2005 年秋季<<代数与几何>> 期中试题（上）

一．（28 分）

1（10 分）已知□^{3}中两条直线$l_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{0}$和$l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=z$. 求过$l_1$且与$l_2$平行的平面方程, 及与$l_1$和$l_2$都垂直相交的直线方程..

2（6 分）已知V_1和V_2是 V 的两个线性子空间，则V_1+V_2，$V_1\cap V_2$，$V_1\cup V_2$中还是线性子空间的是哪些? 不一定是线性子空间的是哪些? 不是线性子空间请举例说明。

3（8 分）□^{4}中的一组向量

$$S=\{\vec{\alpha}_1=(1,0,0,1),\vec{\alpha}_2=(0,0,0,1),\vec{\alpha}_3=(1,t,0,1),\vec{\alpha}_4=(2,t,0,3)\},$$

当 dim(L(S))=2 时，t 为何值?
当 dim(L(S))=3 时，t 为何值？ 此时写出 L(S)的一组基，并将这组基用 Gram-Schmidt 标准正交化化为 L(S)的一组标准正交基。

4（4 分）σ为$V_1(F)$到$V_2(F)$的线性映射，用 Kerσ, r(σ)和 $\dim(V_1)$ 写出σ为单射的两个等价命题。

二(18 分) 定义$\sigma:$□$^5\to R[x]_6$为$\sigma(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=a_1+a_3x^3+a_5x^5$，

(1) (6 分）证明σ为□^{5}到$R[x]_6$的线性映射。

(2) (6 分）求出 Imσ 和 Kerσ及它们的维数。

(3) (6 分）若$\vec{\alpha}=(1,1,1,1,0)$，求$\sigma(\vec{\alpha})$在$\{1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3,(x+1)^4,(x+1)^5\}$下的坐标。

三(18 分) 设$V_1(F)$和$V_2(F)$均为有限维线性空间，$\sigma\in L(V_1(F),V_2(F))$.

1. (9 分) σ为$V_1(F)$到$V_2(F)$的同构映射的充分必要条件为 σ将$V_1(F)$的一组基映成为$V_2(F)$的一组基

2 (9 分) 若$V_1(F)$为实内积空间，$V_1(F)$与$V_2(F)$同构，试定义$V_2(F)$的一个内积使之成为内积空间.

四（21分，每题7分）设V为有限维线性空间，$\sigma \in L(V,V)$. 定义映射σ^2如下

$$\sigma^2(\vec{\alpha}) = \sigma(\sigma(\vec{\alpha}))$$

证明: (1) $\sigma^2 \in L(V,V)$且$Ker\sigma \subset Ker(\sigma^2)$.

(2) $\dim(Ker(\sigma^2)) = \dim(Ker\sigma) + \dim(\operatorname{Im}\sigma \cap Ker\sigma)$。

(3)令$V = □^3$, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_1 - x_2)$。 试验证上述(1)与(2)的结论。

五（15分）设V为有限维线性空间, $V = W_1 \oplus W_2$，其中W_1, W_2是子空间。

对 $\varphi \in L(V,V)$ ，称映射 φ 为 W_1 上的射影变换，如果对任意 $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \in V$(其中$\vec{\alpha}_1 \in W, \vec{\alpha}_2 \in W_2$),有$\varphi(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}_1$。

证明:

(1)(9分) 若φ为子空间$W \subset V$上的射影变换，则$\varphi^2 = \varphi$。

(2)(6分) 反之, 若$\varphi \in L(V,V)$满足$\varphi^2 = \varphi$，则必有V的一个子空间W，使得φ是W上的射影变换.

2006年秋季<<代数与几何>> 期中试题 上

(注意：请将所有答案都写在答卷纸上).

一．（10分）已知V是n维线性空间，Θ是V的所有秩为n的向量组的集合，我们定义Θ上的一个关系R：$\theta_1 R \theta_2$当且仅当θ_1和θ_2能够互相线性表示。

证明：R是一个等价关系，并求商集$\Theta/_R$中的元素个数。

自反、对称、传递 $\forall \vec{\alpha} \in \Theta$ 1.

二（21分，每题7分）

设λ为实数，$P_1(1,0,-1), P_2(0,1,0), P_3(-\lambda,1+\lambda,\ \lambda^2)$为$\mathbb{R}^3$中的点。

1。当λ为何值时，向量$\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_1P_3}$线性无关？

2。求以$\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$为邻边的平行六面体的体积。

3。求过原点并与直线P_1P_2垂直的平面方程。

三（14分，每题7分）

设 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 为n维欧式空间的单位正交基，

$\vec{\alpha} = \lambda_1\vec{\varepsilon}_1 + \lambda_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{\varepsilon}_n, \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n.$

证明：

1。$|\vec{\alpha}|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$.

2。设$V_k = L(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_k), 1 \le k \le n$，则$\forall \vec{\beta} \in V_k$，有

$$\left|\vec{\alpha} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{\varepsilon}_i\right| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|.$$

四（24分，每题6分）

设V_1和V_2是有限维线性空间V的子空间。

1。$V_1 \cup V_2$是否一定为V的子空间？ 请举例说明。

2。若$V_1 \cup V_2$为V的子空间，证明$V_1 \cup V_2 = V_1 + V_2$。

3。若存在向量$\bar{x} \in V_1 + V_2$，使得$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$，$\bar{x}_1 \in V_1$，$\bar{x}_2 \in V_2$的分解唯一，则$V_1 + V_2$为直和。

4。若$\dim(V_1) + \dim(V_2) > \dim(V)$，则$V_1$和$V_2$有公共的非零向量。

五（16分）

设σ：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$为

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_2).$$

1 (10分）。若存在非零向量$\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^3$和实数$\lambda$使得$\sigma(\bar{\alpha}) = \lambda\bar{\alpha}$，求$\lambda$的值。

2 (6分）。令集合$V_\lambda = \left\{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^3 : \sigma(\bar{\alpha}) = \lambda\bar{\alpha}\right\}$。证明$V_\lambda$是$\mathbb{R}^3$的子空间，并求$\dim(V_\lambda)$.

六（15分）

设V为n 维线性空间，σ，τ，$\rho \in L(V, V)$.

1(8分）. 证明：对任意τ_1，$\tau_2 \in L(V, V)$，有

$$r(\tau_1\tau_2) + \dim\left(\mathrm{Im}(\tau_2) \cap \mathrm{Ker}(\tau_1)\right) = r(\tau_2).$$

!

$r(AB) = r(B) - \dim N(A) \cap R(B)$
$= r(A) - \dim R(A^T) \cap N(\ldots)$

2(7分). 证明：$r(\sigma\tau) + r(\tau\rho) \le r(\sigma\tau\rho) + r(\tau)$（可利用上述1的结论）.

$r(\sigma\tau) = r(\tau) - \dim(\mathrm{Im}(\tau) \cap \mathrm{Ker}\,\sigma)$
$+ r(\tau\rho) = r(\rho) - \dim(\mathrm{Im}(\rho) \cap \mathrm{Ker}\,\tau)$

$\le r(\sigma\tau\rho) + r(\tau)$.

2007年秋季《代数与几何》期中试题 上

（注 意：请将所有答案都写在答卷纸上）.

一(10分). 设 $\vec{a}$和$\vec{b}$为非零向量，且$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$和$\vec{b}$之间的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$.　　$-\sqrt{2}$

二(20分). 设有异面直线 L_1: $\begin{cases} y=2, \\ x+z-4=0 \end{cases}$ 和 L_2: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

(1). 求L_1和 L_2之间的夹角.　　$(1,0,-1)$　　$(2,1,1)$

(2) 求 过L_1且平行于 L_2的平面方程.

$P_0(1,2,3)$

三(20分). 给定□^{4}的两个子空间

$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_1-x_2+4x_3-3x_4=0,\ x_1+x_3-x_4=0\}$,

$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):3x_1+x_2+x_3=0,\ 7x_1+7x_3-3x_4=0\}$.

分别求 子空间$W_1\cap W_2$和 W_1+W_2的维数和一组基.

四(18分). 设$\lambda_1,\lambda_2\in$□，在线性空间□^{3}中定义

$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\lambda_1a_1b_1+\lambda_2a_2b_2+a_3b_3$，其中$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3),\vec{\beta}=(b_1,b_2,b_3)\in$□^{3}.

(1). 证明$(\vec{\alpha},\vec{\beta})$是□^{3}的内积的充要条件是$\lambda_1>0,\lambda_2>0$.

(2). 设$\lambda_1=2,\lambda_2=1$，□^{3}按上面的内积构成一个实内积空间.

令$W=L(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$，其中$\vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_2=(1,1,0)$.试求$W$的一组正交基.

(3). 条件同(2)，求$\vec{e}_3=(1,1,1)$在W中的投影.

$(x,y,0)$

五(12分). 在线性空间$V(F)$中, 已知向量组$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$线性无关, 且$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$可由$\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_s$线性表示. 证明$\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_s$线性无关且可由$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s$线性表示.

六(20分). 设$V(F)$为线性空间, $\varphi: V(F) \to V(F)$为线性变换, W为$V(F)$的线性子空间.

(1). 证明: $\dim(W) \le \dim(\varphi^{-1}(W)) \le \dim(W) + \dim(\ker\varphi)$,

这里 $\varphi^{-1}(W) = \{\vec{\alpha} \in V(F) : \varphi(\vec{\alpha}) \in W\}$.

(2). 设ψ: $V(F) \to V(F)$也为线性变换.

证明: $\dim(\ker(\psi \circ \varphi)) \le \dim(\ker\varphi) + \dim(\ker\psi)$.

2008年秋季几何与代数(1)期中考试(A卷) 上

2008.11.15

一、填空题（每空3分，共30分）

1. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足条件 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 则

 (a) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ ________ $(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$;

 (b) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=$ ________ $\vec{b}\times\vec{a}$.

2. 设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是一个线性空间中的三个向量, 若秩$\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}=3$, 则秩$\{\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_1-5\vec{a}_2,5\vec{a}_1-\vec{a}_2\}=$ ________.

3. 设集合$A=\{a,b,c,d\}$, A有三个二元关系

$$R_1=\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c),(c,d),(d,d)\},$$

$$R_2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(c,a),(d,d)\},$$

$$R_3=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,c),(c,d),(d,d)\},$$

 其中二元关系________是等价关系, 它将 A 分成________个等价类.

4. 已知 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(1,1,0)$是$\mathbb{R}^3$的一组基, 则 $\beta=(2,3,-4)$关于这组基的坐标为______________.

5. 设直线 $l: \frac{x-4}{2-D}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{B+6}$, 则当 $B=$ ________, $D=$ ________时, 该直线同时平行于平面 $x-2y+z=0$ 和 $x+2y-3z-1=0$.

6. 设$\alpha_1=(1,2,3,-4)$, $\alpha_2=(2,3,-4,1)$, $\alpha_3=(2,-5,8,-3)$, $\alpha_4=(5,26,-9,-12)$, $\alpha_5=(3,-4,1,2)$, 则向量组$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$的一个极大线性无关组是____________

7. 线性空间$V_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n|\ a_i\in\mathbb{R},\ i=0,\cdots,n\}$, 线性映射 $\sigma: V_3\to V_2$ 的定义为 $\sigma(\alpha)=\sigma(a_0+a_x+a_2x^2+a_3x^3)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$, 则 σ关于基$\{1,x,x^2,x^3\}$和$\{1,x,x^2\}$的矩阵表示为

______________.

二、计算题（每题13分，共39分）

1. 设$V_0, V_1, \cdots, V_{n+1}$均为数域$F$上线性空间，$V_0 = V_{n+1} = \{0\}$，设$\sigma_i \in L(V_i, V_{i+1})$，$i = 0, 1, \cdots, n$，且$\ker(\sigma_{i+1}) = \mathrm{Im}(\sigma_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$。求$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i$。

2. 已知$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$是$\mathbb{R}^3$中一组向量，其中$\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (2, -1, 0), \alpha_4 = (4, -2, 1)$。
试用Schmidt正交化方法，由S构造$\mathbb{R}^3$的一组两两正交的向量组。

3. 线性映射 $\tau: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$定义为

$$\tau\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}.$$

求 τ 的像空间 $\mathrm{Im}(\tau)$以及核空间 $\mathrm{Ker}(\tau)$的一组基.

三、证明题（第1，2题每题13分，第3题5分，共31分）

1. 设W_1, W_2, W_3 是有限维线性空间V的三个线性子空间，并设

$$\begin{aligned} n_1 &= \dim[(W_2 + W_3) \cap W_1] + \dim(W_2 \cap W_3), \\ n_2 &= \dim[(W_1 + W_3) \cap W_2] + \dim(W_1 \cap W_3), \\ n_3 &= \dim[(W_1 + W_2) \cap W_3] + \dim(W_1 \cap W_2). \end{aligned}$$

证明：$n_1 = n_2 = n_3$.

2. 设$\sigma \in L(V_1, V_2)$，$W \oplus \ker\sigma = V_1$，$U \oplus \sigma(V_1) = V_2$。对任意$z \in V_2$，令$z = u + y$，这里 $u \in U, y \in \sigma(V_1)$，并如下定义线性映射$\tau \in L(V_2, V_1)$：

$$\tau(z) = x \in W，\text{其中}\sigma(x) = y。$$

证明：(1). $\sigma \circ \tau \circ \sigma = \sigma$;
(2). $\tau \circ \sigma \circ \tau = \tau$.

3. 设$V_i(F)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$为线性空间，且$\sigma \in L(V_1, V_2), \tau \in L(V_3, V_4), \phi \in L(V_1, V_4)$。问：当$\sigma, \tau, \phi$满足什么条件时，存在$\psi \in L(V_2, V_3)$使得$\phi = \tau \circ \psi \circ \sigma$?

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　《几何与代数 1》期中考试　　上　　(A 卷)

2009 年 11 月 21 日

一、填空题（第 4 题 8 分，其余每空 4 分，共 40 分）

1. $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{\alpha}_1=(1,0,1)$，$\vec{\alpha}_2=(0,1,2),\vec{\alpha}_3=(1,1,-1)$ 为一组基。则 $\vec{\beta}=(4,3,2)$ 在该基下的坐标表示为__________.

2. 设空间中三个平面 π_i, $(i=1,2,3)$ 的方程为 $a_ix+b_iy+c_iz=d_i$. 若记 $\vec{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)\in\mathbb{R}^3$，$\vec{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)\in\mathbb{R}^4$，且有 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)=2$，$r(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3)=3$. 请问

   (1). 三个平面________有公共交点？(填“是”或“否”)

   (2). 若 $\pi_1\cap\pi_2=l_1$，$\pi_2\cap\pi_3=l_2$，$\pi_3\cap\pi_1=l_3$，则 l_1,l_2,l_3________平行. (填“是”或“否”)

3. 设 $\vec{\alpha}_1=(4,-5,2,6)$，$\vec{\alpha}_2=(2,-2,1,3)$，$\vec{\alpha}_3=(6,-3,3,9)$，$\vec{\alpha}_4=(4,-1,5,6)$，则向量组 $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4\}$ 的极大无关组为__________.

4. 设 $\mathbb{R}^4$ 中 $\vec{\alpha}_1=(1,0,1,1)$，$\vec{\alpha}_2=(1,1,0,0)$，$\vec{\alpha}_3=(0,1,1,1)$，试用 Schmidt 正交化的方法求子空间 $L\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3\}$ 的一组单位正交基 (在标准内积下)______________________________.

5. 在 $\mathbb{R}^3$ 中直角坐标系 O-xyz 下，两直线

$$l_1:\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+3y+4z=5\end{cases},\quad l_2:\begin{cases}5x-4y+2z=6\\3x+y-4z=2\end{cases}$$

   均平行于平面 $\pi: ax+by+cz=d$，且 π 距原点 O 的距离为 2，则 π 的方程为__________

6. 已知 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 不共线，若 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$，则 $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=$__________.

7. 设方程组 $\begin{cases}px_1+x_2+x_3=4\\x_1+qx_2+x_3=3\\x_1+2qx_2+x_3=4\end{cases}$，当待定系数 p,q 满足____________时，方程组有唯一解；当待定系数 p,q 满足____________时，方程组有无穷个解；

二、计算题（每题 15 分，共 30 分）

1. 在 $\mathbb{R}^4$ 中 $W_1 = L\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$，$W_2 = L\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3\}$，其中

$$\begin{aligned} &\vec{\alpha}_1 = (1,1,0,2), \quad &\vec{\alpha}_2 = (1,1,-1,3), \quad &\vec{\alpha}_3 = (1,2,1,-2); \\ &\vec{\beta}_1 = (1,2,0,-6), \quad &\vec{\beta}_2 = (1,-2,2,4), \quad &\vec{\beta}_3 = (2,3,1,-5). \end{aligned}$$

分别求 $W_1 + W_2$，$W_1 \cap W_2$ 的维数和一组基。

2. 设线性映射 $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 定义为

$$\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 与 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 的一组基，以及 σ 在自然基下的矩阵表示 $M(\sigma)$.

三、证明与解答题（第 1 题 12 分，第 2 题 13 分，第 3 题 5 分，共 30 分）

1. 设 V 为有限维线性空间，$\sigma, \tau \in L(V,V)$，且 $\sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$，证明：

(1). $\mathrm{Im}\sigma = \mathrm{Im}\tau \iff \sigma\tau = \tau,\ \tau\sigma = \sigma$.

(2). $\mathrm{Ker}\sigma = \mathrm{Ker}\tau \iff \sigma\tau = \tau,\ \tau\sigma = \sigma$.

2. 设 $\sigma_1, \sigma_2 \in L(V_1, V_2)$，且 $\dim V_1 = 8$，$\dim V_2 = 9$，$r(\sigma_1) = 6$，$r(\sigma_2) = 5$，记 $W = \mathrm{Im}\sigma_1 \cap \mathrm{Im}\sigma_2$.

(1). 证明：$U = \sigma_1^{-1}(W)$ 为 V_1 的子空间。

(2). 试分别估计 $\dim W$ 和 $\dim U$ 的取值范围。

3. 设 W_i 分别为欧式空间 $V_i(\mathbb{R})$ 中的 k 维子空间 $(i = 1,2)$，$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k\}$ 与 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_k\}$ 分别为 W_1 与 W_2 的一组基。求证：存在 $\sigma \in L(V_1, V_2)$，使得 $\sigma(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i \ (1 \leqslant i \leqslant k)$，且若 $\vec{x} \in W_1^{\perp}$，有 $\sigma(\vec{x}) \in W_2^{\perp}$