数值分析期末考试2014 B卷

一教201,205

21st, Jun, 2014

一、（12分）

$$已知A = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. 用Gershgorin圆盘定理证明A正定；
2. 用带向量规格化步骤的幂法迭代两次，求主特征值的近似值，取$v_0 = (1,1,1,1)^T$.

二、（每小题10分，共40分）

1. 利用均差表证明下表能用一个三次多项式表示，并写出该三次多项式：

x	-2	-1	0	1	2	3
y	1	4	11	16	13	-4

2. 求函数$f(x) = x^3, x \in [-1,1]$对于函数空间$\Phi = \mathtt{span}\{1, x\}$的最佳平方逼近多项式$s^*(x)$.

3. 设$x \in \mathbb{R}^n$. 求证$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$.

4. 用平方根法解方程组

$$\begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

三、（12分）

设$\varphi(x) = x + c(x^2 - 3)$, 应如何选择$c$才能使迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k)(k = 0, 1, 2 \ldots)$具有局部收敛性？$c$取何值时这个迭代收敛最快？

四、（12分）

初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ax + b, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

有精确解$y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$, 若取$x_n = nh$($h$为步长)，$y_n$是用向前Euler法得到的在节点$x = x_n$处的近似解，证明：

$$y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}ahx_n.$$

五、（12分）

设有线性方程组$Ax = b$, 其中$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma & \sigma \\ \sigma & 1 & -\sigma \\ -\sigma & \sigma & 1 \end{bmatrix}$, 讨论当$\sigma = 0.5, -0.6$时Jacobi方法的收敛性。

六、（12分）

确定求积公式：

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) f(x) dx \approx h^2[Af(x_0) + Bf(x_1)] + h^3[cf'(x_0) + Df'(x_1)]$$

中的系数A, B, C, D，使代数精度尽可能高，并确定其代数精度。其中$h = x_1 - x_0$。