第三节

定积分的概念及性质

积分学 $\begin{cases} \text{不定积分} \\ \text{定积分} \end{cases}$

一、定积分问题举例

二、 定积分的定义

三、 定积分的性质

曲边梯形的面积

求曲边梯形的面积即

求 $y=f(x)$ 下的面积（$y=f(x)$）

若“梯形”很窄，可近似地用矩形面积代替

在不很窄时怎么办?

—— 分成很窄的小曲边梯形，
然后用矩形面积代后求和。

—— **以直代曲**

（1）**分割** 在$[a,b]$间插入 n-1 个分点:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$ 作平行于y轴直线

$$x = x_i, i = 1,2,\cdots,n-1$$

将曲边梯形分成n个小曲边梯形。

（2）**取近似** 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ΔS_i，

用矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 来近似小曲边梯形面积 ΔS_i 。

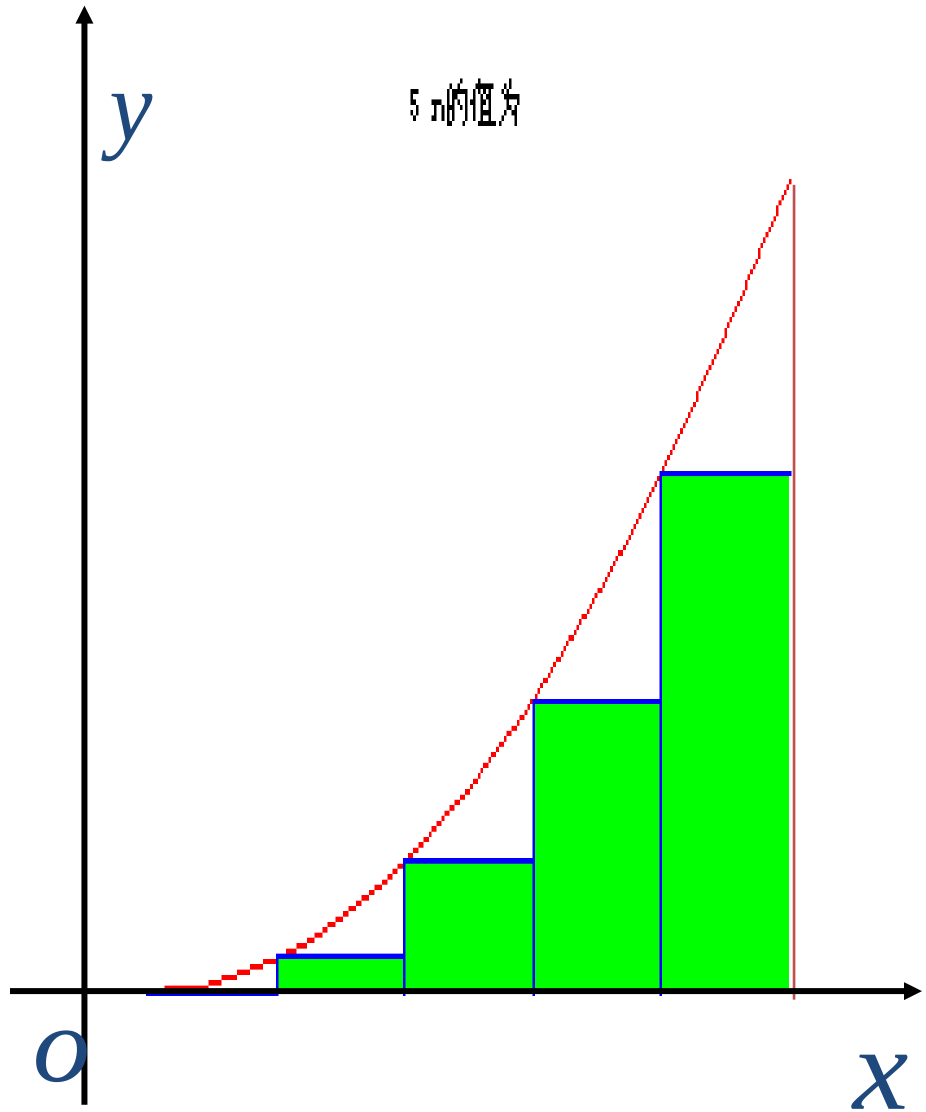
（3）**求和** 把这些矩形面积相加 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

作为整个曲边梯形面积S的近似值。

（4）取极限

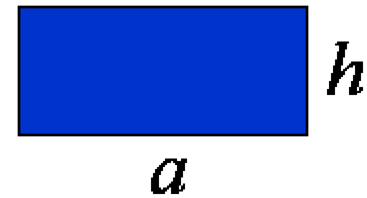
有理由相信，分点越来越密时，即分割越来越细时，矩形面积和的极限即为曲边梯形的面积。

所以，为了求曲边梯形的面积，就要研究这个特殊和式的极限，这就是定积分。

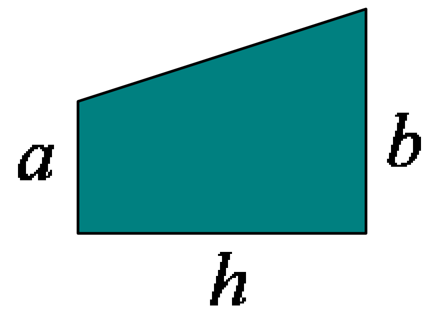


一、定积分问题举例

矩形面积 $= ah$



梯形面积 $= \frac{h}{2}(a+b)$



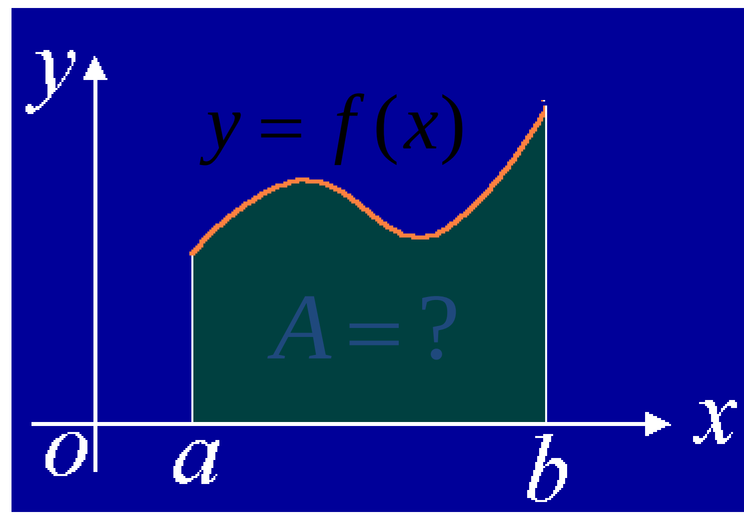
1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y=f(x)\quad (f(x)\ge 0)$$

及 x 轴, 以及两直线 $x=a, x=b$

所围成，求其面积 A .



解决步骤：

1) 大化小. 在区间 $[a\,,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

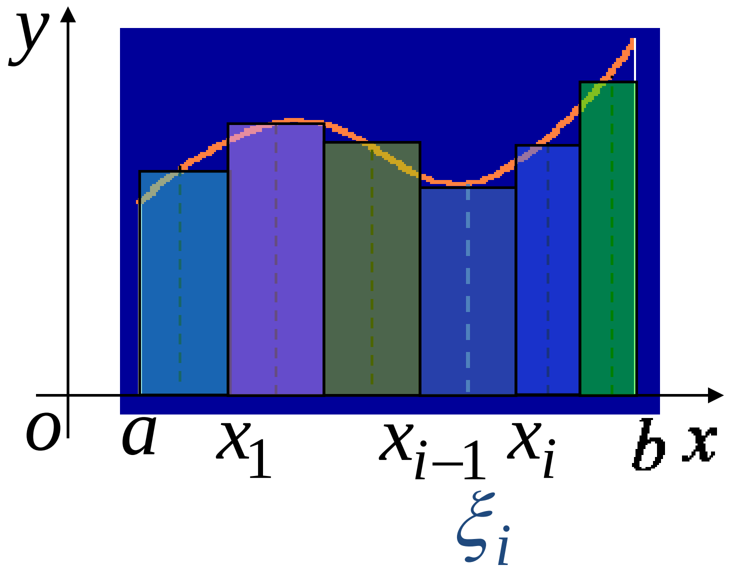
2) 常代变. 在第 i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}\,,x_i]$

作以 $[x_{i-1}\,,x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$

为高的小矩形，并以此小

梯形面积近似代替相应

窄曲边梯形面积 ΔA_i，得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,,\ i = 1,2,\cdots,n)$$

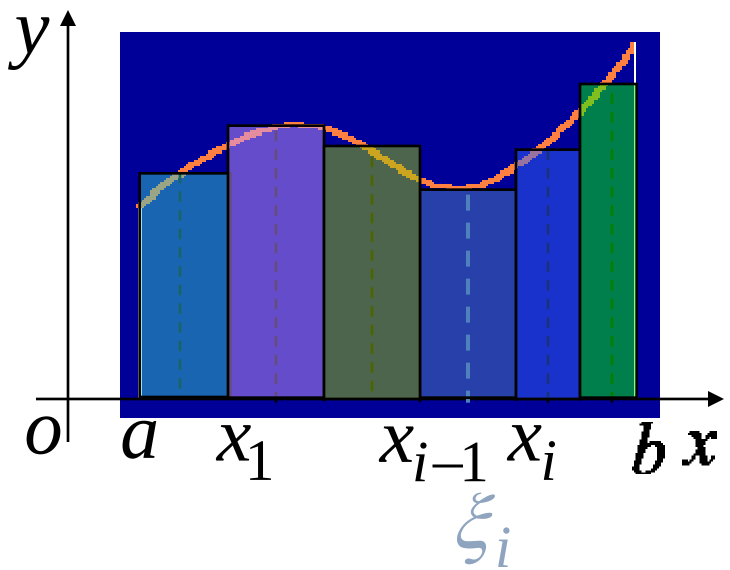
3) 近似和.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) 取极限. 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$, 且 $v(t) \geq 0$, 求在运动时间内物体所经过的路程 s.

解决步骤:

1) 大化小. 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点, 将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 在每个小段上物体经过的路程为 Δs_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$

2) 常代变. 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 以 $v(\xi_i)$ 代替变速, 得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 近似和.

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

4) 取极限.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i)$$

上述两个问题的**共性**:

- 解决问题的方法步骤相同：

“大化小，常代变，近似和，取极限”

- 所求量极限结构式相同: 特殊乘积和式的极限

二、定积分定义

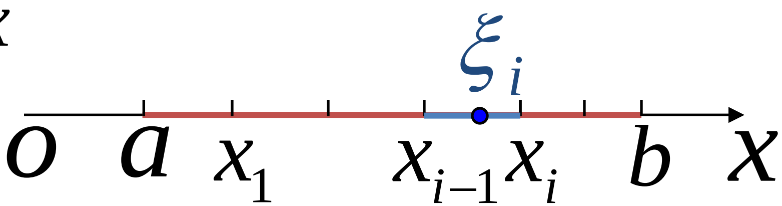
设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若对 $[a,b]$ 的任一种分法

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，任取

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$，只要 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**.

积分上限

$[a,b]$ 称为积分区间

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

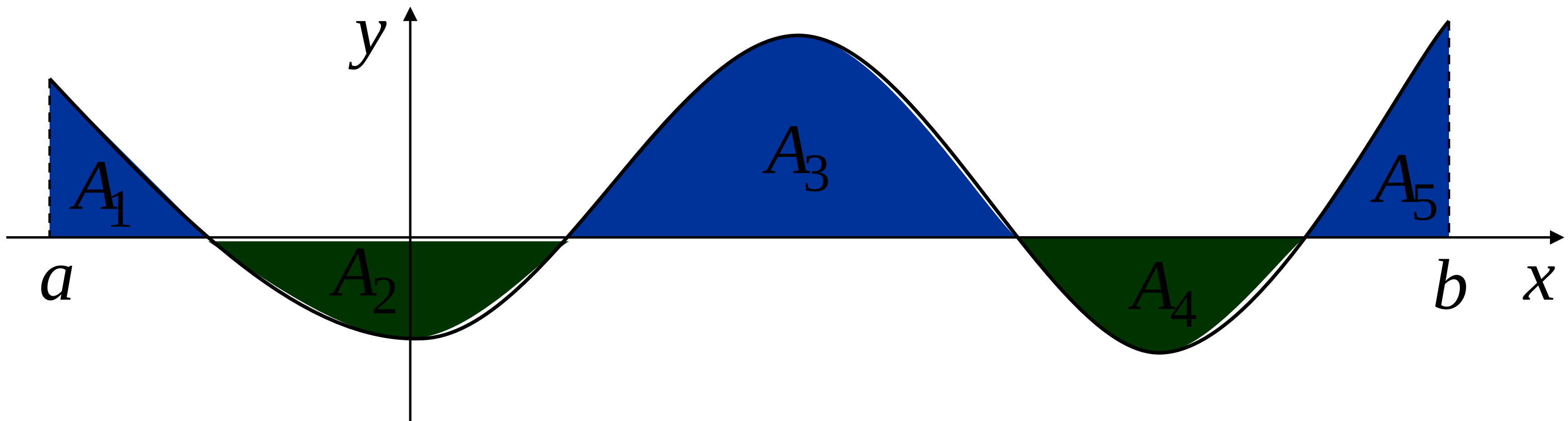
定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

定积分的几何意义:

$f(x)>0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x)<0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

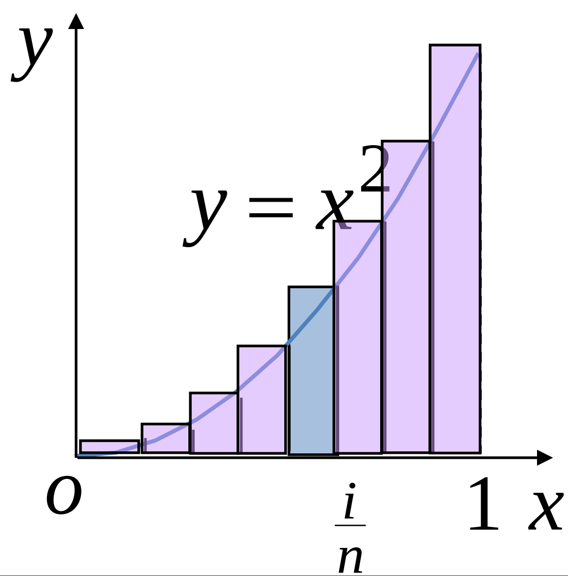
可积的充分条件:

定理1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

定理2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点

$\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. (证明略)

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.



解: 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$

取 $\xi_i=\frac{i}{n}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

则 $f(\xi_i)\Delta x_i=\xi_i^2\Delta x_i=\dfrac{i^2}{n^3}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

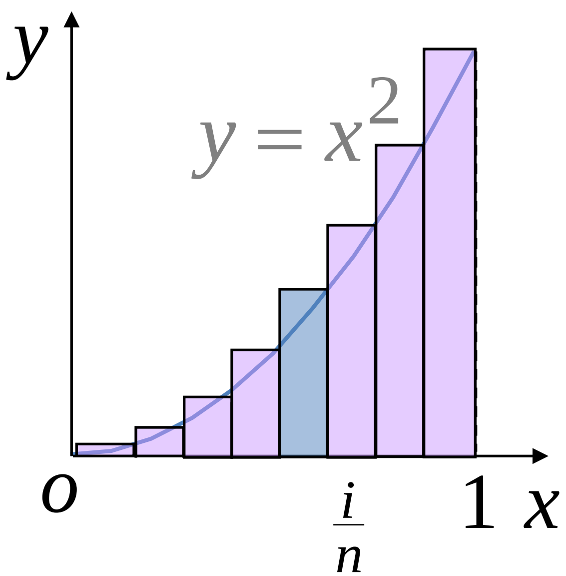
注

$$= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$\therefore \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{3}$$



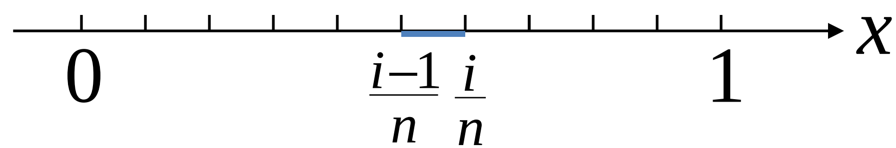
例2. 用定积分表示下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\frac{i}{n}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\frac{i}{n}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

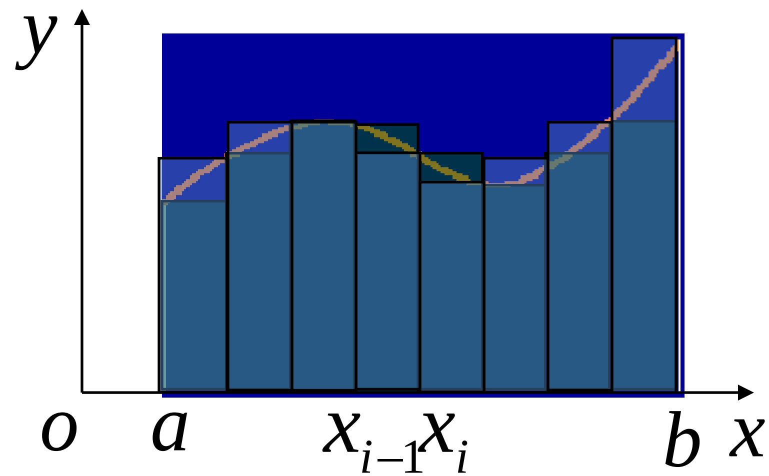
$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

说明： 设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 存在，根据定积分定义可得如下近似计算方法：

将 $[a\,,\,b]$ 分成 n 等份：$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，

$$x_i=a+i\cdot\Delta x\ (i=0,1,\cdots,n)$$

记 $f(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$

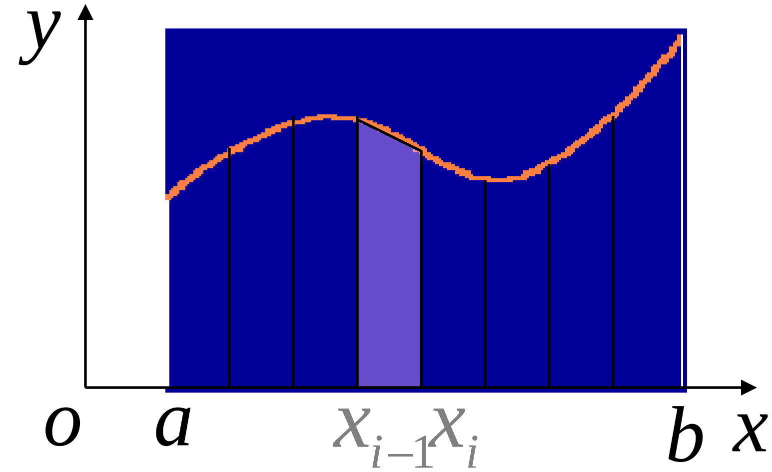


1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx y_0\Delta x+y_1\Delta x+\cdots+y_{n-1}\Delta x$

$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$ （左矩形公式）

2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx y_1\Delta x+y_2\Delta x+\cdots+y_n\Delta x$

$$=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$ （右矩形公式）



3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}[y_{i-1}+y_i]\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+(y_1+\cdots+y_{n-1})\right]$$ (梯形公式)

为了提高精度，还可建立更好的求积公式，例如辛普森公式，复化求积公式等，并有现成的数学软件可供调用.

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数)

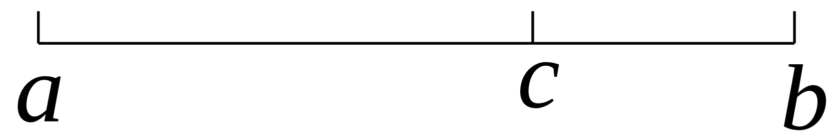
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

证: 左端 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \text{右端}$$

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

证: 当 $a < c < b$ 时,



因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,

所以在分割区间时, 可以永远取 c 为分点, 于是

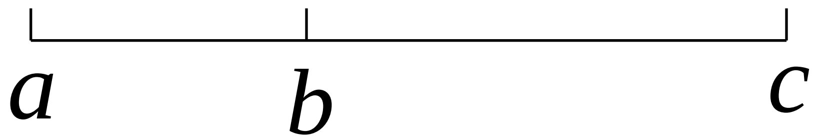
$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Big\downarrow \quad 令\ \lambda \to 0$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

当 a, b, c 的相对位置任意时，例如 $a<b<c$，

则有



$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

6. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

证: $\because \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

推论1. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

推论2. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b)$

证: $\because \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$$\therefore \quad -\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b)$$

例3. 试证: $1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$.

证: 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

$$\therefore \quad f(\frac{\pi}{2}^-) < f(x) < f(0^+)$$

即 $$\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x$$

即 $$1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$$

8. 积分中值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m,M,

则由**性质7** 可得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

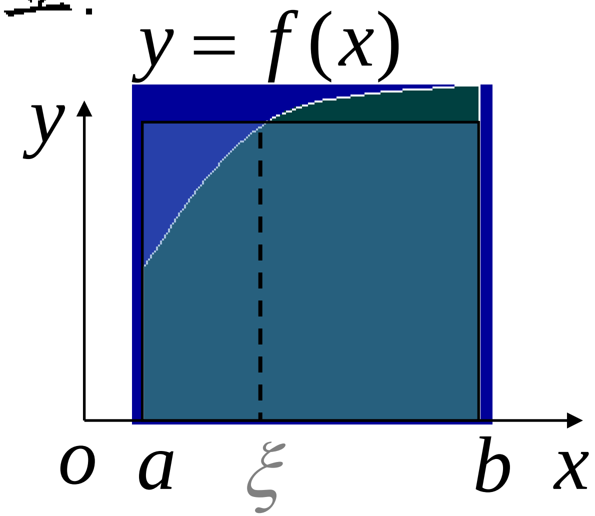
根据闭区间上连续函数介值定理, 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此定理成立.

说明:

- 积分中值定理对 $a<b$ 或 $a>b$ 都成立.
- 可把 $$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=f(\xi)$$



理解为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值. 因

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.

例4. 计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

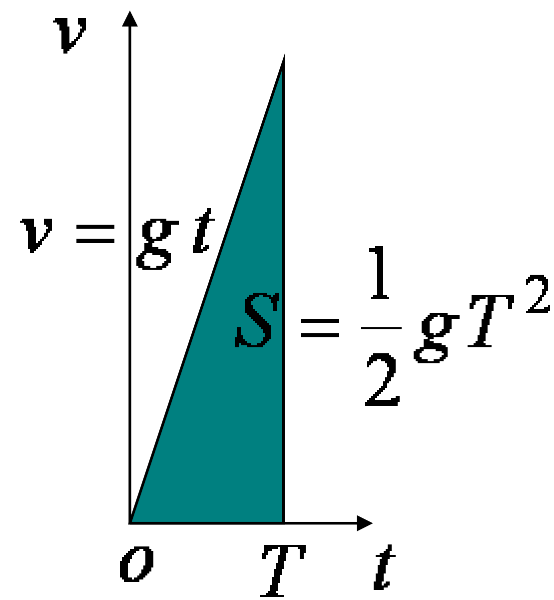
解: 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\bar{v} = \frac{1}{T-0}\int_0^T gt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}gT^2 = \frac{gT}{2}$$



内容小结

1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

$\Longrightarrow$ 近似计算 $\begin{cases} \text{矩形公式} \\ \text{梯形公式} \end{cases}$

2. 定积分的性质

3. 积分中值定理

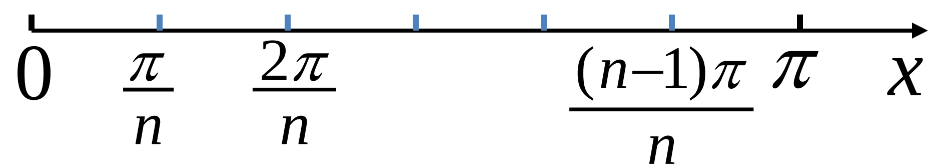
$\Longrightarrow$ 连续函数在区间上的平均值公式

思考与练习

1. 用定积分表示下述极限：

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

解： $$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$



或 $$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^{1}\sin\pi x\,\mathrm{d}x$$

思考：如何用定积分表示下述极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right]$$

提示：
$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

$$\boxed{-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

极限为 0 !

作业

P173　18 (1) , (4)