习题 6.1

2.(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{x}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{x}\right)^n}$

$=\infty$

该级数收敛域为 ϕ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{x}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x\sin\frac{x}{2^{n+1}}|}{|\sin\frac{x}{2^n}|}$

$=\frac{1}{2}$

所以当 $|x|<2$ 时级数绝对收敛

当 $|x|=2$ 时，$\lim_{n\to\infty}x^n\sin\frac{x}{2^n}\neq 0$

~~$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^{n+1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{1}{2}$~~

当 $|x|>2$ 时，级数发散

综上，收敛域为 $(-2,2)$

且 $(-2,2)$ 上绝对收敛

其余情况发散

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\ln(1+\frac{1}{2^n})$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2^{n+1}})}{\ln(1+\frac{1}{2^n})}=\frac{1}{2}$

且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(1+\frac{1}{2^{n+1}})}{\ln(1+\frac{1}{2^n})}\right|=\frac{1}{2}$

故 $|x|<2$ 时绝对收敛

其余情形发散

3.(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$

$u(x)=\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$

$u'(x)=\left(\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}\right)'=\frac{2n^3-2x^2}{(x^2+n^3)^2+4x^2}$

当 $x=\pm n^{\frac{3}{2}}$ 时，$u'(x)=0$ 取得极值

~~最大值~~ 即 $U_{max}=u(n^{\frac{3}{2}})=n^{-\frac{3}{2}}$

$U_{min}=u(-n^{\frac{3}{2}})=-n^{-\frac{3}{2}}$

~~即有 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$~~

~~又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{3}{2}}$ 收敛~~

则有 $u(x)\leq n^{-\frac{3}{2}}$，

$|u(x)|\leq n^{-\frac{3}{2}}$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$ 在R上一致收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx^2}=x^3\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx^2}$

故当 $x=0$ 时，级数收敛

~~当 $e^{-x^2}>1$ 时，级数收敛~~

当 $x\neq 0$ 时，$0<e^{-x^2}<1$，级数收敛

令 $u_n(x)=x^3e^{-nx^2}$。

$u_n'(x)=x^2(3-2nx^2)e^{-nx^2}$

$u_{n,max}=u_n(\sqrt{\frac{3}{2n}})=(\sqrt{\frac{3}{2n}})^3e^{-\frac{3}{2}}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\frac{3}{2n}})^3e^{-\frac{3}{2}}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx^2}$ 在R上一致收敛

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$

当n足够大（设n>N时）

$$\left|\ln\left(1+\frac{2x}{x^2+n^3}\right)\right| \le \frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2\cdot n^3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$ 一致收敛

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 一致收敛.

$\left|\frac{n}{x^2+n}\right| \le 1$，即一致有界且关于n单调

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ 一致收敛

$$\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n}\right| = \left|\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{x^2+n}\right| \ge \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{n}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ 不绝对收敛

6. $\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1}(x-1)^2$，$x \in [0,1]$

$$S_n(x) = (x-1)^2\,\frac{x(1-x^n)}{1-x} = x(1-x)(1-x^n)$$

$$S(x) = x(1-x)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup|S_n(x) - S(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup|x^{n+1}(1-x)|$

$=0$ （可求导证）

故 一致收敛

习题 6.2

2. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$，$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\left|\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}\cdot\tan\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2^n}$$

故 $S(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上一致收敛

$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(x)\,dx$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{d\cos\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\ln\cos\frac{x}{2^n}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\cos\frac{\pi/6}{2^n} - \ln\cos\frac{\pi/3}{2^n}\right]$$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\cos\frac{\pi/6}{2^k} - \ln\cos\frac{\pi/3}{2^k}\right]$$

$$= \cancel{\ln\cos\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}} - \ln\cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \cancel{\ln\cos\frac{1}{2^2}\frac{\pi}{6}}$$

$$\cancel{-\ln\cos\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}} + \ln\cos\frac{1}{2^3}\frac{\pi}{6} \cancel{- \ln\frac{1}{2^2}\frac{\pi}{6}}$$

$$+ \cdots\cdots + \ln\cos\frac{\pi/6}{2^n} \cancel{- \ln\cos\frac{\pi/3}{2^n}}$$

$$= -\ln\cos\frac{\pi}{6} + \ln\cos\frac{\pi/6}{2^n}$$

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. 证明：$\int_0^1 x^x dx = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\cdots$

证明：$x^x = e^{x\ln x} = 1+x\ln x+\frac{1}{2!}(x\ln x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x\ln x)^n+\cdots$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x\ln x)^n \qquad x\in(0,1]$

因 $\left|\frac{1}{n!}(x\ln x)^n\right| \le \frac{1}{n!}$ （可求导证 $|x\ln x|<1$）

而 $\sum \frac{1}{n!}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x\ln x)^n$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛

$\int_0^1 (x\ln x)^n dx = \int_0^1 x^n\cdot(\ln x)^n dx = \int_0^1 \frac{(\ln x)^n}{n+1} d x^{n+1} = -\int_0^1 \frac{x^n\cdot n\cdot(\ln x)^{n-1}}{n+1}dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n\cdot n\cdot(n-1)(\ln x)^{n-2}}{(n+1)^2}\cdot dx = \cdots = (-1)^n\int_0^1 \frac{x^n\cdot n!}{(n+1)^n}dx = (-1)^n\int_0^1 \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}dx^{n+1}$

$= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$

故 $\int_0^1 x^x dx = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{1}{n!}(x\ln x)^n dx = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots$

4. 证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$，$x\in(1,+\infty)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{x^{n+1}}}{\frac{n}{x^n}} = \frac{1}{x}<1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $(1,+\infty)$ 上收敛。任取 $x_0\in(1,+\infty)$，取 a 满足 $x_0<a<+\infty$ 即 $x_0\in[a,+\infty)$。对 $\forall x\in[a,+\infty)$，有 $\frac{n}{x^n}\le\frac{n}{a^n}$

而 $\sum\frac{n}{a^n}$ 收敛，故 $\sum\frac{n}{x^n}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛。故其在 $[a,+\infty)$ 上连续 $\Rightarrow$ 其在 x_0 点连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 连续。

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}$

当 $x=0$ 时，上式收敛；当 $x\ne0$ 时 $\sum\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=1$，即 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\ne0\end{cases}$

而 $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 连续，但 $S(x)$ 不连续，故非一致收敛

习题6.3.

1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = 0$

收敛域为R

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\frac{\ln n}{n}} = 1$

当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$发散

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot (-1)^n$，收敛

故收敛域为$[-1,1)$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (x-1)^n \ (p>0)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$

故 在$(0,2)$上收敛

当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛.

当$x=2$时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} p>1\text{时收敛} \\ p\le 1\text{时发散} \end{cases}$

综上： $p>1$时，收敛域为$[0,2]$

$0<p\le 1$时，收敛域为$[0,2)$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^{3n}}{(3n)!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(x-a)^{3n+3}}{(3(n+1))!}}{\frac{(x-a)^{3n}}{(3n)!}} = 0$

故收敛域为R.

2. (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}}{\frac{2n-1}{2^n} \cdot x^{2n-2}}$

$= \frac{x^2}{2} < 1$

故在$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$上收敛.

当$x=\pm\sqrt{2}$时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2})$

发散.

故收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{x}\right)'$

$= \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{x}\right)' = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)'$

$= \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = 1$

当$x=\pm 1$时，都发散

故收敛域为$(-1,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{2}\right)''$

$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2}\right)'' = \frac{\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''}{2}$

$= \frac{1}{(1-x)^3}$

3.(6) $\ln(3-x)$, $x_0=-1$

$$\ln^{(n)}(3-x)=\begin{cases}\ln(3-x) & ,n=0\\ \dfrac{(n-1)!\,(-1)^n}{(3-x)^n} & ,n>0\end{cases}$$

故 $\ln(3-x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$

其中 $a_n=\begin{cases}\ln 4 & ,n=0\\ \dfrac{(-1)^n}{4^n\cdot n} & ,n>0\end{cases}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{4}$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-4)^n$ 发散，

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(4)^n$ 收敛

故收敛域为 $[-5,3)$

(7) $\frac{1}{x-1}$, $x_0=-1$

$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}$

而 $x=1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2}$ 发散

$x=-3$时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{-2}$ 发散

故收敛域为 $(-3,1)$

4.(1) $e^{\sin x}$, $x_0=0$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$\therefore e^{\sin x}=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

(3) $\cos^3 x$, $x_0=0$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

$\cos^3 x=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^3+o(x^4)$

$=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{8}x^4+o(x^4)$