课程名称：高等数学（D）

2010 -2011 学年第（1）学期期末 试卷 本试卷共 九 道大题，满分 **100** 分

答案请写在答题本上，试卷上答题无效。考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师。

一、 判断题（给出简单解释，每题 3 分，共 5 题）

1. 对于多元函数，可导必可微，可微必可导。（错，需要偏导数连续）

2. 所有的初等函数在其定义域的任意子集上都是可求定积分的。（错，广义积分）

3. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数都为 0，则函数在该点处必取得极值。（错）

4. 若函数 $f(x)$ 在 [a,b]上可导，则函数在[a,b]上有最大值与最小值。（对）

5. 若区间 $[c,d]\subseteq[a,b]$，则必有 $\int_a^b|f(x)|dx\geq\int_c^d|f(x)|dx$。（对）

二、选择题（不需要写过程，每题 3 分,共 5 题）

1. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价无穷小的是（ B ）

（A） $1-e^{\sqrt{x}}$ （B） $\ln(1+\sqrt{x})$ （C） $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ （D） $1-\cos\sqrt{x}$

2.设 $I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D(x^2+y^2)^2d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq 1\}$ ，则（D）

（A） $I_3>I_2>I_1$ （B） $I_3>I_1>I_2$ （C） $I_2>I_1>I_3$ （D） $I_1>I_2>I_3$

3. 设 f(x)为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ （D）

（A）在 x=0 处左极限不存在 （B）有跳跃间断点 x=0

（C）在 x=0 处右极限不存在 （D）有可去间断点 x=0

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x)dx\right]$ 等于(B).

(A) $f(x)$. (B) $f(x)dx$. (C) $f(x)+C$. (D) $f'(x)dx$.

5. 设 $I=\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx+\dfrac{d}{dx}\int_3^4 f(x)dx+\int f'(x)dx$ 存在, 则 $I=$(D).

(A) 0. (B) $f(x)$. (C) $2f(x)$. (D) $2f(x)+C$.

三、填空题（(不需要写过程，每题3分,共5题))

1. 设 a>0，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a,若0\le x\le 1,\\0,\quad 其他,\end{cases}$ 而 D 表示全平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=$ __a²____

2. 设 $f(x)=\sqrt{x}$, 在[1, 4]上使 Lagrange(拉格朗日)中值定理成立的 $\xi=$___9/4__.

3. 二元函数 $z=\arcsin(2-x^2-y^2)+\ln(x-y^2)$ 的定义域为：

$D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 3, x>y^2\right\}$

4. 函数 $f(x,y)=2(x-y)+x^2-y^2$ 的驻点为：__（-1，-1）__

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\pi x/2)}=$____ $-\dfrac{4}{\pi^2}$ ____

四、计算下列不定积分（每题4分，共20分）

1. $\int\left(x-\cos^3 x\right)dx=\int xdx-\int(1-\sin^2 x)d\sin x=\dfrac{x^2}{2}-\sin x+\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$

2. $\int\dfrac{xdx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$

3. $\int\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=\int\dfrac{\sec^2 tdt}{\tan^2 t\sec t}=\int\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\int\dfrac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\dfrac{1}{\sin t}+C=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

4. $\int\dfrac{3x+2\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int\dfrac{3x+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\dfrac{3}{2}\int x\sec^2\dfrac{x}{2}dx+2\int\tan\dfrac{x}{2}dx$

$=3\int xd(\tan\dfrac{x}{2})+2\int\tan\dfrac{x}{2}dx=3x\tan\dfrac{x}{2}-3\int\tan\dfrac{x}{2}dx+2\int\tan\dfrac{x}{2}dx$

$=3x\tan\dfrac{x}{2}-2\int\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}d\dfrac{x}{2}=3x\tan\dfrac{x}{2}+\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|+C$

5. $\int e^{-\sin x}\dfrac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=$

$$\int e^{-\sin x} x d \sin x - \int e^{-\sin x} d\frac{1}{\cos x} = -\int x de^{-\sin x} - \frac{e^{-\sin x}}{\cos x} - \int e^{-\sin x} dx$$

$$= -xe^{-\sin x} + \int e^{-\sin x} dx - \frac{e^{-\sin x}}{\cos x} - \int e^{-\sin x} dx = -xe^{-\sin x} - \frac{e^{-\sin x}}{\cos x} + C$$

五、求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积。（8 分）

$$y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} = 1$$

$$y = -x + \frac{3p}{2}$$

$$S = \int_{-3p}^{p} dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{3p}{2}-y} dx = \frac{16}{3} p^2$$

六、 若 $\int_0^x f(t)dt = 3x^3$，求 $\int_1^e \frac{1}{x} f(\ln x)dx$。（6 分）

$$\int_1^e \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \int_0^1 f(t)dt = 3$$

七、试证明：$\frac{1}{40} < \int_{10}^{20} \frac{x^2}{x^4 + x + 1} dx < \frac{1}{20}$。（6 分）

$$\frac{1}{40} = \int_{10}^{20} \frac{1}{2x^2} dx < \int_{10}^{20} \frac{x^2}{x^4 + x + 1} dx < \int_{10}^{20} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{20}$$

八、求函数 $z = f(xy^2, x^2y)$ 的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$（其中具有 f 二阶连续偏导数）。（8 分）

$$z = f(xy^2, x^2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 f_1(xy^2, x^2y) + 2xyf_2(xy^2, x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf_1(xy^2, x^2y) + 2xy^3 f_{11}(xy^2, x^2y)$$

$$+5x^2y^2 f_{12}(xy^2, x^2y) + 2xf_2(xy^2, x^2y) + 2x^3yf_{22}(xy^2, x^2y)$$

九、求函数 $u = xyz$ 在附加条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ $(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$ 下的极值。（7 分）

$$F(x,y,z;\lambda)=\ln x+\ln y+\ln z-\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)$$

$$F_x=\frac{1}{x}+\lambda\frac{1}{x^2}=0, F_y=\frac{1}{y}+\lambda\frac{1}{y^2}=0, F_z=\frac{1}{z}+\lambda\frac{1}{z^2}=0$$

$\lambda=-3a, x=y=z=3a$

极小值为$27a^3$.