信号处理原理

第七次作业. 11.15

1. 解：根据"波峰可分辨"条件：

$$L \geq f_s / \Delta f$$

其中 $f_s = 10^4\ Hz$ $\Delta f \leq 10Hz$

故采样总时间

$$t = L / f_s \geq \frac{1}{\Delta f} \geq 0.1s.$$

由于采样频率限制，根据 Nyquist 采样定理.

$$f_{max} \leq \frac{1}{2} f_s = 5kHz.$$

2 解：(1) $t = \frac{128}{40kHz} = 3.2ms.$

(2) 先将原频谱归一化为数字频谱.

$f = 5kHz$ $f_s = 40kHZ$

故 $\omega_0 = 2\pi f / f_s = \frac{\pi}{4}$.

对数字信号 $x(n) = \sin(\omega_0 n)$. 其频谱 $X(\omega)$.

~~基谱为~~ 基频为 $\frac{\pi}{4}$. 故冲激所在位置为

$$\omega_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \omega_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi.$$

再在频域抽样. 有冲激的 DFT 点所在位置为

$$n_1 = \frac{\pi}{4} / 2\pi \times 128 = 16$$

$$n_2 = \frac{7}{4}\pi / 2\pi \times 128 = 112$$

3 解：采样个数 $L = tf_s = 100$

根据"波峰可分辨"条件. $\Delta f \geq \frac{f_s}{L} = 100Hz.$

20mi

即 f_1, f_2, f_3 两两之间的间隔应超过 0.1 kHz.

由于 $f_1 < f_2 < f_3$. $f_1 = 1\,kHz$ $f_3 = 2\,kHz$.

故 $f_{2,max} = 1.9\,kHz$ $f_{2,min} = 1.1\,kHz$.

4. 解：$x(n)$ 的 N点 DFT 为：$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$, $k = 0, 1, \cdots N-1$.

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

(a) $DFT_k[x'(n)] = \sum_{n=0}^{MN-1} x'(n) W_{MN}^{nk}$, $k = 0, 1, \cdots MN-1$.

$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{MN}^{(mN+n)k} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\frac{(mN+n)}{M}k}$

$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{m=0}^{M-1} W_N^{\frac{(mN+n)}{M}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{NM}^{nk} \sum_{m=0}^{M-1} W_M^{mk}$

后项使用等比数列求和，$k \bmod M = 0$ 时，原式 $= M \cdot X(\frac{k}{M})$.

$k \bmod M \neq 0$ 时，原式 $= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\frac{k}{M}n} \frac{1 - W_M^{kM}}{1 - W_M^{k}} = 0$.

故 $DFT[x'(n)](k) = \begin{cases} M \cdot X(\frac{k}{M}), & k \bmod M = 0 \\ 0, & k \bmod M \neq 0. \end{cases}$

(b) $DFT[y(n)](k) = \sum_{n=0}^{MN-1} y(n) W_{MN}^{nk}$, $k = 0, 1, \cdots MN-1$.

$= \sum_{n/M \in Z} x(\frac{n}{M}) W_{MN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$ 　　用 n 替换 $\frac{n}{M}$.

$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k \bmod N)} = X(k \bmod N)$

$k = 0, 1, 2, \cdots MN-1$.

(c) $DFT[y(n)](k) = \sum_{n=0}^{MN-1} y(n) W_{MN}^{nk}$, $k = 0, 1, \cdots MN-1$.

$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{MN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\frac{nk}{M}} = X(\frac{k}{M})$

由于仅当 $\frac{k}{M} \in Z$ 时 $X(\frac{k}{M})$ 才有定义，故 $k \bmod M \neq 0$ 时

$DFT[y(n)](k)$ 不能用 $X(k)$ 表示.