

北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目: 集合论与图论 姓名: _____ 学号: _____

一、(20 分) 单项选择题

- (1) 设 A, B, C 是集合, 则 $B=A$ 是 $A \cup (B \cap C) = A$ 的 ()
A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 都不对
- (2) 反自反的和传递的二元关系一定是 ()
A. 对称的 B. 反对称的 C. 既不对称也不反对称 D. 都不对
- (3) 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $\{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle\}$ 是 A 到 B 的 ()
A. 全函数 B. 偏函数 C. 真偏函数 D. 都不对
- (4) 自然数 3 等于 ()
A. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ B. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ C. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ D. 都不对
- (5) 每一个自然数都是 ()
A. 归纳集 B. 传递集 C. 无穷集 D. 都不对
- (6) 竞赛图一定是 ()
A. 哈密顿图 B. 单向连通的 C. 强连通的 D. 都不对
- (7) 非同构的 6 阶无向树有 ()
A. 5 种 B. 6 种 C. 7 种 D. 都不对
- (8) 非同构的 8 阶自补自对偶简单平面图有 ()
A. 0 种 B. 1 种 C. 2 种 D. 都不对
- (9) 11 阶 4-正则简单图一定是 ()
A. 欧拉图 B. 哈密顿图 C. 平面图 D. 都不对
- (10) 每个非平凡无向树一定是 ()
A. 欧拉图 B. 哈密顿图 C. 平面图 D. 都不对

二、(30 分) 填空题

- (1) 设谓词 $M(x)$ 表示“ x 是人”， $F(x)$ 表示“ x 爱吃糖”。当采用全总个体域时，“有的人爱吃糖”可符号化为_____。当采用全体人作为个体域时，“所有人爱吃糖”可符号化为_____。
- (2) 有序对 $\langle a, b \rangle$ 的定义是_____，卡式积 $A \times B$ 的定义是_____。
- (3) 设 $|A|=n$, $|B|=m$, 当 $n \leq m$ 时, $A \rightarrow B$ 中单射的个数是_____, 双射的个数是_____, 满射的个数是_____。
- (4) 皮亚诺系统是三元组 $\langle M, F, e \rangle$, 其中 M 是_____, F 是_____, e 是_____, 满足以下 5 条公设: _____, _____, _____, _____, _____。
- (5) 集合 A 的后继是_____。归纳集是包含_____并且_____的集合。递归集是_____的集合。
- (6) 无向图的握手定理是说_____。
- (7) 无向完全图 K_4 中, 两个不同顶点之间长度为 3 的通路总数是_____, 两个不同顶点之间长度不超过 3 的通路总数是_____。
- (8) 平面图的充要条件是不含有_____和_____作为可同胚到或可边收缩到的子图。外平面图的充要条件是不含有_____和_____作为可同胚到或可边收缩到的子图。
- (9) 无向图有完美匹配的充要条件是: 删除任意一组顶点后, _____的个数不超过_____。
- (10) 二部图有完备匹配的充要条件是: 从一侧任选一组顶点, _____的顶点个数不低于_____。

三、(10 分) 求有理数的全体有穷子集构成的集合的基数，并证明。

四、(10 分) 设 $A=\{1,2,3\}$ ，回答下列问题并说明理由。

- (1) A 上不同的二元关系有多少个？
- (2) A 上不同的良序关系有多少个？
- (3) A 上不同的等价关系有多少个？
- (4) A 上不同的传递关系有多少个？

五、(10 分) 回答下列问题，并说明理由。

- (1) 彼得森图的最小顶点覆盖包含几个顶点？
- (2) 彼得森图的最小支配集包含几个顶点？
- (3) 彼得森图中不相邻的两个顶点之间最多有几条独立路径？
- (4) 在边长都为 1 的彼得森图上，中国邮递员问题最佳路线的长度为多少？

六、(10 分) 如果在一个简单图中，任意两个不同顶点之间都恰好有一条长度为 2 的通路，那么这个简单图一定是奇数阶吗？一定是平面图吗？试证明你的结论。

七、(10 分) 对于右图，求出色多项式（写出必要的计算步骤）并回答问题。

(1) 求色多项式。

(2) 该图有多少种不同的 3 着色？

(3) 该图有多少种不同的 4 着色？

