，第二个正好相反，是 $[0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$，这样子设定初始值得到的训练结果就有所不同了。

```
模型一:
[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4]
[0.0, 0.1388888888888889, 0.2777777777777778, 0.4166666666666667, 0.1666666666666666]
[0.0, 0.1388888888888889, 0.2777777777777778, 0.4166666666666667, 0.1666666666666666]
[0.0, 0.1388888888888889, 0.2777777777777778, 0.41666666666666663, 0.16666666666666669]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.1, 0.2, 0.3, 0.4]
[0.16666666666666669, 0.3333333333333333, 0.33333333333333337, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666669, 0.3333333333333333, 0.33333333333333337, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666663, 0.33333333333333326, 0.3333333333333333, 0.16666666666666669]
[0.1, 0.2, 0.3, 0.4]

模型二:
[0.0, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1]
[0.0, 0.37037037037037035, 0.2777777777777777, 0.18518518518518517, 0.16666666666666669]
[0.0, 0.3703703703703704, 0.2777777777777778, 0.1851851851851852, 0.16666666666666669]
[0.0, 0.37037037037037035, 0.2777777777777777, 0.18518518518518517, 0.16666666666666669]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.4, 0.3, 0.2, 0.1]
[0.16666666666666669, 0.33333333333333337, 0.3333333333333333, 0.16666666666666663]
[0.1666666666666666, 0.33333333333333326, 0.33333333333333337, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666669, 0.33333333333333337, 0.3333333333333333, 0.16666666666666663]
[0.4, 0.3, 0.2, 0.1]
```

而如果选择的样本不这么相似，比如第二组样本使用的是 DDABCBA，则训练出来的结果就会有更明显的不同。

```
模型一:
[0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0.0, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.2777777777777778, 0.16666666666666663]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.16666666666666666, 0.33333333333333337, 0.3333333333333334, 0.16666666666666663]
[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]

模型二:
[0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.0, 0.2666666666666667, 0.2666666666666667, 0.2666666666666667, 0.2]
[0.0, 0.2666666666666667, 0.2666666666666667, 0.2666666666666667, 0.2]
[0.0, 0.2666666666666667, 0.2666666666666667, 0.2666666666666667, 0.2]
[0, 0, 0, 0, 1]

[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
[0.20000000000000004, 0.4, 0.20000000000000004, 0.2]
[0.20000000000000004, 0.4, 0.20000000000000004, 0.2]
[0.20000000000000004, 0.4, 0.20000000000000004, 0.2]
[0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
```

从中可以看出，初始值的选定是相当重要的，两个比较相似的串，如果初始值一样，很容易收敛到同一个解，从而得到相同的模型，这是我们极力要避免的。

一个最简单的避免方法是初始值随机选定。

(2)

解决了第一问后，后两问就相当简单了。

隐马尔可夫模型的三大核心问题里，后两问其实都是估值问题，而估值问题可以说是学习问题的一个步骤，所以几乎不用写什么新代码。

第一个模型学习样本 AABBCCDD，第二个模型学习样本 DDABCBA，生成给定的四个串概率和分类如下：

```
1.2059083522441819e-05 1.6121856000000026e-05
模型二
6.029541761220907e-06 8.060928000000013e-06
模型二
2.9458618319107867e-05 3.5020800000000056e-05
模型二
5.891723663821575e-05 0.00010076160000000009
模型二
```

生成的四个串全都被分类到了第二类，这点令我感到惊讶。

直观上来看，第一个样本 AABBCCDD 未免过于规律，而 DDABCBA 则显得更加像随机生成的，同时又有“相邻两个字符相同”的情况出现。

从概率数值上看，对于前三个，虽然都分给了第二类，但其实概率相差的也不算太大。

如果第一个样本换成一个更加随机一点的，分类结果就不会这么一边倒了。（反之如果一个样本全部都是 A，那么基本上不会有什么串和他一类）

(3)

```
4.091474766542757e-06 5.6033280000000094e-06
模型二
P(w2|x)/P(w1|x)= 1.3695130288521242
```

可以对 $\frac{P(\omega 1)}{P(\omega_2)}$ 以 1.3695 为分界点，当比值恰好取在分界点上时后验概率可视为一样。

如果 $\frac{P(\omega 1)}{P(\omega_2)} > 1.3695$，倾向于分在第一类，否则倾向于分在第二类。

2 第二题

(1)

贝叶斯置信网络相当于是所有变量按照“依赖关系”形成一个有向无环图，我们假设对一个长度为 T 的串用一阶马尔科夫模型，那么我们把时刻 t 所在的隐状态设为一个变量。

如此一来，由于时刻 t 所在的隐状态只和时刻 $t-1$ 所在的隐状态有关，故形成一个有向无环图。

即时刻 t 对应变量向时刻 $t+1$ 对应变量连一条边。

贝叶斯置信网络的公式为 $P(x|e) \propto P(e^C|x)P(x|e^P)$，我们来思考 $P(x|e^P)$ 是什么。

根据贝叶斯置信网络

$$P(x|e^P) = \sum_{all i,j,\cdots,k} P(x|P_{1i}, P_{2j}, \cdots, P_{|P|k})P(P_1|e_{p_1}) \cdots P(P_{|P|_k}|e_{P_{|P|_k}})$$

P_{mn} 表示的就是 P_m 取 n 的概率。

由于每个变量只有最多一个父亲（就是前一个时刻对应变量），所以应用在马尔科夫过程就是

$$P(x|e^P) = \sum_i P(x|P_{1i})P(P_1|e_{p_1})$$

假设 x 集合只有一个变量 x_i，我们会发现 $P(x_i = j|e^P)$ 表达就是只考虑 x_i 的父亲的情况下，$x_i = j$ 的概率。而这其实就是前向算法中的 α 数组。

前向算法中 $\alpha_i(t)$ 表示时刻 t 处于隐状态 i，意思就是时刻 t 对应的变量取值为 i 的概率，也就是 $P(x_t = i|e^P)$。

前向算法的转移式为 $\alpha_i(t) = \sum_j \alpha_j(t-1)a_{ij}b_{jk}v(t)$，其中 $\alpha_j(t-1)$ 就代表 $P(P_1|e_{p_1})$ 这一项，$a_{ij}b_{jk}v(t)$ 就代表 $P(x|P_{1i})$ 这一项。

而当 $t = 0$ 时，自然是 $P(x_0 = \text{初始状态}|e^P) = 1, P(x_0 = \text{初始状态以外状态}|e^P) = 0$。

所以前向算法得证。

后向算法其实是前向算法的逆过程，我们可以改改变量的含义。假设有 T 个时刻，就对应的有 T 个变量，第 i 个变量取值为 j 的意思是，我现在在时刻 i，处于隐状态 j，最后时刻 T 的时候我会处于终止状态。这样就得到了 T 个状态。

这么一来的话，每个状态就不是和前面的状态有关了，而是和后面的状态有关，时刻 t 对应变量依赖于时刻 $t+1$ 对应变量。

接着假设 x 集合只含有一个变量 x_i，$P(x|e^P)$ 就是 $\beta_i(t)$ 的含义了。$P(P_1|e_{p_1})$ 对应的是 $\beta_j(t+1)$，$a_{ij}b_{jk}v(t+1)$ 代表 $P(x|P_{1i})$ 这一项

(2)

基本上如上问所说。

对于隐马尔可夫模型，假设一个时间为 T 的序列，总共有 m 个隐状态。

我们可以看做有恰好 T 个变量，x_i 表示时刻 i 所处的隐状态编号，$1 \leq x_i \leq m$。

对于 $i > 0$，x_i 依赖且仅依赖于 x_{i-1}。x_0 没有依赖的变量。

注意依赖关系构成一个有向无环图的形式，所以也是一个贝叶斯置信网络的应用。