线性代数 B 期末试题－2016 年秋

第一题（20 分）： 令$A \in M_n[\mathbb{R}]$为一可逆矩阵，$u, v \in \mathbb{R}^n$，定义分块矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A & u \\ v' & 0 \end{bmatrix}$$

1) （10 分）求u, v的一个充分必要条件使得矩阵C可逆。
2) （10 分）在 1)的条件满足的情况下求C^{-1}。

第二题（20 分）：

1) （10 分）求a的取值范围，使得矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$
正定。
2) （10 分）判断下列矩阵是否正定（给出判断依据）：
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第三题（15 分）： 令矩阵$A, B \in M_n(\mathbb{R})$。
1) （5 分）设A是对称正定矩阵，B是对称矩阵，证明存在可逆矩阵P使得$P'AP = I$且$P'BP$为对角矩阵。
2) （10 分）设A和B均为对称半正定矩阵，证明存在可逆矩阵P使得$P'AP$和$P'BP$为对角矩阵。如果B仅是对称矩阵，同样的结论是否成立？如果成立，给出证明，否则给出一个反例。

第四题（15 分）： 令$L＝D^2 + 2D + 1$为线性空间 $V =< 1, sin(x), cos(x) - sin(x) >$上的线性变换，求其在基$\{1, \sin(x), \cos(x) - \sin(x)\}$下的矩阵。

第五题（10 分）： 证明任何一个秩为r的矩阵总可以写成r个秩为 1 的矩阵之和。

第六题（10 分）： 在$\mathbb{R}^2$中，对于任意$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$，定义二元函数

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + 4 b_1 b_2$$

求证(α, β)是$\mathbb{R}^2$的一个内积，并求$\mathbb{R}^2$关于该内积的一个标准正交基。

第七题（10 分）： 对任一矩阵C，我们定义$range(C)$为矩阵C列向量组生成的线性空间，定义$ker(C)$为齐次线性方程组$Cx = 0$的解空间。$\mathbb{R}^m$是标准内积空间。

1) （**5 分**）令$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，证明 $ker(A') \oplus range(A) = \mathbb{R}^m$。
2) （**5 分**）令矩阵$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$\beta \in range(A) \subset \mathbb{R}^m$，$\gamma \in \mathbb{R}^n$，$d \in \mathbb{R}$。证明下面的两个命题为等价命题：
   a. 线性方程组$Ax = \beta$的任何一个解x都满足$\gamma' x = d$。
   b. 存在一个向量$\alpha \in \mathbb{R}^m$，使得$\gamma = A'\alpha$，$d = \beta'\alpha$。