第 3.7.10 周习题

茹逸中

December 27, 2016

写出下列公式的合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式，以及所有使公式为真的解释

- $P \vee \neg P$
- $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$

- 合取范式：用合取连接的若干个析取式，析取式可以为一个或多个命题变项或其否定式，“若干个”可以是零个、一个或多个。
- 主合取范式：用合取连接的若干个极大项析取式，每个析取式所有命题变项或其否定式必须出现一次且仅一次的合取范式。
- 析取范式：用析取连接的若干个合取式，合取式可以为一个或多个命题变项或其否定式，“若干个”可以是零个、一个或多个。
- 主析取范式：用析取连接的若干个极小项合取式，每个合取式所有命题变项或其否定式必须出现一次且仅一次的析取范式。

注意：二进制编码形式的主析取范式和主合取范式并不是互补的，而是取反后互补

（1） $P \vee \neg P$ 合取范式

- $(P \vee \neg P)$
- 空（主合取范式）

析取范式

- $(P) \vee (\neg P)$ （主析取范式 $m_0 \vee m_1 = \vee_{0,1}$）
- 空

（3）$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$ 合取范式

- $(P \vee Q)$ （主合取范式 $M_3 = \wedge_3$）

析取范式

- $(P) \vee (Q)$
- $(P) \vee (\neg P \wedge Q)$
- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ （主析取范式 $m_1 \vee m_2 \vee m_3 = \vee_{1,2,3}$）

章节 9.5 集合恒等式

- 交换律
- 结合律
- 分配律
- 幂等律
- …

设 A、B 和 C 是任意的集合，证明：$(A-B)-C=A-(B\bigcup C)$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= A\bigcap -B\bigcap -C \\
&= A\bigcap -(B\bigcup C) \\
&= A-(B\bigcup C)
\end{aligned}
$$

证明：$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \leftrightarrow A \bigcup B \subseteq C$

- 若 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$
  $\forall x$
  $$\begin{aligned} x \in A \cup B &\leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\rightarrow x \in C \vee x \in C \\ &\rightarrow x \in C \end{aligned}$$
  所以，$A \cup B \subseteq C$
- 若 $A \cup B \subseteq C$
  $\forall x, x \in A \rightarrow x \in A \cup B \rightarrow x \in C$
  所以 $A \subseteq C$
  $\forall x, x \in B \rightarrow x \in A \cup B \rightarrow x \in C$
  所以 $B \subseteq C$

给出命题 $(A-B)\bigcup(A-C)=A$ 成立的充要条件：
该命题的充要条件为 $A\bigcap B\bigcap C=\emptyset$，证明：

- 必要性：设 $(A-B)\bigcup(A-C)=A$，则对任意的 x

$$
\begin{aligned}
x\in A &\rightarrow x\in A-B\vee x\in A-C\\
&\rightarrow x\in A\bigcap -B\vee x\in A\bigcap -C\\
&\rightarrow x\in -B\vee x\in -C\\
&\rightarrow x\in -B\bigcup -C\\
&\rightarrow x\notin B\bigcap C
\end{aligned}
$$

所以 $A\bigcap B\bigcap C=\emptyset$.

- 充分性：设 $A \bigcap B \bigcap C = \emptyset$，则对任意的 x

$$
\begin{aligned}
x \in A &\rightarrow x \notin B \vee x \notin C \\
&\rightarrow x \in -B \vee x \in -C \\
&\rightarrow x \in A \bigcap -B \vee x \in A \bigcap -C \\
&\rightarrow x \in (A-B) \bigcup (A-C)
\end{aligned}
$$

所以 $A \subseteq (A-B) \bigcup (A-C)$.
对任意的 x

$$
\begin{aligned}
x \in (A-B) \bigcup (A-C) &\rightarrow x \in A-B \vee x \in A-C \\
&\rightarrow x \in A \bigcap -B \vee x \in A \bigcap -C \\
&\rightarrow x \in A
\end{aligned}
$$

所以 $(A-B) \bigcup (A-C) = A$。

谢谢大家。