第三次习题课

April 29, 2016

1.设随机变量 X有密度函数为

$$f(x) = 6x(1-x), 0 < x < 1.$$

求一个函数$h(x)$，使得$Y = h(X)$的密度函数为

$$g(y) = 12y^3(1-y^2), 0 < y < 1.$$

2. 设随机变量X, Y的联合密度为：

$$f(x,y) = \exp(-x-y), x \geq 0, y \geq 0.$$

如果$U = X/Y, V = X+Y$，求 U, V的联合密度函数。

3.设随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = cxy, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x.$$

（1）X, Y是否独立？；（2）求 $P(1/2 < X < 1), P(Y \geq 1), P(1/2 < X < 1, Y \geq 1)$.

4.证明：如果X与自己独立，则存在常数c，使得$P(X = c) = 1$.

5.设随机变量X, Y, Z的联合密度函数为

$$f(x,y,z) = (1 - \sin x \sin y \sin z)/(8 * \pi^2), 0 \leq x, y, z \leq 2\pi.$$

证明：X, Y, Z两两独立，但不相互独立。

6.设随机变量$\xi_1, ..., \xi_n$相互独立，且ξ_i服从参数为λ_i的指数分布，证明：

$$P(\xi_i = \min(\xi_1, ..., \xi_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

7.设随机变量$\xi_1, ..., \xi_r$相互独立，且ξ_i服从相同的几何分布，证明：给定$\xi_1 + \cdots + \xi_r = n$的条件下，$(\xi_1, ..., \xi_r)$是均匀分布：即

$$P(\xi_1 = n_1, ..., \xi_r = n_r | \xi_1 + \cdots + \xi_r = n) = \frac{1}{\binom{n-1}{r-1}}.$$

其中，$n_1+\cdots+n_r=n$。

8.设X,Y都服从标准正态分布，且相互独立，$U=X^2+Y^2, V=X/Y$,证明U,V相互独立。

9.设随机变量$X_1,...,X_n$,独立同分布，证明：

$$P(X_n>\max(X_1,...,X_{n-1}))=1/n.$$

10.设X,Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=x+y, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1.$$

求(1) X,Y的协方差和相关系数 (2) $E(Y|X)$ (3) $E(X|Y)$.