

# 大学物理习题课

## 热学部分1

# \$1 气动理论

- 平衡态与温度
- 气体分子的一些统计规律
- 能量均分定理
- 简单的非平衡输运过程

**1.1** 令金属棒的一端插入冰水混合的容器，另一端与沸水接触，待一段时间后棒上各处的温度不随时间变化，这时金属棒是否处于平衡态？为什么？

**分析讨论：**

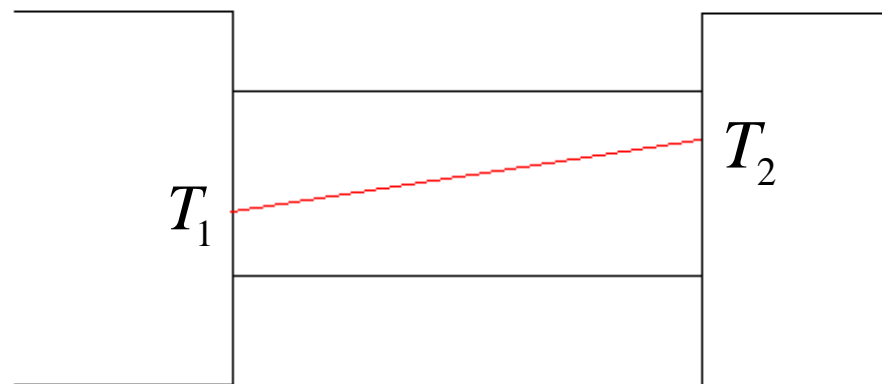
平衡态的定义： **在不受外界影响的条件下，系统宏观性质不随时间改变的状态**

理解：“不受外界影响”

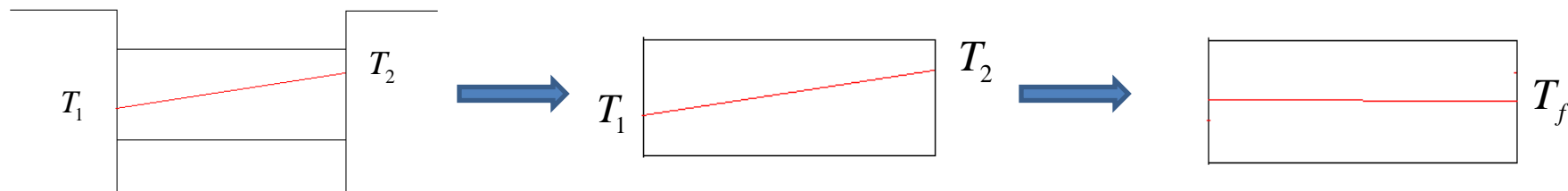
内涵：热平衡、动力平衡、相平衡以及化学平衡

**题目中的物理模型：**

在热库  $T_1$ ,  $T_2$  之间放置均匀热导体，在经过足够长的时间后，热导体上会形成稳定的温度分布（图中红线）。我们所讨论的系统（题中的金属棒）仅为两热库间的热导体。



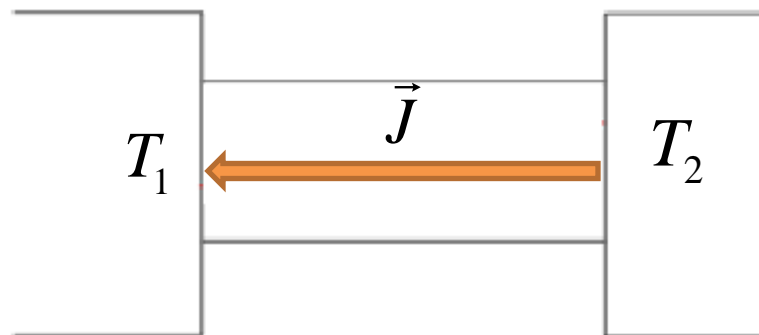
1. 使得系统“不受外界影响”，可以预见，系统在经过足够长的时间后将会回到均匀的温度分布。因此，系统此时并未处于平衡态。



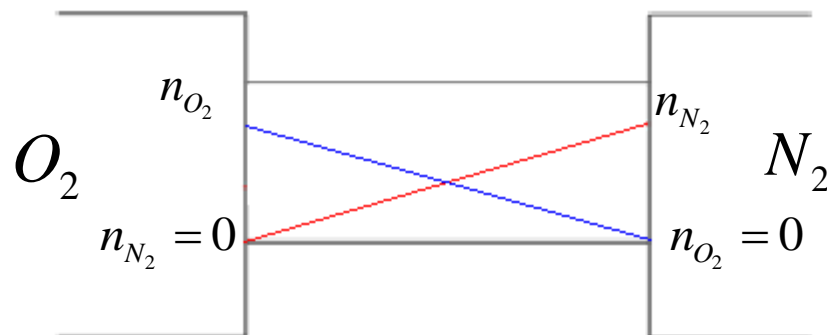
2. 从热平衡的角度来看，由于系统内部存在温度梯度，因此存在x方向的热流密度：

$$J = -\kappa \frac{d}{dx} T \quad (\vec{J} = -\kappa \nabla T \quad 3-D)$$

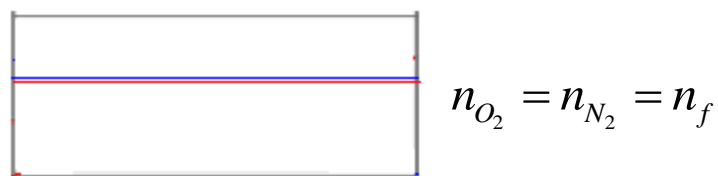
不满足热平衡条件，也可以得出系统并未处于平衡态的结论。



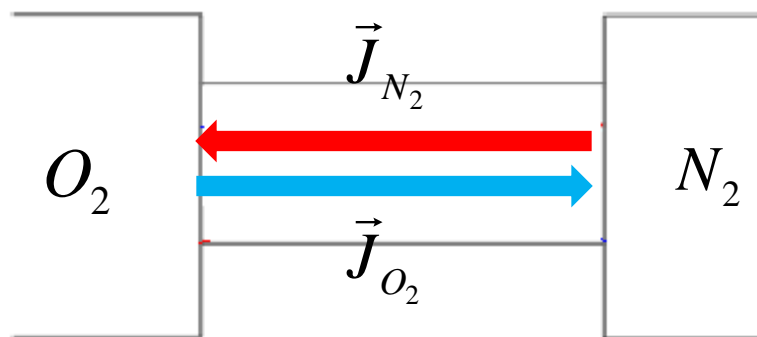
两个具有相同温度压强的粒子库（如氧气、氮气）之间通过一根管道连接。导管内部在一定时间后会形成稳定的密度（图中为**粒子数密度**）分布。



1. 在去除粒子库后，管道内的气体会在一定时间后由于扩散逐渐混合均匀，不再存在密度梯度：



2. 从化学平衡的角度来看，粒子数密度梯度的存在使得系统内各处化学势不等，存在粒子流，系统不处于平衡态：

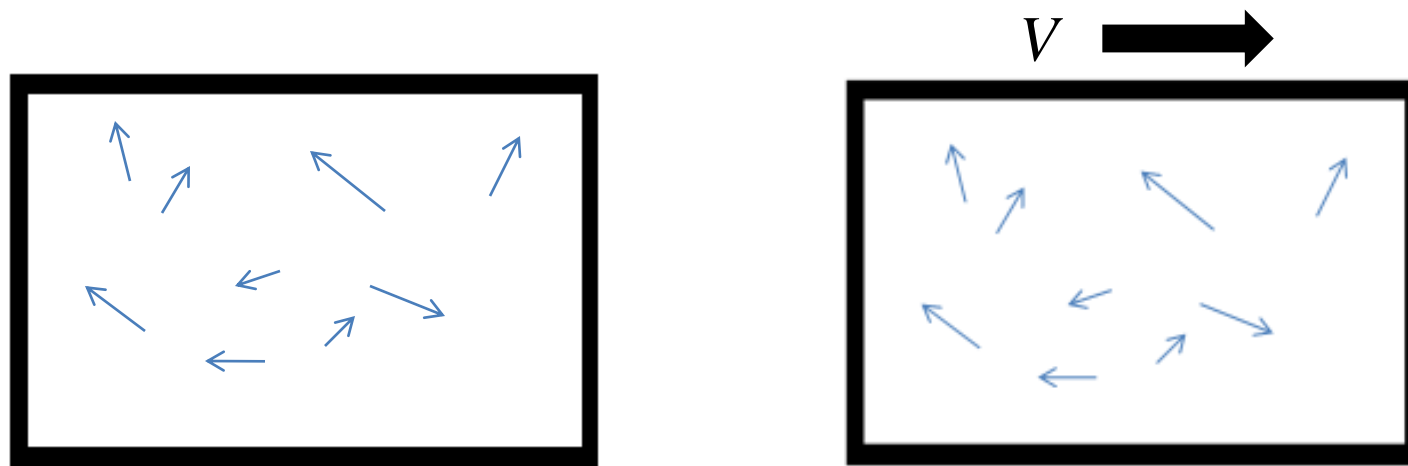


**热平衡：系统与外界之间不存在宏观的能流和粒子流**

**1.2**当盛有理想气体的密封容器相对某惯性系运动时，有人说：“容器内的气体分子相对该惯性系的速度也增大了，从而气体的温度因此就升高了。”试分析这种说法对不对？为什么？若容器突然停止运动，容器内气体的状态将如何变化？

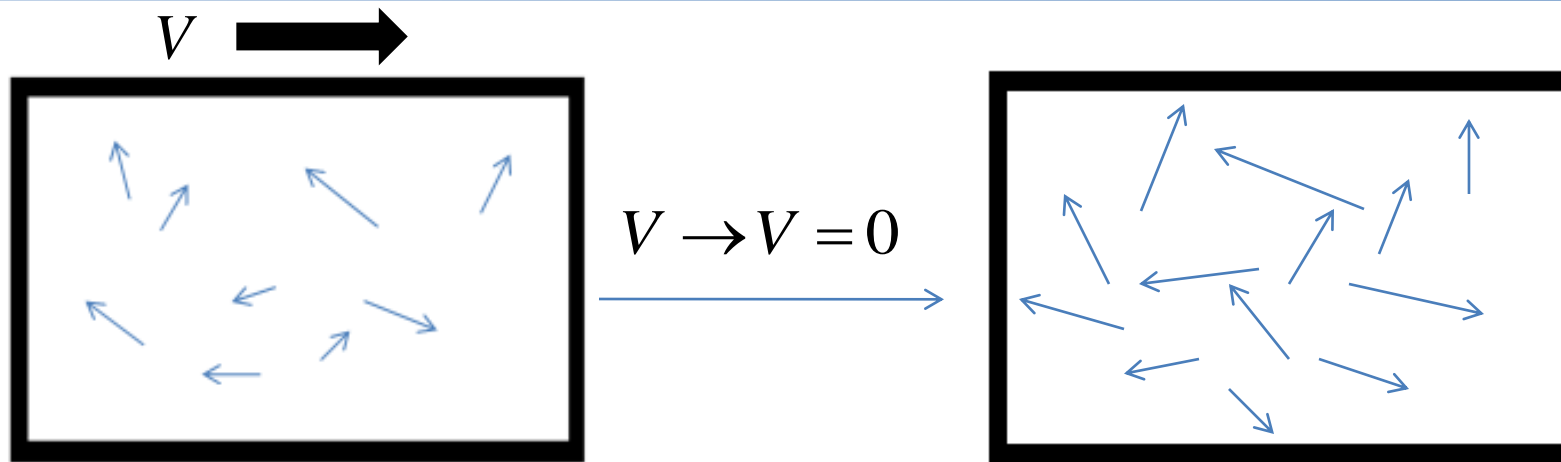
## 分析讨论：

温度的微观意义：温度标志着物体内部分子**无规则运动**的剧烈程度，反应的是分子**热运动相关的平均动能**（可看做相对质心的动能）。



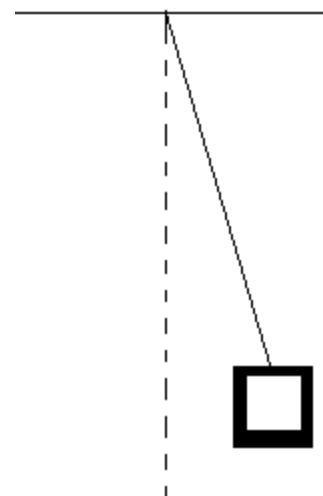
容易发现**静止**的容器内的气体分子热运动与**匀速直线运动**中的容器内的气体分子并无区别，二者应该具有相同热运动相关的平均动能，即温度相同。

否则，会出现在不同参考系下观测同一气体会观测到不同温度的现象。



当容器突然静止后，容器原来的平动动能被分子热运动吸收耗散，是分子热运动加剧，于是气体温度上升。

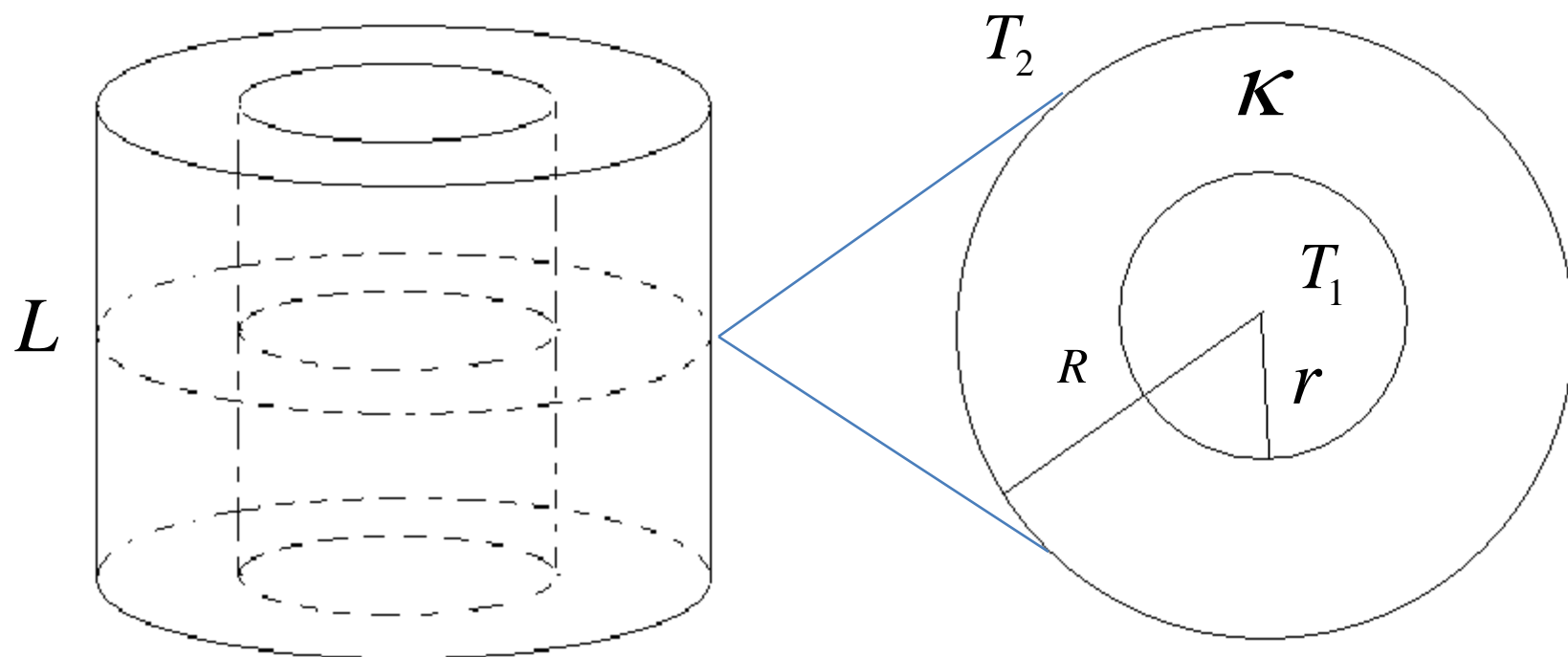
思考：长绳下端连接装有气体的容器复摆系统，不计空气阻力。容器内气体温度是否会发生变化，如果会，将如何变化？



**1.3** 一长为 $L$ ，半径为 $r$ 的蒸汽导管，外面包着一层厚度为 $d$ 的绝热材料（外径为 $R$ ，导热系数为 $K$ ），蒸汽的温度为 $T_1$ ，绝热套的外表面温度为 $T_2$  ( $T_2 < T_1$ )，保持恒定。

- (1) 试问绝热材料柱层中不同半径处的温度梯度 是否相同？
- (2) 单位时间内单位长度传出的热量是多少？

分析讨论：





教材中所给的热传导方程为简单的一维情况：
$$dQ = -\kappa \frac{dT}{dz} dS dt$$

一般的，对于一个三维的系统，我们可以定义热流密度 $\vec{J}$ ：

$$\vec{J} = -\kappa \nabla T$$

热流密度在 $dt$ 时间内通过面积 $dS$ 的通量，即为这一时间内通过 $dS$ 的热量（可以类比电流、电流密度与电势的概念和关系）。

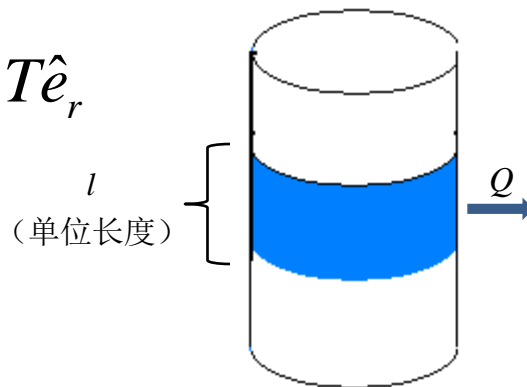
题中所描述的是一个三维的系统，在柱坐标下，有：

$$\vec{J} = -\kappa \nabla T = -\kappa \left( \frac{\partial}{\partial r} T \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} T \hat{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} T \hat{e}_z \right)$$

对于  $L \gg R \sim r$  或  $L = \infty$  的情况，系统具有关于 $z$ 轴的旋转对称性和在 $z$ 方向上的平移不变性，温度 $T$ 在  $\hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$  方向上不存在变化，热流密度仅存在 $r$ 分量：

$$\vec{J} = -\kappa \frac{\partial}{\partial r} T \hat{e}_r$$

这样一个热流密度在 $r=R$ 处单位时间的通量即为题中所求流出的热量



当系统处于热稳定状态是，由于绝热层中并无热源，对处于绝热层中的任意 $r$ ，都有相同时间通过该包络面的热量相等，即：

$$dQ = JdSdt = J \bullet 2\pi r dl dt = C(\text{onstant})$$

代入J: 
$$-2\pi r \kappa \frac{d}{dr} T dl dt = C$$

$$-\kappa dT dl dt = \frac{C}{2\pi r} dr$$

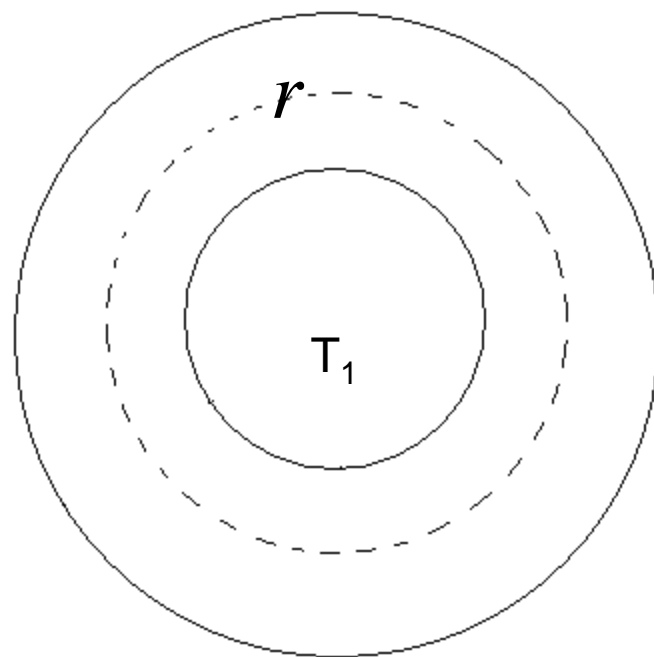
两边积分: 
$$-\kappa(T_2 - T_1) dl dt = \frac{C}{2\pi} \ln(R - r)$$

$$C = -\frac{2\pi\kappa(T_2 - T_1)}{\ln(R - r)} dl dt$$

所以，单位时间内经单位长度流过 $r=R$ 处的热量为：

$$\frac{dQ}{dl dt} = -\frac{2\pi\kappa(T_2 - T_1)}{\ln(R - r)}$$

符号表示热量流动的方向与规定的 $r$ 方向相反。



而 $r$ 方向的温度梯度则是：

$$\frac{d}{dx} T = \frac{T_2 - T_1}{x \ln(R - r)}$$

作业题中的扩散方程问题：



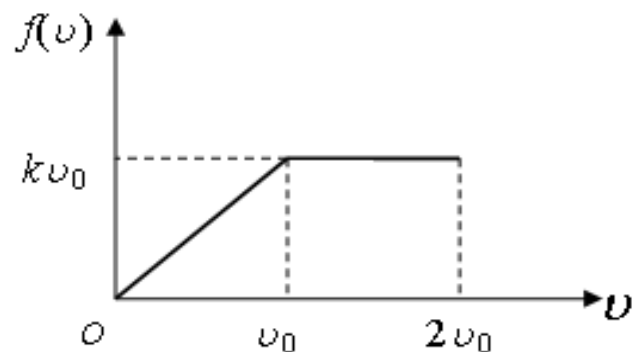
同样，在球坐标系下，可将水滴理解为理想的球形，系统具有三维的旋转不变性， $\vec{j}$ 的三个分量中  $\hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$  方向为0，仅存在r分量，问题蜕化为一维情况：

此时的守恒量为J单位时间内通过球形包络面的通量，其物理意义是粒子数守恒：

蒸发速率

$$W = -\frac{dm}{dt} = -D \frac{d\rho}{dr} \bullet 4\pi r^2$$

**1.4**速率分布函数如图. 求: (1)  $\bar{v}$ , (2)  $\bar{v}^2$ ,  
 (3)  $v_P$ , (4)  $\bar{v} \sim 1.001\bar{v}$  间分子分布比例  
 (5) 设粒子质量 $m$ , 求粒子按动能的分布  
 分析讨论:



对于任意的统计分布函数 $f(x)$ 在其定义域内满足归一化条件:

$$\int_I f(x)dx = 1$$

任意关于 $x$ 的物理量 $X(x)$ 在定义域内的平均值为:

$$\bar{X} = \int_I X(x)f(x)dx$$

某一区间  $X$  内概率分布为:

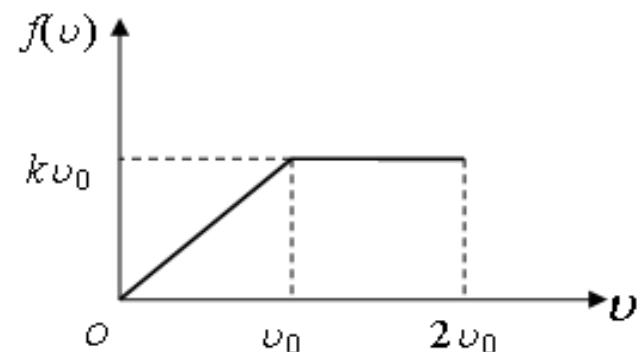
$$p(X) = \frac{\int_X f(x)dx}{\int_I f(x)dx} \xrightarrow{f(x) \text{ 归一化}} \int_X f(x)dx$$

1. 先对  $f(v)$  归一化:  $f(v) = \begin{cases} kv & 0 \leq v < v_0 \\ kv_0 & v_0 \leq v \leq 2v_0 \end{cases}$

$$\int_0^{2v_0} f(v) dv = \frac{1}{2} kv_0^2 + kv_0^2 = 1$$

$$\therefore k = \frac{2}{3v_0^2}$$

$$\therefore f(v) = \begin{cases} \frac{2}{3v_0^2} v & 0 \leq v < v_0 \\ \frac{2}{3v_0} & v_0 \leq v \leq 2v_0 \end{cases}$$



2. 按照上页的公式计算  $\bar{v}$  和  $\overline{v^2}$  :

$$\bar{v} = \int_0^{2v_0} v f(v) dv = \frac{11}{9} v_0$$

$$\overline{v^2} = \int_0^{2v_0} v^2 f(v) dv = \frac{31}{18} v_0^2$$

3.  $v_p$  定义为分布函数中的极大值, 在这个速率分布中,  $v_0 \leq v \leq 2v_0$  区间都满足这一条件, 因此  $v_p$  不再是一个单独的数值, 而是整个速率区间  $v_0 \leq v \leq 2v_0$ , 即:

$$v_p = [v_0, 2v_0]$$

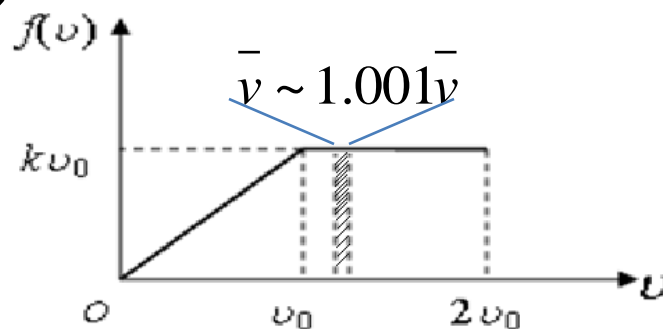
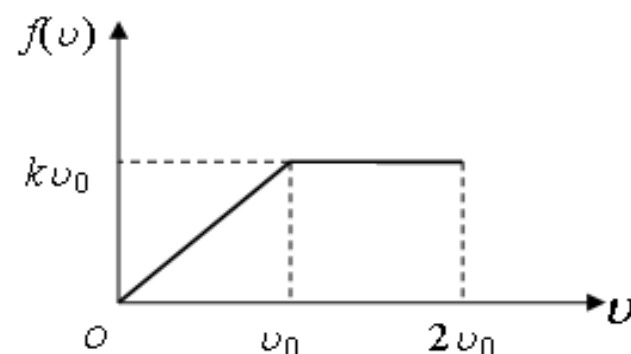
4.  $\bar{v} \sim 1.001\bar{v}$  区间分布的粒子数比例理论上应该按照这样的公式计算:

$$n = \frac{N_{\bar{v} \sim 1.001\bar{v}}}{N} = \int_{\bar{v}}^{1.001\bar{v}} f(v) dv$$

注意到在这个问题中, 区间  $\bar{v} \sim 1.001\bar{v}$  中,  $dv$  增量很小, 因此可以按照黎曼积分的思想, 将这一结果近似为:

$$n = f(\bar{v})\delta v = f\left(\frac{11}{9}v_0\right) \times 0.001 \times \frac{11}{9}v_0 \approx 0.08\%$$

事实上由于这个分布函数的特殊性,  $\bar{v} \sim 1.001\bar{v}$  区间  $f(v)$  为一个常数函数, 因此上面这两个式子的结果是严格相等的。



5. 求粒子的动能分布，问题可等价于分布函数的参量变换：

$$f(v)dv \rightarrow g(\varepsilon)d\varepsilon$$

考虑到对任意速度区间内的粒子数与该速度区间对应的动能区间的粒子数比例相同：

$$\frac{f(v)dv}{\int_{I(v)} f(v)dv} = \frac{g(\varepsilon(v))d\varepsilon(v)}{\int_{I(\varepsilon)} g(\varepsilon)d\varepsilon}$$

若认为 $g(\varepsilon)$ 已经归一化，那么有：

$$f(v)dv = g(\varepsilon(v))d\varepsilon(v) \quad \text{or} \quad f(v(\varepsilon))dv(\varepsilon) = g(\varepsilon)d\varepsilon$$

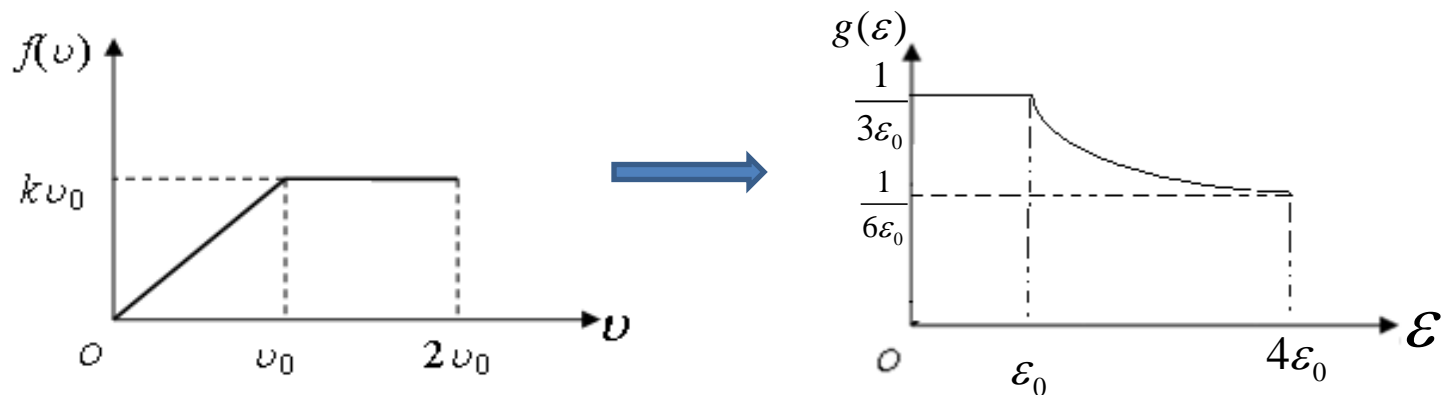
于是有：

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right)d\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right) \quad \text{其中} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$$

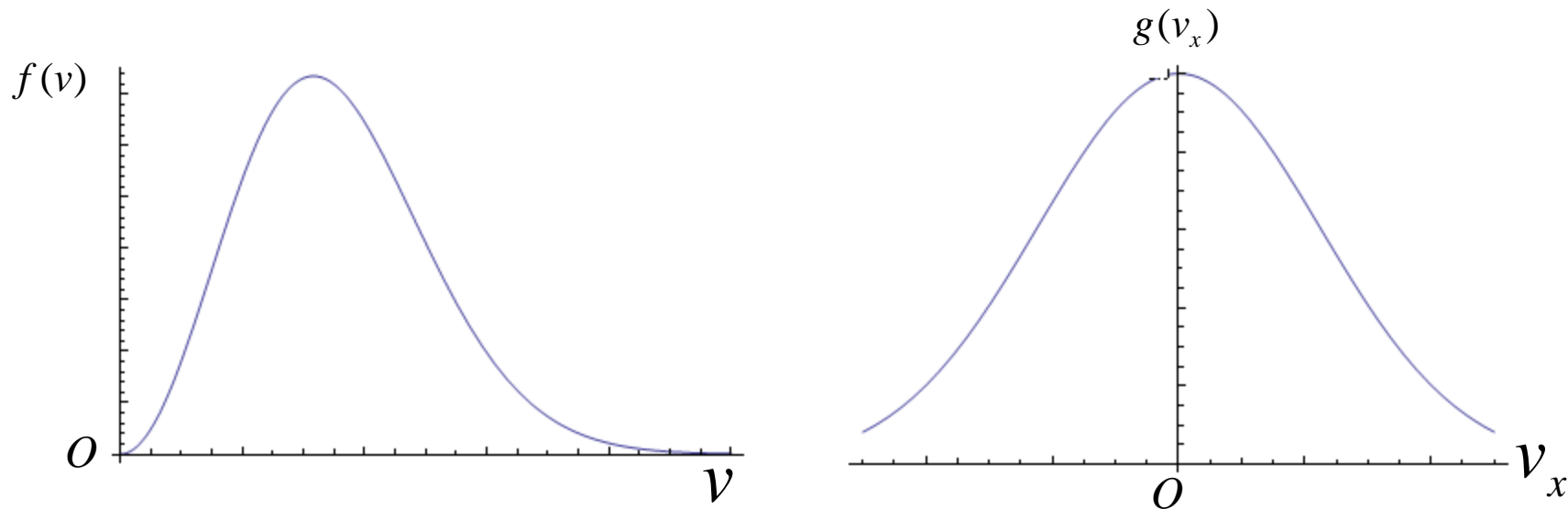
$$\text{所以: } g(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{2}{3mv_0^2} & 0 \leq v < v_0 \\ \frac{1}{3v_0} \sqrt{\frac{2}{m\varepsilon}} & v_0 \leq v \leq 2v_0 \end{cases} \Rightarrow g(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{3\varepsilon_0} & 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}} & \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 4\varepsilon_0 \end{cases}$$

$$\text{其中利用了: } dv(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{m\varepsilon}} d\varepsilon$$

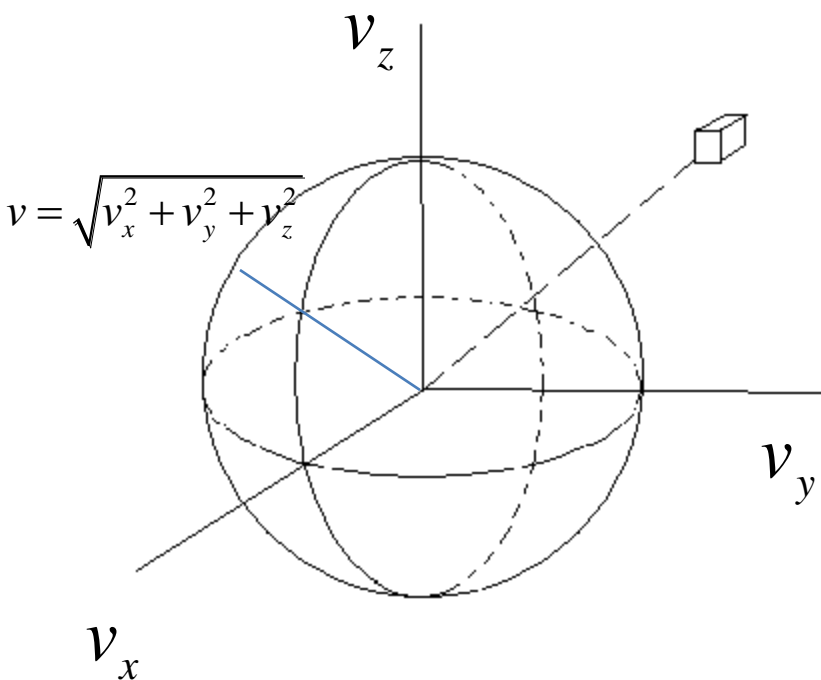
- 总结：
1. 从数学上来看，可以认为是不同空间（速率空间→能量空间）的体积元变换
  2. 从物理上看，反映了粒子具有相同速率（动量大小）则具有相同能量的性质



容易发现，分布函数的形状发生了很大的变化，回顾Maxwell速度分布与速率分布：







我们发现在速度空间中，速率体积元  $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$  对应的是一个半径为  $v$ ，厚度为  $dv$  的球壳；速度体积元  $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$  为矢量  $\vec{v}$  末端对应的一个立方体。在某一体积元中的粒子比例可分别表示为：

$$n = f(v)dv \propto e^{-v^2} dv \quad \text{速率}$$

$$n = g(\vec{v})d\vec{v} \propto e^{-v^2} d\vec{v} \quad \text{速度}$$

注意到，尽管都是指数衰减，但是在速度空间中，速率体积元是与  $v^2$  成正比的（ $d\Omega = 4\pi v^2 dv$ ）；而速度体积元则始终是  $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$

在  $v$  不大的时候， $e^{-v^2}$  相对  $v^2$  是小量，后者对分布函数起主导作用；当  $v$  足够大后，分布函数开始呈指数衰减。这就是为什么速度分布和速率分布极大值点会出现明显差异的一个原因：是由于不同空间中的体积元体积不同带来的差异。

速度空间，相空间（状态空间）的一些概念问题：

速度空间是由  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  三个轴张成的空间。

相空间是由  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  , 张成的空间。

速度空间中的点  $(V_x, V_y, V_z)$

速度空间中的体积元  $dV_x dV_y dV_z$

状态空间中的点  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$

状态空间中的体积元  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$

**1.5** 当1摩尔水蒸气分解成同温度的氢气和氧气时，热运动动能增加了百分之几？（不计键能变化）

分析讨论：

问题显然需要利用能量均分定律求解。

能量均分定律：由于分子在不同自由度上的运动等价，或者分子的微观状态等几率（等几率假设），因此能量会平均的分配到每个自由度上，每个自由度分配到的平均动能为： $1/2kT$ 。而每个自由度对比热的贡献等价。

其中， $k$ 为Boltzmann常数： $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

或者说，每K的温度，对应的动能为： $1KT \sim 0.1 \text{ meV}$

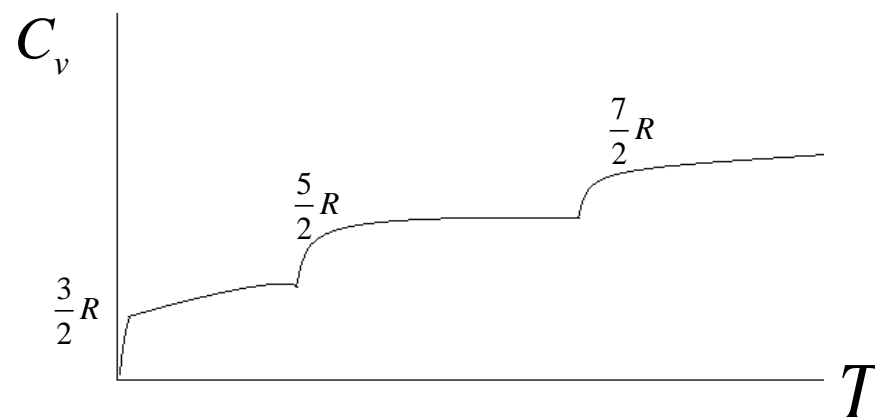
				总自由度	平动	转动	振动
平动	—	—	单原子	3	3	0	0
转动	10meV	100K	双原子	6	3	2	1
			三原子(非线性)	9	3	3	3
振动	100meV	1000K	多原子(n)	3n	3	3	3n-6

所以分子的平均动能以及等比热容（理想气体），有：

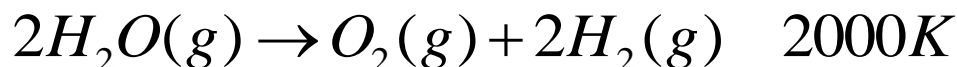
$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT = \frac{t+r+2v}{2} kT \quad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{t+r+2v}{2} R$$

对于一个双原子分子，我们可以有：

气体的等比热容随着温度的上升，转动自由度、振动自由度依次“解冻”，使得热容出现台阶性的变化。



具体看本题，容易知道：



由于温度相同，因此每一自由度上对应的平均动能相同： $\bar{\varepsilon}_i = 0.5kT$

分解前：
$$E_i = N \frac{i}{2} kT = 1mol \cdot N_A \cdot \frac{3+3+2 \times 3}{2} kT = 6N_A kT$$

分解后：

$$E_f = 1mol \cdot N_A \cdot \frac{3+2+2 \times 1}{2} kT + 0.5mol \cdot N_A \cdot \frac{3+2+2 \times 1}{2} kT = \frac{21}{4} N_A kT$$

前后相差： $(E_f - E_i) / E_i = -12.5\%$   
总内能降低。

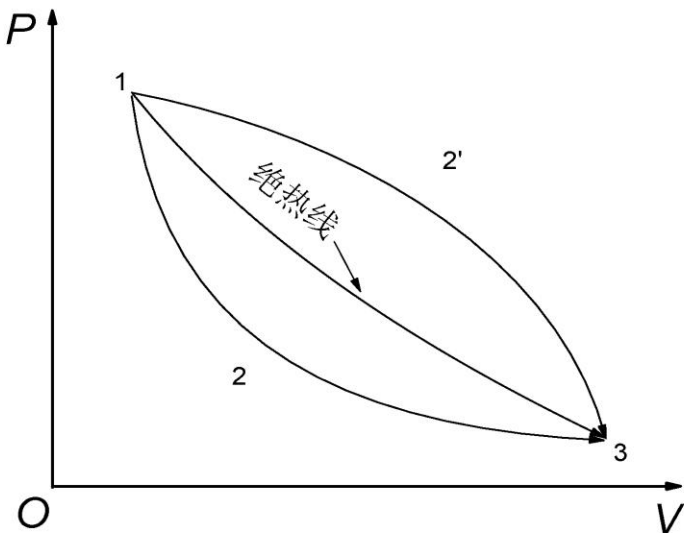
不考虑振动的内能变化为：25%

## \$2 热力学第一定律

- 状态函数、准静态过程
- 热力学第一定律
- 热机与卡诺循环

**2.1**过程如右图所示，讨论理想气体在下列过程中 $\Delta E$ ,  $\Delta T$ ,  $W$ ,  $Q$ 的正负.

- (1)  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 过程;
- (2)  $1 \rightarrow 2' \rightarrow 3$ 过程;
- (3) 比较上述两过程吸、放热的绝对值的大小。



**分析讨论:**

- (1) 问题给定了1、3两个状态，13、123、12'3三条路径。  
有温度，内能都是态函数，因此1、3处的温度内能与经历哪条路径无关；
- (2) 三个过程做功都可以用 $p dv$ 统一表示，由于气体都是从1- $\rightarrow$ 3状态， $dv > 0$ ，因此三种情况气体都对外做正功；
- (3) 吸热多少或正负，可与绝热过程 ( $Q=0$ ) 对比得到。

## §2 热力学第一定律

内能温度为态函数，与过程无关，所以：

$$\Delta E_{123} = \Delta E_{12'3} = \Delta E_{13}$$

$$\Delta T_{123} = \Delta T_{12'3} = \Delta T_{13}$$

PV图上，气体做功的大小为PV曲线与V轴包围的面积：

$$W_{123} = S_{123} \quad W_{13} = S_{13} \quad W_{12'3} = S_{12'3}$$

根据热力学第一定律， $\Delta E = Q - W$  可以得到：

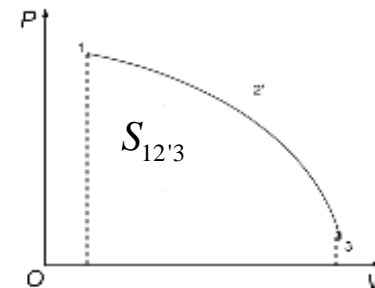
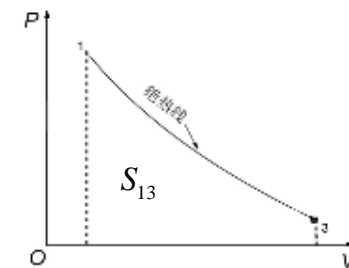
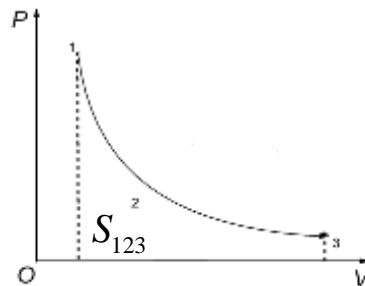
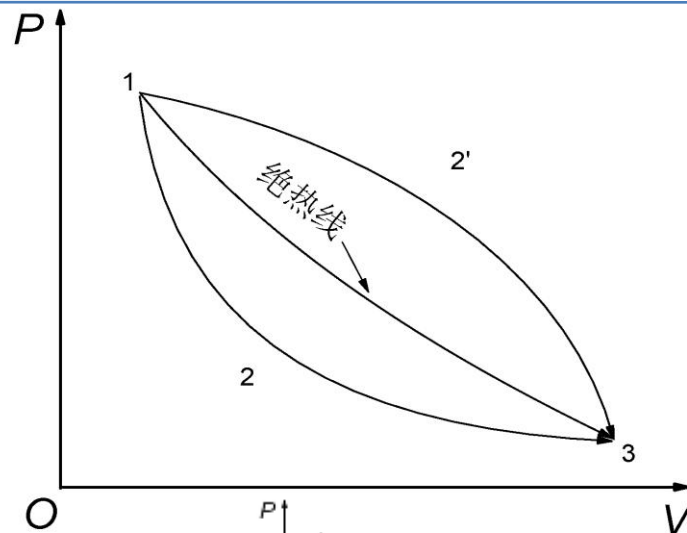
$$Q_{123} = \Delta E_{123} + W_{123} \quad Q_{13} = \Delta E_{13} + W_{13} = 0 \quad Q_{12'3} = \Delta E_{12'3} + W_{12'3}$$

从图中可以看出  $S_{123} < S_{13} < S_{12'3}$   $|S_{13} - S_{123}| < |S_{12'3} - S_{13}|$

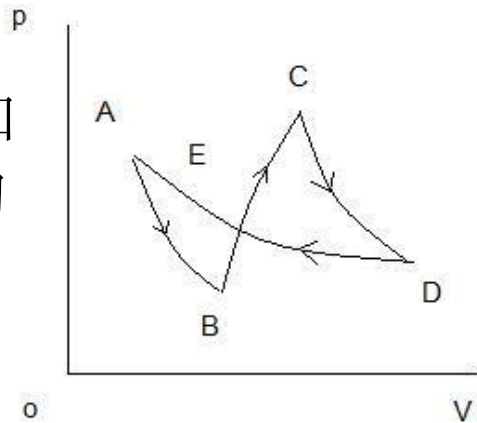
所以，综上有：

$$Q_{123} < Q_{13} = 0 \quad Q_{12'3} > Q_{13} = 0 \quad |Q_{123}| < |Q_{12'3}|$$

即，三个过程中温度内能变化相同，123过程气体做功最小，为放热过程；12'3过程气体做功最大，为吸热过程；123过程放出的热量小于12'3过程吸收的热量。



**2.2**如右图, 由绝热过程 $AB, CD$ , 等温过程 $DEA$ 和任意过程 $BEC$ 组成一循环过程 $ABCDEA$ , 已知图中 $ECDE$ 所包围的面积为 $70\text{J}$ ,  $EABE$ 所包围的面积为 $30\text{J}$ ,  $DEA$ 过程中系统放热 $100\text{J}$ , 求整个循环过程 $ABCDEA$ 中系统对外做功和 $BEC$ 过程中系统从外界吸热各为多少?

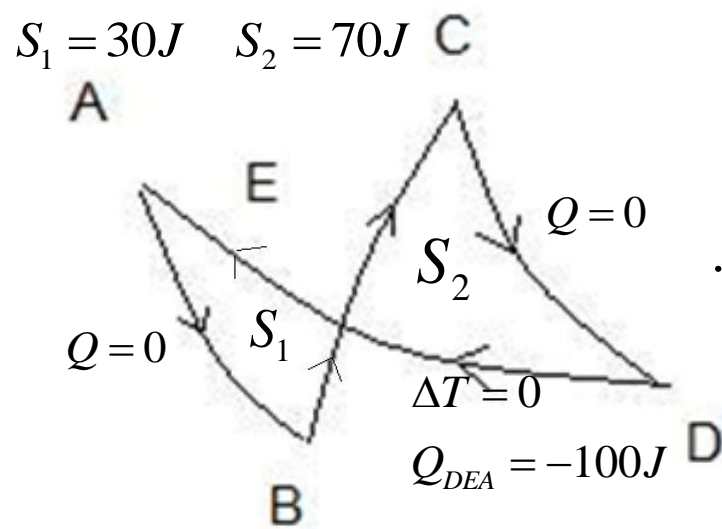


**分析讨论:**

- (1) 总循环做功, 可以理解成1.循环 $ABEA$ 与循环 $ECDE$ 的叠加; 2.正功过程 $ABECD$ 与负功过程 $DEA$ 的连接。
- (2) 计算 $BEC$ 过程吸热量, 如果从热力学第一定律出发, 求出 $BEC$ 过程的内能变化与做功大小比较困难。



## §2 热力学第一定律



1. 注意到循环过程ABEA是一个逆时针循环，气体对外做功为负；循环过程ECDE是一个顺时针循环，气体对外做功为正。

$$\therefore W_{tot} = W_{ABEA} + W_{ECDE} = -S_1 + S_2 = 40J$$

2. 由于AB，CD过程都是绝热过程，系统吸热仅在BEC过程与DEA过程；整个过程是一个循环过程，系统的状态函数不会发生变化。

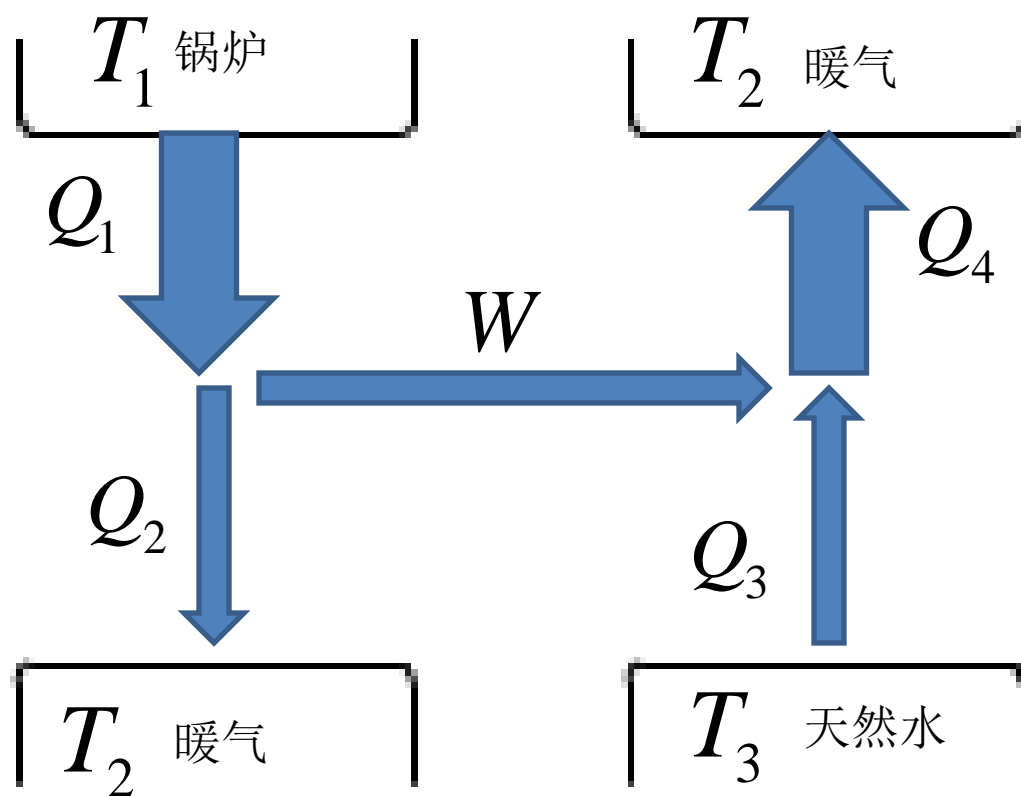
$$\Delta E = 0 = Q - W$$

$$Q = Q_{BEC} + Q_{DEA} = W_{tot}$$

$$Q_{BEC} = 140J$$

**2.3** 设一动力暖气装置由一个热机和一个致冷机组合而成，即致冷机靠热机做功来运转。热机靠燃料燃烧时放出的热量工作，向暖气系统中的水放热。已知锅炉、暖气、天然水的温度。求该系统的供热效率。

## 2.3 文字描述可能不清楚，重新描述如下图：



系统是一个热机与制冷机的联立。热机分别以锅炉和暖气为高低温热源，通过燃煤提供热量（ $Q_1$ ），在输出功的同时向暖气排热；制冷机利用热机输出的功运作，向暖气排热  $Q_4$ 。问题等价求：

$$Q_{tot} = Q_2 + Q_4$$

分析讨论：

热机问题，关键在于两热机的联合点 $W$

对左侧热机：

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

对右侧热机（制冷机）：

$$\frac{Q_4}{Q_3} = \frac{T_2}{T_3}$$

$$Q_3 + W = Q_4$$

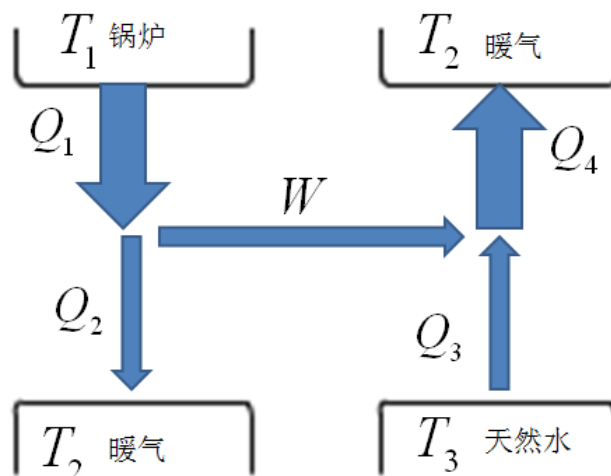
$$\text{联立： } Q_4 = W \frac{T_2}{T_2 - T_3}$$

暖气片的供热效率为：

$$\eta = Q_{tot} / Q_1 = \frac{T_2(T_1 - T_3)}{T_1(T_2 - T_3)}$$

对于卡诺机，有

$$\frac{T_H}{T_L} = \frac{Q_H}{Q_L}$$



所以，暖气片获得的总热量：

$$Q_{tot} = Q_2 + Q_4 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} + Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} \frac{T_2}{T_2 - T_3}$$

$$Q_{tot} = Q_1 \frac{T_2(T_1 - T_3)}{T_1(T_2 - T_3)}$$

对于原题中的温度，有：

$$\eta \sim 4$$

**2.4**在高温热源为 $T_1$ ，低温热源为 $T_0$ 之间工作的卡诺热机，对外做净功 $W_1$ . 若维持低温热源温度不变，提高高温热源温度，使其对外做净功 $W_2$ . 假设这两次循环该热机都工作在相同的两条绝热线之间，试求：

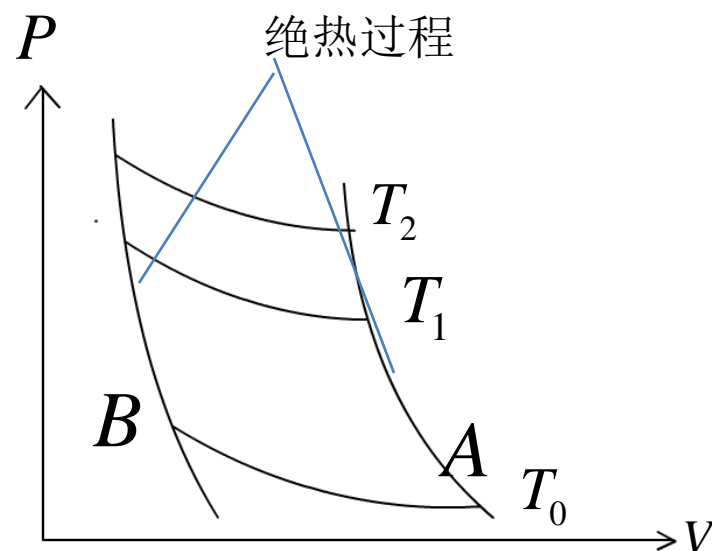
- (1) 后一个卡诺循环的效率；
- (2) 后一个卡诺循环的高温热源的温度.

**分析讨论：**

分析了解卡诺循环的基本定义：仅和高低温热源发生热交换。

再考虑到题中要求工作的绝热线相同，低温热源相同，我们会得到一些有用的信息。

由于绝热过程给定，不论高温热源处于什么温度，系统都将向低温热源（给定温度）放出相同的热量  $Q_0$ ——对于AB过程，由于A、B为给定的相图上的点，AB过程中的内能变化不变，气体做功大小不变，因此热量 $Q$ 不变。



## §2 热力学第一定律

对T1的情况:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{Q_0 + W_1}{Q_0}$$

$$Q_0 = W_1 \frac{T_0}{T_1 - T_0}$$

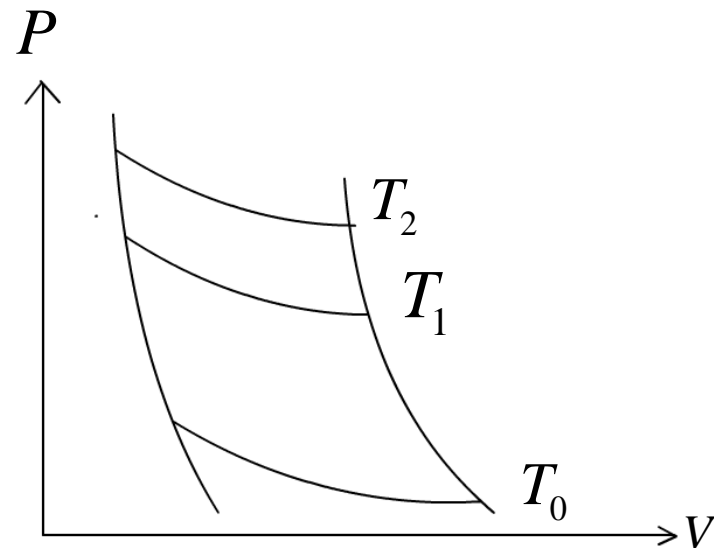
对T2的情况:

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{Q_2}{Q_0} = \frac{Q_0 + W_2}{Q_0}$$

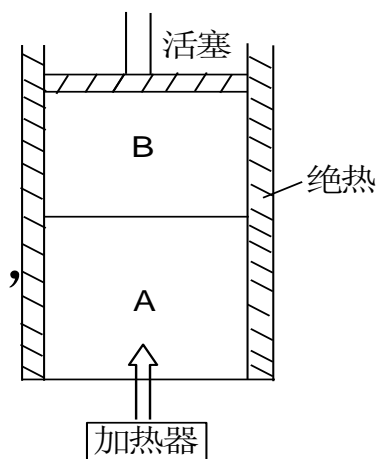
$$T_2 = T_0 \frac{Q_0 + W_2}{Q_0} = T_0 \frac{W_1 \frac{T_0}{T_1 - T_0} + W_2}{W_1 \frac{T_0}{T_1 - T_0}} = T_0 + \frac{W_2}{W_1} (T_1 - T_0)$$

热机效率:

$$\eta_2 = \frac{T_2 - T_0}{T_2} = \frac{\frac{W_2}{W_1} (T_1 - T_0)}{T_0 + \frac{W_2}{W_1} (T_1 - T_0)}$$

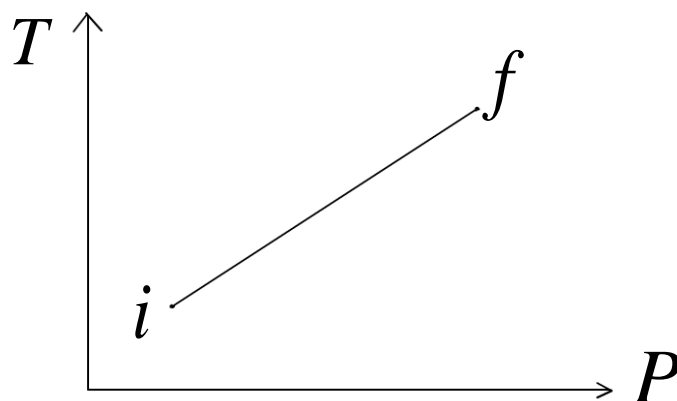


**2.5** 右图为一气缸，除底部导热外，其余部分都是绝热的. 其容积被一位置固定的轻导热板隔成相等的两部分 **A** 和 **B**，其中各盛有 **1mol** 的理想氮气. 今将 **335J** 的热量缓慢地由底部传给气体，设活塞上的压强始终保持为 **1atm**.



- (1) 求 **A**，**B** 两部分温度的改变及吸收的热量  
(导热板的吸热、活塞的重量及摩擦均不计)；
- (2) 若将位置固定的导热板换成可自由滑动的绝热隔板，上述温度改变和热量又如何？

(1) 我们知道A气体在初末状态具有相同的体积，由于我们所求的温度（变化）是一个状态函数，因此可以设计A气体经历一个等容过程，表现为在状态函数图（如TP图）中连接初末两点：



在我们设计的等容过程中，可以有： $Q_A = C_v \Delta T_A$

对于B中的气体也是类似，我们需要设计B中的气体经历一个等压过程，即在状态函数中用等压曲线连接初末两点，在这一过程中，可以有： $Q_B = C_P \Delta T_B$

再考虑到A、B气体初末态温差相同（两者初末态彼此热平衡），同种气体等容热容与等压热容存在关系，于是有：

$$C_v = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} R \quad C_p = \frac{i+2}{2} R = \frac{7}{2} R \quad Q = Q_A + Q_B = \left( \frac{5}{2} R + \frac{7}{2} R \right) \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{Q}{6R}$$



（2）同第一题类似的思路，给A气体设计一个等压过程，B气体由于初末状态气体状态相同（温度、压强、体积），简单的认为B气体全过程无变化：

$$Q_A = Q = C_p \Delta T_A$$

$$\Delta T_A = \frac{Q}{\frac{7}{2}R}$$

$$Q_B = 0$$

$$\Delta T_B = 0$$

**2.6** 2摩尔单原子理想气体从某初态经历热容量为 $C=2R(1+0.01T)$ 的准静态过程，到达温度为初态温度2倍、体积为初态体积 $\sqrt{2}$ 倍的终态。试求内能增量 $\Delta E$ 及系统对外所作的功。

**分析讨论：**

热容是一个过程有关的量。本题中给出了系统的过程以及该过程中的热容。根据热容的定义：

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

容易有：

$$\int_{T_0}^{2T_0} 2R(1+0.01T)dT = Q$$

$$Q = 2RT_0 + 0.03RT_0^2$$

$$\Delta E = \nu C_v \Delta T = 3RT_0$$

于是有：

$$W = Q - \Delta E = -RT_0 + 0.03RT_0^2$$

注意到我们还没有用到体积变化的条件，考虑热力学第一定律的微分表达：

$$dE = CdT - pdv$$

$$\nu C_v dT = CdT - pdv$$

$$\frac{\nu C_v - C}{\nu RT} dT = -\frac{1}{V} dV$$

积分后，有：

$$\int_{T_0}^{2T_0} \frac{1-0.02T}{2T} dT = -\int_{v_0}^{\sqrt{2}v_0} \frac{1}{V} dV$$

$$T_0 = \frac{\ln 2}{0.01} K \sim 69 K$$

再将温度带回前面的式子即可求出具体的结果。