清华大学本科生期末考试试卷A

信号处理原理

2006.01.04 14:30-16:30

1. (8分)双音频拨号的DTMF信号可以用DFT幅度频谱来解码，已知各按键对应的DTMF双音频如下所示。对于8kHz的采样频率，DFT窗的最小宽度为多少（用采样点数和时间秒数）才能保证区分各个键？

	1209Hz	1336Hz	1477Hz
697Hz	1	2	3
770Hz	4	5	6
852Hz	7	8	9
941Hz	*	0	#

解：根据双音频拨号的原理，先求最小的频率间隔Δf

$$\begin{aligned}\Delta f &= \min\{941-852, 852-770, 770-697, 1477-1336, 1336-1209\} \\ &= 73 \text{ Hz}\end{aligned}$$

则保证区分各键时的序列长度（即DFT窗的最小宽度）为

$$N \geq f_s/\Delta f = 8000/73 = 109.59 \approx 110$$

对应的时间长度为

$$T = N/f_s = 110/8000 = 0.01375\ (s)$$

2. (8分)试用卷积和傅里叶变换的定义，证明下式

$$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)]$$

证明：由卷积和傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)e^{j\lambda t}d\lambda\right] f_2(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j(\omega-\lambda)t}dt\right]d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)\end{aligned}$$

■

3. (8分)信号$x(t)$的傅里叶频谱为$X(\omega)$，信号$p(t)$是基频为ω_0的周期函数，复指数形式的傅里叶级数用a_n表示。求采样信号$y(t)=x(t)p(t)$的傅里叶变换。

解：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y(t)] &= \mathcal{F}[x(t)p(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}[p(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi}X(\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi a_n\delta(\omega-n\omega_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nX(\omega-n\omega_0)\end{aligned}$$

4. (10分)已知某滤波器的传递函数如下式，

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}+4z^{-3}}{1+0.2z^{-1}-0.3z^{-2}+0.5z^{-4}}$$

(1) 写出相应的差分方程。

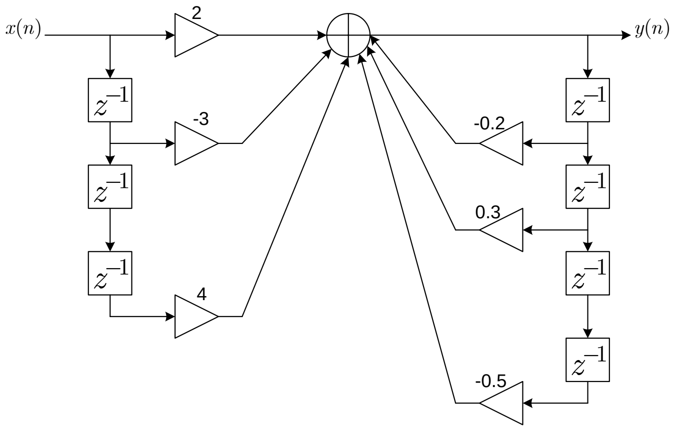
(2) 画出滤波器的信号流程图。

解：

(1) 滤波器的差分方程为

$$y(n)=-0.2y(n-1)+0.3y(n-2)-0.5y(n-4)+2x(n)-3x(n-1)+4x(n-3)$$

(2) 滤波器的信号流程图为：



5. (10分)对下面给出的Z变换结果，求它对应的所有可能的序列。

$$X(z)=\frac{7-9.5z^{-1}-3.5z^{-2}+5.5z^{-3}}{(1-z^{-2})(1-0.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})}$$

解：对原式进行部分分式展开，得

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{3}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1-1.5z^{-1}}$$

它所对应的序列有如下四种：

$$\begin{aligned}
x_1(n) &= -\left[1+(-1)^n+3(0.5)^n+2(1.5)^n\right]u(-n-1)\\
x_2(n) &= 3(0.5)^n u(n)-\left[1+(-1)^n+2(1.5)^n\right]u(-n-1)\\
x_3(n) &= \left[1+(-1)^n+3(0.5)^n\right]u(n)-2(1.5)^n u(-n-1)\\
x_4(n) &= \left[1+(-1)^n+3(0.5)^n+2(1.5)^n\right]u(n)
\end{aligned}$$

6. (10分)某信号最初只含有两个频率分量，频率分别是$f_1=1\text{kHz}$和$f_2=2\text{kHz}$。现在因为某种原因，该信号中混入了一个新的频率分量，分量的频率是原有两分量频率之间的某个值。为了找到这个分量的具体频率值，对该信号进行10kHz采样并进行分析。当对10ms的采样数据进行分析时，可以从频谱图中找出那个新的频率分量。试根据以上信息，求新频率分量可能的频率范围。

解：根据题意，采样得到的序列长度为

$$L=f_sT_L=10\times 10=100$$

在这个长度限制之下，能分辨开的最小频率间隔为

$$\Delta f=f_s/L=10/100=0.1\text{kHz}$$

又，新的频率分量在原有分量之间，它与原有分量之间的频率间隔应大于频率分辨率（否则，就不可能发现这个频率分量了），因此，该频率分量的频率值的范围为

$$\begin{aligned}
f_3^{min} &= f_1+\Delta f=1+0.1=1.1\text{ kHz}\\
f_3^{max} &= f_2-\Delta f=2-0.1=1.9\text{ kHz}
\end{aligned}$$

7. (10分)两个实序列$x_1(n)$和$x_2(n)$的离散傅里叶变换分别为$X_1(k)$和$X_2(k)$。复序列$g(n)=x_1(n)+jx_2(n)$，其离散傅里叶变换为$G(k)$，实部的奇偶分量和虚部的奇偶分量分别为$G_{OR}(k)$、$G_{ER}(k)$、$G_{OI}(k)$、$G_{EI}(k)$。试利用$G_{OR}(k)$、$G_{ER}(k)$、$G_{OI}(k)$、$G_{EI}(k)$来表示$X_1(k)$和$X_2(k)$。

解：根据题意，给定

$$g(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

则

$$\begin{aligned}
G(k) &= X_1(k)+jX_2(k)\\
&= G_{OR}(k)+G_{ER}(k)+j\left[G_{OI}(k)+G_{EI}(k)\right]
\end{aligned}$$

因为，若$x_1(n)$为实序列，则$X_1(k)$的实数部分必是偶对称的，而虚数部分必是奇对称的，$X_2(k)$也是同样的。因此，

$$\begin{aligned} G(k) &= X_1(k) + jX_2(k) \\ &= G_{ER}(k) + jG_{OI}(k) + j\left[G_{EI}(k) - jG_{OR}(k)\right] \end{aligned}$$

故

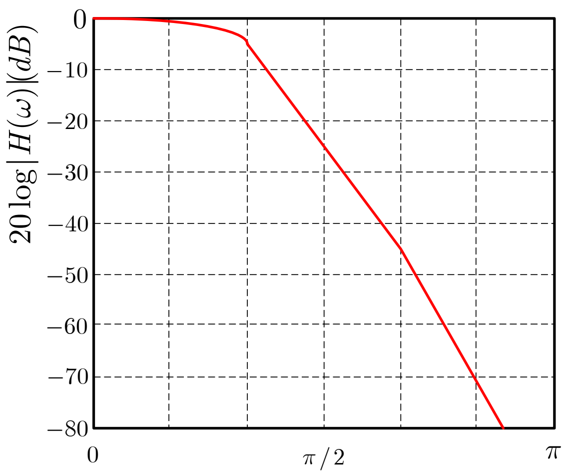
$$X_1(k) = G_{ER}(k) + jG_{OI}(k)$$
$$X_2(k) = G_{EI}(k) - jG_{OR}(k)$$

8. (12分)已知某数字滤波器在采样频率为12kHz时的幅度频率响应如下图所示

(1) 用模拟频率代替数字频率，画出幅度频率响应曲线。

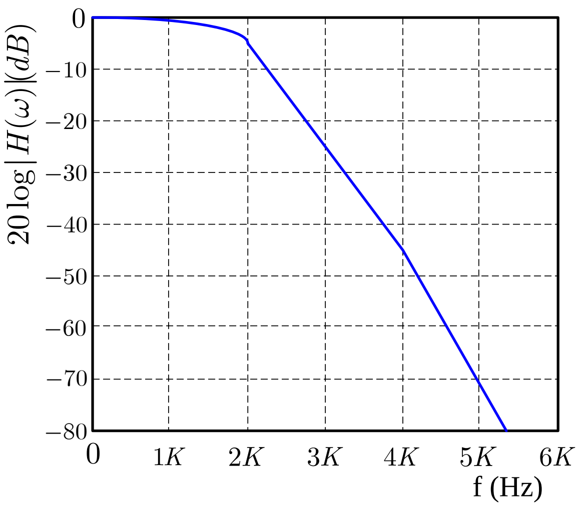
(2) 低通滤波器的带宽是多少赫兹？(-3dB处的频率)

(3) 若将采样频率变成30kHz，则滤波器的带宽是多少赫兹？



解：

(1) 数字频率$0 \sim \pi$弧度转换成模拟频率$0 \sim 6000$ Hz，幅度频率响应特性曲线的形状不变，只是水平轴的标记变化，示意图如下：



(2) 根据幅度频率响应特性图，可以得到滤波器的带宽频率近似为1800 Hz。

(3) 如果采样频率变为30kHz，则相应带宽变为

$$1800/12000 \times 30000 = 4500 \text{ Hz}$$

9. (12分)频率为6kHz的正弦波，以7.5kHz进行采样，得到一个离散的数据序列。对这个序列进行以下不同点数的DFT，分别求这些幅度频谱中的峰出现的位置。

(1) 32点DFT

(2) 64点DFT

(3) 128点DFT

解：正弦波的频率是6kHz，而采样频率只有7.5kHz，所以采样后的数字信号频谱将会出现混叠，结果会在1.5kHz和6kHz处出现频率分量。在不同的DFT宽度下，频谱中峰的位置也是不同的。

(1) 32点DFT:

$$\begin{aligned} k_1 &= 6/7.5 \times 32 = 25.6 \rightarrow 26 \\ k_2 &= N - k_1 = 32 - 26 = 6 \end{aligned}$$

(2) 64点DFT:

$$\begin{aligned} k_1 &= 6/7.5 \times 64 = 51.2 \rightarrow 51 \\ k_2 &= N - k_1 = 64 - 51 = 13 \end{aligned}$$

(3) 128点DFT:

$$\begin{aligned} k_1 &= 6/7.5 \times 128 = 102.4 \rightarrow 102 \\ k_2 &= N - k_1 = 128 - 102 = 26 \end{aligned}$$

10. $(12分)对x(n) = \sin(n4\pi/7)$计算DFT，采样频率为22kHz。

(1) 求这个正弦的数字频率。

(2) 此数字频率对应的模拟频率是多少？

(3) 如果要保证频谱峰出现在正确位置的10Hz以内，进行DFT的N值最小为多少？（请仅考虑N为2的幂的情况）

(4) 对于上一问中得到的N，频谱峰在什么地方？

解：

(1) 正弦信号的数字频率为$\omega = 4\pi/7$

(2) 数字频率对应的模拟频率为

$$f = \omega \times f_s/2\pi = 44000/7 = 6285.714 \text{ Hz}$$

(3) 根据题意，DFT的最小频率分辨率是$\Delta f = 2 \times 10 = 20$ Hz，所以，进行DFT分析时的序列最小值为

$$N \geq f_s/\Delta f = 22000/20 = 1100 \rightarrow 2048 \quad \text{（取2的整数次幂）}$$

(4) 如果序列长度取2048，则频谱峰的位置为

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega/2\pi \times N = 2/7 \times 2048 = 585.14 \rightarrow 585 \\ k_2 &= N - k_1 = 2048 - 585 = 1463 \end{aligned}$$