北京大学信息学院期末考试答案

2013 -2014　学年第一学期

一 求极限(12分).

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x+e^y}{\cos x+\sin y}=2$　　2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\ln(1+\dfrac{1}{n})(1-\cos\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x)^{\tan x}=1$.

二 求积分(共18分).

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx=\frac{1}{2}$.　　2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\frac{4}{3}$.

3. $\displaystyle\int\frac{x}{x^4+2x^2+2}dx=\frac{1}{2}\arctan(x^2+1)+C$.

三 (共8分)一段曲线的极坐标方程为 $r=2(1+\cos\theta)$, $0\le\theta\le\pi$, 求它的弧长.

解:

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{4(1+\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8.$$

四 求偏导数或微分(10分).

1. $z=x+(y^2-1)\arcsin\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=1$.

2. $z=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$, $dz\big|_{(2,1)}=\frac{1}{2}dx$.

五 (18分) 1. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解: 直线平行于方向 $\vec{e}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=(0,-3,-3)$, $P_0(1,0,2)$ 是直线上的点, P_0P 在直线的投影长为

$$\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\right|=\left|(2,-1,0)\cdot(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此 P 到直线的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

2. 设一平面经过原点及 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 求该平面的方程。

解: 平面法向量 $(6,-3,2)\times(4,-1,2)=(-4,-4,6)$, 平面方程 $2x+2y-3z=0$.

六 (共12分)设 $f(x)=\ln(x^2+1)$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的带 Peano 余项的泰勒公式，并求 $f^{(n)}(0)$.

解: 利用 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o(x^n)$ 得

$$f(x)=\ln(x^2+1)=x^2-\frac{1}{2}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

由泰勒公式的系数表达式, $\frac{1}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(0)=0$, $\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 因此 $f^{(2n-1)}(0)=0$, $f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n}$.

七 (共12分) 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的函数: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. 讨论函数 $f(x,y)$ 在原点处的连续性和可微性, 以及原点处方向导数的存在性.

解: $|f(x,y)|\leq|y|$, 因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

由于 $f(x,0)=f(0,y)=0$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

显然上述极限不存在（沿 $\Delta y=k\Delta x$ 的极限与 k 有关），因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

设 $\vec{e}$ 是任一方向，方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$, 由定义, 原点处沿 $\vec{e}$ 的方向导数是 $f(t\cos\alpha,t\cos\beta)=|t|\cos\alpha\cos\beta$ 在 $t=0$ 处的导数, 显然只有当 $\cos\alpha=0$ 或 $\cos\beta=0$ 时导数存在，即当 $\vec{e}$ 和坐标轴平行时方向导数存在.

八 (10分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$. 证明在 $(0,\pi)$ 内存在两点 c_1,c_2, 使得 $f(c_1)=f(c_2)=0$.

证明: 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 由条件 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，$F(0)=F(\pi)=0$。又利用分部积分，

$$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)=\int_0^\pi F(x)\sin xdx=0$$

因此 $G(x)=\int_0^x F(t)\sin tdt$ 满足 $G(0)=G(\pi)=0$, 由罗尔定理, 存在 $c\in(0,\pi)$ 使得 $G'(c)=F(c)\sin c=0$, 因此 $F(c)$=0. 再利用罗尔定理, 存在 $c_1\in(0,c)$ 使得$F'(c_1)=f(c_1)=0$, 存在 $c_2\in(c,\pi)$ 使得 $F'(c_2)=f(c_2)=0$.