几何与代数(2)考试样题

一．填空题（每题 5 分，合计 35 分）

1．设 $f(x)=x^4-4x^3-1$ ，$g(x)=x^2-3x-1$，则 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的商式为

______________ ，余式为 ______________ .

2．设 $f(x)=x^2+(k+6)x+4k+2$，$g(x)=x^2+(k+2)x+2k$，当 k __________时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是一次的.

3．设 V 是 R 上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一个基，σ 是 V 上的线性变换，已知 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，则 σ 的所有的 2 维不变子空间为 ____.

4．设 σ 是 V 上的对称变换，满足 $\sigma^2=\varepsilon$，其中 ε 是恒等变换，则 $\forall\alpha,\beta\in V$，

$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=$ ________________.

5．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一个基，这个基的度量矩阵是

$$G=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{pmatrix}$$

令 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2$，则参数 $k=$______ 时 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3$ 与 γ 正交.

6．设 $F^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_i\in F\right\}$ 是数域 F 上的线性空间，定义

$$\sigma((x_1,x_2,\cdots,x_n)^T)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^T$$

则 $\ker\sigma=$ ______________________ ，$\operatorname{Im}\sigma$ 的维数为 _________.

7．设 A 是一个 6 阶矩阵，其特征多项式为 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^4$，若 A 的极小多项式为 $m_A(x)=(x+2)(x-1)^2$ ，A 的 Jordan 标准形有________种可能形式，

它们是 ____.

二．解答题（第 8 题 20 分，其余每题 15 分，合计 65 分）

8．设 W_1 和 W_2 是 R^4 的两个子空间，

$$W_1=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \mid x_1+2x_2-x_4=0\right\}$$

$W_2=L(\alpha_1,\alpha_2)$，其中 $\alpha_1=(1,-1,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,2,3)^T$.

求 W_1+W_2 及 $W_1\cap W_2$ 的基与维数.

9．求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形 J，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$.

10．令 σ 是线性空间 V 上的线性变换，且满足 $\sigma^2=\sigma$，证明

(1) $\ker\sigma=\left\{\xi-\sigma(\xi) \mid \xi\in V\right\}$；

(2) $V=\ker\sigma\oplus\operatorname{Im}\sigma$；

(3) 如果 τ 是 V 的一个线性变换，那么 $\ker\sigma$ 和 $\operatorname{Im}\sigma$ 都是 τ 的不变子空间的充分必要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

11．已知欧氏空间 V 的一个标准正交基是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $\alpha_0=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$，$\forall\alpha\in V$，定义变换

$$\sigma(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0$$

其中 k 为非零常数，

(1) 证明 σ 是 V 上的线性变换；

(2) 求 σ 在标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵；

(3) 证明 σ 是正交变换的充分必要条件是 $k=-\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.