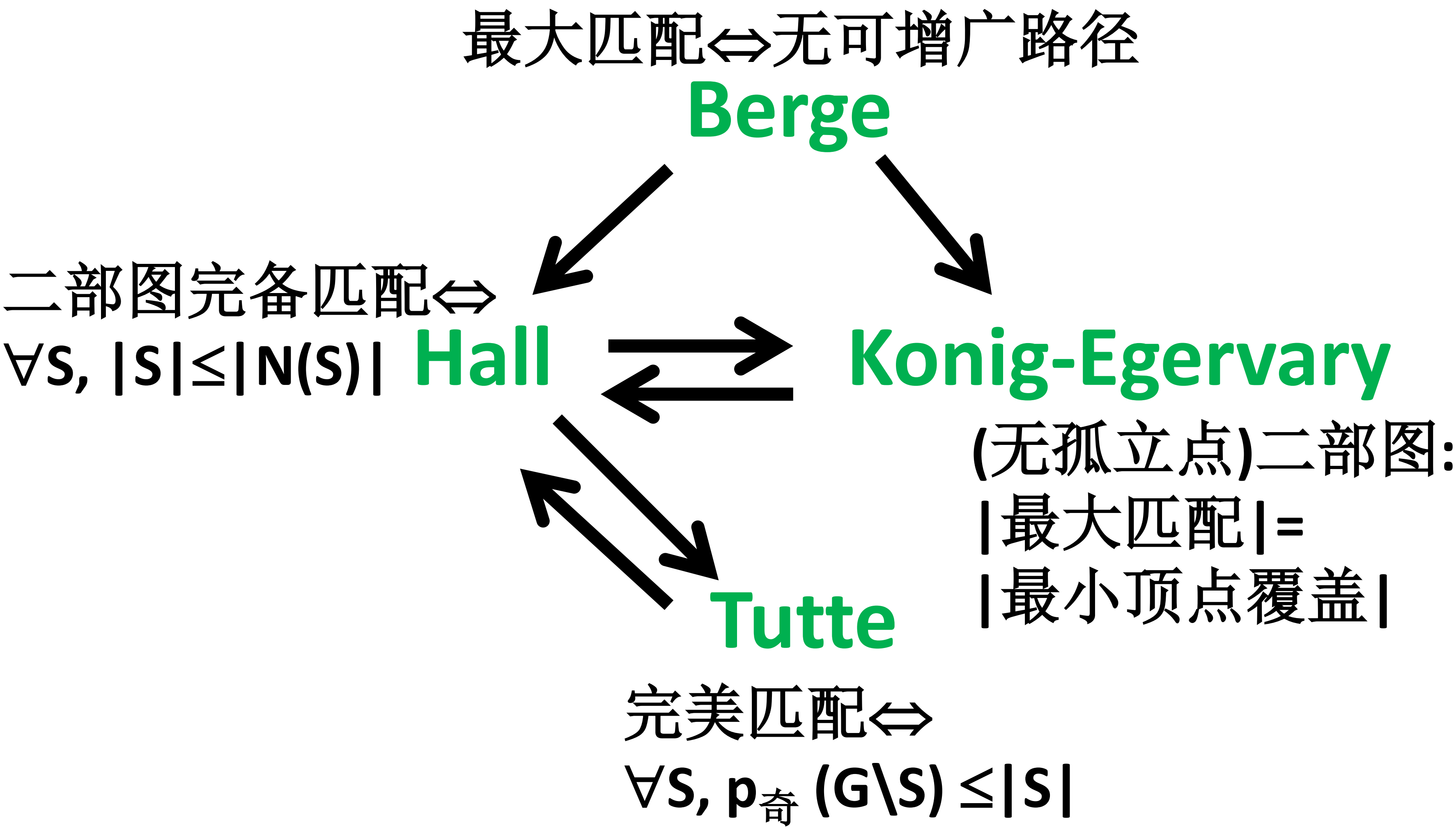
几个图论定理的互相证明


最大匹配⇔无可增广路径
Berge
二部图完备匹配⇔
∀S, |S|≤|N(S)|
Hall
Konig-Egervary
(无孤立点)二部图:
|最大匹配|=
|最小顶点覆盖|
Tutte
完美匹配⇔
∀S, p奇 (G\S) ≤|S|

最大匹配⇔无可增广路径 Berge ⟶ 二部图完备匹配⇔ $\forall S,\ |S|\le|N(S)|$ Hall

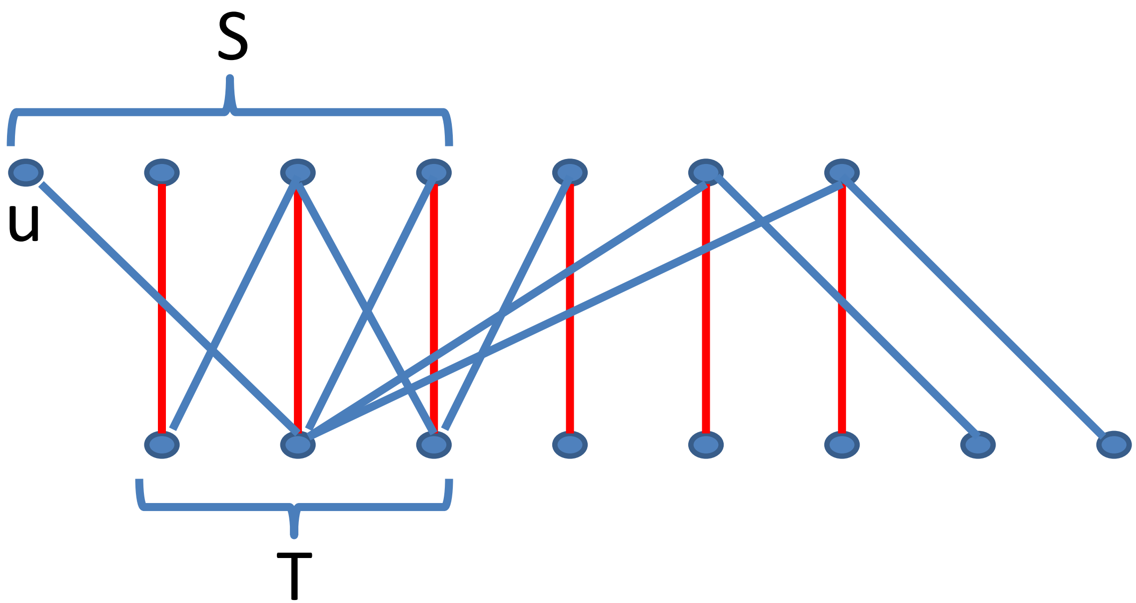
证明: 设二部图$G=(X,Y,E)$. $(\Rightarrow)$ 显然.

$(\Leftarrow)$ (反证) 设M是最大匹配, 但$u\in X$是非饱和点.

令 $S = \{\, v\in X \mid$ 从u到v有交错路径 $\}$

$T = \{\, v\in Y \mid$ 从u到v有交错路径 $\}$

则 $T=N(S)$ (*为什么?*), 但$|T|=|S|-1$, 矛盾!



最大匹配⇔无可增广路径 → 二部图: |最大匹配|=|最小顶点覆盖|

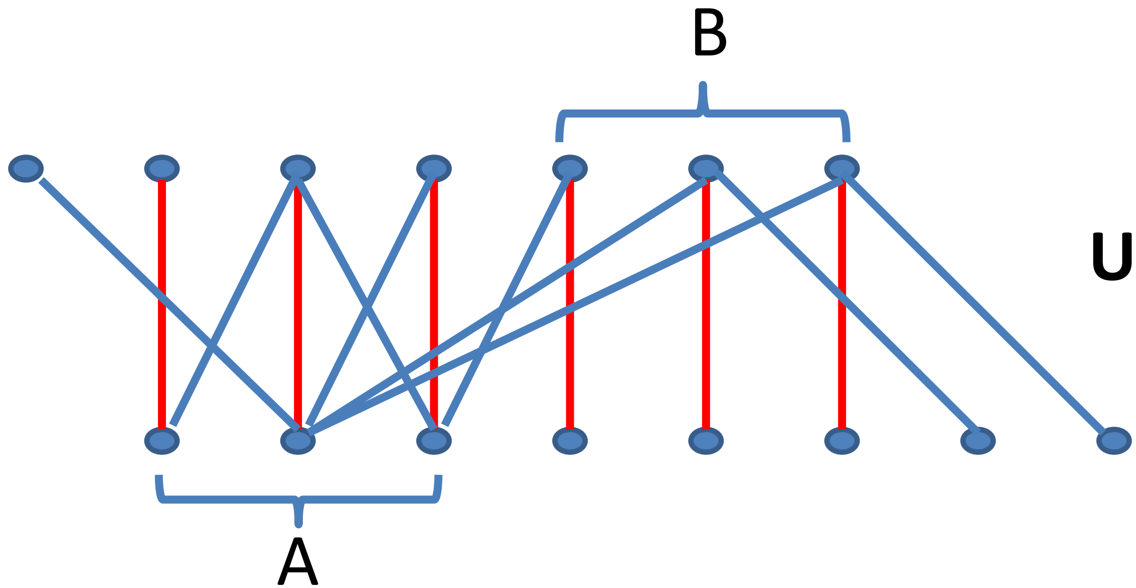
Berge → **Konig-Egervary**

证明: 设二部图G=(X,Y,E). |顶点覆盖|≥|匹配|.

设M是最大匹配, 对任何e∈M, 选一端放进A或B, (*思考题*: 如何选?请补充细节) 得到U, 其中

U∩A={v|有从非饱和点到v终止的交错路径},

U∩B={v|没有从非饱和点到v终止的交错路径}.



U是顶点覆盖

二部图完备匹配⇔

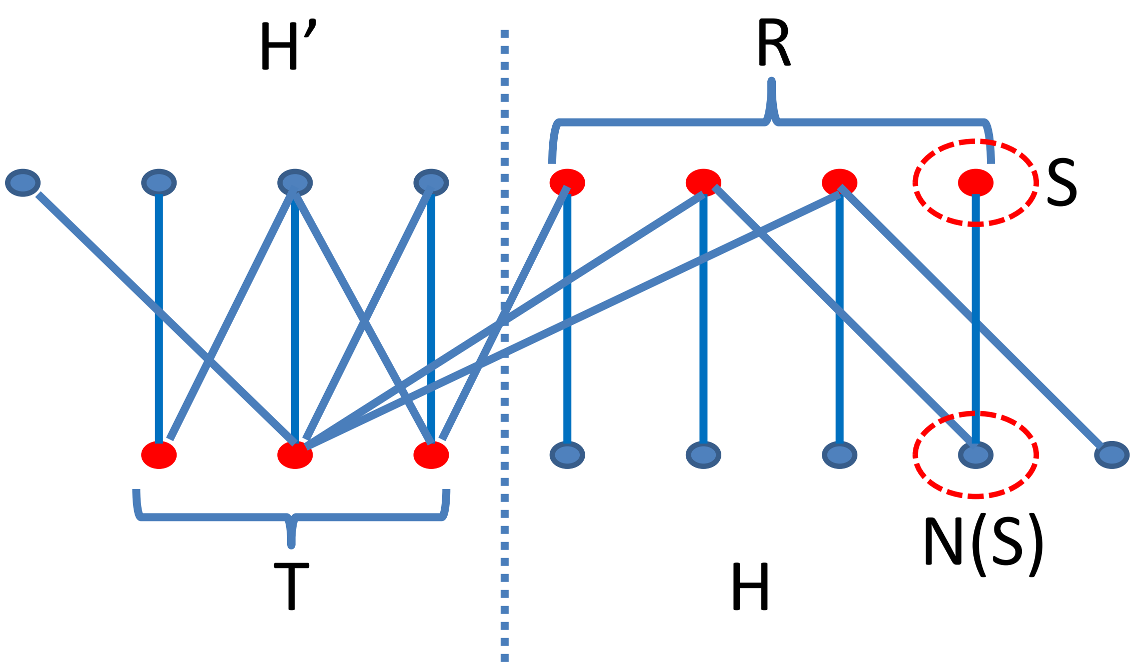
∀S, |S|≤|N(S)| **Hall** → 二部图: |最大匹配|=|最小顶点覆盖|

Konig-Egervary

证明: 设二部图G=(X,Y,E). |顶点覆盖|≥|匹配|.

设Q是最小顶点覆盖，令R=Q∩X, T=Q∩Y.

令H=G[R∪(Y-T)], H'=G[T∪(X-R)]



H满足Hall条件: 若|N(S)|<|S|, 则用N(S)代替S可得更小顶点覆盖,矛盾!

H有饱和R的匹配

同理, H'有饱和T的匹配

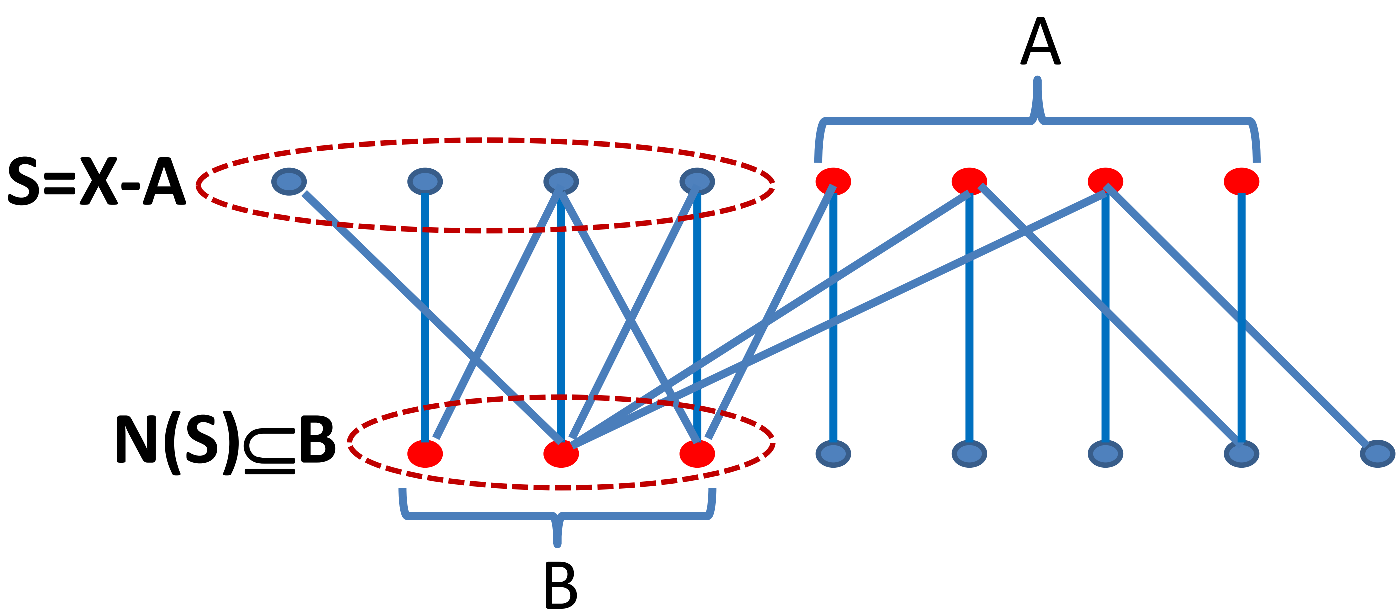
|最大匹配|=|Q|

二部图: |最大匹配|=
|最小顶点覆盖|
Konig-Egervary

二部图完备匹配⇔
$\forall S$, $|S| \le |N(S)|$ Hall

证明: 设二部图$G=(X,Y,E)$. 只需证(⇐).

(反证) 若无完备匹配, 设$U=A\cup B$是最小顶点覆盖, 其中$A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, 则$|A|+|B|=|U|<|X|$, 即$|B|<|X|-|A|$. 由U的定义, X-A与Y-B之间无边. $|N(X-A)|\le|B|<|X-A|$, 令$S=X-A$, 与Hall条件矛盾!



二部图完备匹配⇔

$\forall S,\ |S| \le |N(S)|$ **Hall**

完美匹配⇔ **Tutte**

$\forall S,\ p_{奇}(G \backslash S) \le |S|$

二部图完备匹配⇔ $\forall S, |S| \le |N(S)|$ **Hall** ⟵ 完美匹配⇔ **Tutte** $\forall S, p_{奇}(G \setminus S) \le |S|$

证明: 设二部图$G=(X,Y,E)$. 只需证(⇐).

若$|X|+|Y|$是奇数, 则给Y添加一个顶点, 并让Y成为团, 得到的图为H.

G有X完备匹配 ⇔ H有完美匹配 (*思考题*: 如何证?)

G满足Hall条件 ⇒ H满足Tutte条件(*思考题*: 如何证?)

思考题

- **友谊定理**：如果在一群人当中，任何两个人都恰好有一位共同的朋友，则有一个人是所有其他人的朋友。