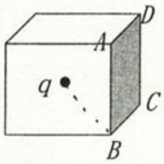
得分

一． 填空题（20 分）



1.（5 分）如图所示，有一点电荷 q 位于一个正方体内的中心处，通过此正方体的表面的电通量为 $\frac{q}{\varepsilon_0}$，通过此正方体表面中的一个正方形 ABCD 的电通量为 $\frac{q}{6\varepsilon_0}$。

2.（5 分）静电平衡下的任意导体，表面任意一点 P 处的电荷面密度是 A（A>0），请问导体的外侧 P 点附近的电场强度大小和方向为：$E=\frac{A}{\varepsilon_0}$，方向垂直导体表面向外。

3.（5 分）金属材料中某处，有大量电子以平均速度 $\bar{v}$ 作定向运动，在单位体积内运动的电子数目为 n，电子电量的绝对值是 $1.6\times10^{-19}C$，该点的电阻率为 ρ，求该点的电流密度 $\vec{j}=-1.6\times10^{-19}C\cdot n\cdot\vec{v}$；假设电子的定向运动仅受电场作用力驱动，则该点的电场强度 $\vec{E}=\rho\vec{j}=-1.6\times10^{-19}C\rho n\vec{v}$。

4.（5 分）从电磁学的基本物理过程角度列出能够产生磁场的四种电流，并简要说明每一种电流的含义。

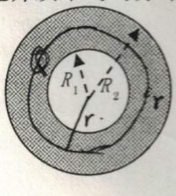
传导电流：自由电荷定向移动产生的电流.
磁化电流：磁介质被磁化~~时~~，在磁介质上产生的等效电流
极化电流：电介质被极化时，分子偶极矩有序排列过程形成的等效电流
位移电流：变化的~~磁场~~电场产生磁场，等效成有电流产生磁场.

得分

二.（20 分）一空心的电介质球壳，其内、外半径分别为 R_1 和 R_2，电介质的相对电容率为ε_r，在电介质中均匀分布着总电量为 Q 的自由电荷，求：

(1)空间各处的电场强度和电势；

(2)电介质球壳内、外表面上的极化电荷面密度。



(1) 取半径为 r 的高斯面，则 $4\pi r^2 D = Q_0$.

$r<R_1$ 时，$4\pi r^2 D = 0 \Rightarrow E = 0$

$R_1<r<R_2$ 时，$4\pi r^2 D = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3}\cdot Q = \dfrac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}Q$.

$$\therefore D = \frac{(r^3-R_1^3)Q}{4\pi r^2 (R_2^3-R_1^3)}, \quad E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{(r^3-R_1^3)Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2 (R_2^3-R_1^3)}.$$

$r>R_2$ 时，$4\pi r^2 D = Q$, $D = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$, $E = \dfrac{D}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

由对称性知 $\vec{E}$ 沿 $\hat{r}$ 方向.

$$\text{故 } \vec{E} = \begin{cases} 0 & r\le R_1 \\ \dfrac{(r^3-R_1^3)Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2 (R_2^3-R_1^3)}\hat{r}, & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r>R_2. \end{cases}$$

取无穷远为电势零点.
电势关于 r 连续.

$r\ge R_2$ 时 $U(r) = \displaystyle\int_r^{+\infty} \frac{Q\,d\rho}{4\pi\varepsilon_0\rho^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

$R_1<r<R_2$ 时 $U(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \displaystyle\int_r^{R_2} \frac{(\rho^3-R_1^3)Q\,d\rho}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r (R_2^3-R_1^3)\rho^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q\left(\frac{1}{2}R_2^2 + \frac{R_1^3}{R_2} - \frac{1}{2}r^2 - \frac{R_1^3}{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r (R_2^3-R_1^3)}$.

$r\le R_1$ 时，$U(r) = U(R_1) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{Q\left(\frac{1}{2}R_2^2 + \frac{R_1^3}{R_2} - \frac{3}{2}R_1^2\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r (R_2^3-R_1^3)}$

(2) $\because \begin{cases} \sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \\ \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E} \end{cases}$

$\lim\limits_{r\to R_1^+}\vec{P} = 0$ 故 $\sigma_{P内} = 0$

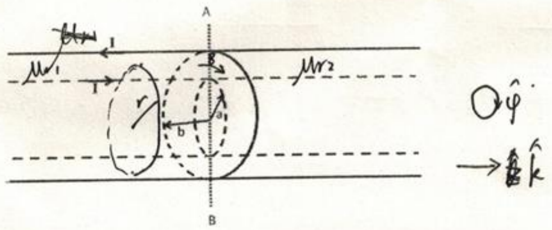
$\lim\limits_{r\to R_2^-}\vec{P} = \dfrac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_2^2}\hat{r}$ $\therefore \sigma_{P外} = \vec{P}\cdot\hat{r} = \dfrac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_2^2}$

得分

三、（20 分）无限长均匀同轴圆柱面，内、外圆柱面的半径分别为 a 和 b，通有如图所示的恒定电流 I，电流均匀分布在圆柱面上。

(1) 求空间中各处的磁感应强度矢量 B、磁场强度矢量 H 和磁场能量密度；并求单位长度的同轴圆柱面的自感系数 L；$=\frac{\phi}{I}$

(2) 如果在两圆柱面中间的空间中以 AB 面为界，左、右两边分别填充相对磁导率为 μ_{r1} 和 μ_{r2} 的线性均匀各向同性顺磁介质，求空间中各处的磁感应强度矢量 B、磁场强度矢量 H 和磁场能量密度；并分别求两种磁介质表面的磁化面电流密度。



(1) 取半径为 r 的同心圆形环路，由 Ampere 环路定理知.

~~$2\pi r H =$~~ $r<a$ 时，$H=0$.

$a<r<b$ 时，$2\pi r H = I \Rightarrow H=\frac{I}{2\pi r}$.

$r>b$ 时，$2\pi r H = I+(-I)=0$，$H=0$

由 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，且易知 $\vec{H}$ 方向为 $\hat{\varphi}$. $w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

故 $\vec{H}=\begin{cases}0, & r<a \text{ 或 } r>b \\ \frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi}, & a<r<b\end{cases}$，$\vec{B}=\begin{cases}0, & r<a \text{ 或 } r>b. \\ \frac{I\mu_0}{2\pi r}\hat{\varphi}, & a<r<b.\end{cases}$ $w_m=\begin{cases}0, & r<a \text{ 或 } r>b. \\ \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, & a<r<b.\end{cases}$

取长度为 l 的圆柱面，则

$$\phi = l\cdot\int_a^b \frac{I\mu_0}{2\pi r}dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

从而 $L=\frac{\phi}{Il}=\frac{\mu_0\ln\frac{b}{a}}{2\pi}$.

(2) 填充以后 $\vec{H}$ 仍如(1)中分布，$\vec{H} = \begin{cases} 0, & r<a \text{ 或 } r>b \\ \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\varphi} & a<r<b \end{cases}$

此时 $\underbrace{a<r<b}$ 有 $\vec{B} = \mu_0\mu_r \cdot \vec{H} = \dfrac{\mu_0\mu_r I \hat{\varphi}}{2\pi r}$.

故左边 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\mu_{r1} I\hat{\varphi}}{2\pi r}$，$w_m = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \dfrac{\mu_0\mu_{r1} I^2}{8\pi^2 r^2}$

右边 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\mu_{r2} I\hat{\varphi}}{2\pi r}$.　　$w_m = \dfrac{\mu_0\mu_{r2} I^2}{8\pi^2 r^2}$.

$\underbrace{r>b \text{ 或 } r<a}$，$\vec{B} = 0$.　从而 $w_m = 0$.

求 $\vec{J}_{\sigma m}$：由 $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$.

从而 $\lim\limits_{r\to a} \vec{M} = \dfrac{(\mu_r-1)\cancel{\mu_0\mu_r} I}{2\pi a}\hat{\varphi}$

$\lim\limits_{r\to b} \vec{M} = \dfrac{(\mu_r-1)\cancel{\mu_0\mu_r} I}{2\pi b}\hat{\varphi}$.

$\because \vec{J}_{\sigma m} = \vec{M}\times\hat{n}$.

$\therefore$ 介质在圆柱状表面的 $\vec{J}_{\sigma m}$：

左：内：$\vec{J}_{\sigma m} = \vec{M}_1 \times (-\hat{r}) = \dfrac{(\mu_{r1}-1) I}{2\pi a}\hat{k}$.

外 $\vec{J}_{\sigma m} = \vec{M}_1 \times \hat{r} = \dfrac{(1-\mu_{r1}) I}{2\pi b}\hat{k}$

右. 内：$\vec{J}_{\sigma m} = \dfrac{\mu_{r2}-1}{2\pi a} I\hat{k}$

外 $\vec{J}_{\sigma m} = \dfrac{-\mu_{r2}+1}{2\pi b} I\hat{k}$.

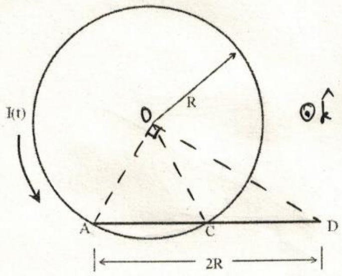
(两介质接触面：

由左边产生：$\vec{J}_{\sigma mL} = \vec{M}_1 \times \hat{k} = + \dfrac{(\mu_{r1}-1) I}{2\pi r}\hat{r}$

右边：$\vec{J}_{\sigma mR} = \vec{M}_2 \times (-\hat{k}) = -\dfrac{(\mu_{r2}-1) I}{2\pi r}\hat{r}$.

得分

四.（20 分）半径为 R 的无限长均匀螺线管，其横截面如图所示，单位长度内的匝数为 N，通有随时间变化的电流 $I(t) = I_0 Cos(\omega t)$，电流的正方向为图中所示的逆时针方向；一长度为 2R 的导体棒 AD，一半在螺线管内，一半在螺线管外；A、C 两点位于螺线管上(C 点是导体棒的中点)，且 ACD 位于螺线管的横截面内。忽略所有的漏磁，分别求 AC、CD 和 AD 两点之间的电势差。



$\odot\hat{k}$ $\circlearrowleft\hat{\varphi}$

求 $\vec{E_v}$：由 $\oint \vec{E_v}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 取圆形环路.

$\therefore 2\pi r \cancel{E_v} = E_v = +\mu_0 \omega N I_0 \sin\omega t \cdot \pi r^2$

$\vec{E_v} = \frac{1}{2}\mu_0 \omega N I_0 r \sin\omega t (+\hat{\varphi})$ $(r<R)$

$\vec{E_v} = \frac{1}{2r}\mu_0 \omega N I_0 R^2 \sin\omega t (+\hat{\varphi})$ $(r>R)$.

从而在 $\hat{r}$ 方向 $\vec{E_v}\cdot\hat{r} = 0$

$\because$ OA, OC, OD 沿 $\hat{r}$ 方向

$\therefore U_{OA} = U_{OC} = U_{OD} = 0$

解：由 Ampere 环路定理. $B_{内} = \mu_0 N I$.，$B_{外} = 0$.

$\therefore B(t) = \mu_0 N I_0 \cos\omega t$. $(r<R)$. 以 $\hat{k}$ 为正方向.

如图作辅助线 则由平面几何知识，易知 $AO \perp OD$，$\angle COD = \angle ODC = 30°$.

$\angle AOC = 60°$.

$\phi_{\triangle OAC} = B\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\mu_0 N I_0 R^2 \cos\omega t$.

由对称性，$\varepsilon_1 = -\frac{d\phi_{OAC}}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega\mu_0 N I_0 R^2 \sin\omega t$. 结合分析.

$U_{AC} = \cancel{-2\varepsilon_1} - \varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\omega\mu_0 N I_0 R^2 \sin\omega t$.

$\phi_{OCD} = B\cdot\frac{\pi R^2}{12} = \frac{\pi}{12}\mu_0 N I_0 R^2 \cos\omega t$.

$\varepsilon_2 = -\frac{d\phi_{OCD}}{dt} = \frac{\pi}{12}\omega\mu_0 N I_0 R^2 \sin\omega t$

$U_{CD} = -\varepsilon_2 = -\frac{\pi}{12}\omega\mu_0 N I_0 R^2 \sin\omega t$

$\phi_{OAD} = (\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12})R^2\mu_0 N I_0 \cos\omega t$.

$\varepsilon_3 = (\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12})\omega R^2\mu_0 N I_0 \sin\omega t$.

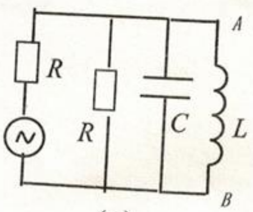
$U_{AD} = -\varepsilon_3 = -(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12})\omega R^2\mu_0 N I_0 \sin\omega t$.

(或 $U_{AD} = U_{AC} + U_{CD}$ 也可得).

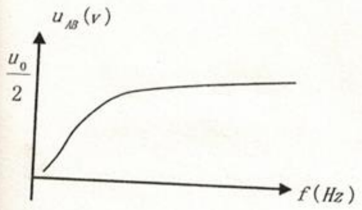
得分

五.（20 分）在图(a)所示的电路中，电压源的输出电压为 $u = u_0 Cos(\omega t)$

（1）求 AB 两点之间电压的幅度值。（2）有同学焊接了该电路，并且仅改变电压源的频率实际测量了 AB 两点间电压的幅值随电压源频率的变化，测量结果的示意图如图(b)所示。分析表明这个测量结果有错误，在排除了各种可能的错误后认定是电路的某处由于意外而断开。请用文字说明断路发生在何处，并给出分析过程。



(a)



(b)

(1) $\tilde{u} = u_0 e^{j\omega t}$.

$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$，$\tilde{Z}_L = j\omega L$.

由分压知 $\tilde{U}_{AB} = \dfrac{\frac{1}{\frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}}}{R+\frac{1}{\frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}}}\tilde{u}$.

$= \dfrac{1}{jR(\omega C-\frac{1}{\omega L})+2}\tilde{u}$.

$= \dfrac{2-jR(\omega C-\frac{1}{\omega L})}{(4+R^2(\omega C-\frac{1}{\omega L})^2)}u_0 e^{j\omega t}$.

$= \dfrac{u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}}{\sqrt{4+R^2(\omega C-\frac{1}{\omega L})^2}}$，$\varphi = -\arctan\dfrac{R(\omega C-\frac{1}{\omega L})}{2}$.

故幅度值 $U_{AB} = \dfrac{u_0}{\sqrt{4+R^2(\omega C-\frac{1}{\omega L})^2}}$.

(2) 断路发生于电~~感~~容支路上.

分析：∵ $U_{AB}(\omega) = \dfrac{U_0}{\sqrt{4+R^2(\omega C-\frac{1}{\omega L})^2}}$ (*)，ω与f呈线性关系，故U_{AB}关于f变化也可看作其关于ω的变化.

由(*)知，若电路正常，则在ω小和ω大时，$|U_{AB}|$均小，即
($\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$)
$\omega \ll \omega_0$时 $|\frac{1}{\omega L}| \gg 1$.，$|\omega C| \to 0$，$\omega \gg \omega_0$时，$|\omega C| \gg 1$. $|\frac{1}{\omega L}| \to 0$.

现 $\omega \to +\infty$时，$|U_{AB}| \to \frac{U_0}{2}$. 知此时 L 和 C 两路均相当于断路，

但对 C 来说高频应相当于短路，故与具体电路相结合知，

~~C 一路有断~~

电容一路有断路.

且若是电感一路有断路，实际上应成为一个低通滤波器，

与图(b)(高通滤波器)不符.

易知电阻一路不能断路.

故综上，只有电容支路某处断开.