数学实验第九次实验报告

计算机系　计 43　2014011330　黄家晖

2017 年 5 月 26 日

1　实验目的

- 掌握参数估计和假设检验的基本原理和算法；
- 练习使用 MATLAB 解决实际问题。

2　计算题

2.1　CH12-6 学生身高变化

2.1.1　算法设计

对于第一问，对于抽取的所有样本数据，可以采用 MATLAB 的 `histfit`函数进行绘图。该函数既能画出样本分布的直方图，又能够计算估计得到的正态分布曲线。对于正态性的检验，我们设 H_0 代表整体服从正态分布，由于样本数量较大（为 100），所以选用 Jarque-Bera 检验，对应于 MATLAB 中的 `jbtest`函数。

对于第二问的参数估计问题，由于总体的均值 μ 和方差 σ 均为未知量，在进行参数估计的时候从原理上来讲需要使用样本的方差和均值来计算相应的参数及区间估计。我们可以使用 MATLAB 的 `normfit`函数来对正态分布的参数和区间进行估计。

对于第三问，题目中强调 10 年前的数据是普查结果，即为总体的均值，而总体的标准差未知。对于身高和体重，我们均可以设：

H_0：均值没有明显变化（$\mu = \mu_0$）；备选假设 H_1：均值有明显变化（$\mu \neq \mu_0$）

采用 t 检验即可，对应于 MATLAB 中的 `ttest`函数。

2.1.2　MATLAB 程序

主程序如下：

```
%% Math Exp Homework 9 12—T6
% Height and weight problem

%% Input data
height = [172 171 166 160 155 173 166 170 167 173 178 173 163 165 170 163 172 182 171 177 ...
    169 168 168 175 176 168 161 169 171 178 177 170 173 172 170 172 177 176 175 184 ...
    169 165 164 173 172 169 173 173 166 163 170 160 165 177 169 176 177 172 165 166 ...
    171 169 170 172 169 167 175 164 166 169 167 179 176 182 186 166 169 173 169 171 ...
    167 168 165 168 176 170 158 165 172 169 169 172 162 175 174 167 166 174 168 170];
weight = [75 62 62 55 57 58 55 63 53 60 60 73 47 66 60 50 57 63 59 64 ...
```

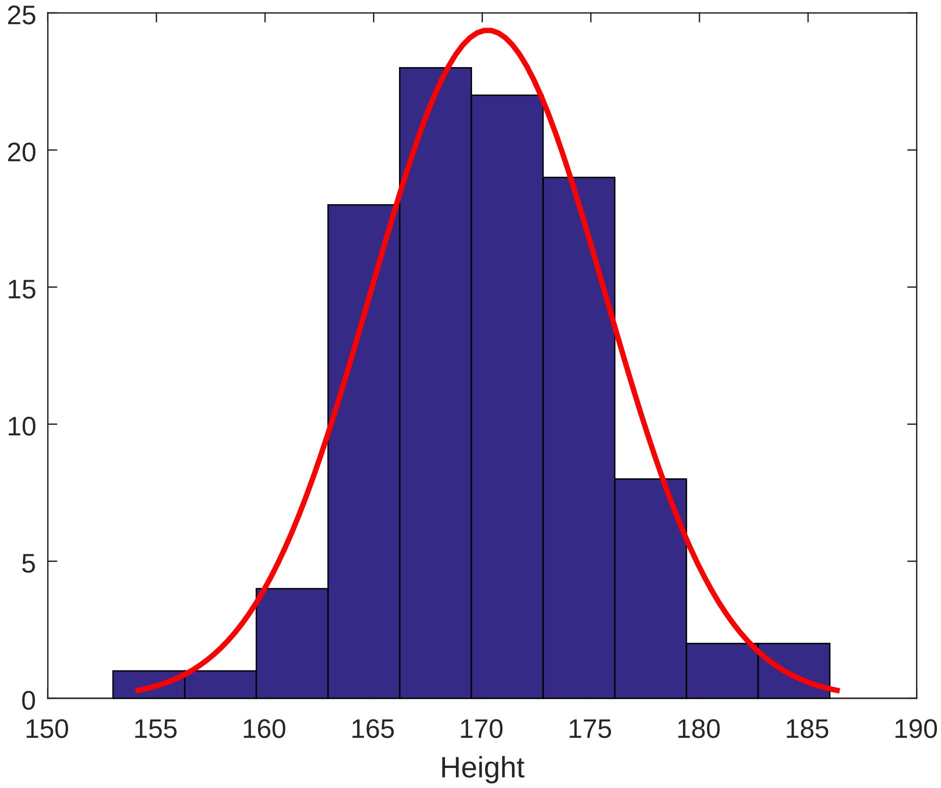

图 1: 学生身高分布

```
    55 67 65 67 64 50 49 63 61 64 66 58 67 59 62 59 58 68 68 70 ...
    64 52 59 74 69 52 57 61 70 57 56 65 58 66 63 60 67 56 56 49 ...
    65 62 58 64 58 72 76 59 63 54 54 62 63 69 77 76 72 59 65 71 ...
    47 65 64 57 57 57 51 62 53 66 58 50 52 75 66 63 50 64 62 59];

%% Plot the data.
figure;
histfit(height);
xlabel('Height');
figure;
histfit(weight);
xlabel('Weight');

%% Caculate the parameters of norm and the range
[mu, sigma, muci, sigmaci] = normfit(height, 0.05)
[mu, sigma, muci, sigmaci] = normfit(weight, 0.05)

%% Ttest to test mu change
h_height = ttest(height, 167.5)
h_weight = ttest(weight, 60.2)
```

2.1.3 计算结果和分析

第一问 学生身高和体重分布的图形描述如图 1和图 2所示。从图中能够看出，直方图和红色拟合的正态分布曲线非常接近，从直观上来看分布的确满足“中间高、两段逐渐降低”的正态分布特点。

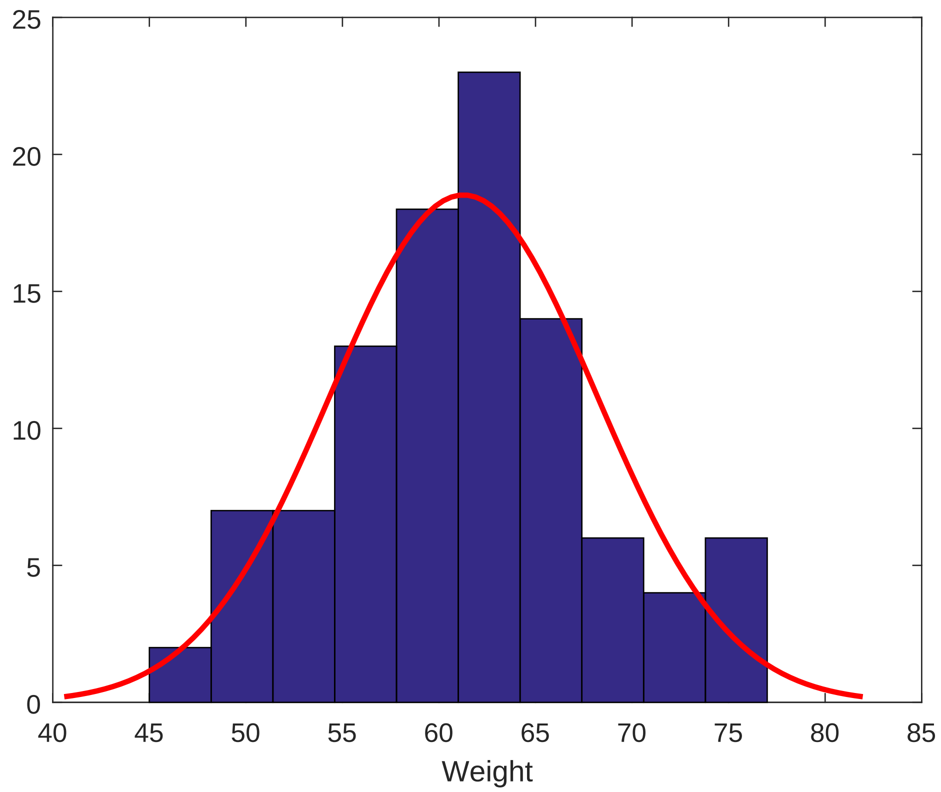

图 2: 学生体重分布

而进一步运行 `jbtest`（默认参数）的结果为：

```
>> jbtest(height)

ans =

     0

>> jbtest(weight)

ans =

     0
```

假设得到接受，因此身高和体重两个总体均符合正态分布。

第二问 在本问中尝试取显著性水平 α 为不同的值进行观察，得出的结果如表 1和 2所示。

显著性水平 α	标准差估计	均值点区间估计	均值点估计	标准差区间估计
0.05	170.25	5.40	(169.18, 171.32)	(4.74, 6.28)
0.03	170.25	5.40	(169.06, 171.44)	(4.68, 6.38)
0.01	170.25	5.40	(168.83, 171.67)	(4.56, 6.59)

表 1: 不同显著性水平下的身高正态分布参数区间估计

从表中可以看出，随着显著性水平的减小，参数的区间估计范围也越大，与理论的计算相符合。

显著性水平 α	均值点估计	标准差估计	均值点区间估计	标准差区间估计
0.05	61.27	6.89	(59.90, 62.64)	(6.05, 8.01)
0.03	61.27	6.89	(59.75, 62.79)	(5.97, 8.14)
0.01	61.27	6.89	(59.46, 63.08)	(5.82, 8.41)

表 2: 不同显著性水平下的体重正态分布参数区间估计

第三问 该问选择的显著性水平依然为默认值 $\alpha = 0.05$，程序输出为：

```
h_height =

     1


h_weight =

     0
```

上述输出结果说明，学生的身高较 10 年前有了明显的变化，而体重没有明显变化。

2.2 CH12-8 测验难度比较

2.2.1 算法设计

该问的样本数比较小，如果希望采用检验方法进行检验，需要先对样本分布的正态性进行确定。经过预先的实验，Jarque-Bera 检验肯定了分布正态性的假设，因此下面的分析才有根据。另外，下面的分析均假设：考试难度与考试分数成反比，考试分数相差越大，考试难度也相差越大。

考虑到这两次考试是同一门课程、考察同样知识的测验，且每个样本列对应的是同一名学生，故两次测验的成绩样本存在一定的相关性，采用作差法进行假设检验。假设第一次测验样本中第 i 个学生的考试成绩为 x_i，第二次测验样本中这个学生的考试成绩为 y_i，设对于第 i 个学生考试成绩差为 $d_i = x_i - y_i$，将所有 $i = 1, 2, \cdots, 20$ 的成绩差组成新的样本集合，设其均值为 μ，则假设检验为：

$$H_0 : \mu = 0, H_1 : \mu \neq 0$$

这是普通的方差未知假设检验，可以使用 MATLAB 中的 `ttest`函数来完成。

2.2.2 MATLAB 程序

主程序如下：

```
%% Math Exp Homework 9 12—T8
% Test difficulty problem

%% Input data
x1 = [93 85 79 90 78 76 81 85 88 68 92 73 88 84 90 70 69 83 83 85];
x2 = [88 89 86 85 87 88 75 93 88 78 86 86 80 89 85 79 78 88 88 90];

%% Test normality
jbtest(x1)
jbtest(x2)

```

```
%% Hypothesis
[h, sigma, ci] = ttest(x1 - x2, 0)
ttest2(x1, x2)
```

2.2.3 计算结果和分析

程序相关的输出为：

```
>> [h, sigma, ci] = ttest(x1 - x2, 0)
h = 1
sigma = 0.0428
ci = -6.4818   -0.1182
```

说明假设 H_0 被拒绝，成绩发生了明显的变化，从侧面反映出考试难度有所变化。又由于 μ 的估计区间为 $[-6.48, -0.12]$，因此第二次考试成绩要高一些，说明考试难度第二次更简单一些。

在实际的编程过程中，如果使用 *ttest2* 函数进行检验，则没有考虑到两个样本的相关性，最终程序输出的结果肯定了 $\mu_1 = \mu_2$ 的结论，与作差法结论不同。我们在考察这个问题的时候应该注意到对比学生自己与自己的差距才更有意义，单纯地将两次考试看作独立的样本实际上忽略了题目所给的某些信息，因此我们依然认为考试难度有变化，且第二次考试难度更简单。

2.3 CH12-10 中国日本男女生身高比较

2.3.1 算法设计

本题所给数据的总体均值和标准差均未知，不妨假设相同年龄段相同性别下中国和日本青少年身高总体标准差相同：$\sigma_1 = \sigma_2$，即可以采用 t 检验来进行均值的相关检验。假设 μ_1 是某特定年龄特定性别下中国青少年总体身高均值，μ_2 是该年龄和性别下日本青少年总体身高均值。则假设检验如下：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

进行 t 检验的前提是知道样本数量 n_1（中国学生每类的样本数量）和 n_2（日本学生每类的样本数量）。中国总共调查了 20 万的青少年，分散到每类可以估计出 $n_1 = 10000$，日本每类并没有给出样本容量，显然样本容量越大所反映的均值就越精确，对假设检验的结果也有影响，这里假设 $n_2 = 5000$。

另外，本题并没有直接给出样本数据，而是给出了样本的均值和标准差，而 MATLAB 仅提供了 `ttest2`函数，因此相关的检验函数需要自己编写。

2.3.2 MATLAB 程序

主程序如下：

```
%% Math Exp Homework 9 12-T10
% Chinese and Japanese stu problem

%% Input data
cn_xbar = [124.5 129.4 134.6 139.3 145.1 151.2 160 165.1 168.3 170.1 171 170.8];
cn_s = [5.7 5.6 6 6.6 7.2 8.1 8 7 6.3 6.3 6 5.8];
jn_xbar = [122.5 128.1 133.4 138.9 144.9 152 159.6 165.1 168.5 170 170.8 171.1];
jn_s = [5.4 5.5 5.4 5.9 6.7 7.8 7.6 6.8 6.2 5.9 6 5.9];
```

```
cv_xbar = [123.4 128.4 134.3 140 146.7 152.5 156.3 157.7 158.9 159.3 159.3 159.1];
cv_s = [5.4 5.5 6.2 6.9 7 6.6 6 5.5 5.6 5.4 5.4 5.3];
jv_xbar = [121.8 127.6 133.5 140.2 146.7 151.9 155.1 156.7 157.4 157.9 158.1 158.2];
jv_s = [5.4 5.7 6.3 6.6 6.7 6.2 5.4 5.2 5 5.3 5 5.1];

n1 = 10000;
n2 = 5000;

%% Compare boys
bh = zeros(1, 12);
for i = 1:12
    bh(i) = ttest2_nosample(cn_xbar(i), jn_xbar(i), cn_s(i), jn_s(i), ...
        n1, n2, 0.05);
end

%% Compare girls
gh = zeros(1, 12);
for i = 1:12
    gh(i) = ttest2_nosample(cv_xbar(i), jv_xbar(i), cv_s(i), jv_s(i), ...
        n1, n2, 0.05);
end

%% Output results
[bh; gh]

%% Draw plot
figure;
hold on;
errorbar(7:18, cn_xbar, cn_s * 3)
errorbar(7:18, jn_xbar, jn_s * 3)
errorbar(7:18, cv_xbar, cv_s * 3)
errorbar(7:18, jv_xbar, jv_s * 3)
```

其中 `ttest2_nosample`函数如下：

```
function [ h ] = ttest2_nosample( xbar, ybar, s1, s2, n1, n2, alpha )
% Source: Mathexp P285
    ss = ((n1 - 1) * s1 * s1 + (n2 - 1) * s2 * s2) / (n1 + n2 - 2);
    t = (xbar - ybar) / sqrt(ss / n1 + ss / n2);
    tthres = tinv(1 - alpha / 2, n1 + n2 - 2);
    if abs(t) <= tthres
        h = 0;
    else
        h = 1;
    end
end
```

2.3.3 计算结果和分析

最终对于不同性别不同年龄的中日身高对比假设情况输出如表 3所示，表中项为 0 代表接受假设，即表示中日青少年在那个年龄段和性别身高差异不大；表中项为 1 代表拒绝假设，即表示中日青少年在那个年龄段和性别身高有明显差异。

根据结果可以看出，中国日本青少年身高的相同或不同实际上和不同的年龄段和不同性别有关，不能一概而论。此外，根据题目中所给的均值和标准差绘制了箱图如图 3所示。从图中可以对不同年龄段的不同性别的身高均值和标准差有一个直观理解。

年龄	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
男性青少年	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
女性青少年	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

表 3: 不同性别不同年龄的中日身高对比假设检验情况

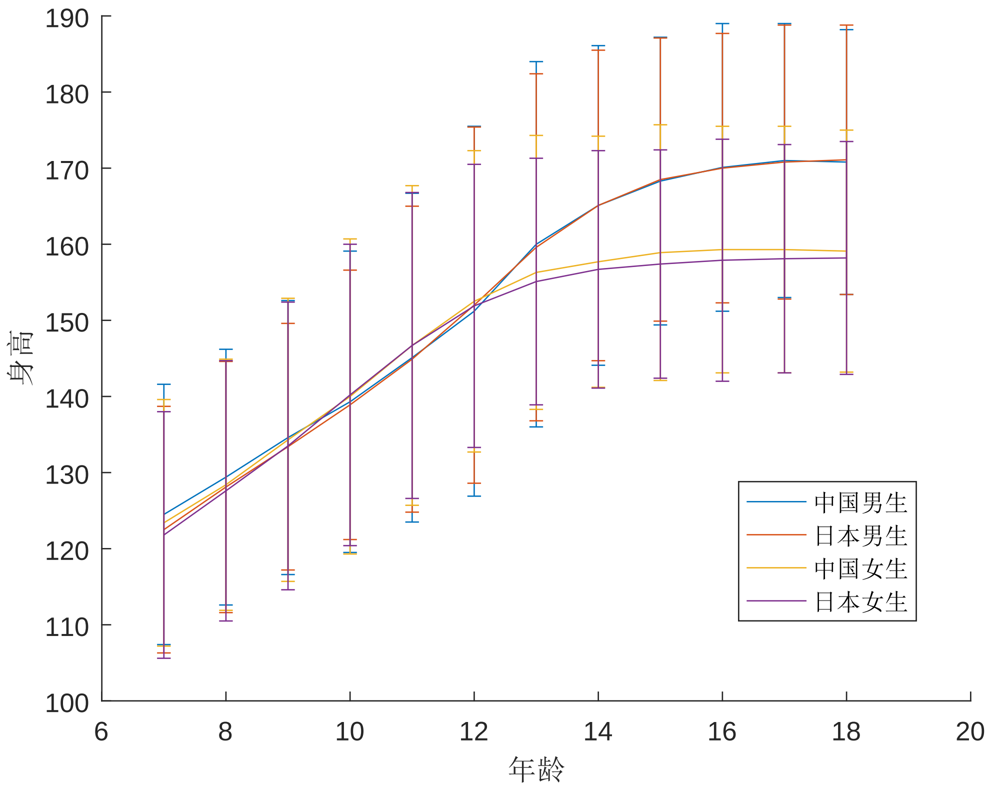

图 3: 不同年龄段的不同性别的身高均值和标准差，错误条使用了正态分布的 3σ 法则

3 收获与建议

通过这次的实验，我学会了使用 MATLAB 求解概率模型参数估计和假设检验问题的一般方法，并对概率论与数理统计的知识有了更深的理解。希望在之后的课堂上老师能够当堂进行相关的技巧演示并给出题目的分步解答。