# 2010 年文科高等数学（D）期中考试答案

## 一、判断（理由只要言之有理即可）

1．错误。前半句正确，但后半句错误，反例：$a_n=(-1)^n$

2．错误。因为 f(0-)=f(0+)=0=f(0)，所以 f(x)在 x=0 处连续

3．正确。这是零点存在定理的表述

4．错误。反例：$f(x)=x^2$ 是偶函数，但导数 $f'(x)=2x$ 是奇函数；$g(x)=x^3$ 是奇函数，但导数 $g'(x)=3x^2$ 是偶函数

5．错误。反例： $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \dfrac{1}{x} & 0<x\le 6\end{cases}$ 这里 a=0，b=6，f(x)在[a,b]上没有最大值

## 二、选择题

1.(B) 2.(D) 3.(C) 4.(D) 5.(A)

## 三、填空题

1. 相同、相同
2. 1
3. (1) 充分、必要 (2)充分、必要
4. $\dfrac{3}{2}$
5. $x=1$
6. 非奇非偶函数、奇函数
7. $\dfrac{2}{2-\cos y}$、$\dfrac{4\sin y}{(\cos y-2)^3}$
8. $\dfrac{\pi}{2}$

## 四、计算题

1.（1）解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

（2）解：

令$t=\ln e$,则

$$原式=\lim_{t\to 1}t^{\frac{1}{1-t}}=e^{\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln t}{1-t}}=e^{\lim\limits_{t\to 1}\frac{\frac{1}{t}}{-1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

2.（1）解：

由$x\neq 0$且$\cos(\dfrac{\pi}{x})\neq 0$，得

$x\neq 0$且$x\neq \dfrac{2}{2k+1}$，$k\in Z$

所以间断点为$x=0$和$x=\dfrac{2}{2k+1}$，$k\in Z$

当$x=0$时，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-0|<\delta$时，取足够大的n，使$x=\dfrac{2}{2n+1}<\delta$,

$|y(x)-A|=\left|\dfrac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi}{\cos(n+\frac{1}{2})\pi}-A\right|$，由于$\dfrac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi}{\cos(n+\frac{1}{2})\pi}$是$\dfrac{0}{0}$的情况，无意义，

所以$y(x)$在$x=0$处的左右极限不存在，所以x=0为第二类间断点。

当$x=\dfrac{2}{2k+1}$，$k\in Z$时，$\lim\limits_{x\to\frac{2}{2k+1}+0} y(x)=\lim\limits_{x\to\frac{2}{2k+1}-0} y(x)=1,$

所以$x=\dfrac{2}{2k+1}$，$k\in Z$为可去间断点。

（2）解：

由$\sin(x)\neq 0$，得$x\neq k\pi$，$k\in Z$

所以间断点为$x=k\pi$，$k\in Z$

当$x=0$时，$y(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{\sin x}=1$，$y(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sin x}=1$，

由$y(0-)=y(0+)$知x=0为可去间断点。

当$x=k\pi$，$k\in Z$且$k\neq 0$时，$y(x-0)$和$y(x+0)$均不存在，

所以，$x=k\pi$，$k\in Z$且$k\neq 0$为第二类间断点。

3.计算下列函数的导数

(1) $y=x\sqrt{1+x^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解：
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}\\&=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}\end{aligned}$$

4. 试估算$\tan 151^\circ$的值（可保留根号）。（8 分）

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad \tan 151^\circ = \tan 150^\circ + (\tan x)'|_{x=150^\circ} \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{135}$

**五、证明：**

设函数 $f(x) = e^x - 1 - x$，则对 $x \neq 0$ 时，存在 $\xi$，有 $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$。

因此， $f(x) = f'(\xi)x$ 　　其中 $\xi$ 和 $x$ 同号。

而 $f'(\xi) = e^\xi - 1\begin{cases} > 0, \xi > 0 \\ < 0, \xi < 0 \end{cases}$ 　因此，对 $x \neq 0$，有 $f(x) > 0$。得证。

**六、作图题**

解：1）对 $y = \dfrac{(x-5)^2}{4(x-1)}$，其定义域为 $D = \{x \mid x \neq 1, x \in R\}$，垂直渐近线是 $x = 1$。

2）$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+3)(x-5)}{4(x-1)^2}$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{8}{(x-1)^3}$

可以知道，可能极值点为 $x = -3, y(-3) = 4$ 为极大值； $x = 5, y(5) = 0$ 是极小值。

3）可知函数在 $x < 1$ 时曲线为凹的，在 $x > 1$ 时曲线为凸的。

4）$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-5)^2}{4(x-1)x} = \dfrac{1}{4}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-5)^2}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4}x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-10x+26}{4(x-1)} = -\dfrac{9}{4}$，从而斜渐近线为 $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{9}{4}$。

5）函数图像如下所示。