

随机数学方法参考解答 (A 卷)

一. 填空题 (28 分, 每空 4 分, 将计算结果直接写在横线上)

(1) $\frac{2}{5}$; (2) $\frac{5}{9}$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; (5) $\frac{1}{2}$; (6) $e^{-i\theta+n(e^{\frac{\theta}{n}}-1)}$; (7) $t(1-t)$ 。

二. (共 12, 每小题 4 分)

(1) $EX = 2$; $P(|X - E(X)| < 1) = \frac{1}{3}$

(2) $P(X = Y) = \sum_{i=1}^3 P(X = i, Y = i) = \frac{1}{3}$

$$P(X < Y) = \frac{1}{3}$$

(3) $U_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ 为随机徘徊 ($p = \frac{1}{3}$), 故 $P(U_4 = 1) = 0, P(U_4 = 2) = \frac{8}{81} \dots$

三. (共 15 分, 每小题 5 分)

(1) $E(e^{-X}) = \frac{2}{3}$; $E(Xe^{-X}) = \frac{2}{9}$; $EX = \frac{1}{2}$

$$\text{Cov}(X, e^{-X}) = E[Xe^{-X}] - EXE(e^{-X}) = -\frac{1}{9}$$

(2) $P(X > 2Y) = \frac{1}{3}$

(3) $P(X > \eta Y) = \frac{5}{12}$

四. (共 20 分, 每小题 5 分)

(1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_0^x 6ydy = 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

同理 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} 6y(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

在 $D = \{(x, y) : 0 < y < x < 1\}$ 上, $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 和 Y 不独立。

(2)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - (1-z)^3, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

(3) 当 $0 < x < 1$ 时, 有 $E(Y | X = x) = \frac{2}{3}x$, 故 $U = \frac{2}{3}X$

$$\text{Cov}(X, U) = \frac{1}{40},$$

(4) $P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{8},$

$$E(X^2 | X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{20}$$

五. (共 15 分, 每小题 5 分)

(1) X_2 与 $(X_1, X_3)^T$ 独立;

(2) $2X_1 + 3X_2 - X_3 \sim N(0, 4^2)$, $P(2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 1) = \Phi(\frac{1}{4}),$

(3) $E(W^2) = \frac{2}{9}, E(V) = \frac{7}{9}$

六. (共 10 分, 每小题 5 分)

(1) $E[N_{t+s} | N_t] = \lambda s + N_t$

(2) $\frac{N_1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的特征函数为 $\varphi_{\frac{N_1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}(\theta) = \exp(-\frac{\theta^2}{2} + o(1)) \rightarrow e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$

故由唯一性定理和连续性定理可得结论。

,