科目：微积分	章节：第二章 2.1	做题人：马也

1. 证明：令 $r^2=x^2+y^2$ 则 $\|X'-X''\|=|r'-r''|$

令 $r'^2=2k\pi$ $r''^2=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

则 $r''^2-r'^2=(r''-r')(r''+r')=\frac{\pi}{2}(r''+r')$

$\therefore |r''-r'|=\frac{\pi}{2}\frac{1}{r'+r''}$

对 $\forall\delta>0$，取 $r'>\frac{\pi}{4\delta}$ 则 $\frac{1}{2}\pi\frac{1}{r'+r'}<\delta$

但 $|\sin r'^2-\sin r''^2|=1$ $\therefore f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不一致连续

2. 证明：

$\because \lim\limits_{\|X\|\to\infty} f(x)$ 存在 $\therefore \exists X_0$ 使当 $\|X_1\|>\|X_0\|,\|X_2\|>\|X_0\|$ 时，

都有 $|f(X_1)-f(X_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$，故 $f(x)$ 在 $(X_0,+\infty)$ 一致连续

当 $\|X\|\le\|X_0\|$ 时，由 $f(x)$ 连续知 $f(x)$ 一致连续

$\therefore \exists\delta>0$，使 $\forall \|X'-X''\|<\delta$ 时，有 $|f(X')-f(X'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有 $\forall \|X'\|\le\|X_0\|$，$\|X''\|>\|X_0\|$ 时，

$|f(x')-f(x'')|<|f(x')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x'')|=\varepsilon$

综上，f 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续

3. 证明：先证明必要性

$\because f(x)$ 在 Ω 一致连续 $\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使 $\forall \|X_1-X_2\|<\delta$ 时

有 $|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$

$\therefore$ 对任意点列 $\{X_n\},\{Y_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-Y_n\|=0$，$\exists n_0$，使 $n>n_0$ 时

$\|X_n-Y_n\|<\delta$ $\therefore |f(X_n)-f(Y_n)|<\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(f(X_n)-f(Y_n))=0$

科目：微积分	章节：2.1	做题人：子也

~~画~~证明充分性，

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x''$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ $\therefore \exists n_0$ 使 $\forall n > n_0$ 都有 $\|x_n - y_n\| < \delta$

且 $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ $\therefore f(x)$ 在 Ω 一致连续

4. 解：

(1) $|x^5 e^{-x}| \le x^6 e^{-x}$ 而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^6 e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$ 又 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty} x^6 e^{-x} dx$ 收敛 $\therefore \int_1^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$ 一致收敛

(2) $\because \left|\dfrac{\cos yx}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{1+x^2}$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ 收敛

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+x^2} dx$ 一致收敛

(3) $|x^{2n} e^{-tx^2}| \le x^{2n} e^{-t_0 x^2}$ 又 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{2n} e^{-t_0 x^2}}{\frac{1}{x^3}} = 0$

$\therefore \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-t_0 x^2} dx$ 收敛

$\therefore \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx$ 一致收敛

(4) $|e^{-tx}\sin x| \le e^{-t_0 x}$ 而 $\int_0^{+\infty} e^{-t_0 x} dx$ 收敛

$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\, dx$ 一致收敛

(5) $\left|\dfrac{x^2 \cos tx}{1+x^4}\right| \le \dfrac{x^2}{1+x^4}$ ~~$\le \frac{1}{x^2}$ 而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2\int_0$~~

而 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2}{1+x^4}}{\frac{1}{1+x^2}} = 1$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ 收敛 $\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx \cdot x^2}{1+x^4} dx$ 一致收敛

科目：微积分	章节：21	做题人：黄[illegible]

(6) $\left|\dfrac{1}{1+(x+t)^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ 而 $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}dx = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+(x+t)^2}dx$ 一致收敛

(7). $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} + \dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

$= -\sin 1 + \dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

又 $\left|\dfrac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛

故 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 关于 $t \geq 0$ 一致收敛

又 $|e^{-tx}| \leq 1$ 关于 $x \in [1,+\infty)$ $t \in [0,+\infty)$ 一致有界

$\therefore$ 由Abel判别法知 $\int_1^{+\infty} e^{-tx}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 一致收敛

(8). 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{10}$ $\forall A > 0$ 取 $A' = 2A$ $A'' = 3A$ $t = \dfrac{1}{9A^2} \geq 0$

则 $\left|\int_{A'}^{A''} \sqrt{t}\, e^{-tx^2}dx\right| \geq \int_{2A}^{3A} \sqrt{t}\, e^{-\frac{1}{9A^2}\cdot 9A^2}dx = A \cdot \dfrac{1}{3A}\cdot\dfrac{1}{e}$

$= \dfrac{1}{3e} > \dfrac{1}{10}$

$\therefore \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-tx^2}dx$ 不一致收敛.

(9) 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{6}$ $\forall A > 1$. 取 $A' = 2A$ $A'' = 3A$ $t = \log_{3A} 2 \geq 0$

$\left|\int_{A'}^{A''} \dfrac{dx}{x^{1+y}}\right| \geq \int_{A'}^{A''} \dfrac{dx}{(3A)^{1+y}} = \dfrac{A}{(3A)^{1+\log_{3A}2}} = \dfrac{A}{3A}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} = \varepsilon_0$

$\therefore \int_1^{+\infty} x^{-1-y}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

科目：微积分	章节：21	做题人：黄俞蓉

(10). $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx \xlongequal{y=x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{\frac{p}{2}}}\cdot\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{2y^{\frac{p+1}{2}}}dy$

$\int_0^{+\infty}\sin y\,dy$ 一致有界 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y^{\frac{p+1}{2}}}=0$

由Dirichlet判别法 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$ 一致收敛

5、$\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin 3x}{x+t}dx\quad(0\leq t<+\infty)$

$\because |e^{-tx}|\leq 1$ 一致有界.

下证 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+t}dx$ 一致收敛

$\frac{\sin 3x}{x+t}\leqslant\frac{\sin 3x}{x}$

又 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin 3x}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx\leq 3+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx}_{收敛}$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx$ 收敛

$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+t}dx$ 一致收敛

由Abel判别法知 $\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin 3x}{x+t}dx\ (0\leq t<+\infty)$ 一致收敛

6. 证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛

则 $\forall\varepsilon>0\quad\exists A(\varepsilon)\quad\forall A'\ A''>A\quad\left|\int_{A'}^{A''}f(x,t)dx\right|<\varepsilon$

又 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续

则 $\lim\limits_{t\to\beta}\left|\int_{A'}^{A''}f(x,t)dx\right|=\left|\int_{A'}^{A''}\lim\limits_{t\to\beta}f(x,t)dx\right|$

$=\left|\int_{A'}^{A''}f(x,\beta)dx\right|<\varepsilon$

又 $\because\int_a^{+\infty}f(x,\beta)dx$ 发散，矛盾

故 $\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上非一致连续

科目：微积分	章节：21	做题人：[illegible]

7. 证明：$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 $y\in I$ 一致收敛

$g(y)$ 关于 $x\in[a,+\infty)$ $y\in I$ 上有界

由Abel判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(y)\,dx$ 一致收敛

8. 证明：取 $\varepsilon_0=\frac{1}{10}$ $\forall A>0$ 取 $A'=2A$ $A''=3A$ $t=\frac{\pi}{3A}>0$

则 $\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin tx}{x}dx\right| \geqslant \int_{A'}^{A''}\frac{\sin tx}{3A}\,dx \overset{y=tx}{=} \frac{1}{3A}\int_{tA'}^{tA''}\sin y\cdot\frac{1}{t}\,dy$

$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin y\,dy=\frac{1}{\pi}\left.-\cos y\right|_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}>\frac{1}{10}$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$ 在 $t>0$ 时不一致收敛

科目：微积分 A(2)	章节：2.2	做题人：施韶韵

1. (1) 原式 $=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=1$

(2) 原式 $=\int_0^3 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3=9$

2. (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2})dy+e^{-x^5}2x-e^{-x^3}$$

$$=\int_x^{x^2}-y^2e^{-xy^2}dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}$$

(2) $F'(y)=\int_{a+y}^{b+y}\cos yx\,dx+\frac{\sin(by+y^2)}{b+y}-\frac{\sin(ay+y^2)}{a+y}$

$$=\frac{1}{y}\sin yx\Big|_{a+y}^{b+y}+\frac{\sin(by+y^2)}{b+y}-\frac{\sin(ay+y^2)}{a+y}$$

$$=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin(by+y^2)-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right)\sin(ay+y^2)$$

(3) $F'(t)=\int_0^t\frac{1}{1+tx}dx+\frac{\ln(1+t^2)}{t}$

$$=\frac{2\ln(1+t^2)}{t}$$

(4) 令 $u=x+t$, $v=x-t$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}$$

$\therefore F'(t)=\int_0^t\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx+f(2t,0)$

3. $F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2xf(x)$

$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)$$

$$=3f(x)+2xf'(x)$$

4. 证明：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{2}(\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at))+\frac{1}{2}(\psi(x+at)+\psi(x-at))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at))+\frac{a}{2}(\psi'(x+at)-\psi'(x-at))$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}(\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at))+\frac{1}{2a}(\psi(x+at)-\psi(x-at))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at))+\frac{1}{2a}(\psi'(x+at)-\psi'(x-at))$$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

5. (1) 原式 $=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}dy\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)}dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)}dx$$

科目：微积分A(2)	章节： 2.2	做题人：施韶韵

令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$

原式 $=\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 t\, y^2}\,dt$

$=\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(y^2+1)\tan^2 t+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$

$=\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{1}{(y^2+1)\tan^2 t+1}\,d\tan t$

$=\int_0^1 dy\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\arctan(\sqrt{y^2+1}\,u)\Big|_0^{+\infty}\right)$

$=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}}\,dy$

$=\frac{\pi}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right|\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

(2) $x^b-x^a=\int_a^b x^t\ln x\,dt$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dx\int_a^b x^t\sin(\ln\frac{1}{x})\,dt$

$=\int_a^b dt\int_0^1 x^t\sin(\ln\frac{1}{x})\,dx$

$\int_0^1 x^t\sin(\ln\frac{1}{x})\,dx=\frac{x^{t+1}}{t+1}\sin(\ln\frac{1}{x})\Big|_0^1$

$+\int_0^1\frac{x^{t+1}}{t+1}\cos(\ln\frac{1}{x})\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$

$=\frac{1}{t+1}\int_0^1 x^t\cos(\ln\frac{1}{x})\,dx$ ①

$\int_0^1 x^t\cos(\ln\frac{1}{x})\,dx=\frac{x^{t+1}}{t+1}\cos(\ln\frac{1}{x})\Big|_0^1$

$-\int_0^1\frac{x^{t+1}}{t+1}\sin(\ln\frac{1}{x})\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$

$=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\int_0^1 x^t\sin(\ln\frac{1}{x})\,dx$ ②

② 代入 ① 得

$\left(\frac{1}{(t+1)^2}+1\right)\int_0^1 x^t\sin(\ln\frac{1}{x})\,dx=\frac{1}{(t+1)^2}$

$\therefore\int_0^1 x^t\sin(\ln\frac{1}{x})\,dx=\frac{1}{t^2+2t+2}$

$\therefore$ 原式 $=\int_a^b\frac{dt}{t^2+2t+2}$

$=\arctan(t+1)\Big|_a^b$

$=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)$

科目：微积分A(2)	章节： 2.3	做题人：施韶韵

1、(1) $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy$

$=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$

$=\int_a^b \frac{1}{y}dy = \ln\frac{b}{a}$

(2) 设 $I'(y)=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin yx\,dx$

则 $I(y)=\int_0^{+\infty}-e^{-ax^2}\cos yx\,dx$ (一致收敛)

又 $I'(y)=\frac{-1}{2a}e^{-ax^2}\sin yx\Big|_0^{+\infty}$

$+\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\,dx$

$=-\frac{y}{2a}I(y)$

解得 $I(y)=Ce^{-\frac{y^2}{4a}}$ 当 $y=0$ 时

$I(0)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$\therefore I(y)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$

$\therefore$ 原式 $=I'(y)=\frac{y}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$

(3) $\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\int_a^b\frac{\sin xy}{x}dy$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b\frac{\sin xy}{x}dy$

$=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$

$=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{xy}dxy$

$=\int_a^b\frac{\pi}{2}dy=\frac{\pi}{2}(b-a)$

2、(1) $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}dx$ 一致收敛

$I'(t)=\int_0^{+\infty}-xe^{-tx^2}x^{2n+1}dx$

$=\frac{1}{2t}e^{-tx^2}x^{2n+1}\Big|_0^{+\infty}-\frac{2n+1}{2t}\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}dx$

$=0-\frac{2n+1}{2t}I(t)$

解得 $I(t)=Ct^{-\frac{2n+1}{2}}$

又 $I(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2n}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}-2xe^{-x^2}x^{2n-1}dx$

$=-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}x^{2n-1}\Big|_0^{+\infty}+2n-1\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2n-2}dx\right)$

……

$=-\frac{(2n-1)!!}{2^n}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

$=-\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=C$

$\therefore C=-\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$

$\therefore I(t)=-\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}}$

科目：微积分A(2)	章节：2、3	做题人：施韶韵

(2) 令 $f(y)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$

则 $f'(y)=\int_0^{+\infty}-(n+1)\frac{dx}{(y+x^2)^{n+2}}$

$=-(n+1)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+2}}$

又令 $g(n)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$

则 $g(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{y+x^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^{+\infty}\frac{d(\frac{x}{\sqrt{y}})}{1+(\frac{x}{\sqrt{y}})^2}$

$=\frac{\pi}{2\sqrt{y}}$

又 $\frac{dg(n)}{dy}=-(n+1)g(n+1)$

$\therefore g(n)=\frac{1}{(-1)^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n g(0)}{dy^n}$

$=\frac{\pi(2n-1)!!}{n!\times 2^{n+1}}\cdot y^{-\frac{1}{2}-n}$

$=\frac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!}y^{-(n+\frac{1}{2})}$

科目:微积分	章节:第二章总复习题	做题人:邓志杰

2、证明：$\because \{X_k\}$为R^n中的Cauchy列

$\therefore \forall \varepsilon_1>0, \exists N>0$, 当$m,n>N$时，$\|X_m-X_n\|<\varepsilon_1$

$\because f: R^n \to R^m$一致连续.

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall X', X'' \in R^n: \|X'-X''\|<\delta, \|f(X')-f(X'')\|<\varepsilon$.

$\therefore$取$\varepsilon_1=\delta$有：

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \exists N>0$, 当$n,m>N$时，$\|X_m-X_n\|<\delta$,

$\therefore \|f(X')-f(X'')\|<\varepsilon$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists N>0$, 当$n,m>N$时，$\|f(X')-f(X'')\|<\varepsilon$.

$\therefore \{f(X_k)\}$为R^m中的Cauchy列.

3、证明：假设f在D上不是一致连续的

即$\exists \varepsilon_0>0$，使得$\forall \delta>0$，都可找到~~(X_{δ}, Y_{δ})~~，$X_\delta=(x_1,x_2)$ $Y_\delta=(y_1,y_2)$

且满足：$\|X_\delta-Y_\delta\|<\delta$且：$|f(X_\delta)-f(Y_\delta)|\geq\varepsilon_0$.

取$\delta=1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$则得$D$中两个点列$X_1,\cdots,X_n\cdots$与$Y_1\cdots Y_n\cdots$

满足$\|X_n-Y_n\|<\frac{1}{n}$且$|f(X_n)-f(Y_n)|\geq\varepsilon_0$. ——※

由于$\{X_n\}$有界，故存在收敛子列$\{X_{n_k}\}: X_{n_k}\to X_0\in[a,b]$

再由$|X_n-Y_n|<\frac{1}{n}$，知：$Y_{n_k}\to X_0$，而f在X_0点连续，于是：

$$\lim_{k\to\infty}(f(X_{n_k})-f(Y_{n_k}))\to f(X_0)-f(X_0)=0.$$

与※式矛盾

$\therefore f$在D上一致连续.

科目:微积分	章节:第二章总复习题	做题人:邓志杰

4. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$.

令 $I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(t^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$. $(t\geq 0)$.

$$\frac{\partial(\ln(t^2\sin^2x+b^2\cos^2x))}{\partial t}=\frac{2\sin^2x\cdot t}{\cancel{2}t^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{2t}{t^2+b^2\cot^2x}$$

~~$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t^2+b^2\cot^2x}dx$ 一致收敛. $g=2t$ 一致~~

$\therefore I'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t}{t^2+b^2\cot^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\cdot\sin^2x}{t^2\tan^2x+b^2}d\tan x$

令 $y=\tan x$ $\therefore I'(t)=2t\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{(t^2y^2+b^2)(y^2+1)}dy$.

$$=\frac{2t}{t^2-b^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2+(\frac{b}{t})^2}-\frac{1}{y^2+1}\right)dy$$

$$=\frac{\pi t}{bt+b^2}=\frac{\pi}{b}-\frac{\pi b}{bt+b^2}=\frac{\pi}{b}-\frac{\pi}{t+b}$$

$\therefore I(t)=\frac{\pi}{b}t-\pi\ln(t+b)+C$

又: $I(0)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln b+\ln\cos x)=2(\frac{\pi}{2}\ln b-\frac{\pi}{2}\ln 2)=\pi\ln b-\pi\ln 2$

$\therefore I(a)=\frac{\pi}{b}a-\pi\ln(a+b)+\pi\ln b+\pi\ln b-\pi\ln 2=\frac{a}{b}\pi-\pi\ln(a+b)+2\pi\ln b-\pi\ln 2$

(2). $a>0$ 时, $I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(y\tan x)}{\tan x}dx$.

$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{y^2\tan^2x+1}=\frac{1}{y^2\tan^2x+1}$

可验证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial y}dx$ 一致收敛

$I'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial y}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{y+1}$

$\therefore I(y)=\frac{\pi}{2}\ln(y+1)+C$.

$\because I(y)$ 在 $y=0$ 显然连续

$\therefore I(0)=C=0$ $\quad\therefore I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(a+1)$.

科目:微积分	章节:第二章总复习题	做题人:邓志浩

6.(1). $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}dx$.

令 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}dx$.

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x(1+x^2)}\cdot\frac{x}{1+x^2y^2}=\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$

$\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}dx\leq\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \int\frac{\partial f}{\partial y}dx$ 在 $y\in[0,+\infty)$ 上一致收敛.

$\therefore I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}dx$.

$=\frac{1}{y^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y^2}{x^2y^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\frac{1}{y^2-1}\left(y\arctan yx\Big|_0^{+\infty}-\arctan x\Big|_0^{+\infty}\right)$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{y+1}$.

$\therefore I(y)=\frac{\pi}{2}\ln(y+1)+C$ $\because I(0)=0=C$

$\therefore$ 原积分 $=\frac{\pi}{2}\ln(y+1)$.

(2). $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{y^2+x^2}dx$ $(y\geq 0)$.

令 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{y^2+x^2}dx$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2\cos x\cdot y}{(y^2+x^2)^2}$

$\therefore$ 由判别法 $\int\frac{\partial f}{\partial y}dx$ 一致收敛.

$\therefore I'(y)=\int_0^{+\infty}-\frac{2y\cos x}{(y^2+x^2)^2}dx$.

$=-2y\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+y^2)^2}dx$.

~~令 $I_n(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+y^2)^n}dx$~~

$\therefore I'(y)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-e^{-y}-e^{-y}}{y^2}=\frac{-\pi e^{-y}}{y}$

$\therefore I(y)$ 可求得:

$I(y)=\frac{\pi e^{-y}}{2y}$ ($y>0$时).

7.证明: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx$.

取 $\varepsilon=(\ln 2)\cdot\frac{\sin 1}{2}$, $\forall A>0$, 取 $A'=(A+1)$ $A''=\sqrt{2}(A+1)$ $y_0=\frac{1}{(A+1)^2}$

$\therefore \int_{A'}^{A''}\frac{\sin x^2y}{x}dx\geq\int_{A'}^{A''}\frac{\sin 1}{x}dx=\sin 1\cdot\ln x\Big|_{A'}^{A''}=(\ln\sqrt{2})\cdot\sin 1=\frac{\sin 1}{2}\ln 2=\varepsilon$.

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx$ 不一致收敛.

又:若 $y_1,y_2\in(0,+\infty)$,且, $\forall\varepsilon>0$.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y_1}{x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y_2}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y_1-\sin x^2y_2}{x}dx=\lim_{A\to+\infty}(y_1-y_2)\cdot\frac{A^2}{2}$.

$\therefore\exists\,\delta=\frac{\varepsilon}{A^2}$, 使当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时, $\lim_{A\to+\infty}(y_1-y_2)\cdot\frac{A^2}{2}<\varepsilon$.

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx$ 在 $y\in(0,+\infty)$ 时连续.

科目:微积分	章节:二	做题人:陈昊弘

第二章总复习题

1. 证明:$f(x,y)=\sin xy$ 在 R^2 上不一致连续.

证明:假设 $f(x,y)$ 在 R^2 上一致连续.

则对 $\varepsilon=1$,$\exists\delta>0$,使得当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$ 时

$|\sin x_1y_1-\sin x_2y_2|<\varepsilon=1$.

此时令 $\begin{cases}x_1=0\\ y_1=\frac{\pi}{\delta}\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{\delta}{2}\\ y_2=\frac{\pi}{\delta}\end{cases}$. 则 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{\delta}{2}<\delta$,

且 $\left|\sin x_1y_1-\sin x_2y_2\right|=\left|\sin 0-\sin\frac{\pi}{2}\right|=1$,矛盾!

故 $f(x,y)$ 在 R^2 上不一致连续。

5. 讨论下列积分在所给区间上的一致~~连续~~收敛性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx\ (-\infty<y<+\infty)$

解:考虑到 $\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\le\left|\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|=\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2}$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛. 故 $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$ 在 $-\infty<y<+\infty$ 上一致收敛

(2) $\int_0^1\ln(xy)dx\ (\frac{1}{2}<y<2)$.

解:考虑到 $|\ln(xy)|=|\ln x+\ln y|<|\ln x-\ln 2|=\ln 2-\ln x$

且 $\int_0^1(\ln 2-\ln x)dx=\ln 2-(x\ln x-x)\Big|_0^1=\ln 2+1$ 收敛

故$\int_0^1 \ln(xy)dx$在$\frac{1}{2}<y<2$上一致收敛

(3). $\int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx \ (n\in N^*)$

解：$\int_A^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = e^{-\frac{n}{2x^2}} \Big|_A^{+\infty} = 1 - e^{-\frac{n}{2A^2}}$

若$\int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx$对$n\in N^*$一致收敛.

则$\exists A \geq 1$, s.t. $\forall n\in N^*$ $\int_A^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} < 1-\frac{1}{e}$.

而当$n\in N^*$, $n>2A^2$时

$\int_A^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = 1 - e^{-\frac{n}{2A^2}} > 1 - e^{-1}$，矛盾！

故$\int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx$对$n=1,2,\cdots$不一致收敛.

(4). $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} \sin y \, dx \ (0<y<1)$

参考《吉米多维奇数学分析习题集学习指引》

(第三册~~二~~) 习题 3753

科目:微积分	章节: 二	做题人:陈禹弘

(5) $\int_1^{+\infty} e^{-yx^2}\sin y\,dx \quad (0\le y<+\infty)$

解：首先我们有：$|e^{-yx^2}\sin y|\le e^{-yx^2}\cdot y$. 其次

令 $f(y)=e^{-yx^2}\cdot y$. ($y\in[0,+\infty)$), 则 $f'(y)=e^{-yx^2}(1-x^2y)$

故当 $y=\frac{1}{x^2}$ 时 $f(y)$ 取到最大值. 即 $f(y)\le f(\frac{1}{x^2})=e^{-1}\cdot\frac{1}{x^2}$.

综合上面结论，我们得到：$|e^{-yx^2}\sin y|\le e^{-1}\cdot\frac{1}{x^2}$.

而 $\int_1^{+\infty}e^{-1}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛. 故 $\int_1^{+\infty}e^{-yx^2}\sin y\,dx$ 对 $0\le y<+\infty$

一致收敛.

(6). $\int_1^{+\infty} e^{-yx^2}\sin y\,dy \quad (0\le x<+\infty)$

解：当 $x=0$ 时 $\int_1^{+\infty}e^{-yx^2}\sin y\,dy=\int_1^{+\infty}\sin y\,dy$ 不收敛

故 $\int_1^{+\infty}e^{-yx^2}\sin y\,dy$ 对 $0\le x<+\infty$ 不一致收敛.