实验七：线性方程组的迭代解法

计 21 班 杨俊 2012011400

考虑常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{d^2y}{d^2x}+\frac{dy}{dx}=a \\ y(0)=0, y(1)=1 \end{cases}, 0<a<1$$

容易知道它的精确解为

$$y=\frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}}\left(1-e^{-x/\varepsilon}\right)+ax$$

对微分方程进行离散化，把 $[0,1]$ 区间 n 等分，令 $h=\frac{1}{n}$

$$x_i=ih, i=1,2,\cdots,n-1$$

得到有限差分方程

$$\varepsilon\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=a$$

简化为

$$(\varepsilon+h)\,y_{i+1}-(2\varepsilon+h)\,y_i+\varepsilon y_{i-1}=ah^2$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} -(2\varepsilon+h) & \varepsilon+h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon+h) & \varepsilon+h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon+h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon+h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon+h) \end{bmatrix}$$

请完成：

(1) 对于 $\varepsilon=1$，$a=\frac{1}{2}$，$n=100$，分别用 Jacobi 法、Gauss-Seidel 法和 SOR 法求解上述线性方程组的解，要求有 4 位有效数字，然后比较其与精确解的误差;

(2) 对于 $\varepsilon=0.1$，$\varepsilon=0.01$，$\varepsilon=0.001$ 的情况下，考虑重新求解上述问题。

算法思路：

先建立非线性方程组，然后对方程进行求解。因为只有对角以及两边有数值，所以只用考虑这三行的情况。用以上三种办法的公式都能比较容易地解出来方程的解。

运行结果及分析：

程序运行结果比较大，所以分别放到三个附件.txt 中了。

通过与 a.cpp 中计算出来的精确值进行比较，我们得到如下结论；

当 e 取比较大的值时，三个方法算得的误差都比较大。而 e 取比较小的值时，这三种方法得到的值误差比较小。但总体来讲，这三种插值方法都不尽人意，这是因为这个矩阵并不具有良好的性质，可以考虑用迭代法等解决。