线性代数与几何（下）

第九章课后习题答案

计三团

感谢计三年级同学无私奉献！

科目：线代	章节：9	做题人：子也

解：(1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)$ $\therefore \lambda_1=2\ \ \lambda_2=-3$

$(\lambda_1 I-A)\xi_1=0 \Rightarrow \xi_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $(\lambda_2 I-A)\xi_2=0 \Rightarrow \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}2 & \\ & -3\end{pmatrix}$

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$ $\lambda=1$

$(\lambda I-A)\xi=0$ $\dim(\lambda I-A)=1$ $\therefore$ 不可对角化

(3) $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$ $\lambda_1=0\ \ \lambda_2=2\ \ \lambda_3=3$

$(\lambda_1 I-A)\xi_1=\theta \Rightarrow \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ 同理 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

(4) $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$ $\lambda_1=1\ \ \lambda_2=-1\ \ \lambda_3=2$

$(\lambda_i I-A)\xi_i=\theta \Rightarrow \xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}13\\2\\3\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 13\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

(5) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-3 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^3$ $\lambda=3$ $c=3$

$\dim(\lambda I-A)=2$ $\therefore$ 不可对角化

科目：线性代数	章节：第九章	做题人：[illegible]

1. 16, $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 1 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

对于 $\lambda=1$ (2重)

$\lambda I-A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -3\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(\lambda I-A)=2$. 解空间为1维. 即 $d_i<C_i$. 不可对角化

17, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

对于 $\lambda=1$ (2重)

$\lambda I-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(\lambda I-A)=2$. 解空间为1维 即 $d_i<C_i$. 不可对角化

18, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -2 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)$

有三个互不相同特征值. 可对角化

$\lambda=1$. $\lambda I-A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_1=(1,-6,4)^T$

$\lambda=-1$ $\lambda I-A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -3\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_2=(3,0,-2)^T$

$\lambda=4$. $\lambda I-A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -3\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_3=(1,0,1)^T$

故. $P=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -6 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$. $D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 4\end{pmatrix}$

科目：线性代数	章节：第九章	做题人：[illegible]

(9) $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$

可对角化.

$\lambda=1$ $\lambda E-A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\xi_1=(1,-1)^T$

$\lambda=2$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\xi_2=(1,-2)^T$

$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$

(10) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$

可对角化.

$\lambda=0$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\xi_1=(1,0,-3)^T$

$\lambda=2$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\xi_2=(2,1,0)^T$

$\lambda=3$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\xi_3=(1,0,0)^T$

$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

科目：线性代数	章节：9.	做题人：楠本航

2.证：由于A有n个不同的特征值.

故A有n个~~不同的~~线性无关的特征向量

故A可以对角化，得证.

5.证：$(A+3I)(A-I)=0$

$m_A(x)=(x+3)(x-1)=0$. 无重根.

设 $f(x)=(x+3)^{a_1}\cdot(x-1)^{a_2}$

则 $A\sim\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}-3 & & \\ & \ddots & \\ & & -3\end{matrix}}_{a_1} & \\ & \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{a_2}\end{bmatrix}$

科目：线性代数	章节：第九章	做题人：游宇铭

3. 由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+5)(\lambda-5)=0$ 得特征值为 $1,-5,5$ 恰有3个相异特征值，可对角化.

$\lambda=1$ 时 $(I-A)x=\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 0 & 4 & -4\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}x=0$ 得 $x=(1,0,0)^T$.

$\lambda=-5$ 时 $(-5I-A)x=\begin{pmatrix}-6 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & -4 & -8\end{pmatrix}x=0$ 得 $x=(1,-2,1)^T$.

$\lambda=5$ 时 $(5I-A)x=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -2\\ 0 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}x=0$ 得 $x=(2,1,2)^T$.

令 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

$\therefore A^m=(P\cdot diag(1,-5,5)P^{-1})^m=P\cdot\begin{pmatrix}1 & & \\ & (-5)^m & \\ & & 5^m\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{5}(-5)^m+\frac{2}{5}5^m & -1+\frac{(-5)^m}{5}+\frac{4\cdot5^m}{5}\\ 0 & \frac{4}{5}(-5)^m+\frac{5^m}{5} & -\frac{2}{5}\cdot(-5)^m+\frac{2\cdot5^m}{5}\\ 0 & -\frac{2}{5}(-5)^m+\frac{2}{5}\cdot5^m & \frac{(-5)^m}{5}+\frac{4\cdot5^m}{5}\end{pmatrix}$.

4. (1) 设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 有 $\begin{cases}b_1=k_1-k_2+k_3\\ b_2=-k_1+k_2+k_3\\ b_3=k_2+k_3\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k_1=b_3-b_2\\ k_2=b_3-\frac{b_1+b_2}{2}\\ k_3=\frac{b_1+b_2}{2}\end{cases}$.

$\therefore \beta=(b_3-b_2)\alpha_1+(b_3-\frac{b_1+b_2}{2})\alpha_2+\frac{b_1+b_2}{2}\alpha_3$.

(2) 令 $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

$\therefore A^m\beta=(P\,diag(1,2,3)P^{-1})^m\beta$

$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2^m & \\ & & 3^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\beta$.

$=\begin{bmatrix}2^{m-1}+\frac{3^m}{2} & -1+2^{m-1}+\frac{3^m}{2} & 1-2^m\\ -2^{m-1}+\frac{3^m}{2} & 1-2^{m-1}+\frac{3^m}{2} & -1+2^m\\ -2^{m-1}+\frac{3^m}{2} & -2^{m-1}+\frac{3^m}{2} & 2^m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$.

科目：线性代数	章节：习题九	做题人：刘政宁

6. (1) 由已知，A的极小多项式 $m_A(x) \mid (x-1)x$.

∴ $m_A(x)$ 不存在重根

∴ A可对角化，特征值为0或1.

∴ ∃正交阵Q, s.t.

$$Q^{-1}AQ = diag(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

以上，证毕.

(2). $A = Q\,diag(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)Q^{-1}$

$A-2I = Q[diag(1,\cdots,1,0,\cdots,0) - 2I]Q^{-1}$

$det(A-2I) = |Q||diag(-1,\cdots,-1,-2,\cdots,-2)||Q^{-1}|$

$= (-1)^r(-2)^{n-r}$

$= (-1)^n 2^{n-r}$

7. 设x为特征值为λ时的特征向量，则

$$Ax = \lambda x$$

$\Rightarrow \bar{x}^T Ax = \bar{x}^T \lambda x = \lambda \bar{x}^T x$ ①

取转置 $\Rightarrow (\bar{x}^T A x)^T = x^T A^T \bar{x} = \lambda x^T \bar{x}$

$\Rightarrow -x^T A\bar{x} = \lambda x^T \bar{x}$

取共轭 $\Rightarrow -\bar{x}^T A x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x$ ②

① + ② $(\lambda + \bar{\lambda})\bar{x}^T x = 0$

∵ $\bar{x}^T x = \sum \bar{x}_i x_i > 0$

∴ λ为纯虚数或0.

科目：线性代数	章节：9	做题人：黄予 杨晓成

9. 解：∵ A 为实对称阵

∴ A 可对角化

∴ A 有3个线性无关的特征向量

设 X_1、X_2 是属于特征值1的特征向量，$X_3=(1,1,-1)^T$ 是属于 -2 的

则 $X_1 \perp X_3$、$X_2 \perp X_3$

解方程 $y_1+y_2-y_3=0$ 得

基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

∴ $X_1, X_3 \in L\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

∴ $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 为属于1的线性无关的特征向量

令 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，

$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

∵ $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,1,-2)$

∴ $A=P\,\mathrm{diag}(1,1,-2)\,P^{-1}$

$=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

10(1) $B^k=a(a^Ta)^{k-1}a^T$

$=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{k-1}B$

∴ $t=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{k-1}$

(2) 在问(1)中，取 $k=2$，

则有 $B\cdot B=t\cdot B$

B 中任一列向量都是属于特征值 t 的特征向量

另外，考虑

$B=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}$

进行列初等变换后

$r(B)=r\left(\begin{bmatrix}a_1&0&\cdots&0\\a_2&\vdots&&\vdots\\\vdots&&&\\a_n&0&\cdots&0\end{bmatrix}\right)=1$

$|B|=0$

∴ 属于特征值0的特征向量有 $n-1$ 个，分别取

$\varepsilon_1=(-a_2,a_1,0,\cdots,0)^T$

$\varepsilon_2=(0,-a_3,a_2,0,\cdots,0)^T$

$\cdots$

$\varepsilon_{n-1}=(0,\cdots,0,-a_n,a_{n-1})$

属于特征值 t 的向量取 $\varepsilon_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

$P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&\sum_{i=1}^n a_i^2\end{pmatrix}$

科目：线代	章节：第9章	做题人：苗逸中

11. $C=\alpha\beta^T$

$|\lambda I_n - C| = 0$

若 $\lambda \neq 0$，则有 $\frac{1}{\lambda^n}\left|I_n - \frac{\alpha\beta^T}{\lambda}\right| = 0$

$\frac{1}{\lambda^n}\left|1 - \frac{\beta^T\alpha}{\lambda}\right| = 0$

由 α, β 正交得 $\beta^T\alpha = 0$

即 $\frac{1}{\lambda^n} = 0$ 无解

$\therefore C$ 的所有特征值为 0.

陈禹弘.

12. 证明：设 A 的特征值为 λ.

则 $A^k = 0 \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

即幂零矩阵的特征值为零.

13. 证明：(i) $AB=BA$

$\Rightarrow \forall A$ 的特征向量 x 及其对应的特征值 λ.

都有：$ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx$

$\Rightarrow (A-\lambda I)Bx = 0$.

由 A 有 n 个相异特征值知：$n - r(A-\lambda I) = 1 \Rightarrow Bx = \mu x$.

即 x 也是 B 的特征向量.

(ii) A 的特征向量都是 B 的特征向量.

$\Rightarrow \forall A$ 的特征向量 x $(Ax=\lambda x, Bx=\mu x)$：

$(AB-BA)x = (\mu Ax - \lambda Bx) = (\mu\lambda - \lambda\mu)x = 0$.

$\Rightarrow n - r(AB-BA) = n \Rightarrow AB=BA$.

科目：线性代数	章节：九	做题人：施韶韵 姚烨蓉

14、证明：设若 $x_1, x_2 \cdots x_s$ 线性相关

即 $\exists k_1 \cdots k_s$ 不全为0 使

$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots k_s x_s = \theta$

记 $N = A - \lambda I$，则 $N x_1 = 0$

两边同乘 N^{s-1} 有

$k_s x_1 = \theta \Rightarrow k_s = 0$

两边同乘 N^{s-2} 有

$k_{s-1} x_1 = \theta \Rightarrow k_{s-1} = 0$

...

依次类推 有 $k_s \cdots k_1$ 全为0 矛盾

$\therefore x_1 \cdots x_s$ 线性无关

15.

(1) $\forall x \in (\alpha+W)+(\beta+W)$

$x = \alpha + t_1 + \beta + t_2 \quad t_1, t_2 \in W$

则 $x = \beta + t_2 + \alpha + t_1$

$\therefore x \in (\beta+W)+(\alpha+W)$

$\therefore (\alpha+W)+(\beta+W) \subseteq (\beta+W)+(\alpha+W)$

同理可得 $(\alpha+W)+(\beta+W) \supseteq (\beta+W)+(\alpha+W)$

$\therefore (\alpha+W)+(\beta+W) = (\alpha+W)+(\beta+W)$.

(2) $\forall x \in (k+l)(\alpha+W)$

令 $x = (k+l)(\alpha+t_1) \quad t_1 \in W$

$x = k(\alpha+t_1) + l(\alpha+t_1)$.

$\therefore x \in k(\alpha+W)+l(\alpha+W)$

$\therefore (k+l)(\alpha+W) \subseteq k(\alpha+W)+l(\alpha+W)$

同理可得 $(k+l)(\alpha+W) \supseteq k(\alpha+W)+l(\alpha+W)$

$\therefore (k+l)(\alpha+W) = k(\alpha+W)+l(\alpha+W)$

△参考上册商空间一章.

16. $\dim(SM_2(R)/W) = 1$

基为：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + W$

科目:线性代数	章节:第9章	做题人:龚拓宇

17、证明: 设 A 是 σ 在自然基下的矩阵

$\because f(\sigma)=\theta \quad \therefore f(A)=0$

$f(x)=g(x)h(x) \quad \therefore 0=f(A)=g(A)h(A)$

$\because (g(x),h(x))=1 \quad \therefore \exists\, u(x),v(x)\in F[x]$

$u(x)g(x)+v(x)h(x)=1$

$\therefore u(A)g(A)+v(A)h(A)=I$

对 $\forall \alpha\in \ker g(A),\ \alpha\neq\theta$

$[u(A)g(A)+v(A)h(A)]\alpha=\alpha$

即 $v(A)h(A)\alpha=\alpha\neq\theta$

$\therefore \alpha\notin \ker h(A)$

同理,对 $\forall\alpha\in\ker h(A),\ \alpha\neq\theta$ 有 $\alpha\in\ker g(A)$

$\therefore \ker h(A)\cap \ker g(A)=\{\theta\}$

$\because g(A)h(A)=0$

$\therefore r(g(A))+r(h(A))\le n$, $\dim\ker h(A)=n-r(h(A))$, $\dim\ker g(A)=n-r(g(A))$

$\therefore \dim(\ker g(A)\oplus\ker h(A))$

$=\dim\ker g(A)+\dim\ker h(A)$

$=2n-r(h(A))-r(g(A))\ge n$

$\therefore \ker g(A)\oplus\ker h(A)=V$

即 $V=\ker g(\sigma)\oplus\ker h(\sigma)$

科目：线性代数	章节：9-18	做题人：于墨瀚

(1) 设 Γ 的某个矩阵为 A，则 A 可逆，$|A|\neq 0$，
故 A 的特征值不为 0，Γ 的特征值不为 0

(2) 设 λ 的某个特征向量为 X，则 $(A-\lambda I)X=0$
由 $\lambda\neq 0$，A 可逆，$\frac{1}{\lambda}A^{-1}(A-\lambda I)X=0$
化简得 $(A^{-1}-\frac{1}{\lambda}I)X=0$，即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，
$\frac{1}{\lambda}$ 是 Γ^{-1} 的特征值

计三团

科目：线代	章节：9	做题人：姜天健 马思鑫

19. 在$F_n[x]$中$(n>1)$，求微分变换σ的特征多项式，并证明σ在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵

取基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 有

σ在该组基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore |\lambda E-A| = \lambda^n$

由于相 σ在不同基下的矩阵相似

$\therefore$假设在某组基下的矩阵为对角矩阵B

$r(B)=0$

又$\because$ $r(A)=r(B)$

$\therefore$矛盾

20. 证明：(1) 假设$\varepsilon_1+\varepsilon_2$是属于$\lambda$的特征向量，则

$\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\sigma\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2$，且 $\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2$

$\therefore (\lambda_1-\lambda)\varepsilon_1+(\lambda_2-\lambda)\varepsilon_2=0$，由线性无关，$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，矛盾．得证．

(2) 假设σ不是数乘变换，则$\exists$非零向量x_1、x_2使 $\sigma x_1=\lambda_1 x_1$，$\sigma x_2=\lambda_2 x_2$，

且$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\therefore x_1, x_2$分属不同特征值的特征向量．$\therefore x_1+x_2\neq\theta$（由无关可知）

则由(1)知 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$不是$\sigma$的特征向量 可得矛盾．得证．

（科目：　　　）**数　学　作　业　纸**

编号：　　　　班级：　　　　姓名：　　　　第　　页

9.21.(1).

$\because \lambda_0$是σ的特征值

设$\xi \in V_{\lambda_0}$.

由$\sigma\tau=\tau\sigma$:

$\sigma\tau\xi=\tau\sigma\xi=\tau\lambda_0\xi=\lambda_0\tau\xi$

$\therefore (\sigma-\lambda_0 E)\tau\xi=0$.

$\therefore \tau\xi \in V_{\lambda_0}$.

$\therefore V_{\lambda_0}$是τ的不变子空间

(2) $\because \tau$在V_{λ_0}上是线性变换

又$\because V_{\lambda_0}$是τ的不变子空间

$\therefore \tau$在V_{λ_0}上必有特征值λ即对应的特征向量β.

$\therefore \tau\beta=\lambda\beta$.

$\because V_{\lambda_0}$是σ关于λ_0的特征子空间

$\therefore \sigma\beta=\lambda_0\beta$.

$\therefore \sigma,\tau$至少有一个公共特征向量.

9.23

证明：对n~~作~~做数学归纳

$n=1$时显然成立。

设A是n维复方阵，λ_1是A的任一特征值，x_1是属于λ_1的特征向量。将x_1扩充为$\mathbb{C}^n$的一组基$(x_1,x_2\cdots x_n)=P_1$

$$A(x_1,x_2\cdots x_n)=(x_1,x_2\cdots x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}$$

即 $$AP_1=P_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}$$

A_{22}是$n-1$维复方阵，由归纳假设，$\exists P_2$, s.t. $P_2^{-1}A_{22}P_2=B_{22}$，B_{22}是上三角阵

取$P=P_1\begin{pmatrix}1 & \\ & P_2\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \\ & P_2\end{pmatrix}^{-1}P_1^{-1}AP_1\begin{pmatrix}1 & \\ & P_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \\ & P_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & A_{12}\\ & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & P_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ & B_{22}\end{pmatrix}$$ 是上三角阵

证毕

科目： 线性代数	章节： 习题九	做题人： 刘杰

24.证：

若 $k_1\varepsilon_1^{(m-2)}+k_2\varepsilon_2^{(m-2)}+\cdots+k_n\varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}=0$

由 $\sigma\varepsilon_i^{(m-2)}=\varepsilon_i^{(m-1)}$ $i=1,2,\cdots,p_{m-1}$

则有 $k_1\sigma\varepsilon_1^{(m-2)}+k_2\sigma\varepsilon_2^{(m-2)}+\cdots+k_n\sigma\varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}=\sigma 0=0$

即 $k_1\varepsilon_1^{(m-1)}+k_2\varepsilon_2^{(m-2)}+\cdots+k_n\sigma\varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}=0$

由 $\varepsilon_1^{(m-1)},\varepsilon_2^{(m-1)},\cdots\varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-1)}$ 线性无关

$\therefore$ $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\therefore$ $\varepsilon_1^{(m-2)},\varepsilon_2^{(m-2)},\cdots\varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}$ 线性无关

25.解：

(1). 设 W 为含 ε_n 的不变子空间

$\sigma\varepsilon_n\in W$.

$\sigma\varepsilon_n=a_{1n}\varepsilon_1+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n$

$=\varepsilon_{n-1}+\lambda\varepsilon_n$.

$\therefore$ $\varepsilon_{n-1}\in W$.

同 $\varepsilon_{n-2}\in W$ $\cdots$ $\varepsilon_1\in W$

$\therefore$ $W=V$

(2). 由(1). 若 $\varepsilon_k\in W$

有 $\varepsilon_{k-1},\varepsilon_{k-2},\cdots\varepsilon_1\in W$

故 V 中任何非0 σ-子空间包含 ε_1

(3). 由(2). V中任何非0 σ-子空间包含 ε_1

则 V 中任两个非平凡 σ-子空间

有公共元素 ε_1

故无法分解成直和.

科目：线性代数	章节：第7章	做题人：钱雨杰,

27. (1) $A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$

解：先求特征值 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)^3$，得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

解 $(A+I)x=0$.

$\begin{bmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{bmatrix}$ 解得 $x_1^{(1)}=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ $x_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

解 $(A+I)x=x_1^{(1)}$. 解得 $x_2^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}4&3&0\\3&0&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$, $J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&1&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{bmatrix}$

解：先求特征值. $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+3)$. $\lambda_1=\lambda_2=1$. $\lambda_3=-3$.

考虑 $\lambda_1=\lambda_2=1$.

解 $(A-I)x=0$. 解得 $x_1^{(1)}=\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$

解 $(A-I)x=x_1^{(1)}$. 解得 $x_2^{(1)}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$

考虑 $\lambda_3=-3$

解 $(A+3I)x=0$. 解得 $x_1^{(2)}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-4&-3&-2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$. $J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&-3\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{bmatrix}$

解：先求特征值 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^3$. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$

$t_1=3-r(A-2I)=1$

解 $(A-2I)x=0$. 解得 $x_1^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

解 $(A-2I)x=x_1^{(1)}$ 解得 $x_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

解 $(A-2I)x=x_2^{(1)}$ 解得 $x_3^{(1)}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-3\\1&0&0\end{pmatrix}$. $J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$

科目：线性代数	章节：第9章	做题人：钱雨杰

27 (4) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{bmatrix}$

解. 先求特征值. $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^4$. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

$t_1=4-r(A-I)=1$.

解 $(A-I)x=0$. 解得 $x_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

解 $(A-I)x=x_1^{(1)}$. 解得 $x_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

解 $(A-I)x=x_2^{(1)}$. 解得 $x_3^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{8}\\\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$

解 $(A-I)x=x_3^{(1)}$. 解得 $x_4^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\\frac{5}{16}\\-\frac{3}{8}\\\frac{1}{8}\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{8}&\frac{5}{16}\\0&0&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\\0&0&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$. $J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$

科目: 线代	章节: 习题9	做题人: 董倫蓬

26 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2+1$

∴A在R上无特征值

∴6的不变子空间为 R^2

28 设 $f_6(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$，设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 对应的特征向量

$V=V_1\oplus V_2\cdots\oplus V_n$ 其中 $V_i=\{x_i|(A-\lambda_i I)x_i=\theta\}$

$V_1\cdots V_n$ 为 ~~6的~~ 6-子空间

则6的k维6-子空间为k个特征向量构成

∴ $\dim = 2^n$

下证任一个r维6-子空间W一定为上述中某一个

设 $\beta_1\cdots\beta_r$ 为W一组基，可在 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 中选中n-r个 $(\alpha_{r+1}\cdots\alpha_n)$，使 $\beta_1\cdots\beta_r\ \alpha_{r+1}\cdots\alpha_n$ 为V的一组基，则6在这组基下的阵设为A

$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 其中 A_1A_2 为r n-r 阶方阵

$|\lambda I-A| = |\lambda I_r-A_1||\lambda I_{n-r}-A_2| = (\lambda I_r-A_1)(\lambda-\lambda_{r+1})\cdots(\lambda-\lambda_n)$

显然有 $|\lambda I_r-A_1|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_r)$

于是6限制在W上的作为 $6|_W$，其阵表示为A，正好有r个不同特征值 $\lambda_1\cdots\lambda_r$，从而 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 $6|_W$ 对应的特征向量

∴ $W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots\alpha_r)$