

习题 1.3

编程观察无穷级数 $\sum_{n=1 \rightarrow \infty} 1/n$ 的求和计算。

(1)采用 IEEE 单精度浮点数，观察当 n 为何值时求和结果不再变化，将它与理论分析的结论进行比较。

(2)用 IEEE 双精度浮点数计算(1)中前 n 项的和，评估 IEEE 单精度浮点数计算结果的误差。

(3)如果采用 IEEE 双精度浮点数，估计当 n 为何值时求和结果不再变化，这在当前做实验的计算机上大概需要多长的计算时间？

分析：

第一问采用 IEEE 单精度浮点数，使用 matlab 中的 single 命令，当当前求和值与上一求和值相等时，退出循环，输出结果。理论分析值：根据定理 1.6（即“大数吃小数”定理）当 $|x_2/x_1| \leq 0.5 * \varepsilon$ （ ε 为机器精度） $x_1 + x_2 = x_1$ 。则当前的 $1/n$ 与当前求和值之比小于等于 $0.5 * \varepsilon$ 时退出循环。

第二问，不使用 single 即为双精度浮点数。

第三问采用手动计算，先得到第二问的运行时间和求和结果，再根据定理 1.6 算出双精度浮点数的理论求和值，列比例式即可估计所需时间。

实验结果：

(1)使用单精度浮点数，当 $n=2097152$ 时求和结果不再变化，求

和值为 15.4036827；理论分析值为 15.4037。

(2) 使用双精度浮点数，计算 $n=2097152$ 时的求和值为 15.13330669，运行时间为 0.76 秒，与单精度的误差为 0.27037601。

(3) 当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\sum 1/n \rightarrow \ln n$ ，由定理 1.6，得不等式 $(1/n)\ln n \leq 0.5 * \varepsilon = 0.5 * 1.11 * 1e-16$ ，估算得 n 大约为 $5e+14$ 。列比例式 $2e+6/5e+14 = 0.76/x$ ，解得 x 约为 $1e+8$ 秒，约三年。

实验结论：单精度浮点数比双精度浮点数精度低，当计算次数达到 10 的 6 次方量级时，因精度不够，无法区别两数大小，计算停止。而双精度浮点数可以将求和进行到 10 的 14 次方量级。