实验四 数值积分

计 21 班 杨俊 2012011400

1. 应用数值积分方法近似计算

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

及圆周率 $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

方法 1： 用复合 Simpson 求积公式计算，要求绝对误差限小于 $\frac{1}{2}\times 10^{-8}$ ，问相应的步长 h 要取多少？试作出步长 h 的先验（预先）估计。利用选择好的步长计算，观察数值结果与先验估计是否符合。

方法 2： 用 Romberg 外推方法求积分近似值（误差要求与方法 1 同）。

方法 3：用复合 Gauss 公式(Ⅰ)作近似积分，即将[a,b]作等距分划$x_i = a + ih(i = 0,\cdots,n)$，$h = (b-a)/n$ ，在每个子区间内应用二点 Gauss 公式，则有

（Ⅰ）$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}}) + f(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}})] + \frac{(b-a)h^4}{4320}f^{(4)}(\zeta_1)$，$\zeta_1 \in (a,b)$

其中$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$， 试对步长 h 作先验估计（误差要求与方法 1 同），然后利用上式近似积分。

1、 算法思路

（1)用辛普森求积公式计算，先将区间分成 n 等份，得到每个区间长度，即步长为$h = \frac{b-a}{2}$，每个小区间用辛普森求积公式进行计算，具体的公式为$S = \frac{b-a}{6} * (f(a) + 4 * f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$，随后求和即得到整个积分区间上面的近似值。如果误差达到预定的精度，则停止，否则，继续进行循环运算。

（2）用 Romberg 外推法求积分

按照外推公式进行求积分，首先先对基础进行赋值：

a、 取 k=0，h=b-a，求$T[0][0] = \frac{h}{2} * (f(a) + f(b))$，积分区间为[a,b]；

b、 令 k=k+1；

c、 求梯形值 T[0][k]；

d、 求加速值，按照公式求出第 k 行的其余各元素 T[j][k-j]的值（j=1,2,3 •••••••• k）；

e、 判断精度，设精度上限为 E，则如果出现$T[k][0] - T[k-1][0] < E$，那末，返回 T[k][0] 来近似 I；否则，返回 b 步骤继续进行。

2、 实验结果分析

在进行积分计算之前，需要先计算其到达对应的精度之前需要多少次计算。

对于辛普森公式，有公式的余项得到当计算 pi 时需要区间 6 等份，而计算 ln2 时需要进行区间 25 等份。

由高斯公式的余项得到，计算 pi 时需要 6 等份，而计算 ln2 时需要 23

方法 积分	Pi	Ln2

Simpson	3.141592640305	0.693147185555
Romberg	3.141592653590	0.693147180562
Gauss	3.141592653590	0.693147179319

总的来说，方法一和方法三比较类似，而方法二收敛速度稍慢一些。