装订线内　不要答题

北京大学信息科学技术学院期末试卷

考试科目：集合论与图论　姓名：__________　学号：__________

考试时间：2018 年 1 月 2 日　　任课教师：参考答案

题号	一	二	三	四	五				总分
分数									
阅卷人									

北京大学考场纪律

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场。在考试开始 30 分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

以下为试题和答题纸，共 5 大题。

得分

一、（20 分）设 n 是某个自然数，N 是自然数集，回答下列问题并给出证明：

（1） P(n)是否传递集？

证明： n 为传递集，A 为传递集 当且仅当 P(A)为传递集

所以 P(n)为传递集

（2） P(N)是否归纳集？

P(N)不是归纳集，$N^{+}=N\cup\{N\}\notin P(N)$，因为 P(N)的任意元素 A 都是 N 的子集，所以 A 的元素都是自然数。因此是有限集，所以 P(N)对后继运算不封闭，故 P(N)不是归纳集

得分

二、（20 分）对于无向图 $G_1=(V_1,E_1)$和 $G_2=(V_2,E_2)$，如果有函数 $f:V_1\rightarrow V_2$ 满足以下性质：对于任意的 $u,v\in V_1$，

$(u,v)\in E_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$，

则说 f 是从 G_1 到 G_2 的同态。把同态看作全体无向图上的二元关系，试回答下列问题并给出证明。

(1) 同态关系是否自反的？

是，恒等映射

(2) 同态关系是否反自反的？

不是，实际是自反的

(3) 同态关系是否对称的？

不是，K_1 同态到 K_2，反之不然。

(4) 同态关系是否反对称的？

不是，K_2 和 $K_{1,2}$ 互相同态

(5) 同态关系是否传递的？

是，由定义可知同态的合成还是同态

(6) 证明：图 G 可以 k-着色当且仅当 G 可以同态到 k 个顶点的完全图。

（$\Rightarrow$）设颜色集为$\{1,2,\ldots,k\}$，设完全图的顶点集为$\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$，
设 k-着色为 $g: V\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$，则同态为 $f:V\rightarrow\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$，
$f(v)=u_{g(v)}$，即着 $g(v)$色的同色顶点都对应到完全图同一个点 $u_{g(v)}$上。

（$\Leftarrow$）设完全图的顶点集为$\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$，设同态为 $f:V\rightarrow\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$，
则给 $f^{-1}(u_i)$中的顶点都着颜色 i。

得分

三、（20 分）（1）证明：一棵树的完美匹配若存在则是唯一的。

证明：

假设有两个不同的完美匹配 M1 和 M2，则 M1⊕M2 不为空，G(M1⊕M2)每个点的度数都为 2，则有圈，与树矛盾。

证明 2：每个树叶只能与它唯一的邻居进行匹配。删除已经匹配的饱和点后，新的树叶还是只能与它唯一的邻居进行匹配。依次进行下去，要么得出唯一的完美匹配，要么没有完美匹配。

（2）设 e 是完全图 K_n 的一条边，求 K_n-e 的生成树个数 $\tau(K_n\text{-}e)$。

$\tau(K_n)=n^{(n-2)}$，生成树由 n-1 条边组成，由对称性可知，每条边在所有生成树中用了 $(n-1)n^{(n-2)}/(n(n-1))/2 = 2n^{(n-3)}$

所以 $\tau(K_n-e) = n^{(n-2)} - 2n^{(n-3)} = (n-2)\,n^{(n-3)}$

得分

四、（20 分）（1） 设 G 是 n 阶简单图，有 m 条边、p 个连通分支。

证明：n-p ≤ m ≤ (n-p)(n-p+1)/2。

n-p≤m （用归纳法证明）或者考虑每个连通分支： ni≥mi-1

假设 G 的每个连通分支为完全图，这种情况下，又以 p-1 平凡图，1 个 n-p+1 阶完全图时变数最多，此时的边数为 1/2(n-p)(n-p+1)。

（2）证明：设图 G 的直径大于 3，则 G 的补图的直径≤3。

只需证：如果图 G 的直径 > 3，那么它的补图 $\bar{G}$ 的直径 ≤ 3。

证明：图 $G(V,E)$ 的直径 > 3，那么存在两点 u 和 v，它们之间最短路径的长度 > 3。

记 $N(u)$ 为与 u 相邻的点（包括 u），$N(v)$ 为与 v 相邻的点（包括 v）。

显然，$N(u)$ 与 $N(v)$ 为两个不相交的集合，且 $N(u)$ 与 $N(v)$ 中的点不相邻，因为否则 u、v 之间就有了一条长度 ≤ 3 的路径。

我们将图 G 中的点分为两部分：$P = N(u) \cup N(v)$ 和 $Q = V - P$，分别考察它们在 $\bar{G}$ 中的距离。

1. 对于 P 中的两点。

因为在图 G 中，$N(u)$ 与 $N(v)$ 中的点不相邻，所以在 $\bar{G}$ 中，$N(u)$ 中的任意一点与 $N(v)$ 中的任意一点均相邻，所以在 $\bar{G}$ 中，P 中任意两点的距离 ≤ 2。

2. 对于 Q 中的两点。

根据 $N(u)$ 和 $N(v)$ 的定义，在 G 中，Q 中的任意一点均不与 u、v 相邻，所以在 $\bar{G}$ 中，Q 中的任意一点均与 u、v 相邻，所以在 $\bar{G}$ 中，Q 中的任意两点 s、t 之间均有一条 $s \to u \to v \to t$ 的路径，其距离 ≤ 3。

3. 对于 P 中一点和 Q 中一点。

在 $\bar{G}$ 中，对于任意一点 $s \in N(u)$ 和 $t \in Q$，都有路径 $s \to v \to t$；同理，对于任意一点 $s \in N(v)$ 和 $t \in Q$，都有路径 $s \to u \to t$，其距离 ≤ 2。

证完了。

得分

五、（20 分）设图 G 如右图所示，试回答下列问题并给出证明。

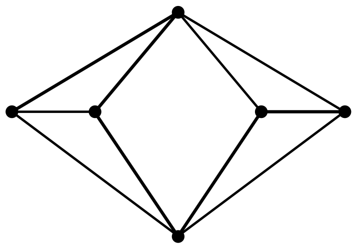

图 G

(1) 图 G 是否外平面图？

不是 （有 K_4 和 $K_{2,3}$ ）

(2) 图 G 的补图是否哈密顿图？

不是 （补图是不相交 C4 和 K2 的并。）

(3) 求图 G 的支配数$\gamma_0(G)$和点覆盖数$\alpha_0(G)$。

支配数为：2（上下两个顶点）

点覆盖数为：4 （有两个不相交的三角形，各自需要两个顶点）

(4) 求图 G 的点连通度$\kappa(G)$和边色数$\chi'(G)$。

点连通度：2（上下两个顶点是最小点割集）

边色数：4（等于最大度）