信号处理原理
第二次作业

1. 证明：$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

解：$u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

由卷积定义

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

而 $u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t>\tau \\ 0, & t<\tau \end{cases}$

故上式 $= \int_{-\infty}^{t} 1 \cdot f(\tau)d\tau +$

$$\int_{t}^{\infty} 0 \cdot f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

[注] 此题也可利用课上所讲卷积的性质 $(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$ 来做，具体做法如下：

$$f(t) * u(t) = (f * u)^{(0)}(t)$$

$$= f^{(-1)}(t) * u^{(1)}(t)$$

下面证明 $u^{(1)}(t) = \delta(t)$ 为冲激函数

利用PPT上定义(1)

$$u^{(1)}(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

且 $\int_{-\infty}^{\infty} u^{(1)}(t)dt = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} \frac{du}{dt}dt$

$$= \int_{t=-\infty}^{t=\infty} du = u(t)\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = 1$$

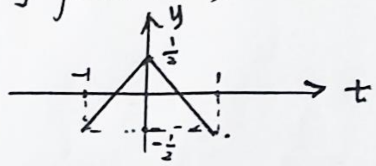
故 $u^{(1)}(t) = \delta(t)$

即 $f^{(-1)}(t) * u^{(1)}(t) = f^{(-1)}(t) * \delta(t)$

$= f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 得证

2. 绘出 $f(t)$ 的波形，并判断其是否是周期信号，求出T.

解：信号 $f_0(t)$ 波形如下：

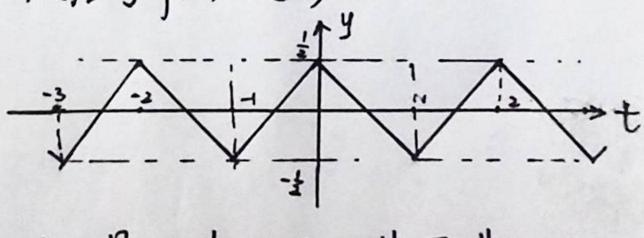


由冲激函数搬移特性

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t) * \delta(t-2n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t-2n)$$

故信号 $f(t)$ 波形如下：



$f(t)$ 是周期信号，其周期 $T=2$.

下面给出证明：对 $\forall t$

$$f(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+T-2n)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0[t-(n-1)\cdot 2]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t-2n)=f(t).$$ 故 $T=2$ 是 $f(t)$ 的周期.

假设 $f(t)$ 存在一个周期 $T'<T$ $(T'>0)$.

若 $T'\leq 1$，则 $f(t)$ 和 $f(t+T)$ 对 $\forall t$ 同属于单调区间(严格)，

$f(t)\neq f(t+T)$

若 $T'\in(1,2)$，则方程 $\begin{cases} f(\frac{1}{3}+T')=f(\frac{1}{3}) \\ f(\frac{1}{2}+T')=f(\frac{1}{2}) \end{cases}$，$T'\in(1,2)$ 必有解.

而 $\begin{cases} -1+(\frac{1}{3}+T')=\frac{2}{3} \\ -1+(\frac{1}{2}+T')=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow T'$ 无解.

故不存在上面所述 T'，

综上，$f(t)$ 是周期信号，且周期为 2.