

2009-2010学年第一学期文科高等数学期中试题A

姓名:_____ 学号:_____ 院系:_____ 成绩:_____

1 选择题(每题5分, 共20分)

请根据题目条件选择正确的答案, 并统一写在答题纸上。每题的答案唯一。

(1) 以下4个结论共有__正确。

- I. 单调上升且有上界的数列必有极限。
- II. 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导。
- III. 可导函数极值点必为其驻点, 函数在极值点必可导。
- IV. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是它在点 x_0 可导。

- (A) 1个
- (B) 2个
- (C) 3个
- (D) 4个

(2) 以下4个结论共有__错误。

- I. 函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点极限不存在, 而函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在 $x = 0$ 点极限也不存在。
- II. 函数 $f(x) = [x]$ 在任何整数点极限都不存在。
- III. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点左、右导数均存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 可导。
- IV. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 则在 (a, b) 内 $f'(x)$ 必大于0。

- (A) 0个
- (B) 1个
- (C) 2个
- (D) 3个

(3) 方程 $x + e^x = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有__实根。

- (A) 0个
- (B) 唯一

- (C) 至少1个
(D) 2个
- (4) 设函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$, 则 $y''y^3 =$ ___。
- (A) -1
(B) 1
(C) $\frac{x^2(2-x)^2}{x-1}$
(D) $x^2 - 2x$

2 解答题(每题8分, 共80分)

请根据题意解答或证明, 答题过程和结果请全部写在答题纸上。

1. 请利用Rolle中值定理证明Lagrange中值定理和Cauchy中值定理。
2. 设

$$y = \frac{\sqrt{x-1}(x^3+2)^3}{(2x+3)^2}$$

求 y'

3. 求以下曲线在点(4,9)处的切线方程。

$$\frac{(2x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

4. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

5. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

6. 已知

$$y = \frac{x^2}{1-x}$$

求 $y^{(8)}$ 。

7. 证明: 当 $x \neq 0$ 时, 以下不等式成立

$$e^x > 1+x$$

8. 求以下函数的凹或凸的区域及拐点:

$$y = x \sin(\ln x)$$

其中 $x > 0$ 。

9. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $\log_a^x = x$ 有解, 求 a 的范围。
10. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$$

其中 m, n 均为自然数。