北京大学高等数学期末试题

2016 -2017　学年第一学期

考试科目：高等数学B(一)　　考试时间：2017年1 月 5日

姓　名:____________________　学　号: ______________________

本试题共 8 道大题，满分 100 分

1. 求极限（20分）.

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}-1}{\frac{\ln n}{n}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x})$;

   (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin x^2}{e^{x^2}-\cos x^2}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x-2y}$.

2. 求导数（10分）

   (1) 设 $u=f(\xi,\eta)$, 其中 $\xi=e^x\cos y,\ \eta=e^x\sin y$, 求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$;

   (2) 设 $F(x+z,x-y,x+yz)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 证明两直线 $L_1:\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1},\quad L_2:\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 是异面直线，并求这两直线间的距离，以及求过 L_1 且平行于L_2 的平面方程。（15分）

4. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 间的最短距离。（10分）

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$。问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否连续？ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否可微？ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$方向导数是否存在？ 以及混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否存在？说明理由。（15分）

6. 证明不等式： $(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$, 其中 $b>a>0$。（10分）

7. 设 $(x(t),y(t),z(t)),t\in[a,b]$ 是空间曲线方程，且两端点 $A=(x(a),y(a),z(a))$, $B=(x(b),y(b),z(b))$ 不重合。函数 $x(t),y(t),z(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且导函数不同时为 0. 设点 P 是该曲线外一点，使得 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 不共线。证明该曲线上存在一点 Q, 使得点 Q 处切线的方向向量和 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}$ 共面。（10分）

8. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上二阶导数处处存在，且 $f''(x)\geq 0$. 证明对任意的 $x_1,x_2\in(a,b),\quad 0\leq r\leq 1$, 则有 $f(rx_1+(1-r)x_2)\leq rf(x_1)+(1-r)f(x_2)$。(10分）