作业

计算机科学与技术系 52 班杨定澄　　学号：2015011274
E-mail:892431401@qq.com

第一题

(a)

协方差矩阵是 $0.2I$，故最小错误概率的分类器满足：
$w^T(x-x_0)\geq 0$ 时分为 ω_1 类。
其中 $w=\mu_1-\mu_2, x_0=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}-\frac{\sigma^2}{||\mu_1-\mu_2||^2}\ln\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}(\mu_1-\mu_2)$
将条件代入并化简后得到结果：
若 $x_1+x_2\leq 2.5$，就归为 ω_1；否则归为 ω_2。

(b)

$$\begin{aligned}P(error)&=1\int_{R_1}P(\omega_2|x)dx+0.5\int_{R_2}P(\omega_1|x)dx\\&=\int_{R_1}P(\omega_2)P(x|\omega_2)dx+0.5\int_{R_2}P(\omega_1)P(x|\omega_1)dx\end{aligned}$$

目的是小化正数 $P(error)$，而 $P(\omega_1)$ 和 $P(\omega_2)$ 又是相等的正数，故不用考虑，可以改写为最小化

$$\begin{aligned}P'&=\int_{R_1}P(x|\omega_2)dx+0.5\int_{R_2}P(x|\omega_1)dx\\&=\int_{R_1}P(x|\omega_2)dx+0.5[1-\int_{R_1}P(x|\omega_1)dx]\\&=0.5+\int_{R_1}[P(x|\omega_2)-0.5P(x|\omega_1)]dx\end{aligned}$$

为了使 P' 最小，我们可以这么定义分类器：

当 $P(x|\omega_2) - 0.5P(x|\omega_1) < 0$ 时，$x \in R_1$；否则 $x \in R_2$。
接下来只要解 $P(x|\omega_2) - 0.5P(x|\omega_1) < 0$ 即可。

$$
\begin{aligned}
& P(x|\omega_2) - 0.5P(x|\omega_1) < 0 \\
\Longrightarrow & P(\omega_1) > 2P(x|\omega_2) \\
\Longrightarrow & \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)} > 2 \\
\Longrightarrow & \ln[\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}] > \ln 2 \\
\Longrightarrow & -\frac{[(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2] - [(x_1-1.5)^2 + (x_2-1.5)^2]}{0.4} < \ln 2 \\
\Longrightarrow & x_1 + x_2 < 2.5 - 0.4\ln 2
\end{aligned}
$$

故在该 loss matrix 下的分类器是，当 $x_1 + x_2 < 2.5 - 0.4\ln 2$ 时为 ω_1，否则为 ω_2。

(c)

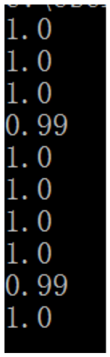
我用 python 实现了一个小程序，就在附件里的 classifier.py 中。

会分别跑 10 次计算正确率，在第 8 行和第 9 行中可以通过注释选择 μ_2 为 $[1.5, 1.5]^T$还是$[3.0, 3.0]^T$。

当 $\mu_2 = [1.5, 1.5]^T$ 时，一组结果如图

```
0.85
0.8
0.78
0.81
0.86
0.85
0.79
0.81
0.74
0.86
```

当 $\mu_2 = [3.0, 3.0]^T$ 时，一组结果如图



可以看出，第二种情况下，μ_1 和 μ_2 的偏差较大，故该分类器准确率更高。

第二题

已知 $\int_{R_1} P(\omega_2|x)dx = \epsilon$，要求最小化 $\int_{R_2} P(\omega_1|x)dx$。

我们有 $\int_{R_2} P(\omega_1|x)dx = 1 - \int_{R_1} P(\omega_1|x)dx$，故只需要最大化 $\int_{R_1} P(\omega_1|x)dx$。

由拉格朗日乘数法知，在满足 $\int_{R_1} P(\omega_2|x)dx = \epsilon$ 下 $\int_{R_1} P(\omega_1|x)dx$ 的最大值，等于 $\int_{R_1} P(\omega_1|x)dx + \lambda(\epsilon - \int_{R_1} P(\omega_2|x)dx) = \lambda\epsilon + \int_{R_1} [P(\omega_1|x) - \lambda P(\omega_2|x)]dx$。

很显然，最后的分类方式是，若 $P(\omega_1|x) - \lambda P(\omega_2) \geq 0$，就分为 ω_1 类，否则分为 ω_2 类。

也即 $\frac{P(\omega_1|x)}{P(\omega_2|x)} > \theta$ 时分为 ω_1 类。

第三题

这道题满足 $\sum_i = \sum$，结合 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3)$，我们可以用如下方式定义 $g_i(x)$。

$g_i(x) = -(x - \mu_i)^T \sum^{-1} (x - \mu_i)$

只需比较三者大小即可。

将所有数据代入原式，用 MATLAB 计算可知，$g_1(x) = -2.3610, g_2(x) = -0.2410, g_3(x) = -9.4190$。

因此，我们选择将它分类到 ω_2 类中。