（A 卷）

2013 年“数值分析”期末试卷

若算近似值，请将结果保留小数点后三位数字！

(第一题与第四题的答案请直接写在试卷上)

一. 填空、选择、判断题（17 分）

1. 下面哪两个数值方法（或算法）存在数值稳定性问题：___ ， ___

(A) 求解线性方程组的列选主元高斯消元法.

(B) 求解三对角线性方程组的“追赶法”.

(C) 对称正定矩阵的 Cholesky 分解算法.

(D) 求解矩阵特征值问题的 QR 算法.

(E) 拉格朗日插值法.

(F) 三次样条插值方法.

(G) 计算数值积分的高斯积分方法.

2. 计算机中的浮点数x具有一般形式$x=\pm\left(d_0+\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2^2}+\cdots+\frac{d_{p-1}}{2^{p-1}}\right)\times 2^E$，在某个规范化的浮点数系统中$p=4$, 指数$E$的最小、最大值分别为–2, 2，则该系统的机器精度为_______，能表示的最大数为________ .

3. 判断题（在题后“( )”中打√或×）：

(A) 条件数是反映问题病态性的量，其值大于或等于 1. （ ）

(B) 一个计算过程的结果准确度主要受数据误差、截断误差、舍入误差三种误差影响.（ ）

(C) 对角占优的矩阵一定非奇异. （ ）

4. 用牛顿法求方程$x^3-\frac{1}{3}=0, x\in\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}},1\right]$的根，则迭代公式为________________，对其收敛性的正确描述为：______ （不定项选择）

(A)在区间$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}},1\right]$上全局收敛, (B)局部 1 阶收敛, (C)局部 2 阶收敛, (D)局部 3 阶收敛.

5. 矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 0.5 & 2\\ 0.5 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$，则用圆盘定理估计出$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2$的上限为_______.

6. 已知$p(x)=x^2-x+1$，求次数最低的多项式$q(x)=$___________________，它满足：当$x=-2,-1,0$时$q(x)=p(x)$，当$x=1$时, $q(x)=19$.

二．对下述矩阵进行部分主元的 LU 分解，写出得到的矩阵$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{P}$.（6 分）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

三. 用函数形式$y(t)=x_1+x_2t^2$来拟合如下一组数据点：

t_i	0	1	2	3
y_i	1	1	2	3.5

(1) 写出相应的线性最小二乘问题$\boldsymbol{Ax}\cong\boldsymbol{b}$,即写出其中的矩阵$\boldsymbol{A}$与向量$\boldsymbol{b}$;

(2) 使用正交化方法(QR 分解)求解此最小二乘问题，求拟合系数x_1, x_2. （8 分）

四. 下面分别给出了求解线性方程组的高斯消去过程与矩阵的 Cholesky 分解的算法描述，请补充完整其中遗漏的两行语句(第 6 行与第 8 行)。（7 分）

求解线性方程组的高斯消去过程算法

输入：$\boldsymbol{A}$, n, $\boldsymbol{b}$; 输出：$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$.
(1) **For** k=1, 2, …, n-1
(2) **If** $a_{kk}=0$ **then** 停止 ;
(3) **For** i=k+1, k+2,…, n
(4) $c:=-a_{ik}/a_{kk}$;
(5) **For** j=k+1, k+2, …, n
(6)
(7) **End**
(8) $b_i:=b_i+cb_k$;
(9) **End**
(10) **End**

对称正定矩阵的 Cholesky 分解算法(仅用$\boldsymbol{A}$的下三角)

输入：$\boldsymbol{A}$, n; 输出：$\boldsymbol{A}$.
(1) **For** j=1, 2, …, n
(2) **For** k=1, 2, …, j-1
(3) $a_{jj}:=a_{jj}-a_{jk}^2$;
(4) **End**
(5) $a_{jj}:=\sqrt{a_{jj}}$;
(6) **For** i=j+1, j+2, …, n
(7) **For** k=1, 2, …, j-1
(8)
(9) **End**
(10) $a_{ij}:=a_{ij}/a_{jj}$;
(11) **End**
(12) **End**

五. 用数值方法计算积分$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2}dx$,
(1) 使用 Romberg 积分算法，进行一次步长折半与外推，计算I的近似值;
(2) 右侧表格为 Gauss-Legendre 求积公式的积分节点x_k和系数A_k，根据高斯积分的定义计算 n=2 情况下的x_1和A_1;
(3) 采用 Gauss-Legendre 公式，并且计算函数值的次数与(1)相同，重新计算I的近似值，比较它与(1)的结果谁更准确？(已知I的准确值保留四位小数的结果为0.8704). （8 分）

n	x_k	A_k
0	0	2
1	$\pm\sqrt{3}/3$	1
2	0, $\pm x_1$	8/9, A_1
3	±0.8611363, ±0.3399810	0.3478548, 0.6521452
…	…	…

六. 常微分方程初值问题为$\begin{cases} y'=t^2-3y,\ 0\le t\le 4 \\ y(0)=0 \end{cases}$,
(1)采用欧拉法求解，步长 h=1，求解该问题得到$y(4)$的近似值;
(2)采用向后欧拉法求解，步长 h=1，求解该问题得到$y(4)$的近似值;
(3)参考$y(4)$的准确解（保留四位小数的结果为4.5185），比较(1), (2)两种方法的准确度，从稳定性角度分析原因. （7 分）

七. 试证明：若矩阵$\boldsymbol{A}$严格对角占优，则求解方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的 Gauss-Seidel 迭代法收敛. （7 分）