离散数学(1)习题课

清华大学计算机系
王　宏老师
马昱春老师
陈许旻　林衍凯　茹逸中助教

习题解电子版

- 在清华网上图书馆搜索“数理逻辑与集合论”

习题1.1/2

- 判断下列语句是否是命题，如果是求其真值。
  - 火星上有生命存在。
    - 真值待定/真
  - 这句话是错的。
    - 不是命题，悖论
  - 假如明天是星期天，那么学校放假。
    - 如果“明天”不是星期天：真
    - 如果“明天”是星期天：可能做作业的时间星期天都放假
    - 错例：如果是xx周，假
      - 修改：如果今天是xx周周六，假
- P表示今天很冷，Q表示正在下雪。
  (1)将命题符号化：正在下雪的必要条件是今天很冷
- 正解：$Q \rightarrow P$，注意区分充分条件和必要条件

习题1.6

- 写出波兰式和逆波兰式

∨是左结合的，从左至右依次计算

波兰式中¬放前面，逆波兰式中放后面

	原式	波兰式	逆波兰式
(1)	$P \to Q \vee R \vee S$	$\to P \vee\vee QRS$	$PQR \vee S \vee\to$
(3)	$\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$	$\vee\vee \neg\neg P \wedge WR\neg Q$	$P\neg\neg WR \wedge\vee Q\neg \vee$

不能等值替换，不能交换左右，不能去掉连续的¬
这是求原式的另一种形式，而不是化简原式，就像“列出方程”的题目不应该把方程解出来一样

$func(E)$：对表达式 E 求波兰式或逆波兰式（用于手算）

如果E只剩一个命题变项，返回E

如果E满足 (E_1) 的形式，返回 $func(E_1)$

找到**<u>最后</u>**计算的符号@

if @是单目运算（例如¬）

单目运算一定在开头，即$E = @E_1$

返回$@func(E_1)$（波兰式）或$func(E_1)@$（逆波兰式）

else

双目运算将表达式分成了两半，即$E = E_1 @ E_2$

返回$@func(E_1)func(E_2)$（波兰式）或$func(E_1)func(E_2)@$（逆波兰式）

习题2.3

- 用↑和↓分别表示出¬、∧、∨、→和↔
  - 题意有些不清：只使用↑或↓可以表示出所有运算，因此题意是求只使用↑表示五个运算，再只使用↓表示五个运算
  - $\neg P = P \uparrow P$
  - $P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$
  - 其他运算都可以用这两个运算组合出来
  - 很多式子有更简单的表达

习题3.1

- 用罗素公理系统证明：(3) $\vdash P \rightarrow (Q \vee P)$
- 易错点
  - 罗素公理系统只能使用已有的公理和定理
  - 只能使用代入和分离两种变换方式
  - 不能直接使用交换律、分配律等常用等值变换
  - 目前的公理体系有可能推不出结合律
- 写明依据
  - 形式严格按照约定
  - 在用推理演算和归结推理时也要写明
- 离散~~语文~~数学要学习“正确的说话方式”，形式正确更容易找到自己的证明哪里错了
- 包括谓词逻辑的推理演算、归结推理等的证明都应当严格按照各自系统允许的方式进行

习题3.1（cont）

- (3) $\vdash P \to (Q \vee P)$
- ①$\vdash (Q \to R) \to (P \to Q) \to (P \to R)$ 已证定理
- ②$\vdash (P \vee Q \to Q \vee P) \to (P \to P \vee Q) \to (P \to Q \vee P)$ 代入$\frac{Q}{P \vee Q}, \frac{R}{Q \vee P}$
- ③$\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$ 公理
- ④$\vdash (P \to P \vee Q) \to (P \to Q \vee P)$ ②③分离
- ⑤$\vdash P \to (P \vee Q)$ 公理
- ⑥$\vdash P \to (Q \vee P)$ ④⑤分离

不能写成
∵①③∴④

没有交换律，
不能直接用
交换律交换

习题5.4

- 求前束范式、∃前束范式、（第二类）Skolem范式
- 引入新谓词、新函数之后新式和原式<u>**不等值**</u>，不能直接写等号。
- 应当注明新谓词或函数与原式的关系后才能写等号，或是注明这是原式的XX范式（而不是等于原式）
- 不写明的话，关系如下：
  - 原式 = 前束范式（变元易名后分配等值式前）≠ 分配等值式后的范式
  - 原式 ⇒ ∃前束范式
  - 原式 ⇐ Skolem范式
- 不建议用分配等值式形式的前束范式

习题5.4（cont）

- (8)求$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)\rightarrow\big((\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)\big)$的∃前束范式
- 除常见的做法外，以下三种都对

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)\rightarrow\big((\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)\big)\\
&=(\exists x)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)\vee(\forall x)\big(\neg P(x)\big)\vee(\exists x)Q(x)\\
&=(\exists x)(\forall y)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\vee Q(x)\big)\vee\big(\neg P(y)\big)\\
&=(\exists x)(\forall y)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\vee\big(\neg P(y)\big)
\end{aligned}
$$

这里可以合并是因为∃的分配律，同名命题变项一般不能乱合并

推荐这种

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)\rightarrow\big((\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)\big)\\
&=(\exists x)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)\vee(\forall x)\big(\neg P(x)\big)\vee(\exists x)Q(x)\\
&=(\exists x)(\forall y)(\exists z)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\vee\neg P(y)\vee Q(z)\big)\\
&\Rightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\forall u)\Big(\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\vee\neg P(y)\vee Q(z)\big)\wedge\neg S(x,y)\vee S(x,u)\Big)
\end{aligned}
$$

$$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)\rightarrow\big((\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)\big)=\cdots=T$$

这里不能是等号；可以写文字，如：“∃前束范式是”

习题10.3

- 证明：
  - $dom(R \cup S) = dom(R) \cup dom(S)$
  - $dom(R \cap S) \subseteq dom(R) \cap dom(S)$
- 错误1：∃对∨的分配率是可逆的，但对∧的分配率是单向的
  - $(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \vee \langle x,y\rangle \in S) \Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R) \vee (\exists y)(\langle x,y\rangle \in S)$
  - $(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in S) \Rightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\exists y)(\langle x,y\rangle \in S)$
- 错误2：没有搞清楚个体变项的“管辖范围”
  - 对任意的 x，$x \in dom(R \cup S) \Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \cup S)$ √
  - $(\forall x)\big(x \in dom(R \cup S)\big) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \cup S)$ √
  - $(\forall x)\big(x \in dom(R \cup S)\big) \Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \cup S)$ ×
  - $\forall x \in dom(R \cup S) \Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \cup S)$ ？？

x 是整个证明过程中的变元

x 的“作用域”有歧义

每一步都是完整的命题，x 在每步
中都收到该步骤中的量词“管辖”

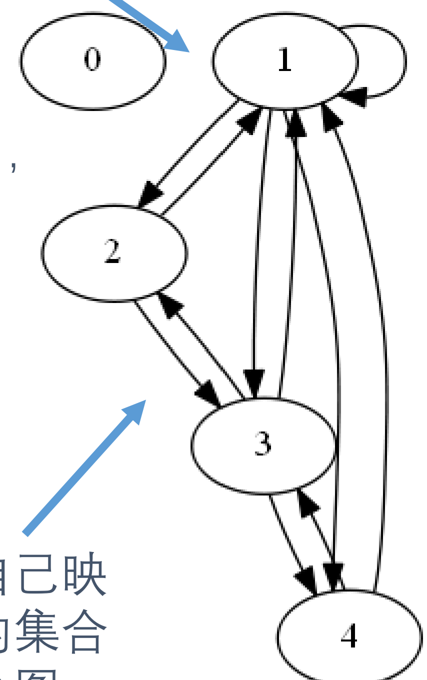
习题10.7

- 对$A = \{0,1,2,3,4\}$关系，给出关系图和关系矩阵：
  (3) $R_3 = \{\langle x, y\rangle | x \text{ 和 } y \text{ 是互质的}\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

0和自然数x的互质性可以理解为未定义或最大公约数为 x，所以0和1都算对

注意1和所有正整数都互质



一般这种自己映射到自己的集合不画成二分图

习题10.10

- 证明 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
- 对任意的 $\langle x, y \rangle$

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y \rangle \in R \circ (S \cup T) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z \rangle \in S \cup T \wedge \langle z, y \rangle \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\big((\langle x, z \rangle \in S \vee \langle x, z \rangle \in T) \wedge \langle z, y \rangle \in R\big) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\big((\langle x, z \rangle \in S \wedge \langle z, y \rangle \in R) \vee (\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R)\big) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, y \rangle \in R \circ S \vee \langle x, y \rangle \in T \circ R) \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (R \circ S) \cup (R \circ T)
\end{aligned}
$$

习题11.3

- $f,g \in A_B$，$f \cap g \neq \emptyset$，$f \cap g$和$f \cup g$是函数吗？证明或举反例
    - $f \cup g$可能不是任何集合到任何集合的函数
    - $f \cap g$可能不是A到B的函数，但一定是$dom(f \cap g)$到B的函数
- 这道题问法有问题，函数必须定义在特定的两个集合上
- 虽然题目问法有问题，但是回答不能和题目一起错，在作业中直接回答是或不是，不判断定义域或明确说明是不是某个特定集合上的函数的都判为了错
- 另外两道问是否是函数的题目同理，在这本书上这样问是错的
- 另一种解决方案是更新书上对函数的定义，比如加上"一般地，我们在不指定两个集合的情况下说f是一个函数，是指'f是从某一集合到某一集合的函数'"
- 在举反例的时候注意需要举满足$f \cap g \neq \emptyset$的函数（虽然这个条件并没有什么用）

习题11.6

- 下列函数是否满射的，单射的，双射的？
- (2)$f: \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$
- 题目有三个问题，应当都回答
- (2)不是满射，是单射，不是双射

习题11.7

- 设R是A上的等价关系，$g: A \to A/R$是自然映射，什么条件下g是双射？
- 自然映射$g(a) = [a]_R$定义为从元素映射到等价类，是满射
- 同时是单射时就是双射
- A/R的元素个数需要和A相同，即等价类个数等于元素个数
- 只能每个元素一个等价类，即是恒等关系

习题11.9

- 有限集合A和B，$|A| = m$，$|B| = n$，求下列情况下m和n的条件
  - 存在从A到B的(1)单射函数(2)满射函数(3)双射函数
- 对于(2)，如果$B = \emptyset$，则关系集合必须为$\emptyset$，此时若$A \neq \emptyset$，则不可能存在A到B的函数，更不可能存在满射函数
- 因此(2)的答案应该是：$m \geq n > 0$或$m = n = 0$
- (1)$m \leq n$，(3)$m = n$
- ps：这个题2016年只有3个人做对

习题11.10

- 构造A到B的双射函数：
  (2)$A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, $B = (1,3) \subseteq \mathbb{R}$
- 错误举例：
  - $f(x) = 2x + 1$，没有指定函数的集合
- 正确举例：
  - $f: A \to B, f(x) = 2x + 1$

习题11.10

- 构造A到B的双射函数：
  (3)$A=P(X)$，$B=X_Y$，$X=\{a,b,c\}$，$Y=\{0,1\}$
- 要点：搞清楚X_Y是所有可能的单射，一一建立关系即可
- $A=$ $B=$ 双射举例：

$$A=\left\{\begin{matrix}\emptyset,\\ \{a\},\\ \{b\},\\ \{c\},\\ \{a,b\},\\ \{a,c\},\\ \{b,c\},\\ \{a,b,c\}\end{matrix}\right\}\quad B=\left\{\begin{matrix}\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\\ \{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\},\\ \{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\\ \{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\},\\ \{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\\ \{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\},\\ \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\\ \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\langle\emptyset,\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle,\\ \langle\{a\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle,\\ \langle\{b\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle,\\ \langle\{c\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle,\\ \langle\{a,b\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle,\\ \langle\{a,c\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle,\\ \langle\{b,c\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}\rangle,\\ \langle\{a,b,c\},\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}\rangle\end{matrix}\right\}$$

ps：抄题解的同学不要只抄f_1，不抄f_1的定义