习题 3.6

编程序生成 Hilbert 矩阵 H_n，以及 n 维向量 $b=H_n*x$，其中 x 为所有分量都是 1 的向量。用 Cholsky 分解算法求解方程 $H_n*x=b$，得到近似解 x’，计算残差 $r=b-H_n*x'$和误差 $\Delta x=x'-x$ 的∞范数。

(1)设 n=10，计算$\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$.

(2)在右端项上施加 10^{-7} 的扰动然后解方程组，观察残差和误差的变化情况。

(3)改变 n 的值为 8 和 12，求解相应的方程，观察$\|r\|_\infty$、$\|\Delta x\|_\infty$的变化情况。通过这个实验说明了什么问题？

分析：

使用 matlab 自带的命令生成 Hilbert 矩阵及将其进行 Cholsky 分解，执行前代和回代过程后得到近似解 x’。施加的扰动为白噪声，即所有分量全为 1e-7 的向量，再用同样的方法解出 x’，并计算残差和误差。

实验结果：

(1)n=10 时，$\|r\|_\infty=8.8818e-16$，$\|\Delta x\|_\infty=4.3118e-4$。

(2)施加 1e-7 扰动后，$\|r\|_\infty=2.2204e-16$，$\|\Delta x\|_\infty=0.7007$。

(3)n=8 时，$\|r\|_\infty=2.2204e-16$，$\|\Delta x\|_\infty=4.5897e-7$；n=12 时，$\|r\|_\infty=4.4409e-16$，$\|\Delta x\|_\infty=0.3518$。

实验结论：

从实验结果看，无论是施加扰动还是改变矩阵阶数 n 的值，都对残差的无穷范数无太大影响，但对误差的无穷范数则影响较大，在加上扰动及改变 n 为 12 时甚至出现发散现象，这充分说明 $H_n*x=b$ 这个线性方程组求解问题很敏感，同时，Hilbert 矩阵是一个典型的病态矩阵，阶数越大，病态性越严重。

实验心得：了解了施加扰动一般都是施加白噪声。