

北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 集合论与图论 姓名： _____ 学号： _____

一、 (15 分) 设 A, B, C 是集合，试给出 $(A-B) \cap C = A - (B \cap C)$ 的充要条件和证明。

(1) 充要条件： (2) 证明充分性： (3) 证明必要性：

二、 (15 分) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，定义 $P(A)$ 上二元关系

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \subseteq A \text{ 且 } |(x-y) \cup (y-x)| = 1 \}.$$

试判断 R 是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性，并说明理由。

(1) 自反性： (2) 反自反性： (3) 对称性： (4) 反对称性： (5) 传递性：

三、 (15 分) 所谓“代数数”，指的是有理系数一元（任意有限次）多项式方程的根。由全体代数数构成的集合的基数是多少？给出证明。

四、 (10 分) 一共有多少个互不同构的 1 到 4 阶无向简单图？画出它们，并标出点色数。

五、 (15 分) 设图 G 的 100 个顶点编号为 1 到 100，两个顶点 i 和 j 相邻当且仅当 $|i-j|=8$ 或 $|i-j|=12$ 。

(1) 问 G 有多少个连通分支？为什么？

(2) 问 G 是不是二部图？为什么？

(3) 若 G 是二部图，问 G 是否有完备匹配？若 G 不是二部图，问 G 是否有完美匹配？为什么？

六、 (15 分) 回答下列问题：

(1) 为了让彼得森图成为平面图，至少需要删除几条边？为什么？

(2) 为了让彼得森图同时成为哈密顿图和欧拉图，可以增加一些边并且删除一些边。问增加和删除的总边数最少是多少？为什么？

七、 (15 分) 对于右图，试回答下列问题（写出必要的计算步骤）：

(1) 求出所有的极大独立集和最大独立集。

(2) 求出所有的极小点覆盖和最小点覆盖。

(3) 求出所有的极小支配集和最小支配集。

