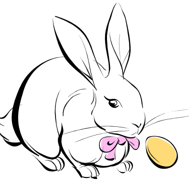
期末试题A卷

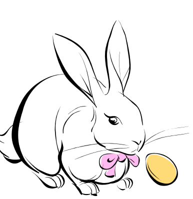


一、判断题

1. 在某一变化过程中，若 x 为无穷小量，且 $x \neq 0$，则 $\frac{1}{x}$ 是无穷大量。

正确

考点：无穷大与无穷小的概念



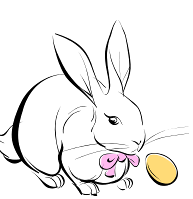
一、判断题

2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

错误。连续是可积的充分条件，但不是必要条件。

若函数存在可去间断点，函数不连续但是可积。

考点：函数可积的概念



3. 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} x dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-b}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{(-b)^2}{2}\right) = 0$。

错误。不存在。

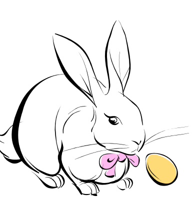
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \int_{-\infty}^{a} x dx + \int_{-a}^{+\infty} x dx = \lim_{A_1\to-\infty}\int_{A_1}^{a} x dx + \lim_{A_2\to+\infty}\int_{a}^{A_2} x dx$$

$$= \lim_{A_1\to-\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{A_1}^{a} + \lim_{A_2\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{A_2}$$

不收敛　　不收敛

考点：广义积分的定义

教材P165

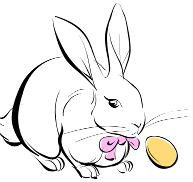


4. 多元函数在某点各偏导数存在，则该函数在该点可微，反之不成立。

错误。可微偏导数存在，偏导数存在不一定可微。

考点：可微与偏导的关系

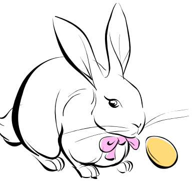
教材P184-185



5. 由于对函数求不定积分与求导互为逆运算，因而对函数先积分再求导等于函数本身，对函数先求导再积分也等于函数本身。

错误。先求导再积分，等于原函数与任意常数之和。

考点：不定积分的概念



二、选择题

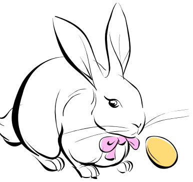
1. 若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则正确的是（　）

（A）$\int f(x)dx = g(x)+C$　　（B）$\int g(x)dx = f(x)+C$

（C）$\int g'(x)dx = f(x)+C$　　（D）$\int f'(x)dx = g(x)+C$

B

考点：不定积分的概念



2. 设$x_n \le z_n \le y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$（ ）

（A）存在且为零　　(B) 存在但不一定为零　　(c) 不一定存在　　(D) 一定不存在

C

$$x_n = n + \frac{1}{n^3}, z_n = n + \frac{1}{n^2}, y_n = n + \frac{1}{n}$$

满足题目条件

但是$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} n + \frac{1}{n^2}$不存在

$$x_n = \frac{1}{n^3}, z_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$$

满足题目条件

但是$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

3. 下列求极限问题中能够使用洛必达法则的是（ ）

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ (B) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin bx}$ (C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$ (D) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$

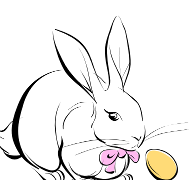
D

（A）分子$x^2\sin\dfrac{1}{x}$求导后为2xsinsin$\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,极限不存在

（B）$\lim\limits_{x\to 1}1-\sin bx$不一定为0，原式不一定为不定式

（C）分子极限为无穷，分母极限不存在

考点：洛必达法则



4. $\int_a^x f'(2t)dt =$ （ ）

（A） $2[f(x)-f(a)]$

(B) $f(2x)-f(2a)$

（C） $2[f(2x)-f(2a)]$

(D) $\frac{1}{2}[f(2x)-f(2a)]$

D

$$\int_a^x f'(2t)dt = \frac{1}{2}\int_a^x f'(2t)d(2t) = \frac{1}{2}\int_a^x df(2t)$$

$$= \frac{1}{2} f(2t)\Big|_a^x = \frac{1}{2}[f(2x) - f(2a)]$$

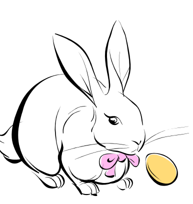
5. 若 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{x^k} = -1$，则 k 为（ ）

（A）0 (B)1 (C)2 (D)3

B

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - e^x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{kx^{k-1}} = -1$$

考点：洛必达法则



三、填空题

1. 设隐函数 $z+e^z=xy$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________

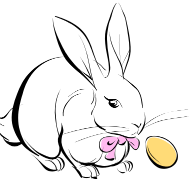
$$z+e^z=xy,\text{对}x\text{求偏导}\Rightarrow(1+e^z)\frac{\partial z}{\partial x}=y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+e^z}$$

$$z+e^z=xy,\text{对}y\text{求偏导}\Rightarrow(1+e^z)\frac{\partial z}{\partial y}=x\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+e^z}$$

$$(1+e^z)\frac{\partial z}{\partial x}=y,\text{对}y\text{求偏导}\Rightarrow e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+(1+e^z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$$

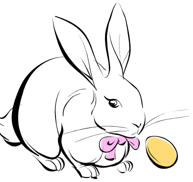
$$\Rightarrow e^z\frac{x}{1+e^z}\frac{y}{1+e^z}+(1+e^z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{1+e^z}-\frac{xye^z}{(1+e^z)^3}$$

考点：隐函数求导



2. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\int x^2 f(\ln x)dx =$________

$$f(x)=(e^{-x})' = -e^{-x}, \int x^2 f(\ln x)dx = -\int x^2 (\frac{1}{x})dx = -\int xdx = -\frac{1}{2}x^2 + c$$



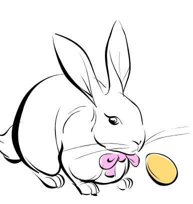
3. 函数 $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}\sin x}{x+y}$ 的全微分是________________

对 $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}\sin x}{x+y}$ 求全微分

$$df=\frac{[e^{xy}(dx\bullet y+x\bullet dy)\sin x+e^{xy}\cos x\bullet dx](x+y)-e^{xy}\sin x(dx+dy)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{[(xy+y^2-1)\sin x+(x+y)\cos x]e^{xy}}{(x+y)^2}dx+\frac{[(x^2+xy-1)\sin x]e^{xy}}{(x+y)^2}dy$$

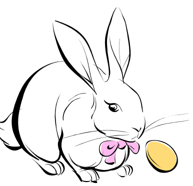
考点：全微分的计算



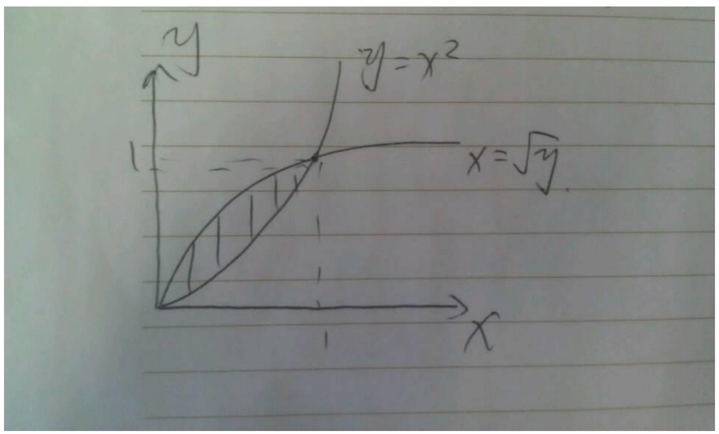
4. 已知 $y=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$，则 $y'(3)=$ __________

$$y'(x)=\sqrt{1+(x^2)^2}\,(x^2)'=2x\sqrt{1+x^4}$$

$$y'(3)=2\times3\sqrt{1+3^4}=6\sqrt{82}$$



5. 由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形的面积为____________



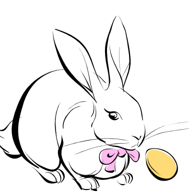
$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

四、计算题

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int 2x \cdot \frac{1}{x}\ln x dx$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

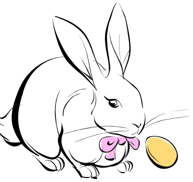
考点：分部积分



$$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x \bullet 2x}{1+x^2}dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$

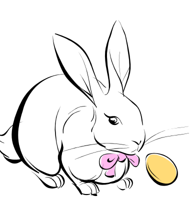
考点：分部积分



$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

考点：分部积分

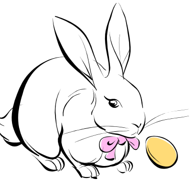


$$\int \tan^5 x \sec^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x d(\sec x)$$

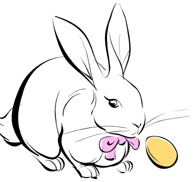
$$= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) d(\sec x)$$

$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

考点：熟练掌握基本函数的导函数



$$\int\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int(x^{3/4}-x^{-5/4})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$$

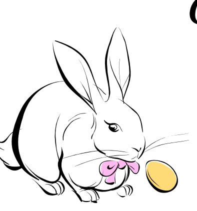


2. 设 $z=f(xy^2,x^2y)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2 f_1'+2xyf_2' \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^4 f_{11}''+4xy^3 f_{12}''+2yf_2'+4x^2y^2 f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3 f_{11}''+2x^3yf_{22}''+5x^2y^2 f_{12}''$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1'+x^2 f_2' \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2xf_1'+4x^2y^2 f_{11}''+x^4 f_{22}''+4x^3yf_{12}''$$



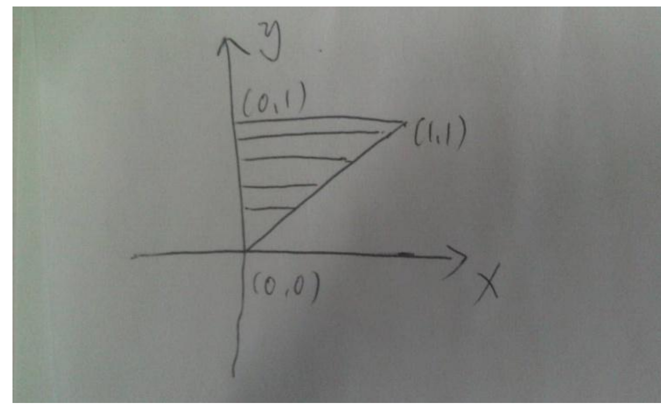
3. 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$ 其中 D 是以（0,0），（1,1），（0,1）为顶点的三角形区域

$$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy =$$

$$\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx = \int_0^1 e^{-y^2}\frac{y^3}{3}dy$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\frac{y^2}{6}dy^2 = \int_0^1 e^{-x}\frac{x}{6}dx$$

$$= -(e^{-x}\frac{x}{6} - \frac{1}{6}\int_0^1 e^{-x}dx) = \frac{1}{6}(1-\frac{2}{e})$$

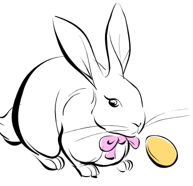


4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1^2+\frac{1}{n}^{2}}+\frac{1}{1^2+\frac{2}{n}^{2}}+\frac{1}{1^2+\frac{3}{n}^{2}}\cdots+\frac{1}{1^2+\frac{n}{n}^{2}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

考点：定积分概念



五、证明题

设函数在 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明对任意的 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx$.

$$\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx$$

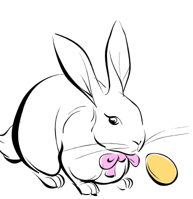
$$= \int_0^a f(x)dx - a\left(\int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx\right)$$

$$= (1-a)\int_0^a f(x)dx - a\int_a^1 f(x)dx$$

$$= a(1-a)f(\xi_1) - a(1-a)f(\xi_2), (\text{积分中值定理})$$

$$= a(1-a)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \ge 0$$

$$\left(\xi_1 \in [0,a], \xi_2 \in [a,1], f(\xi_1) \ge f(\xi_2)\right)$$



六、计算题

六、求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xoy$平面距离最短的点。

解：设交线上的点为$M(x,y,z)$，它到xoy面上的距离的平方为z^2，问题就成为求函数z^2在约束条件$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和$x^2+y^2=1$下的最小值问题。作拉格朗日函数：

$$L=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} L_x=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0, \\ L_y=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0, \\ L_z=2z+\frac{\lambda}{5}=0. \end{cases}$$

约束条件 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$

$$x^2+y^2=1$$

解此方程组，得$x=\frac{4}{5},y=\frac{3}{5},z=\frac{35}{12}$.于是，得可能的极值点$M_0(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{12}{35})$.由问题本身可知，距离最短的点必定存在，因此$M_0$就是所求的点。