

清华大学实验报告

系别 汽轮系 班号 汽33 姓名 贾星衡 (同组姓名: 8)

作实验日期 2014年10月29日 学号: 2013010854 教师评定:

实验名称: 三线摆和扭摆

一、实验目的

1. 加深对转动惯量概念和平行轴定理等的理解
2. 了解用三线摆和扭摆测转动惯量的原理和方法
3. 学习中子天平、游标高度尺和多功能数字测量仪等仪器的使用, 掌握质量和周期等量的测量方法。

二、实验原理

1. 转动惯量 J

① 定义: $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ 对于质量连续的物体 $J = \int r^2 dm$.

② 一些对称性较高规则物体的 J .

球体: $J = \frac{1}{10} m D^2$ 圆柱体 $J = \frac{1}{8} m D^2$ 同心环 $J = \frac{1}{8} m (D_1^2 + D_2^2)$

③ 平行轴定理 $J_x = J + m d^2$

2. 三线摆测 J

① 原理: $J = \frac{m g R r}{4 \pi^2 H} T^2$

② 条件: 三线等长且很长, 上下摆盘水平, 摆角很小.

③ 空摆盘 J_0 可测, 加重物后 J 可测, 则被测物转动惯量为: $J - J_0$.

3. 扭摆法测 J

注: $\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta t_0}{t T_0} \leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{\Delta m_0}{m_0}, \frac{\Delta r}{r}, \frac{\Delta R}{R}, \frac{\Delta H}{H} \right\}_{\max}$
 $\Delta H = \sqrt{2} \times 0.02$.

① $J = \frac{K}{4 \pi^2} T^2$

② 用转动惯量 J 已知的物体, 测量其放到下摆盘后的转动周期下来标定 K .

$$J_0 = \frac{K}{4 \pi^2} T_0^2 \quad J_1 + J_0 = \frac{K}{4 \pi^2} T_1^2 \Rightarrow K = \frac{4 \pi^2}{T_1^2 - T_0^2} J_1$$

$J_0 = \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} J_1$ 则 J 可求, 其它物体 J 可测.

③ 剪切模量 $G = \frac{32 K l}{\pi d^4}$

清华大学实验报告

系别 汽轮 班号 汽33 姓名 贾景衡 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014年10月29日 学号: 2013010854 教师评定: _____

三. 实验任务

1. 用三线摆测定圆盘对中心轴的转动惯量和大钢球对质心轴的转动惯量。要求测得的大钢球的转动惯量与理论计算值 $J = \frac{2}{5}mr^2$ 之间的相对误差不大于 5%。
2. 用三线摆验证平行轴定理。
3. 用扭摆测定三爪盘的转动惯量和切变模量。

四. 实验仪器

1. 三线摆和扭摆主体仪器, 了解各部件及旋钮功能。
2. 被测元件 (小球、圆环)。
3. 多功能计数器 (测 T), $\Delta_{\text{仪}} = 10 \text{ ms}$ 。
4. 天平 (测 m), $\Delta_{\text{仪}} = 0.05 \text{ g}$ 。
5. 50 分度游标高度尺 (测 H, Δ), $\Delta_{\text{仪}} = 0.02 \text{ mm}$ 。
6. 50 分度游标尺 (测直径), $\Delta_{\text{仪}} = 0.02 \text{ mm}$ 。
7. 千分尺 (用 24 组测悬丝直径), $\Delta_{\text{仪}} = 0.004 \text{ mm}$ 。
8. 水准泡 (仪器调平)。

五. 注意事项

1. 加重物后需重测摆高 H。为避免钢球不圆, 需多测几次直径。
2. 合理选择摆动次数 n, 以减少分到每个周期的仪器误差。
3. 6 次测量以消除随机误差。
4. 小角度摆动, 且水平面内无晃动。
5. 按顺序测扭摆实验的 20T、20T。根据小环 J, 求 K (得 G), 再测大环的 J 并与理论值比较。
6. 测钢丝直径用样品, 防止扭摆丝弯曲。

清华大学实验报告

系别 汽车系 班号 汽33 姓名 贾晨衡 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014年10月29日

教师评定: _____

实验数据整理

1. 三棱摆实验

① 测量 J_0

$$m_0 = 15.00 \text{ g} \quad R = 34.22 \text{ mm} \quad r = 14.70 \text{ mm} \quad H_0 = 414.82 \text{ mm} \quad T_0 = 1.387 \text{ s}$$

② 测量大球的转动惯量 J_1

$$m_1 = m_{\text{大球}} = 110.71 \text{ g} \quad d_1 = 30.00 \text{ mm} \quad H_1 = 415.76 \text{ mm} \quad T_1 = 0.981 \text{ s}$$

③ 验证平行轴定理

$$R_1 = 21.84 \text{ mm}$$

$$m_2 = 3m_{\text{小球}} = 95.67 \text{ g} \quad d_2 = 19.84 \text{ mm} \quad H_2 = 415.70 \text{ mm} \quad T_2 = 1.338 \text{ s}$$

2. 扭摆实验

$$L = 323.54 \text{ mm} \quad T_0 = 1.013 \text{ s} \quad d_0 = d_{\text{丝}} = d_{\text{外}} - d_{\text{内}} = 0.483 - (-0.030) = 0.513 \text{ mm}$$

① 测量大圆环的转动惯量 J_3

$$d_{\text{内}_3} = 71.78 \text{ mm} \quad d_{\text{外}_3} = 84.08 \text{ mm} \quad m_3 = m_{\text{大环}} = 101.31 \text{ g} \quad T_3 = 2.109 \text{ s}$$

② 测量小圆环的转动惯量 J_4

$$d_{\text{内}_4} = 63.84 \text{ mm} \quad d_{\text{外}_4} = 71.78 \text{ mm} \quad m_4 = m_{\text{小环}} = 61.20 \text{ g} \quad T_4 = 1.606 \text{ s}$$

清华大学实验报告

系别 汽机系 班号 汽33 姓名 贾星衡 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014 年 10 月 29 日

教师评定: _____

六. 实验数据处理

1. 三线摆实验.

① 测量周期数 n_0 的确定.

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = \frac{1}{1500} \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{735} \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{1711} \quad \frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{20649}$$

粗测 T_0 . 先设为测 10 个周期, 得到 $T_0 = 1.38$ $\Delta T_0 = 10 \text{ms} = 0.01 \text{s}$.

$$\text{所以 } \frac{\Delta T_0}{n_0 T_0} \leq \frac{1}{3} \frac{\Delta R}{R} \Rightarrow n_0 = 32.02$$

为方便计算, 取 $n_0 = 35$.

② 计算 J_0 的不确定度 ΔJ_0 .

对计算式 $J_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H_0} T_0^2$ 两边取对数得.

$$\ln J_0 = \ln m_0 + \ln R + \ln r - \ln H_0 + 2 \ln T_0 + \ln \frac{g}{4\pi^2}$$

$$\frac{\partial \ln J_0}{\partial m_0} = \frac{1}{m_0}; \quad \frac{\partial \ln J_0}{\partial R} = \frac{1}{R}; \quad \frac{\partial \ln J_0}{\partial r} = \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial \ln J_0}{\partial H_0} = -\frac{1}{H_0}; \quad \frac{\partial \ln J_0}{\partial T_0} = \frac{2}{T_0}$$

$$\text{所以 } \frac{\Delta J_0}{J_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_0}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta H_0}{H_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_0}{T_0}\right)^2} \quad \text{注: } \Delta H = \sqrt{2} \Delta H_{\text{fix}}$$

$$\text{故 } \Delta J_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H_0} T_0^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta m_0}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta H_0}{H_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_0}{T_0}\right)^2} \approx 6 \times 10^{-7}$$

所以 J_0 的取值应取到小数点后第 7 位, 与不确定度保持一致.

③ 计算 J_0 .

$$\Delta T_0 = \frac{\Delta n_0 T_0}{n_0}$$

$$J_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H_0} T_0^2 = (4.34 \pm 0.06) \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{2.575 \text{ s}}{35}\right)^2 + \Delta T_{\text{fix}}^2}}{n_0}$$

④ 计算大钢球转动的转动惯量 J_1 , 并得出与理论计算值之间的相对误差.

清华大学实验报告

系别 汽车系 班号 汽33 姓名 贾晨博 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014年10月29日

教师评定: _____

$$J_1 = J - J_0 = \frac{(m_0 + m_1)gRr}{4\pi^2 H_1} T_1^2 - J_0 = 5.37 \times 10^{-5} - 4.34 \times 10^{-5} = 1.03 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

而 J_1 的理论计算值 $J_1' = \frac{1}{10} m_1 d_1^2 = 9.96 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

所以相对误差为 $\left| \frac{\Delta J_1}{J_1'} \right| = \left| \frac{1.03 \times 10^{-5} - 9.96 \times 10^{-6}}{9.96 \times 10^{-6}} \right| = 3.41\% < 5\%$

⑤ 验证平行轴定理.

$$J_2 = J - J_0 = \frac{(m_0 + m_2)gRr}{4\pi^2 H_2} T_2^2 - J_0 = 9.18 \times 10^{-5} - 4.34 \times 10^{-5} = 4.84 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

用平行轴定理计算出 J_2 理论值 $J_2' = \frac{1}{10} m_2 d_2^2 + m_2 R_1^2 = 4.94 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

所以相对误差为 $\left| \frac{J_2 - J_2'}{J_2'} \right| = \left| \frac{4.84 \times 10^{-5} - 4.94 \times 10^{-5}}{4.94 \times 10^{-5}} \right| = 2.02\%$

可见, 在误差允许范围内, 平行轴定理成立.

2. 扭摆实验.

① 计算三个卡盘的转动惯量 J_0 .

由实验原理知 $J_0 = \frac{T_0^2}{T_4^2 - T_0^2} J_4$ 因为 J_4 是小圆环的理论转动惯量值.

所以 $J_4 = \frac{1}{8} m_4 (d_{g2}^2 + d_{m2}^2) = 7.05 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

故 $J_0 = 4.66 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

② 计算扭转模量的不确定度.

$$K = \frac{4\pi^2}{T_4^2 - T_0^2} J_4$$

$$\frac{\partial K}{\partial T_4} = - \frac{8\pi^2 J_4 T_4}{(T_4^2 - T_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial T_0} = \frac{8\pi^2 J_4 T_0}{(T_4^2 - T_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial J_4} = \frac{4\pi^2}{T_4^2 - T_0^2}$$

清华大学实验报告

系别 汽车系 班号 汽33 姓名 贾星衡 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014年10月29日

教师评定: _____

$$\text{又 } J_4 = \frac{1}{8} m_4 (d_{\text{外}_2}^2 + d_{\text{内}_2}^2) \quad \text{所以 } \frac{\partial J_4}{\partial d_{\text{外}_2}} = \frac{m_4 d_{\text{外}_2}}{4}, \frac{\partial J_4}{\partial d_{\text{内}_2}} = \frac{m_4 d_{\text{内}_2}}{4}, \frac{\partial J_4}{\partial m_4} = \frac{d_{\text{外}_2}^2 + d_{\text{内}_2}^2}{8}$$

$$\text{故 } \Delta J_4 = \sqrt{\left(\frac{m_4 d_{\text{外}_2}}{4}\right)^2 \Delta d_{\text{外}_2}^2 + \left(\frac{m_4 d_{\text{内}_2}}{4}\right)^2 \Delta d_{\text{内}_2}^2 + \left(\frac{d_{\text{外}_2}^2 + d_{\text{内}_2}^2}{8}\right)^2 \Delta m_4^2} \approx 6 \times 10^{-8}$$

所以 J_4 应取到小数点后第8位, 与不确定度保持一致。①的取值是合理的。

$$\text{进而 } \Delta K = \sqrt{\left[-\frac{8\pi^2 J_4 T_4}{(T_4^2 - T_0^2)^2}\right]^2 (\Delta T_4)^2 + \left[\frac{8\pi^2 J_4 T_0}{(T_4^2 - T_0^2)^2}\right]^2 (\Delta T_0)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T_4^2 - T_0^2}\right)^2 \Delta J_4^2} \approx 4 \times 10^{-5}$$

所以 K 应取到小数点后第5位, 与不确定度保持一致。

$$\text{所以 } K = (1.79 \pm 0.04) \times 10^{-3} (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$$

③ 计算切变模量 G 。

$$G = \frac{32KL}{\pi d^4} = \frac{32 \times 1.79 \times 10^{-3} \times 0.32354}{\pi \times (0.51 \times 10^{-3})^4} = 8.52 \times 10^{10} (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$$

Pa.

④ 计算大圆环的转动惯量, 并与理论值比较。

$$\text{因为 } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{K}}, \quad T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_3}{K}}$$

$$\text{所以 } \frac{T_0}{T_3} = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 + J_3}} \Rightarrow J_3 = \frac{T_3^2 - T_0^2}{T_0^2} J_0 = 1.5552 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_3 \text{ 的理论值 } J_3' = \frac{1}{8} m_3 (d_{\text{外}_1}^2 + d_{\text{内}_1}^2) = 1.5477 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{所以 相对误差为 } \left| \frac{J_3 - J_3'}{J_3'} \right| = \left| \frac{1.5552 \times 10^{-4} - 1.5477 \times 10^{-4}}{1.5477 \times 10^{-4}} \right| = 0.48\%$$

七、思考题

1. 若三线摆在摆动过程中受到空气阻尼, 它的周期不会随时间而变。

因为当受到空气阻尼时, 振动方程变为 $\theta = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta)$ (解常微分方程可知)

无阻尼时, $\theta = A' \sin(\omega t + \beta')$ 阻尼只是影响了振幅 $A e^{-\alpha t}$, 对 ω 无影响。

所以下 $\frac{2\pi}{\omega}$ 也无影响。

清华大学实验报告

系别 汽车系 班号 汽33 姓名 贾星衡 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014 年 10 月 29 日

教师评定: _____

2. 在三线摆下圆盘上加上待测物体后的摆动周期不一定比不加时的周期大
由实验数据. 空载时 $T_0 = 1.38 \text{ s}$. 放上小球后 $T_1 = 0.981 < T_0$.

放上三个小球后 $T_2 = 1.338 < T_0$.

3. $W = W_k + W_p = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 + m_0 g \cdot h$.

$\omega = \dot{\theta}$. $h = \frac{Rr\theta^2}{2H}$. 所以 $W = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_0 g R r}{H} \theta^2$

忽略空气阻尼. 则 W 是一个常数.

所以对等式两边求导得.

$J_0 \ddot{\theta} + \frac{m_0 g R r}{H} \theta \cdot \dot{\theta} = 0$. 约去 $\dot{\theta}$ 得.

$\ddot{\theta} = - \frac{m_0 g R r}{J_0 H} \theta$ 这就是运动的微分方程.

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 H}{m_0 g R r}} \Rightarrow J_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H} T_0^2$. 即为转动惯量公式 (1).

八、实验总结.

做这一实验总的来说有两点收获:

1. 当实验过程中某一测量值的测量误差可控时, 要^选得~~使~~取得合适的控制量使得这一测量值对总实验结果的影响最小. 例如, 控制量 n (周期数) 的选取.

2. 在实验需要测量的物理量庞杂繁多时, 要时刻保持清晰的头脑, 弄清每个物理量与最终所求的间接测量值有什么关系, 弄清理论值与实验值的关系, 这样才能对整个实验有一个清晰的把握.

附: 原始实验数据.

清华大学实验报告

系别 汽车系 班号 汽33 姓名 贾星衡 (同组姓名: _____)

作实验日期 2014年 10月 29日

教师评定: _____

实验数据

1. 三线摆实验. ① 间接测量 J .

摆盘编号	摆盘质量 $m(g)$	摆盘半径 $R(mm)$	上圆盘半径 $r(mm)$	$R_1(mm)$	
13	75.00	34.22	14.70	21.84	
	$H_{上0} = 500.78mm$	$H_{下0} = 85.96mm$	$H_0 = H_{上0} - H_{下0} = 414.82mm$	$\eta_0 = 35$	
1	2	3	4	5	6

T_0	48.552	48.552	48.552	48.552	48.461	48.522
-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

② 测量大轮的 $J = J_1 - J_0$ $m_{大轮} = 110.71g$ $d_1 = 30mm$ 30.00 .

$H_{上1} = 500.76mm$	$H_{下1} = 85.00mm$	$H_1 = H_{上1} - H_{下1} = 415.76mm$	$\eta_1 = 35$		
1	2	3	4	5	6

T_1	34.281	34.391	34.328	34.294	34.309	34.337
-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

③ 验证平行轴定理. $m_{J环} = 31.89g$ $d_2 = 19.84mm$.

$H_{上2} = 500.70mm$	$H_{下2} = 85.00$	$H_2 = H_{上2} - H_{下2} = 415.70mm$	$\eta_2 = 20$		
1	2	3	4	5	6

T_2	26.745	26.760	26.787	26.751	26.766	26.759
-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

2. 扭摆实验.

1.	1	2	3	4	5	6.
----	---	---	---	---	---	----

T_0	20.265	20.261	20.255	20.254	20.249	20.249
-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

$L_{上} = 500.22mm$ $L_{下} = 176.68mm$ $L = L_{上} - L_{下} = 323.54mm$.

2. 测量大圆环 J_1 $d_{内} = 71.78mm$ $d_{外} = 84.08mm$ $m_{大环} = 101.31g$.

1	2	3	4	5	6	
T_1	42.223	42.176	42.083	42.168	42.199	42.187

3. 测量小圆环 J_2 $d_{内} = 63.84mm$ $d_{外} = 71.78mm$ $m_{小环} = 61.20g$.

1	2	3	4	5	6.	
T_2	32.133	32.192	32.163	32.082	32.048	32.158

钢丝直径测量.

读数	前1	前2	前3	后1	后2	后3
零位	-0.026	-0.031	-0.030	-0.032	-0.029	-0.030
	1	2	3	4	5	6
钢丝	0.488	0.484	0.482	0.482	0.487	0.475

$$J_0 = 4.34 \times 10^{-5} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\frac{0.0005}{12.101}$$

$$.4 = 1$$

$$0.0005$$

$$1.00 + 0.0005 = 1.0005$$