数值分析
习题课

王晨光

2016年春季

作业情况

- 本学期所有作业的成绩，会在最后一次作业之后、考试之前发至网络学堂
- 作业补交、更正以考试当天24:00为截至时间

- 未提交的同学请尽快提交至8区404
  - 计1*、计2*、计42、计45及其他院系
    - 贾小涛 jiaxiaotao@outlook.com
  - 计35、计科40
    - 王晨光 chenguang91@foxmail.com
  - 计31、计32、计33、计34、计44
    - 闫明 yanm15@mails.tsinghua.edu.cn

关键字：

误差来源

有效数字

误差估计（传播）

误差避免

误差与误差限

习题1.5

计算球体积要使相对误差限为1%，问度量半径R时允许的相对误差限是多少？

知识要点：假设f(x)是一元函数，x的近似值为x^*，如果用$f(x^*)$近似f(x)，并且其误差限记为$\varepsilon(f(x^*))$，可以对f(x)做Taylor展开，计算得函数的误差限为

$$\varepsilon\left(f(x^*)\right) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

本题中球体积是半径的函数，并且题目中要计算的是相对误差限。

$$\varepsilon_r\left(f(x^*)\right) \approx \frac{\varepsilon\left(f(x^*)\right)}{|f(x^*)|}$$

习题1.5

解答：球的半径为R，则球体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$。因此球体积的误差限为

$$\varepsilon(V^*)=\left|\left(\frac{dV}{dR}\right)^*\right|\varepsilon(R^*)=4\pi(R^*)^2\varepsilon(R^*)$$

所以球体积的相对误差限为

$$\varepsilon_r(V^*)=\left|\frac{\varepsilon(V^*)}{V^*}\right|=\left|\frac{4\pi(R^*)^2\varepsilon(R^*)}{\frac{4}{3}\pi(R^*)^3}\right|$$

$$=3\left|\frac{\varepsilon(R^*)}{R^*}\right|=3\varepsilon_r(R^*)=1\%$$

故

$$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times 1\% \approx 0.0033$$

故度量半径R时允许的相对误差限是0.0033。

习题1.5

球的半径为R，则球体积为$V = \frac{4}{3}\pi R^3$。因此球体积的相对误差为

$$\varepsilon_r^* = \frac{V^* - V}{V} = \frac{R^{*3} - R^3}{R^3}$$

由于$\varepsilon_r^* = 1\%$，所以$\boxed{\varepsilon_r^* \leq 0.01}$

故有$\frac{R^{*3}-R^3}{R^3} \leq 0.01$，即$\varepsilon_R^{*\,3} \leq 1.01$

所以$\boxed{\varepsilon_{r(R)}^* = 0.331}$

误区：

1、误差限的概念

2、开三次方，导致误差增加

习题1.12

计算$f=(\sqrt{2}-1)^6$，取$\sqrt{2}\approx 1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\qquad (3-2\sqrt{2})^3,\qquad \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\qquad 99-70\sqrt{2}。$$

考察点： 误差的扩散、误差的避免

解答1：

若通过$(3-2\sqrt{2})^3$计算y值，则

$$\varepsilon(y^*)=\left|-3\times 2\times(3-2x^*)^2\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$

$$=\frac{6}{3-2x^*}y^*\bullet\varepsilon(x^*)$$

$$=30y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算y值，则

$$\varepsilon(y^*)=-\left|-3\times\frac{1}{(3+2x^*)^4}\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$

$$=6\times\frac{1}{(3+2x^*)}y^*\varepsilon(x^*)$$

$$=1.0345y^*\varepsilon(x^*)$$

习题1.12

解答2： 避免误差危害的四项基本原则是：①要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法；②要避免两近似数相减；③要防止大数“吃掉”小数；④注意简化计算步骤，减少运算次数。

第二个和第四个明显违背原则②，结果不好。
第三个和第一个比，除法运算次数相同，但乘法运算次数是后者的一半，根据原则④，$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$得到的结果相对最好。

习题1.12

解答3：

取一个更精确的值(如1.41421)进行计算得到一个“标准值”，然后分别计算四个公式，看计算值与标准值的差别。

第二章 插值法

关键词:

Lagrange 插值	--表达式、基函数、余项
Newton插值	--表达式、均差、差分、余项
Hermite插值	--如何构造、两种典型差值函数、余项
分段低次插值	--分段线性、分段Hermite、余项
三次样条插值	--边界条件、求解线性方程组
其他方法	

2.4（1）

设x_j为互异节点，（j = 0, 1, … , n），求证：

$$\text{i)}\ \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \qquad (k = 0, 1, \dots, n);$$

解答：

令$f(x) = x^k$，$(k = 0, 1, \dots, n)$以$\left(x_j, f\left(x_j\right)\right)$ $(j = 1,2, \dots, n)$为差值节点做Lagrange差值，设差值函数为$L_n(x)$，则有

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(x_j\right) l_j(x) = \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)$$

此时有差值余项为

$$R(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \prod_{j=0n} (x - x_j)$$

因为k<=n，所以$f^{(n+1)}(x) = 0.$

所以有$f(x) = L(x)$，即$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k$

2.15

证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x) = f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2/4!，\ \xi \in (x_k, x_{k+1}),$$

并由此求出分段三次埃尔米特插值的误差限。

证明插值余项的方法具有一般性，即先把插值余项看成是与x有关的待定函数，然后做原函数减去插值函数再减去插值余项的新函数，把x看作新函数的不动点，对新函数反复用Rolle定理，继而解出插值余项。

解答：

1）确定余项的表达式形式

Hermite插值条件为

$$H_3(x_k) = f(x_k) \qquad H_3(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$$
$$H'_3(x_k) = f'(x_k) \qquad H'_3(x_{k+1}) = f'(x_{k+1})$$

设插值余项函数$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$，依题意，有

$$R_3(x_k) = 0 \qquad R_3(x_{k+1}) = 0$$
$$R'_3(x_k) = 0 \qquad R'_3(x_{k+1}) = 0$$

因此，x_k, x_{k+1}是$R_3(x)$的二重零点，从而可以把插值余项看作与x有关的待定函数，即设

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = K(x)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2$$

其中$K(x)$是与x有关的待定函数，只要解出$K(x)$即可。

2.15

把x看作是插值区间$[x_k, x_{k+1}]$上的一个固定点，作函数

$$\varphi(t) = f(t) - H_3(t) - K(t)(t - x_k)^2(t - x_{k+1})^2$$

根据插值条件及余项定义，可知

$$\varphi(x) = \varphi(x_k) = \varphi(x_{k+1}) = 0$$

$$\varphi'(x_k) = \varphi'(x_{k+1}) = 0$$

在区间$[x_k, x\ ]$和$[x, x_{k+1}]$上对$\varphi(t)$应用Rolle定理，可知存在

$\eta_1 \in (x_k, x)$及$\eta_2 \in (x, x_{k+1})$，使得$\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$。

2.15

在区间(x_k,η_1)，(η_1,η_2)，(η_2,x_{k+1})上对$\varphi'(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_{k1}\in(x_k,\eta_1)$ $\eta_{12}\in(\eta_1,\eta_2)$ $\eta_{2(k+1)}\in(\eta_2,x_{k+1})$，使得 $\varphi''(\eta_{k1})=\varphi''(\eta_{12})=\varphi''\left(\eta_{2(k+1)}\right)=0$ 。在区间(η_{k1},η_{12})和$\left(\eta_{12},\eta_{2(k+1)}\right)$上对$\varphi''(t)$应用Rolle定理，可知存在$\eta_{k12}\in(\eta_{k1},\eta_{12})$及$\eta_{12(k+1)}\in\left(\eta_{12},\eta_{2(k+1)}\right)$，使得$\varphi'''(\eta_{k12})=\varphi'''\left(\eta_{12(k+1)}\right)=0$。

2.15

最后，在区间$(\eta_{k12},\eta_{12(k+1)})$上对$\varphi'''(t)$应用Rolle定理，可知存在$\xi\in(\eta_{k12},\eta_{12(k+1)})\subset(x_k,x_{k+1})$，使得$\varphi^{(4)}(\xi)=0$。

由于

$$\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-4!\,K(x)$$

所以

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\,K(x)=0$$

即

$$K(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

最终

$$R_3(x)=K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$
$$=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$
$$\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

习题2.18

求$f(x)=x^2$在$[a,b]$上的分段线性插值函数$I_h(x)$，并估计误差。

解答： 设插值节点为$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，步长为$h_k=x_{k+1}-x_k(0\le k\le n-1)$，$h=\max\limits_{0\le k\le n-1} h_k$，

则分段线性插值函数为

$$I_{h_k}(x)=x_k^2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+x_{k+1}^2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

$$x\in[x_k,x_{k+1}]$$

误差估计：

$$|R_k(x)|=\left|f(x)-I_{h_k}(x)\right|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{\mathbf{h^2}}{\mathbf{4}}$$

习题2.18

考察对分段线性插值函数的理解与掌握

误区1：概念理解——函数形式

$$I_h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} I_{h_k}(x)$$

分段线性插值函数实际上是一个分段连续函数

定义：教材40页

习题2.18

误区2：概念理解——分段

$$I_h(x) = \frac{x-b}{a-b}a^2 + \frac{x-a}{b-a}b^2 \qquad a \le x \le b$$

$$|\mathrm{R}_1(\mathrm{x})| = \frac{(b-a)^2}{4}$$

习题2.18

答题严谨性

解 $I_{h_k}(x) = x_k^2 \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + x_{k+1}^2 \dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \qquad x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|R(X)| \le \frac{M_2}{8} h^2 = \frac{h^2}{4}$$

关键字:

基础概念 --函数逼近、范数、内积等

正交多项式 --概念

最佳平方逼近 --法方程、正交函数

最小二乘法 --法方程

3.4

计算下列函数f(x)关于 C[0, 1]的$\|f\|_\infty$，$\|f\|_1$与$\|f\|_2$：

(1) $f(x) = (x-1)^3$；

考察点：连续函数空间上的范数定义，其中

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)|\,,\qquad 称为\infty-范数；$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx\,,\qquad 称为1-范数；$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}，\quad 称为2-范数。$$

解答：

(1) $f(x) = (x-1)^3$

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|(x-1)^3| = 1$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (x-1)^6 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

习题3.6

对$f(x), g(x) \in C^2[a, b]$，定义

(1) $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$， (2) $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$，

问它们是否构成内积。

若(u, v)是内积，必须满足以下条件：

i)$(u, v) = \overline{(v, u)}$

ii)$(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$

iii)$(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$

iv)$(u, u) \geq 0$, 当且仅当$u = 0$时$(u, u) = 0$

习题3.18

18 在某佛堂反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求 $y = f(t)$

解答：采用的方程为：

$$y = ae^{\frac{-b}{t}} \quad (a, b > 0)$$

疑问1：该形式的方程如何想到的？

疑问2：该t=0这一点如何利用？

区别与联系

- 插值法
- 函数逼近
- 最小二乘

第四章 数值积分与数值微分

关键词：

- 代数精度、插值型求积公式、收敛性与稳定性
- 牛顿-柯特斯公式
  - 梯形公式、辛普森公式、柯特斯公式: 公式、余项
- 复合求积公式
  - 复合梯形/辛普森: 公式、余项
- 龙贝格求积公式
  - 递推算法
- 高斯求积公式
  - 公式、余项
- 数值微分
  - 中点法：
  - 插值型：两点公式、三点公式、三次样条

习题4.1

确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度：

2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

代数精度：按照代数精度的定义，确定一个求积公式的代数精度，只要验证公式对$f(x) = x^n$何时不成立即可。如果$f(x) = x^k (0 \le k \le n)$成立，但对$f(x) = x^{n+1}$不成立，则该求积公式的代数精度为n。

习题4.1

将$f(x)=1,x,x^2$分别代入求积公式

$$\begin{cases} 4h = A_{-1} + A_0 + A_1) \\ 0 = -2hA_{-1} + 2h A_1 \\ \dfrac{16}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1 \end{cases}$$

解，得

$$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h \qquad A_0 = -\frac{4}{3}h$$

所以，原求积公式至少具有2次代数精度。

再将$f(x)=x^3$代入求积公式

$$左边 = 0 = 右边$$

再将$f(x)=x^4$代入求积公式

$$左边 = \frac{64}{5}h^5 \neq 右边 = \frac{16}{3}h^5$$

所以，原求积公式的代数精度是3。

习题4.1

将$f(x)=1,x,x^2$分别代入求积公式

$$\begin{cases} 4h = A_{-1} + A_0 + A_1) \\ 0 = -2hA_{-1} + 2h A_1 \\ \dfrac{16}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1 \end{cases}$$

解，得

$$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h \qquad A_0 = -\frac{4}{3}h$$

所以，原求积公式至少具有2次代数精度。

再将$f(x)=x^3$代入求积公式

$$左边 = 0 = 右边$$

//再将$f(x)=x^4$代入求积公式

//左边 $=\dfrac{64}{5}h^5 \neq$ 右边 $=\dfrac{16}{3}h^5$

所以，原求积公式的代数精度是3。

习题4.6

若用复合梯形公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间$[0,1]$应该分成多少等分才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$？若改用复合辛普森公式，要达到同样精度区间$[0,1]$应该分多少等分？

复合Simpson公式的积分余项是

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$$

此时

$$|R_n(f)|=\left|-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\right|=\left|-\frac{1}{180}\times\frac{e^\eta}{16n^2}\right|\le\frac{1}{2}\times 10^{-5}\quad \eta\in(0,1)$$

因此

$$n\ge\sqrt[4]{\frac{e}{1440}\times 10^5}\approx 3.7\ge 4$$

所以应该至少分成4等分，方可满足题意。

第五章 解线性方程组的直接方法

关键字：

- 高斯消去法
  - 倒三角阵
  - 矩阵的LU分解:单位下三角和上三角
  - 列主元消去法
- 矩阵的三角分解法
  - 直接分解法
  - 平方根法
  - 追赶法
- 向量和矩阵范数
  - 范数性质、各范数计算公式
- 误差分析
  - 条件数、病态性

习题5.14

设$P \in R^{n\times n}$且非奇异，又设$\|x\|$为R^n上一向量范数，定义

$$\|x\|_p = \|Px\|$$

试证明$\|x\|_p$是R^n上向量的一种范数。

考察点：范数的三个条件：

1、正定性

2、齐次性

3、三角不等式

正定性：

因为$\|Px\|$是向量范数，所以$\|Px\| \geq 0$，并且$\|Px\| = 0$当且仅当$Px = 0$；而P非奇异，$Px = 0$当且仅当$x = 0$。

习题5.4

试推导矩阵A的Crout分解$A = LU$的计算公式，其中L为下三角矩阵，U为单位上三角矩阵。

设

$$\mathrm{A} = \mathrm{LU} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

则有$a_{i1} = l_{i1}, a_{1j} = l_{11}u_{1j}$

所以有$l_{i1} = a_{i1}$， $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} l_{is}u_{sk} = \sum_{s=1}^{n-1} l_{is}u_{sk} + l_{ik}$$

所以有

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{s=1}^{n-1} l_{is}u_{sk} \quad u_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{s=1}^{n-1} l_{is}u_{si}}{l_{kk}}$$

习题5.4

过程不完整　推导不严谨

根据矩阵乘法

$$a_{i1} = l_{i1} \quad i = 1,2, \dots, n$$
$$a_{1j} = l_{11}u_{1j} \quad \mathrm{j} = 2,3, \dots, \mathrm{n}$$

所以有

$$l_{i1} = a_{i1} \quad i = 1,2, \dots, n$$
$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad \mathrm{j} = 2,3, \dots, \mathrm{n}$$

设已得到L的前k-1列和U的前k-1行，则：

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} l_{is}u_{sk} = \sum_{s=1}^{k} l_{is}u_{sk} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} + l_{ik} \quad i = k, k+1, \dots, n$$

习题5.4

所以L的第k列为

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{s=1}^{n-1} l_{is} u_{sk} \quad i = k, k+1, \ldots, n$$

又由

$$a_{kj} = \sum_{s=1}^{n} l_{ks} u_{sj} = \sum_{s=1}^{k} l_{ks} u_{sj} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj} + l_{kk} u_{kj} \quad j = k+1, k+2, \ldots, n$$

所以U的第k行为

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{s=1}^{n-1} l_{ks} u_{sj}}{l_{kk}} \quad j = k+1, k+2, \ldots, n$$

综上所述，……

关键字

- 迭代方法:
  - 雅可比（Jacobi）迭代法
  - 高斯一赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法
  - 松弛法
  - 共轭梯度法

迭代矩阵的表示
与计算过程

- 迭代法的收敛判别
  - 矩阵的谱半径
  - 迭代法的收敛定理及推论（迭代矩阵）
  - 对系数矩阵A的判别原则

迭代法的收敛判别：

- 迭代法的收敛定理及推论（迭代矩阵）：
  - x=Bx+f，B的谱半径小于1（充要条件）
  - B的某种算子范数小于1（充分条件）

- 对系数矩阵A的判别原则
  - 1、A严格对角占优，雅克比高斯赛德尔迭代法收敛
  - 2、A弱对角占优及不可约，雅克比高斯赛德尔迭代法收敛
  - 3、A对称，雅克比迭代收敛《=》A及2D-A均正定
  - 4、A对称，高斯赛德尔迭代法收敛《=》A正定
  - 5、定理12、13

习题6.9

设有线性方程组Ax = b，其中A为对称正定阵，迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\left(b - Ax^{(k)}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

试证明当$0 < \omega < \frac{2}{\beta}$时上述迭代法收敛（其中$0 < \alpha \le \lambda(A) \le \beta$）

证明：

迭代公式可以改写为

$$x^{(k+1)} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

其迭代矩阵为$B = I - \omega A$，其特征值为$\mu = 1 - \omega\lambda(A)$，

根据题目条件$0 < \omega < \frac{2}{\beta}$，$0 < \alpha \le \lambda(A) \le \beta$，有

$$0 < \omega\lambda(A) < 2$$

所以

$$-1 < \mu = 1 - \omega\lambda(A) < 1$$

即$|\mu| < 1$

根据迭代法收敛的充要条件可知，上述迭代法收敛

关键词：

- 二分法
- 不动点理论
  - 定义、存在性、收敛定理、收敛速度
- 牛顿法
  - 迭代公式、收敛性、收敛速度

7.15

证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$$

是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。假定初值x_0充分靠近根x^*，求

$$\lim_{k\to\infty} (\sqrt{a} - x_{k+1})/(\sqrt{a} - x_k)^3 \text{ 。}$$

解答： 考察收敛速度。

设$x^* = a$，且

$$\varphi(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$$

则

$$\varphi'^{(x)} = \frac{3(x^2 - a)^2}{(3x^2 + a)^2} \quad \varphi''(x) = \frac{48ax(x^2 - a)}{(3x^2 + a)^3}$$

$$\varphi'''(x) = \frac{-48a(9x^4 - 18ax^2 + a^2)}{(3x^2 + a)^4}$$

7.15

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = 0 \qquad \varphi'''(x^*) = \frac{3}{2a} \neq 0$$

所以，该迭代公式是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。

对$x_{k+1} = \varphi(x_k)$作Taylor展开如下

$$x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*)$$

$$= \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \varphi''(x^*)\frac{(x_k - x^*)^2}{2!} + \varphi'''(\xi_k)\frac{(x_k - x^*)^3}{3!} \quad \xi_k\text{在}x_k\text{和}x^*\text{之间}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^3} = \frac{1}{3!}\varphi'''(x^*)$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^3} = \frac{1}{3!}\frac{3}{2a} = \frac{1}{4a}$$

第八章 矩阵特征值计算

关键词：

- 特征值、特征向量
- 圆盘定理、瑞利商
- 幂法
  - 主特征值及特征向量
- 反幂法
  - 最小特征值及特征向量
- Householder变换、 QR分解
  - 初等反射矩阵及性质；QR构造算法
- QR方法
  - 计算矩阵的全部特征值
  - 基本QR方法的构造算法、收敛性

矩阵特征值与特征向量的计算

幂法（幂法加速）→满足条件的实矩阵最大特征值及其相应的特征向量。

反幂法→满足条件的实矩阵最小特征值及其相应的特征向量，某一特征值及特征向量的校正。

QR算法→中小型矩阵全部特征值及其相应的特征向量的最有效方法。

利用格什戈林圆盘定理估计下面矩阵特征值的界：

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

解答： 考察格什戈林圆盘定理。注意等号

矩阵对称，特征值均为实数。根据格什戈林圆盘定理，特征值λ_i位于圆盘

$$|\lambda_i - 4| \leq 2 = 1 + 1$$

内，即$2 \leq \lambda_i \leq 6(i = 1,2,\dots,n)$

定理5（Gerschgorin园盘定理）：

（1）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，则A的每一特征值必属于下述某个园盘之中： $|\lambda - a_{ii}| \leq r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq i}}^{n} |a_{ij}|$， $(i=1,\cdots,n)$

或者说：$\lambda(A) \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ ，A的任一特征值均在复平面上n个Gershgorin园盘的并集中。

第九章 常微分方程初值问题数值解法

关键词：

- 简单数值方法
  - （向前）欧拉法与后退欧拉法
  - 梯形方法
  - 改进欧拉公式
  - 单步法局部截断误差与阶
- 龙格库塔方法
  - 二阶显式R-K方法
- 单步法的收敛性与稳定性
- 第九章尚未上完的部分

利用欧拉方法计算积分

$$\int_0^x e^{t^2}dt$$

在点x=0.5，1，1.5，2的近似值。

解答： 考察欧拉法。

令$y(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$，则有初值问题

$$y'=e^{x^2},y(0)=0$$

对上述问题应用欧拉法，取h=0.5，计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+0.5e^{x_n^2}\quad n=0,1,2,3$$

由y(0)=y_0=0得

$$y(0.5)\approx y_1=0.5$$
$$y(1.0)\approx y_2=1.142$$
$$y(1.5)\approx y_3=2.501$$
$$y(2.0)\approx y_4=7.245$$