January 16, 2018

2017-2018 秋季量子力学 (A) 期末试题

By 逸

January 16, 2018

Contents

1 运动方程（10 分）

一个电荷 q、质量 m 的粒子，受均匀静电场 $\mathbf{E}$ 的作用。
（1）写出系统的薛定谔方程。
（2）任取薛定谔方程的一个归一化的解 $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{t})$，证明牛顿方程成立：

$$\frac{d\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle}{dt}=\frac{\hat{\mathbf{p}}}{m},\frac{d\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle}{dt}=q\mathbf{E}. \tag{1}$$

2 送分（10 分）

$t=0$ 时，氢原子波函数为：

$$\psi(t=0)=\frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{1,0,0}+\psi_{2,1,0}+\sqrt{2}\psi_{2,1,1}+\sqrt{3}\psi_{2,1,-1}). \tag{2}$$

其中 n、l、m 分别为主量子数、角量子数、磁量子数。
(1) 令 E_1 为 $\psi_{1,0,0}$ 能量本征值，问 $\psi(t=0)$ 的能量平均值为?
(2) 求 t 时刻波函数 $\psi(t)$。
(3) 时刻 t，体系处于量子数 $l=1$，$m=1$ 态的几率?

3 微扰（10 分）

质量 m 的粒子约束在半径 R 的圆环上，运动满足方程:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\phi^2}\psi(\phi)=E\psi(\phi). \tag{3}$$

(1) 求能量本征谱及对应的波函数。
(2) 加微扰势:

$$\hat{H}'=Asin\phi cos\phi. \tag{4}$$

对基态和第一激发态，计算一级微扰能量修正。

4 势阱与束缚态（10 分）

一个质量 m 的粒子在球对称势场

$$V(r)=-C\delta(r-a) \tag{5}$$

中运动，$C>0$ 是一个常数。问：若仅存在一个束缚态（可将角动量 L 取为 0）时 C 最小值为何?
提示：$L=0$ 时，粒子在中心力场中运动满足径向方程:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R_0(r)}{\partial r}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r))R_0(r)=0. \tag{6}$$

5 坐标变换（10 分）

质量 m 的粒子在势场

$$V(x,y,z)=A(x^2+y^2+2\lambda xy)+B(z^2+2\mu z) \tag{7}$$

中运动，其中 $A>0$、$B>0$，$|\lambda|>1$ 和 μ 为实常数。
(1) 引入变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}+\tilde{y}),y=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}-\tilde{y}),z=\tilde{z}. \tag{8}$$

证明拉普拉斯算符在变换下不变，并将势能改写为 $V(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$。
(2) 求该粒子的基态能量值。

6　三个自旋（10 分）

一个系统由三个自旋 1/2 的非全同离子组成，哈密顿量为：

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar^2}\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + \frac{B}{\hbar^2}(\hat{s}_1 + \hat{s}_2) \cdot \hat{s}_3. \tag{9}$$

其中 $\hat{s}_1$、$\hat{s}_2$、$\hat{s}_3$ 分别为三个粒子的自旋算符。

（1）令：

$$\hat{S}_{12} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2, \hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2 + \hat{s}_3. \tag{10}$$

试证哈密顿量 $\hat{H}$ 可以写作：

$$\hat{H} = \frac{A}{2\hbar^2}(\hat{S}_{12}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\hat{I}) + \frac{B}{2\hbar^2}(\hat{S}^2 - \hat{S}_{12}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\hat{I}). \tag{11}$$

（2）已知算符组 $(\hat{H}, \hat{S}_{12}^2, \hat{S}^2, \hat{S}_z)$ 中的算符两两对易，求哈密顿量的全部本征值及简并度。

7　许多电子（15 分）

原子的能量是电子动能及库仑势能之和，其哈密顿量可以写作：

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + ... + \frac{\hat{p}_N^2}{2m} + U(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}). \tag{12}$$

此处的相互作用势定义为：

$$U(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}) = -\frac{\mathbf{Ze^2}}{|\mathbf{r_1}|} - ... - \frac{\mathbf{Ze^2}}{\mathbf{r_N}} + \frac{\mathbf{e^2}}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|} + ... + \frac{\mathbf{e^2}}{|\mathbf{r_{N-1}} - \mathbf{r_N}|}. \tag{13}$$

（1）证明对任意正实数 $\lambda > 0$，等式

$$U(\lambda\mathbf{r_1}, ..., \lambda\mathbf{r_N}) = \lambda^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N}). \tag{14}$$

成立。

（2）任取归一化波函数 $\Psi(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N})$，令 $\langle\hat{T}\rangle_\Psi$ 和 $\langle\hat{U}\rangle_\Psi$ 分别为体系的总动能和总势能在这个态下的平均值。取实数 $\lambda > 0$，并定义波函数

$$\Phi_\lambda(r_1, ..., r_N) = \lambda^{3N/2}\Psi(\lambda\mathbf{r_1}, ..., \lambda\mathbf{r_N}). \tag{15}$$

试证明 $\Phi_\lambda(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N})$ 是归一化的，并且其能量最小值由下式给出：

$$E_{min}(\Phi_\lambda) = E(\lambda = -\frac{\langle\hat{U}\rangle_\Psi}{2\langle\hat{T}\rangle_\Psi}) = -\frac{\langle\hat{U}\rangle_\Psi^2}{4\langle\hat{T}\rangle_\Psi}. \tag{16}$$

（3）现取体系真实的归一化基态波函数 $\Psi_0(\mathbf{r_1}, ..., \mathbf{r_N})$，设能量为 $-B$。又知 $-B$ 与 $E_{min}(\Phi_\lambda^{(0)})$ 相等（这里 $\Phi_\lambda^{(0)} = \lambda^{3N/2}\Psi_0(\lambda\mathbf{r_1}, ..., \lambda\mathbf{r_N})$）。求在此基态下体系的总动能和总势能的平均值 $\langle\hat{T}\rangle_{\Psi_0}$ 和 $\langle\hat{U}\rangle_{\Psi_0}$。

8　被限制的离子（15 分）

某种离子处于自由空间时，具有角动量 $L = 1$ 和 $S = 0$。将该离子在 $x = y = z = 0$ 处嵌入一个晶体，它与晶体间的相互作用势能可以写作:

$$\hat{H}_1 = \frac{\alpha}{\hbar^2}(\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2). \tag{17}$$

此外，z 方向上加一个外磁场，会引起附加的微扰相互作用:

$$\hat{H}_2 = \frac{\beta B}{\hbar}\hat{L}_z. \tag{18}$$

（1）用轨道角动量升降算符表示该离子总的哈密顿量 $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$。
（2）写出哈密顿量在下述三个态的空间中张成的矩阵。

$$\Psi_1 = |L = 1, L_z = -1\rangle, \Psi_2 = |L = 1, L_z = 0\rangle, \Psi_3 = |L = 1, L_z = 1\rangle. \tag{19}$$

（3）求出该离子的全部能量本征值。
（4）磁场为 0 时，求该离子的基态 Φ_0。

9　自旋-轨道耦合（10 分）

一个在中心力场中运动的电子的自旋-轨道相互作用哈密顿量

$$\hat{H}_{S-L} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(-\frac{e^2}{r})\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}} = \xi(r)\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}. \tag{20}$$

（1）求出 $\hat{H}_{S-L}$ 算符的复共轭 $\hat{H}^*_{S-L}$。
（2）找出一个幺正矩阵 U，使得

$$U^\dagger\hat{H}_{S-L}U = \hat{H}^*_{S-L}. \tag{21}$$