数值分析
第二次习题课

闵旭

Department of Computer Science and Technology

minxueric@gmail.com

May 18, 2015

第四章习题 3

Problem

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

- 考察 *Jacobi*, *G-S* 迭代法的收敛性；
- 初始值 $[0,0,0]^\top$，用 *Jacobi* 和 *G-S* 迭代法求解，当 $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-2}$ 时终止迭代。

第四章习题 3

Solution

- 根据定理 4.11，矩阵 A 严格对角占优，故均收敛。
- Jacobi 迭代：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

迭代 11 次 $[-4.00024207, 3.00312926, 1.99986178]$。

第四章习题 3

- G-S 迭代：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

迭代 6 次 $[-3.99931398, 3.00000274, 1.99986362]$。 □

第四章习题 4

Problem

用 *SOR* 方法解方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

$w = 0.9$，$\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^\top$，当 $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-2}$ 时终止迭代。

第四章习题 4

Solution

写出迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-w)x_1^{(k)} + w(-\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5}) \\ x_2^{(k+1)} = (1-w)x_2^{(k)} + w(\dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5) \\ x_3^{(k+1)} = (1-w)x_3^{(k)} + w(-\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}) \end{cases}$$

迭代 *6* 次

$[-3.99956852, 3.00038707, 1.99996303]$ □

第四章习题 6

Problem

考虑

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. α 为何值时，$\mathbf{A}$ 正定？
2. α 为何值时，*Jacobi* 迭代收敛？
3. α 为何值时，*G-S* 迭代收敛？

第四章习题 6

Solution

1. $\mathbf{A}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 顺序主子式均大于 *0*。一阶二阶显然，三阶主子式为 $1-\alpha^2>0$。故 $|\alpha|<1$。
2. $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，故利用定理 *4.8*，*Jacobi* 收敛 $\Leftrightarrow \ \mathbf{A}, 2\mathbf{D}-\mathbf{A}$ 正定 $\Leftrightarrow \ -|\alpha|<1$。
3. 利用定理 *4.9*，*G-S* 迭代收敛 $\Leftarrow \|\mathbf{B}_J\|_\infty < 1$ *or* $\|\mathbf{B}_J\|_1<1$

$$\mathbf{B}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\|\mathbf{B}_J\|_\infty = \|\mathbf{B}_J\|_1 = |\alpha| < 1$。 $\square$

Note: 这里只用了充分性判据。
Note: 也可以根据严格对角占优判据，也是充分条件（定理 4.11）。

第四章习题 7

Problem

证明定理 *4.8* 中的必要性部分。即若 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵，且 $a_{ii} > 0$，则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的 *Jacobi* 迭代法收敛 $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ 和 $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ 正定。

Solution

与定理 *4.8* 类似，讲 *Jacobi* 迭代法的迭代矩阵写为如下形式：

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1/2}(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1/2})\mathbf{D}^{1/2};$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1/2}(\mathbf{D}^{-1/2}(2\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{D}^{-1/2} - \mathbf{I})\mathbf{D}^{1/2}.$$

Jacobi 迭代法收敛 $\Rightarrow$ $\mathbf{B}$ 的特征值 $\lambda_i < 1$
$\Rightarrow$（矩阵相似特征值相同）$\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1/2}$ 和
$\mathbf{D}^{-1/2}(2\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{D}^{-1/2} - \mathbf{I}$ 特征值 < 1
$\Rightarrow$ $\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1/2}$ 和 $\mathbf{D}^{-1/2}(2\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{D}^{-1/2}$ 特征值 > 0
$\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ 和 $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ 正定。 $\square$

第四章习题 8

Problem

雅克比松弛法（*JOR* 方法）：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + w\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

试证明：当求解 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的雅克比方法收敛时且 $0 < w \leq 1$ 时，*JOR* 方法也收敛。

第四章习题 8

Solution

雅克比方法 $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D})$

JOR 方法

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_J &= \mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D} + \mathbf{D}) \\ &= (1-w)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D}) \\ &= (1-w)\mathbf{I} + w(-\mathbf{B})\end{aligned}$$

因此 $\mathbf{B}_J$ 的谱半径是 $\mathbf{I}$ 和 $-\mathbf{B}$ 的加权平均。故当 *Jacobi* 方法收敛即 $\rho(\mathbf{B}) < 1$，且 $0 < w \leq 1$ 时，有 $\rho(\mathbf{B}_j) < 1$，故 *JOR* 方法也收敛。 $\square$

第四章习题 10

Problem

矩阵 $\mathbf{A}$ 为实对称正定阵，$\mathbf{x}^*$ 为方程 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解，试证明：$\mathbf{x}^*$ 为 $\varphi(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}^\top\mathbf{x}$ 的唯一最小值点，即 $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，$\mathbf{x}\neq\mathbf{x}^*$，$\varphi(\mathbf{x})>\varphi(\mathbf{x}^*)$

Solution

$\forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$，不等式成立：

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y})^\top \mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) - \mathbf{b}^\top(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{*\top}\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{*\top}\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}) - \mathbf{b}^\top\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}^{*\top}\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^\top\mathbf{x}^* + \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^\top\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top\mathbf{A}\mathbf{y}) - \mathbf{b}^\top\mathbf{y} \\
&= \varphi(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\mathbf{y}^\top\mathbf{A}\mathbf{y} \\
&> \varphi(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}
$$

其中不等号是因为 $\mathbf{A}$ 为实对称正定矩阵。 $\square$

第五章习题 2

Problem

用圆盘定理估计矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 & 0.6 \\ 1 & -1.2 & -0.8 \\ 0 & -0.6 & 3 \end{pmatrix}$ 的 $\rho(\mathbf{A})$ 和 $cond(\mathbf{A})_2$ 的范围。

Solution

根据定理 *5.10(圆盘定理)*，$\mathbf{A}$ 的特征值比属于 $\mathbf{A}$ 的格什戈林圆盘之中，即 $[0.5-1.2, 0.5+1.2]$，$[-1.2-1.8, -1.2+1.8]$，$[3-0.6, 3+0.6]$ 中。即

$$D_1 = [-0.7, 1.7],\ D_2 = [-3.0, 0.6],\ D_3 = [2.4, 3.6]$$

D_1 与 D_2 重合，D_3 与其他两圆盘分离，故 $\rho(\mathbf{A}) = \lambda_3 \in [2.4, 3.6]$。

第五章习题 2

而对于矩阵 $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.5 & -0.5 \\ -1.5 & 2.16 & -1.2 \\ -0.5 & -1.2 & 10 \end{bmatrix}.$$

其三个圆盘为

$$D_1 = [-0.75, 3.25], D_2 = [-0.54, 4.86], D_3 = [8.3, 11.7].$$

注意 D_3 与其他两圆盘分离，故 $\lambda_{\mathsf{max}} \in D_3$，且 $\lambda_{\mathsf{min}} \in D_1 \cup D_2$，因此

$$\mathsf{cond}(\mathbf{A})_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\mathsf{max}}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})}{\lambda_{\mathsf{min}}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})}} \geq \sqrt{\frac{8.3}{4.86}}.$$

□

Note: 注意圆盘连通的情况。

第五章习题 3

Problem

确定矩阵 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值的界。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}.$$

第五章习题 3

Solution

$\mathbf{A}$ 为实对称矩阵，特征值为实数。根据定理 *5.10(*圆盘定理*)*,

$$|\lambda_i - a_{ii}| \leq r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$|\lambda_i - 4| \leq \begin{cases} 1, & i = 1, n \\ 2, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

故 $\mathbf{A}$ 的特征值的界为

$$2 \leq \lambda \leq 6.$$

而 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值为 $\mu_i = \lambda_i^{-1}$，故其特征值的界为

$$\frac{1}{6} \leq \mu \leq \frac{1}{2}.$$

□

第五章习题 4

Problem

用幂法计算矩阵的主特征值及对应的特征向量：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

当特征值的小数点后三位的数值稳定时终止迭代。

Solution

利用使用幂法算法 *5.1* 求解该问题。令初始向量为 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0 = [1, 0, 0]^\top$，经过 *8* 次迭代后，最大特征值满足精度要求。此时

$$\sigma_8 = 9.605479;$$

$$u_8 = [1, 0.6055468, -0.39444782]^\top.$$

□

第五章习题 6

Problem

利用反幂法求矩阵

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的最接近于 7 的特征值及对应的特征向量。

第五章习题 6

Solution

转化为求解 $\mathbf{A}-7\mathbf{I}$ 的最小特征值及其对应特征向量的问题。利用反幂法算法 5.2 求解该问题，令初始化向量为 $\mathbf{v}_0=\mathbf{u}_0=[1,0,0]^\top$。经过 4 次迭代后，得到

$$\sigma_4=0.287971,$$

$$\mathbf{u}_4=[1,0.52289147,0.2421883]^\top.$$

故所求特征值及对应特征向量为：

$$\lambda=7.287971;$$

$$\mathbf{u}=[1,0.52289147,0.2421883]^\top.$$

$\square$

第五章习题 7

Problem

试用 *Householder* 变换对矩阵 $\mathbf{A}$ 做 *QR* 分解，求出矩阵 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution

根据算法 *5.3*，对矩阵 $\mathbf{A}$ 做 *QR* 分解得

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.3333 & 0.6667 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0.3333 & 0.6667 \\ -0.6667 & -0.6667 & -0.3333 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -3.0000 & 3.0000 & -3.0000 \\ -0.0000 & 3.0000 & -3.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -3.0000 \end{bmatrix}$$

第五章习题 9

Problem

利用一系列 *Givens* 旋转变换将矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

化为上三角矩阵，将结果与例 *5.11* 的结果作比较。

第五章习题 9

Solution

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

与例 *5.11* 结果相差一个符号。 □

Note: 计算过程较繁琐。

第五章习题 11

Problem

用 *Givens* 旋转变换对上 *Hessenberg* 矩阵 $\mathbf{A}_1$ 做 *QR* 分解，然后将得到的矩阵 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 颠倒次序相乘得到矩阵 $\mathbf{A}_2$，证明 $\mathbf{A}_2$ 仍然是上 *Hessenberg* 矩阵。

第五章习题 11

Solution

首先对原 *Hessenberg* 矩阵做 *GivensQR* 分解：

$$\mathbf{G}_{n-1}\cdots\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\mathbf{A}_1=\mathbf{R},\ \ \mathbf{Q}=\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\cdots\mathbf{G}_{n-1}^\top$$

然后求 $\mathbf{A}_2$：

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{R}\mathbf{Q}=\mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\cdots\mathbf{G}_{n-1}^\top$$

首先观察 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{G}_1^\top$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} {\color{red}*} & {\color{red}*} & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{red}*} & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & 0 & * \end{bmatrix},\ \ \mathbf{G}_1^\top=\begin{bmatrix} {\color{red}\hat{\mathbf{G}}_1^\top} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-2} \end{bmatrix}$$

Givens 矩阵 $\mathbf{G}_1^\top$ 只对 $\mathbf{R}$ 的前两列做变换，并且变换结果为

第五章习题 11

$$\mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

类似地，

$$\mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\mathbf{G}_3^\top = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

故最终 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}\mathbf{G}_1^\top\mathbf{G}_2^\top\cdots\mathbf{G}_{n-1}^\top$ 是一个 Hessenberg 矩阵。 □

Note: https://www.zib.de/groetschel/Project-Quito/cursos/curso_2005_2/qr_iteration.pdf

第五章习题 12

Problem

利用 *Householder* 变换将

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

正交相似化为对称三对角阵。

第五章习题 12

Solution

记 $\mathbf{x}=[3,4]^\top$，则 $\sigma=\|\mathbf{x}\|_2=5$，$\mathbf{u}=\mathbf{x}+\sigma\mathbf{e}=[8,4]^\top$，
$\beta=\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_2^2=40$，

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{I}-\beta^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^\top=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{H}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

利用 $\mathbf{H}$ 对 $\mathbf{A}$ 做正交相似化可得

$$\mathbf{H}^\top\mathbf{A}\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\ -5 & \frac{73}{25} & \frac{14}{25}\\ 0 & \frac{14}{25} & -\frac{23}{25}\end{bmatrix}$$

$\square$

第六章习题 3

Problem

对于下列线性空间 $C[0,1]$ 中的函数 $f(x)$，计算 $\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$：

(1) $f(x) = (x-1)^3$; *(2)* $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

第六章习题 3

Problem

对于下列线性空间 $C[0,1]$ 中的函数 $f(x)$，计算 $\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$：

(1) $f(x)=(x-1)^3$; *(2)* $f(x)=|x-\frac{1}{2}|$.

Solution

(1)

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|(x-1)^3| = 1$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (x-1)^3\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 (x-1)^6\,dx\Big)^{1/2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2)

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|x-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,dx\Big)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

□

第六章习题 4

Problem

对 $f(x), g(x) \in C^2[a, b]$，定义

(1)$\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$, (2) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx + f(a)g(a)$。

问它们是否构成内积?

第六章习题 4

Problem

对 $f(x), g(x) \in C^2[a,b]$，定义

(1)$\langle f, g\rangle = \int_a^b f''(x)g''(x)\,dx$, (2) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx + f(a)g(a)$。

问它们是否构成内积?

Solution

要验证内积，即检验 4 条性质。容易验证可交换性、线性性 1、线性性 2 两者均满足，故只需验证非负性。

(1) 当 f, g 为常函数时，有 $\langle f, g\rangle = 0$。故不构成内积。

(2)$\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0, f(a) = 0$，故当且仅当 $f(x) = 0$ 时，内积为 0。故构成内积。 $\square$

第六章习题 6

Problem

在子空间 $\Phi = span\{1, t\}$ 中，求下列函数 $f(t)$ 的最佳平方逼近多项式：

(1) $f(t) = e^t, t \in [0, 1]$; (2)$f(t) = \cos(\pi t), t \in [0, 1]$

第六章习题 6

Solution

(1) 设为 $S(t) = a_0 + a_1 t$

$$(1,1)=1,\quad (1,t)=\int_0^1 t dt=\frac{1}{2},\quad (1,t)=\int_0^1 t^2 dt=\frac{1}{3}$$

$$(f,1)=\int_0^1 e^t dt=e-1,\quad (f,t)=\int_0^1 e^t t dt=1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0 = 4e-10,\quad a_1 = 18-6e$$

故所求最佳平方逼近多项式为：$S(t) = 4e - 10 + (18-6e)t$

第六章习题 6

(2) 设为 $S(t) = a_0 + a_1 t$

$$(1,1) = 1, \quad (1,t) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad (1,t) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$(f,1) = \int_0^1 \cos(\pi t) dt = 0, \quad (f,t) = \int_0^1 t\cos(\pi t) dt = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0 = \frac{12}{\pi^2}, \quad a_1 = -\frac{24}{\pi^2}$$

故所求最佳平方逼近多项式为：$S(t) = \frac{12}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^2} t$ $\square$

第六章习题 8

Problem

设 $f(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\in[-1,1]$，利用勒让德多项式求 $f(t)$ 的三次最佳逼近多项式。

Solution

勒让德多项式：

$$P_{(0)}(t)=1; P_{(1)}(t)=t; P_{(2)}(t)=\frac{3t^2-1}{2}; P_{(3)}=\frac{5t^3-3t}{2};$$

由于勒让德多项式是正交多项式函数，故直接求解得系数：

$$a_0=a_2=0; a_1=\frac{\int_{-1}^{1}\sin(\frac{\pi}{2}t)t\,dt}{\int_{-1}^{1}t^2\,dt}=\frac{12}{\pi^2};$$

$$a_3=\frac{\int_{-1}^{1}\sin(\frac{\pi}{2}t)\frac{5t^3-3t}{2}\,dt}{\int_{-1}^{1}\left(\frac{5t^3-3t}{2}\right)^2dt}=\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

故最佳三次逼近多项式为

$$
\begin{aligned}
S_3(t)^* &= a_1 P_{(1)}(t) + a_3 P_{(3)}(t) \\
&= \frac{12}{\pi^2} t + \frac{168(\pi^2 - 10)}{\pi^4} \frac{5t^3 - 3t}{2} \\
&\approx 1.553191t - 0.562228t^3
\end{aligned}
$$

$\square$

第六章习题 9

Problem

已知实验数据如下：

t_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y = a + bt^2$ 的经验公式，并计算均方误差。

第六章习题 9

Solution

基函数为 $\Phi = \{1, t^2\}$，故求解法方程 $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}$。其中 $\mathbf{G}$ 中元素为

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \sum_{i=1}^{5} 1 = 5;$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 5327 = \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle;$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{5} t_i^4 = 7277699;$$

$\mathbf{b}$ 中元素为

$$\langle \varphi_0, y \rangle = \sum_{i=1}^{5} y_i = 271.4, \langle \varphi_1, y \rangle = \sum_{i=1}^{5} t_i^2 y_i = 369321.5,$$

第六章习题 9

故求解

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$$

得

$$x_0 \approx 0.9726046; \quad x_1 \approx 0.0500351$$

故所求经验公式为

$$y = 0.9726046 + 0.0500351t^2.$$

均方误差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}[y(t_i) - y_i]^2} \approx 0.0548.$$

□ Note: ：均方误差不是逼近误差 $\|\delta\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i\langle\varphi_i, f\rangle}$

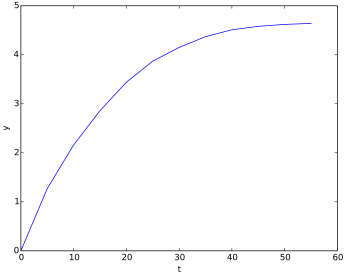
第六章习题 10

Problem

在某化学反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度 $y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求函数表达式 $y = f(t)$。



第六章习题 10

Solution

设 $f(t) = a\exp\left(-\dfrac{b}{t}\right), (t \geq 0; a, b > 0)$，$(0,0)$ 点自动满足。取对数化为线性模型

$$\ln y = \ln a - \frac{b}{t}.$$

故 $\Phi = \{1, -\dfrac{1}{t}\}$。与上题类似，求解法方程：

$$\begin{bmatrix} 11 & -0.60339755 \\ -0.60339755 & 0.062321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -87.674095 \\ 5.032489 \end{bmatrix}$$

$$\ln a = -7.558772, b = 7.496347.$$

故所求模型为

$$y = f(t) = 5.215153 \times 10^{-4} \exp\left(-\frac{7.496347}{t}\right).$$

第六章习题 11

Problem

将例 6.5 的问题转化为标准的线性最小二乘问题式 (6.30)，然后使用算法 6.2 求解。

Solution

按照权值扩展为 8 个样本点

t_i	1	1	2	3	3	3	4	5
B_i	4	4	4.5	6	6	6	8	8.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^\top$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 22 \\ 22 & 74 \end{bmatrix}$$

第六章习题 11

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^\top \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 47 \\ 145.5 \end{bmatrix}$$

对矩阵 $\mathbf{G}$ 进行 Cholesky 分解 $\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2.8284 & 0 \\ 7.7782 & 3.6742 \end{bmatrix}$$

求解方程 $\mathbf{L}\mathbf{L}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$，得到

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.5648 \\ 1.2037 \end{bmatrix}$$

故所求函数为

$$f(t) = 2.5648 + 1.2037t.$$

$\square$

第六章习题 12

Problem

已知 $\cos(x), 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ 的函数表，其中自变量取值的步长 $h = 1' = (1/60)^\circ$，函数值具有 5 位有效数字，求利用该函数表以及线性插值技术计算 $\cos(x)$ 的总误差界（包括截断误差，舍入误差）。

第六章习题 12

Solution

存在 $x_0, x_1 \in [0°, 90°], x_1 - x_0 = 1'$，$s.t,\ x \in [x_0, x_1]$。利用函数值插值的插值函数 $L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cos x_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cos x_1$；利用函数值近似值插值的插值函数 $L_1^*(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cos^* x_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cos^* x_1$.

$$
\begin{aligned}
|\cos x - L_1^*(x)| &= |\cos x - L_1(x) + L_1(x) - L_1^*(x)| \\
&\leq |\cos x - L_1(x)| + |L_1(x) - L_1^*(x)|
\end{aligned}
$$

则由定理 *6.7*，截断误差

$$
\begin{aligned}
|\cos x - L_1(x)| = |R_1(x)| &= |\frac{\cos''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)| \\
&= \frac{1}{2}|\cos\xi||x - x_0||x - x_1| \\
&\leq \frac{1}{2}(\frac{h}{2})^2 \approx 1.0577 \times 10^{-8}
\end{aligned}
$$

第六章习题 12

舍入误差：

$$
\begin{aligned}
|L_1(x) - L_1^*(x)| &= |(\cos x_0 - \cos^* x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + (\cos x_1 - \cos^* x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}| \\
&\leq |e(\cos^* x_0)|\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + |e(\cos^* x_1)|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&\leq \max\{|e(\cos^* x_0)|, |e(\cos^* x_1)|\} \cdot \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \\
&= \max\{|e(\cos^* x_0)|, |e(\cos^* x_1)|\} \\
&\leq 0.5 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

故总误差界为

$$
|\cos x - L_1^*(x)| \leq 1.0577 \times 10^{-8} + 0.5 \times 10^{-5} = 0.50106 \times 10^{-5}.
$$

$\square$

第六章习题 13

Problem

设 $x_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为互异节点，对应的拉格朗日插值多项式为 $L_n(x)$，$l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 为拉格朗日插值基函数。求证：

1. $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad (k=0,1,\cdots,n);$
2. $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad (k=1,2,\cdots,n).$

第六章习题 13

Solution

(1) 令 $f(x) = x^k, (k = 0, 1, \cdots, n)$，则其 n 次插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)$$

插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1} \equiv 0$$

故

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

第六章习题 13

(2) 由 (1) 知 $\forall k = 1, 2, \cdots, n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} x_j^i(-x)^{k-i}\right] l_j(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-x)^{k-i}\sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{i}(-x)^{k-i}x^i \\
&= (x - x)^k \equiv 0
\end{aligned}
$$

$\square$