线性代数与几何（下）

第十章课后习题答案

计三团

感谢计三年级同学无私奉献！

线性代数	章节： 10	做题人： 张熙炎/杜华峰

1. ① $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

$(\alpha,\beta)=\alpha^TA\beta$ $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ A为对称矩阵 $\Rightarrow (\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

$(\beta,\alpha)=\beta^TA\alpha$

② $(k\alpha,\beta)=(k\alpha)^TA\beta=k\alpha^TA\beta=k(\alpha,\beta)$

③ $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)^TA\gamma=(\alpha^T+\beta^T)A\gamma=\alpha^TA\gamma+\beta^TA\gamma=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

④ $(\alpha,\alpha)=\alpha^TA\alpha\geq 0$ （A正定）

当 $(\alpha,\alpha)=0$ 时， $\alpha^TA\alpha=0$ 若 $\alpha\neq 0$，则 $\alpha^TA\alpha$ 正定，$\alpha^TA\alpha\neq 0$.

故 $\alpha=0$.

反之，$\because\alpha=0$，$(\alpha,\alpha)=0$

$\therefore (\alpha,\beta)$ 是内积运算

A为其度量矩阵 $\because (\varepsilon_i,\varepsilon_j)=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$
$=a_{ij}$

2. $\beta\in W^\perp$ $\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$

则 $(\beta,\alpha_1)=0$ $\left\{\begin{matrix}x_1+x_2=0\\ x_2+x_3=0.\end{matrix}\right.$
$(\beta,\alpha_2)=0.$

则 β 的基为 $\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\beta_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

将其标准正交化 $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

3. ① 任取 $\alpha\in W_1$，$\beta\in W_2$ $\gamma\in(W_1+W_2)^\perp$

则 $(\alpha+\beta)\in(W_1+W_2)$ $(\alpha+\beta,\gamma)=0\Rightarrow(\alpha,\gamma)=0+(\beta,\gamma)=0$，$\Rightarrow(\alpha,\gamma)=0$ $(\beta,\gamma)=0$ 一定成立 $\Rightarrow(W_1+W_2)^\perp\subseteq W_1^\perp\cap W_2^\perp$

对于任意 $z\in W_1^\perp\cap W_2^\perp$ $(z,\alpha)=0$ $(z,\beta)=0\Rightarrow(z,\alpha+\beta)=0$，

$\Rightarrow z\in(W_1+W_2)^\perp$ $\Rightarrow W_1^\perp\cap W_2^\perp\subseteq(W_1+W_2)^\perp$

故 $(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$

② ~~令 $\alpha\in W_1\cap W_2$，$\beta\in(W_1\cap W_2)^\perp$ $(\alpha,\beta)=0$.~~
~~$\gamma\in W_1^\perp$ $z\in W_2^\perp$ 则 $(\gamma+z)\in W_1^\perp+W_2^\perp$~~
~~且 $(\gamma,\alpha)=0$，$(z,\alpha)=0\Rightarrow(\gamma+z,\alpha)=0$.~~
~~$\Rightarrow W_1^\perp+W_2^\perp\subseteq(W_1\cap W_2)^\perp$~~

$(W^\perp)^\perp=W$. 由①知 $(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$ 两边取正交补

$\Rightarrow W_1+W_2=(W_1^\perp\cap W_2^\perp)^\perp$

令 $W_1=W_1^\perp$，$W_2=W_2^\perp$

$W_1^\perp+W_2^\perp=(W_1\cap W_2)^\perp$

线性代数	章节： 10.	做题人： 张殿炎/杜华峰

4. $\begin{cases} (\alpha(e_3),\alpha(e_1))=0 \\ (\alpha(e_3),\alpha(e_2))=0 \\ \|\alpha(e_3)\|=1 \end{cases}$ 综上 $\alpha(e_3)=-\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3$.

正交变换矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

5. $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ $\|\beta\|=\sqrt{(\beta,\beta)}$

则 $(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$

令α是一正交变换，则 $(\alpha,\alpha)=(\alpha(\alpha),\alpha(\alpha))$

则 $(\alpha(\alpha),\alpha(\alpha))=(\beta,\beta)$

$\Rightarrow \alpha(\alpha)=\beta$

6. ~~证明：必要性：若 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$ $i,j=1,2\cdots,m$~~

则设令 $\gamma=\sigma(k\alpha+l\beta)-k\sigma\alpha-l\sigma\beta$

$(\gamma,\gamma)=(\sigma(k\alpha+l\beta),\sigma(k\alpha+l\beta))-(\sigma(k\alpha+l\beta),k\sigma\alpha)-(\sigma(k\alpha+l\beta),l\sigma\beta)$

$-(k\sigma\alpha,\sigma(k\alpha+l\beta))+(k\sigma\alpha,k\sigma\alpha)+(k\sigma\alpha,l\sigma\beta)-(l\sigma\beta,\sigma(k\alpha+l\beta))$

$+(l\sigma\beta,k\sigma\beta)+(l\sigma\beta,l\sigma\beta)=0$ $\therefore\gamma=0$

$\therefore\forall k,l,\alpha,\beta$, $\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma\alpha+l\sigma\beta$, $\therefore\sigma\in L(V)$ $\therefore\sigma$是正交变换

7 证明：(1) 设 $\alpha,\beta\in V$, $k,l\in R$ $\because(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)$

$=(\alpha,\beta)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)-2(\eta,\beta)(\alpha,\eta)+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)$

$=(\alpha,\beta)$ $\therefore\sigma$保持内积

又$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\alpha+l\beta-2(\eta,k\alpha+l\beta)\eta=k\sigma\alpha+l\sigma\beta$

$\therefore\sigma$为线性的 $\therefore\sigma$是正交变换

(2) 把η扩充为V的一个标准正交基 $\varepsilon_1=\eta$, $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots\varepsilon_n$

$\sigma\varepsilon_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_1=-\varepsilon_1$ $\sigma\varepsilon_i=\varepsilon_i-0=\varepsilon_i$ $(i\geq2)$

线性代数	章节：	做题人：

$\therefore \sigma(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore |\sigma| = -1$，为第二类的

(3) $\dim V_1 = n-1$ 取 V_1 的标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$

扩充为 V 的标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$.

$\because T$ 是正交变换 $\therefore T\varepsilon_i = \varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots n-1)$ 且 $T\varepsilon_n$ 与 $T\varepsilon_i$ 正交

$\therefore T\varepsilon_n \in (L(T\varepsilon_1, \cdots T\varepsilon_{n-1}))^{\perp} = (L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n))^{\perp} = L(\varepsilon_n)$

$\because$ 正交 $\therefore T\varepsilon_n = \pm\varepsilon_n$ 若 $T\varepsilon_n = \varepsilon_n$ 则与 $\dim V_1 = n$ 矛盾

$\therefore T\varepsilon_n = -\varepsilon_n \quad \forall \alpha \in V \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$

$T\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\varepsilon_i - x_n\varepsilon_n = \alpha - 2x_n\varepsilon_n = \alpha - 2(\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n$

$\therefore T$ 是镜面反射

8 证明：设一个第二类正交变换的矩阵为 A

λ 为其一个特征值，α 为相应特征向量

$A\alpha = \lambda\alpha \quad \bar{\alpha}^T \bar{A}^T A\alpha = \bar{\alpha}^T(A^T A)\alpha = \bar{\alpha}^T\alpha = (\overline{A\alpha})^T(A\alpha)$

$= \bar{\lambda}\lambda\bar{\alpha}^T\alpha$

$\because \alpha \neq 0 \therefore \bar{\alpha}^T\alpha \neq 0 \therefore \bar{\lambda}\lambda = 1 \quad \because \lambda$ 为实数 $\therefore \lambda = \pm 1$

$\therefore A$ 的特征值仅能为 ± 1

又 $\because |A| = -1 \therefore -1$ 一定为 A 的一个特征值，得证

线性代数	章节：10	做题人：张殷茏/杜华峰

6 证明：必要性，若存在正交变换 σ，使 $\sigma\alpha_i=\beta_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$

显然有 $(\beta_i,\beta_j)=(\sigma\alpha_i,\sigma\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)$

充分性：不妨设 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性无关，否则取极大无关组

先证 $\beta_1,\cdots\beta_m$ 线性无关

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0$，则

$(\sum_{i=1}^m k_i\beta_i,\sum_{i=1}^m k_i\beta_i)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m k_ik_j(\beta_i,\beta_j)=(\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i,\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i)=0$

$\because \alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性无关 $\therefore k_i=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$

分别将两个向量组标准正交化得 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_m$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$

分别将其扩充为V的标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_m,\cdots\varepsilon_n$ 和

$\eta_1,\cdots\eta_m,\cdots\eta_n$ 令A为V上线性变换

满足 $A\varepsilon_i=\eta_i$，$i=1,2,\cdots n$，则A为正交变换

由正交化过程可知 $A\alpha_i=\beta_i$.

9. $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i & i+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i+1 & i \end{bmatrix}$，

$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} 2+2i & -2 \\ i & 1-i \end{bmatrix}$，$\varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} 1-i & i \\ -2 & 2i+2 \end{bmatrix}$.

过程见 P_{69}. 施密特正交化.

10. 存在性：

把A按列化分，得n个 C^n 中向量：$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$.

由于A可逆，$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ 为一组基.

对其正交化有：（施密特正交化）

$$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = (\gamma_1,\dots,\gamma_2)\begin{bmatrix} |\beta_1| & & * \\ & \ddots & \\ & & |\beta_n| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $(\gamma_1,\dots,\gamma_2)=U$ 为酉矩阵.

易知：$A=UR$.

唯一性：

引理：主对角线为正实数的上三角酉矩阵一定是单位阵.

数学归纳法：

$n=1$，显然成立；

$n=k+1$ 时，

由A为上三角阵有：

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & a \\ 0 & A' \end{bmatrix} \quad A^H = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & 0 \\ a^H & A'^H \end{bmatrix}$$

$$AA^H = \begin{bmatrix} \alpha\cdot\bar{\alpha} + a\cdot a^H & aA'^H \\ A'a^H & A'A'^H \end{bmatrix} = I_{k+1}$$

即 $aA'^H=0$，而A可逆，从而 A' 与 A'^H 可逆，

故 $a=0$.

同时，$\alpha\cdot\bar{\alpha} + a\cdot a^H = \alpha\cdot\bar{\alpha} = 1$ 且 α 为正实数.

有 $\alpha=1$.

同时，$A'A'^H=I_k$，那么 A' 为k阶的满足题述的矩阵，

从而 $A'=I_k$，故 $A=I_{k+1}$. 得证.

引理得证．

不妨设有两种分解：$A=UR=U'R'$

即 $UR=U'R'$，$RR'^{-1}=U^{-1}U'=B$．

B矩阵有如下性质：

① 主对角线为正实数，上三角．

由R'^{-1}、R为上三角正实数阵可证．

② 酉矩阵

由U^{-1}、U'为酉矩阵可证．

由引理，$B=I$．

所以有 $R=R'$，$U=U'$，即分解方式唯一．

11. ~~正交基⇒酉矩阵 酉矩阵⇒正交基~~：

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}(\eta_1\cdots\eta_n)=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}U^H\cdot U(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=I_n$$

故$\eta_1,\dots,\eta_n$为标准正交基．

① 正交基 ⇒ 酉矩阵：

$$I_n=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}(\eta_1\cdots\eta_n)=U^H\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)U$$

$$=U^H\cdot I_n\cdot U=U^HU.$$

故U为酉矩阵．

② 酉矩阵 ⇒ 正交基．

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}(\eta_1\cdots\eta_n)=U^H\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)U$$

$$=U^HU=I_n.$$

故$\eta_1,\dots,\eta_n$为标准正交基．

线性代数	章节：习题(1)	做题人：李宇轩

12. (1)

令 $\bar{U}$ 表示 U 中所有元素取共轭后的矩阵.

$$\det \bar{U} = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)} \text{[redacted]} \prod_{k=1}^{n} \bar{a}_{i_k}$$

$$= \overline{\sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)} \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}} = \overline{\det U}$$

而 $\det U^H = \det \bar{U}$ ，又 $UU^H = I$

即 $\det(UU^H) = \det U \cdot \det U^H = \det U \cdot \overline{\det U} = 1$

则 $|\det U| = 1$.

(2) $UU^H = I$ 即 U^H 是 U 的一个右逆.

[redacted].

[redacted] 又 $(U^H)^H$ 显然有：$(U^H)^H = U$.

即 $U^H \cdot (U^H)^H = U^H \cdot U = I$.

即 U^H 为 U 的[redacted]左逆.

故 $U^{-1} = U^H$

(P.S. 貌似线代上没有定理给出成为右逆，则一定是左逆，故复杂[redacted]地证明)

(3) 令 A、B 为任意两个酉矩阵.

$$(AB)\cdot(AB)^H = (AB)\cdot(\overline{AB})^T = (AB)\cdot(\bar{A}\cdot\bar{B})^T$$

$$= AB\cdot\bar{B}^T\cdot\bar{A}^T = AB\cdot B^H\cdot A^H = I$$

故 AB 为酉矩阵.

~~(4) $U = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, $I = U\cdot U^H = [\alpha_1,\dots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_n\end{bmatrix}$~~

(4) $U = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$

~~$I = (U^H)^H \cdot U^H$~~

$$I = U^H \cdot (U^H)^H = U^H \cdot U = \begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_n\end{bmatrix}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$$

易知：$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 为标准正交基.

线性代数	章节：习题10	做题人：李宇轩

13. (1) D为酉矩阵 $\Rightarrow$ B=0，且A、C为酉矩阵.

$$DD^H=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^H & 0\\ B^H & C^H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^H+BB^H & BC^H\\ CB^H & CC^H\end{bmatrix}=I_{n+m}$$

由 $CC^H=I_n$，可知C可逆.且为酉矩阵.

而 $BC^H=0$，故 $B=0$.

则 $AA^H+BB^H=AA^H=I_m$.

故A为酉矩阵.

(2) B=0，且A、C为酉矩阵 $\Rightarrow$ D为酉矩阵.

略，主要公式同上.

14.

①$\Rightarrow$②

$$\|\sigma\alpha\|=\sqrt{(\sigma\alpha,\sigma\alpha)}=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\|\alpha\|，\text{其中}\alpha\in V$$

②$\Rightarrow$④

a) 单位性：

$$\|\sigma\alpha\|=\|\alpha\|$$

$\forall i\le n$，$\|\sigma\varepsilon_i\|=\|\varepsilon_i\|=1$

b) $(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)=\delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\|\sigma(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\|^2&=(\sigma(\varepsilon_i+\varepsilon_j),\sigma(\varepsilon_i+\varepsilon_j))\\&=(\sigma\varepsilon_i+\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_i+\sigma\varepsilon_j)\\&=(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_i)+2(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)+(\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_j)\\&=\|\sigma\varepsilon_i\|+2(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)+\|\sigma\varepsilon_j\|\end{aligned}$$

又 $\|\sigma(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\|^2=\|\varepsilon_i+\varepsilon_j\|^2=\|\varepsilon_i\|+2(\varepsilon_i,\varepsilon_j)+\|\varepsilon_j\|$

易知：$(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$

得证.

④$\Rightarrow$③ 显然.（由某定理直接得到）.

③$\Rightarrow$①

显然，$\sigma\varepsilon_1,\dots,\sigma\varepsilon_n$ 为一组标准正交基.

在 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ 下有：$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^n y_j\varepsilon_j)$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

线性代数	章节：习题10	做题人：李宇轩

~~[illegible]~~

$$(\delta\alpha,\delta\beta)=(\delta\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\delta\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\delta\varepsilon_i,\delta\varepsilon_j)=\cancel{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

即 $(\delta\alpha,\delta\beta)=(\alpha,\beta)$

得证.

15. 酉空间正交补：

$$W^{\perp}=\{\alpha\mid\alpha\in V,\ \alpha\perp W\}.$$

性质与欧几里德空间类似.

线性代数	章节：第10章	做题人：卢枫

16.(1) $(k\sigma\alpha,\beta)=k(\sigma\alpha,\beta)=k(\alpha,\sigma^*\beta)=(\alpha,\bar{k}\sigma^*\beta)$ 故 $(k\sigma)^*=\bar{k}\sigma^*$

(2) $((\sigma+\tau)\alpha,\beta)=(\sigma\alpha+\tau\alpha,\beta)=(\sigma\alpha,\beta)+(\tau\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma^*\beta)+(\alpha,\tau^*\beta)$

$=(\alpha,(\sigma^*+\tau^*)\beta)$ 故 $(\sigma+\tau)^*=\sigma^*+\tau^*$

(3) $(\sigma\tau\alpha,\beta)=(\tau\alpha,\sigma^*\beta)=(\alpha,\tau^*\sigma^*\beta)$ 故 $(\sigma\tau)^*=\tau^*\sigma^*$

17.18 证明参考上册书

19. U是酉矩阵 $\Leftrightarrow U^HU=I \Leftrightarrow (P^T-\sqrt{-1}Q^T)(P^T+\sqrt{-1}Q)=I$

$\Leftrightarrow P^TP+Q^TQ+\sqrt{-1}(P^TQ-Q^TP)=I$

(∵ P、Q为实矩阵) $\Leftrightarrow P^TP+Q^TQ=I$ 且 $P^TQ-Q^TP=0$

$\Leftrightarrow P^TP+Q^TQ=I$ 且 P^TQ 为对称矩阵

21. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 2\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$

解得A的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

取 $\lambda_1=1$，求得A属于 $\lambda_1=1$ 的一个单位特征向量 $\eta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$，将其扩充为 $\mathbb{C}^3$ 上一组标准正交基

$\eta_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$ $\eta_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

则 $P^HAP=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}}\\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$ 取 $Q=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$ 解得特征值为 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

取 $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求得Q属于 $\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 的一个单位特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

将其扩充为 $\mathbb{C}^2$ 上的一组标准正交基 $\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ 令 $W=(\xi_1,\xi_2)$

令 $V=\begin{bmatrix}1 & \\ & W\end{bmatrix}$，$U=PV=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1-\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1-\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

则 $U^HAU=\begin{bmatrix}1 & \frac{-\sqrt{3}-3i}{2} & -\frac{3}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & -\frac{3i}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{bmatrix}$ 为上三角矩阵

线性代数	章节：第 10 章	做题人：

20.证明：

当$n=1$，结论显然成立。

假设结论对n-1的矩阵成立，下面考虑A为n方阵

取矩阵A的一个特征值为 λ_1 ，设其对应的单位特征向量为α_1，则有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$$

由于$\|\alpha_1\|=1$,故α_1可扩展成C^n空间的一组标准正交基，令

$$U_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

则U_1为酉矩阵，并且

$$AU_1=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)$$

$$=(\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)$$

$$\boxed{A\alpha_i\in C^n\Rightarrow A\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\alpha_j}$$

$$=\left(\lambda_1\alpha_1,\sum_{j=1}^{n}t_{2j}\alpha_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}t_{nj}\alpha_j\right)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & t_{21} & \cdots & t_{n1}\\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & t_{2n} & \cdots & t_{nn}\end{pmatrix}=U_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & T\end{pmatrix}$$

则$T\in C^{(n-1)\times(n-1)}$

线性代数	章节：第 10 章	做题人：

由归纳假设，有

$$\boxed{AU_1 = U_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T \end{pmatrix}}$$

$$U_2^H T U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & & * \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令$U=U_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$,则$U$为一酉矩阵

$$U^H AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^H \end{pmatrix} U_1^H AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^H \end{pmatrix} U_1^H U_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

$$U^H AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & U_2^H T U_2 \end{pmatrix}$$

$$U^H AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

为上三角形矩阵，从而结论成立

线性代数	章节：第10章	做题人：卢枫

22. $|\lambda A-I| = \begin{vmatrix} \lambda & -i & -1 \\ i & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3-2\lambda = \lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$

解得A的特征值 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\sqrt{2},\ \lambda_3=\sqrt{2}$

对 $\lambda_1=0$ $\quad(\lambda_1 A-I)\vec{x}=0 \Rightarrow \begin{cases} -ix_2-x_3=0 \\ ix_1=0 \\ -x_1=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\vec{\eta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix}$

对 $\lambda_2=-\sqrt{2}$ $\quad(\lambda_2 A-I)\vec{x}=0 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x_1-ix_2-x_3=0 \\ ix_1-\sqrt{2}x_2=0 \\ -x_1\quad\sqrt{2}x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\i\\-1\end{bmatrix}$

对 $\lambda_3=\sqrt{2}$ $\quad(\lambda_3 A-I)\vec{x}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x_1-ix_2-x_3=0 \\ ix_1+\sqrt{2}x_2=0 \\ -x_1+\sqrt{2}x_3=0 \end{cases}$ 得基础解系 $\vec{\eta}_3=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\i\\-1\end{bmatrix}$

对 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 进行施密特正交化，得 $\vec{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\vec{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{i}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$\vec{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{i}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

令 $U=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 则 $U^H A U = \mathrm{diag}(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$

23. 因为A是正定的埃尔米特矩阵，则 $\exists$ 可逆复方阵C使 $A=C^HC$，

$AB = C^HCB \sim (C^H)^{-1}C^HCBC^H = CBC^H$ 因为 CBC^H 正定，则AB正定

24. 存在酉矩阵U，使 $U^HAU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

故 $U^H(A+tI)U = U^HAU + tU^HIU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)+tI$

$= \mathrm{diag}(\lambda_1+t,\cdots,\lambda_n+t)$

令 $t=\min\{\lambda_i\}+1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 则 $A+tI$ 就是正定埃尔米特矩阵。

25. 因为A是埃尔米特矩阵，则 $A=A^H$，若A是酉矩阵 则 $A^{-1}=A^H$

故 $A=A^{-1}$ 　故 $A=\pm I$，又因为A正定，故 $A=I$

26. $(A^HA)^H = A^HA$ 故 A^HA 是埃尔米特矩阵，令 $y=Ax$，

则 $x^HA^HAx = y^Hy = \bar{y}_1y_1+\bar{y}_2y_2+\cdots+\bar{y}_ny_n \geq 0$，故半正定，同理可证 AA^H