

## 集合论与图论试题（样卷一）

一、（15 分）设  $A, B, C$  是集合，试给出  $(A \cap B) \cup C = A \cup (B \cap C)$  的充要条件和证明。

(1) 充要条件：(2) 证明充分性：(3) 证明必要性：

二、（15 分）设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，定义  $A$  上二元关系

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \text{ 且 } |y| \text{ 不是 } |x| \text{ 的倍数} \}.$$

试判断  $R$  是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性，并说明理由。

（所谓  $|y|$  不是  $|x|$  的倍数，意思是不存在整数  $k$ ，使得  $|y| = k|x|$ 。）

(1) 自反性：(2) 反自反性：(3) 对称性：(4) 反对称性：(5) 传递性：

三、（15 分）是否存在集合  $A, B, C$  互不相同，使得  $\cup A = B, \cup B = C, \cup C = A$ ？说明理由。

四、（15 分）为了改善城市交通状况，有一种措施是把所有街道都改为单行线。如果以街道作为边，以交叉路口作为顶点，则整个城市的道路网可以表示为无向图  $G$ ，划定单行线后，这个图就成为有向图  $D$ 。试回答下列问题并说明理由。

(1)  $G$  一定是平面图吗？(2)  $D$  一定是竞赛图吗？(3)  $D$  一定是强连通图吗？

五、（10 分）(1) 画出所有互不同构的 5 阶无向树。

(2) 作为标定图的 5 阶完全图有多少个不同的生成树？为什么？

六、（15 分）画出彼得森图，给顶点加上标号，并回答下列问题：

(1) 写出一个最大独立集：

(2) 写出一个最小顶点覆盖：

(3) 写出一个最小支配集：

(4) 写出一条最长路径：

(5) 写出一个点割集：

七、（15 分）试回答下列问题：

(1) 对于哪些  $k$  值，11 阶  $k$  正则简单图一定是欧拉图？为什么？

(2) 对于哪些  $k$  值，11 阶  $k$  正则简单图一定是哈密顿图？为什么？

(3) 对于哪些  $k$  值，11 阶  $k$  正则简单图的边色数一定是  $k+1$ ？为什么？