

高等数学期中试题

2013 -2014 学年第一学期

考试科目: 高等数学B(上)

考试时间: 2013 年10 月 28 日

姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 6 道大题, 满分 100 分

1. (每空 4 分, 共 48 分)

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x \leq 0 \\ x^3 + 1, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的逆函数 $f^{-1}(x) =$ _____.

(2) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} =$ _____. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n^2}{n^2-2}\right)^{n^2} =$ _____.

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是第 _____ 类间断点.

(4) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ 的定义: _____.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a+h)}{h} = 1$, 则 $f'(a) =$ _____.

(6) 设函数 $f(x) = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}$, 则 $f'(1) =$ _____.

(7) 平面曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.

(8) 设函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $f'''(\sqrt{3}) =$ _____.

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 确定, 则 $dy|_{x=0} =$ _____.

(10) 求不定积分: $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx =$ _____. 求定积分: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-9} dx =$ _____.

2. (10分) 若 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上不恒为零的非负连续函数, 证明 $\int_0^1 f(x) dx > 0$.

3. (10分) 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. (12分) 若 f 在 $x = 0$ 处可导, 且 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 证明: $|f'(0)| \leq 1$.

5. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_i \in [a, b]$, $t_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$.

6. (10分) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}$, $x \geq 0$. 求 $f(x)$, 并判断函数 $f(x)$ 是否连续.