

姓名 _____ 学号 **20** _____ 班级 _____

[说明]

- (1) 第一、二、三、四、五题的答案直接填在试题纸上；
- (2) 第六、七题、简单的解题过程和结果写在试题纸上；卷面空间不够时请写在背面
- (3) 除非特别说明，计算结果保留 4 位有效数字
- (4) 考试时间为 120 分钟

1. (8 分) 主对角线元素均为 2，两个次对角线元素均为 1 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$ ， b 为分量

均为 1 的 n 维列向量。求 $n = 50$ 时的 2 范数条件数 $\text{cond}_2(A) =$ _____，用高斯-赛德尔迭代法求解方程组 $Ax = b$ ，计算迭代矩阵 B_G 的谱半径 $\rho(B_G) =$ _____，若初值 $x^{(0)}$ 取 0 向量，则第 10 步迭代解 $x^{(10)}$ 的第 5,18,27 个分量依次为 _____，此时残差的 1 范数 $\|Ax^{(10)} - b\|_1 =$ _____。

2. (4 分) 已知常微分方程初值问题 $y' = y^3 - e^y + x - 1$ ， $y(1) = 1.6$ ，试用 ode45 命令求 $y(2) \approx$ _____；用改进欧拉公式，步长取 0.2，计算 $y(2) \approx$ _____。

3. (6 分) 某工厂用三种原料生产三种产品 Q1, Q2, Q3，已知的条件如表所示，

| 单位产品所需原料量 (公斤) | Q1 | Q2 | Q3 | 原料可用量 (公斤/日) |
|----------------|----|----|----|--------------|
| 原料 P1 | 2 | 3 | 0 | 1500 |
| 原料 P2 | 0 | 2 | 4 | 2000 |
| 原料 P3 | 3 | 2 | 5 | 2000 |
| 单位产品的利润 (千元) | 3 | 5 | 4 | |

目标是要使得总利润最大。如果原料 P2 的可用量从 2000 减少到 1500，这一条件的变化是否会影响最优解 是 (是或不是)。保持最优解不变，原料 P2 可用量可取值的范围是 $P2 \geq 1800$ ，原料 P3 增加 1 公斤，总利润增加 0.8 元。

4. (6 分) 用 fminunc 命令计算 $\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_1 - 8x_2$ 的局部极小值，初值取 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，搜索方向选用 BFGS 方法，默认精度下近似解 $x^* =$ _____；搜索方向选用最速下降法，自变量与函数值的精度设定都取 10^{-2} ，此时近似解 $x^* =$ _____；用最速下降法相邻两次搜索方向的关系是 _____。(注明使用 Matlab 的版本)

5. (6分) 对正态总体 $N(\mu, 4^2)$ 考虑如下假设检验问题, $H_0: \mu = 6$ vs $H_1: \mu \neq 6$, 若样本容量 $n = 28$, 则检验统计量 $\bar{x} = 6.56$ 对应的 p 值为_____, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, $\mu = 6.2$ 时, 犯第二类错误的概率为_____ ; 若使显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下接受原假设的 \bar{x} 取值范围不超过 0.15, 样本容量 n 应满足_____。

6. (8分) 确定非线性方程 $\int_0^x \cos(e^{3(t+1)}) \sin(2t) dt = 0.36$ 在 $x \in [0, 10]$ 区间上有几个根, 设初值为 $x_0 = 2$, 用 Newton 法迭代 8 次, 计算 x_8 。给出计算程序和结果。

7. (12分) 有如下一组父亲和儿子的身高数据

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 父亲身高 (cm) | 176 | 163 | 180 | 184 | 174 | 177 | 183 | 159 | 165 | 170 |
| 儿子身高 (cm) | 182 | 165 | 171 | 179 | 187 | 178 | 191 | 175 | 170 | 178 |

假设父亲身高 X 和儿子身高 Y 服从二维正态分布

- (1) 分别给出父亲和儿子平均身高置信水平 95% 的置信区间;
- (2) 建立以儿子身高为因变量, 父亲身高为自变量的回归模型。写出回归直线方程, 计算总偏差平方和与回归平方和, 并检验模型的有效性, 解释得到的结果;
- (3) 设 $E(X) = 173$, $E(Y) = 176$, $\sigma_X = \sigma_Y = 8$, 相关系数 $\rho(X, Y) = 0.6$, 求 (x, y) 处于以 $(175, 175)$ 为圆心、5cm 为半径的圆形区域内的概率。简要给出计算方法和程序。