

# 数学分析一 期中考试（1）

Exam Date: October 17. Time: 8:10 am to 9:10 am.

注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. 判断并说明。（每道题10分，其中判断5分，说明5分。说明简单扼要即可。共30分。）

- (a) 若  $f(x), x \in \mathbb{R}$  是一个周期函数，则它必有基本周期  $T > 0$ 。
- (b) 设  $f: X \rightarrow Y$  是一个函数，如果存在  $g: Y \rightarrow X$ ，使得  $\forall x \in X, g(f(x)) = x$ ，则  $g = f^{-1}$ 。
- (c) 设  $\{x_n\}$  是一个序列。若存在  $\varepsilon_0 > 0$ ，使得  $\forall a \in \mathbb{R}$ ， $U(a, \varepsilon_0)$  之外有  $\{x_n\}$  的无穷多项，那么  $\{x_n\}$  发散。（注意，这不是一个定义，只是一个推断。）

2. 计算题和极限的证明。（每道题10分。共40分。）

- (a) 设  $f(x) = |x+1| - |x-1|$ ，求  $n$  次符合函数  $f \circ f \circ \cdots \circ f$ 。
- (b) 证明下面极限：（需要使用  $\varepsilon - N$  语言）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0.$$

- (c) 求下面极限：（可以利用一些极限为  $e$  的重要极限）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n.$$

- (d) 求下面极限：（不能直接使用  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{1/n}$  的计算结果。）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2n}}.$$

3. 证明题。（每道题15分。共30分。）

- (a) 叙述并证明单调收敛原理。
- (b) 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上定义。若存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得  $f(x_0) = x_0$ ，则称  $x_0$  是  $f(x)$  的不动点。证明若  $f(f(x))$  存在唯一的不动点，则  $f(x)$  也存在唯一的不动点。