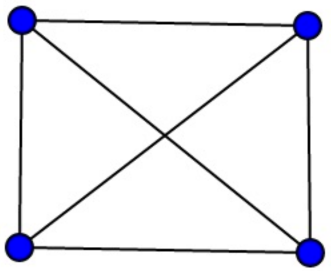
# 图论习题课

石航，唐翯祎
清华大学计算机系
网络技术研究所

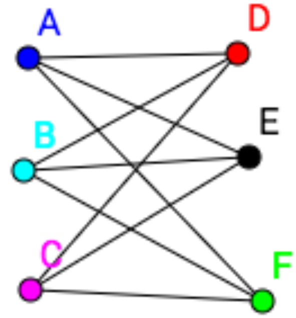
# 题一

- 已知具有 n 个度数都为 3 的结点的简单图 G 有 m 条边，若 m = 3n - 6，证明 G 在同构意义下唯一。
- 由$\sum d(v_i) = 2m$ 得3n = 2m
- 因为 m = 3n - 6，所以n = 4，m = 6。
- 这样的图是完全图$K_4$， 所以在同构的意义下唯一。



# 题二

- 某工厂生产由6种不同颜色的纱织成的双色布。已知花布品种中，每种颜色至少分别与其他3种不同的颜色搭配。试证可以挑出3种双色布，他们恰好含有6种不同的颜色。
- 图建模：顶点->纱，能搭配成双色布->连一条边。如右图。
- AD,BE,CF 满足要求
- H 回路

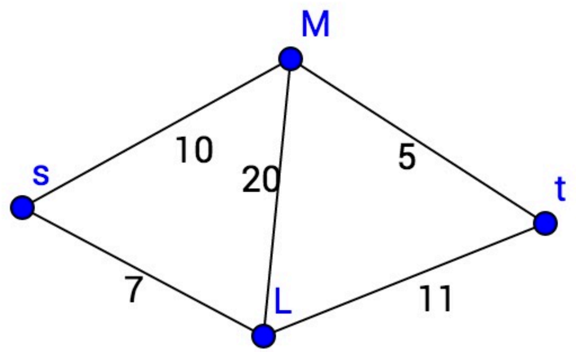


# cont.

- 已知：任意顶点的度≥**3**
- 所以对每一对不相邻的顶点，有$d(v)+d(v')\geq n$ **=>** 图存在哈密顿回路
- 记为$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$，则边$(v_1,v_2)$，$(v_3,v_4)$，$(v_5,v_6)$即满足要求

# 题三

- n 个城市之间有 m 条道路相连，每个道路的最大承重已知。现有一辆载重无限大的卡车要从城市 s 到城市 t 运输货物，问：卡车应该走哪条路径才能使得每次运输的货物量最大?
- 建模，城市->点，道路->边，最大承重->边权，如右图
- s -> M -> L -> t



# Kruskal 算法变形

- 回忆 Kruskal 最短树算法：不断加入边权最小的边，直到得到（最小）支撑树。
- 类似的，我们可以不断加入边权最大的边，直到 st 联通。
- 贪心地加入边可以，那么贪心地加入点呢？

# Dijkstra 算法的变形

- 回忆 D 算法：不断加入最近的点，直到得到（最短）路径。
- 类似的，不断加入最小承重限制最大的点，直到到达 t。

# 具体算法

- $\pi(i)$ = 从起点到 i 的最小承重限制

1. 置 $\bar{S}=\{2,3,\cdots,n\}, \pi(1)=0, \pi(i)=\begin{cases} l_{1i} & i\in\Gamma_1^+ \\ \infty & other \end{cases}$

2. 在 $\bar{S}$ 中寻找j满足 $\pi(j)=\max\limits_{i\in\bar{S}}\pi(i)$ ，$\bar{S}\leftarrow\bar{S}-\{j\}$

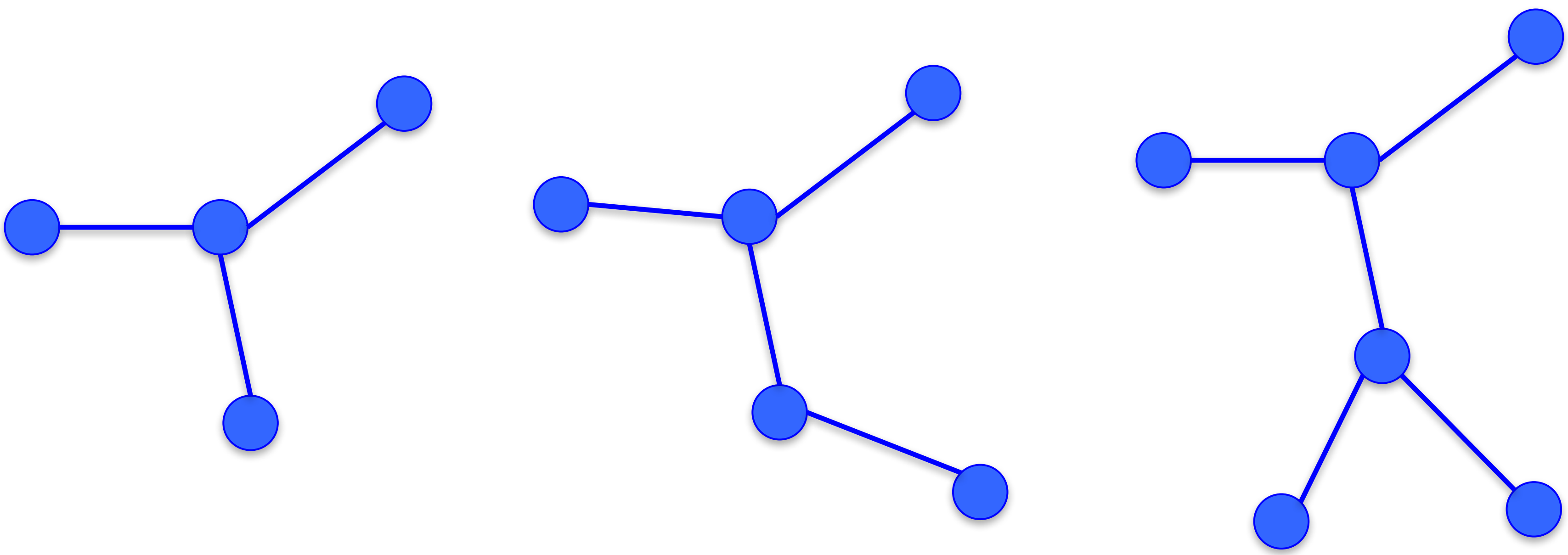
   若 $\bar{S}=\Phi$ ，结束；否则转3。

3. 对全部$i\in\bar{S}\cap\Gamma_j^+$ 置 $\pi(i)=\max(\pi(i),\min(\pi(j),l_{ji}))$
   转2

# 题四

- 树的节点个数: 设无根树T有3个3度节点，其余节点度数不超过2，问它有多少个叶子节点?

- 观察:
- 增加度为2/度为3的节点，度为1的节点如何变化?
- 如何用数学化的语言说明这个现象?

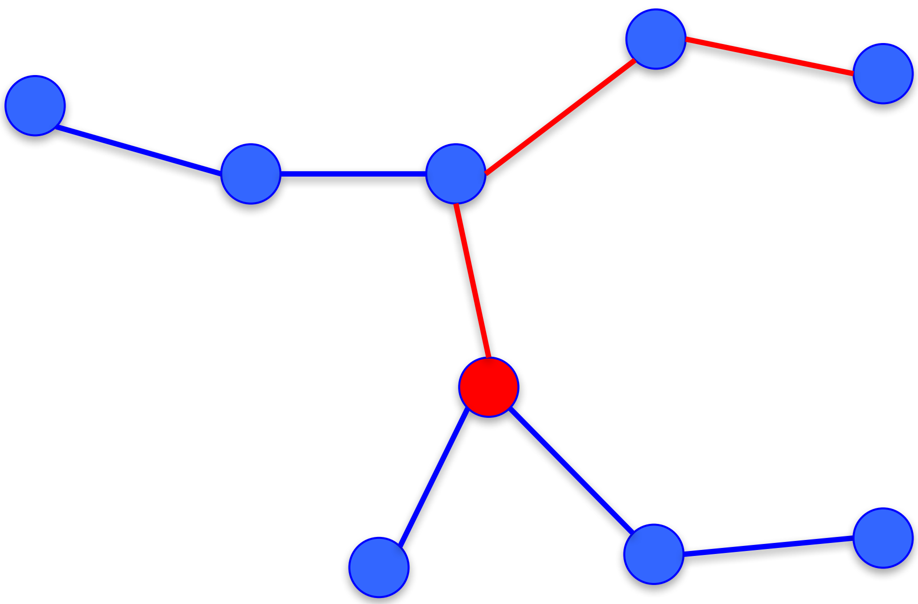


- 解答：利用树的性质， $n = m+1$
- 同时$2*m = 3*n3 + 2*n2 + n1$
- $n = n3 + n2 + n1$
- 可以得到n3与n1的关系为$n1 = n3 + 2$
- 于是代入得到$n1 = 5$

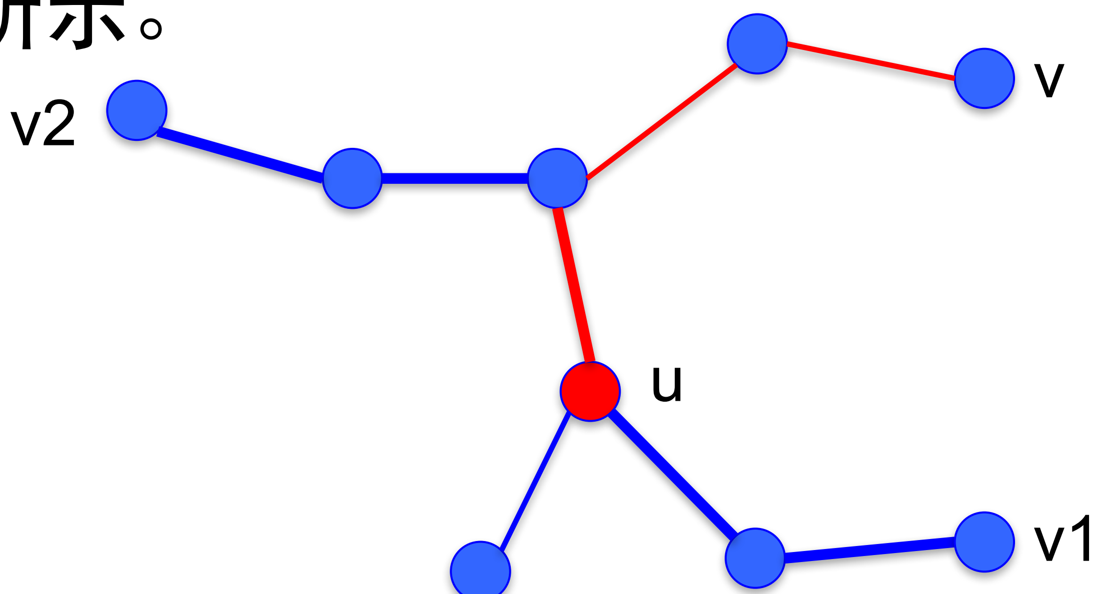
- 变式: 二叉树里有3片叶子，8个出度为1的节点，求节点数?

# 题五

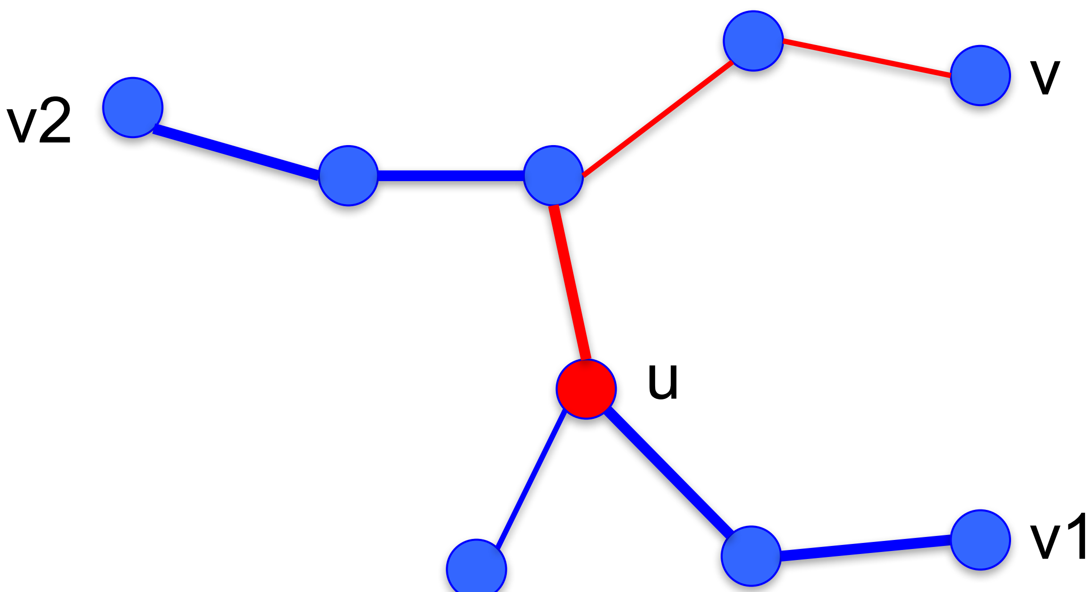
- 树的直径定义为树中的最长简单道路，
- 证明：从任意节点出发的最长简单道路终点，一定在树的直径上。



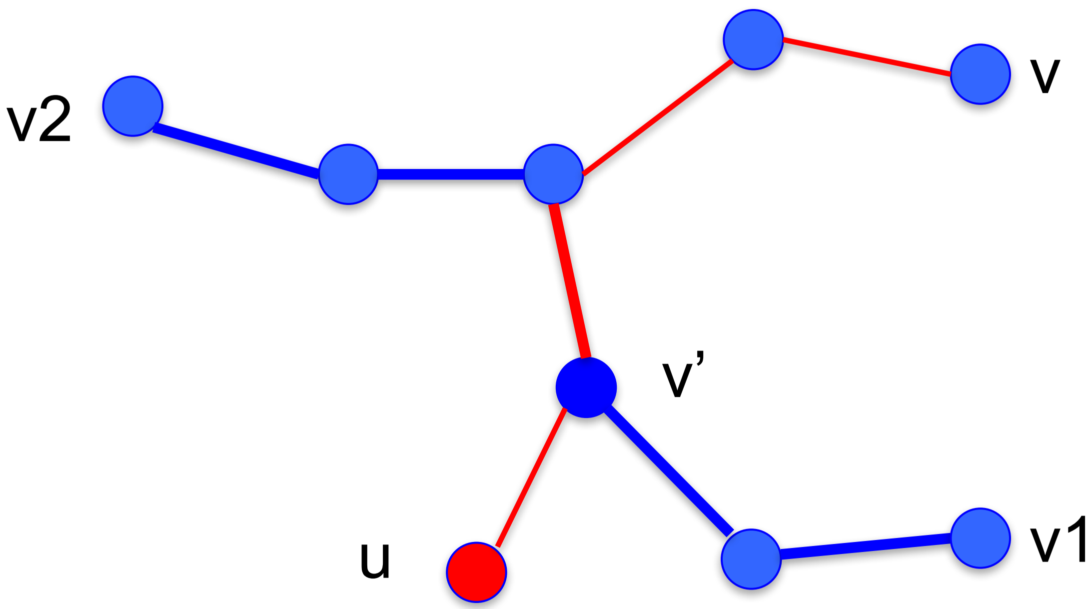
- 证明： 用反证法，
- 设出发节点为u，从它出发的最长简单道路终点为v，分以下两种情况
- 1. u在直径上，假设直径两端为v1，v2，如图所示。



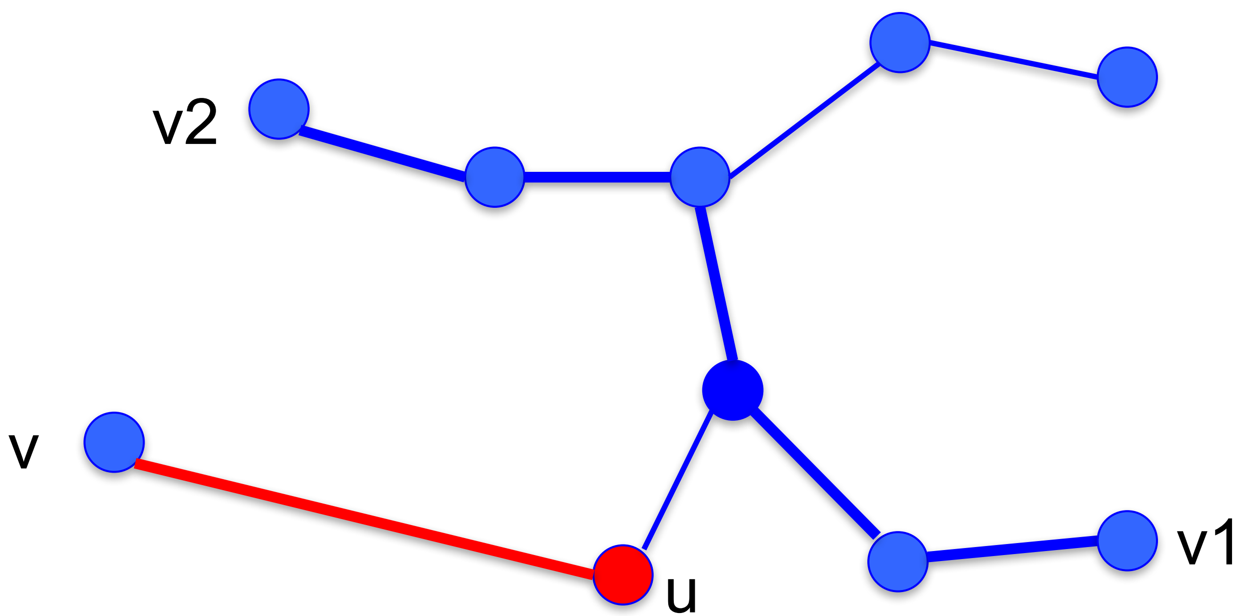
- 则需要说明以下三点:
  - **uv1,uv2**必有一条与**uv**不重合(理由?)
  - 设为**uv1**,则**uv**不比**uv1**短(理由?)
  - **v-u-v1**不比**v1-u-v2**短，与假设矛盾。



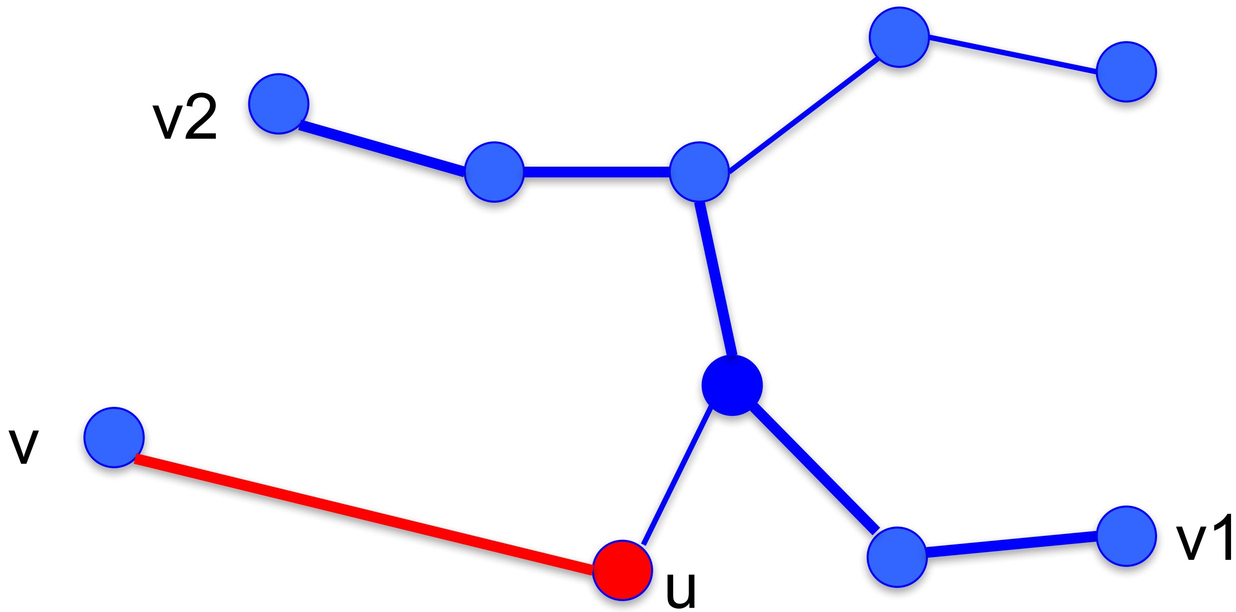
- **2. u不在直径上**
- 若**uv**与**v1v2**有交点?
- 设交点为**v'**, 然后考虑**1**的情况, **v'v**一定在直径上



- 若uv与v1v2无交点?



- 若uv与v1v2无交点?
  - 取u到v1-v2上一点v’, uv’与uv不重合(理由)
  - 且可令uv’与v1v’和v2v’不重合(理由)
  - uv > uv’ + v1v’, 因此 v2v’ + v’v > v2v’ + v1v’

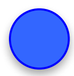


# 题六

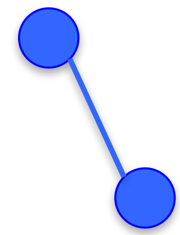
- **AVL树: AVL树定义为1.它是二叉树 2.它任意节点的左右子树高度差不大于1，问高度为h的AVL树最大和最小的节点数量?**

- 解答:
- 最大数量
  - 满二叉树(如何证明)
- 最小数量应当如何考虑?

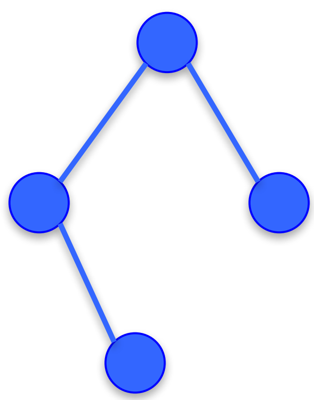
- 观察: 如何如何让节点尽可能少?
  - 若再减少节点会发生什么
- h=1



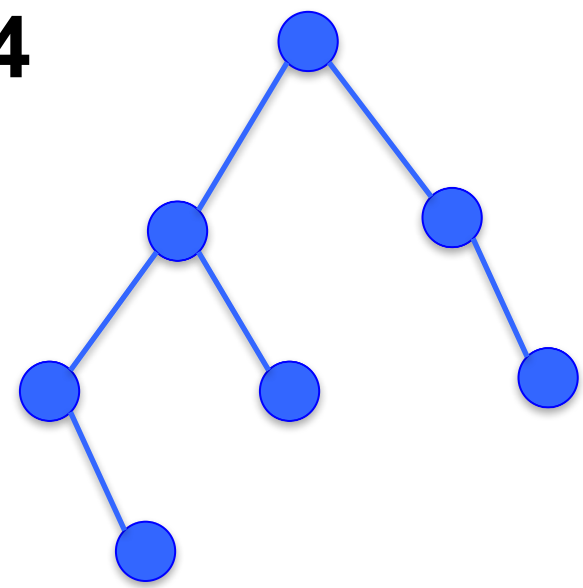
h=2



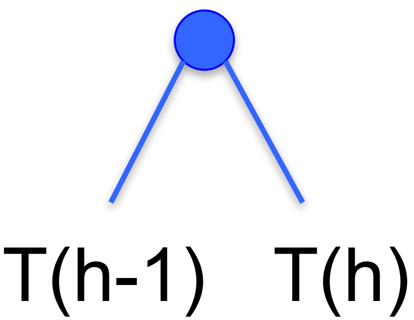
- h=3



h=4



- 观察到的现象：
  - 设T(h)为符合条件的最小的构成
  - 则T(h+1)的两个子树一定为T(h)和T(h-1)
    - 证明?
  - 设f(h)为最小数量，则有
    - $f(h) = f(h-1) + f(h-2) + 1$



# 题七

- 证明: 平面图中，若n>=3，则必有一个节点度数不超过5.

- 证明: 反证法，假设所有节点度都大于5
- $2 * m = \sum deg(v_i) \geq 6n$
- 于是有$m \geq 3n$
- 同时欧拉定理推论$m \leq 3n - 6$
- 两式矛盾

# 题八

- 证明：若简单平面图G边数小于30，则至少有一个度数小于等于4的节点

- 证明：反证法
- 设所有节点数都大于4，则
- $2m = \sum deg(v_i) \geq 5n$
- $n \leq 2m/5$
- 同时$m \leq 3n - 6$，
- 代入可得$m \leq \frac{6m}{5} - 6$
- 即可得$m \geq 30$，与题设矛盾