清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　**2010级多元微积分期末考题（A）**

系名＿＿＿＿＿＿＿　班级＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿

一．　填空题（每空3分，共15空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \frac{dx}{(1+xy)^{1/y}} =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

2. 交换累次积分次序 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

3. 设 D 平面上以原点为圆心的闭单位圆盘，则二重积分 $\iint\limits_D y\sin(x^4+y^4)dxdy =$＿＿＿＿。

4. 由六个平面 $3x-y-z=\pm1$，$x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$ 的所围立体体积

$V=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

5. 设曲线 L 的参数方程为 $x=1-\sin t$，$y=1-\cos t$，$0\le t\le 2\pi$，则第一类曲线积分

$\int\limits_L \frac{y^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}dl =$＿＿＿＿＿＿＿＿。

6. $\int\limits_{L^+} ydx-xdy=$＿＿＿＿＿＿＿，其中 L^+ 为曲线 $y=x^2-1$ 从 $A(0,-1)$ 到 $B(1,0)$。

7. 积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx+1)dS =$＿＿＿＿＿＿，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面

$x^2+y^2=2$ 所截得的有限部分。

8. 柱面 $x^2+y^2=1$ 介于曲面 $z=1+x^2$ 与平面 $z=0$ 之间的面积为＿＿＿＿＿＿＿＿。

9. 设 S^+ 为圆柱面 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=1, 0\le z\le 2\}$ 的外侧，则第二类曲面积分

$\iint\limits_{S^+} e^{x+y}dx\wedge dy+(y-z)dy\wedge dz =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

10. $\vec{V}(x,y,z)=(x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$，则 $div\vec{V}=$＿＿＿＿＿＿＿。

11. $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$，则 $grad f=$＿＿＿＿＿＿＿，$rot(grad f)=$＿＿＿＿＿。

12. 方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+3y\end{cases}$ 的通解为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

13. 设 $du = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy + \sin z dz$，则 $u(x,y,z) =$ ____________________。

14. 设 $y = x^2e^{2x}$ 为三阶**常系数**线性齐次常微分方程的一个解，则该微分方程的通解为

____。

二.　　计算题

1. （8 分）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，其周长为 a，计算 $\oint\limits_L (3x+2y+1)^2 dl$。

2. （10 分） 求积分 $\iint\limits_{S^+} \dfrac{xdy\wedge dz + (z+1)^2 dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$， S^+ 为下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧。

3. （10 分）计算积分 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，$\Omega = \left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$。

4. （12 分）设 $f(x)$ 二阶可导，$f(1)=0, f'(1)=0$，并设在右半平面（$x>0$），第二类曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} \left(\dfrac{9}{x^2} - 2f(x)\right) ydx - \left(x^2 f'(x) + \sin y\right)dy$ 与路径无关，求 $f(x)$。

三.　　证明题

1. （7 分）设 f 为连续函数，证明：$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 f(z)dz$。

2. （8 分） 设 $D \subset R^2$ 为单连通有界闭区域，其边界 ∂D 逐段光滑，逆时针为正方向，$\mathbf{n}$ 为边界的外法向量，二阶连续可微函数 $u(x,y)$ 为 D 内的调和函数，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,\ (x,y)\in D$，$\mathbf{r}_0$ 为 D 内任意一点，$\mathbf{r}$ 为 $\mathbf{r}_0$ 到 ∂D 上点的向量，$r = \|\mathbf{r}\|$。证明：

（1）　$u(\mathbf{r}_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\left(u\dfrac{\cos<\mathbf{r},\mathbf{n}>}{r} - \ln r\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)dl$；

（2）如果 L_R 为以 $\mathbf{r}_0$ 为圆心，R 为半径的圆，则 $u(\mathbf{r}_0) = \dfrac{1}{2\pi R}\int\limits_{L_R} u(x,y)dl$。

<u>清华大学本科生考试试题专用纸</u>

微积分Ⅲ期终考试 **A** 卷　　　　　　2006 年 1　月 8 日

一、填空题（每空题 3 分，共 39 分）

1．曲面 $x^2+y^2-z=1$ 在点 $(-1,-1,1)$ 的切平面方程是

2．设 f 为连续可微函数，$f'(1)=2$．令 $g(x,y,z)=f(x^2yz)$，则 $\nabla g(1,1,1)=$。

3．设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上的不与坐标轴相交的一片，则 S 上的点 (x,y,z) 的外侧单位法向量是___；如果 S 的面积等于 A，则

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z}=.$$

4．常微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解为

5．设常微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 和 $y_3(x)$．则微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=0$ 的通解是

6．假设函数 $y(t)$ 满足方程 $y''+y'+y=1+\cos t$．则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{t}=$__。

7．设空间光滑曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$，$x^2+y^2\le 2$，上侧为正．其中函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数．则 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$。

8．设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，则三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可以化成球坐标系下的累次积分

9．D 是由曲线 $y=\ln x$、直线 $x=\mathrm{e}$，以及 x 轴围成的平面区域，则 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$.

10．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 内部的面积等于。

11．设 L 为曲线 $x^2+y^2=2x\ (y\ge 0)$，则 $\int_L\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}l=$。

二、解答题

12．（8 分）Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=2$ 围成的空间区域．计算

$$\iiint_\Omega(2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

13．（１０分）设 S 是抛物 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，$0\le z\le 1$．在 S 任意点一点 (x,y,z) 的质量密度为

$\sqrt{1+x^2+y^2}$．求 S 的质心．

14．(10 分)如图，L 是有向光滑曲线，起点为原点 O，终点为 $A(2,2)$．已知 L 与线段 $\overrightarrow{OA}$ 围成的区域 D 的面积等于 A． $f(t)$ 有连续导数．计算曲线积分

$$\int_L (y^2\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x-4x)\mathrm{d}y$$

15． (8 分)设 L 为平面 S：$x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分的边界，方向是 $A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$．空间有一个力场

$$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}\,.$$

求单位质点 P 在 L 上某点出发，绕 L 运动一周时，$\vec{F}$ 对于质点所做的功．

16．(10 分)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数且 $f(0)=f'(0)=1$．又设对于空间 R^3 中的任意一张光滑的闭合曲面 S，都有 $\oiint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求 $f(x)$．

17． (12 分)

① 设 δ 是任意一个正数，L 是圆周 $x^2+y^2=\delta^2$ (逆时针方向)．计算积分

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

② 如果将 L 换成不经过原点但环绕原点的光滑、简单的闭合曲线(逆时针方向)．计算上述积分.

③ 向量场 $\dfrac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $x>0$ 有没有势函数？简述理由.

④ 设 L 为从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段，计算

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\,.$$

18．(6 分) 设 Ω 是圆域：$x^2+y^2<1$．$f(x,y)$ 在 Ω 上有连续偏导数，且处处满足方程

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\,.$$

求证 $f(x,y)$ 在 Ω 恒等于常数．如果 Ω 是不包含原点的圆域，举例说明上述结论未必正确.

微积分 A（2）期末考题（A）

一．　填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1．交换累次积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx=$________________。

2．设曲线 L 的参数方程为 $x=1-\sin t$， $y=1-\sqrt{2}\cos t$， $0\le t\le 2\pi$，则第一类曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2-2x+2}\,dl=$____________________。

3．设 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint_S(x+1)^2dS=$___________________。

4．$\vec{V}(x,y,z)=(x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz)$，则 $\mathrm{div}\vec{V}=$_________________。

5．$f(x,y,z)=e^{x+y+z}$，则 $\mathrm{grad}\ f=$_______________，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f)=$________________。

6. 设函数 $f(x)=x^2+x+2$ 在区间 $[0,2)$ 上的 Fourier 展开为 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)]$，则 $S(0)=$_________。

7．三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}x^{99}y^{100}z^{101}dxdydz=$________________。

8．级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ 的和为__________________。

9．函数 $\frac{1}{1-x}$ 在 $x_0=2$ 点的 Taylor 级数为____。

10. 第二类曲线积分 $\int_{L^+}\frac{x^\lambda dy-ydx}{x^2+y^2}=0$ 对上半平面的任意光滑闭曲线 L 都成立，则常数 $\lambda=$_________________。

11. S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则第二类曲面积分 $\oiint_{S^+}xdy\wedge dz+\cos y dz\wedge dx+dx\wedge dy=$_____________________________。

12. 函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开为____________________________。

13. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=3$ 处收敛, 且当 $x<3$ 时发散, 则 $a=$____________。

14. 设 $D=\left\{ (x,y) \middle| \ 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1 \right\}$, 则 D 的形心横坐标 $\bar{x}=$____________。

二. 计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设 S^+ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的下侧，求 $\iint\limits_{S^+}(x+y)dy\wedge dz+(2y-z)dz\wedge dx$。

2. 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$、$x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 相交部分的体积。

3. 设 $f(x)=\sin^2(x^2)$，

（I）求 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点的幂级数展开；

（II）求 $f^{(n)}(0), n=1,2,3,\cdots$。

4. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}\quad (x>0)$，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$。

三. 证明题

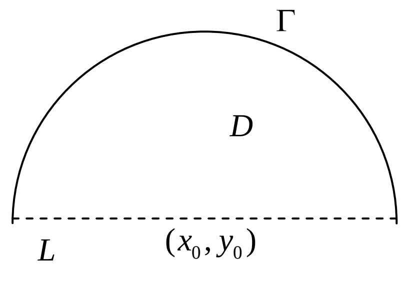
1.（8 分）（I）2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\cos\alpha x$（α 不是整数），将其展成 Fourier 级数（提示：$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$）；

（II）利用（I）证明：$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},\quad x\ne k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

2. （7 分）设函数 $P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$，在以任意点 (x_0,y_0) 为中心，任意正数 r 为半径的上半圆周 Γ 上的第二类曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$。求证：在 $\mathbb{R}^2$ 上有

$$P(x,y)\equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0。$$

（提示：用 Green 公式）



2006 级多元微积分期末考题（A）

2007.6.28

一、填空题（每空 3 分，共 15 空）

1．设 $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy$，则 $F'(x)=$___________

2．设函数 $f(x,y)$ 在 $\Re^2$ 上连续，交换累次积分顺序

$$\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3．设函数 $f(x,y)$ 在 $\Re^2$ 上连续，将直角坐标系下的累次积分化为极坐标系下的累次积分：

$$\int_0^{\frac{R}{2}}dx\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)dy+\int_{\frac{R}{2}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)dy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 所截的面积等于____________

5．$\int_{L^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$________________,其中 $L^+:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，逆时针为正

6．已知 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint_S x^2dS=$__________________

7．设 L 为曲线 $x^2+y^2=2x(y\ge 0)$，则 $\int_L\sqrt{2-x}dl=$__________________

8．设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧的一部分，不与坐标面相交，则 S 上的点 (x,y,z) 的外测单位法向量是__________________;如果 S 的面积等于 A，则

$$\iint_s\frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}+\frac{dx\wedge dy}{z}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

9．如果平面向量场 $\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{\lambda}i-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda}j$ 为半平面 $y>0$ 的保守场，那么 $\lambda=$_____

10．设 $A(x,y,z)=xyi+e^{yz}j+\sin(zx)k$，则 $divA(x,y,z)=$_______________

11．设常微分方程 $y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$，

则常微分方程 $y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=0$ 的通解是_________________________

12．一阶常微分方程组$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$ 的通解为______________________

13．全微分方程$(x+2y)dx+(2x-y)dy=0$的通解为____________________

14．设Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h$所围的闭区域，这里$h>0$，则三重积分

$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz =$_________________________

二、计算题（每题 10 分，共 40 分）

1．计算二重积分$\iint\limits_{D} \left|x-y^2\right| dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$。

2．已知$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2}dx=0$，求$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(x^2+a^2)}{1+x^2}dx$的值$(0\le a<1)$。

（不必讨论广义含参积分的一致收敛性）

3．计算第二类曲面积分$\iint\limits_{S^+}(2y+z)dz\wedge dx+zdx\wedge dy$，其中$S^+$为有向曲面

$z=x^2+y^2, (0\le z<1)$，法向量与 z 轴正向夹角为锐角。

4．设二阶连续可微函数$f(x)$满足$f(1)=-2, f'(1)=1$，若对于右半平面$\left\{(x,y)\,|\,x>0\right\}$内任意简单光滑曲线 L 恒有$\oint\limits_{L} 2yf(x)dx + x^2 f'(x)dy = 0,$ 求$f(x)$

三、证明题

1．（8 分）考虑二阶线性方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+8\dfrac{dx}{dt}+7x=f(t)$，其中$f(t)\in C(-\infty,+\infty)$且满足

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$。

（i）求该方程的通解（可用常数变易法）;（ii）证明该方程的每个解$x(t)$满足$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$。

2.（7 分）设函数$f(x,y)\in C^2(\Re^2)$，且满足$f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}, \forall(x,y)\in\Re^2$

证明：（i）$\oint\limits_{\Gamma_r} \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{n}} dl = \pi(1-e^{-r^2})$, 其中$\Gamma$为圆周：$x^2+y^2=r^2$，逆时针为正向，$\mathbf{n}$为$\Gamma_r$的外法向量，$r>0$；

（ii）$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left[xf'_x(x,y)+f'_y(x,y)\right]dxdy = \dfrac{\pi}{2e}$

考试课程　　　　　　**多元微积分期末考题**

系名________________　班级______________　姓名______________　学号_____________

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 设$b > a > 0$，积分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx =$____________________。

2. 设函数 $f(x, y)$ 在 $\Re^2$ 上连续，交换累次积分的顺序 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx =$____。

3. 设 $D = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \le 2x\}$，则 $\iint\limits_D \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy =$_________________。

4. 设 Ω 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围成的区域，积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz =$_______________________。

5. 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 0$ 所截部分的面积为_____________。

6. 设 $A(1,0,0), B(1,0,2\pi)$ 为曲线 $L: x = \cos t, y = \sin t, z = t$ 上两点，则第二类曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} ydx + xdz =$__________________。

7. 设第二类曲线积分 $\int_{L^+} (1 + x^k e^{2y}) dx + (x^2 e^{2y} - y^2) dy$ 与积分路径无关，则 $k =$_________________。

8. 微分方程 $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ 的通解为_________________________________。

9. 设S为球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，则$\iint\limits_S \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2} dS =$________________________。

10. 设S为R^3中的闭圆域：$x^2 + y^2 \le 1$，$z = 0$，规定S的正法向量向下，则第二类曲面积分$\iint\limits_{S^+} (x^2 + y^2) dx \wedge dy =$___________________________。

11. 曲面S是中心在原点，半径为a的球面，正方向为外法向量方向，则第二类曲面积分 $\iint\limits_{S^+} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy =$___________________。

12. 设$\mathbf{A}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + e^y\,\mathbf{j} + (xyz)\mathbf{k}$，则$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(x, y, z) =$__________________________。

13. 三阶常系数齐次线性常微分方程有两个解为 xe^x, e^{-x} ，则该常微分方程的通解为 ____。

14. 一阶常微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ 的通解为________________________________。

15. 微分方程 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的通解为 ________________________________。

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - x^2 - y^2$ 包围的空间区域，求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)dxdydz$ 。

2. 计算积分 $\oint\limits_{L^+}(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ ，其中 L^+ 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$ 的交线 $(a > 0, b > 0)$，其正向从 Oz 轴向下看为逆时针方向。

3. 设 S^+ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$，内侧为正，求 $\iint\limits_{S^+} \dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\mathbf{S}$ 。

4. 假设函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 连续可导，且满足 $\varphi(0) = -2, \psi(0) = 1$，对平面上任意一条分段光滑的曲线 L，第二类曲线积分
$$I = \int_L 2(x\varphi(y) + \psi(y))dx + (x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y))dy$$
与路径无关，求 $\varphi(x), \psi(x)$ 。

三．证明题

1. （7 分）设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，证明 $2\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$ 。

2. （8 分）设 Ω 为 $\Re^3$ 中的有界闭区域，其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑闭曲面，函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 在 Ω 上二阶连续可微，

(I)证明：
$$\iint\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS = \iiint\limits_{\Omega} v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz$$
其中 $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向；

(II) 若 $u(x, y, z)$ 为调和函数，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ，$\forall (x, y, z) \in \Omega$ ，且 $u(x, y, z)\big|_{\partial\Omega} = 0$ ，即函数 u 在边界面 $\partial\Omega$ 上取值为 0，证明：$u(x, y, z) \equiv 0, \forall (x, y, z) \in \Omega$ 。