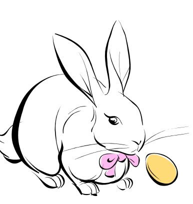
# 期中考试分析

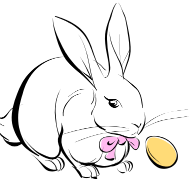


# 一、判断题

1. $x \to 0$时，$x\sin x$与$(e^x-1)\ln(1+x)$是等价无穷小量。

如果lim（β/α）=1，则β与α为等价无穷小
如果lim（β/α）=C≠0，则β与α为同阶无穷小

0/0型，利用洛必达法则易知 xsinx与(e^x-1)ln(1+x)为等价无穷小。



# 一、判断题

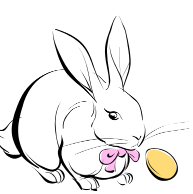
2. $y=\sin 2x+\sin \pi x$是周期函数。

**错误**。

Sin2x最小周期为π，sinπx最小周期为2，

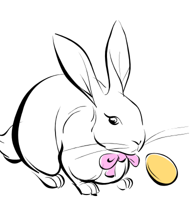
则Sin2x周期应该kπ，sinπx为2n  k,n为正整数。

无论k,n怎么取值,显然kπ≠2n



3. 设函数$\{x_n\}$的极限不存在，$\{y_n\}$的极限存在，则$\{x_n+y_n\}$的极限一定不存在

**正确**。因为若{xn+yn} 的极限存在，则由{yn} 的极限存在，根据极限的四则运算可以推出{xn+yn-yn}极限存在 ,即{xn}极限存在，与题设矛盾。

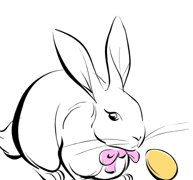


4. $f(x)=\begin{cases} x\tan\dfrac{1}{x^{1/3}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续。

错误。$\lim\limits_{x\to 0^+} x\tan\dfrac{1}{x^{1/3}}=\lim\limits_{x\to 0^-} x\tan\dfrac{1}{x^{1/3}}=f(0)=0$

5. 拐点就是二阶导数等于零或不存在的函数点。

改变曲线的凹凸性的点
拐点一定使得二阶导为零，或者二阶导不存在，反之则不对
只有当二阶导在x0两侧异号，x0才是拐点。



## 二、选择题

1. 设 f(x)为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

（A）在 x=0 处左极限不存在

（B）有跳跃间断点 x=0

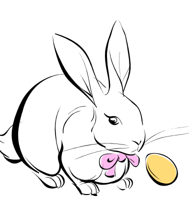
（C）在 x=0 处右极限不存在

（D）有可去间断点 x=0

分析：$f(x)$为不恒等于0的奇函数，故$f(0)=0$,

故$g_{0^+}=g_{0^-}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$

故选D



2. $x \to 0$ 时 $(e^{2x}-1)(1-\cos x)$ 是 $x^3$ 的(　　)

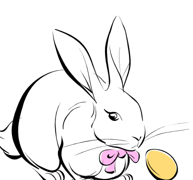
（A）同阶无穷小但非等价无穷小　　（B）等价无穷小

（C）低阶无穷小　　（D）高阶无穷小

分析：$e^{2x}-1 \sim 2x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

所以 $(e^{2x}-1)(1-\cos x) \sim x^3$

故选B



3．曲线 $y=x^3-3x^2-9x+11$ 在区间 $(1,2)$ 内的一段弧是（）

（A）上升，凹的　（B）上升，凸的　（C）下降，凹的　（D）下降，凸的

分析：$y'=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1),\ y''=6x-6=6(x-1)$

$x\in(1,2)$时，$y'<0,\ y''>0$

故选C

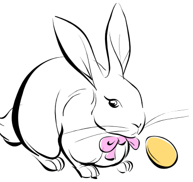
4. 设 $y = xe^x$ 则 $y^{(n)}$=(　　)

（A）$nxe^x$　　（B）$(n-x)e^x$　　（C）$(n+x)e^x$　　（D）$(1+x)^n e^x$

分析：$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x, y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

依次类推$y^{(n)} = (n+x)e^x$

故选C



5. 函数 $y = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$（　）

（A）有极大值 0　　　　（B）有极大值 1

（C）有极小值-1　　　　（D）无极值

分析：x=1时，$y' = 1 - x^{-\frac{1}{3}} = 0$

当$x > 1$时，$y' > 0$；当0<x<1时，$y' < 0$；当$x < 0$时，$y' > 0$；

故$y$在$x = 1$处取极小值y（x=1）=$-\frac{1}{2}$，在$x = 0$处取极大值y（x=0）=0

故选A

# 三、填空题

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\leq 1\\ x+1, & 1<x\leq 4,\end{cases}$，

并且 $g(x)=f(x^2)+f(3+x)$，则 $g(x)$ 的定义域为 $\underline{\quad[-2,0)\cup(0,1]\quad}$

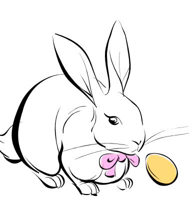
f(x)定义域（0,4]

g(x)的定义域是f($x^2$)与f(x)各自定义域的交集

$0<x^2\leq 4 \rightarrow x\in[-2,0)\cup(0,2]$

$0<x+3\leq 4 \rightarrow x\in(-3,1]$

$\{[-2,0)\cup(0,2]\}\cap\{(-3,1]\}\rightarrow[-2,0)\cup(0,1]$

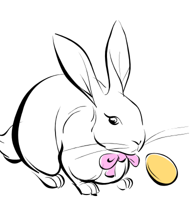


2. 设 $f(x)=\ln(1-2x)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $\dfrac{-2}{2x_0-1}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$: 表示-f′(x0),即在x0处的一阶导数的相反数

很容易求得x0处一阶导数的相反数为：$\dfrac{-2}{2x_0-1}$

注意，题目要求x0处的导数，严格来讲 $\dfrac{-2}{2x-1}$ 是不对的



3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x-c}\right)^x=e$，则 a=______, b=______, c=______

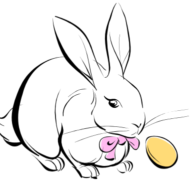
考察重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

X→∞，若a≠0，则 $\frac{ax^2+bx+c}{x-c}\to\infty$，故a=0

$$将\lim_{x\to\infty}\left(\frac{bx+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{bx-bc}{x-c}+\frac{bc+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(b+\frac{bc+c}{x-c}\right)^x$$

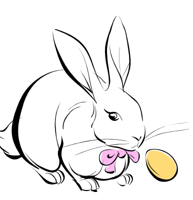
$$\xrightarrow{b=1}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2c}{x-c}x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2c}{x-c}x}=e^{2c}=e,故c=\frac{1}{2}$$



4. 设曲线 $y=1-x^2$ 与直线 $x=-1$ 的交点为 P，则曲线 $y=1-x^2$ 在 P 处的切线方程为________________

$\begin{cases} y=1-x^2 \\ x=-1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ ,$P(-1,0)$ $y'|_{x=-1}=2$

切线方程：（$y-0$）$=y'*[x-(-1)]$,即：$y=2x+2$



5. 函数 $f(x)=x^3+2x$ 区间[0,1]上满足于拉格朗日定理条件，则定理中的

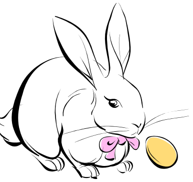
$\xi=$______

已知满足拉格朗日条件的函数满足：

$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$

$f'(\xi)=[f(b)-f(a)]/(b-a)=[f(1)-f(0)]/1=3$

$f'(\xi)=3\xi^2+2=3,\ \xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

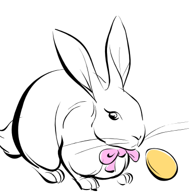


## 四、计算题

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{4}}\right)^{\frac{n-1}{4}}\right]^4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)=e^4$$

主要考点: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$



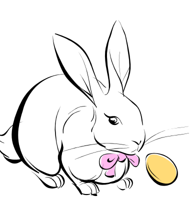
$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2})^{\cot^2 x}=\lim_{x\to 0} e^{\cot^2 x\ln\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2}\cot^2 x\ln(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{2\tan x\sec^2 x}=\frac{1}{2}$$

故原式=$e^{\frac{1}{2}}$

主要考点：洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$



$$\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} \ln a \frac{-1}{x^2} - b^{\frac{1}{x}} \ln b \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

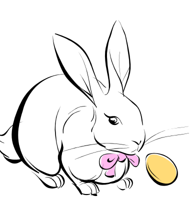
$$= \lim_{x\to\infty} (a^{\frac{1}{x}} \ln a - b^{\frac{1}{x}} \ln b) = \ln \frac{a}{b}$$

主要考点：洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}$$

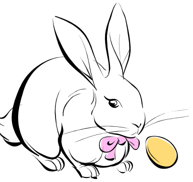
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{4}$$

主要考点：洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**很多同学求导求错!**

$$(\sqrt{1-x})'=?$$



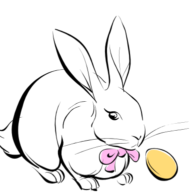
## 求函数的导函数

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\arccos\frac{1}{x}$$

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})+\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}(-\frac{1}{x^2})$$

$$=\frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

主要考点：
基本函数与复合函数求导

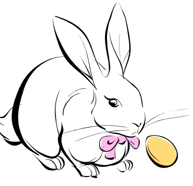


$$y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$$

两边取对数：$\ln y = x\ln\ln x-(\ln x)^2$

两边对x求导：$\frac{1}{y}y' = \ln\ln x + x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}-2\ln x\frac{1}{x}$

$$y'=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln\ln x + x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}-2\ln x\frac{1}{x}\right)$$



参看课件：《导数的运算法则与基本公式》
例9. 幂指函数求导

# 五、证明题

设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，

求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f^{'}(\xi)=1$。

分析：要证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f^{'}(\xi)=1$，即证明 $F^{'}(\xi)=f^{'}(\xi)-1=0$

很自然的想到构造函数 $F(x)=f(x)-x$，如果在 $x_1$ 和 $x_2\in(0,1)$，使得

$F(x_1)=0$ 和 $F(x_2)=0$，由于F(x)在定义域内连续可导，便可以知道

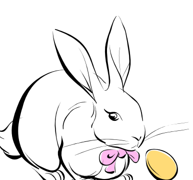
存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F^{'}(\xi)=0$，这样原命题得证。

实际上我们知道

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad F(1)=f(1)-1=0-1=-1$$

故可知存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $F(\eta)=0$

又由于F(0)=f(0)-0=0



故存在 $\xi\in(0,\eta)\in(0,1)$，使得 $F^{'}(\xi)=0$

# 六、解答题

设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续可导，且 $g(0)=1$。

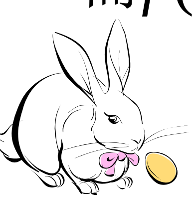
(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

分析：f (x) 在定义域为 $x\neq 0$ 时，表达式为 $\dfrac{g(x)-\cos x}{x}$，是连续函数，

要使f (x) 在 $x=0$ 处也连续，必须满足 $f_{0^+}(x)=f_{0^-}(x)=f(a)$。

又 $f_{0^+}(x)=f_{0^-}(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[g'(x)+\sin x]=g'(0)$

而 $f(a)=a$，所以 $a=g'(0)$



主要考点：连续的定义

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续可导，且 $g(0)=1$。

(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续时，求 $f'(x)$。

分析：当f(x)在定义域为$x\neq 0$时，其为连续可导函数，故

$$f'(x)=\left(\frac{g(x)-\cos x}{x}\right)'=\frac{1}{x}[g'(x)+\sin x]-\frac{1}{x^2}[g(x)-\cos x]$$

当f(x)在定义域为$x$=0时，其导数值需由导数的定义来计算，

$$即 f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}=\frac{g''(0)+1}{2}$$

考点：导数的定义

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}[g'(x)+\sin x]-\dfrac{1}{x^2}[g(x)-\cos x]\ldots x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)+1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=0\end{cases}$$

设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续可导，且 $g(0)=1$。

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

分析：由第二问我们已经知道$f(x)$的导函数表达式为

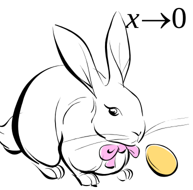
$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}[g'(x)+\sin x]-\dfrac{1}{x^2}[g(x)-\cos x]\ldots x\neq 0 \\ \dfrac{g''(0)+1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=0 \end{cases}$$

考点：连续的定义

要讨论其连续性，即分析$x\neq 0$时，$f'(x)$在$x=0$的极限值

与$x=0$时，$f'(x)$的函数值之间的关系

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}=\frac{g''(0)+1}{2}=f'(0)$$



故$f'(x)$在x=0处是连续的

# 七、作图题

试作出函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图形（要求：写出定义域、极值点、单调区间，列出表格，求出渐近线，作出图形）

**定义域：** 由 $1+x\neq 0$ 可得函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$。

**间断点：** $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2}{1+x}=+\infty$，因此点 $x=-1$ 为函数的第二类间断点。

(2)**单调区间：** 对函数在定义域内求导得 $y'=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$

令 $y'=0$ 得 $x_{1,2}=-2,0$，易知 $y'\begin{cases}>0, x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)\\ <0, x\in(-2,-1)\cup(-1,0)\end{cases}$，因而，

$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ 是单调递增区间；$(-2,-1)\cup(-1,0)$ 是单调递减区间。

试作出函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图形（要求：写出定义域、极值点、单调区间，列出表格，求出渐近线，作出图形）

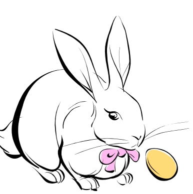
(3) **极值点：** 函数的二阶导数为

$$y''=\frac{(1+x)^2(2x+2)-2\left(x^2+2x\right)(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2x+2}{(1+x)^4}=\frac{2}{(1+x)^3}\begin{cases}>0, x>-1\\<0, x<-1\end{cases}$$

根据函数取得极值的充分条件

$x=-2$ 时 $y'=0, y''<0$，因此 $x=-2$ 是函数的极大值点；

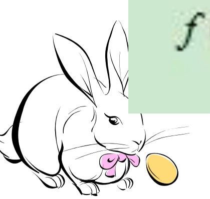
$x=0$ 时 $y'=0, y''>0$，因此 $x=0$ 是函数的极小值点。



试作出函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图形（要求：写出定义域、极值点、单调区间，列出表格，求出渐近线，作出图形）

(4) **列表：**

| 区间 | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | / | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | / | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $\uparrow$ | $-4$ | $\downarrow$ | / | $\downarrow$ | $0$ | $\uparrow$ |
| $f(x)$ | 凸 | 极大 | 凸 | / | 凹 | 极小 | 凹 |



试作出函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图形（要求：写出定义域、极值点、单调区间，列出表格，求出渐近线，作出图形）

(5)**渐近线：**下面求渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)}-x=-1$$

所以渐近线方程为 $x=-1$ 和 $y=x-1$。