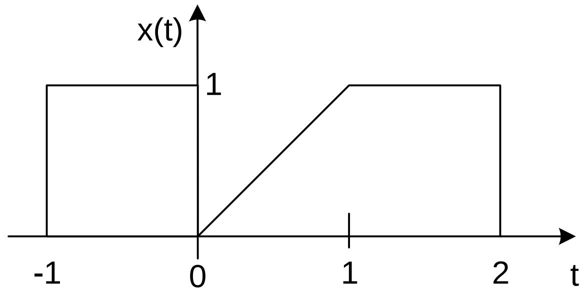
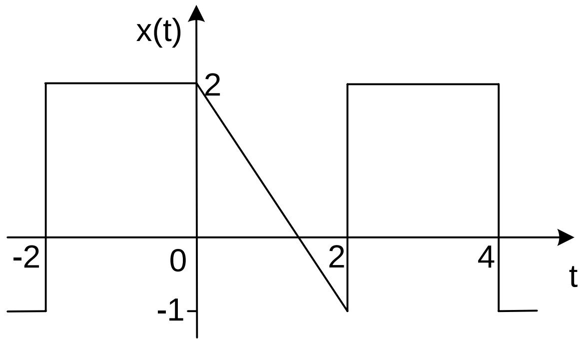
清华大学本科生期末考试试卷A
信号处理原理

2007.01.10 08:00-10:00

1. (8分) 已知$x(t)$的图形如下所示，请画出$y(t) = 3x\left(1-\frac{t}{2}\right)-1$的图形。



参考答案:



- 如果图形位置与标注都正确，只是下面"封了口"，则属于相对严重的错误（对信号的波形概念不清），酌情扣3分(如计42王静，计42沈超慧)。
- 如果忘记向左右两边划出延伸线，则属于粗心笔误，酌情扣1分(如计45张瑞)。

2. (8分) 设连续时间信号$x(t)$是实信号，它的傅里叶变换的频谱函数为$X(\omega)$。试证明:

(1) $x(t)$的偶分量与$X(\omega)$的实部是一对傅里叶变换对，

(2) $x(t)$的奇分量与$X(\omega)$的虚部是一对傅里叶变换对。

参考答案:

设$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, 其中$x_e(t)$是其偶分量，$x_o(t)$是其奇分量，则有$x_e(t) = x_e(-t)$，$x_o(t) = -x_o(-t)$

设$X(\omega) = X_R(\omega) + X_I(\omega)$，其中$X_R(\omega)$是其实部，$X_I(\omega)$是其虚部。

由上可知：

$$\frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]=x_e(t)$$

$$\frac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]=x_o(t)$$

以及，

$$\frac{1}{2}\left[X(\omega)+X^*(\omega)\right]=X_R(\omega)$$

$$\frac{1}{2}\left[X(\omega)-X^*(\omega)\right]=X_I(\omega)$$

因此，

(1)

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[x(t)]+\frac{1}{2}\mathcal{F}[x(-t)]=\frac{1}{2}X(\omega)+\frac{1}{2}X^*(\omega)=X_R(\omega)$$

于是，

$$\mathcal{F}\left[x_e(t)\right]=X_R(\omega)$$

即: $x(t)$的偶分量与$X(\omega)$的实部是一对傅里叶变换对。

(2)

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[x(t)]-\frac{1}{2}\mathcal{F}[x(-t)]=\frac{1}{2}X(\omega)-\frac{1}{2}X^*(\omega)=X_I(\omega)$$

于是，

$$\mathcal{F}\left[x_o(t)\right]=X_I(\omega)$$

即: $x(t)$的奇分量与$X(\omega)$的虚部是一对傅里叶变换对。

3. (8分) 已知滤波器的差分方程为$y(n)+0.8y(n-1)-0.9y(n-2)=x(n-2)$ 试判断该滤波器是否稳定。

参考答案:

由差分方程可得滤波器的传递函数为

$$H(z)=\frac{z^{-2}}{1+0.8z^{-1}-0.9z^{-2}}=\frac{1}{z^2+0.8z-0.9}$$

传递函数的极点为$z_1=0.6296$, $z_2=-1.4296$。

考虑到滤波器是实际系统，则它是因果系统，传递函数的收敛域为某个圆的外部，所以$H(z)$的ROC为$|z|>1.4295$，不包含单位圆，所以滤波器是不稳定的。

- 如果利用滤波器是实际因果系统，而得出收敛域是某圆外的部分，则完全正确。

- 如果没有利用滤波器是实际因果系统的特点，而只是盲目地对收敛域进行讨论，则酌情扣1分(如计42王静)。
- 如果就滤波器是否是实际系统还进行了讨论（即认为有些滤波器不是实际系统，而只是理论上的），则不扣分（如计45张瑞）。

4. (10分) 对下面给出的Z变换结果，求它对应的序列。

$$X(z) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} - 0.8z^{-2}}$$

解：对原式进行部分分式分解

$$X(z) = \frac{2z-1}{z^2 - 1.6z - 0.8} = \frac{2z-1}{(z-2)(z+0.4)}$$

设

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z-1}{z(z-2)(z+0.4)} = \frac{r_1}{z} + \frac{r_2}{z-2} + \frac{r_3}{z+0.4}$$

其中，

$$r_1 = \left.\frac{2z-1}{(z-2)(z+0.4)}\right|_{z=0} = \frac{-1}{(-2)(0.4)} = 1.25$$

$$r_2 = \left.\frac{2z-1}{z(z+0.4)}\right|_{z=2} = \frac{3}{2(2.4)} = 0.625$$

$$r_3 = \left.\frac{2z-1}{z(z-2)}\right|_{z=-0.4} = \frac{-1.8}{(-0.4)(-2.4)} = -1.875$$

所以，

$$X(z) = 1.25 + 0.625\frac{z}{z-2} - 1.875\frac{z}{z+0.4}$$

根据常见Z变换式，得：

(1) 当$X(z)$的收敛域为$|Z| > 2$时，对应的序列为

$$x(n) = 1.25\delta(n) + 0.625 \cdot 2^n u(n) - 1.875 \cdot (-0.4)^n u(n)$$

(2) 当$X(z)$的收敛域为$|Z| < 0.4$时，对应的序列为

$$x(n) = 1.25\delta(n) - 0.625 \cdot 2^n u(-n-1) + 1.875 \cdot (-0.4)^n u(-n-1)$$

(3) 当$X(z)$的收敛域为$0.4 < |Z| < 2$时，对应的序列为

$$x(n) = 1.25\delta(n) - 0.625 \cdot 2^n u(-n-1) - 1.875 \cdot (-0.4)^n u(n)$$

- 如果三个系数1.25,0.625,-1.875只有一个计算错误，可以认为是粗心笔误，酌情扣1分(如计42王静)。
-

5. (10分) 已知两个有限长序列$x_1(n)$的序列值为$[1,2,3,4]$，$x_2(n)$的序列值为$[0,1,2,3]$。试求它们的圆卷积和线卷积分别对应的序列值。

参考答案：

根据线卷积的性质，题中两个序列的线卷积长度为$4+4-1=7$，则。

$$s(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=0}^{3} x_1(k)x_2(n-k)$$

将序列值代入上式，得线卷积的序列值为$[0,1,4,10,16,17,12]$。

根据圆卷积与线卷积的关系，

$$x_1(n) \circledast x_2(n) = ((x_1(n) * x_2(n)))_4$$

圆卷积的序列值为$[16,18,16,10]$

- 如果圆卷积部分值正确，且与线卷积有区别，则说明部分掌握圆卷积概念，可以酌情扣2分(如计42王静)。
- 如果圆卷积完全不正确，一般应扣5分（一半）。
- 默认圆卷积为4点圆卷积，如果对点数进行了讨论，并分别给出了不同点数下的结果，则也正确。

6. (10分) 二阶低通模拟巴特沃斯滤波器的传输函数形式为

$$H(s) = \frac{\omega_{p1}^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_{p1}s + \omega_{p1}^2}$$

其中，ω_{p1}是-3dB处的频率值。请设计一个二阶低通数字滤波器，采样频率是4kHz，带宽为500Hz。要求给出数字滤波器的差分方程，并画出滤波器的流图。

已知：双线性变换为$s \Leftrightarrow 2f_s\frac{z-1}{z+1}$，预扭曲方程为$\omega \Leftrightarrow 2f_s\tan(\frac{\Omega}{2})$。

参考答案：

对于低通滤波器，带宽与$-3dB$频率是一致的，即500Hz。对应该频率的数字频率为$\Omega_{p1} = 2\pi\frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi\frac{500}{4000} = 0.25\pi$ 为双线性变换做预扭曲为：

$$\omega_{p1} = 2f_s\tan\frac{\Omega_{p1}}{2} = 3313.7$$

将该值代入模拟滤波器的传输函数得

$$H(s) = \frac{10980607.7}{s^2 + 4686.3s + 10980607.7}$$

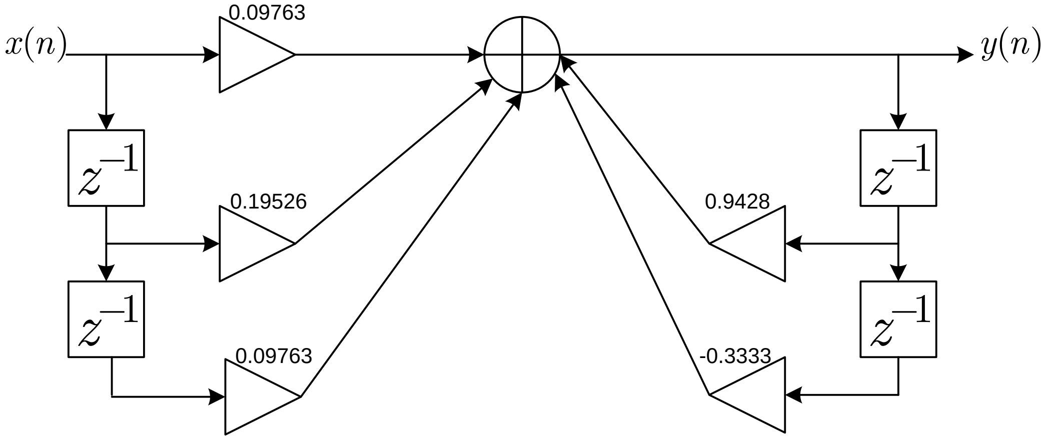
使用双线性变换得：

$$H(z) = \frac{0.09763 + 0.19526z^{-1} + 0.09763z^{-2}}{1 - 0.9428z^{-1} + 0.3333z^{-2}}$$

得差分方程为：

$$y(n) = 0.9428y(n-1) - 0.3333y(n-2) + 0.09763x(n) + 0.19526x(n-1) + 0.09763x(n-2)$$

滤波器流图为：



- 如果所有的计算都正确，只是最后画图时出现笔误，图中系数与计算的系数不统一，则酌情扣1分(如计45张瑞)。
- 计42的沈超慧这一题做题很好，计算量少。方法要点是：不要计算出预扭曲后的模拟频率，而是直接把计算式代入模拟传递函数中，同时也把双线性变换式代入，这样就可以把采样频率f_s消除掉，从而降低计算量。
- 计45的孟祥亮试图通过以K来代替1000来代入运算式以简化运算，结果在中间系数计算错误，酌情扣除3分。

7. (10分) 雷达信号频率在900MHz到900.5MHz，以2MHz的频率对其进行欠采样。若200kHz的目标出现在基带，则该目标的实际频率是多少？

   参考答案：

   采样后，原目标在频域会以 2 MHz为周期重复出现，假设目标的实际频率为

   $$k \cdot 2MHz + 200kHz = (2k + 0.2)MHz, k \in Z$$

   则：

   $$900 \le 2k + 0.2 \le 900.5$$

   求得$k = 450$，所以目标的实际频率为900.2MHz。

8. (12分) 模拟信号以16kHz进行采样，得到并计算了512点的DFT。试求DFT结果中的下列各点所对应的物理频率(Hz)

   (1) k = 0

   (2) k = 127

   (3) k = 255

   (4) k = 511

   参考答案：

   (1) $k = 0$对应的物理频率

   $$f_1 = 16 \text{ kHz} \times \frac{0}{512} = 0 \text{ Hz}$$

(2) $k = 127$对应的物理频率

$$f_2 = 16 \text{ kHz} \times \frac{127}{512} = 3968.75 \text{ Hz}$$

(3) $k = 255$对应的物理频率

$$f_3 = 16 \text{ kHz} \times \frac{255}{512} = 7968.75 \text{ Hz}$$

(4) $k = 511$对应的物理频率

$$f_4 = 16 \text{ kHz} \times \frac{511}{512} = 15968.75 \text{ Hz}$$

9. (12分) 对一个连续时间信号进行采样，采样率为10KHz，共采得10 ms的数据。希望利用N点FFT方法，计算均匀分布在$[2.5 \sim 5)$KHz频率范围上的128个频率点的频谱。试回答下列问题：

(1) 进行FFT运算时最合适的点数N

(2) FFT输入向量x的组成

(3) 频段$[2.5 \sim 5)$KHz对应FFT变换结果中的哪些点?

参考答案；

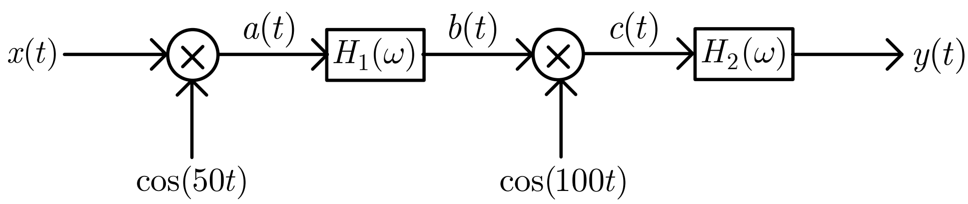
(1) 最合适的FFT点数为:

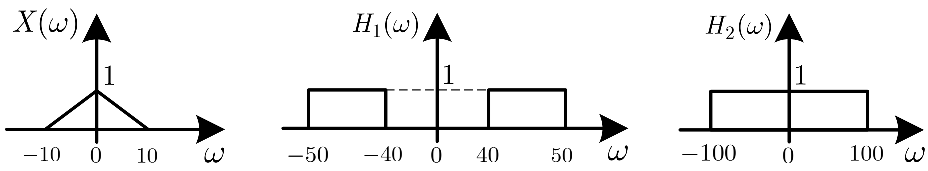
$$N = 128 * \frac{10}{5 - 2.5} = 512$$

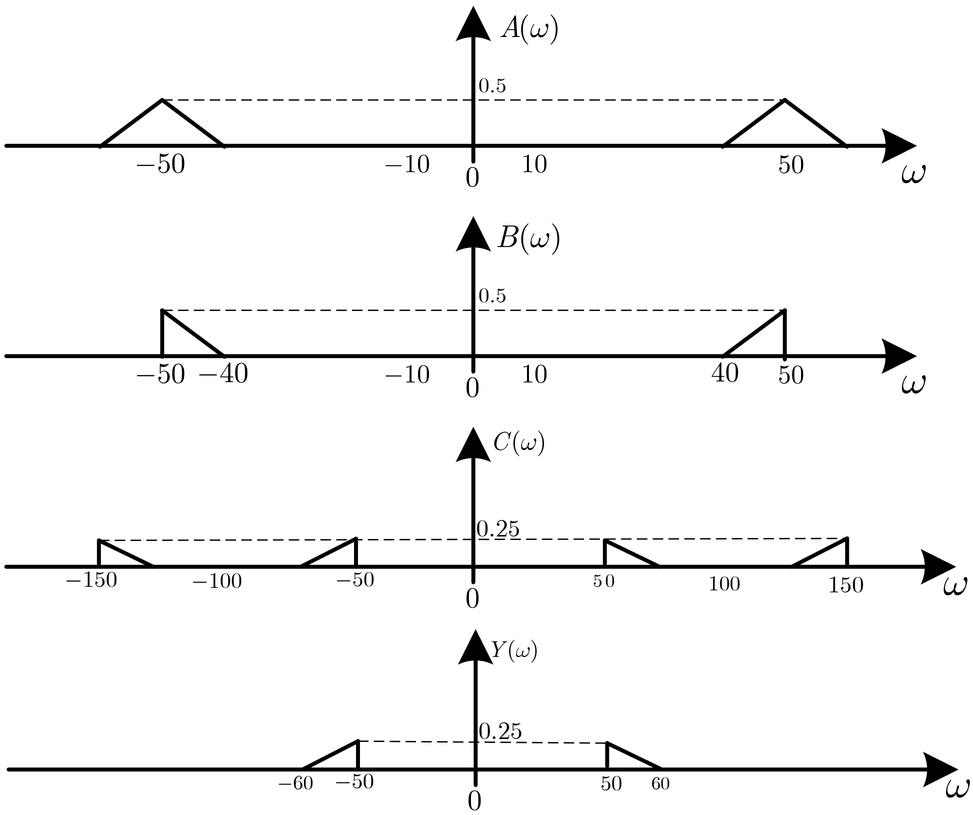
(2) 采样得到的数据序列的长度为$10 * 10 = 100$，不足512，所以后面需要补$512 - 100 = 412$个零。

(3) 2.5KHz对应的是$2.5/10 * 512 = 128$，而5kHz对应的是$5/10 * 512 = 256$，所以题目中要求的频段，对应的FFT变换结果中的点范围为$[128..256)$

10. (12分) 已知某系统如下所示。对于给定的输入信号$x(t)$，若已知其频谱$X(\omega)$（见下图），请画出信号$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $y(t)$对应的频谱函数的图形$A(\omega), B(\omega), C(\omega), Y(\omega)$。







- 如果是纵坐标不正确，每图扣0.5分(如计45张瑞)。
- 如果是频谱丢失一半，每图扣3分。