信号处理原理第五次作业

黄家晖 2014011330

1. 分析抽样信号和原信号 $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的相互关系

(a) 由所给提示可以得出，当 $m \in R, c \in R$ 时，有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(m^2t^2+2jcmt)}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{me^{c^2}}$$

代入

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega$$

可以得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{2}+j\omega t)}dt = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

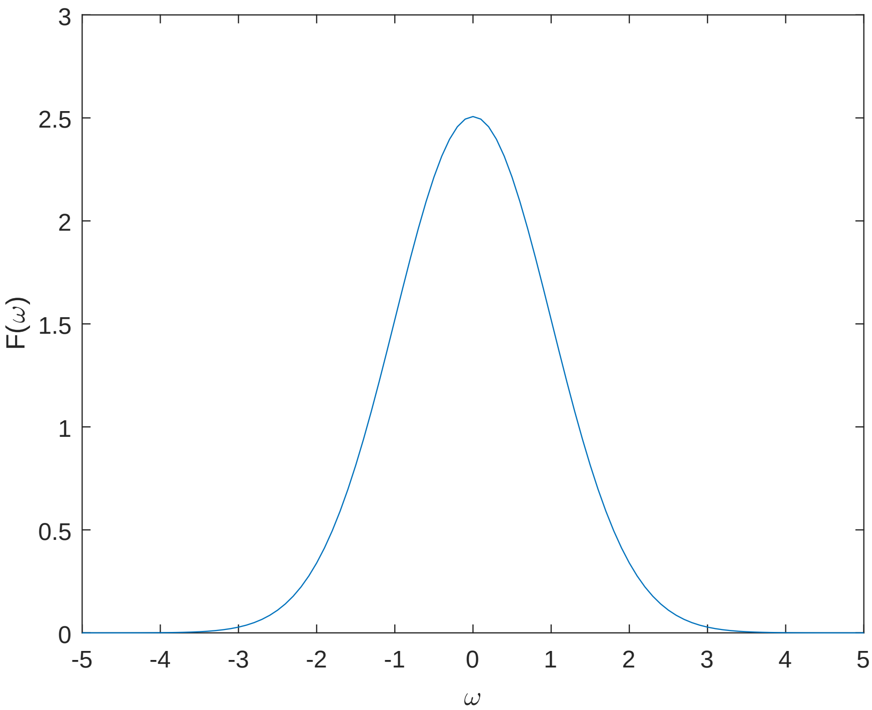
因此信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{2}+j\omega t)}dt \\ &= \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \end{aligned}$$

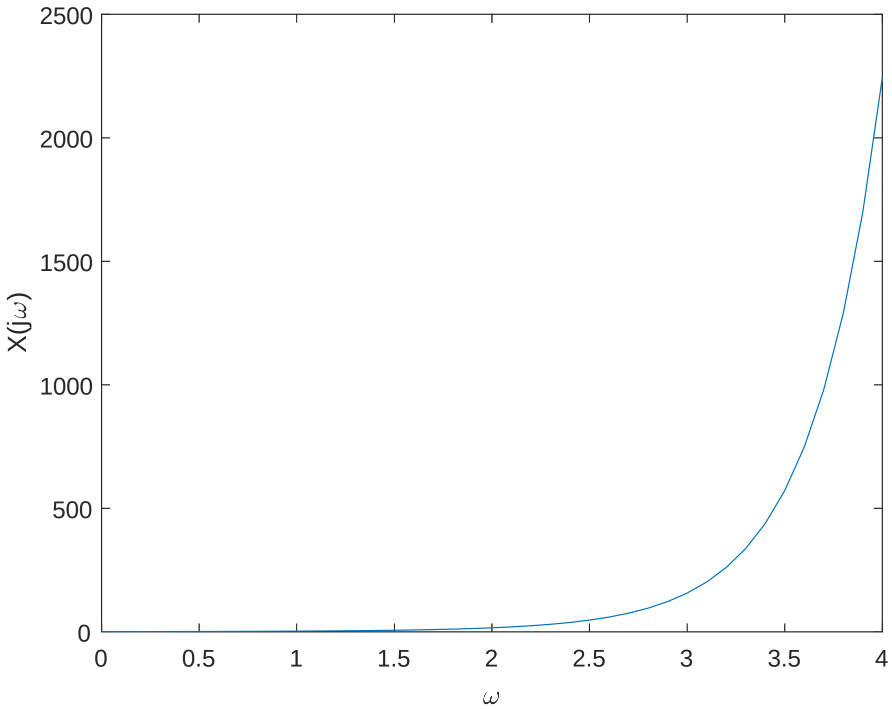
(b) 以后记运算 $\mathscr{F}$ 为傅里叶变换，则:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F} f_s(t) &= \mathscr{F}(f(t)\cdot\delta(t-1)) + \mathscr{F}(f(t)\cdot\delta(t-2)) + \mathscr{F}(f(t)\cdot\delta(t-3)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{2}+j\omega t)}\delta(t-1)dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{2}+j\omega t)}\delta(t-2)dt + \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t^2}{2}+j\omega t)}\delta(t-3)dt \\
&= e^{-(\frac{1}{2}+j\omega)} + e^{-(2+2j\omega)} + e^{-(\frac{9}{2}+3j\omega)}
\end{aligned}
$$

(c) 信号 $f(t)$ 的频谱图为:



抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱图为:



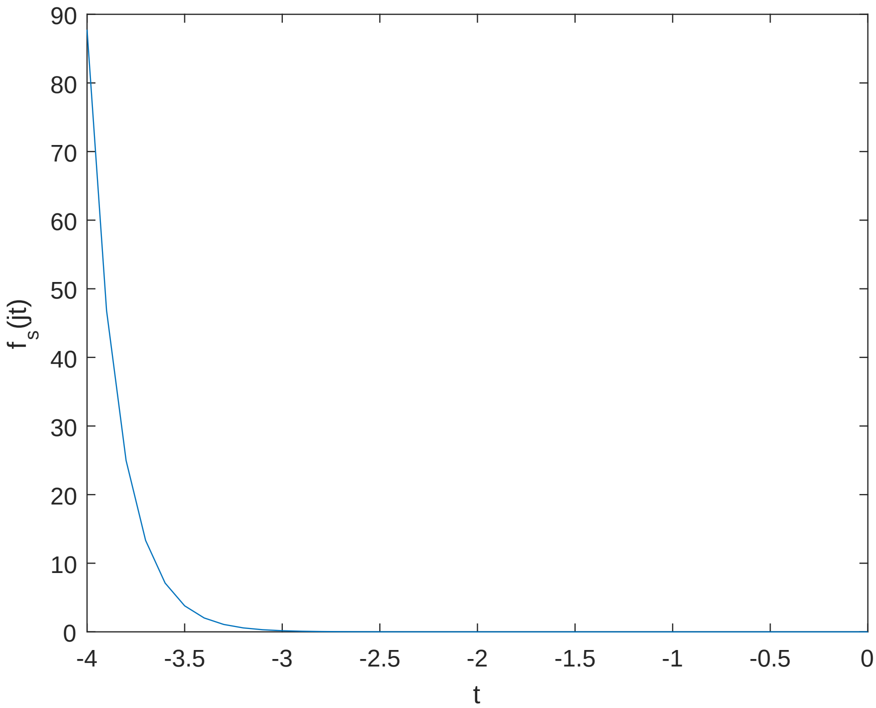
注：这里的X(jω)为方便画图代换而来，可以理解为原时域信号的Laplace变换

2. 分析连续频谱函数 $F(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ 和抽样后的频谱函数的相互关系

(a)频谱函数 $F_s(\omega)$ 的 IFT 为:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}F_s(\omega) &= \mathscr{F}^{-1}(F(\omega)\cdot P(\omega)) \\
&= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\delta(\omega-2\pi)e^{j\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\delta(\omega-4\pi)e^{j\omega t}d\omega \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\delta(\omega-6\pi)e^{j\omega t}d\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}(F(2\pi)e^{2\pi jt} + F(4\pi)e^{4\pi jt} + F(6\pi)e^{6\pi jt}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-2\pi^2+2\pi jt} + e^{-8\pi^2+4\pi jt} + e^{-18\pi^2+6\pi jt})
\end{aligned}
$$

(b)上问中的 $f_s(t) = \mathscr{F}^{-1}F_s(\omega)$ 图像如下:



注：这里所使用的方便画图的变换方式和上述一样