

第二次习题课

March 30, 2016

1 设随机变量 X 服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布, 求随机变量 $Y = \cos(X)$ 的密度函数。

2 设 $X \sim U(-1, 2)$, 求 $Y = |X|$ 以及 $Y = X^2$ 的概率密度函数。

3 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E|X - \mu|$ 。

4 设 $f(x)$ 为凸函数, X 为一维随机变量, 则 $E[f(X)] \geq f(E[X])$, 只要不等号两边的期望都存在。

5 某班 n 个战士各有1支归个人保管使用的枪, 这些枪的外形完全一样, 在一次夜间紧急集合中, 每人随机的取了一支枪, 求恰好拿到自己枪的战士人数的期望。

6 设 X 为连续随机变量, 密度函数为 $f(x)$. 若 m 是 X 分布的唯一的数且 b 是一个固定的实数, 证明

$$E(|X - b|) = E(|X - m|) + 2 \int_m^b (b - x)f(x)dx,$$

假设期望均存在, 并求使得 $E(|X - b|)$ 取到最小值的 b .

7 设原件的寿命服从指数分布,

$$y = \begin{cases} 1 - \exp(-0.03t) & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

(1) 已知原件至少工作了30小时，求它再至少工作20小时的概率。

(2) 由三个独立工作的此种原件组成一个系统，当其中至少有两个原件工作时这个系统才能正常工作，求这一系统寿命 $X > 20$ 的概率。

8 在区间 $(0, 1)$ 中随机抽取两个数 X 和 Y ，求

(1) $P(\min(X, Y) < 0.5)$

(2) $E(\max(X, Y))$

(3) $\text{Var}(|X - Y|)$