文科高等数学

期末考试

一、选择题

1. $\int_{-1}^{1}|x|dx =$ (　　)

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. −1

(B)

定积分：观察积分区域是否具有对称性，被积函数奇偶性来简化问题计算。

2，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=$

A，0　　B，1　　C,0.5　　D，不存在

(D)

多元（两元）函数的极限，注意：所谓二重极限，指P(x,y)以任何方式区域P0时，f(x,y)都无限接近同一值。

3. 积分$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx=$(　)

A. $\sqrt{x}-\ln\left|1-\sqrt{x}\right|+c$　　B. $2(\sqrt{x}-\ln\left|1-\sqrt{x}\right|)+c$

C. $\sqrt{x}+\ln\left|1-\sqrt{x}\right|+c$　　D. $-2(\sqrt{x}+\ln\left|1-\sqrt{x}\right|)+c$

（D）

换元：$t=1-\sqrt{x},\ dx=2(t-1)$

$$\text{原式}=\int\frac{2(t-1)}{t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2(t-\ln t)+C1$$

$$=2\left(1-\sqrt{x}-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)+C1=-2\left(\sqrt{x}+\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)+C$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}} \int f(u)\mathrm{d}u$$

掌握常见的第一类、第二类换元类型，基本积分公式（详见课件）

4. 设f(x) 的导数在x=a处连续，又$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=2$，则（　　）个

A. x=a是f(x) 的极小值点　　B. x=a是f(x) 的极大值点

C. (a,f(a))是曲线y=f(x)的拐点　D. x=a不是f(x) 的极值点

(A)

$$x \to a, f'(x) = 2(x-a)$$

x>a,f’>0 ; x<a,f’<0; x=a,f(a)=limf’(a)=0,所以A

5. 已知 $F(x)$ 的一阶导数 $F'(x)$ 在 R 上连续，且 $F(0)=0$，

则 $d\int_x^0 xF'(t)dt =$ (　　)

A. $-xF'(x)dx$　　B. $xF'(x)dx$

C. $-[F(x)+xF'(x)dx]$　　D. $-[F(x)+xF'(x)]dx$

(D)

$$\int_x^0 xF'(t)\,dt = x\int_x^0 F'(t)\,dt = xF(0) - xF(x) = -xF(x)$$

$$d\left(\int_x^0 xF'(t)\,dt\right) = d\left(-xF(x)\right) = (-F - xF')dx$$

二、填空题

1. 若 D 是平面区域 $\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 1\le y\le e\}$，则二重积分 $\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy =$ （ $\frac{1}{2}$ ）

考察二重积分概念，基本计算

2、 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，则 $a=$ ____1____， $b=$ ____-1____；

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}[(1-a)x-(a+b)]=0$$

a=1

b=-a=-1

3. 设由方程 $e^z - xyz = 0$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ($\frac{z}{x(z-1)}$)

1. 方程e^z-xyz=0,可确定二元隐函数z=z(x,y)，等式两边对x取偏导（将y视为常数），则类似于之前学过的一元隐函数求导。

$$e^z\frac{\partial z}{\partial x} - yz - xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} = \frac{z}{x(z-1)}$$

2.F=e^z-xyz, $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Fx}{Fz}$$

4，设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$（a>0，常数），若 $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{2}{3}\pi$，则

a=____(-1)

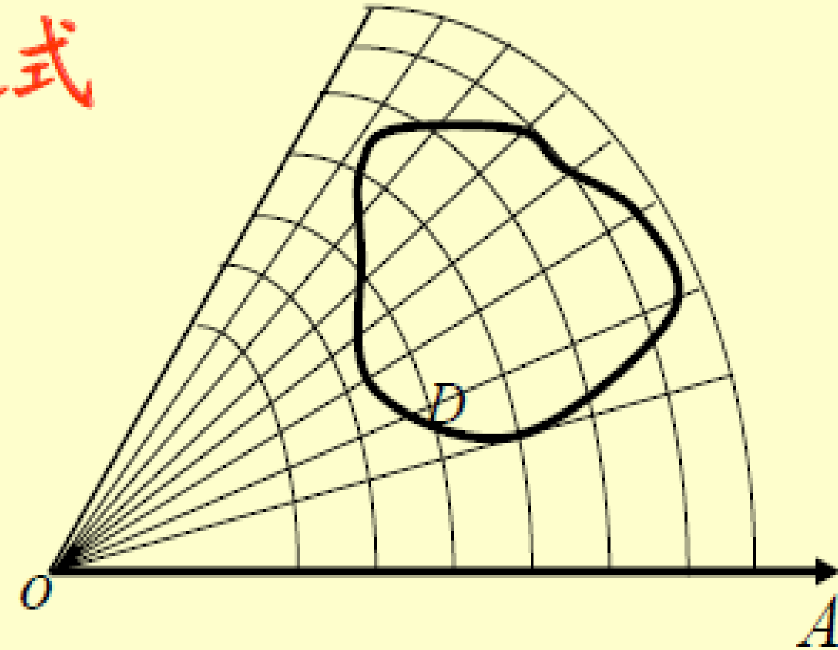
积分区域是圆，用极坐标表示更简便，且被积函数用极坐标表示更简便，故使用极坐标。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\frac{2\pi a^3}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

a=1

一、利用极坐标系计算二重积分

1.极坐标系下二重积分表达式



首先分割区域D

用

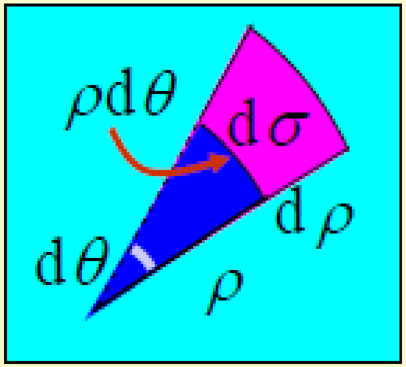
$\rho =$ 常数（一系列同心圆）

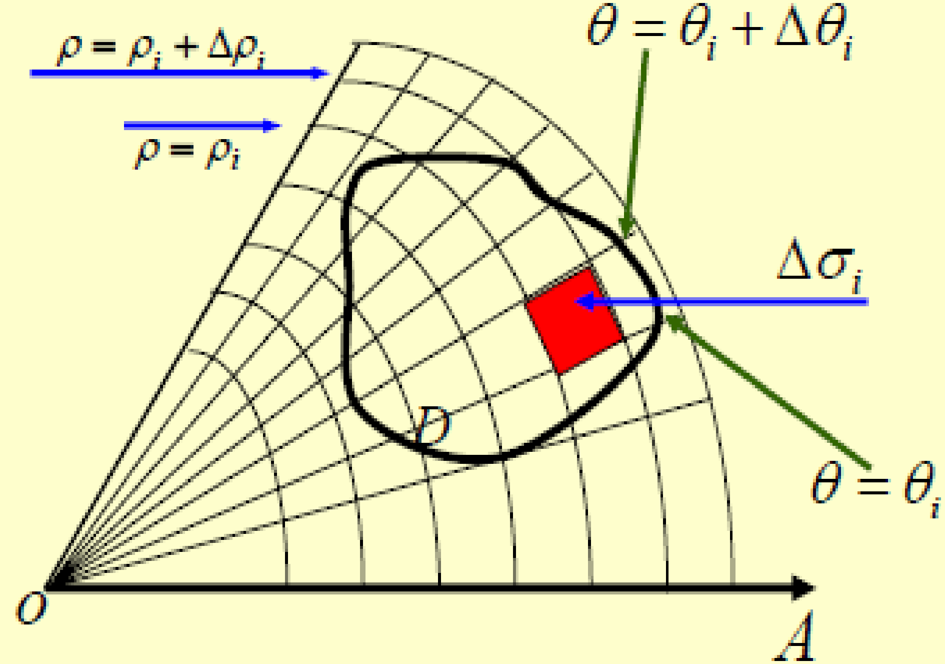
$\theta =$ 常数（一系列过极点的 射线）

两组曲线将D分割成许多小区域

Flash动画演示

分割区域





将典型小区域近似看作矩形（面积=长×宽）

则　面积元素　$d\sigma = \underbrace{\boxed{\rho d\theta}}_{\text{扇形弧长}}\cdot\underbrace{\boxed{d\rho}}_{\text{径向宽度}}$

再作代换 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

可得下式

则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$

二重积分极坐标表达式

【注意】极坐标系下的面积元素为

$$d\sigma = \rho d\rho d\theta$$

直角坐标系下的面积元素为

$$d\sigma = dxdy$$

区别

5 数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\frac{n-1}{n}\pi\right)=\underline{\qquad\qquad}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos^2\frac{k}{n}\pi\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^2\frac{k}{n}\pi\right)\frac{1}{n}-\left(\cos\frac{0}{n}\pi\right)^2\frac{1}{n}-\left(\cos\frac{n}{n}\pi\right)^2\frac{1}{n}\right]$$

$$=\pi\int_0^1(\cos\ \pi x)^2\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$x_k=k/n$, $dx=1/n$

三、解答题

1. 设 $f(x)$ 在[a，b]上连续，且 $F(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt \quad x\in[a,b]$，试求出 $F''(x)$

解：

$$F(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

$$F'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$F''(x)=f(x)$$

考察了变限积分求导

2. 求不定积分 $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}dx =$

解：$\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{x^5}{\sqrt{x^5+1}}d(x^5+1) = \frac{1}{5}\int \frac{x^5+1-1}{\sqrt{x^5+1}}d(x^5+1)$

$= \frac{1}{5}\int (\sqrt{x^5+1} - \frac{1}{\sqrt{x^5+1}})d(x^5+1) = \frac{1}{5}[\frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x^5+1)^{\frac{1}{2}}] + C$。

考察分步积分

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\sin t\,dt}{x^4}$ （5 分）

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\sin t\,dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}\sin x^2\cdot 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{2}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

（5 分）

考察极限（洛必达）、变限积分求导

4．求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积．

解 设长方体的三棱的长为 x, y, z, 则问题就是在条件 $2(xy+yz+xz)=a^2$

下求函数 $V=xyz$ 的最大值．

构成辅助函数 $F(x, y, z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$，解方程组

$$\begin{cases} F_x(x,y,z)=yz+2\lambda(y+z)=0 \\ F_y(x,y,z)=xz+2\lambda(x+z)=0 \\ F_z(x,y,z)=xy+2\lambda(y+x)=0 \\ 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases},$$

得 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$，

这是唯一可能的极值点．因为由问题本身可知最大值一定存在，

所以最大值就在这个可能的值点处取得．此时 $V=\dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3$．

考察多元函数的（条件）极值

2.计算 $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^{10}-1}}$ （10 分）

解：令 $t=1/x$, $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^{10}-1}} = \int_0^1 \dfrac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^{10}}} = \dfrac{1}{5}\int_0^1 \dfrac{d(t^5)}{\sqrt{1-t^{10}}}$

$= [\dfrac{1}{5}\arcsin(t^5)]_0^{1^+} = \dfrac{\pi}{10}$

五．证明题：（共 20 分）

1． 试证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$ （8 分）

证明：

令 $x=\frac{\pi}{2}-u$ 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

2．设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx=0$ 证明：在 $(0,\pi)$ 内方程 f(x)=0 至少存在两个根。(12 分)

（提示：设 $F(x)=\int_0^{x} f(x)dx$ ）

证：构造辅助函数：$F(x)=\int_0^{x} f(t)dt \quad ,0\le x\le \pi$。其满足在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 上可导。$F'(x)=f(x)$，且 $F(0)=F(\pi)=0$

由题设，有 $0=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi}\cos x dF(x)=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin x\cdot F(x)dx$，

有 $\int_0^{\pi} F(x)\sin x dx=0$，由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$ 即 $F(\xi)=0$

综上可知 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0,\quad \xi\in(0,\pi)$ 在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理，知存在

$\xi_1\in(0,\xi)$ 和 $\xi_2\in(\xi,\pi)$，使 $F'(\xi_1)=0$ 及 $F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

考察微分中值定理（罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理）、积分中值定理