DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCE, TSINGHUA UNIVERSITY

Answers to Exercises, Linear Algebra II
线性代数 II—补充习题解答

Tsinghua University

June 10, 2017

第一章　多项式

Exercise 1.1. 判断 $x^4-8x^3+24x^2-32x+21$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是否可约?

Solution. 令 $x=y+1$, 则有:

$$\begin{aligned} x^4-8x^3+24x^2-32x+21 &= (y+1)^4-8(y+1)^3+24(y+1)^2-32(y+1)+21 \\ &= y^4-4y^3+6y^2-8y+4, \end{aligned}$$

取 $p=2$，则由 Eisenstein 判别法可知，原式在 $Q[x]$ 中不可约.

□

Exercise 1.2. 对于 $0\neq f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 用 $c(f)$ 表示全体系数的正的最大公因子，称为 f 的容度.

(1). 对 $0\neq a\in\mathbb{Z}$，证明：$c(af)=|a|c(f)$.

(2). 证明：$c(fg)=c(f)c(g)$.

proof. (1). 记 $f(x)=a_nx^n+...+a_0$, 同时记 $c_1=c(f)$, 则由定义有 $c_1\big|a_i$, 从而有 $|a|c_1\big||a|a_i$, 故 $|a|c_1$ 为 $|a|f$ 的系数的公因子.

设 $\forall c_2$ 为 $|a|a_i$ 的公因子，那么 $\frac{c_2}{|a|}$ 为 a_i 的公因子，即有 $\frac{c_2}{|a|}\big|c_1$，从而有 $c_2\big||a|c_1$, 故可知 $|a|c_1$ 为 $|a|f$ 的最大公因子, 即 $c(af)=|a|c(f)$.

(2). 不妨设 $f(x)=a_nx^n+...+a_0$，$g(x)=b_mx^m+...+b_0$.

同时记 $f(x)g(x)=c_{m+n}x^n+...+c_0$, 其中 $c_k=\sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$.

记 $s=c(f),t=c(g)$ 则有 $(a_0,a_1,...,a_n)=s,(b_0,b_1,...,b_m)=t$, 即 $s\big|a_i,t\big|b_j$,

从而有 $st\big|a_ib_j\Rightarrow st\big|c_k$, 故 st 为 c_k 的公因子.

不妨记 $c_k=(st)\lambda_k$, 其中 $(st,\lambda_k)=1$.

设 $\forall r$ 为 $c_0,c_1,...c_{m+n}$ 的公因子，那么有 $r\big|c_k$, $k=0,1,...,m+n$, 即 $r\big|\lambda_k(st)$, $\forall k=0,1,...,m+n$.

故由 k 的任意性，可知 $r\big|st$.

再由 r 的任意性可知，st 为最大公因子.

□

第二章　相似标准型

Exercise 2.1. 证明：$O_{4\times4}, N_4, \begin{pmatrix} N_3 & \\ & N_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_2 & \\ & N_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_2 & & \\ & N_1 & \\ & & N_1 \end{pmatrix}$ 两两不相似.

proof. $rank(O_{4\times4}) = 0$, $rank\ (N_4) = 3$, $rank\ \begin{pmatrix} N_3 & \\ & N_1 \end{pmatrix} = 2$, $rank\ \begin{pmatrix} N_2 & \\ & N_2 \end{pmatrix} = 2$, $rank\ \begin{pmatrix} N_2 & & \\ & N_1 & \\ & & N_1 \end{pmatrix} = 1$,

所以可知,$O_{4\times4}, N_4, \begin{pmatrix} N_2 & & \\ & N_1 & \\ & & N_1 \end{pmatrix}$ 与其他矩阵均两两不相似.

而又因为相似矩阵有相同的最小多项式，且 $\begin{pmatrix} N_2 & \\ & N_2 \end{pmatrix}^2 = 0, \begin{pmatrix} N_3 & \\ & N_1 \end{pmatrix}^3 = 0,$

故五个矩阵两两不相似.

□

Exercise 2.2. 将正整数 n 分拆为 m 个不超过 p 的正整数之和，且分拆项中至少有一项是 p. 当 n 较小时，给定 (n,m,p) 后，对应的分拆方式是唯一的，如：$(5,3,3)$ 对应了 $5 = 3+1+1$.

请给出最小的 n, 使得给定 (n,m,p) 后，对应的分拆方式不唯一.

proof. 当 $n = 6$ 时，有如下的分拆：

* m=1,　(6,1,6)　6=6;
* m=2,　(6,2,3)　6=3+3;　(6,2,4)　6=2+4;　(6,2,5)　6=1+5;
* m=3,　(6,3,2)　6=2+2+2;　(6,3,3)　6=1+2+3;　(6,3,4)　6=1+1+4;

注意到 $n = 7, m = 3, p = 3$ 时，$7 = 1+3+3 = 2+2+3$, 此时分拆不唯一.

因此当 $n \geq 7$ 时, 给定 (n,m,p) 后，对应的分拆方式不唯一.

□

Exercise 2.3. 设 $\sigma \in L(V), f(x) \in F[x]$. 证明：$\mathrm{Im} f(x), \mathrm{Ker} f(x)$ 为 σ 的不变子空间.

proof. 我们先证明 $\mathrm{Im} f(x)$ 为 σ 的不变子空间.

对于 $\forall \vec{\alpha} \in \mathrm{Im} f(x)$, $\exists \vec{\beta} \in V$, 使得 $\vec{\alpha} = f(\sigma)\vec{\beta}$. 从而有 $\sigma(\vec{\alpha}) = \sigma(f(\sigma)\vec{\beta}) = f(\sigma)\sigma(\vec{\beta}) \in \mathrm{Im} f(x)$.

由 $\forall\vec{\alpha}\in \mathrm{Im}f(x), \sigma(\vec{\alpha})\in \mathrm{Im}f(x)$, 可知 $\mathrm{Im}f(x)$ 为 σ 的不变子空间.

接下来我们证明 $\mathrm{Ker}f(x)$ 为 σ 的不变子空间.
对于 $\forall\vec{\alpha}\in \mathrm{Ker}f(x)$, 则有 $f(\sigma)\vec{\alpha}=\vec{0}$. 从而有 $f(\sigma)\sigma(\vec{\alpha})=\sigma(f(\sigma)\vec{\alpha})=\sigma(\vec{0})=\vec{0}$.
从而有 $\sigma(\vec{\alpha})\in \mathrm{Ker}f(x)$, 即 $\mathrm{Ker}f(x)$ 为 σ 的不变子空间.

□

Exercise 2.4. 设 $\sigma,\tau\in L(V)$, 若 σ 和 τ 可交换，即 $\sigma\tau=\tau\sigma$. 证明：$\mathrm{Im}\,\tau, \mathrm{Ker}\,\tau$ 均为 σ 的不变子空间.

proof. 对于 $\forall\vec{\alpha}\in \mathrm{Im}\tau$, $\exists\vec{\beta}\in V$, 使得 $\vec{\alpha}=\tau(\vec{\beta})$. 从而有 $\sigma(\vec{\alpha})=\sigma(\tau(\vec{\beta}))=\tau(\sigma(\vec{\beta}))\in \mathrm{Im}\,\tau$.
故 $\mathrm{Im}\,\tau$ 为 σ 的不变子空间.

对于 $\forall\vec{\alpha}\in \mathrm{Ker}\,\tau$, 则有 $\tau(\vec{\alpha})=\vec{0}$. 从而有 $\tau(\sigma(\vec{\alpha}))=\sigma(\tau(\vec{\alpha}))=\sigma(\vec{0})=\vec{0}$.
从而有 $\sigma(\vec{\alpha})\in \mathrm{Ker}\,\tau$, 即 $\mathrm{Ker}\,\tau$ 为 σ 的不变子空间.

□

Exercise 2.5. 设 σ 为 V 上线性变换，W 与 U 均为 V 中的 $\sigma-$ 不变子空间，且有

$$V=W\oplus U.$$

请讨论诱导变换 $\bar{\sigma}: V/W\to V/W$ 与限制变换 $\sigma|_U: U\to U$ 之间的相同与不同之处.

Answer. 以下是简要的说明：

- 相同之处：空间的维数相同，即 $\dim V/W=\dim U$，则 V/W 与 U 同构; 诱导变换和限制变换在各自基下对应的矩阵是相同的; 取 $W=0$ 时，V/W 和 U 等价.
- 不同之处：诱导变换作用的对象是同余类 $\vec{\alpha}+W$, 作用空间是商空间 V/W；限制变换作用的对象是向量 $\alpha\in U$, 作用空间是不变子空间 U.

□

Exercise 2.6. 设 $\sigma\in L(V), \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$, 为互异的特征值，取 $\vec{a}_i\in U_{\lambda_i}, i=1,2,...,s$.
证明：$\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_s\}$ 是线性无关的.

proof. (反证法)
设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_s$ 线性相关, 且其极大线性无关组为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$, 其中 $1\le r\le s-1$, 则必有 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r,\vec{a}_{r+1}$ 线性相关.
故存在不全为零的 $k_1,k_2,...,k_r,k_{r+1}$, 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+...+k_r\vec{\alpha}_r+k_{r+1}\vec{\alpha_{r+1}}=0.$$

在两边同时作用 $(\sigma-\lambda_{r+1}\varepsilon)^{m_{r+1}}$ 之后, 则有

$$k_1(\sigma-\lambda_{r+1}\varepsilon)^{m_{r+1}}\vec{\alpha}_1+k_2(\sigma-\lambda_{r+1}\varepsilon)^{m_{r+1}}\vec{\alpha}_2+...+k_r(\sigma-\lambda_{r+1}\varepsilon)^{m_{r+1}}\vec{\alpha}_r=0.$$

由于 $(\sigma-\lambda_{r+1}\varepsilon)^{m_{r+1}}\vec{\alpha}_i\in U_{\lambda_i}$, 且 $\vec{\alpha}_i\in U_{\lambda_i}$, 从而有 $(\sigma-\lambda_{r+1}\varepsilon)^{m_{r+1}}\Big|_{U_{\lambda_i}}$ 可逆.

即有

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_r\vec{\alpha}_r = 0.$$

从而有 $k_{r+1}\vec{\alpha_{r+1}} = 0$.

又由于 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ 为极大线性无关组，则有 $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

又由于 $\vec{\alpha_{r+1}} \neq \vec{0}$, 从而有 $k_{r+1} = 0$, 即有

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = k_{r+1} = 0.$$

矛盾！从而有 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ 是线性无关的.

□

Exercise 2.7. 设 $\sigma \in L(V)$ 是次数为 l 的幂零变换, p 为满足 $r(\sigma^p) = r(\sigma^{p+1})$ 的最小正整数, $t_i = \dim\mathrm{Ker}(\sigma^i), i = 1, 2, \ldots, l$. 证明: $p = l$, 且有

$$\begin{cases} n > r(\sigma) > \ldots > r(\sigma^{p-1}) > r(\sigma^p) = 0 \\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = n \end{cases}.$$

proof. 由于 σ 是次数为 l 的幂零变换，故有 $\sigma^{l-1} \neq 0$, $\sigma^l = 0$.

又由于 p 为满足 $r(\sigma^p) = r(\sigma^{p+1})$ 的最小正整数，从而有 $p \leq l$.

不妨设 $p < l$，那么则有 $r(\sigma^p) \geq 1$, 从而 $1 \leq r(\sigma^p) = r(\sigma^{p+1}) = \ldots = r(\sigma^l) = 0$, 矛盾！因此有 $p = l$.

由于 $\sigma^{i+1}\vec{\alpha} = \sigma(\sigma^i\vec{\alpha})$, 那么则有 $\mathrm{Im}\,\sigma^{i+1} \subseteq \sigma^i, i = 0, 1, \ldots, l-1$.

又因为 $\dim(\mathrm{Im}\,\sigma^i) = r(\sigma^i)$, 即有 $r(\sigma^i) \geq r(\sigma^{i+1})$, 而 p 为满足 $r(\sigma^p) = r(\sigma^{p+1})$ 的最小正整数，从而有

$$n > r(\sigma) > \ldots > r(\sigma^{p-1}) > r(\sigma^p) = 0,$$

另一方面，因为 $t_i = n - \dim(\mathrm{Im}\,\sigma^i)$, 故有

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = n.$$

□

Exercise 2.8. 设子空间 U, W 满足 $U \subseteq W$: . 试分析子空间相减 $W - U$ 与子空间直和减 $W \ominus U$ 的区别.

并说明在引理 1 的证明中，为什么在 $W = \mathrm{Ker}\sigma^k \ominus \mathrm{Ker}\sigma^{k-1}$ 过程中，可以选取一组线性无关的高度为 k 的向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{c_k}$.

proof. 首先根据定义则有:

$$W - U = \{a - b \mid a \in W,\ b \in U\},$$

$$W \ominus U = \{c \mid 存在唯一的\ a \in W,\ b \in U,\ 使得\ c = a - b\}$$

易知: $W \ominus U \subseteq W - U$.

不妨记 $\mathrm{Ker}\,\sigma^k = W \oplus \mathrm{Ker}\,\sigma^{k-1}$.

取 $\mathrm{Ker}\,\sigma^{k-1}$ 的一组基 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_{c_{k-1}}$. 将其扩充为 $\mathrm{Ker}\,\sigma^k$ 的一组基 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_{c_k}, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_{c_{k-1}}$.

那么由直和减的定义,$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_{c_k}$ 为 W 的一组基，则 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_{c_k}$ 线性无关.

由于 $\vec{\alpha}_i \notin \operatorname{Ker}\sigma^{k-1}$, 则有 $\sigma^{k-1}(\vec{\alpha}_i)\neq 0$. 又因为 $\vec{\alpha}_i \notin \operatorname{Ker}\sigma^{k}$, 则有 $\sigma^{k}(\vec{\alpha}_i)\neq 0$.

故可以选取一组线性无关的高度为 k 的向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_{c_k}$.

□

Exercise 2.9. 对幂零变换的正向搜索法的一般步骤中，证明以下结论成立:

1. 在 *Step2* 中选取的 pd_p 个根向量与 *Step3* 中选取的 $(p-1)d_{p-1}$ 个根向量组成的向量组仍线性无关.
2. 最终通过正向搜索法得到的 n 个根向量仍线性无关.

proof. (1) 不妨假设存在不全为 0 的 k_{ij}, 使得

$$\sum_{i=0}^{d_p}\sum_{j=0}^{p-1}k_{ij}\sigma^j\vec{x_p}^{(i)}+\sum_{i=d_p+1}^{d_p+d_{p-1}}\sum_{j=0}^{p-2}k_{ij}\sigma^j\vec{x_{p-1}}^{(i)}=\vec{0}.$$

在两边同时作用 σ^{p-1} 之后有 $\sigma^{p-1}\sum_{i=1}^{d_p}k_{i0}\vec{x_p}^{(i)}=\vec{0}$, 即有 $\sum_{i=1}^{d_p}k_{i0}\vec{x_p}^{(i)}=\vec{0}\in\operatorname{Ker}\sigma^{p-1}$.

又因为 $\vec{x_p}^{(i)}\in\operatorname{Ker}\sigma^{p}\ominus\operatorname{Ker}\sigma^{p-1}$, 故可知 $k_{i0}=0,\ i=1,2,\dots,d_p$.

在两边同时作用 σ^{p-2} 之后有

$$\sigma^{p-2}\Big(\sum_{i=1}^{d_p}k_{i1}\sigma\vec{x_p}^{(i)}\Big)+\sigma^{p-2}\Big(\sum_{i=d_p+1}^{d_p+d_{p-1}}k_{i0}\vec{x_{p-1}}^{(i)}\Big)=\vec{0}.$$

即有

$$\sum_{i=1}^{d_p}k_{i1}\sigma\vec{x_p}^{(i)}+\sum_{i=d_p+1}^{d_p+d_{p-1}}k_{i0}\vec{x_{p-1}}^{(i)}\in\operatorname{Ker}\sigma^{p-2},$$

又因为 $\sigma\vec{x_p}^{(i)}\in\operatorname{Ker}\sigma^{p-1}\ominus\operatorname{Ker}\sigma^{p-2}$, 故 $\vec{x_{p-1}}^{(i)}\in\operatorname{Ker}\sigma^{p-1}\ominus\operatorname{Ker}\sigma^{p-2}\ominus L(\sigma\vec{x_p})$, 从而有

$$k_{i1}=0,\ \ i=1,2,\dots,d_p,\qquad k_{i0}=0,\ \ i=d_p+1,d_p+2,\dots,d_p+d_{p-1}.$$

依次作用 $\sigma^{p-3},\sigma^{p-4},\dots,\sigma$ 之后可得

$$k_{ij}=0,\ \ i=1,2,\dots,d_p,\ \ j=1,2,\dots,p.$$

$$k_{ij}=0,\ \ i=d_p+1,d_p+2,\dots,d_p+d_{p-1},\ \ j=1,2,\dots,p-1.$$

矛盾！从而有在 Step2 中选取的 pd_p 个根向量与 Step3 中选取的 $(p-1)d_{p-1}$ 个根向量组成的向量组仍线性无关.

(2) 类似 Step2、Step3，分别作用之后可得最终通过正向搜索法得到的 n 个根向量仍线性无关.

□

Exercise 2.10. 用正向搜索法重新计算习题九 15 题中的 (1)(4) 小题.

Solution. (1) $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$.

Step1. 求解特征多项式.

特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^3$, 故特征值为 $\lambda=-1,\ n=3$.

Step2. $A+I=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A+I)=1,\ N(A+I)=\left\{k_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2\in F\right\}$.

$(A+I)^2=0,\qquad t_1=3-r(A+I)=2.$

Step3.

$$d_1^{(1)}=r(A+I)^0+r(A+I)^2-2r(A+I)^1=1,$$

$$d_2^{(1)}=r(A+I)^1+r(A+I)^3-2r(A+I)^2=1,$$

在 $N(A+I)^2\ominus N(A+I)$ 中选取 $\vec{x}_2{}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, 从而有 $\vec{x}_1{}^{(1)}=(A+I)\vec{x}_2{}^{(1)}=5\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$,

在 $N(A+I)\ominus L(\vec{x}_1{}^{(1)})$ 中选取 $\vec{x}_1{}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Step4. 令 $P=(\vec{x}_2{}^{(1)},\ \vec{x}_1{}^{(1)},\ \vec{x}_1{}^{(2)})$, 从而有

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}-1&&\\1&-1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Step1. 求解特征多项式.

特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^4$, 故特征值为 $\lambda=1,\ n=4$.

Step2. $A-I=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A-I)=3,\ N(A-I)=\left\{k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\middle|\,k\in F\right\}$.

$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&4&12\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A-I)^2=2,\ N(A-I)^2=\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2\in F\right\}$.

$(A-I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A-I)^3=1,\ N(A-I)^3=\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2,k_3\in F\right\}$.

$(A-I)^4=0.$

Step3.

$$d_1 = r(A-I)^0 + r(A-I)^2 - 2r(A-I)^1 = 0,$$

$$d_2 = r(A-I)^1 + r(A-I)^3 - 2r(A-I)^2 = 0,$$

$$d_3 = r(A-I)^2 + r(A-I)^4 - 2r(A-I)^3 = 0,$$

$$d_4 = r(A-I)^3 + r(A-I)^5 - 2r(A-I)^4 = 1,$$

在 $N(A-I)^4 \ominus N(A-I)^3$ 中选取 $\vec{x}_4{}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

从而有 $\vec{x}_3{}^{(1)} = (A-I)\vec{x}_4{}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2{}^{(1)} = (A-I)\vec{x}_3{}^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1{}^{(1)} = (A-I)\vec{x}_2{}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Step4. 令 $P = (\vec{x}_4{}^{(1)}, \vec{x}_3{}^{(1)}, \vec{x}_2{}^{(1)}, \vec{x}_1{}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 从而有

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercise 2.11. 用正向搜索法重新计算下述矩阵的约当标准型 J 和可逆矩阵 P.

1. *例题 9.10 与例题 9.12*

2. *例题 9.11 与例题 9.13*

Solution. (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Step1. 求解特征多项式.

特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 3)^4$, 故特征值为 $\lambda = 3$, $n = 4$.

Step2. $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$r(A-3I)=2,\ N(A-3I)=\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \middle|\, k_1,k_2\in F\right\}.$$

$(A-3I)^2=0.$

Step3.

$$d_1=r(A-3I)^0+r(A-3I)^2-2r(A-3I)^1=0,$$

$$d_2=r(A-3I)^1+r(A-3I)^3-2r(A-3I)^2=2,$$

在 $N(A-3I)^2\ominus N(A-3I)^1$ 中选取 $\vec{x}_2^{\,(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{x}_2^{\,(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$,

从而有 $\vec{x}_1^{\,(1)}=(A-3I)\vec{x}_2^{\,(1)}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\vec{x}_1^{\,(2)}=(A-3I)\vec{x}_2^{\,(2)}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$.

Step4. 令 $P=(\vec{x}_2^{\,(1)},\ \vec{x}_1^{\,(1)},\ \vec{x}_2^{\,(2)},\ \vec{x}_1^{\,(2)})=\begin{pmatrix}0&2&0&-1\\0&-2&0&2\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, 从而有

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}3&&&\\1&3&&\\&&3&\\&&1&3\end{pmatrix}.$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2&2&&\\2&1&2&&\\2&2&1&&\\&&&5&0\\&&&2&5\end{pmatrix}$.

特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)^3$, 故特征值为 $\lambda_1=-1,\ n_1=2;\ \lambda_2=5,\ n_2=3.$

(i) $\lambda_1=-1,\ n_1=2.$

$$A+I=\begin{pmatrix}2&2&2&&\\2&2&2&&\\2&2&2&&\\&&&6&0\\&&&2&6\end{pmatrix},\ r(A+I)=3,\ N(A+I)=\left\{k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2\in F\right\}.$$

由计算可得 $r(A+I)^2=r(A+I)^3=3$, 从而有

$$d_1^{(1)}=r(A+I)^0+r(A+I)^2-2r(A+I)^1=2,$$

在 $N(A+I)$ 中选取 $\vec{x}_1^{\,(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{x}_1^{\,(2)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(ii) $\lambda_2=5,\ n_2=3.$

$$A-5I=\begin{pmatrix}-4&2&2&&\\2&-4&2&&\\2&2&-4&&\\&&&0&0\\&&&2&0\end{pmatrix},\ r(A-5I)=3,\ N(A-5I)=\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2\in F\right\}.$$

$$(A-5I)^2=\begin{pmatrix}24&-12&-12&&\\-12&24&-12&&\\-12&-12&24&&\\&&&0&0\\&&&0&0\end{pmatrix},\ r(A-5I)^2=2,\ N(A-5I)^2=\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\,k_1,k_2,k_3\in F\right\}.$$

$$(A-5I)^3=\begin{pmatrix}-144&72&72&&\\72&-144&72&&\\72&72&-144&&\\&&&0&0\\&&&0&0\end{pmatrix},\ r(A-5I)^3=2.$$

$$d_1=r(A-5I)^0+r(A-5I)^2-2r(A-5I)^1=1,$$

$$d_2=r(A-5I)^1+r(A-5I)^3-2r(A-5I)^2=1.$$

在 $N(A-5I)^2\ominus N(A-5I)^1$ 中选取 $\vec{x}_2^{\,(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, 从而有 $\vec{x}_1^{\,(3)}=(A-5I)\vec{x}_2^{\,(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$.

在 $N(A-5I)\ominus L(\vec{x}_1{}^{(3)})$ 中选取 $\vec{x}_1{}^{(4)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

令 $P=(\vec{x}_1{}^{(1)},\ \vec{x}_1{}^{(2)},\ \vec{x}_2{}^{(3)},\ \vec{x}_1{}^{(3)},\ \vec{x}_1{}^{(4)})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&-1&0&0&1\\-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}$, 从而有

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}-1&&&&\\&-1&&&\\&&5&&\\&&1&5&\\&&&&5\end{pmatrix}.$$

□

第三章　欧氏空间、酉空间与矩阵变换

Exercise 3.1. 以下哪个二维矩阵变换可以将二维向量 $(0,1)$ 映射为更低维数的向量:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　*B.* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　*C.* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　*D.* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Answer. A □

Exercise 3.2. 以下哪个二维矩阵变换可以将二维向量映射它在 x 轴上的投影:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　*B.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　*C.* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　*D.* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Answer. B □

Exercise 3.3. 以下哪种变换不是矩阵变换?

A. 旋转变换　*B.* 平移变换　*C.* 对称变换　*D.* 投影变换

Answer. B □

Exercise 3.4. 求下列矩阵变换的变换矩阵:

1. $\mathbb{R}^2$ 中关于直线 $3x-4y=0$ 对称的矩阵变换.
2. $\mathbb{R}^2$ 中关于直线 $3x+4y=0$ 正交投影的矩阵变换.
3. $\mathbb{R}^2$ 中先绕原点逆时针旋转 $60°$ 的矩阵变换.
4. $\mathbb{R}^3$ 中关于平面 $x+2y-2z=0$ 正交投影的矩阵变换.

Solution. 答案如下:

1. $\mathbb{R}^2$ 中关于直线 $3x-4y=0$ 对称的矩阵变换为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}$.
2. $\mathbb{R}^2$ 中关于直线 $3x+4y=0$ 正交投影的矩阵变换为 $\begin{pmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$.
3. $\mathbb{R}^2$ 中先绕原点逆时针旋转 $60°$ 的矩阵变换为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
4. $\mathbb{R}^3$ 中关于平面 $x+2y-2z=0$ 正交投影的矩阵变换为 $\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

□

Exercise 3.5. $\mathbb{R}^3$ 中矩阵变换 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 的作用效果是什么?

Solution. 绕着 $\vec{e}_2$ 方向顺时针旋转 30°.

□

Exercise 3.6. 对下列说法判断正误:

1. 中心对称变换是线性变换.
2. 线反射变换矩阵的行列式为 1.
3. 旋转变换是正交变换.

Answer. 答案与说明:

1. ×. 以原点为中心的中心对称变换为线性变换,否则不成立.
2. ×. 线反射变换矩阵的行列式为 -1.
3. √.

□

Exercise 3.7. 设 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, R_π 是 R^3 中对 π 的面反射变换矩阵，其中 $\vec{n}$ 是 π 的法向量.

记 $R_\pi^{233} \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}$. 求 c, d, e 的值.

Solution. 由 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 可知 π 面的面反射变换矩阵为

$$R_\pi = I - 2\vec{n}\vec{n}^T = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

从而 $R_\pi^{233} \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} = R_\pi \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$ $c = 1$, $d = 11$, $e = 11$.

□

Exercise 3.8. 设 $\vec{n}=\begin{pmatrix}2*\\ *2\\ 1**\end{pmatrix}$, R_π 是 R^3 中对 π 的面反射变换矩阵，其中 $\vec{n}$ 是 π 的法向量，但是法向量 $\vec{n}$ 已经模糊辨认不清.

记 $R_\pi^{1000}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\\e\end{pmatrix}$. 求 c,d,e 的值.

Solution. 由于 $R_\pi^{1000}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=I\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 因此 $c=1$，$d=2$，$e=3$.

□

Exercise 3.9. 证明：两个对称变换之和仍是对称变换，实数和对称变换的积也是对称变换.

请问：两个对称变换的复合是否为对称变换？证明或举反例.

proof. 设对称变换为

$$\left(\sigma_1(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\alpha},\sigma_1(\vec{\beta})\right),$$

$$\left(\sigma_2(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\alpha},\sigma_2(\vec{\beta})\right),$$

那么则有

$$\begin{aligned}\left((\sigma_1+\sigma_2)(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)&=\left(\sigma_1(\vec{\alpha})+\sigma_2(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)\\&=\left(\sigma_1(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)+\left(\sigma_2(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)\\&=\left(\vec{\alpha},\sigma_1(\vec{\beta})\right)+\left(\vec{\alpha},\sigma_2(\vec{\beta})\right)\\&=\left(\vec{\alpha},(\sigma_1+\sigma_2)(\vec{\beta})\right),\end{aligned}$$

从而可知对称变换之和也为对称变换.

另一方面，因为

$$\begin{aligned}\left(\lambda\sigma_1(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)&=\lambda\left(\sigma_1(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)\\&=\lambda\left(\vec{\alpha},\sigma_1(\vec{\beta})\right)\\&=\left(\vec{\alpha},\lambda\sigma_1(\vec{\beta})\right),\end{aligned}$$

从而可知实数与对称变换之积也为对称变换.

需要注意的是，两个对称变换的复合不一定为对称变换. 我们给出反例：

$$\begin{pmatrix}1&&1\\&1&\\1&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&-1\\&1&\\-1&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\\&*\end{pmatrix}.$$

□

Exercise 3.10. 在 $\mathbb{R}^2$ 中规定线性变换 σ 为 $\forall\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$，$\sigma\alpha=\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+2x_2\end{pmatrix}$.

证明: σ 是对称变换.

proof. 对于 $\forall\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\forall\vec{\beta}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, 那么则有

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)&=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_1+2y_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\\
&=x_1x_2+x_2y_1+x_1y_2+2y_1y_2\\
&=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_2+2y_2\end{pmatrix}\\
&=\left(\vec{\alpha},\sigma(\vec{\beta})\right)
\end{aligned}
$$

故可知 σ 为对称变换. $\square$