

# 北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 集合论与图论 姓名： \_\_\_\_\_ 学号： \_\_\_\_\_

一、(15 分) 设  $A, B, C$  是集合, 试给出  $A-B-C=B-C-A$  的充要条件和证明.

(1) 充要条件; (2) 证明充分性; (3) 证明必要性.

二、(15 分) 设  $A=\{1,2,3,\dots,2013\}$ , 定义  $A$  上二元关系  $R=\{\langle x,y \rangle \mid |x-y|=8 \text{ 或 } |x-y|=12\}$ .

试回答下列问题, 并说明理由.

(1)  $R$  是否具有自反性: (2)  $R$  是否具有反自反性: (3)  $R$  是否具有对称性:

(4)  $R$  是否具有反对称性: (5)  $R$  是否具有传递性:

(6)  $R$  的传递闭包是否等价关系:

(7) 包含  $R$  的最小等价关系里有多少个等价类:

三、(15 分) 求自然数集的全体有穷子集构成的集合的基数, 并证明.

四、(10 分) 一共有多少个互不同构的 1 到 3 阶有向简单图? 试逐个画出它们, 并标出其中的竞赛图、欧拉图、哈密顿图.

(1) 互不同构的 1 阶有向简单图: \_\_\_\_\_ 个 (画出它们并标出竞、欧、哈密顿图)

(2) 互不同构的 2 阶有向简单图: \_\_\_\_\_ 个 (画出它们并标出竞、欧、哈密顿图)

(3) 互不同构的 3 阶有向简单图: \_\_\_\_\_ 个 (画出它们并标出竞、欧、哈密顿图)

五、(15 分) 回答下列问题, 并说明理由.

(1) 除了平凡图, 是否还存在自补的简单外平面图?

(2) 除了平凡图, 是否还存在自补的自对偶简单平面图?

六、(15 分) 一盏灯有  $n$  种不同的颜色, 受两个开关控制. 每个开关各有  $n$  种不同的状态. 当两个开关都改变状态时, 灯的颜色改变. 试证明: 这盏灯的颜色是由其中一个开关的状态来决定的.

(1) 把这个问题表示为图着色问题;

(2) 证明所需结论.

七、(15 分) 对于右图, 试回答下列问题 (写出必要的计算步骤):

(1) 求出所有的极小支配集和最小支配集.

(2) 求出所有的极小点覆盖和最小点覆盖.

(3) 求出所有的极大独立集和最大独立集.

