几何与代数（ 2 ）试题 2009 年 6 月 15 日

B 卷

系：　　　　　　班：　　　　　姓名：　　　　　学号：

填空题（ **30** 分，每空 **5** 分. 将答案写在此试卷的空格中）：

1. 设 $f(x)=x^5+2x^4-x+1, g(x)=x^2-x+2$**,** 用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式为 (x^3+3x^2+x-5)**.** **,** 余式为 $(-8x+11)$**.** 。

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-2} & -1 \\ 1 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{-1} \end{pmatrix}$**,** 则其埃尔米特（ **Hermite** ）共轭等于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{-2} & 9 & -1 \\ -1 & 4 & 1-\sqrt{-1} \end{pmatrix}$**,**

3. 设 $f(x)=x^4-x^3+x^2-4x+3, g(x)=x^2-x$**,** 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首一的最大公因子等于 $x-1$ 。

4. 用 **Schmidt** 正交化方法将 $\alpha_1=(1,2,1,0)^T, \alpha_2=(1,1,1,0)^T, \alpha_3=(0,0,1,2)^T$ 化为正交向量组

$((1,2,1,0)^T, (\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)^T, (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},2)^T$ 。

5. 函数矩阵 $A(x)=\begin{pmatrix} 3x & sinx & cosx \\ e^x+1 & 6 & -5x \\ x^{-2} & 8 & sin2x \end{pmatrix}$ 的导数为 $\begin{pmatrix} 3 & cosx & -sinx \\ e^x & 0 & -5 \\ -2x^{-3} & 0 & 2cos2x \end{pmatrix}$ 。

计算题与证明题

6. （ **10 分** ）设 F 是一个数域．求线性变换

$$\begin{array}{rcl} T:F^n & \longrightarrow & F^n \\ (a_1,a_2,\cdots,a_n)^T & \mapsto & (0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T \end{array}$$

的核与像.

$KerT=\{(0,0,\cdots,0,a)^T \mid a\in F\}$，$ImT=\{(0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})^T \mid a_1,\cdots,a_{n-1}\in F\}$.

7. （ **20 分** ）设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为若尔当 **(Jordan)** 标准型.

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

8. （ **14 分** ）设 $f(x),g(x)$ 是数域 F 上的两个非零的多项式．证明集合

$$M=\{u(x)f(x)+v(x)g(x) \mid u(x),v(x)\in F[x]\}$$

中的次数最低的多项式是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式.

设 $h(x)$ 是 M 中次数最低的一个多项式， $d(x)=(f(x),g(x))=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)$．由带余除法，

$$d(x)=q(x)h(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $degr(x)<degh(x)$．而 $r(x)\in M$，因此 $r(x)=0$．$d(x)$ 当然整除 M 中的多项式，所以

$$h(x)=cd(x),c\in F^*$$

.

9. （ **16** 分）设 n 阶复矩阵 A 和 B 具有相同的极小多项式 $m(x)$, $degm(x) = n$. 证明 A 与 B 相似.

设 λ 是 A 一个特征值. 在 A 的 **Jordan** 标准形中，只有一个属于 λ 的 **Jordan** 块.

10.（ **10** 分）证明只有一个特征值的正规变换一定是纯量变换.

正规矩阵是可以对角化的。