数值分析实验报告

计 21 杨俊 2012011400

考虑 n 阶的希尔伯特（Hilbert）矩阵 H_n，其元素为 $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$，也即是

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

(1) 按 $\infty-$ 范数计算 H_3 和 H_4 的条件数;

(2) 令 $n = 10$，生成 Hilbert 矩阵，并构造向量 $b = H_n x$，其中 x 是所有分量都是 1 的列向量，用矩阵三角分解（LU 分解）的方法求解以 H_n 作为系数矩阵的线性方程组 $H_n x = b$，得到近似解 $\hat{x}$，计算残差 $r = b - H_n\hat{x}$ 的 $\infty-$ 范数 $\|r\|_\infty$，以及误差 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的 $\infty-$ 范数 $\|\Delta x\|_\infty$；

(3)（选做）由于上述矩阵为对称矩阵，采用平方根法（Cholesky 分解）重新求解上述方程，并比较其与 LU 分解方法的运行效率;

(4) 让上述线性方程组的右端项 b 产生 10^{-7} 的扰动，然后重新求解上述方程组，观察得到的解产生的误差的变化情况;

(5) 减小或增大 n 的值，观察 $\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况，n 取大约多少值时，误差达到 100%?

（1）：算法思路：

a、 求逆矩阵；

b、 求出范数

运行结果：

为三时范数为：518.933

为四时范数为：76.8667

（2）算法思路

主要根据数值分析书上的 LU 分解解法的公式进行计算。

先进行 LU 分解，分解为下三角矩阵和上三角矩阵。

分别解方程：$Ly = b, Ux = y$, 得到最终的解向量 x。

回带计算残差$r = b - Hn * \hat{x}$，和误差$\Delta x = \hat{x} - x$。后计算他们的范数。

得到结果：

$r = b - Hn * \hat{x}$为： $12.66456 * e^{-16}$

$\Delta x = \hat{x} - x$为： 0.000382567

（4）将右端项产生10^{-7}的误差时，求解得到误差为：

$r = b - Hn * \hat{x}$为： $2.59477 * e^{-16}$

$\Delta x = \hat{x} - x$为： 0.960348

（5）当 n 达到 13 时，误差达到 100%。