实验五　非线性方程求根

2012011400 计 21 杨俊

1、 求解非线性方程

$$f(x)=2x^3-x^2+3x-1=0$$

在区间$[-3,3]$内的实根。

要求：1、分别利用二分法、牛顿法求解上述方程的根；

2、两种迭代法的求解精度均为10^{-6}；

3、要求输出两种迭代算法的迭代初值、各次迭代值、迭代次数。

2、 研究迭代函数、迭代初值对函数收敛性及收敛速度的影响。

a. 用迭代法求解方程 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根。

方案一：$x=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}=\varphi(x)$，初值为 0，迭代 10 次。

方案二：$x=2x^3-1=\varphi(x)$，初值为 0，迭代 10 次。

要求：给出迭代 10 次后的方程的根；
对结果作简要分析。

b. 用牛顿法求解方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的根

方案一：初值为 1.5

方案二：初值为 0

要求：　迭代法的求解精度均为10^{-6}；

给出迭代次数和各次迭代值；
对结果作简要分析。

2：算法思路

（一） 用二分法计算方程的根：

a、计算f(x)在有根区间[a,b]的端点的函数值f(a)，f(b)。

b、计算f(x)在区间中点$\frac{a+b}{2}$的值$f(\frac{a+b}{2})$

c、若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则计算过程结束，$\frac{a+b}{2}$即是根，否则：

如果$f(\frac{a+b}{2})*f(a)<0$，则用$\frac{a+b}{2}$代替 b，否则以$\frac{a+b}{2}$代替 a。

如果[a,b]<e，则有得到近似根$\frac{a+b}{2}$。

用牛顿法求方程的根：

a、 选定初始值x_0，并且计算$f_0 = f(x_0)$，$f_0{}' = f'(x_0)$。

b、 迭代公式：$x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f_0{}'}$ 迭代一次，得到新的近似值x_1，计算$f_1 = f(x_1)$，$f_1{}' = f'(x_1)$

c、 如果得到的x_1满足$|\delta| < \varepsilon_1$或者$|f_2| < \varepsilon_1$或者迭代次数到达预设次数 N 则迭代结束，前者代表成功，返回x_1，后者表示失败。如果前两者都不满足，则用x_1，f_1，$f_1{}'$代替x_0，$f_0{}'$。

（二）

a、按照给出的迭代公式，达到指定的次数即可。

b、牛顿法基本方法第一题已经给出。

3：程序输出及分析

第一题：

用二分法、牛顿法求解上述方程的根：

二分法输出结果：

```
the value is:-3 3
0 times -3.0000000000 3.0000000000
1 times 0.0000000000 3.0000000000
2 times 0.0000000000 1.5000000000
3 times 0.0000000000 0.7500000000
4 times 0.0000000000 0.3750000000
5 times 0.1875000000 0.3750000000
6 times 0.2812500000 0.3750000000
7 times 0.3281250000 0.3750000000
8 times 0.3281250000 0.3515625000
9 times 0.3398437500 0.3515625000
10 times 0.3398437500 0.3457031250
11 times 0.3427734375 0.3457031250
12 times 0.3442382813 0.3457031250
13 times 0.3449707031 0.3457031250
14 times 0.3453369141 0.3457031250
15 times 0.3455200195 0.3457031250
16 times 0.3456115723 0.3457031250
17 times 0.3456115723 0.3456573486
18 times 0.3456115723 0.3456344604
19 times 0.3456230164 0.3456344604
20 times 0.3456230164 0.3456287384
21 times 0.3456258774 0.3456287384
22 times 0.3456273079 0.3456287384
23
0.3456276655
```

牛顿法迭代的结果：

```
the value is 3
1 times 3.0000000000
2 times 0.3333333333
3 times 0.3456790123
4
0.3456273923
```

第二题：

a：方案一结果：

```
a method one
0 0.0000000000
1 1.0000000000
2 1.0000000000
3 1.0000000000
4 1.0000000000
5 1.0000000000
6 1.0000000000
7 1.0000000000
8 1.0000000000
9 1.0000000000
1.000000
```

方案二：

```
a method two
0 0.0000000000
1 -1.0000000000
2 -3.0000000000
3 -55.0000000000
4 -332751.0000000000
5 -73686529681121504.0000000000
6 -800192186653981480000000000000000000000000000000000.0000000000
7 -10247381740568939000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000.00
00000000
8 -1.#INF000000
9 -1.#INF000000
-1.#INF00
```

方案一的迭代公式是收敛的，可以看到方程的根是 1；而方案二中的迭代公式是不收敛的，计算结果趋近于负无穷大。以至于超出了双精度数的表示范围。所以在用迭代法求方程的根的时候，一定要选择好适当的收敛公式并提前进行检验。

b、

方案一：

```
b newton method one
1 1.3478260870
2 1.3252003990
3 1.3247181740
4
1.3247179572
```

方案二：

```
b newton method two
1 -1.0000000000
2 -0.5000000000
3 -3.0000000000
4 -2.0384615385
5 -1.3902821472
6 -0.9116118977
7 -0.3450284967
8 -1.4277507040
9 -0.9424179125
10 -0.4049493572
11 -1.7069046452
12 -1.1557563611
13 -0.6941918133
14 0.7424942987
15 2.7812959407
16 1.9827252470
17 1.5369273798
18 1.3572624832
19 1.3256630944
20 1.3247187886
21
1.3247179572
```

用 1.5 作为初值时只用迭代 4 次，而用 0 作为初值时则需要迭代 21 次才能达到相同的精度要求，可见对于同一个迭代公式，选择初值很重要。

通过这次联系，我对二分法和牛顿法的原理更加了解了，在迭代过程中，不同的初始条件和迭代公式往往决定了这个根的收敛速度。如果初值没有取好，很有可能收敛的很缓慢。