概率论与数理统计第二次习题课题目

题 1 求区间 $[a,b]$ 上取值的随机变量可能达到的最大方差？何时达到？

题 2 设 X 为一连续型随机变量，求实数 c，使得 $E|X-c|$ 达到最小.

题 3 设随机变量 X,Y 的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1+xy(x^2-y^2)}{4},\qquad |x|\le 1,|y|\le 1.$$

求 $X+Y$ 的概率分布函数 F_{X+Y}。

题 4 设随机变量 X，Y 独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，(X,Y) 的联合密度函数记为 $f(x,y)$；

1. 证明；函数 $g(x,y)=\begin{cases} f(x,y)+\dfrac{xy}{100}, & when\ x^2+y^2\le 1 \\ f(x,y), & when\ x^2+y^2>1 \end{cases}$，是二维概率密度函数。
2. 若随机变量 (U,V) 的密度函数为 $g(x,y)$，证明：U，V 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，但 (U,V) 不服从二维正态分布。

注：本例说明各分量为正态推不出联合分布为正态。

题 5 投掷一枚公平的硬币，记正面为 H、反面为 T，

1. 直至首次出现HH时停止，请计算投掷次数的期望与方差；
2. 如果停止准则变为首次出现HT，此时投掷次数的期望和方差分别是多少；
3. 假设甲、乙进行一场比赛，投掷一个硬币直至首次出现HH或HT停止。如果以HH结束，则甲胜，TH结束为乙胜，请问甲、乙的获胜概率; 若改为HH先出现甲胜，HT先出现乙胜，结果怎样。

题 6 设随机变量$X\sim N(0,1)$, 随机变量W服从分布律$\begin{pmatrix} W & 1 & -1 \\ P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$X$与$W$相互独立。令$Y=XW$。
证明: (1). $Y\sim N(0,1)$, (2). $Cov(X,Y)=0$, (3). X与Y不独立。
（这个例子表明两个正态分布随机变量相互不相关并不能推出这两个随机变量独立。只有当两个随机变量是二元正态分布时，不相关才与独立等价。）

题 7 设随机变量$X\sim N(0,1)$, 随机变量

$$Y=\begin{cases} X, & 若|X|\ge c \\ -X, & 若|X|<c \end{cases}.$$

(1). 求常数c使得X与Y不相关，
(2). 证明: $Y\sim N(0,1)$,
(3). 说明对任意$c>0$, 如上定义的随机变量X与Y不独立。