高等数学第一学期半期试题（05）

一.　　填空题：（共 20 分）

1．设$y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},(x>1)$ 求 dy ＝________________。

2．设方程 $x-y+\arctan y=0$ 确定了$y=y(x)$,求$\dfrac{dy}{dx}$ ＝____________。

3．设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=A.$ 。则 a=________， A=_______

4．函数 $y=x2^x$ 的极小值点为________。

5.　设$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ $(a>0)$ 当 $a=$________时，$x=0$ 是 $f(x)$的连续点？

二.　　（10 分）若 $y=f(x)$ 是奇函数且 x=0 在可导, $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 x=0 是什么类型的间断点？说明理由。

三.　　（共 20 分）求下列极限

1．$\lim\limits_{x\to\infty} x^2(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2)$；　　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x\ )^{2x}-1}{x^2}$；

3．设曲线方程为$\begin{cases}x=t+2+\sin t\\ y=t+\cos t\end{cases}$ 求此曲线在 x=2 的点处的切线方程,及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

四.　　（10 分）证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge (x-1)^2$ 。

五.　　（10 分）求内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ，且底边与 x 轴平行的等腰三角形之面积的最大值。

六.　　（10 分）证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots x^2+x=1$ 在（0，1）上必有唯一的实根 x_n (n>2)，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

七.　　（10 分）确定常数 a、b,使极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，并求出其值。

八.　　（10 分）设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，且 $f(a)=f(b)$ =0,证明：对 $\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$f'(c)=\lambda f(c)$。

高等数学第一学期半期试题解答（05）

一． （共 20 分）试解下列各题：

1． 设$y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},(x>1)$ 求 dy 。

解：$y=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$ $\quad dy=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)dx$

2． 设方程 $x-y+\arctan y=0$ 确定了 $y=y(x)$,求$\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：$1-y'+\dfrac{y'}{1+y^2}=0 \quad y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}$

3．设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=A.$ 。则 a=__4__， A=__-6__

4．函数 $y=x2^x$ 的极小值点$-\dfrac{1}{\ln 2}$ 。

5．设$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ $(a>0)$

解：$f(0)=\dfrac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

故$a=1$时$x=0$是连续点，$a\neq 1$时$x=0$是间断点。

二． （10 分）若$y=f(x)$是奇函数且 x=0 在可导,$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在 x=0 是什么类型的间断点？说明理由。

解：由$f(x)$是奇函数，且在$x=0$可导，知$f(x)$在$x=0$点连续，$f(0)=-f(0)$故$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$存在,故为第一类间断点(可去)。

三． （共 20 分）求下列极限

1．$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2)$ ；解：原式＝

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 3}{2}\cdot\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-3^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{\ln 3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\ln 3(3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}})=(\ln 3)^2$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{2x}-1}{x^2}$ ；解：原式＝$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{2x}\left(2\ln(1+2x)+\dfrac{4x}{1+2x}\right)}{2x}=2+2=4$

3． 设曲线方程为$\begin{cases}x=t+2+\sin t\\ y=t+\cos t\end{cases}$,求此曲线在 x=2 的点处的切线方程,及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：$x=2$时 $y=1, t=0$ $y'=\dfrac{1-\sin t}{1+\cos t}$ $y'|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$ 切线方程：$y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$

$y''=\dfrac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^3}$

四． （10 分）证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$ 。

证明：当$x>1$时，令$f(x)=\ln x$在$[1,x]$上用拉氏中值定理有$\ln x=\dfrac{1}{\xi}(x-1)>\dfrac{1}{x+1}(x-1)$

其中$1<\xi<x$即$\ln x>\dfrac{1}{x+1}(x-1)$同乘以$(x^2-1)$有$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

当$0<x<1$时，令$f(x)=\ln x$在$[x,1]$上用拉氏中值定理有$-\ln x=\dfrac{1}{\xi}(1-x)>\dfrac{1}{x+1}(1-x)$

其中$x<\xi<1$即$\ln x<\dfrac{1}{x+1}(x-1)$同乘以$(x^2-1)$有$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

当$x=1$时等式成立。

五． （10 分）求内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ，且底边与 x 轴平行的等腰三角形之面积的最大值。

解：

设底边方程为：$y=t \quad -b<t\le 0$,

三角形面积$A=(b-t)\cdot 2a\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}}=\dfrac{2a}{b}\sqrt{(b-t)^2(b^2-t^2)}$

设$z=(b-t)^2(b^2-t^2)$ z的最大值点也是A的最大值点。

$z'=-2(b-t)(b^2-t^2)-2t(b-t)^2=-2(b-t)^2(b+2t)$

令$z'=0$ 得$t=b$（舍去）$t=-\dfrac{b}{2}$ $z''\left(-\dfrac{b}{2}\right)=-b^2<0$即$t=-\dfrac{b}{2}$为唯一极大值点，

亦即为所求面积之最大值点。最大值为$A=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

六． （10 分）证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots x^2+x=1$ 在（0，1）上必有唯一的实根 x_n (n>2)，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

证：

设$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$　其在$[0,1]$上连续。

$f(0)=-1, f(1)=n-1$由$n>2$知函数在端点异号。

由闭区间上连续函数零点定理知至少有一点$\xi\in(0,1)$使$f(\xi)=0.$

又$f'=nx^{n-1}+\cdots+2x+1>0$知函数$f(x)$单调增加，故在$(0,1)$上有唯一实根。

由　$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n{}^2+x_n=1$

　　$x_{n+1}{}^{n+1}+x_{n+1}{}^n+\cdots+x_{n+1}{}^2+x_{n+1}=1$

知$\{x_n\}$是单调下降数列，而$x_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$因此$0<x_n<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<1$故由极限存在准则知其有极限，设极

由方程有$\dfrac{x_n\left(1-x_n{}^n\right)}{1-x_n}=1$两边$n\to\infty$取极限$\dfrac{x_0}{1-x_0}=1$解出$x_0=\dfrac{1}{2}$

七．　（10 分）确定常数 a、b,使极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos2x+b\cos4x}{x^4}$存在，并求出其值。

解：要使极限存在，分子与分母应是极限过程中的同阶无穷小或高阶无穷小，于是有 1＋a+b=0，用一次罗必达法则分子仍为无穷小，有 a+4b=0

解出：a=-4/3　b=1/3 代入求得极限为 8/3

八．　（10 分）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，且 $f(a)=f(b)$ =0,证明：对$\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$f'(c)=\lambda f(c)$。

证明：构造函数 $F(x)$= $e^{-\lambda x}$ $f(x)$ 则 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微 $F(a)=F(b)$ =0 由罗尔定理$\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$F'(c)=0$,而$F'(x)=e^{-\lambda x}f'(x)-\lambda e^{-\lambda x}f(x)$

即有$\forall\lambda\in R,\exists c\in(a,b)$，使得$f'(c)=\lambda f(c)$　　　　证毕。