线性代数与几何（下）

第八章课后习题答案

计三团

感谢计三年级同学无私奉献！

佳兴

数 学 作 业 纸

（科目：高代）

班级：计35　姓名：[illegible]　编号：2013011398　第 1 页

第8章　一元多项式

1.
$$\begin{array}{r|l|l} x^3-3x+2 & x^5 \quad -x^3+3x^2 \quad -1 & x^2+2=q(x) \\ & x^5 \quad -3x^3+2x^2 & \\ \hline & 2x^3+x^2 \quad -1 & \\ & 2x^3 \quad -6x+4 & \\ \hline & x^2+6x-5=r(x) & \end{array}$$

故所求商式为 x^2+2，余式为 x^2+6x-5.

2.
$$\begin{array}{r|l|l} x^2-2ax+2 & x^4 \quad +3x^2+ax+b & x^2+2ax+(1+4a^2) \\ & x^4-2ax^3+2x^2 & \\ \hline & 2ax^3+x^2+ax+b & \\ & 2ax^3-4a^2x^2+4ax & \\ \hline & (1+4a^2)x^2-3ax+b & \\ & \cdots & \end{array}$$

由整除知 $3a=2a(1+4a^2)$，$b=2(1+4a^2)$，可解得 $\begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ b=3 \end{cases}$

3. 设 α,β 为方程 $g(x)=0$ 的两个不同的复根，则 $\alpha^3=\beta^3=1$.
于是 $f(\alpha)=\alpha^{3m}+\alpha^{3n+1}+\alpha^{3p+2}=1+\alpha+\alpha^2=0$，同理 $f(\beta)=0$，所以 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

4. 设 $g(x)=p(x)f(x)$，$f(x)=q(x)g(x)$，则 $p(x)q(x)=1$，即 $\deg p+\deg q=0$，所以 $\deg p=\deg q=0$，
进而 $f(x)=cg(x)$，其中 c 为非零常数.

5. 设 $g(x)=f(x)p(x)$，$h(x)=g(x)q(x)$，则 $h(x)=p(x)q(x)\cdot f(x)$，所以 $f(x)|h(x)$.

6. 对 $\forall i$ $(i=1,2,\cdots,s)$，由于 $f(x)|g_i(x)$，所以 $f(x)|u_i(x)g_i(x)$，进而 $f(x)|\sum_{i=1}^{s}u_i(x)g_i(x)$

7.8 略.

9.
$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 0 & -5 & 0 & 8 & 0 \\ & & -6 & 18 & -39 & 117 & -375 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -39 & 125 & -375 \end{array}$$
所以 $f(-3)=-375$.

10. 对 $f(x)$ 的次数归纳，当 $n=0$ $(\deg f=n)$ 时显然.
设 $n=k$ 时结论成立，当 $n=k+1$ 时 $(\deg f=k+1)$，由余数定理 $f(x)=q(x)(x-x_0)+f(x_0)$，
且易知 $\deg q=k$，利用归纳假设，$q(x)$ 可唯一表示成 $x-x_0$ 的多项式，
进而 $f(x)$ 可唯一地表示成 $x-x_0$ 的多项式.

数 学 作 业 纸

（科目：线代.）

班级：计35　　姓名：刘倚　　编号：2013011398　　第 2 页

11.
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$
即 $f(x) = x^3(x-2)+3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}$$
即 $f(x) = [(x-2)(x^2+2x+4)+8](x-2)+3$.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 2 & 4 \\ & & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 12 \end{array}$$
即 $f(x) = \{(x-2)[(x-2)(x+4)+12]+8\}(x-2)+3$ 展开
$= (x-2)^4+6(x-2)^3+12(x-2)^2+8(x-2)+3$.

12. 由题 $f(x) = (x-1)^2 g(x)+2x = (x-2)^3 h(x)+3x$.
所以 $(x-1)^2 g(x) = (x-2)^3 h(x)+x$.
若 $\deg h = 0$. 令 $x=1$. 有 $h(x)=1$. 代入. $g(x)$ 无解.
若 $\deg h = 1$. 设 $h(x) = p(x-1)+q$.
$(x-1)^2 g(x) = [(x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1][p(x-1)+q]+x$
$= p(x-1)^4-3p(x-1)^3+3p(x-1)^2-p(x-1)+q(x-1)^3-3q(x-1)^2+3q(x-1)-q+x$.
$= T\cdot(x-1)^2 - p(x-1)+3q(x-1)-q+x$.
$= [3q-p](x-1)+x-q$.
有 $(x-1)^2 \mid [(3q-p)(x-1)+x-q]$. 有 $q=1$. $3q-p+1=0$. 有 $p=4$. $q=1$.
$h(x) = 4x-3$. $f(x) = (x-2)^3(4x-3)+3x = 4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$.

13. 设 $g(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i$. $h(x) = \sum_{i=1}^{s} b_i x^i$. $f(x) = \sum_{i=1}^{t} c_i x^i$.
则 $x g^2(x)$ 最高次为 $a_r^2 x^{2r+1}$. ~~同理~~ $x h^2(x)$ 最高次为 $b_s^2 x^{2s+1}$.
若 $s=r$. 则 $x g^2(x)+x h^2(x)$ 的最高次为 $(a_r^2+b_s^2)x^{2r+1}$. $f^2(x)$ 最高次为 $c_t^2 x^{2t} \neq (a_r^2+b_s^2)x^{2r+1}$
若 $s\neq r$. 不妨 $s>r$. 则 $x g^2(x)+x h^2(x)$ 的最高次为 $b_s^2 x^{2s+1}$. $f^2(x)$ 最高次为 $c_t^2 x^{2t} \neq b_s^2 x^{2s+1}$
皆矛盾. 故 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.
若 ~~f(x)=g(x)=~~ $f(x)$. $g(x)$. $h(x) \in C[x]$. 结论不一定成立. 反例: $h(x)=ix$. $g(x)=x$.
$f(x) = x g^2(x)+x h^2(x) = x^3-x^3 = 0$.

14. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

由题 $a_nf^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)^k$ (*)

左端最高次项：$a_n^{n+1}x^{n^2}$. 右端最高次项：$a_n^kx^{nk}$

有 $a_n^{n+1}x^{n^2}=a_n^kx^{nk}$.

若 $n>0$. 有 $a_n=1$. $n=k$. 代入 (*). 有

$f^k(x)+a_{k-1}f^{k-1}(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0=f^k(x)$. 即 $a_{k-1}f^{k-1}(x)+\cdots+a_1x+a_0=0$.

有 $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$. 即 $f(x)=x^k$.

若 $n=0$. 即 $f(x)$ 是常数项多项式. 设 $f(x)=c$. 有 $c=c^k$.

若 k 是奇数且 $k\neq1$. 有 $f(x)=1$ 或 -1.

若 k 是偶数. 有 $f(x)=1$

若 $k=1$. 则 $f(x)=c$. c 是 0 以外的任一实数.

15. 设 $h(x)=f(x)-g(x)$. 知对 $\forall\alpha_i(i=1,2\cdots n+1)$. $h(\alpha_i)=0$. 即为 $h(x)$ 的根.

若 $h(x)\neq0$. 则 $h(x)=l(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})$. $\deg h=n+1$. 又 $\deg(f-g)\leq n$.

矛盾. 故 $h(x)=0$. 即 $f(x)=g(x)$.

16.

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=x-1$	x^4+x^2+x-1	$x^5-x^4+2x^3+x^2+3$	$x-1=q_1(x)$
	$x^4+x^3+2x^2+2x$	$x^5+x^3+x^2-x$	
	$-x^3-x^2-x-1$	$-x^4+x^3+x+3$	
	$-x^3-x^2-2x-2$	$-x^4-x^2-x+1$	
	$r_2(x)=x+1$	$r_1(x)=x^3+x^2+2x+2$	$x^2+2=q_3(x)$
		x^3+x^2	
		$2x+2$	
		$2x+2$	
		$r_3(x)=0$	

最大公因式为 $x+1$

17. 与16完全同理，略.

18.

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=x+1$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$ $x^4 \quad -2x^2$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$ $x^4+x^3-x^2-2x-2$	$1=q_1(x)$
	x^3+x^2-2x-2 $x^3 \quad -2x$	$r_1(x) \quad x^3 \quad -2x$ $x^3 \quad -2x$	$x=q_3(x)$
	$r_2(x)=x^2-2$	$r_3(x)=0$	

$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$.

$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$

$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)$

$q_2(x)f(x)-g(x)=q_1(x)q_2(x)g(x)-r_2(x)$.

$(q_1(x)q_2(x)+1)g(x)-q_2(x)f(x)=r_2(x)$

有 $(x+2)g(x)-(x+1)f(x)=x^2-2$. 于是 $u(x)=-(x+1)$. $v(x)=(x+2)$.

19.

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=x+(t-2)$	$x^3+tx^2 \quad +u$ x^3+2x^2+ux	$x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ $x^3+tx^2 \quad +u$	$1=q_1(x)$
	$(t-2)x^2-ux+u$ $(t-2)x^2+2(t-2)x+u(t-2)$	$r_1(x)=x^2+2x+u$	
	$[-u-2(t-2)]x+3u-tu$		

由题 $3u-tu=0$. $u+2t=4$.

解得 $\begin{cases}u=0\\t=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}u=-2\\t=3\end{cases}$

20. 注意到 $c(af(x)+bg(x))-a(cf(x)+dg(x))=(bc-ad)g(x)$.

所以 $(af(x)+bg(x),\ cf(x)+dg(x))=(af(x)+bg(x),\ (bc-ad)g(x))=(af(x),\ g(x))=(f(x),\ g(x))$

21. 一方面若 $d(x)$ 是 $f(x)$. $g(x)$ 的一个最大公因式. 显然 $(f_1(x), g_1(x))=1$.

另一方面. 若 $(f_1(x), g_1(x))=1$. 设 $d_1(x)$ 是 $f(x)$. $g(x)$ 的最大公因式. 设 $f(x)=d_1(x)f_2(x)$. $g(x)=d_1(x)g_2(x)$

若 $d(x)\neq d_1(x)$. 则 $d(x)\mid d_1(x)$. $f_1(x)=\frac{d_1(x)}{d(x)}f_2(x)$. $g_1(x)=\frac{d_1(x)}{d(x)}g_2(x)$. $(f_1(x), g_1(x))=\frac{d_1(x)}{d(x)}\neq 1$. 矛盾.

于是得证

22. 23. 24 [illegible].

25. 设 α, β 为方程的两个根. $\alpha+\beta=-b$. $\alpha\beta=c \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=b^2-2c$. $\alpha^2\beta^2=c^2$.

故所求方程为：$x^2-(b^2-2c)x+c^2=0$

26(1) 设有理零点为 $\frac{r}{s}$. 有 $s|1$. $r|14$. 于是 $s=\pm1$. $r=\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. 分别代入. 知 $x=2$ 为其有理零点.

(2). (3) 完全同理.

27. (1). 令 $y=x-1$. $x^2+1=y^2+2y+2$. 取 $p=2$. 则 $p\nmid 1$. $p|2,2$ $p^2\nmid 2$. 由爱森斯坦判别法知其不可约.

(2). 取 $p=2$ ~~…~~ 由爱森斯坦判别法知其不可约.

(3). 令 $y=x-1$. 代入后取 $p=3$. 由爱森斯坦判别法知其不可约.

(4). 令 $y=x-(p-1)$. 代入. $x^p+px+1=[y+(p-1)]^p+$ ~~…~~ $py+p(p-1)+1$.

令 $p'=p$ $(p-1)^p \equiv C_p^1 p(-1)^{p-1}+C_p^0(-1)^p \equiv -1 \pmod{p}$. 由爱森斯坦判别法知其不可约.

(5). 令 $y=x-1$. $x^4+4kx+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+1+4ky+4k+2$. 取 $p=2$.

由爱森斯坦判别法知其不可约.