考试课程　线性代数（2）　　2015年7月1日　　（**B** 卷）

系、班____________________ 姓名_______________ 学号_______________

【说明：试卷中的i都表示虚数单位根满足$i^2 = -1$】

一、填空题（每空4分，共36分，请直接填在试卷的横线上）

1. 设V为3维的复线性空间，V的线性变换σ在V的基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的矩阵为$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则所有$\sigma$不变的子空间为：_________________________.

2. 设$W = L(\alpha_1, \alpha_2)$为$\mathbb{C}^3$的子空间，其中$\alpha_1 = (i, -i, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, i)^T$，则$W^\perp =$ ______________________.

3. 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$A$的若当标准形为：____________________.

4. 设V为3维的酉空间，σ为V的线性变换，σ^*为σ的共轭变换。若σ^*在V的标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵为$\begin{bmatrix} 1-i & i & -i \\ 0 & 2+i & 1 \\ 1 & 0 & 2i \end{bmatrix}$，则$\sigma$在标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵为：

___________________________________.

5. 设$0 \neq A \in M_n(\mathbb{C}) (n \geq 2)$为幂零矩阵，且满足$A^5 + 2A^2 = 0$，则$A$的极小多项式为：_________________________.

6. 设$A=\begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则埃尔米特二次型$f(x)=x^HAx$的正惯性指数为____________________________.

7. 在$\mathbb{Q}[x]$ 中$f(x) = x^7+2x^6+x^5+5x^3+11x^2+7x+1$的标准因式分解为：________________________.

8. 设$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 则$A^n=$ ____________________，其中n为正整数.

9. 已知一元多项式$f(x)=x^3-x^2-x-2$ 和$g(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$（$m,n,p$为正整数），则$f(x)$ 与$g(x)$的最大公因式为$(f(x),g(x))=$ ____________________.

二、计算题和证明题（共64分）

10.（20分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求可逆矩阵$P$及若当标准形$J$使得$P^{-1}AP=J$.

11.（16分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b=(1,1,1)^T$.

（1）求A的奇异值分解；

（2）求$Ax=b$的最小二乘解.

12. (14分) 设$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 求一酉矩阵$U$使得$U^{-1}AU$为对角阵.

13. （14分）在$V=M_n(\mathbb{C})$中定义内积$(A,B)=tr(A^T\overline{B})$. 设$M\in V$，定义$V$的线性变换

$$T_M : X \mapsto MX,\ X\in V.$$

证明：T_M为酉变换当且仅当M为酉矩阵.

考试课程　线性代数（2）　　2012年6月20日　　（**A 卷**）

系_______ 班_______ 姓名_______ 学号_________

一、填空题（每空4分，共40分，请直接填在试卷的横线上）

1. 用施密特正交化方法把C^3中的基$\alpha_1=(i,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$,

$\alpha_3=(-i,1,1)^T$ 化为标准正交基：________________________________.

2. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，则$A$的极小多项式是________________________.

3. 给定以下类型的矩阵：（1）正交矩阵，（2）实对称矩阵，（3）实反对称矩阵，（4）埃尔米特矩阵，（5）幂零矩阵，（6）上三角矩阵。在复数域C上，以上类型的矩阵中总可相似对角化的有（填序号）______________，总可相合对角化（即相合于对角阵）的矩阵有（填序号）______________.

4. 已知一元多项式$f(x)=x^3+2x^2+x-1$和$g(x)=x^3+x^2-2x$，则$f(x)$与$g(x)$首项系数为1 的最大公因式是$(f(x),\,g(x))=$________________________.

5. 子空间$W=L(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 \\ i \\ 7 \end{bmatrix})$ 在C^3中的正交补为$W^{\perp}=$__________________.

6. 设$f(x)=x^6+4x^5+5x^2+21x+4$，则$f(x)$的所有有理根为______________.

7. 设$2x^2+1$为$f(x),g(x)$的一个最大公因式，则$(f(x^n),g(x^n))=$______________.

8. 设复矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，当$xz\neq 0$时，$A$的若当标准形为______________；

当$xz=0, y\neq 0$ 时，A的若当标准形为______________.

二、计算题和证明题（共60分）

9.（28分）设$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0 & 2\\ -4 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$及若当标准形$J$，使得$P^{-1}AP=J$.

10.（12分）设σ为三维线性空间V上的线性变换，σ 在V的基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求出两个$\sigma$的二维不变子空间.

11.（12分）设σ为酉空间V上的埃尔米特变换，证明：

（1）对于任意的向量$\alpha\in V$, $(\sigma\alpha,\alpha)$为实数；

（2）若σ为正定的埃尔米特变换，则对V中任意非零的向量α都有$(\sigma\alpha,\alpha)>0$.

（注：若σ在V的一组标准正交基下的矩阵为正定的埃尔米特矩阵，则称埃尔米特变换σ为正定的埃尔米特变换.）

12. （8分）设V为n维的欧几里得空间，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为$V$的一组基，令$G=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$，称$G$为此组基的度量矩阵。设$\sigma$为$V$上的线性变换，$\sigma$在上述基下的矩阵为$A$ ，证明σ为正交变换的充分必要条件是$A^TGA=G$.

几何与代数(2)考试样题

一．填空题（每题 5 分，合计 35 分）

1．设 $f(x)=x^4-4x^3-1$ ，$g(x)=x^2-3x-1$，则 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的商式为

______________ ，余式为 ______________ .

2．设 $f(x)=x^2+(k+6)x+4k+2$，$g(x)=x^2+(k+2)x+2k$，当 k __________ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是一次的.

3．设 V 是 R 上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一个基，σ 是 V 上的线性变换，已知 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，则 σ 的所有的 2 维不变子空间为 ____.

4．设 σ 是 V 上的对称变换，满足 $\sigma^2=\varepsilon$，其中 ε 是恒等变换，则 $\forall\alpha,\beta\in V$，

$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=$ ________________.

5．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一个基，这个基的度量矩阵是

$$G=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{pmatrix}$$

令 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2$，则参数 $k=$______ 时 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3$ 与 γ 正交.

6．设 $F^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_i\in F\right\}$ 是数域 F 上的线性空间，定义

$$\sigma((x_1,x_2,\cdots,x_n)^T)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^T$$

则 $\ker\sigma=$ ____________________ ，$\operatorname{Im}\sigma$ 的维数为 _________.

7．设 A 是一个 6 阶矩阵，其特征多项式为 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^4$，若 A 的极小多项式为 $m_A(x)=(x+2)(x-1)^2$ ，A 的 Jordan 标准形有________种可能形式，

它们是 ____.

二．解答题（第 8 题 20 分，其余每题 15 分，合计 65 分）

8．设 W_1 和 W_2 是 R^4 的两个子空间，

$$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \mid x_1+2x_2-x_4=0\}$$

$W_2=L(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,2,3)^T$.

求 W_1+W_2 及 $W_1\cap W_2$ 的基与维数.

9．求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形 J，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$.

10．令 σ 是线性空间 V 上的线性变换，且满足 $\sigma^2=\sigma$，证明

(1) $\ker\sigma=\{\xi-\sigma(\xi) \mid \xi\in V\}$；

(2) $V=\ker\sigma\oplus \mathrm{Im}\,\sigma$；

(3) 如果 τ 是 V 的一个线性变换，那么 $\ker\sigma$ 和 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 都是 τ 的不变子空间的充分必要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

11．已知欧氏空间 V 的一个标准正交基是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $\alpha_0=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$，$\forall\alpha\in V$，定义变换

$$\sigma(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0$$

其中 k 为非零常数，

(1) 证明 σ 是 V 上的线性变换；

(2) 求 σ 在标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵；

(3) 证明 σ 是正交变换的充分必要条件是 $k=-\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

班次 ________ 学号 ________ 姓名 ________

2003(春) 代数与几何 (2) 试题 (B 卷)

说明：题中 R 表示实数域； C 表示复数域.

第一部分：填充题 (48 分).

1. 设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\ g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$, 则其首 1 的最大公因式 $(f(x),g(x))=$ ____________________; 且有 $u(x)=$ ____________________, $v(x)=$ ____________________ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

2. 设 $W_1=\{\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \end{pmatrix} | a,b,c,d\in R\}$, $W_2=\{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix} | x,y,z\in R\}$, 则 $\dim_R(W_1\cap W_2)=$ __________; $\dim_R(W_1+W_2)=$ __________ ; $\dim_R W_1^{\perp}=$ __________.

3. 设 $W=L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ 是 R^3 中向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 生成的子空间。则 $W^{\perp}=$ ______________________________.

4. 在集合 $M_2(Z)$(Z 为整数集) 中定义等价关系 $\sim$: 任给 $A,\ B\in M_2(Z)$, $A\sim B\Longleftrightarrow detA\equiv detB(mod2)$. 则它把 $M_2(Z)$ 分成的等价类是 ______________ ____, 其中 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 属于 ______________ 等价类.

5. 5. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维向量空间 $(V,F,+,\cdot)$ 的一组基，线性变换 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 σ 在基 $\eta_1=3\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\eta_3=2\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $=$ ____________________; $\dim_F\mathrm{Ker}\sigma\ =$

__________; 找出 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的一组基 ______________________________.

6. 请用正交化方法将酉空间 C^3 的一组基 $\alpha_1 = ((1,0,1+i)^T, \alpha_2 = (0,1,0)^T, \alpha_3 = (i,1,1)^T$ 化为标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$____. C^3 中的内积在基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 下的表达式为 ______________________________.

7. 设 α, β 是欧氏空间 V 中两向量, $(\alpha,\alpha) = 1, (\beta,\beta) = 4, (\alpha,\beta) = 2$. 则 $\dim_R L(\alpha,\beta) =$ __________; 若向量 γ 与 α 垂直，问 γ 与 β 垂直吗？答 ____________________.

第二部分：计算，证明题 (共 52 分).

8. 设 W_1, W_2 分别是实系数方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间。证明： $W_2 = W_1^{\perp}$ 。

9. 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$ 。求 A 的若当标准形 J ，及可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP = J$ 。

10. 设 $F_n[x]$ 是数域 F 上次数小于 n 的多项式和零多项式所组成的向量空间。令映射 $\phi : F_n[x] \to F_n[x], f(x) \mapsto f(0)x$ 。问 ϕ 是否是线性变换（说明理由）? 求 $\mathrm{Ker}(\phi)$ 的一组基及维数。

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_t$; $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是欧氏空间 V 的两个线性无关组; 证明：存在 V 的正交变换 σ 使 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i, \forall i$ 当且仅当 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), \forall i, j$ 。

几何与代数（ 2 ）试题 2009 年 6 月 15 日

B 卷

系：　　　　　班：　　　　　姓名：　　　　　学号：

填空题（ **30** 分，每空 **5** 分. 将答案写在此试卷的空格中）:

1. 设 $f(x)=x^5+2x^4-x+1, g(x)=x^2-x+2$, 用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式为 (x^3+3x^2+x-5).，余式为 $(-8x+11)$.。

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-2} & -1 \\ 1 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{-1} \end{pmatrix}$, 则其埃尔米特（ **Hermite** ）共轭等于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{-2} & 9 & -1 \\ -1 & 4 & 1-\sqrt{-1} \end{pmatrix}$,

3. 设 $f(x)=x^4-x^3+x^2-4x+3, g(x)=x^2-x$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首一的最大公因子等于 $x-1$ 。

4. 用 **Schmidt** 正交化方法将 $\alpha_1=(1,2,1,0)^T, \alpha_2=(1,1,1,0)^T, \alpha_3=(0,0,1,2)^T$ 化为正交向量组

$((1,2,1,0)^T, (\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)^T, (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},2)^T$ 。

5. 函数矩阵 $A(x)=\begin{pmatrix} 3x & sinx & cosx \\ e^x+1 & 6 & -5x \\ x^{-2} & 8 & sin2x \end{pmatrix}$ 的导数为 $\begin{pmatrix} 3 & cosx & -sinx \\ e^x & 0 & -5 \\ -2x^{-3} & 0 & 2cos2x \end{pmatrix}$ 。

计算题与证明题

6. （ **10 分** ）设 F 是一个数域．求线性变换

$$\begin{array}{rcl} T: F^n & \longrightarrow & F^n \\ (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T & \mapsto & (0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T \end{array}$$

的核与像.

$KerT = \{(0,0,\cdots,0,a)^T \mid a \in F\}$，$ImT = \{(0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})^T \mid a_1, \cdots, a_{n-1} \in F\}$.

7. （ **20 分** ）设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为若尔当 **(Jordan)** 标准型.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

8. （ **14 分** ）设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的两个非零的多项式．证明集合

$$M = \{u(x)f(x) + v(x)g(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\}$$

中的次数最低的多项式是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式.

设 $h(x)$ 是 M 中次数最低的一个多项式， $d(x) = (f(x), g(x)) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)$．由带余除法，

$$d(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $degr(x) < degh(x)$．而 $r(x) \in M$，因此 $r(x) = 0$．$d(x)$ 当然整除 M 中的多项式，所以

$$h(x) = cd(x), c \in F^*$$

.

9. （ **16** 分）设 n 阶复矩阵 A 和 B 具有相同的极小多项式 $m(x)$, $degm(x) = n$. 证明 A 与 B 相似.

设 λ 是 A 一个特征值. 在 A 的 **Jordan** 标准形中，只有一个属于 λ 的 **Jordan** 块.

10.（ **10** 分）证明只有一个特征值的正规变换一定是纯量变换.

正规矩阵是可以对角化的。