

# 习题 (10, 13,15)

林衍凯

December 27, 2016

## 有限集合的基数

- 定理 9.6.3: 基数的基本运算
- 定理 9.6.4 : 包含排斥原理 (容斥原理)

求 1 到 250 之间能被 2、3、5 中任何一个数整除的整数的个数。

$$|A| = 125, |B| = 83, |C| = 50$$

$$|A \cap B| = 41, |A \cap C| = 25, |B \cap C| = 16$$

$$|A \cap B \cap C| = 8$$

$$|A \cup B \cup C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 125 + 83 + 50 - 41 - 25 - 16 + 8$$

$$= 184$$

设  $R$  是  $A$  上的传递和自反的关系,  $T$  是  $A$  上的关系,  
 $aTb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa$ , 证明  $T$  是等价关系

① 证明

- 自反性
- 反对称性
- 传递性

② 易错点

- 没有同时证明三个性质

$\mathbb{Z}_+$  是正整数集,  $D$  是  $\mathbb{Z}_+$  上的整除关系,  $T = \{1, 2, \dots, 10\}$ , 求  $T$  在  $\langle \mathbb{Z}_+, D \rangle$  中的上界、下界、上确界、下确界

- 上界: “大于等于  $T$  中每个数, 上确界: 最“小”的上界
- 下界: “小于等于  $T$  中每个数, 下确界: 最“大”的下界
- 在整除中
  - 上界:  $T$  中数的公倍数, 上确界: 最小公倍数
  - 下界:  $T$  中数的公约数, 下确界: 最大公约数
- 在本题中
  - 上界:  $cm(T) = 2520n$ , 上确界:  $lcm(T) = 2520$
  - 下界:  $cd(T) = 1$ , 下确界:  $gcd(T) = 1$

设  $R$  是  $A$  上的偏序关系,  $B \subseteq A$ , 证明  $R \cap (B \times B)$  是  $B$  上的偏序关系。

① 证明

- 自反性
- 反对称性
- 传递性

② 易错点

- 没有同时证明三个性质
- 性质概念错误（和等价关系搞混）

- 2. 用等势定义证明  $[0, 1] \approx [a, b]$
- 9. 证明平面直角坐标系中所有整数坐标点的集合为可数集
- 10. 计算集合的基数: (6)  $\mathbb{N}_{\mathbb{N}}$  (7)  $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$
- 注意掌握证明以下集合等势或无穷基数相等的方法
  - $\mathbb{N}_{\mathbb{N}}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^k, [0, 1], [0, 1), (0, 1)$
  - $2^m, m^m, k^m, 2^{m^k}, 2^{\theta(m)}$ , 其中  $k \leq m$
- 常用证明方法:
  - 求出双射, 或者证明互相存在单射
  - 求出基数和某个基数相等, 或者大于等于且小于等于同一个基数

例子：证明  $[0, 1] \approx (0, 1)$ （无限集合可以和其真子集等势，而有限集合不能）

- 构造双射函数如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{当 } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } x = 1 \\ \frac{x}{4} & \text{当 } x = 2^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots \\ x & \text{当 } x \text{ 取其他值} \end{cases} \quad (1)$$