数学实验第六次实验报告

计算机系 计 43 2014011330 黄家晖

2017 年 4 月 28 日

1 实验目的

- 掌握使用 LINGO 解非线性规划的方法；
- 通过求解实际问题，学会建立实际问题的非线性规划模型。

2 应用题

2.1 CH9-4 原料混合生产

2.1.1 模型建立

假设购买原料甲 a 吨，原料乙 b 吨，原料丙 c 吨。甲乙的混合物用于生产产品 A 的数量为 x 吨，生产产品 B 的数量为 y 吨；丙用于生产产品 A 所用的数量为 u 吨，生产产品 B 的数量为 v 吨。另外，原料甲和原料乙混合之后的浓度为 k。

根据题目所述要求，可以建立如下约束关系：

$$a+b=x+y, \quad c=u+v$$

$$a \leq 500, \quad b \leq 500, c \leq 500$$

$$x+u \leq 100, \quad y+v \leq 200$$

$$k=\frac{0.03a+0.01b}{a+b}$$

$$\frac{kx+0.02u}{x+u} \leq 0.025$$

$$\frac{ky+0.02v}{y+v} \leq 0.015$$

另外，题目的目标是更好的安排生产，我将其理解为生产获得的总利润最大，即优化函数为：

$$\max z=9(x+u)+15(y+v)-6a-16b-10c$$

对于第 (2) 问，只需要更新相应条件为：

$$x + u \leq 600$$

即可。而对于第 (3) 问，需要更新目标函数为：

$$\max z = 9(x + u) + 15(y + v) - 6a - 13b - 10c$$

接着进行求解即可。

2.1.2 算法设计

分析上述不等式约束关系，可以发现最后两个约束为非线性约束，而目标函数和其他约束条件均为线性。可以使用 LINGO 的相应模型自动求解。注意需要设置 LINGO 使得其找出全局最优解。

2.1.3 LINGO 模型

第一问代码如下

```
max = 9 * (x + u) + 15 * (y + v) - 6 * a - 16 * b - 10 * c;
a + b = x + y;
c = u + v;
a <= 500;
b <= 500;
c <= 500;
x + u <= 100;
y + v <= 200;
k = (0.03 * a + 0.01 * b) / (a + b);
k * x + 0.02 * u <= 0.025 * (x + u);
k * y + 0.02 * v <= 0.015 * (y + v);
```

第二问代码如下

```
max = 9 * (x + u) + 15 * (y + v) - 6 * a - 16 * b - 10 * c;
a + b = x + y;
c = u + v;
a <= 500;
b <= 500;
c <= 500;
x + u <= 600;
y + v <= 200;
k = (0.03 * a + 0.01 * b) / (a + b);
k * x + 0.02 * u <= 0.025 * (x + u);
k * y + 0.02 * v <= 0.015 * (y + v);
```

第三问代码如下

```
max = 9 * (x + u) + 15 * (y + v) - 6 * a - 13 * b - 10 * c;
a + b = x + y;
c = u + v;
a <= 500;
b <= 500;
c <= 500;
x + u <= 100;
y + v <= 200;
k = (0.03 * a + 0.01 * b) / (a + b);
k * x + 0.02 * u <= 0.025 * (x + u);
k * y + 0.02 * v <= 0.015 * (y + v);
```

以及

```
max = 9 * (x + u) + 15 * (y + v) - 6 * a - 13 * b - 10 * c;
a + b = x + y;
c = u + v;
a <= 500;
b <= 500;
c <= 500;
x + u <= 600;
y + v <= 200;
k = (0.03 * a + 0.01 * b) / (a + b);
k * x + 0.02 * u <= 0.025 * (x + u);
k * y + 0.02 * v <= 0.015 * (y + v);
```

2.1.4 计算结果与分析

第 (1) 问 LINGO 求解的结果为：

$$x = 0, \quad u = 0, \quad y = 100$$
$$v = 100, \quad a = 0, \quad b = 100$$
$$c = 100, \quad k = 0.01$$

最优目标函数值为 400。求解器总共迭代次数为 4557。

第 (2) 问 LINGO 求解的结果为：

$$x = 300, \quad u = 300, \quad y = 0$$
$$v = 0, \quad a = 300, \quad b = 0$$
$$c = 300, \quad k = 0.03$$

最优目标函数值为 600。求解器总共迭代次数为 2905。

第 (3) 问 对于第 (1) 问的情况，LINGO 求解的结果为：

$$x = 0, \quad u = 0, \quad y = 200$$
$$v = 0, \quad a = 50, \quad b = 150$$
$$c = 0, \quad k = 0.015$$

最优目标函数值为 750。求解器总共迭代次数为 10139。

对于第 (2) 问的情况，LINGO 求解的结果为：

$$x = 600, \quad u = 0, \quad y = 0$$
$$v = 0, \quad a = 450, \quad b = 150$$
$$c = 0, \quad k = 0.025$$

最优目标函数值为 750。求解器总共迭代次数为 3337。

问题解答 第 (1) 问，应该购进乙和丙各 100 吨，甲不购进；且最终全部混合生产 B，可以获得最大利润为 40 万元；

第 (2) 问，应该购进甲和丙各 300 吨，乙不购进；且最终所有原料全部混合生产 A，可以获得最大利润为 60 万元；

第 (3) 问，对于第 (1) 问的情况，应该购进甲 50 吨，乙 150 吨，丙 200 吨；最终全部混合用于生产 B，可以获得最大利润为 75 万元；对于第 (2) 问的情况，应该购进甲 450 吨，乙 150 吨，全部混合用于生产 A，可以获得最大利润为 75 万元。实际上，对于第 (2) 问的情况，完全可以与 (1) 生产情况相同，也能达到最大利润 75 万元。

2.2 CH9-5 电网传送问题

2.2.1 模型建立

假设流过 1Ω 电阻的电流为 aA，流过 4Ω 电阻的电流为 bA，流过 6Ω 电阻的电流为 cA，流过 12Ω 电阻的电流为 dA，流过 3Ω 电阻的电流为 eA。所有电流的正方向均如课本图 9.3 所示。显然，根据电流相关定理可以得出约束条件：

$$a + b = 710, \quad d + e = 710$$

$$b + c = e, \quad a = c + d$$

而为了使得总的耗散能量最小，我们的最优函数为：

$$\min z = a^2 + 4b^2 + 6c^2 + 12d^2 + 3e^2$$

需要注意的是，如果电厂为交流电，则实际消耗功率应该是上述最优函数的 $\frac{1}{2}$，但由于仅仅是一个系数，所以在求解时可以忽略。

2.2.2 算法设计

根据上述模型分析可知，所有约束均为线性等式，而目标函数为二次型，因此可以使用 LINGO 的二次规划功能模块进行求解。

2.2.3 LINGO 模型

```
min = a * a + 4 * b * b + 6 * c * c + 12 * d * d + 3 * e * e;
a + b = 710;
d + e = 710;
b + c = e;
c + d = a;
```

2.2.4 计算结果与分析

计算结果 LINGO 计算结果输出为：

$$a = 371.38, \quad b = 338.62, \quad c = 163.85$$

$$d = 207.54, \quad e = 502.46$$

与物理模型比较 为了求解模型的物理解答，我们可以根据电势的相关概念继续列电路方程求解。定义电网图最上侧的顶点为 A，最下侧的顶点为 B，最左侧顶点为 C，最右侧顶点为 D，则某些电势插值可以由两条电流路径表示，如：

$$\phi_C - \phi_A = a = 4b - 6c$$

$$\phi_B - \phi_D = 3e = 12d - 6c$$

这两个方程与上述四个方程联立即可求解五个未知数。表面上看起来这是一个超定方程组，但是实际上上面的四个约束条件是有线性相关的部分，因此有效的方程仅有 3 个，再联立新的两个方程，刚好可以解出五个未知数。

相关 MATLAB 的求解代码为：

```
% Coefficients
coef = [1, 1, 0, 0, 0;
    0, 0, 0, 1, 1;
    0, 1, 1, 0, -1;
    1, -4, 6, 0, 0;
    0, 0, 6, -12, 3];

% Right-hand-side
rhs = [710, 710, 0, 0, 0]';

% Solve
x = coef \ rhs;
```

求解结果为：

$$a = 371.38, \quad b = 338.62, \quad c = 163.85$$

$$d = 207.54, \quad e = 502.46$$

与使用非线性优化模型得到的最优解条件一致。

问题解答 流过 1Ω 电阻的电流为 371.38A，流过 4Ω 电阻的电流为 338.62A，流过 6Ω 电阻的电流为 163.85A，流过 12Ω 电阻的电流为 207.54A，流过 3Ω 电阻的电流为 502.46A。

2.3 CH9-8 股票收益问题

2.3.1 模型建立

假设股票 A,B,C 的投资占比分别为 a, b, c，三支股票在 1955 年期望的年末年初价值比分别为 S_A, S_B, S_C。假设投资前后的资产比值为 S（假设 $S = 1 + \alpha$，则 α 代表年利润），那么其期望为：

$$ES = aES_A + bES_B + cES_C$$

用 S 的方差表示投资的风险，则：

$$DS = a^2 DS_A + b^2 DS_B + c^2 DS_C + 2abcov(S_A, S_B) + 2accov(S_A, S_C) + 2bccov(S_B, S_C)$$

我们将 S_A, S_B, S_C 看作随机变量，其前几年的值即为对该随机变量的采样，因此可以通过前几年的采样值对随机变量的分布和期望进行估计。上式中 cov 函数表示协方差。

本题仅有期望年利率的最低要求，并没有越高越好的要求，因此我们需要保证在完成期望年利率要求的前提下，使得投资的风险 DS 最小。因此本题的最优化模型建立为：

$$ES \leq 1.15$$

$$a + b + c = 1$$

$$\min z = DS$$

当期望最小收益变动时，我们通过循环求解 LINGO 模型获得几种股票的投资变化。

如果增加一个无风险的投资方式，假设其占比为 d，则上述最优化模型需要更新为：

$$(ES)' \leq 1.15$$

$$a + b + c + d = 1$$

$$\min z = DS$$

其中 ES 需要加入购买国库券的期望年末年初资产比，而由于国库券不存在风险，所以包含国库券的 DS 中的项均为 0。

对于第 (3) 小问，假设股票 A 买入 x_A，卖出 y_A；股票 B 买入 x_B，卖出 y_B；股票 C 买入 x_C，卖出 y_C。我们假设题目中叙述的“期望年收益率”是指仅由股票自身产生的收益，而不应该考虑到交易费之类的其他投资。假设进行了交易之后各个股票的持股情况仍然为 a, b, c，但是由于交了交易费，所以股权实际减少了：

$$a + b + c + 0.01(x_A + y_A + x_B + y_B + x_C + y_C) = 1$$

另外增加变换条件：

$$0.5 + x_A - y_A = a$$

$$0.35 + x_B - y_B = b$$

$$0.15 + x_C - y_C = c$$

其余条件相同，a, b, c 在下面式子中的意义保持不变：

$$ES \leq 1.15$$

$$\min z = DS$$

2.3.2 算法设计

对于上述模型中的 DS 和 ES，可以通过 MATLAB 中的相应函数进行求解。而分析最优化模型，约束最终都可以化为线性约束，而目标函数是一个二次型，因此可以采用 LINGO 的二次规划功能进行求解。

2.3.3 LINGO 模型

计算期望和协方差的 MATLAB 代码为:

```
data = [1.3 1.225 1.149
    1.103 1.29  1.26
    1.216 1.216 1.419
    0.954 0.728 0.922
    0.929 1.144 1.169
    1.056 1.107 0.965
    1.038 1.321 1.133
    1.089 1.305 1.732
    1.09  1.195 1.021
    1.083 1.39  1.131
    1.035 0.928 1.006
    1.176 1.715 1.908
];

mean(data)
cov(data)
```

求解最优化投资模型的代码为:

```
min = 0.0108 * a * a + 2 * 0.0124 * a * b + 2 * 0.0131 * a * c + 0.0584 * b * b + 2 * 0.0554 *
     b * c + 0.0942 * c * c;
a + b + c = 1;
1.0891 * a + 1.2137 * b + 1.2346 * c >= 1.15;
```

加入了无风险投资项目之后的投资模型代码为:

```
min = 0.0108 * a * a + 2 * 0.0124 * a * b + 2 * 0.0131 * a * c + 0.0584 * b * b + 2 * 0.0554 *
     b * c + 0.0942 * c * c;
a + b + c = 1;
1.0891 * a + 1.2137 * b + 1.2346 * c >= 1.15;
```

进行换手操作的最优解模型代码如下:

```
min = 0.0108 * a * a + 2 * 0.0124 * a * b + 2 * 0.0131 * a * c + 0.0584 * b * b + 2 * 0.0554 *
     b * c + 0.0942 * c * c;
a + b + c + 0.01 * (x_A + y_A + x_B + y_B + x_C + y_C) = 1;
0.5 + x_A - y_A = a;
0.35 + x_B - y_B = b;
0.15 + x_C - y_C = c;
1.0891 * a + 1.2137 * b + 1.2346 * c >= 1.15;
```

2.3.4 计算结果与分析

计算结果 计算得到的期望值为:

$$(ES_A, ES_B, ES_C) = (1.891, 1.2137, 1.2346)$$

协方差矩阵为:

$$V = \begin{bmatrix} 0.0108 & 0.0124 & 0.0131 \\ 0.0124 & 0.0584 & 0.0554 \\ 0.0131 & 0.0554 & 0.0942 \end{bmatrix} \tag{1}$$

根据上述的期望值和协方差矩阵计算得到的最优投资方案为:

$$a = 0.53, \quad b = 0.36, \quad c = 0.11$$

相应的风险最小值为 0.022。

第 (1) 问：考虑到年收益不可能超过期望收益最大的股票，这支股票可以看出是股票 C，对应的最大期望收益为 23.46%。通过不断求解和绘制各个股票的份额，最终画出各个股票购买份额随期望年收益率的变化图 1，以及风险随期望年收益率的变化图 2。

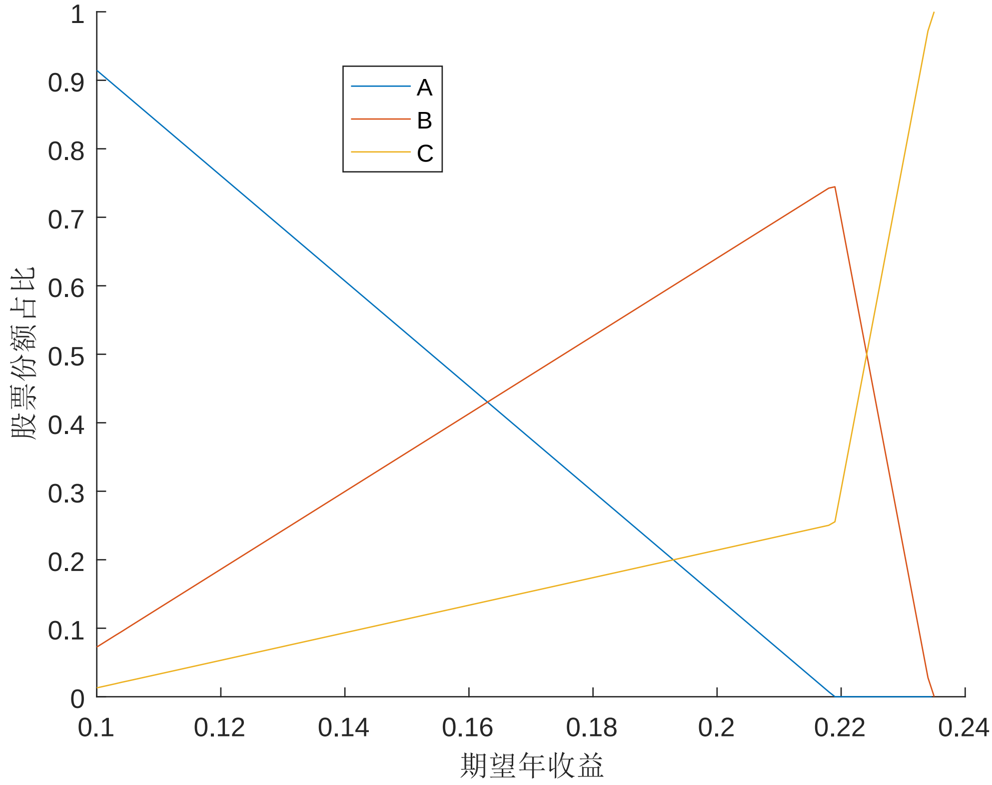

图 1: 购买份额随期望年收益率的变化图

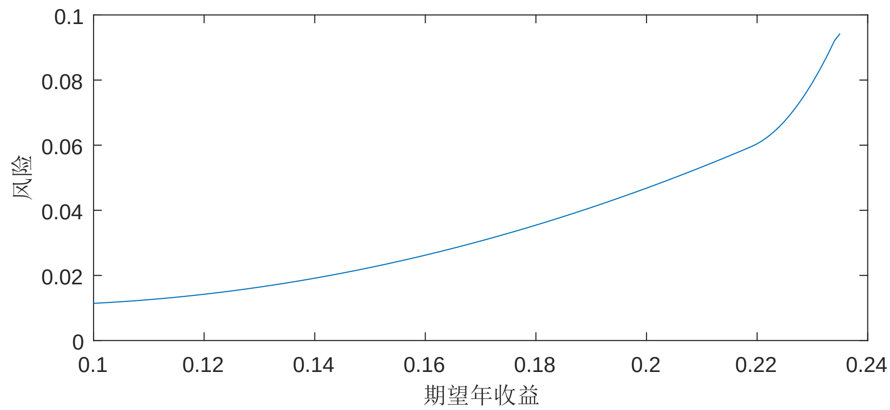

图 2: 风险随期望年收益率的变化图

可以看出，随着要求的期望年收益不断上升，对于股票 A 的购买应该逐步减少，当期望达到 22% 左右时应该完全不够买股票 A，最终随着期望年收益的进一步上升，全部都应该购

买股票 C。根据风险图能够看出，随着期望收益的增高，其风险也越来愈高，这符合现实生活的预期，收益越大，风险越大。投资需谨慎。

第 (2) 问：如果增加了国库券，LINGO 的求解的最优投资方案为：

$$a = 0.087, \quad b = 0.43, \quad c = 0.14, \quad d = 0.34$$

相应的风险最小值为 0.021。相比不进行风险投资最小的风险值变小了。

对于第 (3) 问的新模型，LINGO 求解如下：

$$x_A = 0.0266, \quad y_A = 0$$
$$x_B = 0, \quad y_B = 0$$
$$x_C = 0, \quad y_C = 0.0271$$

相应的风险最小值为 0.023。

问题解答 当期望年收益率达到 15% 的时候，应该向 A 股票投资 53%，向 B 股票投资 36%，向 C 股票投资 11%。

当期望年利率在 10% 到 100% 变化时，投资组合和相应的风险变化如图 1和图 2所示。相应的分析在上述章节。

如果考虑购买无风险的投资，则应该向 A 股票投资 9%，向 B 股票投资 43%，向 C 股票投资 14%，向无风险投资 34%。

如果需要进行换手，则考虑买入 A 股票 2.66%，卖出 C 股票 2.71%（总额占比，即最终持有的 A 股票为 52.66%，B 股票为 35%，C 股票为 12.29%），能够满足最优解要求。

总结下来，本题告诉我们，期望越大，风险越高，投资的时候应该谨慎考虑可能发生的各种问题，从历史数据学习经验，并利用数学模型进行合适求解，才是生财之道。

3 收获与建议

通过这次的实验，我学会了 LINGO 软件的基本使用和编程技巧，并对非线性规划有了更深的理解。希望在之后的课堂上老师能够当堂进行相关的技巧演示并给出题目的分步解答。