数学分析（III）2018-2019 秋季学期期中试题

1.（10 分）叙述关于无穷积分收敛性的 Abel 判别法和瑕积分收敛性的 Cauchy 准则。

2.（20 分） 选择题（单选）

(1) 设 $0 < a_n < \dfrac{1}{n}\ (n = 1,2,3,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是[　　]

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$。　(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$。　(D) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n^2 \ln n$。

(2) 下列命题中正确的是[　　]

(A) 若 $u_n < v_n\ (n = 1,2,3,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$。

(B) 若 $u_n < v_n\ (n = 1,2,3,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(D) 若 $w_n < u_n < v_n\ (n = 1,2,3,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则下列级数发散的是[　　]

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$；(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$；(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$。(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$。

(4) 设 $a_n = (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数[　　]

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛。　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散。

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散。　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。

（5）设 f>0 且无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx$[　　]

(A) 一定发散 (B) 可能收敛也可能发散 (C) 一定收敛

3.（10 分）求广义积分

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$；(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$

4.（12 分）讨论下列反常积分的敛散性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\sin\frac{1}{x^a})}{x^b\ln cos\frac{1}{x}}dx$，a>0, b ∈ R; (2) $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^m}dx$，m>0。

5. （25 分）判别级数或无穷乘积敛散性（说明理由）:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$；(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$，a>0；(5) $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{n\ln n}{2^n})$。

6.（6 分）设$a_n>0(n=1,2,\ldots)$，a_n单调递减，$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$发散。判别$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$的敛散性。

7.（10 分）设b_n单调下降，$\lim_{n\to+\infty}b_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$绝对收敛。令$S_n$为$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$的前 n 项部分和。求证:（1）$\lim_{n\to+\infty}b_nS_n=0$；（2）级数$\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(b_{n+1}-b_n)$收敛，且$\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(b_{n+1}-b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$。

8. （7 分）讨论$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$(p>0)的收敛性和绝对收敛性。