

沙漠商队旅行问题

翁家翌 2016011446 孙钊乐 2016011440

Tsinghua University

2017 年 5 月 1 日



① Problem

② Definition

③ Properties

④ Solution

⑤ Reference

- 在沙漠中有 n 个绿洲。有时商队从一个绿洲到另一个绿洲。假设商队的速度是恒定的，他们**尽量减少在绿洲外的最长时间**。所以可以得出结论，最佳路径是折线。
- 给定绿洲的坐标和 m 对商队的线路，出发点为编号为 s_i 的绿洲，目的地为编号为 t_i 的绿洲，**计算最佳路径的最大长度**。所有绿洲位置不同。
- $n, m \leq 100000$

① Problem

② Definition

Delaunay Triangulation

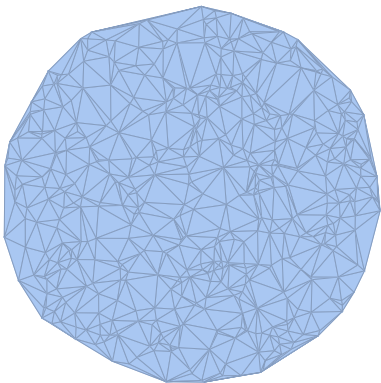
Voronoi Diagram

③ Properties

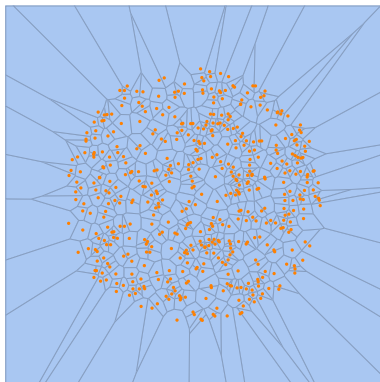
④ Solution

⑤ Reference

- 这里记平面上的点集 P 的 Delaunay Triangulation 为 $DT(P)$
在 $DT(P)$ 中, 没有点严格处于 $DT(P)$ 中任意一个三角形外接圆的内部, 该性质称为空圆性质
- $DT(P)$ 同时最大化了此三角剖分中三角形的最小角
- 一个例子:



- $\forall P_0 \in \mathbb{R}^2$, 设点 $Q \in P$ 为距离 P_0 最近的点, 则将其记为 $P_0 \in \text{Polygon}(Q)$
- 将所有 $\text{Polygon}(Q)$ 的边界画出来之后即为 *Voronoi Diagram*, 这里记为 $VD(P)$
- 还是刚才那个例子:



- 一种对 $VD(P)$ 形象的描述：火苗从几个点开始以同样的速度蔓延，到火苗交汇处彼此停止，最终对地面的分割就是 *Voronoi* 图
- 类似的例子还有水晶从几个点开始以同样的速度生长等
- *Voronoi* 图中的“距离”不仅仅局限于二次欧氏距离 ($\|\cdot\|_2$), 还可以是 $\|\cdot\|_1$ 、 $\|\cdot\|_\infty$ 以及其它各种距离

- ① Problem
- ② Definition
- ③ Properties
- ④ Solution
- ⑤ Reference

- 对于给定的 P , $DT(P)$ 和 $VD(P)$ 是唯一的
- $DT(P)$ 和 $VD(P)$ 互为对偶图, $VD(P)$ 中的每条边都垂直平分 $DT(P)$ 中的边
- 设点集 $DT(P)$ 的点数为 n , 边数为 m , 域数为 d , 在点集随机生成的情况下, 有 $m \approx 3n$, $d \approx 2n$ 。这是由于三角剖分图近似于极大平面图, 并且随机点集的凸包顶点数近似于 $O(\log n)$, 远小于 n 。
- 在 $DT(P)$ 中, 每个点周围平均有六个三角形
- $\forall A, B \in P$, A, B 在 $DT(P)$ 中的最短路径长度不会超过 $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}|AB|$
- 由 P 生成的最小生成树 $MST(P) \subseteq DT(P)$
- 求 d 维的 $DT(P)$ 可归约为求 $d+1$ 维的凸包问题, 特别地, 当 $d=2$ 时可以归约为数组排序问题。

① Problem

② Definition

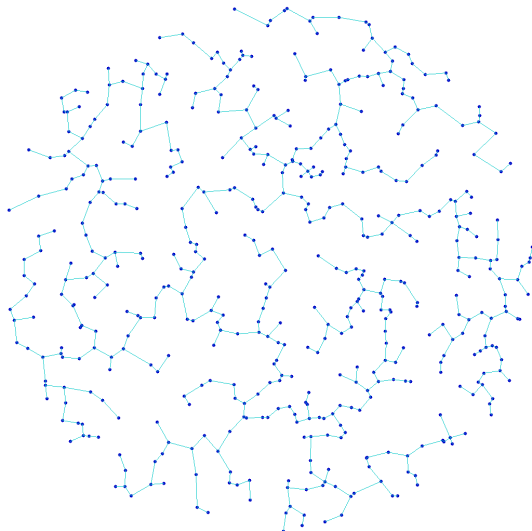
③ Properties

④ Solution

⑤ Reference

- 回忆一下 *Kruskal* 算法，该算法首先将边按照边权从小到大排序，然后一条一条边依次加进生成树，再判断是否合法。
- 假设我们只取前 M 条边，并且构成最小生成树的最大边的编号为 M_0 ，即取前 M_0 条边即可构成一个生成树。
- 显然，当 $M < M_0$ 时，不存在生成树；当 $M \geq M_0$ 时，一定有生成树，并且最大边的边权 \geq 第 M_0 条边的边权。
- 因此若需要最小化最大距离，则符合条件的生成树一定是 *MST*。
- 因此对于给定点集 P ，求得 $DT(P)$ 之后再求得 $MST(P)$ ，则答案即为两点在 $MST(P)$ 上的距离，使用 LCA 倍增询问即可。
- 时间复杂度为 $O((n + m) \log n)$

- 一个平面点集的 MST 例子如下图所示：



- ① Problem
- ② Definition
- ③ Properties
- ④ Solution
- ⑤ Reference

- Voronoi diagram - Wikipedia
- Delaunay triangulation - Wikipedia
- 我的一个可视化 $DT(P)$, $VD(P)$, $MST(P)$ 的小程序