

习题 4.1

考虑 10 阶 Hilbert 矩阵作为系数阵的方程组 $Ax=b$ ，其中 $b=[1,1/2,\dots,1/10]^T$ 。取初始解 $x^{(0)}=0$ ，编写程序用 Jacobi 与 SOR 迭代法求解该方程组，将 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{\infty}<10^{-4}$ 作为迭代终止的判据。

(1)分别用 Jacobi 与 SOR($w=1.25$)迭代法求解，观察收敛情况；

(2)改变 w 的值，试验 SOR 迭代法的效果，考查解的准确度。

分析：

因为 A 是 Hilbert 矩阵，是实对称阵，所以 A 的谱半径 $\rho(A)=\|A\|_2$ ，求得 $\|A\|_2>1$ ，所以 Jacobi 迭代法必然不收敛。第二问中我使用误差 $\Delta x=\|x'-x\|_{\infty}$ 来考查解的准确度，其中 x' 为求得的近似解， x 为准确解，本题中，易知准确解 $x=[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]^T$ 。

实验结果：

(1)Jacobi 迭代法不收敛；SOR 迭代法($w=1.25$)迭代 186 次后收敛，得到的近似解 $x'=[1.0020,-0.0216,0.0515,-0.0284,-0.0063,-0.0062,-0.0005,0.0018,0.0036,0.0046]^T$ ， $\Delta x=0.0515$ 。

(2)选取不同的 w 值，得到的误差如下：

w	0.1	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
Δx	0.109	0.0369	0.0217	0	0.0239	0.0427	0.06	0.07	0.08

实验结论：

Hilbert 矩阵的 Jacobi 迭代法必然不收敛，而 SOR 迭代法必然收敛。

SOR 迭代法中，选取不同的 w 值，得到的解与准确解的误差各不相同，总体趋势为： w 值越接近 1，则误差越小；越远离 1，则误差越大。