第五节

定积分的应用与推广

I、微元分析法

II、定积分在几何上的应用

III、定积分在物理上的应用

I、微元分析法

一、什么问题可以用定积分解决？

二、如何应用定积分解决问题？

一、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 是与区间$[a, b]$上的某分布 $f(x)$ 有关的一个整体量；

2) U 对区间 $[a, b]$ 具有可加性，即可通过

"大化小, 常代变, 近似和, 取极限"

表示为 $U=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

定积分定义 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、如何应用定积分解决问题？

第一步 利用“化整为零，以常代变”求出局部量近的似值 ——— 微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步 利用“积零为整，无限累加”求出整体量的精确值 ——— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这种分析方法成为**元素法**(或**微元分析法**)

元素的几何形状常取为：条，带，段，环，扇，片，壳 等

II、定积分在几何学上的应用

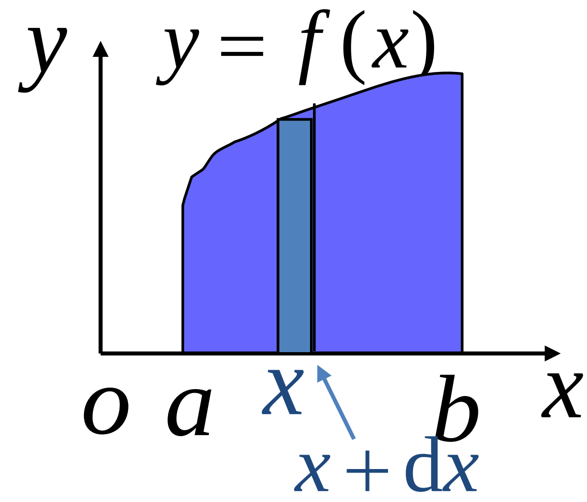
一、 平面图形的面积

二、已知平行截面面积函数的立体体积

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

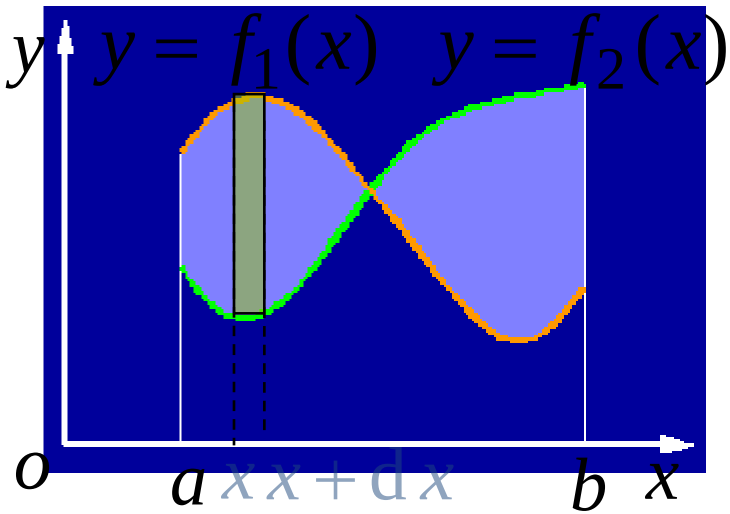
设曲线 $y=f(x)\ (\geq 0)$ 与直线 $x=a, x=b\ (a<b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A，则



$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

右下图所示图形面积为

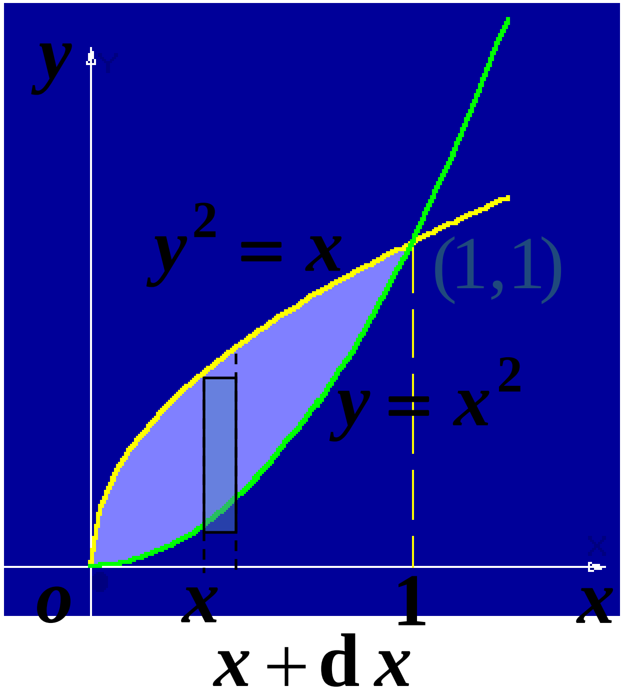


$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$

例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

得交点 $(0,0)$, $(1,1)$



$$\therefore\quad A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x$$

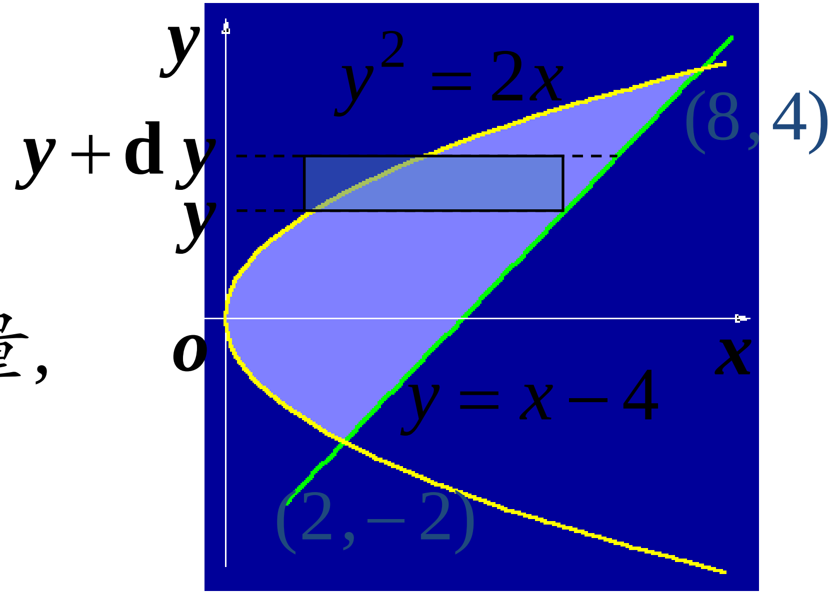
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

例2. 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点

$(2, -2), (8, 4)$

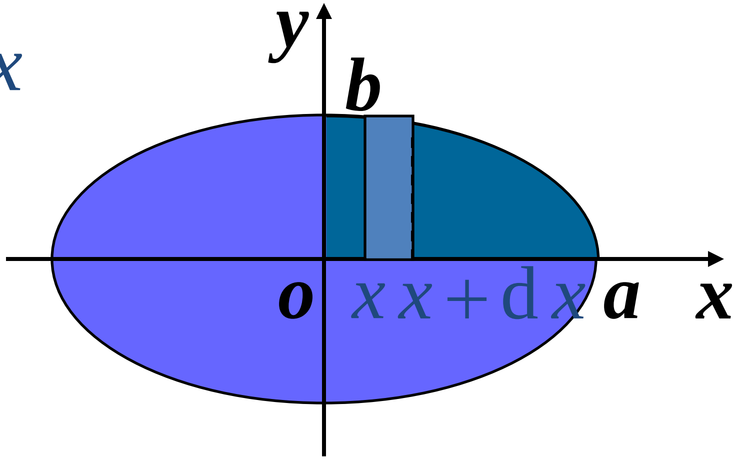


为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

$$\therefore \quad A = \int_{-2}^{4} (y + 4 - \tfrac{1}{2} y^2) \mathrm{d}y$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} y^2 + 4y - \tfrac{1}{6} y^3 \right]_{-2}^{4} = 18$$

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .



解: 利用对称性，有 $\mathrm{d}A=y\,\mathrm{d}x$

$$A=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

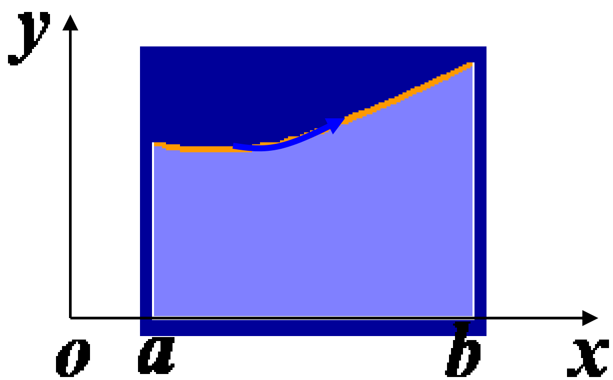
$$=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

当 $a=b$ 时得圆面积公式

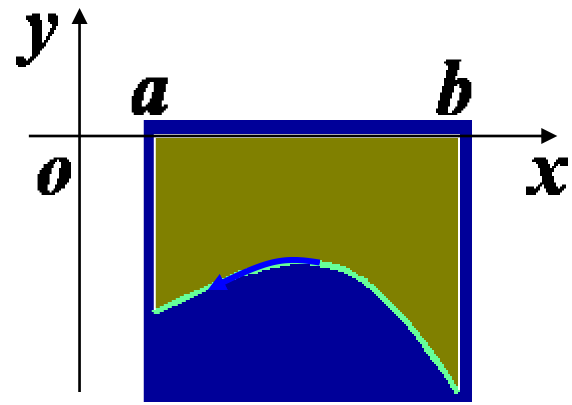
一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1, t_2



$(t_1$ 对应 $x = a)$

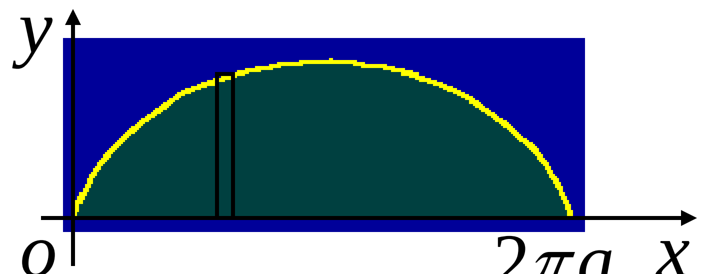


$(t_1$ 对应 $x = b)$

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

例4. 求由摆线 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积.

解: $A = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$



$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}u \qquad (令\ u = \frac{t}{2})$$

$$= 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$$

$$= 16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$

2. 极坐标情形（选讲）

设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta],\varphi(\theta)\geq 0$，求由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积.

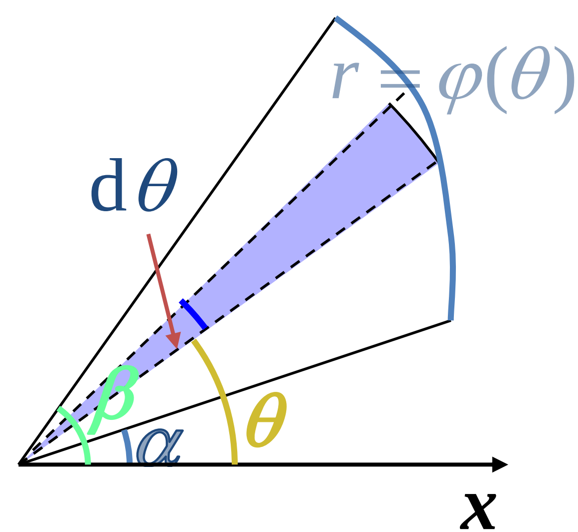
在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

所求曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

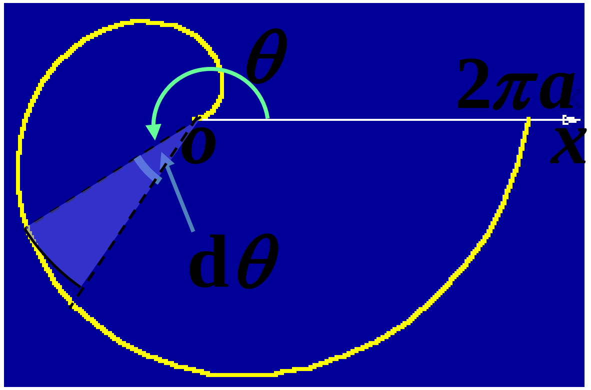


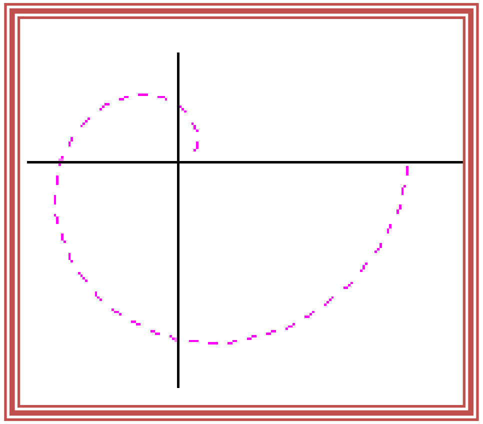
例5. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta\ (a>0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .

解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$





点击图片任意处
播放开始或暂停

例6. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围图形的面积 .

(利用对称性)

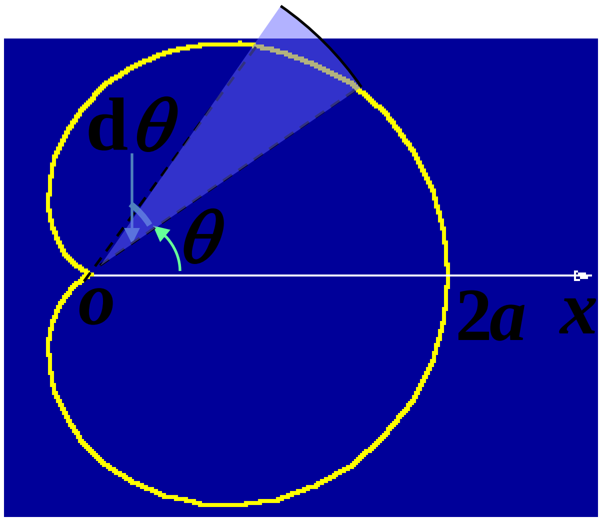
解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$

$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2} \,\mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$



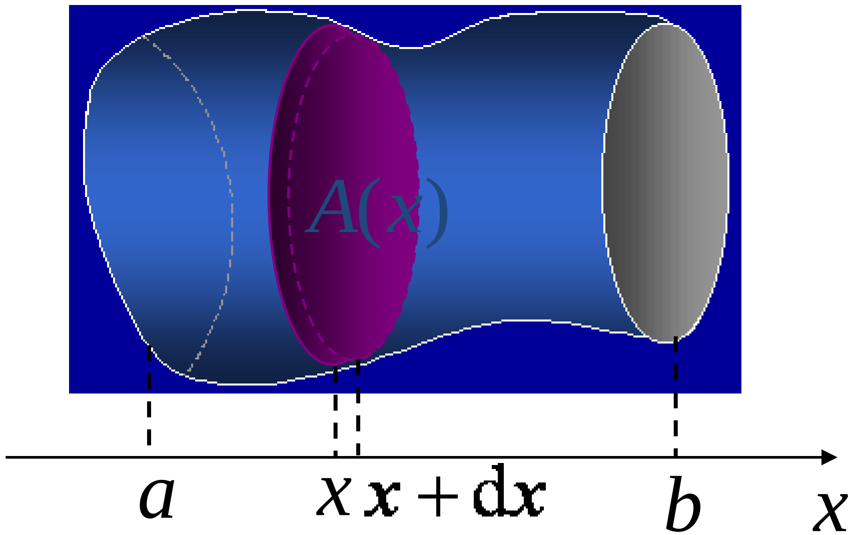
三、已知平行截面面积函数的立体体积

设所给立体垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$, $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则对应于小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

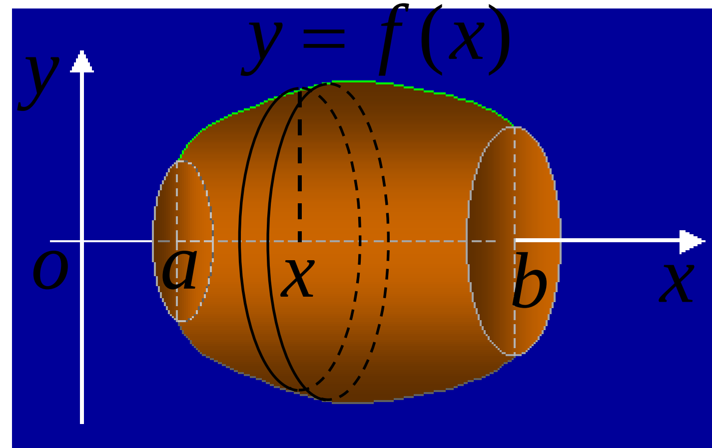
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



特别，当考虑连续曲线段 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时，有

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

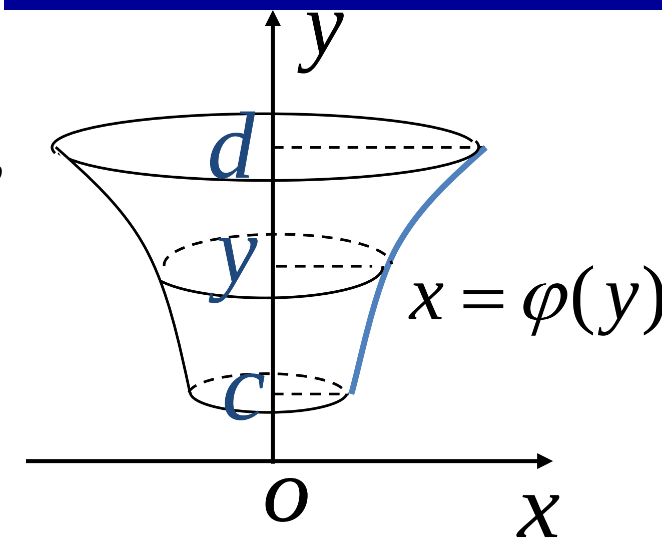


当考虑连续曲线段

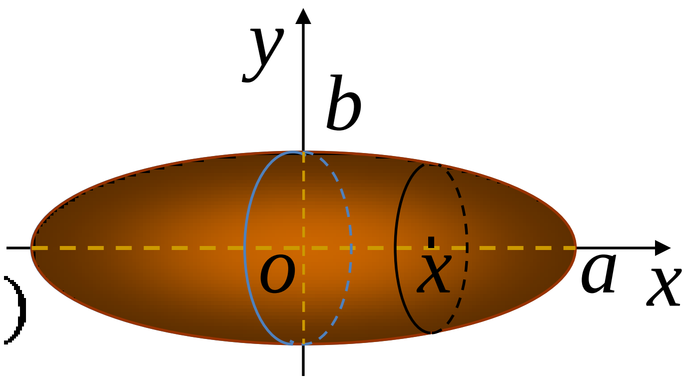
$$x=\varphi(y)\ (c\le y\le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时，有

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}y$$



例7. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.



解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$

则 $V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x$ (利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

方法2　利用椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则　$V = 2\int_0^a \pi y^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

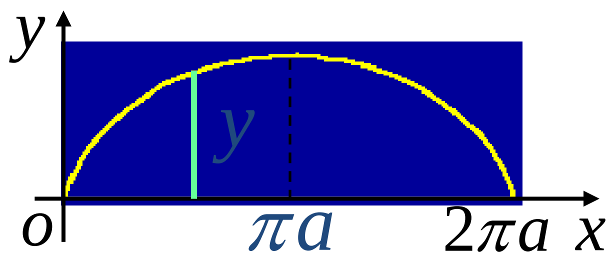
$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当$b = a$时，就得半径为a的球体的体积$\frac{4}{3}\pi a^3$.

例8. 计算摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$的一拱与 $y=0$

所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积.

解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$

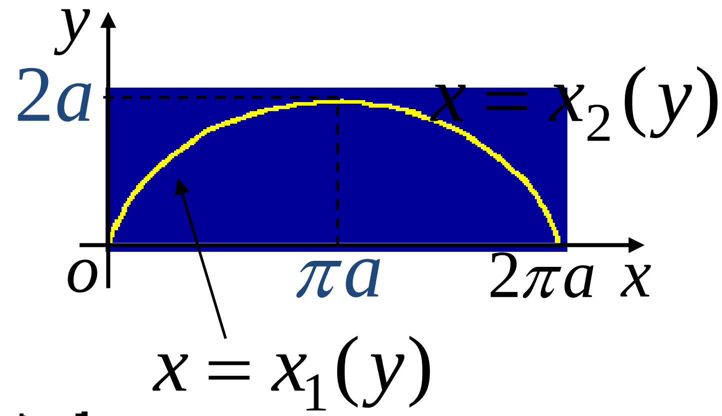
利用对称性

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 \,\mathrm{d}t = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t \quad (令\, u = \frac{t}{2})$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \,\mathrm{d}u = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t \,\mathrm{d}t$$

注意上下限！

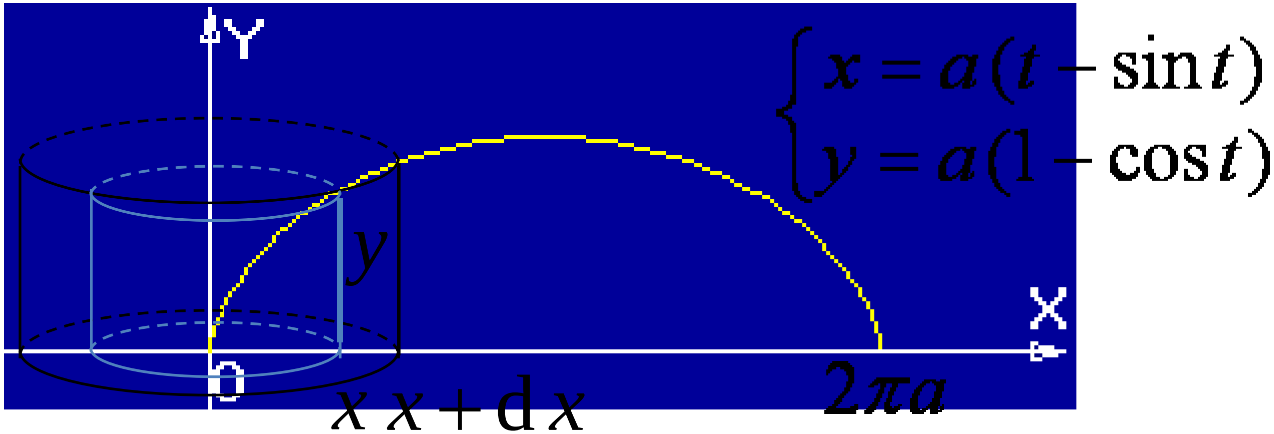
$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3$$

注

说明：V_y也可按柱壳法求出



柱面面积 $2\pi x \cdot y$　　　柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t) \cdot a^2(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t$$

$$V_y = \cdots$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \, \mathrm{d} t$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin^4 \frac{t}{2} \mathrm{d} t$$

令 $u = \dfrac{t}{2}$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} (2u - \sin 2u) \sin^4 u \, \mathrm{d} u$$

令 $v = u - \dfrac{\pi}{2}$

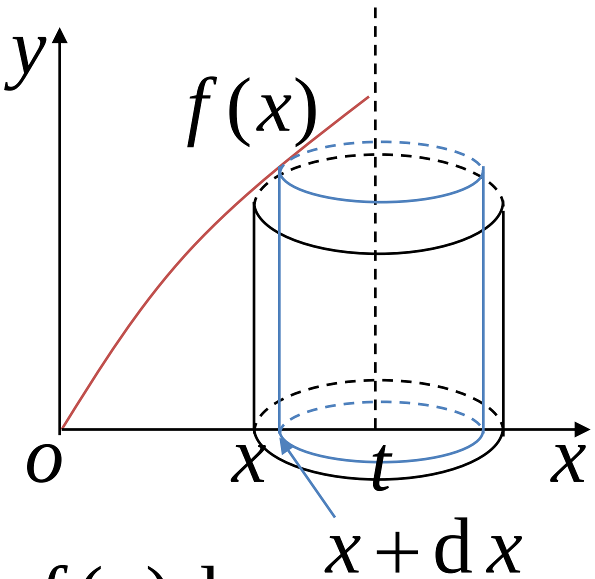
$$= 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underline{2v} + \underline{\pi} + \underline{\sin 2v}) \underline{\cos^4 v} \, \mathrm{d} v = 6\pi^3 a^3$$

偶函数

奇函数

例9. 设 $y=f(x)$ 在 $x\geq 0$ 时为连续的非负函数，且 $f(0)=0$, $V(t)$ 表示 $y=f(x)$, $x=t\,(>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积，证明:

$$V''(t)=2\pi f(t).$$



证: 利用柱壳法

$$\mathrm{d}V=2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

则

$$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

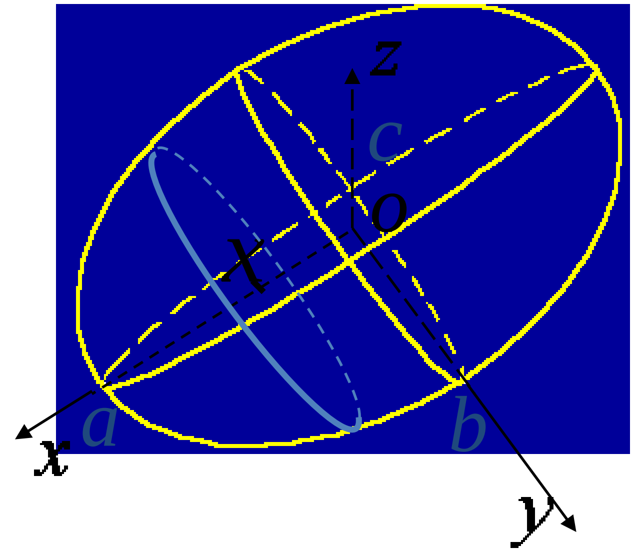
$$=2\pi t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V'(t)=2\pi\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\cancel{2\pi t f(t)}-\cancel{2\pi t f(t)}$$

故

$$V''(t)=2\pi f(t)$$

例10. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围立体(椭球体)的体积.



解: 垂直 x 轴的截面是椭圆

$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1$$

它的面积为 $A(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\ (-a\le x\le a)$

因此椭球体体积为

$$V=2\int_0^a \pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\mathrm{d}x=2\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi abc$$

特别当 $a=b=c$ 时就是球体体积.

内容小结

上下限按顺时针方向确定

1. 平面图形的面积

边界方程 $\begin{cases} \text{直角坐标方程} \\ \text{参数方程} \quad A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ \text{极坐标方程} \quad A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

2. 平面曲线的弧长

弧微分： $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

注意：求弧长时积分上下限必须上大下小

曲线方程 $\begin{cases} \text{直角坐标方程} \\ \text{参数方程方程} \\ \text{极坐标方程} \quad \mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

3. 已知平行截面面面积函数的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

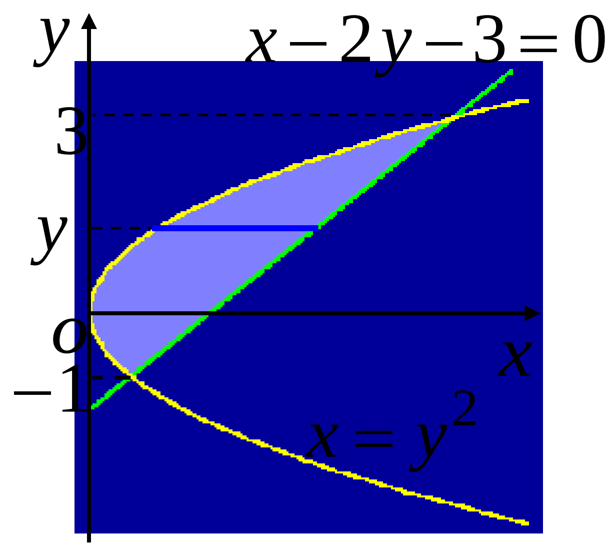
$\Longrightarrow$ 旋转体的体积

$$y=y(x)\begin{cases}\text{绕 } x \text{ 轴：} & A(x)=\pi y^2 \\ \text{绕 } y \text{ 轴：} & A(x)=2\pi xy \quad \text{(柱壳法)}\end{cases}$$

思考与练习

1.用定积分表示图中阴影部分的面积 A 及边界长 s .

提示: 交点为$(1,-1),(9,3)$, 以 x 为积分变量 , 则要分两段积分, 故以 y 为积分变量.



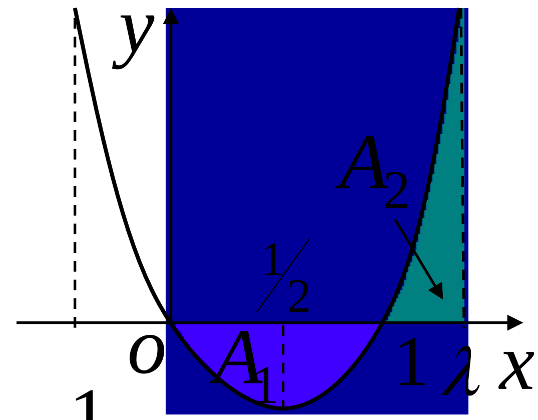
$$A=\int_{-1}^{3}[\,(2y+3)-y^2\,]\,\mathrm{d}y=\frac{32}{3}$$

弧线段部分　　直线段部分

$$s=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{3}\sqrt{1+2^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{9\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{37}}{2}+\frac{1}{4}\left[\ln(6+\sqrt{37})+\ln(2+\sqrt{5})\right]$$

1. λ 为何值才能使 $y=x(x-1)$ 与 x 轴围成的面积等于 $y=x(x-1)$ 与 $x=\lambda$ 及 x 轴围成的面积.



解: $y=x(x-1)$ 与 x 轴所围面积

$$A_1=\int_0^1 -x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$\lambda\geq 0$时,

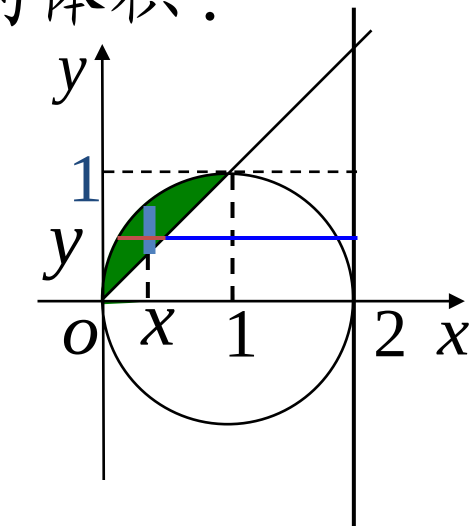
$$A_2=\int_1^{\lambda} x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{6}$$

由 $A_1=A_2$, 得 $\lambda^2(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{2})=0$, 故

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\quad \lambda_2=0$$

由图形的对称性, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$, $\lambda_4=1$ 也合于所求.

2. $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.



提示：选 x 为积分变量.

旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi$$

若选 y 为积分变量，则

$$V=\pi\int_0^1\left[\,2-(1-\sqrt{1-y^2})\,\right]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-y)^2\,\mathrm{d}y$$

III、定积分在物理学上的应用

一、 变力沿直线所作的功

二、 液体的侧压力

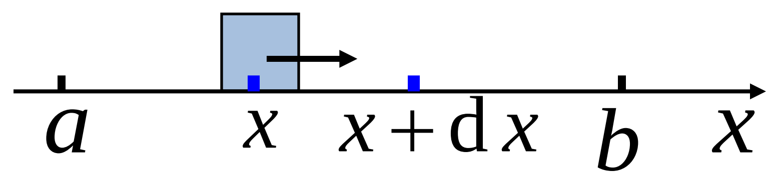
三、 引力问题

一、 变力沿直线所作的功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x = a$ 移动到 $x = b$, 力的方向与运动方向平行, 求变力所做的功 .

在 $[a,b]$ 上任取子区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$, 在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$$



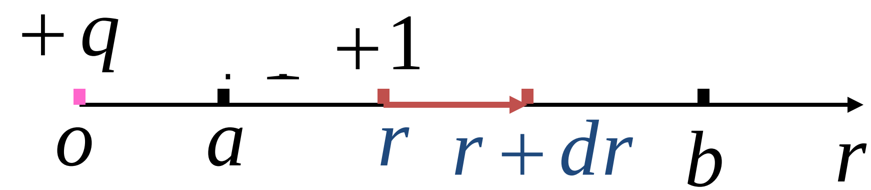
因此变力 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

例1. 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a<b)$，求电场力所作的功．

解： 当单位正电荷距离原点 r 时，由**库仑定律**电场力为

$$F=k\frac{q}{r^2}$$



则功的元素为 $\mathrm{d}W=\dfrac{kq}{r^2}\mathrm{d}r$

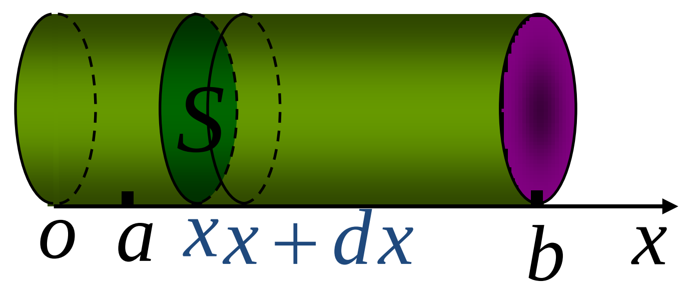
所求功为 $$W=\int_a^b\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

说明： 电场在 $r=a$ 处的电势为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{kq}{a}$

例2. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体, 由于气体的膨胀, 把容器中的一个面积为S 的活塞从点 a 处移动到点 b 处 (如图), 求移动过程中气体压力所作的功 .

解: 建立坐标系如图. 由波义耳—马略特定律知压强 p 与体积 V 成反比 , 即 $p=\dfrac{k}{V}=\dfrac{k}{xS}$, 故作用在活塞上的力为

$$F=p\cdot S=\frac{k}{x}$$



功元素为

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=\frac{k}{x}\mathrm{d}x$$

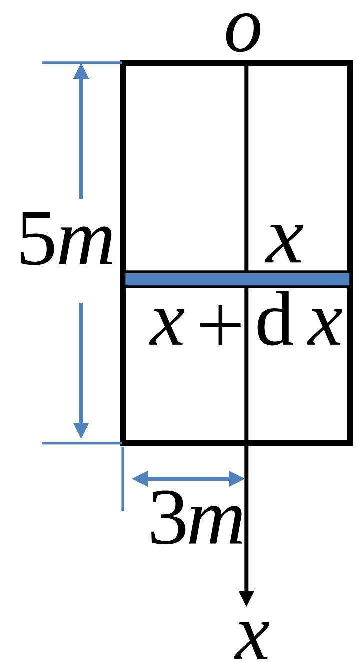
所求功为

$$W=\int_a^b\frac{k}{x}\mathrm{d}x=k\left[\ln x\right]_a^b=k\ln\frac{b}{a}$$

例3. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m, 底圆半径为3m, 试问要把桶中的水全部吸出需作多少功?

解: 建立坐标系如图. 在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的一薄层水的重力为

$$g\cdot\rho\cdot\pi 3^2\,\mathrm{d}x \quad (\mathrm{KN})$$



这薄层水吸出桶外所作的功(**功元素**)为

$$\mathrm{d}W = 9\pi g\,\rho\, x\,\mathrm{d}x$$

故所求功为

$$W = \int_0^5 9\pi g\,\rho x\,\mathrm{d}x = 9\pi g\,\rho \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5$$

$$= 112.5\pi g\,\rho \;(\mathrm{KJ})$$

设水的密度为 ρ

二、液体侧压力

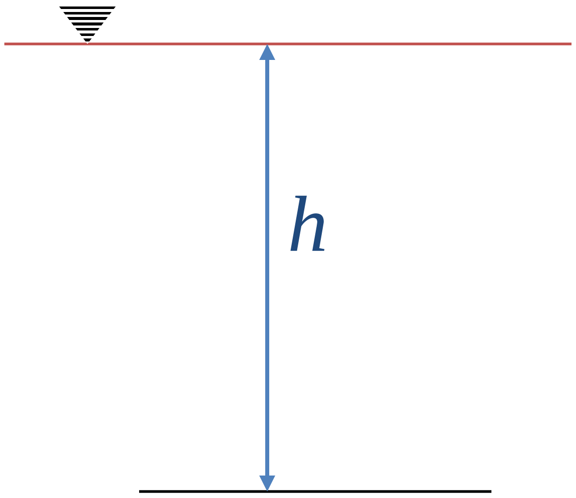
设液体密度为 ρ

深为 h 处的压强：$p = g\rho h$

- 当平板与水面平行时,

平板一侧所受的压力为

$$P = pA$$



面积为 A 的平板

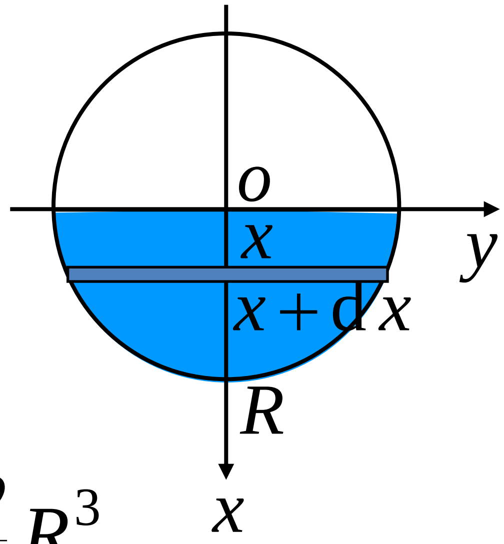
- 当平板不与水面平行时,

所受侧压力问题就需用积分解决 .

例4. 一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为ρ的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解: 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \quad (0 \le x \le R)$$



利用对称性,侧压力元素

$$\mathrm{d}P = 2\,\mathrm{g}\,\rho x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

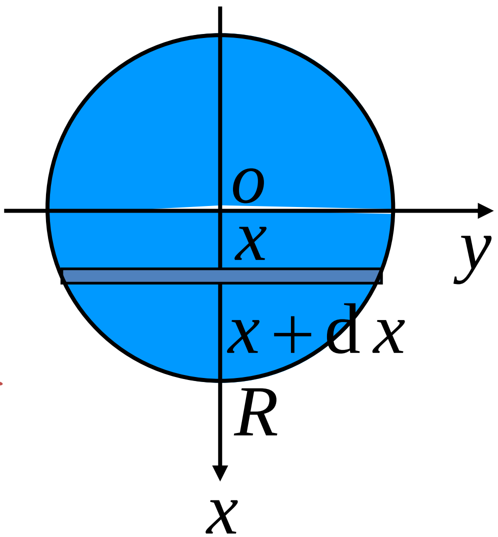
端面所受侧压力为

$$P = \int_0^R 2\,\mathrm{g}\,\rho\, x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{g}\,\rho}{3}R^3$$

说明: 当桶内充满液体时,小窄条上的压强为 $g\,\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}P = 2\,g\,\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

故端面所受侧压力为



$$P = \int_{-R}^{R} 2g\,\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

奇函数

$$= 4R\,g\,\rho\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = R\sin t$ (P350 公式67)

$$= 4R\,g\,\rho\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R$$

$$= \pi\,g\,\rho\,R^3$$

内容小结

1.用定积分求一个分布在某区间上的整体量 Q 的步骤:

(1) 先用微元分析法求出它的微分表达式 $\mathrm{d}Q$

一般微元的几何形状有: **条**、**段**、**环**、**带**、**扇**、**片**、**壳** 等.

(2) 然后用定积分来表示整体量 Q, 并计算之.

2.定积分的物理应用:

变力作功，侧压力等.

作业

P173-174

24； 25； 26（1）； 28