# 第四节
# 定积分的计算

I、微积分学基本定理

II、定积分的换元法

III、定积分的分部积分法

# I、微积分学基本定理

一、引例

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿 – 莱布尼兹公式

# 一、引例

在变速直线运动中，已知位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有关系：

$$s'(t)=v(t)$$

物体在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t = s(T_2)-s(T_1)$$

这里 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数 .

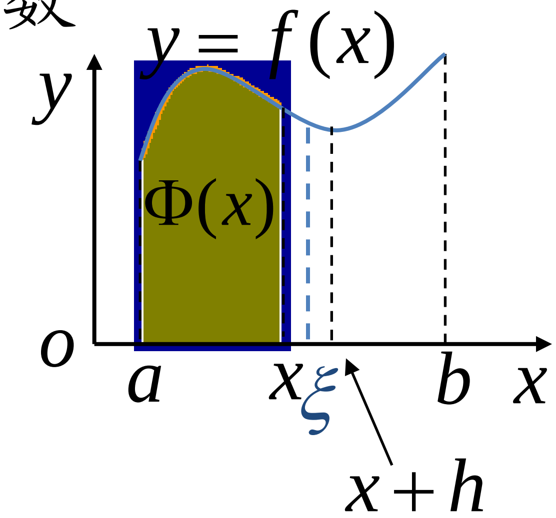
这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性 .

## 二、积分上限的函数及其导数

**定理1.** 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 .




**证:** $\forall\, x, x+h\in[a,b]$, 则有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\Big]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\quad (x<\xi<x+h)$$

$\because f(x)\in C[a,b]$

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x)$$

说明:

1) 定理 1 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路.

2) 变限积分求导: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

**解:** 原式 $= -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \dfrac{1}{2e}$

**例2.** 确定常数 $a$ , $b$ , $c$ 的值, 使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t} = c \quad (c\neq 0). \qquad \boxed{\frac{0}{0}}$$

**解:** $\because\ x\to 0$时, $ax-\sin x\to 0$, $c\neq 0$, $\therefore\ b=0.$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2} = c$$

$c\neq 0$ , 故 $a=1.$ 又由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, 得 $c=\frac{1}{2}.$

# 三、牛顿 – 莱布尼兹公式

**定理2.** 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ ( 牛顿 - 莱布尼兹公式)

**证:** 根据定理 1, $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + C$$

令 $x = a$, 得 $C = F(a)$, 因此 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, 得

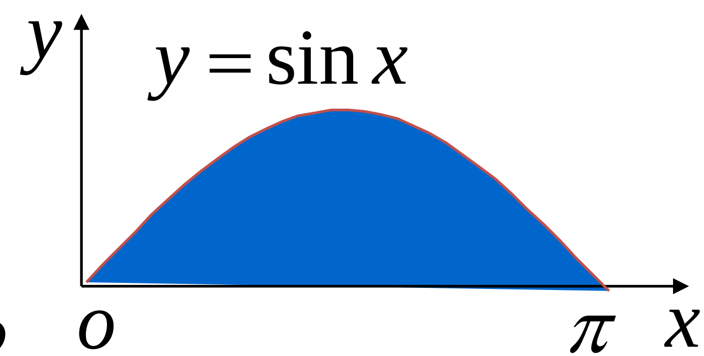
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

例3. 计算$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**解:** $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi$$

**例4.** 计算正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 $x$ 轴所围成的面积 .




**解:** $A = \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -[-1-1] = 2$$

例5. 汽车以每小时 36 km 的速度行驶，到某处需要减速停车，设汽车以等加速度 $a=-5\ \mathrm{m/s^2}$ 刹车，问从开始刹车到停车走了多少距离？

**解:** 设开始刹车时刻为 $t=0$，则此时刻汽车速度

$$v_0 = 36(\mathrm{km/h}) = \frac{36\times 1000}{3600}(\mathrm{m/s}) = 10(\mathrm{m/s})$$

刹车后汽车减速行驶，其速度为

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t$$

当汽车停住时，$v(t)=0$，即 $10-5t=0$，得 $t=2(\mathrm{s})$

故在这段时间内汽车所走的距离为

$$s = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (10-5t)\,\mathrm{d}t = \left[10t - \frac{5}{2}t^2\right]_0^2 = 10(\mathrm{m})$$

# 内容小结

1. 微积分基本公式

设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $F'(x)=f(x)$, 则有

$$\underbrace{\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = \underbrace{F'(\xi)(b-a) = F(b)-F(a)}_{\text{微分中值定理}}}_{\text{牛顿 – 莱布尼兹公式}}$$

2. 变限积分求导公式

# 备用题

1. 设$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解: 定积分为常数，故应用积分法定此常数.

设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=b$, 则

$$f(x)=x^2-bx+2a$$

$$a=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{b}{2}+2a$$

$$b=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^2=\frac{8}{3}-2b+4a$$

$$\Longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3}\Longrightarrow f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

2. $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} \mathrm{d}x$ 的递推公式($n$为正整数).

解: 由于 $I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2(n-1)x}{\sin x} \mathrm{d}x$, 因此

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x \sin x}{\sin x} \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)x \, \mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

所以 $$I_n = I_{n-1} + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

其中 $$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos x \, \mathrm{d}x = 2$$

# II、定积分的换元法和分部积分法

不定积分

$$\begin{cases}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{cases} \longrightarrow \text{定积分} \begin{cases}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{cases}$$

## 一、定积分的换元法

## 二、定积分的分部积分法

# 一、定积分的换元法

**定理1.** 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

**证:** 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在, 且它们的原函数也存在. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数, 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当 $\beta < \alpha$, 即区间换为 $[\beta, \alpha]$ 时, 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意**换元必换限**, 原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用 , 即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元 $$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$$

$\boxed{\text{配元不换限}}$

例1. 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

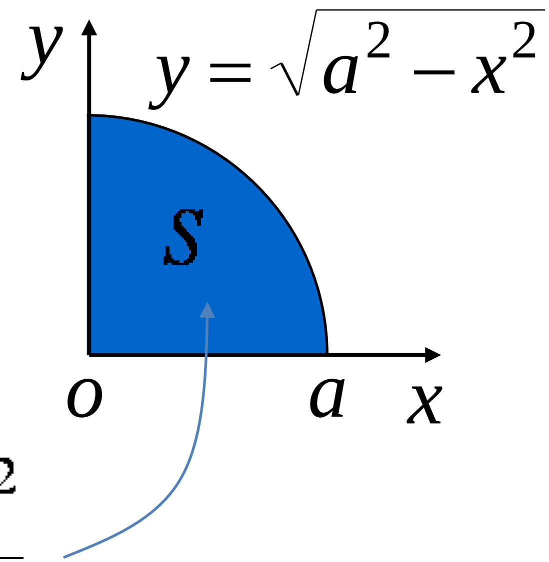
**解:** 令 $x = a\sin t$, 则 $dx = a\cos t\,dt$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad 原式 = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$



例2. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

**解:** 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$.

$$\therefore \quad 原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_1^3=\frac{22}{3}$$

例3. 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

偶倍奇零

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

**证:** $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

令 $x=-t$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} [\, f(-x) + f(x)\,]\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x)\text{时} \\ 0, & f(-x)=-f(x)\text{时} \end{cases}$$

# 二、定积分的分部积分法

**定理2.** 设$u(x), v(x) \in C^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

**证:** $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\Big\downarrow \text{两端在}[a,b]\text{上积分}$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

例4. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

**解：** 原式 $= x\arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

## 内容小结

$$\text{基本积分法}\begin{cases}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{cases}$$

换元必换限
配元不换限

## 思考与练习

**1.** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\ \sin^{100}x\ }$

**提示:** 令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100}u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(e)$.

**解法1** $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(e)=\frac{1}{3}$

**解法2** 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\frac{1}{3u}$

$\therefore\quad f(e)=\int_1^e f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)$

$=\frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$

**思考:** 若改题为

$$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$$

$$f(e)=?$$

**提示:** 两边求导, 得

$$f'(x)=\frac{1}{3x^3}$$

$$f(e)=\int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$ .

**解:** $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ (分部积分)

$$= \frac{1}{2}\Big[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\Big]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

# 作业

P172-173　13 ; 16 (1) , (6) ; 17 ;

21 (4), (7)

# 备用题

**1.** $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以 $\pi$ 为周期的函数.

证: $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$

$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$=f(x)$

$\therefore f(x)$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

2.

$$f(b)=0,\text{试证}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

**解:** 右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$

分部积分积分

$$=\frac{1}{2}\Big[(x-a)(x-b)f'(x)\Big]\Big|_a^b$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$

再次分部积分

$$=-\frac{1}{2}\Big[(2x-a-b)f(x)\Big]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$