

数论2006. 6

1. 已知 n 为正整数, 证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}$$

不是整数。

2. 给定 $f_0=1, f_1=1, f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, (n \geq 2)$, 解下面的同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{f_n} \\ x \equiv 3 \pmod{f_{n+1}} \end{cases}$$

3. (a) 证明:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

- (b) 计算:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n k^3$$

- 4.a) p_i 为奇素数, 试证明: $N = (p_1 p_2 \dots p_r)^2 - 2$ 必含有 $8k-1$ 的素因子

b) 证明: 存在无穷多个形如 $8k-1$ 的素数

5. (a) 证明3 是50 的一个原根。

- (b) 解同余方程:

$$7x^4 \equiv 37 \pmod{50}$$

6. a) 计算 $\left(\frac{647}{1311} \right)$

- b) 设 p 为素数, 且满足 $p \equiv 1 \pmod{6}$, 求 $\left(\frac{-3}{p} \right)$ 的值