清华大学本科生期末考试试卷A
《信号处理原理》

2012.01.03 08:00-10:00 一教101，104

1. (12分) 已知序列$x(n)$和$y(n)$分别如下，求它们的线卷积$s_1(n) = x(n) * y(n)$，以及在$N = 4, 6, 9$点时的圆卷积$s_2(n) = x(n) \circledast y(n)$。

$$x(n) = [2, 1, -1, 2], \quad y(n) = [1, 3, 1, 1, -1, 2, -1, 1]$$

2. (10分) 已知$x(n)$是一个长度为$2N$的实序列，其$2N$点DFT为$X(k)$。为了提高计算DFT的效率，将$x(n)$分解成两个长为N的子序列$g(n)$和$h(n)$，组成一个长为N的复序列$y(n) = g(n) + jh(n)$，设其N点DFT为$Y(k)$。如果用FFT算法求解$Y(k)$，然后基于此FFT结果来求解$X(k)$，要求在求解过程中不得使用DFT逆变换，则：

   (a) $g(n)$、$h(n)$与$x(n)$的关系如何？即应如何分解原序列成两个子序列。

   (b) $Y(k)$与$X(k)$的关系如何？即如何用复序列$y(n)$的FFT结果来求序列$x(n)$的DFT。

3. (10分) 已知序列$x(n)$的长度为N（非零偶数），它的N点DFT为$X(k)$。如果序列满足如下关系

$$x(n) = -x((n + N/2)\%N), \quad 0 \le n \le N - 1$$

   证明：$X(k)$仅在k为奇数时有非零值，且这些非零值可以只用一个$N/2$点的DFT来计算（只需增加少量的额外运算），要求给出该计算过程。

4. (10分) 已知$f(t)$是一个周期信号，设其傅里叶级数为F_n。若在满足抽样定理要求的条件下，对其进行抽样，在每个周期时间内均可以得到N个采样值。设从某个时间点开始，复制其N个连续的样本点信号值，得到一个有限长的序列$x(n)$。试求序列$x(n)$的N点DFT变换与F_n的关系。

5. (6分) 若对下列信号进行采样，求奈奎斯特间隔T_N和奈奎斯特频率f_N：

   (a) $f_1(t) = Sa(100t)$

   (b) $f_2(t) = Sa^2(100t)$

   (c) $f_3(t) = Sa(100t) + Sa^{10}(50t)$

6. (16分) 为了处理某种特殊的信号，需要设计一个专门的处理系统，其系统函数为：

$$H(z) = \frac{5.2 + 1.58z^{-1} + 1.41z^{-2} - 1.6z^{-3}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2})}$$

   (a) 画出直接I型实现的滤波器结构图。

   (b) 画出直接II型（典范型）实现的滤波器结构图。

   (c) 画出用一种并联型实现的滤波器结构图。

   (d) 前一问中所得并联系统的各个并联子系统的单位冲激响应。

7. (16分) 已知某离散信号处理系统是一个线性时不变的因果系统，它是用下面Python代码来实现的：

```
x_1 = 0
y_1 = 0
y_2 = 0
def filter(x):
    global x_1, y_1, y_2
    y = y_1 + y_2 + x_1
```

```
    x_1 = x
    y_2 = y_1
    y_1 = y
    return y
```

与上面程序等效的C++程序实现如下：

```
short filter(short x)
{
     static short x_1 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0;
     short y = y_1 + y_2 + x_1;
     x_1 = x;
     y_2 = y_1;
     y_1 = y;
     return y;
}
```

(a) 写出系统的差分方程；

(b) 求这个系统的系统函数，并指出其收敛域；

(c) 求此系统的单位冲激响应；

(d) 由于上述系统实际上是不稳定的，请你找出一个有相同系统函数的稳定的（非因果的）系统，计算其单位冲激响应。

8. (10分) 用双线性变换法设计低通IIR滤波器：-3dB处的频率为2000Hz，2500Hz处增益下降了25dB，采样率为16000Hz。请计算合适的滤波器阶数。

9. (10分) 设信号采样频率为16000Hz，用窗函数法设计一个FIR高通数字滤波器，要求：通带边缘2000Hz，过渡带宽度为500Hz，阻带衰减为40dB。

下面是设计滤波器时可能会用到的各种公式或信息：

- 矩形窗: $w(n) = 1$, 窗长: $0.91 f_s/T.W.$, 阻带衰减21dB
- 汉宁窗: $0.5 + 0.5\cos(2\pi n/(N-1))$, 窗长: $3.32 f_s/T.W.$, 阻带衰减44dB
- 哈明窗: $0.54 + 0.46\cos(2\pi n/(N-1))$, 窗长: $3.44 f_s/T.W.$, 阻带衰减55dB
- IIR滤波器阻带衰减值$= -20\log\delta_s$
- IIR滤波器的双线性变换设计法中，模拟频率Ω与数字频率ω之间的预扭曲方程为$\Omega = 2f_s\tan(\omega/2)$
- IIR滤波器阶数计算公式

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\delta_s^2} - 1\right)}{2\log\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}, \quad n \in Z$$

其中，Ω_s为阻带边缘模拟频率，Ω_p为通带边缘模拟频率