

北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 集合论与图论 姓名： _____ 学号： _____

得分

一、名词解释（共 20 分，每小题 5 分）

(1) 容斥原理

(2) 皮亚诺系统

(3) 欧拉公式

(4) 中国邮递员问题

得分

二、单项选择题（共 20 分，每小题 2 分）

(1) 设 A, B, C 是集合，则 $B \cap C \subseteq A$ 是 $(A \cup B) \cap C = A$ 的 ()

A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 都不对

(2) $\{a, b, c\}$ 上既是等价关系又是偏序关系的二元关系有 ()

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 都不对

(3) 设 $A = \{a, b\}$ ， $B = \{1, 2\}$ ，则 $\{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}$ 是 A 到 B 的 ()

A. 单射 B. 满射 C. 双射 D. 都不对

(4) 下列集合中表示某个自然数的是 ()

A. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ B. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ C. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ D. 都不对

(5) 自然数集不是 ()

A. 归纳集 B. 传递集 C. 无穷集 D. 都不对

(6) 竞赛图一定是 ()

A. 哈密顿图 B. 单向连通的 C. 强连通的 D. 都不对

(7) n 阶 m 条边的无向连通简单图的基本回路的个数为 ()

A. $n-1$ 个 B. $m-n+1$ 个 C. $m-1$ 个 D. 都不对

- (8) 互不同构的 3 阶简单有向图有 ()
- A. 15 种 B. 16 种 C. 17 种 D. 都不对
- (9) 非平凡的自补的自对偶简单平面图一定不是 ()
- A. 欧拉图 B. 哈密顿图 C. 平面图 D. 都不对
- (10) 彼得森图是 ()
- A. 欧拉图 B. 哈密顿图 C. 平面图 D. 都不对

得分

三、判断题 (共 20 分, 每小题 2 分)

- (1) 存在唯一的一个最大的集合, 称为全集。 ()
- (2) 空集的广义交集不存在。 ()
- (3) 反自反和传递的二元关系一定是反对称的。 ()
- (4) 传递集的后继还是传递集。 ()
- (5) 图与图之间的同胚关系是等价关系。 ()
- (6) 3-正则简单图的点连通度一定等于边连通度。 ()
- (7) 无桥 3-正则简单图一定有完美匹配。 ()
- (8) 任何两个奇数长度回路都有公共顶点的简单图, 其点色数不超过 5。 ()
- (9) 外平面图的充要条件是不含有同胚或可边收缩到 K_4 和 $K_{2,3}$ 的子图。 ()
- (10) 无孤立点简单图的顶点覆盖一定是支配集。 ()

得分

四、填空题 (共 10 分, 每空 2 分)

- (1) 自然数 2 的集合表示是_____。
- (2) 良序关系是_____。
- (3) 无向欧拉图的充要条件是_____。
- (4) 简单图有完美匹配的塔特条件是_____。
- (5) 二部图有完备匹配的霍尔条件是_____。

得分

五、(10 分) 从自然数集删除有无穷个自然数后得到的集合称为补有穷集。试确定全体补有穷集组成的集合的基数, 并给出证明。

得分

六、(10 分) 用 k 种颜色对 n 阶简单图 G 进行顶点着色, 不同着色方法的总数记作 $f(G, k)$ 。可对 G 的边数 m 进行归纳, 来证明 $f(G, k)$ 是变元 k 的 n 次多项式 (称为色多项式), 且系数正负交替出现, 首项系数为 1, 次高项系数为 $-m$ 。试完成以下证明。

(1) 基础步骤

设 $m=0$, 则 $f(G, k)=$

(2) 归纳步骤

任选 G 中一条边 e , 删除边 e 后得到的图 $G-e$ 是 n 阶 $m-1$ 条边的简单图, 收缩边 e 后得到的图 G/e 是 $n-1$ 阶不超过 $m-1$ 条边的简单图。由归纳假设, 可令

$$f(G-e, k)=$$

$$f(G/e, k)=$$

其中,

$$\text{则 } f(G, k) = f(G-e, k) - f(G/e, k) =$$

由于

所以系数是正负交替出现的。

由于

所以最高项是 n 次的且系数是 1。

由于

所以次高项系数是 $-m$ 。 证毕。

得分

七、(10 分) 证明: 设某人群有 9 人, 如果其中任意 3 人中至少有 2 人互相认识, 则该人群中至少有 4 人互相认识。