

2010 年期中考试试卷（高等数学 D 类）

（2010 年 11 月 19 日 10:10-12:10）

一、判断下列说法是否正确并简述理由（3 分/题，共计 15 分）

1. 若数列 $\{a_n\}$ 有极限存在，则 $\{a_n\}$ 一定有界；反之，若 $\{a_n\}$ 有界，则它一定有极限。
2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续。
3. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则至少存在一点 $c \in [a, b]$ ，使得 $f(c) = 0$ 。
4. 偶函数的导数还是偶函数，奇函数的导数还是奇函数。
5. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义，在开区间 (a, b) 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值与最小值。

二、选择题（3 分/题，共计 15 分）

1. 分段函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 + x - 1, & x > 0 \end{cases}$ 是
(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数 (D) 既奇又偶函数
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x^3}{5x^3+2x^2-4} = ()$
(A) -1/4 (B) 1/2 (C) 0 (D) -3/5.
3. 过点(1,3)且切线斜率为 $3x$ 的曲线方程应满足的条件是
(A) $y'=3x$; (B) $y''=3x$ (C) $y'=3x, y(1)=3$ (D) $y''=3x, y(1)=3$
4. 函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是()
(A) 没有极限 (B) 有极限但不连续 (C) 连续但不可导 (D) 可导
5. 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-4}$ 的间断点为()
(A) $x=-1$ 和 $x=4$ (B) $x=4$ 和 $x=-2$ (C) $x=1$ 和 $x=-2$ (D) 不存在。

三、填空题（第3小题4分，其他2分/题，共计18分）

1. 指出以下函数是否相同

(1) $y = \lg x^3$ 与 $y = 3\lg x$ _____

(2) $f(x) = 1$ 与 $\varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ _____

2. 方程 $x + e^x = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有_____个实根。

3. 在“充分”、“必要”、“充要”三者中选择一个正确的填入以下空白处

(1) 数列 $\{x_n\}$ 无界是数列 $\{x_n\}$ 发散的_____条件，数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 单调有界的_____条件。

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的_____条件，
函数 $f(x)$ 在 x_0 点左极限和右极限都存在且相等是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的
_____条件。

4. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^3$ ，则 $a =$ _____

5. 指出函数 $y = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x(x^2 - 1)}}$ 的间断点_____

6. 一个奇函数与一个偶函数的和是_____，一个奇函数与一个偶函数的乘积是_____（从“偶函数”、“奇函数”、“非奇非偶函数”选择填空），（注：以上都是针对非零值函数而言）。

7. 已知方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ ，则 $\frac{dy}{dx} =$ _____，

$\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____。

8. 函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期是_____

四、计算题（每题 8 分，共计 32 分）

1. 求下列极限（8 分）：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$$

2. 求下列函数的不连续点，并判断类型（8 分）

$$(1) y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}$$

$$(2) y = \frac{x}{\sin x}$$

3. 下列函数的导数（8 分）

$$(1) y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$(2) y = x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

4. 试估算 $\tan 151^\circ$ 的值（可保留根号）。（8 分）

五、证明题（8 分）

用中值定理证明 $e^x > 1 + x$ ($x \neq 0$)

六、作图题（12 分）

描绘 $y = \frac{(x-5)^2}{4(x-1)}$ 的图形（写出定义域、极值点、求出渐近线、作出图形）