期中考试中间三题参考答案

2. 计算题和极限的证明。（每道题 10 分。共 30 分）

(a) 设 $f(x)=|x+1|-|x-1|$, 求 n 次复合函数 $f\circ f\circ\cdots\circ f$。

解 由题意，

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x\le -1\\ 2x, & -1<x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}$$

当 $n=2$ 时，

$$f\circ f(x)=\begin{cases}-2, & f(x)\le -1\\ f(2x), & -1<f(x)\le 1\\ 2, & f(x)>1\end{cases}$$

$$f\circ f(x)=\begin{cases}-2, & x\le -\frac{1}{2}\\ 4x, & -\frac{1}{2}<x\le \frac{1}{2}\\ 2, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

利用数学归纳法进行证明，假设当 $n=k$ 时,

$$\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f(x)}_{\text{k}}=\begin{cases}-2, & x\le -\frac{1}{2^{k-1}}\\ 2^k x, & -\frac{1}{2^{k-1}}<x\le \frac{1}{2^{k-1}}\\ 2, & x>\frac{1}{2^{k-1}}\end{cases}$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f(x)}_{\text{k+1}}=\begin{cases}-2, & x\le -\frac{1}{2^{k}}\\ 2^{k+1} x, & -\frac{1}{2^{k}}<x\le \frac{1}{2^{k}}\\ 2, & x>\frac{1}{2^{k}}\end{cases}$$

综上，由数学归纳法知：

$$\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f(x)}_{\text{n}}=\begin{cases}-2, & x\le -\frac{1}{2^{n-1}}\\ 2^n x, & -\frac{1}{2^{n-1}}<x\le \frac{1}{2^{n-1}}\\ 2, & x>\frac{1}{2^{n-1}}\end{cases}$$

(b) 证明下面的极限：（需要使用 $\varepsilon - N$ 语言）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!}=0.$$

证明 由 $\varepsilon - N$ 定义知，对任意的 $\varepsilon>0$, 往证存在 $N_\varepsilon\in\mathbf{N}^*$. 当 $n>N$ 时，使得 $\left|\frac{n^3}{n!}\right|<\varepsilon$.
当 $n>5$ 时，$n^2<(n-1)(n-2)(n-3)$ 总是成立的, 于是对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+4,5\right\}$,

$$\left|\frac{n^3}{n!}\right|=\frac{n^3}{n!}<\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}=\frac{1}{(n-4)!}<\frac{1}{n-4}<\varepsilon$$

结论成立。

(c) 求下面极限：（可以利用一些极限为 e 的重要极限）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)^n.$$

证明 考虑利用夹逼收敛定理，由于

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}<\frac{n+1}{n^2-1}=\frac{1}{n-1},$$

所以，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

由于,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

以及，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)\\&=e\end{aligned}$$

由夹逼收敛定理知，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$