高等数学D

课程号: 00332580

开课学期: 秋季

学分: 4

教学方式:课堂讲授和习题课

学生成绩评定方法:平时作业:20分;期中考试:30分;期末考试:50分。

教材与参考书:

- 1. 姚孟臣 编著 《大学文科数学简明教程(上册)》,北京大学出版社 2004年
- 2. 姚孟臣 等编 《大学文科高等数学题解(上册)》,高等教育出版社 2003

年

3. 姚孟臣 等编 《高等数学(同步练习册)》,北京大学出版社 1998年

高等数学D

作业:每周四交,下周四作业返回;

主讲教师: 段慧玲, 62753228, Email: hlduan@pku.edu.cn

助教: 孙卉,13120179837, E-mail: sun_h@pku.edu.cn

刘亚琼, 18810592206, E-mail: 1301214495@pku.edu.cn

(1) 文科高等数学ftp用于下载课件

地址: ftp.coe.pku.edu.cn

用户名: duanhuiling-c

无密码

(2) QQ群: 253494461

(3) 北大教学网

(4) 每周集中答疑一次

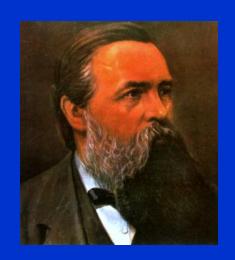


引言

一、什么是高等数学?

初等数学 — 研究对象为常量, 以静止观点研究问题.

高等数学 — 研究对象为变量, 运动和辩证法进入了数学.

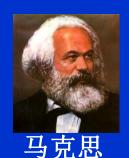


恩格斯

数学中的转折点是<u>笛卡儿</u>的变数. 有了变数,运动进入了数学, 有了变数,辩证法进入了数学, 有了变数,微分和积分也就立刻成 为必要的了,而它们也就立刻产生.

二、如何学习高等数学?

1. 认识高等数学的重要性, 培养浓厚的学习兴趣.



一门科学, 只有当它成功地运用数学时, 才能达到真正完善的地步.



要辨证而又唯物地了解自然, 就必须熟悉数学.

2. 学数学最好的方式是做数学.



华罗庚

聪明在于学习,天才在于积累. 学而优则用,学而优则创. 由薄到厚,由厚到薄.





清华大学教授萧树铁的两段话

从(我国)大学数学教育的角度来看,存在的主要问题可以概括为以下几点:

首先是过分强调"专业教育",形成了对大学数学教育的作用的片面理解: "为专业服务"。而且这种认识是作为教育指导思想体现在教学的各个环节,由于时间长,其影响的深度与广度是不能低估的。..... 数学以它的工具性,理性精神和美感成为 当今社会文化中的一个基础组成部分,在21 世纪的社会里,一个人若不知数学技术为何 物,理性思维贫乏而又缺乏审美意识,则必 然影响到他的整体素质;他的洞察、判断以 及创造的能力必将受到很大的限制。

> Reforms of the University Mathematics Education for

Non-

Mathematical Specialties, ICM 2002, Vol.III,897-



我们的现状

■姜伯驹:

近十年来,我国数学界痛切地感到学生知识面偏、窄,特别是几何修养不足已成为他们掌握现代数学的一大障碍。几何课程必须加强,必须现代化,已成为大家关心的问题。

Постников著

"几何讲义"中译本序言(

1992)



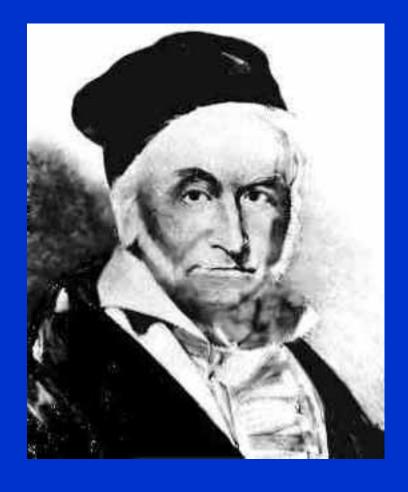
精神领袖——陈省身

天衣岂无缝 匠心剪接成 浑然归一体 广邃妙绝伦 造化爱几何 四力纤维能 千古寸心事 欧高黎嘉陈

杨振





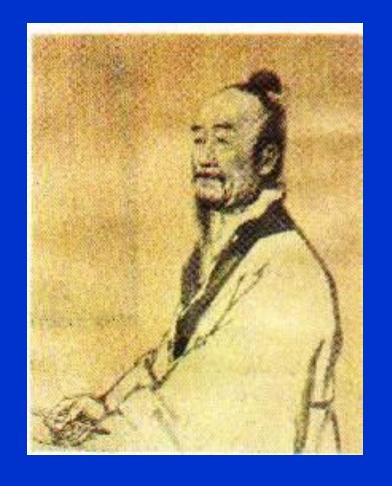




C.F.Gauss (1777-1855)

E.Cartan (1869-1951)





Archimedes (前287-前212) (菲尔兹奖章,正面)

刘徽(263年撰写 "九章算术注")

Fracture of materials

墙之崩颓,必因其隙 剑之毁折,皆由于璺

-----《刘子•慎隙,550 AD》

A. A. Griffith (1920, PRS) was the first to relate surface energy to fracture of solids.



主要内容

- 1. 分析基础: 函数, 极限, 连续 (10学时)
- 2. 一元函数微分学 (10学时)
- 3. 中值定理和导数的应用(10学时)
- 4. 一元函数积分学(12学时)
- 5. 多元函数微积分(12学时)

附录一.常微分方程简介 (4学时)

附录二. 无穷级数 (4学时)

总结和复习(2学时)



函数与极限

函数 — 研究对象

分析基础 〈极限 — 研究方法

连续 — 研究桥梁



第一节

映射与函数



二、映射

三、函数





一、集合

1. 定义及表示法

集合的定义

具有某种特定性质的事物的总体称为集合.组成集合的事物称为元素.

某校学生的集合

某班学生的集合

集合的属性一概括原则 任给性质P,可以而 且只能由具有性质P的对象组成 一个集合



集合的记号

通常集合用大写字母A、B、C、···表示,其元素用小写字母a、b、c、···表示。

所讨论的全空间所组成的集合称为全集,通常记作U。不含任何元素的集合称为**空集**,记作 Ø.

逻辑记号

元素a属于集合M,记作 $a \in M$. 元素a不属于集合M,记作 $a \in M$, (或 $a \notin M$).



集合的表示

(1) 列举法:按某种方式列出集合中的全体元素.

例:有限集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 自然数集 $N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

(2) 描述法: $M = \{x \mid x$ 所具有的特征 $\}$

例: 整数集合 $Z = \{x \mid x \in \mathbb{N} \ \vec{y} - x \in \mathbb{N}^+\}$

有理数集 $Q = \left\{ \begin{array}{c|c} p \\ q \end{array} \right. p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, p \ni q$ 互质 实数集合 $R = \left\{ x \mid x \right.$ 为有理数或无理数 }



2. 区间与邻 域

2.1 区间

开区间
$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$

半开区间
$$[a,b) = \{x | a \le x < b\}$$

 $(a,b] = \{x | a < x \le b\}$

无限区间
$$[a, +\infty) = \{x \mid a \le x\}$$

 $(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\}$
 $(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}$



2.1 邻域

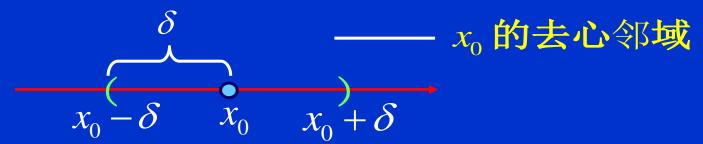
$$N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

$$\delta \qquad x_0 \in \delta$$

$$x_0 = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

$$x_0 = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

$$N(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$



其中, x_0 称为邻域中心, δ 称为邻域半径.

左 δ 邻域: $(x_0 - \delta, x_0]$ 右 δ 邻域: $[x_0, x_0 + \delta)$

3. 集合之间的关系及运算

定义: 设有集合 $A, B, \Xi x \in A$ 必有 $x \in B$,则称 A 是 B 的子集,或称 B 包含 A,记作 $A \subset B$.

 $\overline{A} \subset B \perp B \subset A$,则称 $A \vdash B \mid B \mid A \mid B$,记作 A = B.

例如, $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$

显然有下列关系:

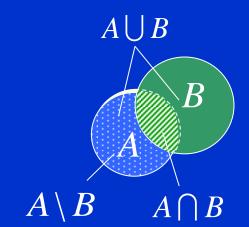
- (1) $A \subset A$; A = A; $\emptyset \subset A$
- (2) $A \subset B \coprod B \subset C \Longrightarrow A \subset C$



集合运算

并集
$$A \cup B = \{x \mid x \in A$$
或 $x \in B\}$

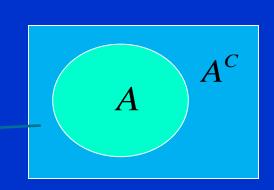
交集
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \perp x \in B \}$$



差集
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \perp \exists x \notin B\}$$

补集
$$A^C = \{ x | x \notin A \}$$

全集U



- 我们用符号"∀"表示"任取"或"对于任意的"
 符号"∀"称为全称量词.
- 2. 我们用符号"3"表示"存在". 符号"3"称 为存在量词.

例: 命题"对任意的实数x,都存在实数y,使得x+y=1"可表示为" $\forall x \in R$, $\exists y \in R$,使x+y=1"

二、映射

1. 映射的概念 引例

某校学生的集合

按一定规则查号

学号的集合

某班学生的集合

按一定规则入座

某教室座位 的集合



定义: 设X, Y 是两个非空集合, 若存在一个对应规则 f , 使得 $\forall x \in X$ 有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作 $f: X \to Y$.



元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的 **像**,记作 y = f(x).

元素x称为元素y在映射f下的g.

集合X称为映射f的定义域;

Y的子集 $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ 称为f的 值域.

注意: 1) 映射的三要素— 定义域,对应规则,值域.

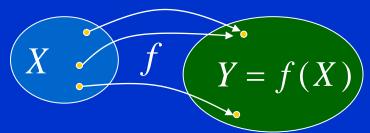
2) 元素x的像y是唯一的,但y的原像不一定唯一.





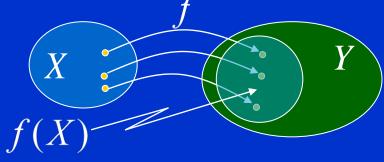
对映射 $f: X \to Y$

若 f(X) = Y,则称f为满射;



若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$

则称 f 为单射;



 \overline{a}_f 既是满射又是单射,则称f为双射 或一一映射.

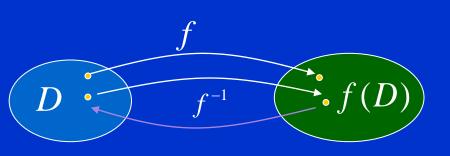
- 2. 逆映射与复合映射
- (1) 逆映射的定义

定义: 若映射 $f:D \to f(D)$ 为一一映射, 则存在一新映射

$$f^{-1}: f(D) \to D$$
, 使 $\forall y \in f(D), f^{-1}(y) = x$, 其中 $f(x) = y$,

称此映射 f^{-1} 为 f 的逆映射.

习惯上, $y = f(x), x \in D$



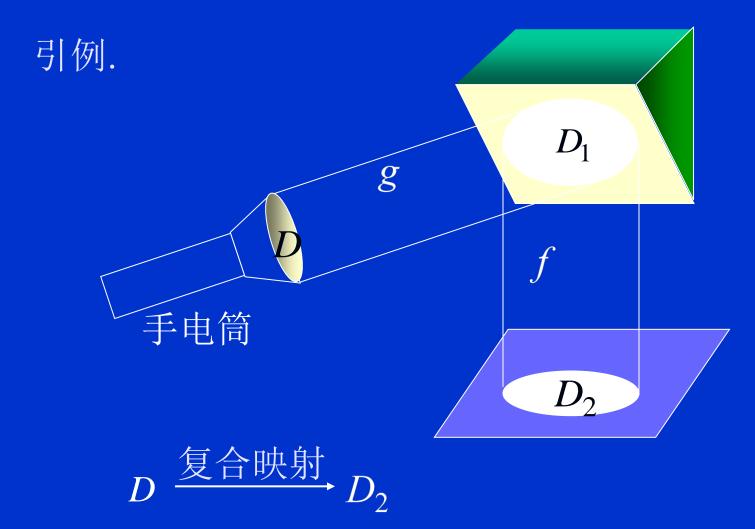
的逆映射记成

$$y = f^{-1}(x) , x \in f(D)$$

例如, 映射 $y = x^2, x \in (-\infty, 0]$, 其逆映射为

$$y = -\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$$

(2) 复合映射

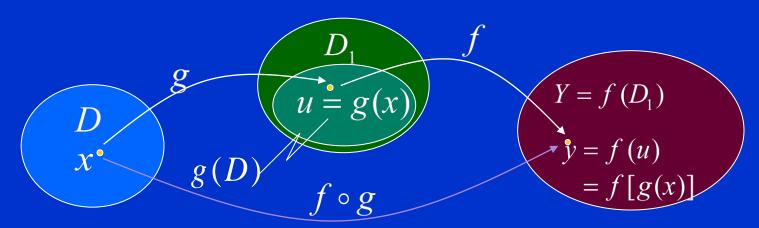


定义. 设有映射链

$$\forall x \in D \longmapsto^{g} u = g(x) \in g(D)$$

$$\forall u \in D_{1} \longmapsto^{f} y = f(u) \in Y = f(D_{1})$$

则当 $g(D) \subset D_1$ 时,由上述映射链可定义由 D 到 Y 的复合映射,记作 y = f[g(x)],或 $f \circ g(x)$, $x \in D$.



注意: 构成复合映射的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

以上定义也可推广到多个映射的情形.



三、函数

1. 函数的概念

定义: 设数集 $D \subset \mathbb{R}$,则称映射 $f:D \to \mathbb{R}$ 为定义在

D上的函数,记为

 $y = f(x), x \in D$

因变量

自变量

函数的本质 是映射!

f(D) 称为值域, f 对应法则。

函数 f(x) = 3x中 对应法则 f 是什么? f(1) = ?







定义域







$$\forall x \in D \stackrel{f}{\longmapsto} y \in f(D) = \{ y | y = f(x), x \in D \}$$
(定义域)—— (对应规则) (值域)

2. 函数的表示方法

(1) 公式法
$$y = x^3 + 2x - 4$$

(2) 表格

y y		
	$\begin{bmatrix} x & b \\ [a,b] \end{bmatrix}$	$\rightarrow x$

月份	1	2	3	4	5	6
销售量 (件)	100	105	110	115	111	120

(3) 图象法

◆函数的图象: 称平面点集 $\{(x,y)|x \in D, y = f(x)\}$ 为函数 y = f(x) 的图象。





求函数
$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$$
的定义域

$$\Re \begin{cases}
1 - x^2 \ge 0 \\
1 + x \ne 0
\end{cases} \Rightarrow
\begin{cases}
-1 \le x \le 1 \\
x \ne -1
\end{cases} \Rightarrow -1 < x \le 1$$

所以定义域为 (-1,1]

函数的定义域是使得式子有意义的所有的自变量取值。

定义域和对应法则是决定一个函数的两个要素,因此在高等数学中两个函数相同是指它们的定义域和对应规则分别相同。



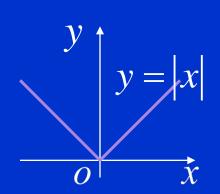
函数 $f(x) = \lg x^2 = f(x) = 2\lg x$ 是同一函数吗?

$$f(x) = x^2 - f(t) = t^2 - m$$
?

函数举例

绝对值函数
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
 定义域 $D = \mathbb{R}$

值 域
$$f(D) = [0, +\infty)$$



取整函数 y = [x]

[x]表示不超过x的最大整数。

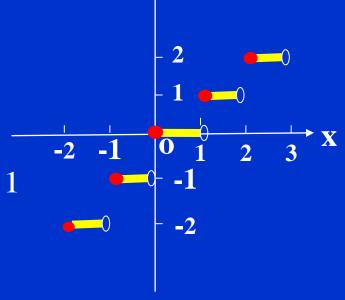
$$[0.8] = 0 \qquad \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 1$$

$$\lceil \sqrt{2} \rceil = 1$$

$$[1.99] = 1$$

$$[-0.8] = -1$$
 $[-3.5] = -4$

$$[-3.5] = -4$$



分段函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1\\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$,并写出定义域及值域.

解:
$$f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{t}, & 0 < t < 1\\ \frac{2}{\sqrt{t}}, & t \ge 1 \end{cases}$$

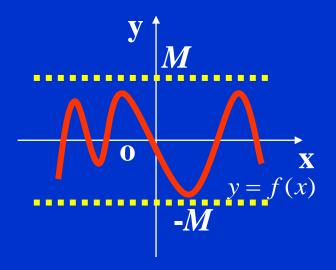
定义域 $D=[0,+\infty)$ 值 域 $f(D)=[0,+\infty)$

2. 函数的几种特性 设函数 $y = f(x), x \in D$,且有区间 $I \subset D$.

(1) 有界性

 $\forall x \in D, \exists M > 0, 使 | f(x) | \leq M, 称 f(x) 为有界函数.$ $\forall x \in I, \exists M > 0, 使 | f(x) | \leq M, 称 f(x) 在 I 上有界.$

说明: 还可定义有上界、有下界、无界



如 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

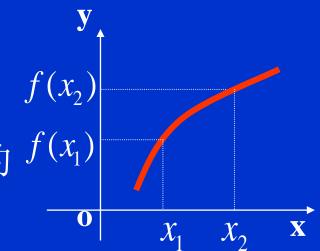
$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$
 也是有界函数

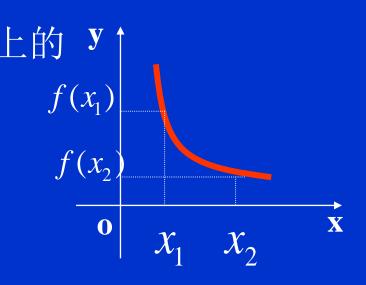


(2) 单调性

$$\forall x_1, x_2 \in I, \ x_1 < x_2 \quad \text{ iff,}$$

若 $f(x_1) < f(x_2)$,称f(x)为I上的单调增函数;



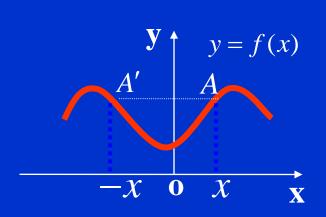


(3) 奇偶性

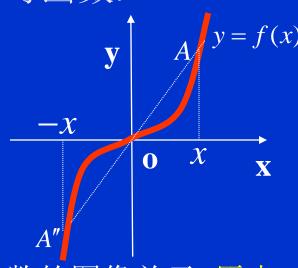
 $\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若f(-x) = f(x),则称f(x)为偶函数;

 $\overline{f}f(-x) = -f(x)$,则称f(x)为奇函数.



偶函数的图像关于 y 轴对称



奇函数的图像关于 原点对称



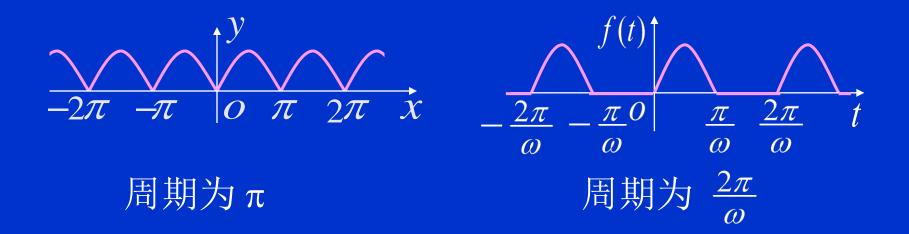
若 f(x) 在 x = 0 有定义,则当 f(x) 为**奇函数**时, f(0) = ?.



(4) 周期性

$$\forall x \in D, \exists l > 0, 且 x \pm l \in D, 若$$
 $f(x \pm l) = f(x)$

则称f(x)为周期函数,称l为周期(一般指最小正周期).



注:周期函数不一定存在最小正周期.

- 3. 反函数与复合函数
- (1) 反函数的概念及性质

若函数 $f:D \to f(D)$ 为一一映射, 则存在逆映射 $f^{-1}:f(D) \to D$

称此映射 f^{-1} 为f 的反函数.

习惯上, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$

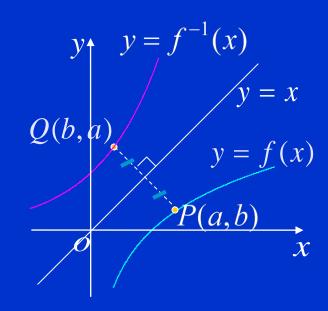
性质:

1) y=f(x) 单调递增 (减) 其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在, 且也单调递增 (减).





2) 函数 y = f(x) 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 y = x 对称.



例如,

指数函数 $y = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$ 五为反函数, 对数函数 $y = \ln x, x \in (0, +\infty)$

它们都单调递增, 其图形关于直线 y = x 对称.

(2) 复合函数— 复合映射的特例

设有函数链

$$y = f(u), u \in D_1$$
 1
 $u = g(x), x \in D, \quad \coprod g(D) \subset D_1$ 2
 $y = f[g(x)], x \in D$

称为由①, ②确定的复合函数, u 称为中间变量.

注意: 构成复合函数的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

例如,函数链: $y = \arcsin u$, $u = 2\sqrt{1-x^2}$,可定义复合

函数

则

$$y = \arcsin 2\sqrt{1-x^2}, \quad x \in D = [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

但函数链 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 不能构成复合函数.



两个以上函数也可构成复合函数. 例如,

$$y = \sqrt{u}, u > 0$$

$$u = \cot v, v \neq k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$v = \frac{x}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$$

可定义复合函数:

$$y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}, \quad x \in (2k\pi, (2k+1)\pi], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$k\pi < \frac{x}{2} \le k\pi + \frac{\pi}{2}$$
 时, $\cot \frac{x}{2} \ge 0$



由外及里

逐层分解



例题

复合函数分解为简单函数

(1) $y = \sqrt[4]{x^2 + 9}$ $y = u^{\frac{1}{4}}$ $u = x^2 + 9$

(2)
$$y = (\arctan \frac{x}{2})^2$$

 $y = u^2$, $u = \arctan v$, $v = \frac{x}{2}$

练一练

$$y = 2^{\sin(\ln x)}$$
 \longrightarrow $y = 2^u$ $u = \sin v$ $v = \ln x$

$$y = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$$

幂指函数

$$y = e^u$$
, $u = \sin x \ln x$

4. 初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数

(2) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 否则称为非初等函数.

例如,
$$y = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$
可表为 $y = \sqrt{x^2}$,故为初等函数.

又如,双曲函数与反双曲函数也是初等函数.



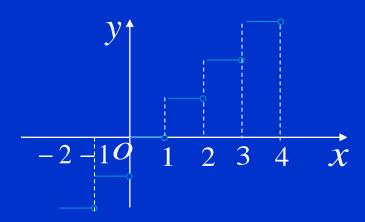
非初等函数举例:

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \exists x > 0 \\ 0, & \exists x = 0 \\ -1, & \exists x < 0 \end{cases}$$

取整函数

$$y = [x] = n$$
, $\stackrel{\triangle}{=} n \le x < n+1$, $n \in Z$



内容小结

- 1. 集合及映射的概念
- 3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性
- 4. 初等函数的结构

作业

P55-56 1 (1); 4; 14; 15

备用题

1. 设 f(0) = 0 且 $x \neq 0$ 时 $a f(x) + b f(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 证明 f(x) 为奇函数.

由

$$\begin{cases} af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x} \\ af(\frac{1}{x}) + bf(x) = cx \end{cases}$$

消去 $f(\frac{1}{r})$,得

$$f(x) = \frac{c}{b^2 - a^2} \left(bx - \frac{a}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

显然 f(-x) = -f(x), 又 f(0) = 0, 故 f(x) 为奇函数.

2. 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形与 x = a, x = b ($a \neq b$)均对称, 求证 y = f(x) 是周期函数.

证: 由 f(x) 的对称性知

$$f(a+x) = f(a-x), \qquad f(b+x) = f(b-x)$$

$$f(x) = f[a + (x - a)]$$

$$= f[a - (x - a)] = f(2a - x)$$

$$= f[b + (2a - x - b)]$$

$$= f[b - (2a - x - b)]$$

$$= f[x + 2(b - a)]$$

故f(x)是周期函数,周期为T = 2(b-a)