# 高等数学D

2011年期末试题

1. 设 $y = f(-x)$，则 $y' =$ （ D ）

A. $f'(x)$　B. $f'(-x)$　C. $-f'(x)$　D. $-f'(-x)$

掌握函数的和、差、商、积的求导法则、复合函数求导法则、反函数求导法则

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点（0,0）处

（ B ）

A. 连续　B. 偏导数存在　C. 极限存在　D. 可微

考察多元函数定义：

1.多元（两元）函数的极限，注意：所谓二重极限，指P(x,y)以任何方式区域P0时，f(x,y)都无限接近同一值。

2.多元（两元）函数的连续性 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

3.（用定义）证明偏导存在

4.多元函数可微的定义，注意书中提高的“必要条件”、“充分条件”。

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}{x^3} = \quad (\ C\ )$$

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

X→0，分子的积分趋于零。使用洛必达法则：

$(\arcsin x^2 * 2x)/(3x^2) = 2x^3/(3x^2) \to 0$

答案：A

洛必达法则、变限积分求导

4. $\int_a^x f'(2t)dt =$ （D ）

A. $2[f(x)-f(a)]$　　B. $f(2x)-f(2a)$

C. $2[f(2x)-f(2a)]$　　D. $\frac{1}{2}[f(2x)-f(2a)]$

易写出原函数，再代入积分上下限。

5. $\alpha(x)=\frac{1-x}{1+x}$， $\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当 $x\to 1$ 时，（A）

A. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量；　　B. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量；

C. $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量；　　D. $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小量.

考察概念，及简单的极限计算；
使用洛必达法可得 答案A

## 二．填空题：

1. 如果 $\dfrac{2\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int 2f(x)\dfrac{\sin x}{x}dx =$ ______

$$f(x)=\left(\frac{2\sin x}{x}\right)',\ \int 2f(x)\frac{\sin x}{x}dx=\int 2\left(\frac{2\sin x}{x}\right)'\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int 2\frac{\sin x}{x}d\left(\frac{2\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin x}{x}\right)^2+c$$

2. 设平面区域 D: $\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2; y \ge 0\right\}$, 则 $\iint\limits_D dxdy =$ ______

由二重积分知识知:

$\iint dxdy$ 表示区域D的面积(半圆区域)

S=π

3. $\int \frac{1}{e^x+1}dx =$ ________

换元 $e^x = t$

$$\int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{1+t}dt = \ln t - \ln(1+t) + C = x - \ln(1+e^x) + C$$

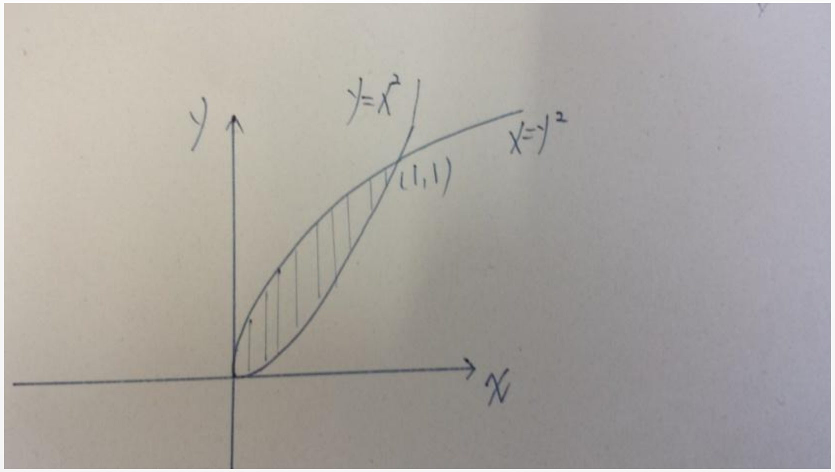
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{3}{x}\right) =$ ________

$$\sin\frac{3}{x} \sim \frac{3}{x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\frac{3}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+15}{5x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+15}{5x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{5x^2} = \frac{9}{5}$$

5. 设平面区域 D 是由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域，则 $\iint\limits_D \left(y+x^2\right)dxdy=$ ______

两曲线交点: (0,0)、(1,1)

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(y+x^2)dy=\frac{33}{140}$$



三.计算题

$$1.\quad \int \frac{3xdx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$u=\sqrt{1+x^2},u^2=1+x^2,2xdx=2udu,xdx=udu.$$

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(1+x^2)^3}}=3\int \frac{udu}{u+u^3}=3\int \frac{du}{1+u^2}=3\arctan u+C=3\arctan \sqrt{1+x^2}+C$$

2. $\int \frac{x^4}{(1-x^2)^3}dx$

$$\int \frac{x^4}{(1-x^2)^3}dx = \int \frac{x^3}{4} d\left[\frac{1}{(1-x^2)^2}\right] = \frac{x^3}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{3x^2}{(1-x^2)^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{4(1-x^2)^2} - \frac{3}{4}\int \frac{x}{2} d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{x^3}{4(1-x^2)^2} - \frac{3}{8}\frac{x}{(1-x^2)} + \frac{3}{8}\int \frac{1}{1-x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{4(1-x^2)^2} - \frac{3}{8}\frac{x}{(1-x^2)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

3. $\int_0^1 x \arctan x dx$

$$\int_0^1 x \arctan x dx = \int_0^1 \arctan x d\frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} d\arctan x$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}(\pi - 2)$$

4. 设平面图形 $D$ 由曲线 $xy=3$ 与直线 $x+y=4$ 所围成，求 $D$ 的面积，并求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所形成的体积。

解：　　曲线与直线交点（1, 3）和（3, 1）

$$S=\int_1^3\left(-x+4-\frac{3}{x}\right)dx$$

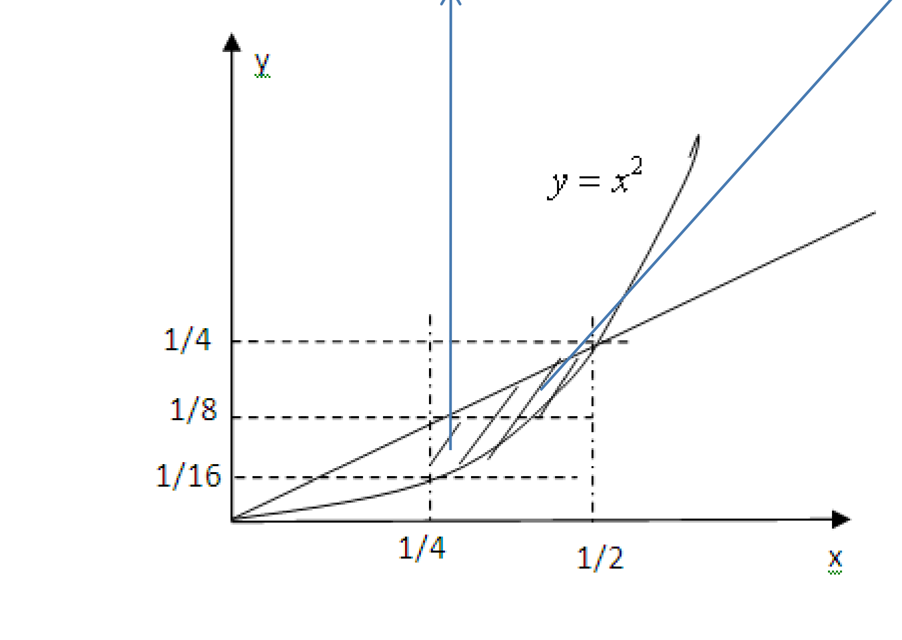
$$=-\frac{x^2}{2}+4x-3\ln x\Big|_1^3$$

$$=4-3\ln 3$$

$$V=\pi\int_1^3(4-x)^2dx-\pi\int_1^3\left(\frac{3}{x}\right)^2dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi$$

5. 求$I=\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{8}}dy\int_{\frac{1}{4}}^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{x}dx+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}dy\int_{2y}^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{x}dx$




$$I=\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{8}}dy\int_{\frac{1}{4}}^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{x}dx+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}dy\int_{2y}^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{x}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\frac{x}{2}}\sin\frac{y}{x}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}-x[\cos\frac{1}{2}-\cos x]dx$$

$$=-\left(\cos\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}x\cos xdx$$

$$=-\frac{3}{32}\cos\frac{1}{2}+x\sin x\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\cos x\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{29}{32}\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}$$

通过将两部分J积分区域D1,D2 合成整体D（阴影部分），改变积分顺序简化问题。

6. 试确定 $a,b,c$ 的值，使抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 满足：(1) 过点 $(0,0)$ 和（1, 1)；(2) 曲线弧是凸的；(3) 与 $x$ 轴所围的面积最小。

解： 由题，抛物线过点（0, 0） 和 （1, 1），曲线是凸的

则 c = 0, a+b = 1, 且 a<0

抛物线与 x 轴交点：(0, 0) 和 （-b/a, 0）

围成面积 S

$$S=\int_0^{-b/a}(ax^2+bx)dx$$

$$=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\Big|_0^{-b/a}$$

$$=\frac{b^3}{6a^2}$$

求 S（a, b）在条件 a+ b=1 下的最小值，由拉格朗日乘数法可得，当 S 最小时，

$a=-2$，$b=3$，$c=0$

# 四、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续的二阶导数，且 $f(0)=0$，试证：

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$$

具有连续的一阶导数。

0/0，洛必达

1. 证明： $x=0$， $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0);$$

$x\neq 0$， $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ .

因为 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$，

所以 $g(x)$ 具有连续的一阶导数。

考察函数连续定义

1） 求极限

2） 复合函数求导

3） 用定义证明连续性

2. 设函数在 $f(x)$ 在[0, 1]上连续且单调递减，证明对任意的 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx$.

2. 证明：

$$\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx - a(\int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx)$$

$$= (1-a)\int_0^a f(x)dx - a\int_a^1 f(x)dx$$

$$= a(1-a)f(\xi_1) - a(1-a)f(\xi_2) \quad \text{（积分中值定理）}$$

$$= a(1-a)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \ge 0 \qquad \left(\xi_1 \in [0,a], \xi_2 \in [a,1], f(\xi_1) \ge f(\xi_2)\right)$$