数值分析习题课（三）

2015年春季学期

助教：王吴凡

习题总览

第六章：15、16、17、19、20、25
第七章：1、3、4、5、6、7、8、9、11、12、13
第八章：1、2、3、4、8、11

第六章15题

在$-4 \leq x \leq 4$上给出$f(x) = e^x$的等距节点函数表，若用二次插值求e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长h应取多少？

解：

取三个点x_{i-1}，x_i，$x_{i+1} \in [-4, 4]$并满足

$$x_i = x_{i-1} + h, x_{i+1} = x_i + h$$

则截断误差为

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}), \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

由于

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{6} \max_{x_{i-1}<\xi<x_{i+1}} |f'''(\xi)| \max_{x_{i-1}<x<x_{i+1}} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

且

$$\max_{x_{i-1}<\xi<x_{i+1}} |f'''(\xi)| = e^4$$

第六章15题

$$\max_{x_{i-1}<x<x_{i+1}} |(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

设

$$x-x_i=t\times h,(-1\le t\le 1)$$

则

$$(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})=t(t-1)(t+1)h^3$$

对$f(t)=t(t-1)(t+1)$求导，可知当$f'(t)=3t^2-1=0$时取得最大值。

比较端点和导数为零的点，可得

$$\max_{-1<t<1}|f(t)|=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

所以$|R_2(x)|\le\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3\le 10^{-6}$，即$h\le 0.006585$。

第六章16题

若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$，有$n$个不同的实零点$x_1,x_2,\dots,x_n$，证明：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, 0\le k\le n-2\\ {a_n}^{-1}, k=n-1\end{cases}$$

证明：

$f(x)$可写为

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

$$\Rightarrow f'(x_j)=a_n(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)$$

设$g(x)=x^k$，则其k阶差商可表示为：

$$g[x_1,x_2,\dots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

定理6.8

第六章16题

$$g[x_1,\dots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\frac{{x_j}^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}g[x_1,\dots,x_n]=\frac{1}{a_n}\times\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

推论(6.64)

$$f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

因此，

当$0\le k\le n-2$时，$g^{(n-1)}(\xi)=0$；

当$k=n-1$时，$g^{(n-1)}(\xi)=(\mathrm{n}-1)!$

第六章17题

$f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求$f[2^0,2^1,\ldots,2^7]$及$f[2^0,2^1,\ldots,2^8]$。

解：

由于对于任意x，$f^{(7)}(x)=7!$且$f^{(8)}(x)=0$

因此存在$\xi_1\in(2^0,2^7)$、$\xi_2\in(2^0,2^8)$，使得

$$f[2^0,2^1,\ldots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi_1)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f[2^0,2^1,\ldots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\xi_2)}{8!}=0$$

推论(6.64)

第六章19题

证明两点三次埃尔米特差值余项是

$$R_3(x)=\frac{f^4(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}{4!},\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

并由此求出分段三次埃尔米特差值的误差限

解：

Hermite插值条件为

$$H_3(x_k)=f(x_k)\quad H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1})$$

$$H_3'(x_k)=f'(x_k)\quad H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$$

设插值余项函数$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$，有

$$R_3(x_k)=0\quad R_3(x_{k+1})=0$$

$$R_3'(x_k)=0\quad R_3'(x_{k+1})=0$$

因此，x_k,x_{k+1}是$R_3(x)$的二重零点，从而可以把差值余项看作与x有关的待定函数，即设

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

其中$K(x)$是与x有关的待定函数，只要解出$K(x)$即可。

第六章19题

把x看作是插值区间$[x_k, x_{k+1}]$上的一个固定点，作函数

$$\varphi(t) = f(t) - H_3(t) - K(t)(t - x_k)^2(t - x_{k+1})^2$$

根据插值条件及余项定义，可知

$$\varphi(x) = \varphi(x_k) = \varphi(x_{k+1}) = 0$$

$$\varphi'(x_k) = \varphi'(x_{k+1}) = 0$$

在区间$[x_k, x]$和$[x, x_{k+1}]$上对$\varphi(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_1 \in (x_k, x)$及$\eta_2 \in (x, x_{k+1})$，使得$\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$

在区间(x_k, η_1)，(η_1, η_2)，(η_2, x_{k+1})上对$\varphi'(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_{k1} \in (x_k, \eta_1)$，$\eta_{12} \in (\eta_1, \eta_2)$，$\eta_{2(\mathrm{k}+1)} \in (\eta_2, x_{k+1})$，使得$\varphi''(\eta_{k1}) = \varphi''(\eta_{12}) = \varphi''\left(\eta_{2(k+1)}\right) = 0$

第六章19题

在区间(η_{k1},η_{12})和$\left(\eta_{12},\eta_{2(k+1)}\right)$上对$\varphi''(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_{k12}\in(\eta_{k1},\eta_{12})$及$\eta_{12(k+1)}\in(\eta_{12},\eta_{2(k+1)})$，使得$\varphi'''(\eta_{k12})=\varphi'''\left(\eta_{12(k+1)}\right)=0$

最后，在区间$\left(\eta_{k12},\eta_{12(k+1)}\right)$上对$\varphi'''(t)$应用Rolle定理，可知存在$\xi\in(\eta_{k12},\eta_{12(k+1)})\subset(x_k,x_{k+1})$，使得$\varphi^{(4)}(\xi)=0$。

由于

$$\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-4!\,K(x)$$

所以

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\,K(x)=0$$

即

$$K(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

第六章19题

最终

$$R_3(x)=K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$,\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

求误差限

$$\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2|=\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|^2$$

$$\le\left|\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2\right|^2=\frac{h^4}{16}$$

因此

$$|R_3(x)|\le\frac{1}{384}h^4\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(\xi)|$$

第六章20题

求一个次数不高于4次的多项式$P(x)$，使它满足$P(0)=P'(0)=0$，$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$。

解：

设$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2$

则由已知条件可得

$$\begin{cases} a_4+a_3+a_2=1 \\ 16a_4+8a_3+4a_2=1 \\ 4a_4+3a_3+2a_2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_4=\dfrac{1}{4} \\ a_3=-\dfrac{3}{2} \\ a_2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

因此，

$$P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2$$

第六章25题

设$f(x) \in C^2[a,b]$，$S(x)$是三次样条函数，试证明：

(1)

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx$$

$$= \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx + 2\int_a^b S''(x)[f''(x) - S''(x)] dx$$

(2)

若$f(x_i) = S(x_i)(i = 0,1,\dots,n)$，式中$x_i$为插值节点，且$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则

$$\int_a^b S''(x)[f''(x) - S''(x)] dx$$

$$= S''(b)[f'(b) - S'(b)] - S''(a)[f'(a) - S'(a)]$$

第六章25题

证明：

(1)

$$\int_a^b [f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

$$=\int_a^b [[f''(x)]^2-2f''(x)S''(x)+[S''(x)]^2+2f''(x)S''(x)-2[S''(x)]^2]dx$$

$$=\int_a^b [[f''(x)]^2-[S''(x)]^2]dx \ =\int_a^b [f''(x)]^2dx-\int_a^b [S''(x)]^2dx$$

第六章25题

(2)

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

$$=S''(x)[f'(x)-S'(x)]|_a^b-\int_a^b S'''(x)[f'(x)-S'(x)]dx$$

由于$S(x)$为三次多项式，可知$S'''(x)$为常数，因此有

$$\int_a^b S'''(x)[f'(x)-S'(x)]dx=S'''(x)\big(f(x)-S(x)\big)|_a^b=0$$

即得

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

$$=S''(x)[f'(x)-S'(x)]|_a^b$$

$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)]$$

第七章1题

确定求积公式中积分系数或积分节点的待定值，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度：

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

按照定义，验证公式对$f(x) = x^n$何时不成立

将$f(x) = 1, x, x^2$分别代入求积公式

$$\begin{cases} 4h = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = -2hA_{-1} + 2hA_1 \\ \dfrac{16}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1 \end{cases}$$

解，得

$$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h \quad A_0 = -\frac{4}{3}h$$

第七章1题

因此原求积公式至少具有2次代数精度。

再将$f(x)=x^3$代入求积公式

$$左边=0=右边$$

再将按照定义，验证公式对$f(x)=x^n$何时不成立

将$f(x)=x^4$代入求积公式

$$左边=\frac{64}{5}h^5\neq右边=\frac{16}{3}h^5$$

所以，原求积公式的代数精度是3。

第七章3题

直接验证柯特斯公式

$$C=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

具有5次代数精度。

解：对$\int_a^b f(x)dx \approx C$，其中$x_k=a+kh$，其中$k=0,1,2,3,4,h=\frac{b-a}{4}$

当$f(x)$分别为$1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6$时，

1. $\int_a^b 1dx = b-a$，右边$= b-a$
2. $\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$，右边$= \frac{1}{2}(b^2-a^2)$
3. $\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$，右边$= \frac{1}{2}(b^2-a^2)$
4. $\int_a^b x^3dx = \frac{1}{4}(b^4-a^4)$，右边$= \frac{1}{4}(b^4-a^4)$
5. $\int_a^b x^4dx = \frac{1}{5}(b^5-a^5)$，右边$= \frac{1}{5}(b^5-a^5)$
6. $\int_a^b x^5dx = \frac{1}{6}(b^6-a^6)$，右边$= \frac{1}{6}(b^6-a^6)$
7. $\int_a^b x^6dx = \frac{1}{7}(b^7-a^7)$，右边$\neq \frac{1}{7}(b^7-a^7)$

因此柯特斯公式具有5次代数精度！

第七章4题

用辛普森公式求积分$\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差。

解：

辛普森公式（课本244页）为

$$S(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

因此有

$$S=\frac{1-0}{6}[e^{-0}+e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}]\approx 0.6323337$$

课本246页

误差

$$|R[f]|=|-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)|\le\frac{1}{2880}\times e^0\approx 0.0003472$$

第七章5题

证明下列等式，它们分别说明了三种矩形求积公式及其余项公式。

(1) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2, \eta \in (a,b)$

(2) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3, \eta \in (a,b)$

证明：

(1) 不妨设$f(x)$在$[a,b]$上连续可微，在$x=a$处对$f(x)$作泰勒展开为

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a), \xi \in (a,x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

$$= (b-a)f(a) + \int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

由积分中值定理可知存在$\eta \in (a,b)$，有

$$\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx = f'(\eta)\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2$$

因此原式得证。

第七章5题

证明：

(2) 不妨设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可微，在$x=\frac{a+b}{2}$处对$f(x)$作泰勒展开

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2,$$

其中$\xi\in(a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3,\eta\in(a,b)$$

因此原式得证。

第七章6题

对积分$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx$, $n = 8$分别用复合梯形公式和复合辛普森公式计算，其中n表示计算中使用$n + 1$个区间等分点上的函数值，然后比较两种方法计算结果的准确度：

解：

利用复合梯形公式，有$h = \frac{1}{8}, x_k = \frac{1}{8}k\ (k = 1,2, \dots .7)$

因此

$$T_8 = \frac{h}{2}[f(0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(x_k) + f(1)] \approx 0.1114024$$

利用复合辛普森公式，有$h = \frac{1}{8}, x_k = \frac{1}{8}k\ (k = 1,2, \dots .7), x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}k + \frac{1}{16}$

$$S_8 = \frac{h}{6}[f(0) + 4\sum_{k=0}^{7} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + 2\sum_{k=1}^{7} f(x_k) + f(1)] \approx 0.1115718$$

因$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx = \left(\frac{\ln(x^2+4)}{2} + c\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4) \approx 0.1115717757$

因此复合辛普森公式计算精度更高。

第七章7题

若用复合梯形公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间[0,1]应该分成多少等分才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$？若改用复合辛普森公式，要达到同样精度区间[0,1]应该分多少等分？

解：假设应为n等分，则步长$h=\frac{1}{n}$

复化梯形公式的积分余项是

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

（课本248页）

此时

$$|R_n(f)|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|=\left|-\frac{e^\eta}{12n^2}\right|=\frac{e^\eta}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-5},\eta\in(0,1)$$

因此

$$n\ge\sqrt{\frac{e}{6}\times 10^5}\approx 212.8$$

所以应该至少分成213等分，方可满足题意。

第七章7题

复化Simpson公式的积分余项是

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

此时

$$|R_n(f)| = \left|-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)\ \right| = \left|-\frac{1}{2880}\times\frac{e^{\eta}}{n^2}\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5},$$

$$\eta \in (0,1)$$

因此

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{e}{1440}\times 10^5} \approx 3.7$$

所以应该至少分成4等分，方可满足题意。

第七章8题

如果$f''(x)>0$，证明用梯形公式计算积分$I=\int_a^b f(x)dx$所得结果比准确值I大，并说明其几何意义。

解：

若有$f''(x)>0$，因梯形公式的余项为

$$R_T=I(f)-T(f)=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$$

（课本246页）

因$(b-a)^3>0$，故$R_T<0$，即有$I(f)<T(f)$。

几何意义为：$f''(x)>0$，$f(x)$为下凸函数，曲线在梯形弦的下方，故梯形面积大。

第七章9题

用龙贝格求积算法计算下列积分，误差阈值设为10^{-5}：$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$

Romberg公式：
$$\begin{cases} T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ T_0^{(k+1)} = \frac{1}{2}T_0^{(k)} + \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{2^k-1} f[a+i(b-a)] \\ T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)} \end{cases}$$

构造T数表（250页7.27 253页7.72）

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{h}$	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1	0.7717433			
1	$\frac{1}{2}$	0.7280699	0.7135121		
2	$\frac{1}{4}$	0.7169828	0.7132870	0.7132720	
3	$\frac{1}{8}$	0.7142002	0.7132726	0.7132717	0.7132717

若要求误差不超过10^{-5}，可取积分值为0.7132717。

第七章11题

用$n=2,3$的高斯-勒让德公式分别计算积分

$$\int_1^3 e^x sinxdx$$

2阶和3阶高斯勒让德求积公式为(262页表7-5)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.5555556\times f(-0.7745967)+0.8888889\times f(0)$$
$$+0.5555556\times f(0.7745967)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.3478548\times f(-0.8611363)$$
$$+0.6521452\times f(-0.3399810)$$
$$+0.6521452\times f(0.3399810)+0.3478548\times f(0.8611363)$$

因为$x\in[1,3]$,令$t=x-2$，则$t\in[1,1]$，故

$$\int_1^3 e^x sinxdx = \int_{-1}^{1} e^{t-2}\sin(t+2)\,dt$$

第七章11题

经过变换以后的本题求积结果为：

$$G_2 = 0.5555556 \times f(-0.7745967) + 0.8888889 \times f(0)$$
$$+0.5555556 \times f(0.7745967) \approx 10.9484$$
$$G_3 \approx 10.95014$$

理论值：

$$\frac{1}{2}(e^x sinx - e^x cosx)|_1^3 = 10.9502$$

第七章12题

将积分区间分为四等分，用复合两点高斯公式计算积分$\int_1^3 \frac{dy}{y}$

$$\int_1^3 \frac{1}{y}dy = \int_1^{1.5} \frac{dy}{y} + \int_{1.5}^{2} \frac{dy}{y} + \int_{2}^{2.5} \frac{dy}{y} + \int_{2.5}^{3} \frac{dy}{y}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{0.5dt}{0.5t + 2.5} + \int_{-1}^{1} \frac{0.5dt}{0.5t + 3.5} + \int_{-1}^{1} \frac{0.5dt}{0.5t + 4.5} + \int_{-1}^{1} \frac{0.5dt}{0.5t + 5.5}$$

$$\approx 1.0985376$$

第七章13题

假定$h=0.2$时用向前差分公式得到导数的近似值为-0.8333，在$h=0.1$时用向前差分公式得到导数的近似值为-0.9091，用理查森外推方法求导数的更好的近似值。

假定$h=0.2$时向前差分公式导数近似值-0.8333，　$h=0.1$时导数近似值-0.9091，用理查森外推方法求倒数可得到更好近似值。

向前差分公式的展开式为

$$D_f(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)\ldots$$

$$D_f\left(\frac{h}{2}\right)=f'(x)+\frac{h}{4}f''(x)+\frac{h^2}{24}f'''(x)\ldots$$

第七章13题

由以上两式可得

$$f'(x) = \left[2D_f\left(\frac{h}{2}\right) - D_f(h)\right] + O(h^2)$$

$$D_f^1(h) = 2D_f\left(\frac{h}{2}\right) - D_f(h)$$

更好的近似值为

$$D_f^1(0.2) = 2 \times (-0.9091) - (-0.8333) = -0.9849$$

很多同学误用了中心差分公式的外推式：

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[4D_c\left(\frac{h}{2}\right) - D_c(h)\right] = -0.9344$$

第八章1题

写出与下列常微分方程等价的1阶常微分方程组。

Van der Pol方程：

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Blasius方程：

$$y^{(3)} = -y'y''$$

两体运动的牛顿第二运动定律：

$$\begin{cases} y_1'' = -\dfrac{GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y_2'' = -\dfrac{GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

第八章1题

Van der Pol方程：

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

设$u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t)$，则等价的常微分方程组为：

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_2(1 - u_1^2) - u_1 \end{cases}$$

Blasius方程：

$$y^{(3)} = -y'y''$$

设$u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t), u_3(t) = y''(t)$，则等价的常微分方程组为：

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = -u_2 u_3 \end{cases}$$

第八章1题

两体运动的牛顿第二运动定律：

设$u_1(t)=y_1(t), u_2(t)=y_1'(t), u_3(t)=y_2(t), u_4(t)=y_2'(t)$，则等价的常微分方程组为：

$$\begin{cases} u_1'=u_2 \\ u_3'=u_4 \\ u_2'=-\dfrac{GMu_1}{(u_1^2+u_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ u_4'=-\dfrac{GMu_3}{(u_1^2+u_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

第八章2题

将下述积分的计算看成常微分方程初值问题：

$$\int_0^x e^{t^2} dt$$

利用欧拉方法计算$x = 0.5, 1, 1.5, 2$时该积分的近似值。

解：

令$y(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 则有

$$\begin{cases} y'(x) = e^{x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

应用欧拉法有$y_{n+1} = y_n + h \times e^{x^2}$，其中$h$为步长，则

$$y(0.5) \approx y_1 = 0.5$$

$$y(1) \approx y_2 = 1.142$$

$$y(1.5) \approx y_3 = 2.501$$

$$y(2) \approx y_4 = 7.245$$

第八章3题

用梯形法解初值问题：

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

证明其近似解为

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

并证明当$h \longrightarrow 0$时，它收敛于原初值问题的准确解$y = e^{-t}$。

梯形公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

由题意可知$f(x,y) = -y$，因此可得：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[-y_n - y_{n+1})] \Rightarrow y_{n+1} = \left(\frac{2-h_n}{2+h_n}\right)y_n$$

由于$y(0) = 1$，可得

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

第八章3题

令$t = nh \Rightarrow n = \frac{t}{h}$，因此有

$$y_n = (\frac{2-h}{2+h})^{\frac{t}{h}}$$

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}(\frac{2-h}{2+h})^{\frac{t}{h}} = \lim_{h\to 0}(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{t}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}[(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{2+h}{2h}}]^{\frac{2h}{2+h}\times\frac{t}{h}} = e^{-t}$$

第八章4题

在向后欧拉法的计算中，一般需求解关于y_{n+1}的非线性方程，若使用牛顿法求解，试推导相应的递推计算公式。

向后欧拉法：

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

令$G(y) = y - y_n - h_n f(t_{n+1}, y)$，有

$$G'(y) = 1 - h_n \frac{\partial f(t_{n+1}, y)}{\partial y}$$

令y_k为第k轮迭代值，有牛顿法可得：

$$y_{k+1} = y_k - \frac{y_k - y_n - h_n f(t_{n+1}, y_k)}{1 - h_n \frac{\partial f(t_{n+1}, y_k)}{\partial y}}$$

第八章8题

根据模型问题(8.7)，验证4阶经典龙格–库塔公式(8.38)具有4阶准确度，并推导其保持稳定时满足的不等式(8.41)。

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

应用于龙格–库塔公式：

$$\begin{cases} K_1 = \lambda y_n \\ K_2 = \lambda\left(y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right) = \lambda y_n + \lambda^2\dfrac{h}{2}y_n \\ K_3 = \lambda\left(y_n + \dfrac{h}{2}K_2\right) = \lambda y_n + \lambda^2\dfrac{h}{2}y_n + \lambda^3\dfrac{h^2}{4}y_n \\ K_4 = \lambda(y_n + hK_3) = \lambda y_n + \lambda^2 h y_n + \lambda^3\dfrac{h^2}{2}y_n + \lambda^4\dfrac{h^3}{4}y_n \end{cases}$$

$$y_{n+1} = (1 + \lambda h + \lambda^2\frac{h^2}{2} + \lambda^3\frac{h^3}{6} + \lambda^4\frac{h^4}{24})y_n$$

第八章8题

因此有

$$
\begin{aligned}
&y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= \left(y(t_{n+1}) - y(t_n)\right) - \left(y_{n+1} - y(t_n)\right) \\
&= y(t_n)[e^{h\lambda} - 1 - \lambda h - \lambda^2 \frac{h^2}{2} - \lambda^3 \frac{h^3}{6} - \lambda^4 \frac{h^4}{24}] \\
&= \lambda^5 \frac{h^5}{5!} + O(h^6)
\end{aligned}
$$

故龙格库塔公式具有4阶准确度。

第八章8题

如果存在扰动：

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n[1 + \lambda h + \lambda^2 \frac{h^2}{2} + \lambda^3 \frac{h^3}{6} + \lambda^4 \frac{h^4}{24}]$$

稳定时要求

$$|\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}| \leq 1$$

因此

$$|1 + \lambda h + \lambda^2 \frac{h^2}{2} + \lambda^3 \frac{h^3}{6} + \lambda^4 \frac{h^4}{24}| \leq 1$$

第八章11题

对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -100(y - t^2) + 2t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(1) 用欧拉法求解，步长h取什么范围的值，才能使计算稳定？
(2) 若用4阶龙格-库塔法计算，步长h如何选取？
(3) 若用梯形公式计算，对步长h有无限制？ ‘

解：

(1) 因欧拉法的绝对稳定区间为$|1 + h\lambda| \leq 1$。即$|1 - 100h| \leq 1$，解得$0 < h \leq 0.02$时稳定。

(2) 因4阶龙格-库塔法的绝对稳定区间对步长的限制为$h \leq \frac{-2.78}{\lambda}$，即有$0 < h \leq 0.0278$。

(3) 因梯形法的稳定区间为$0 < h < \infty$，因此步长无限制。

谢谢！

预祝大家期末收获好成绩！ :）