

# 实验 6: 线性方程组的直接解法

✉ jerryyangs@gmail.com

April 20, 2014

## 1 题目内容

考虑  $n$  阶的希尔伯特 (Hilbert) 矩阵  $H_n$ , 其元素为  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ , 也即是

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

- (1) 按  $\infty$ -范数计算  $H_3$  和  $H_4$  的条件数;
- (2) 令  $n = 10$ , 生成 Hilbert 矩阵, 并构造向量  $b = H_n x$ , 其中  $x$  是所有分量都是 1 的列向量, 用矩阵三角分解 (LU 分解) 的方法求解以  $H_n$  作为系数矩阵的线性方程组  $H_n x = b$ , 得到近似解  $\hat{x}$ , 计算残差  $r = b - H_n \hat{x}$  的  $\infty$ -范数  $\|r\|_\infty$ , 以及误差  $\Delta x = \hat{x} - x$  的  $\infty$ -范数  $\|\Delta x\|_\infty$ ;
- (3) (选做) 由于上述矩阵为对称矩阵, 采用平方根法 (Cholesky 分解) 重新求解上述方程, 并比较其与 LU 分解方法的运行效率;
- (4) 让上述线性方程组的右端项  $b$  产生  $10^{-7}$  的扰动, 然后重新求解上述方程组, 观察得到的解产生的误差的变化情况;
- (5) 减小或增大  $n$  的值, 观察  $\|\Delta x\|_\infty$  的变化情况,  $n$  取大约多少值时, 误差达到 100%?

## 2 实验报告

请完成实验并提交实验报告, 内容包括:

- 实习要求 (题目及初始数据);
- 算法描述 (伪码或框图);
- 程序清单 (以附件形式给出, 和实验报告一起打包);
- 体会与问题 (对算法、程序或计算问题的心得)。

## 3 参考文献

- [1] Timothy A. Davis. Direct methods for sparse linear systems. SIAM, 2006.
- [2] William H. Press. Numerical recipes: The art of scientific computing, 3rd edition. Cambridge University Press, 2007.

这两本参考书已上传至网络学堂的课程文件中