

Appunti del corso  
Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico

Bernardo Vettori

A.A. 2020/2021

# Introduzione

In queste dispense sono raccolti gli appunti delle lezioni del corso di Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico A.A. 2020/2021 tenute dalla professoressa L.E. Marcucci. Non è quindi presente la parte di descrizione del deutone e dello scattering di 2 nucleoni tenuta invece dal professor A. Kievsky. Le immagini che compaiono sono state prese dagli appunti digitali del corso e l'ordine degli argomenti trattati corrisponde a quello adottato nel corso. Ogni capitolo infatti è organizzato con una piccola introduzione che ne descrive sinteticamente il contenuto e che indica le lezioni corrispondenti.

Per quanto riguarda la notazione, non vi è una scelta univoca, ma spesso viene ripresa quella degli articoli discussi a lezione; tuttavia le note a piè di pagina dovrebbero garantire la corretta comprensione della scelta adottata.

L'ultimo capitolo *Approfondimenti* raccoglie alcuni argomenti che ho personalmente approfondito durante lo studio, per cui non fanno parte del programma del corso.

Questo lavoro è totalmente personale e non ha alcuna validità in relazione all'esame dal momento che non è né stato controllato né approvato dalla docente. Per qualsiasi tipo di errore o imprecisione (anche solo grammaticale) mi farebbe piacere esserne informato, così da poter correggere prontamente.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ii</b>
<b>Indice</b>	<b>iii</b>
0.1    Applicazioni . . . . .	1
1    Phenomenological RM . . . . .	4
<b>I    Tecniche sperimentali di misura</b>	<b>7</b>
1    Metodi diretti . . . . .	7
1.1    LUNA . . . . .	9
1.1.1    LUNA I . . . . .	9
1.1.2    LUNA II . . . . .	12
1.1.3    LUNA MV . . . . .	13
1.2    ERNA . . . . .	14
1.2.1 <i>Recoil mass separator</i> . . . . .	14
1.2.2    Cinematica Inversa . . . . .	15
2    Metodi indiretti . . . . .	15
2.1 <i>Coulomb Dissociation method</i> . . . . .	16
2.2 <i>Trojan Horse method</i> . . . . .	21
<b>II    Approfondimenti</b>	<b>24</b>
1    Modelli e decadimenti . . . . .	24
1.1    Decadimento $\varepsilon$ . . . . .	24
2    Regola d'oro di Fermi . . . . .	24
3    Sul numero di neutrini . . . . .	25
4    Dettagli sul calcolo del decadimento $\gamma$ . . . . .	25
4.1    Clebsch-Gordan . . . . .	25
4.2    Proprietà della Bessel . . . . .	25
4.3    Proprietà armonica vettoriale . . . . .	25
5    Effetto tunnel . . . . .	26
6    CRM: indipendenza dal parametro $B$ . . . . .	26
7    Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ . . . . .	27
<b>Indice analitico</b>	<b>28</b>



**Qualche nota formale** Notiamo che l'espressione per  $U_\ell$  in (??) ha una forma che ricorda una lorentziana (come ci aspettavamo).

Poiché  $E \sim E_R$  e la matrice  $R$  non ha particolari discontinuità in  $E$  ( $R(E) \sim R(E_R)$ <sup>1</sup>) si usa una forma approssimata per  $\Gamma(E)$ :

$$\frac{\Gamma(E)}{\Gamma(E_R)} \simeq \frac{P_\ell(E)}{P_\ell(E_R)}$$

Per cui definendo  $\gamma^2 \equiv R_\ell(E_R)/(S_\ell R_\ell)'(E_R)$  si ha  $\Gamma(E) \simeq 2\gamma^2 P_\ell(E)$ .

**Risonanza e autovalori** Un altro modo per vedere la risonanza è considerare  $E \sim E_{n\ell}$  con  $n$  fissato; infatti per tale energia  $R$  diverge, per cui trascuriamo nella (??) tutti i termini con  $n \neq \bar{n}^2$ :

$$R_\ell(E) \simeq \frac{\gamma_{n\ell}^2}{E_{n\ell} - E}$$

Avremo allora per l'angolo di sfasamento in (??):

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left( \frac{P_\ell \gamma_{n\ell}^2}{E_{n\ell} - E - \gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E)} \right)$$

Poiché vale anche (??) si ha  $\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left( \Gamma(E)/2(E_R - E) \right)$ , da cui:

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &\simeq 2\gamma_{n\ell}^2 P_\ell(E) \\ E_R &\simeq E_{n\ell} - \gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E) \end{aligned} \quad (1)$$

Dunque, l'energia del polo di  $R$  non corrisponde a quella di risonanza, ma questa è *shiftata* di un certo fattore  $\gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E)$ <sup>3</sup>.

## 0.1 Applicazioni

Studiamo lo scattering  $A_1 + A_2$ . La scelta delle  $\varphi(r)$  è fondamentale per l'efficienza del metodo; in letteratura troviamo quelle per cui si ha la miglior convergenza:

$$-\varphi_k(r) = \sin \left[ \frac{\pi r}{a} \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2)$$

$$-\varphi_k(r) = r^{\ell+1} \exp \left( -\frac{r^2}{b_k^2} \right) \quad \text{con } b_k = b_1 x_0^{k-1} \quad (3)$$

$$-\varphi_k(r) = (-1)^{N+k} \left( \frac{r}{ax_k} \right)^n \sqrt{ax_k(1-x_k)} \frac{P_N(2r/a - 1)}{r - ax_k} \quad \text{con } x_k : P_N(2x_k - 1) = 0 \quad (4)$$

Per tutte  $a$  corrisponde al solito *channel radius*, mentre  $b_1$  e  $x_0$  nelle (3) sono parametri da determinare. Le ultime, (4), sono dette funzioni di Lagrange, i  $P_N$  sono i polinomi di Legendre e gli  $x_k$  i loro zeri; l'esponente  $n$  viene spesso preso  $n \sim 1$ .

Passiamo adesso alla trattazione di 2 esempi di scattering:

1.  $p + {}^{12}\text{C}$ : dati  $V_N + V_C$  e  $\varphi_i$  si ricava  $\delta_\ell$  e si cerca la risonanza a  $E_R = 0.42$  MeV e una larghezza (risonanza stretta)  $\Gamma = 37$  keV come *test*.
2.  $\alpha + \alpha$ : procedendo come per il caso precedente si cerca  $E_R = (11.35 \pm 0.15)$  MeV e una larghezza (risonanza larga)  $\Gamma \simeq 3.5$  MeV.

[NON RIPORTATO]

---

<sup>1</sup>Non vale per  $P_\ell$  che invece dipende fortemente dall'energia.

<sup>2</sup>Per semplicità da adesso in poi dal momento che non ci sarà ambiguità  $\bar{n} \rightarrow n$

<sup>3</sup>Da cui deriva appunto il nome *shift factor*. Per quanto riguarda il *penetration factor* esso dà informazioni sulla penetrazione della barriera coulombiana.

**Esempio  $p + {}^{12}\text{C}$**  Riportiamo i risultati per lo sfasamento in Figura 1 e per la funzione d'onda ridotta di onda  $S$  in Figura 2. In generale si osserva che le funzioni di Lagrange hanno convergenza più veloce e un miglior accordo tra regione esterna e interna per  $u_0$ . In Figura 3 è

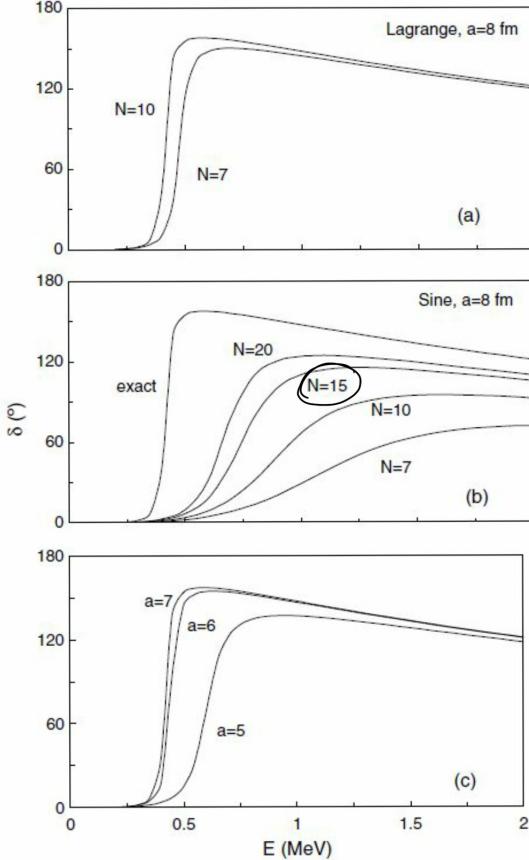


Figura 1: Risultati per lo sfasamento di  $p + {}^{12}\text{C}$ : (a) funzioni di Lagrange con  $a = 8 \text{ fm}$ , notiamo che già per  $N = 10$  si ha quasi la convergenza; (b) funzioni Gaussiane e Lagrange con  $a = 8 \text{ fm}$ , la convergenza è più lenta (non basta  $N = 20$ ); (c) convergenza delle funzioni di Lagrange + Gaussiane in funzione di  $a$  ( $N = 15$ ), il risultato esatto è  $a = 7$ .

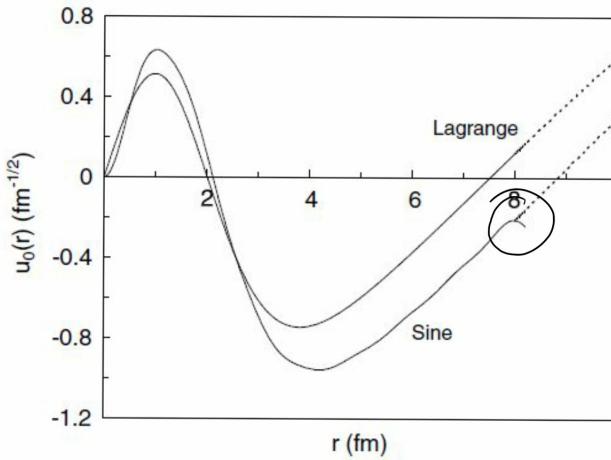


Figura 2: Funzioni d'onda ridotte calcolate per  $\ell = 0, N = 15$  e  $a = 8 \text{ fm}$  con le funzioni di Lagrange e con quelle seno. Notiamo che quest'ultime portano a una deviazione nella zona di raccordo con l'esterno.

invece riportato il *matching* dei parametri che permette di stimare la bontà della convergenza.

Le funzioni seno sono le prime a essere state studiate, ma come mostrano i risultati le gaussiane e quelle di Lagrange sono migliori.

$^{12}\text{C} + p \ l = 0$ phase shifts (in degrees) and matching parameters (4.15) for different bases ( $a = 8 \text{ fm}$ ).							
$E$ (MeV)	Exact	Phase shift			Matching parameter		
		$N = 7$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 7$	$N = 10$	$N = 15$
<i>Lagrange</i>							
0.5	154.66	112.90	154.94	154.59	5.96	0.65	0.01
1.0	147.48	144.22	147.55	147.48	3.68	0.28	0.00
1.5	133.30	311.02	133.35	133.30	1.67	0.20	0.00
2.0	121.18	299.30	121.23	121.18	1.21	0.16	0.00
<i>Gaussian</i>							
0.5	154.66	179.36	154.53	154.53	5.61	0.02	0.01
1.0	147.48	146.52	147.47	147.47	0.04	0.01	0.01
1.5	133.30	130.28	133.29	133.29	1.06	0.00	0.01
2.0	121.18	112.15	121.18	121.18	1.55	0.01	0.01
<i>Sine</i>							
0.5	154.66	2.03	3.74	6.68	0.12	0.66	1.54
1.0	147.48	28.90	66.57	109.98	1.30	4.66	29.35
1.5	133.30	63.84	94.53	113.28	11.46	6.97	3.53
2.0	121.18	71.76	92.24	105.34	5.73	3.14	2.38

Figura 3: *Matching* dei parametri per  $a = 8$ .

**Una piccola osservazione** Notiamo la differenza con un metodo *ab-initio*: non abbiamo fatto uno studio su 13 nucleoni, ma abbiamo lavorato solo con 2 oggetti  $p$  e  $^{12}\text{C}$ .

# 1 Phenomenological RM

Riprendiamo l'espressione che avevamo trovato per  $\delta$  nel caso di risonanza:

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left( \frac{\Gamma_R/2}{E_R - E} \right)$$

con  $\Gamma_R \equiv 2\gamma^2 P_\ell(E_R)$ . Se quindi abbiamo dati sperimentali di  $\Gamma_R$  ed  $E_R$  avremo un certo  $\gamma_{obs}^2$ , per cui possiamo ricavare l'andamento in funzione dell'energia di  $\delta_\ell$  e  $u^{int}$  e di conseguenza dal formalismo sviluppato finora anche  $\sigma(E)$  e  $S(E)$  per ogni energia. In altre parole il metodo *phRM* consiste nell'“aggiustare” i poli della matrice  $R$  ai dati, senza passare dall'hamiltoniana.

**Un metodo “semplice”** Dobbiamo fare attenzione perché  $E_{nl}$  e  $\gamma_{nl}$  (come abbiamo già visto) non coincidono con  $E_R$  e  $\gamma_{obs}$ . Per ricavare la relazione tra queste quantità come in (1) non possiamo seguire gli stessi passaggi fatti in precedenza (altrimenti  $\gamma_{nl} \sim \gamma_{obs}$ ), ma il risultato sarà simile. Consideriamo per semplicità un solo polo per  $R(E)$  in  $E_1$  e sviluppiamo  $S_\ell$  intorno a questo valore:

$$S_\ell(E) = S_\ell(E_1) + (E - E_1) S'_\ell(E_1)$$

Allora per  $\delta_\ell$  si avrà<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \Phi + \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_1^2 P(E)}{E_1 - E - \gamma_1^2 S(E_1) - \gamma_1^2 (E - E_1) S'(E_1)} \right) = \\ &= \Phi + \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_1^2 P(E)}{E_1 - \gamma_1^2 S(E_1) + \gamma_1^2 E_1 S'(E_1) - E (1 + \gamma_1^2 S'(E_1))} \right) = \\ &= \Phi + \tan^{-1} \left( \underbrace{\frac{\gamma_1^2}{1 + \gamma_1^2 S'(E_1)}}_{\gamma_{obs}^2} P(E) \underbrace{\frac{1}{E_1 - \gamma_1^2 S(E_1)/(1 + \gamma_1^2 S'(E_1)) - E}}_{E_R} \right) = \\ &= \Phi + \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{obs}^2 P(E_R)}{E_R - E} \right) \end{aligned}$$

Da cui si ottiene<sup>5</sup>:

$$\gamma_{1\ell}^2 \simeq \frac{\gamma_{obs}^2}{1 - \gamma_{obs}^2 S'_\ell(E_R)} \quad (5)$$

$$E_{1\ell} \simeq E_R + \gamma_{1\ell}^2 S_\ell(E_R) \quad (6)$$

Da queste si ottiene  $R_\ell(E)$  e quindi  $\sigma(E)$  o  $S(E)$ .

<sup>4</sup>Si omette il pedice  $\ell$ .

<sup>5</sup>Abbiamo linearizzato  $S(E_1)$  sviluppando intorno a  $E_R$  in

$$\begin{aligned} \gamma_{obs}^2 &\simeq \frac{\gamma_{1\ell}^2}{1 + \gamma_{1\ell}^2 S'_\ell(E_{1\ell})} \\ E_R &\simeq E_{1\ell} - \gamma_{obs}^2 S_\ell(E_{1\ell}) \end{aligned}$$

Abbiamo rimesso il pedice  $\ell$ .

**Il caso di  $p + {}^{12}\text{C}$**  In letteratura si definiscono spesso queste quantità:

$$\gamma_W \equiv \frac{3\hbar^2}{2\mu a^2}$$

$$\theta_{\text{obs}}^2 \equiv \frac{\gamma_{\text{obs}}^2}{\gamma_W^2}$$

$$\theta_1^2 \equiv \frac{\gamma_1^2}{\gamma_W^2}$$

Il parametro  $\gamma_W$  viene detto *Wigner limit*. Quando  $\theta^2 \sim 1$  i nuclei che collidono conservano la loro struttura nella risonanza. Riportiamo in Figura 4 i risultati per tale reazione di scattering

	$a = 4 \text{ fm}$	$a = 5 \text{ fm}$	$a = 6 \text{ fm}$	$a = 7 \text{ fm}$
${}^{12}\text{C} + p (J^\pi = 1/2^+, l = 0, E_R = 0.42 \text{ MeV}, \Gamma_R = 32 \text{ keV})$				
$\gamma_{\text{obs}}^2$	1.089	0.592	0.353	0.227
$\theta_{\text{obs}}^2$	0.258	0.220	0.189	0.165
$\gamma_1^2$	3.083	1.157	0.569	0.323
$E_1$	-2.152	-0.614	-0.110	-0.113
${}^{12}\text{C} + \alpha (J^\pi = 1^-, l = 1, E_R = 2.42 \text{ MeV}, \Gamma_R = 420 \text{ keV})$				
$\gamma_{\text{obs}}^2$		0.574	0.277	0.165
$\theta_{\text{obs}}^2$		0.6920	0.481	0.389
$\gamma_1^2$		1.172	0.374	0.191
$E_1$		0.491	1.921	2.219

Figura 4: Risultati per lo scattering  $p + {}^{12}\text{C}$ .

in funzione di  $a$ , dal momento che  $P_\ell$  ne dipende e quindi di conseguenza anche  $\Gamma_R$ . In Figura 5 invece è riportato l'andamento ottenuto per il fattore astrofisico. Anche se il calcolo sembra riprodurre bene i dati, si è considerato il  ${}^{12}\text{C}$  puntiforme nonostante  $\theta \neq 1$ . È possibile rendersi conto di questa approssimazione dall'andamento di  $S(E)$  (e quindi anche della sezione d'urto) rispetto ai dati. Si introduce allora un termine di correzione  $\mathcal{S}$  (*overall factor*) detto **fattore spettroscopico**<sup>6</sup> che moltiplica il fattore astrofisico. Nel caso particolare da noi studiato per ottenere accordo<sup>7</sup>  $\mathcal{S} = 0.45$  (come in Figura 5).

**Conclusioni** Concludiamo così la trattazione dei metodi di studio di reazioni. I metodi ab-initio sono certamente indipendenti dai dati, ma molto dispendiosi e complicati; il metodo RM invece permette il calcolo anche nel caso di molti nucleoni, ma dipende fortemente dai dati a disposizione (in un certo senso è un fit).

<sup>6</sup>Tecnicamente per ottenere un'espressione di questo parametro avrei bisogno di un metodo *ab-initio*, ma se lo avessi non ci sarebbe motivo di usare il metodo RM.

<sup>7</sup>Per decidere l'accordo si cerca di fare un *matching* per il picco della risonanza.

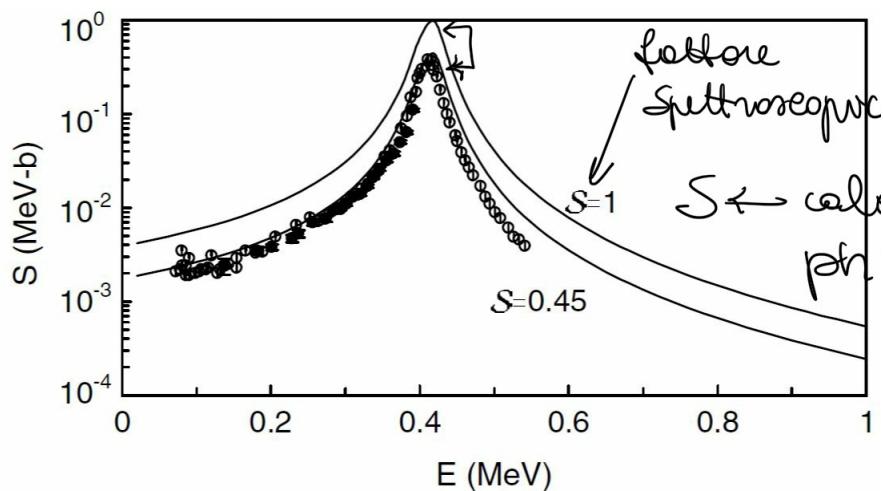


Figura 5: Andamento del fattore astrofisico ricavato con il metodo *phRM*. La curva continua in alto è l'andamento calcolato senza correzione, mentre quella che “fitta” i dati corrisponde a un fattore spettroscopico pari a 0.45.

# Capitolo I

## Tecniche sperimentali di misura

In questo capitolo vengono presentati alcuni degli esperimenti condotti per misure dirette di reazioni nucleari di interesse astrofisico, quali LUNA ed ERNA, e tre differenti tecniche di misura indiretta. Il capitolo copre le lezioni 14/04/2021, 15/04/2021, 19/04/2021 e 21/04/2021.

**Tecniche di misura** Abbiamo visto che la sezione d’urto “precipita” vari ordini di grandezza per energie sempre più piccole, quindi vi saranno pochissimi eventi; non solo, a quelle energie segnale e rumore si confondono, per cui è necessario trovare delle tecniche che permettano di migliorare la misura. Esistono principalmente due strategie:

1. Metodi diretti di misura con l’uso di qualche “trucco”.
2. Metodi indiretti di misura.

### 1 Metodi diretti

Innanzitutto per risolvere il problema del numero di eventi si utilizzano acceleratori ad altissima luminosità (fasci molto intensi). Per quanto riguarda il *background*, si cerca di schermalo il più possibile: i Laboratori Nazionali del Gran Sasso (LNGS)<sup>1</sup> sono usati per esperimenti con pochi eventi, come quelli di fisica nucleare (LUNA), sui neutrini (esperimento GERDA col decadimento<sup>2</sup>  $0\nu\beta\beta$  o lo stesso Borexino) e sulla *dark matter* (XENON1T o DARKSIDE).

**Raggi cosmici** Particelle cariche (muoni per esempio) ad alta energia molto penetranti. Per schermare questo tipo di fondo esistono principalmente due tipi di tecniche:

- *active shielding*: si circonda il rivelatore con uno secondario sensibile ai raggi cosmici e si studiano gli eventi in anticoincidenza.
- *passive shielding*: si posiziona il rivelatore in un mezzo schermante (come un blocco o il sottosuolo), tuttavia l’interazione tra mezzo e raggi (o prodotti) può portare a un aumento del fondo.

L’unità di misura dello schermaggio è *l’acqua equivalente*; al Gran Sasso per esempio vi sono 1400 m di roccia che corrispondono a 3800 m di acqua equivalente e questo comporta una riduzione per muoni dell’ordine di  $10^6$ , per neutroni di  $10^3$  e per raggi  $\gamma$  di 10.

In Figura I.1 riportiamo lo spettro dei raggi  $\gamma$  in grigio sulla superficie e in nero nei laboratori

---

<sup>1</sup>Link al sito: <https://www.lngs.infn.it/it/astrofisica-nucleare>

<sup>2</sup>Si tratta di un decadimento  $\beta\beta$  nel quale non dovrebbe comparire il neutrino; se così fosse allora  $\nu = \bar{\nu}$  (*particelle di Majorana*).

del Gran Sasso. Fino a circa 3 MeV si ha un certo flusso di fotoni dovuto per una “piccola” parte ai raggi cosmici (schermati) e per il contributo maggiore agli elementi radioattivi presenti nelle rocce; per energie superiori a 2.6 MeV invece abbiamo principalmente raggi cosmici, che vengono appunto ben schermati (fatta eccezione per alcuni picchi di reazioni note e quindi semplici da contare).

Ci chiediamo adesso se sia possibile migliorare lo schermaggio. La soluzione più semplice sembrerebbe quella di aggiungere un ulteriore schermo, per esempio circondando il rivelatore di piombo, ed effettivamente questo si fa, come mostrato in Figura I.1 (b). Tuttavia, il mezzo dev’essere “ripulito” da qualsiasi impurità radioattiva e spesso quel che si fa è aspettare un tempo sufficiente affinché divenga inerte<sup>3</sup>.

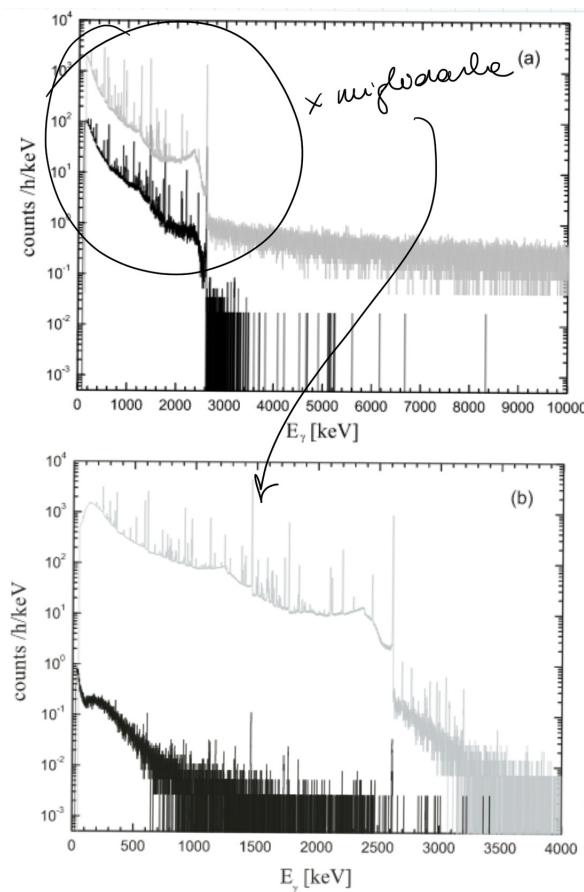


Figura I.1: Spettro dei raggi  $\gamma$ : (a) per rivelatore sulla superficie (in grigio) e nei laboratori (in nero); (b) per rivelatore ai LNGS senza schermaggio (in grigio) e con schermo (in nero).

**Un nemico nel sottosuolo** Abbiamo visto che porsi nel sottosuolo permette lo schermaggio dai raggi  $\gamma$ , tuttavia si presenta un’altra difficoltà: il radon  $^{222}\text{Rn}$ . Questo è radioattivo e si trova in stato gassoso, intrappolato nel sottosuolo circola nella zona sperimentale. Per risolvere tale problema tipicamente si installa il rivelatore in un contenitore in cui si genera un flusso d’aria continuo.

<sup>3</sup> Un piccolo aneddoto a tal riguardo: nel Gennaio del 2016 in Sardegna fu ritrovata sul fondo del mare una nave romana che conteneva 30 lingotti di piombo; non avevano alcun valore artistico o economico, ma per i fisici furono “oro” dal momento che la concentrazione di isotopi radioattivi al suo interno dopo 2000 anni era effimera e per questa ragione furono portati nei LNGS, dove tuttora si trovano.

## 1.1 LUNA

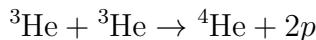
Discussiamo in questa sezione il *Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics* detto LUNA.

**Qualche data** I lavori per l'esperimento LUNA iniziarono nel 1990 insieme a quelli al Gran Sasso (1982) ed è tuttora operativo.

1. LUNA I dal 1994 al 2003.
2. LUNA II dal 2000 al 2020.
3. LUNA MV in progettazione.

### 1.1.1 LUNA I

**La prima reazione** Nell'esperimento<sup>4</sup> LUNA I si studiò per prima la reazione<sup>5</sup>:



dove un  ${}^3\text{He}$  cosisteva in un fascio con una corrente pari a  $300 \mu\text{A}$  e l'altro in una targhetta gassosa posta nella camera di interazione a una pressione<sup>6</sup> di  $0.5 \text{ mbar}$ . Un *beam dump*, anch'esso collocato nella camera di interazione, bloccava il fascio e permetteva, tramite la misura della variazione di temperatura, di stimare la *beam current* con una precisione del 3%<sup>7</sup>.

Fu scelta questa reazione non solo perché presente nella *ppI*, ma anche perché negli anni '90 era particolarmente discussa la questione dei neutrini solari e Fowler aveva supposto che la sezione d'urto di tale reazione fosse sottostimata a causa di una risonanza non osservata<sup>8</sup>. Prima di LUNA non si avevano acquisizioni per energie inferiori ai  $26 \text{ keV}$  e il picco di Gamow di tale reazione è  $21 \pm 5 \text{ keV}$ ; con LUNA I si raggiunsero  $16.5 \text{ keV}$  misurando<sup>9</sup> una sezione d'urto pari a  $20 \text{ fb} = 2 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2$ . Il rivelatore (composto da quattro  $\Delta E - E$  particle detector<sup>10</sup>) permetteva di identificare per ogni evento una regione nel piano  $\Delta E - E$  in cui esso si collocava, al fine di poter distinguere il contributo dell'*induced background*<sup>11</sup>: nel fascio era presente infatti una contaminazione di deuterio (nella molecola  $pd^+$ ) di circa  $d/{}^3\text{He} \sim 1 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-6}$ , che tramite la reazione<sup>12</sup>  ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$  "sporcava" la misura. In Figura I.2 riportiamo i risultati della presa dati: si possono facilmente distinguere 2 regioni.

Si osserva anche la presenza di un certo *noise* sulle ascisse, che tuttavia non preoccupa dal momento che la regione di interesse è molto meno popolata.

Per energie inferiori ai  $20.7 \text{ keV}$  le 2 regioni si sovrapponevano e non era più possibile distinguere tra fondo e misura di interesse, allora furono installati 2 rivelatori di protoni in successione e in coincidenza, dal momento che la reazione  ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$  produce un solo protone e non due. Per avere un'idea di quanto fu ridotto il fondo si guardi la Figura I.3.

<sup>4</sup>Fu impiegato un acceleratore "home made", progetto di laurea di uno studente, che cosisteva di un Van de Graaff a  $50 \text{ kV}$ . Il fascio aveva uno *spread*  $< 20 \text{ eV}$  (molto piccolo) che permetteva un'accurata determinazione dell'energia delle particelle incidenti e inoltre il voltaggio era noto meglio di 1 parte su  $10^{-4}$ .

<sup>5</sup>Reazione *ppI*, guarda Figura ??.

<sup>6</sup>Da una versione a quella successiva si è migliorato anche questo settaggio.

<sup>7</sup>Per ottenere questa precisione era stato posto nella camera anche un calorimetro che tenesse conto dell'effetto di ionizzazione dovuto al passaggio del fascio attraverso il gas.

<sup>8</sup>Guarda la sezione ?? - ?? per l'ipotesi di Fowler.

<sup>9</sup>Si avevano 2 eventi al mese.

<sup>10</sup>La configurazione dei rivelatori  $\Delta E - E$  consiste in due mezzi di diverso spessore (fissato in modo tale da distinguere le due reazioni) posti in successione:  $\Delta E$  si riferisce all'energia persa dal fascio nell'attraversamento del mezzo più sottile, mentre  $E$  a quella scambiata con il mezzo più spesso, che "frena" il fascio.

<sup>11</sup>Ovvero il fondo indotto dalla misura stessa.

<sup>12</sup>La cui sezione d'urto è  $10^6$  volte maggiore di quella della reazione di interesse.

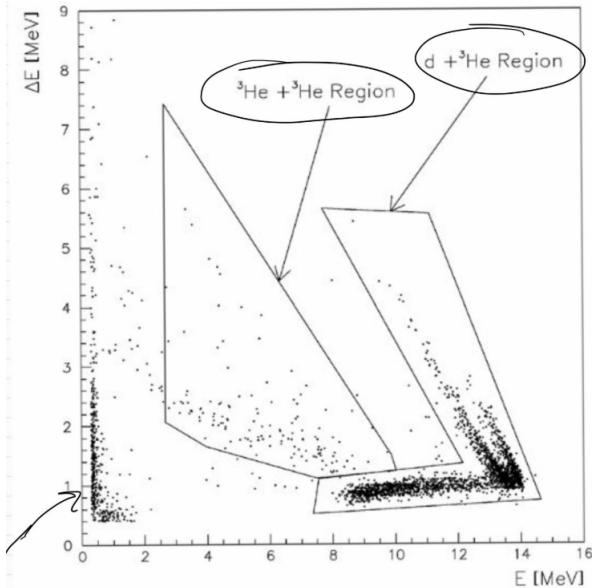


Figura I.2: Dati dell'esperimento. Si riescono a identificare 2 regioni, una di interesse e l'altra di rumore. Si osserva anche una zona particolarmente popolata nelle basse energie lungo le ascisse che è dovuta al rumore elettronico indotto dal fascio.

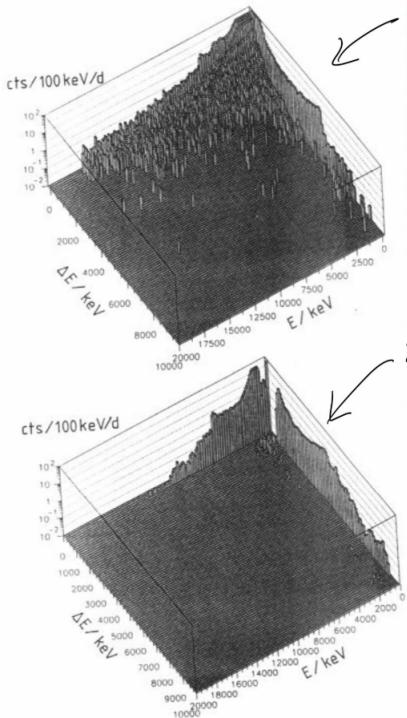


Figura I.3: Riduzione del fondo, sul piano  $x - y$  vi è la matrice  $\Delta E - E$ , mentre sull'asse  $z$  sono riportati i conteggi: in alto risultati con *running time* di 16 giorni per un solo rivelatore a terra (presenza anche di raggi cosmici), in basso 2 rivelatori in coincidenza nel sottosuolo con *running time* di 61 giorni.

Si ottenne così i risultati per la sezione d'urto e il fattore astrofisico di Figura I.4. Notiamo che per basse energie il fattore astrofisico tende a crescere; ciò è dovuto non a una risonanza sotto

soglia, ma dai risultati del fit sembrerebbe legato all'elettroscreening<sup>13</sup>:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \sim \exp\left(\frac{\pi\eta U_e}{E}\right)$$

Fu confutata così l'ipotesi di Fowler e non solo, si poté valutare anche l'effetto dell'elettroscreening.

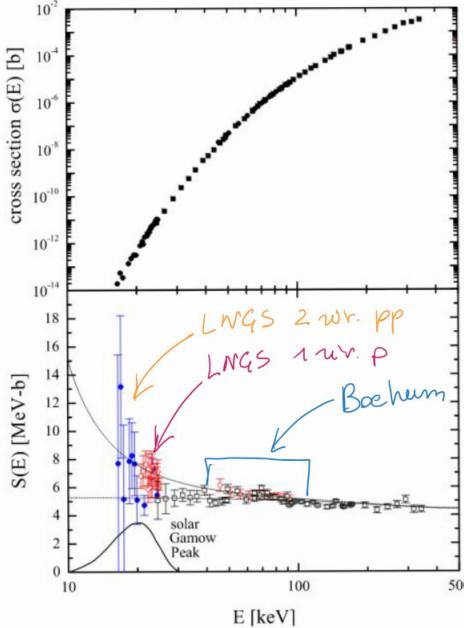
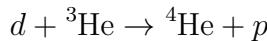
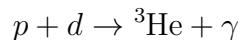


Figura I.4: Risultati degli esperimenti. In alto la sezione d'urto; in basso il fattore astrofisico: i cerchi blu pieni sono i risultati al Gran Sasso con rivelatori di protoni in coincidenza, i cerchi rossi vuoti per energie comprese tra 20 e 25 keV sono i dati LUNA I con un solo rivelatore di protoni, mentre per energie tra 45 e 92 keV (soglia in cui il segnale è maggiore del *background*) sono i dati raccolti con lo stesso rivelatore ma a Bochum in Germania a terra. La crescita a basse energie del fattore astrofisico è dovuta all'elettroscreening.

**Il problema dello screening** L'effetto di elettroscreening dato dal modello  $U_e = 220$  eV non era compatibile con quello misurato  $U_e \simeq (294 \pm 47)$  eV. Si iniziò quindi a studiare tale fenomeno. Fu scelta la reazione (precedentemente non di interesse):



arrivando a energie inferiori a 4.2 keV, come mostrato in Figura I.5. Nonostante l'accordo qualitativo, si ottenne così  $U_e^{exp} \simeq (132 \pm 9)$  eV, non compatibile con  $U_e^{th} \equiv U_{ad} = 65$  eV. L'ultima reazione studiata in questo campo è:



intorno al picco di Gamow. Questa reazione fa parte della catena  $pp$ <sup>14</sup>, ma è l'unico canale aperto per cui non influisce sul conto dei neutrini solari. I *range* di energie di interesse per questa reazione:

<sup>13</sup>Riguarda la sezione ?? - ??.

<sup>14</sup>Importante nelle proto-stelle: quando si raggiungono temperature  $T \sim 10^6$  K il poco deuterio presente (dovuto all'arricchimento di popolazioni precedenti) può reagire  $p + d$ , innescando un *d-burning* prima della catena  $pp$ . Questo comporta un rallentamento della contrazione e quindi un aumento della vita media della proto-stella: le sue caratteristiche (luminosità, temperatura,...) rimangono infatti “congelate” fin quando dura il *d-burning* e ciò avrà conseguenze su tali quantità all’innesto del *H-buring* successivo.

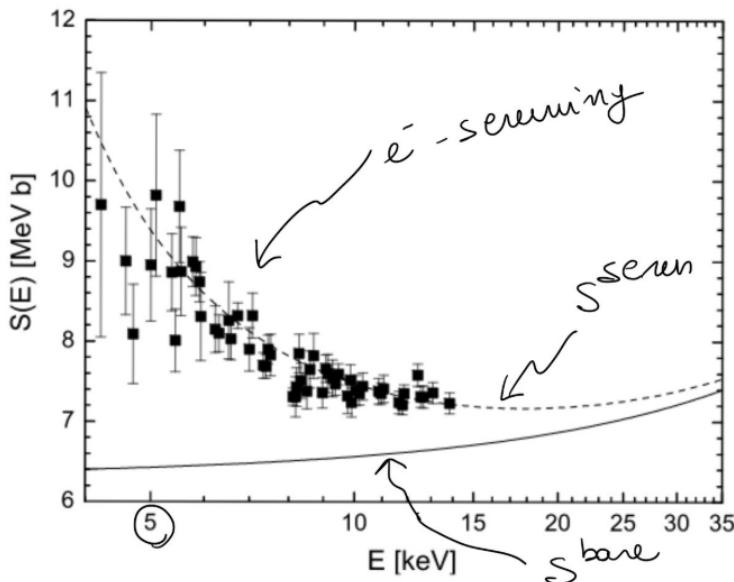


Figura I.5: Dati di LUNA I per il fattore astrofisico: la linea continua rappresenta il modello senza schermo elettronico, la linea tratteggiata quello che ne tiene conto.

- $1 - 2 \text{ keV} \rightarrow d\text{-burning}$  di proto-stelle.
- $\simeq 9 \text{ keV} \rightarrow d\text{-burning}$  del Sole.
- $\simeq 100 \text{ keV} \rightarrow pd$  della BBN.

LUNA I si concentrò sulle energie inferiori ai 100 keV e dovette ovviamente cambiare *set-up* dal momento che l'interazione era differente (elettromagnetica): rivelatore ad alta efficienza (prendere più eventi possibile) e a grande angolo solido (ampio campo di osservazione). Fu impiegato il germanato di bismuto BGO( $\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$ ) come scintillatore, dotato di un'efficienza di circa 70% e una risoluzione in energia di  $\sim 8\%$ .

### 1.1.2 LUNA II

Nel 2000 LUNA II fu impiegato per lo studio della  $pd$  della BBN (100 keV). Fu utilizzato un acceleratore commerciale a *high current* (Cockcroft-Walton): 1 mA per  $\text{H}^+$  e  $500 \mu\text{A}$  per  $\text{He}^+$  con un voltaggio pari a 400 kV, rimanendo stabile anche per 40 giorni di operatività. Furono costruite 2 linee di prese dati:

I targhetta gassosa

II targhetta solida

Le reazioni studiate da LUNA II furono:

1.  ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ , studio della BBN e della  $pp$ <sup>15</sup>.
2.  ${}^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma){}^{15}\text{O}$ , studio biciclo CN-NO<sup>16</sup>.
3.  ${}^{25}\text{Mg}(\text{p}, \gamma){}^{26}\text{Al}$ , studio di altre reazioni di interesse stellare.
4.  $pd$ , studio della BBN.

Ricordiamo la Figura ??, dove compaiono in rosso per basse energie i dati di LUNA I (Casella 2002) e per energie maggiori quelli di LUNA II.

<sup>15</sup>Vedi i capitoli ??-?? e ??-??

<sup>16</sup>Vedi sezione ??-??

**Lo studio della  $\text{he}\alpha$**  Discutiamo adesso la reazione  ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ . Prima di LUNA erano stati sviluppati 2 metodi di misura:

1. *Prompt  $\gamma$  method* che si basa principalmente sulla misura dei fotoni prodotti. Da questo si era ottenuto:

$$S(0) = (0.507 \pm 0.016) \text{ keVb}$$

2. *Activation method* che sfrutta la cattura elettronica<sup>17</sup> del  ${}^7\text{Be}$ , per cui studiando la radioattività si può risalire al numero di  ${}^7\text{Be}$ . Con questo metodo si ottenne invece:

$$S(0) = (0.572 \pm 0.026) \text{ keVb}$$

Queste due misure erano quindi in disaccordo, per cui LUNA II utilizzò contemporaneamente entrambi: fu impiegata una targhetta gassosa di  ${}^3\text{He}$  e un *HPGe (High Purity Germanium) detector*, che permetteva di raccogliere i fotoni emessi vicino alla *interaction chamber*; successivamente raccolsero anche il  ${}^7\text{Be}$  per studiare la radioattività<sup>18</sup>. Come risultato, riportato in Figura I.6, si ebbe l'assenza di discrepanza e un valore<sup>19</sup>  $S(0) = (0.567 \pm 0.022) \text{ keVb}$  in accordo con quello del metodo 2., perciò si suppose che nell'esperimento con il metodo 1. non furono raccolti tutti i fotoni.

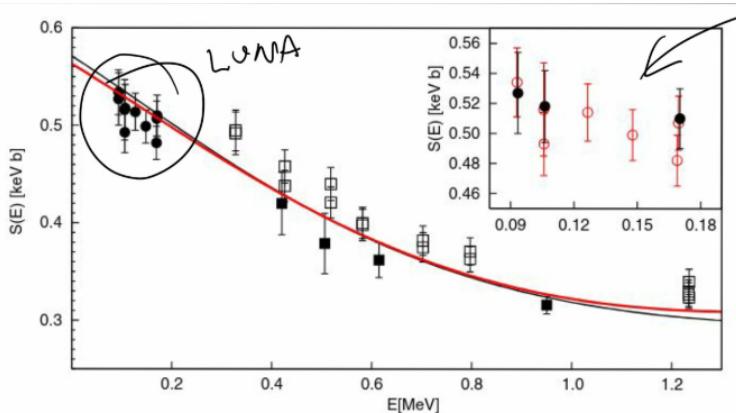
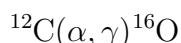


Figura I.6: Risultati di LUNA II. I quadratini pieni sono i dati più recenti, quelli vuoti sono i dati meno recenti e i cerchi sono i dati di LUNA. Nel riguardo in alto a destra si distinguono i dati ottenuti con il metodo 2. (in nero) e con il metodo 1. (in rosso); non si osserva alcuna discrepanza.

### 1.1.3 LUNA MV

L'ultima frontiera per LUNA è una macchina acceleratrice con un voltaggio di 3.5 MV detta appunto LUNA MV, ma per tale scopo le dimensioni non sono conformi allo spazio disponibile nei LNGS per cui verrà costruita da un'altra parte e questo lascia a disposizione LUNA II per possibili misurazioni future. L'obiettivo di LUNA MV sarà lo studio di reazioni di difficile misura e importanti per la verifica del modello; per esempio il cosiddetto *holy grail* dell'astrofisica<sup>20</sup>:



<sup>17</sup>  ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$  con un tempo di dimezzamento pari a  $\tau_{\frac{1}{2}} \sim 53$  d.

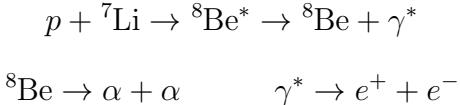
<sup>18</sup> Per schermare i fotoni del fondo dovuti alla radiazione naturale (la cui energia  $E_\gamma \sim Q \sim 1.586$  MeV *value* della reazione) rivestirono il rivelatore del piombo ritrovato nella nave romana.

<sup>19</sup> In realtà questo valore deriva sia dalle misure sia da un'estrapolazione; infatti 4 eV di errore deriva dal modello teorico scelto.

<sup>20</sup> Guarda sezione ?? - ??.

Determinare con precisione la sezione d’urto di questa reazione permetterebbe di stimare con altrettanta precisione le abbondanze di  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ , difficili da misurare.

**ATOMKI Anomaly** Per quanto riguarda la ricerca di nuova fisica acceleratori di maggiore potenza permetterebbero lo studio dell’anomalia di ATOMKI, per la prima volta osservata con la reazione



Non fecero *particles identification*, ovvero non misurarono direttamente gli elettroni e i positroni prodotti. L’anomalia che osservarono fu un picco nella sezione d’urto per un angolo  $\theta_{ee} \sim 120^\circ$ ; si è quindi pensato alla possibilità che venisse prodotta una particella massiva sconosciuta<sup>21</sup> (materia oscura)  ${}^8\text{Be}^* \rightarrow {}^8\text{Be} + X$  e  $X \rightarrow e^+ + e^-$  con  $M_X \sim 17$  MeV, da cui il nome di particella X17. Ci fu molta discussione al riguardo, anche perché il *background* non era stato calcolato bene e non si era considerata la velocità di decadimento del  ${}^8\text{Be}$  in  $2\alpha$ .

ATOMKI si spinse più avanti<sup>22</sup> studiando:



Oltre al canale  $\rightarrow {}^4\text{He} + \gamma^*$  si potrebbe avere  $\rightarrow {}^4\text{He} + X$ ; osservarono la stessa anomalia. Questa reazione si può studiare con un metodo *ab-initio* che ha confermato l’assenza di questo picco.

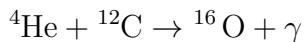
LUNA MV potrebbe mettere fine a questa discussione poiché riuscirà a raggiungere i 17 MeV per le reazioni  $p + {}^3\text{H}$  e  $p + {}^7\text{Li}$ . Per quanto riguarda quest’ultima, sta per essere studiata al *Laboratory of Paul Scherrer Institute* (LPSI) in Svizzera, dove cercano anche di misurare il decadimento non standard<sup>23</sup> del  $\mu$ .

## 1.2 ERNA

Un altro esperimento che discuteremo è *European Recoil separator for Nuclear Astrophysics* o ERNA, situato a Caserta in Campania, che utilizza appunto il metodo del *recoil* (adottato anche in altri esperimenti).

### 1.2.1 *Recoil mass separator*

Prendiamo una reazione a due corpi “poco probabile”<sup>24</sup>  $a + b \rightarrow c + \gamma$  con  $a$  ioni accelerati e  $b$  targhetta, per esempio:



Oltre alla radiazione che viene raccolta da un rilevatore, dal momento che la reazione è “rara”, avremo un fascio uscente di  $a$  e  $c$ ; per separare il reagente dal prodotto si utilizza una macchina *recoil mass separator* che sfrutta la differenza di massa tra  $a$  e  $c$  per deviare la traiettoria del fascio di  $a$  attraverso campi magnetici, facendo sì che solo il fascio di  $c$  raggiunga il rivelatore. Quest’ultimo è messo in coincidenza con il rivelatore di fotoni.

<sup>21</sup>Tipicamente le particelle della coppia hanno un angolo molto “piccolo”.

<sup>22</sup>Anche nell’esperimento DAMA ai LNGS dicono di aver osservato fluttuazioni di materia oscura, tuttavia solo loro riescono a ossevarle.

<sup>23</sup> $\mu \rightarrow e^+ + \gamma$ .

<sup>24</sup>Supponiamo di trovarci nella condizione per cui la reazione sia poco efficiente.

### 1.2.2 Cinematica Inversa

Poniamoci nel sistema del centro di massa<sup>25</sup>, dove vediamo  $a$  e  $b$  scontrarsi e  $\gamma$  e  $c$  “scatterare” con un certo angolo  $\theta_{CM}$ :

Stato Iniziale	Stato Finale
$(E'_a, p', 0, 0) + (E'_b, -p', 0, 0)$	$(E'_c, -p'_c \cos \theta_{CM}, -p'_c \sin \theta_{CM}, 0) + (E'_\gamma, E'_\gamma \cos \theta_{CM}, E'_\gamma \sin \theta_{CM}, 0)$

Dalla conservazione del quadrimpulso:

$$\begin{aligned} m_a + m_b + \underbrace{\frac{p'^2}{2\mu_{ab}}}_{T_{rel}} &= m_c + \frac{E'^2}{2m_c} + E'_\gamma \\ -p'_c \cos \theta_{CM} + E'_\gamma \cos \theta_{CM} &= 0 \\ -p'_c \sin \theta_{CM} + E'_\gamma \sin \theta_{CM} &= 0 \end{aligned}$$

per cui  $E'_\gamma = p'_c$  e  $E'_\gamma = \overbrace{m_a + m_b - m_c}^{\Delta M=Q} + T_{rel}$ , dove abbiamo trascurato  $T_c$ .  
Nel sistema del laboratorio:

Stato Iniziale	Stato Finale
$(E_a, p_a, 0, 0) + (m_b, 0, 0, 0)$	$(E_c, p_c \cos \theta_c, p_c \sin \theta_c, 0) + (E_\gamma, E_\gamma \cos \theta_\gamma, E_\gamma \sin \theta_\gamma, 0)$

da cui  $p_{CM} = p_a$  ed  $E_{CM} = m_b + E_a$ ; trasformando con Lorentz ( $\beta = p_{CM}/E_{CM}$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ) si ottiene:

$$p_{c,y} = p'_{c,y} \Rightarrow \tan \theta_c = -\frac{p'_c \sin \theta_{CM}}{\gamma[\beta E'_c + p'_c \cos \theta_{CM}]}$$

Ci chiediamo allora quale sia l’angolo massimo di scattering per  $c$ :  $\sin \theta_{CM} = 1$  per cui  $\theta_{CM} = \pi/2$ .

$$\tan \theta_c|_{\max} = \frac{p'_c}{\gamma \beta E'_c} = \frac{E'_\gamma}{\beta E_c} \simeq \frac{E_\gamma}{p_c}$$

dove abbiamo trascurato il segno e usato le trasformazioni di Lorentz nel secondo passaggio. Abbiamo allora che la traiettoria di  $c$  sta dentro un cono di ampiezza massima  $\theta_{c,\max} \sim \tan^{-1} E_\gamma/p_c$  e per convergere il fascio bisogna massimizzare  $p_c$ ; questo scala come  $p_{CM}$  che è maggiore per  $m_a > m_b$ .

Dunque, nello studio di  ${}^4\text{He} + {}^{12}\text{C}$  si usa il carbonio come proiettile e non l’olio. Questa configurazione viene detta **cinematica inversa** e migliora la separazione nella macchina di *recoil*. Riportiamo uno schema dell’apparato sperimentale in Figura I.7.

L’unico difetto del metodo sta nel fatto che minore è l’energia incidente maggiore dev’essere il raggio della struttura.

## 2 Metodi indiretti

Passiamo ora a illustrare 3 metodi di misura indiretti<sup>26</sup>: *Coulomb dissociation method* (CD), *Trojan Horse method* (TH) e *Asymptotic Normalization Coefficients method* (ANC)

<sup>25</sup>Mettiamo  $c = 1$  e indichiamo le quantità riferite al sistema del centro di massa con l’apostrofo ‘.

<sup>26</sup>Per approfondire Tribble, R.E. et al., Rep. Prog. Phys., 2014, vol. 77, DOI: [10.1088/0034-4885/77/10/106901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/10/106901).

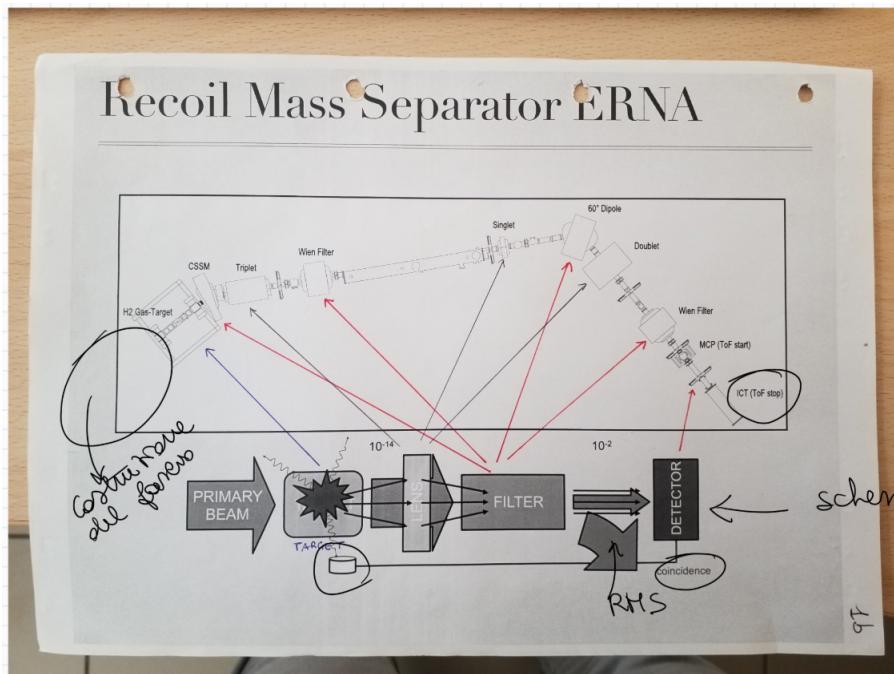
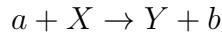
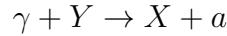


Figura I.7: Schema dell'apparato sperimentale di ERNA: sono presenti lenti focalizzanti all'uscita di ogni filtro. In questo caso a curvare sono le *c* mentre le *a* vanno a diritto.

## 2.1 Coulomb Dissociation method



dove spesso  $b \equiv \gamma$ . Invece di studiare questa ci concentreremo sulla fotodisintegrazione:



Dallo studio della sezione d'urto<sup>27</sup>, detta  $S$  la matrice di scattering:

$$\begin{aligned} \sigma_{aX} &= \frac{\pi}{k_1^2} \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_X + 1)} \sum_{\ell} (2\ell + 1) |S_{if}|^2 \\ \sigma_{\gamma Y} &= \frac{\pi}{k_2^2} \frac{1}{2(2S_Y + 1)} \sum_{\ell} (2\ell + 1) |S_{fi}|^2 \end{aligned}$$

con  $k_1 \equiv \sqrt{2\mu_{aX} E_{CM}}$ ,  $k_2 \equiv E_{\gamma} = Q + E_{CM}$ <sup>28</sup> e  $S_{if} = (S_{fi})^*$ , per cui  $|S_{if}| = |S_{fi}|$ . Da questo otteniamo il **principio del bilancio dettagliato**:

$$\frac{\sigma_{aX}}{\sigma_{\gamma Y}} = \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{2(2S_Y + 1)}{(2S_a + 1)(2S_X + 1)}$$

che deriva dall'invarianza per inversione temporale dell'interazione elettromagnetica. Dunque se misuriamo  $\sigma_{\gamma Y}$  abbiamo una stima di  $\sigma_{aX}$ . Sperimentalmente viene fatto interagire  $Y$  con una targhetta pesante  $Tg$  (tipo piombo) così che la reazione  $Y\gamma$  sia dovuta a un fotone virtuale  $\gamma^*$ . Schema in Figura I.8.

Se il parametro di impatto è nullo,  $b = 0$ , si ha nel punto di minima distanza:  $V = Zze^2/d$  e  $T = 0$ . Dalla conservazione dell'energia, con  $v_0$  velocità iniziale:

$$d = 2 \frac{Zze^2}{mv_0^2}$$

<sup>27</sup>Ricordarsi che il fotone ha solo 2 polarizzazioni possibili.

<sup>28</sup>Abbiamo trascurato il rinculo del nucleo  $Y$ .

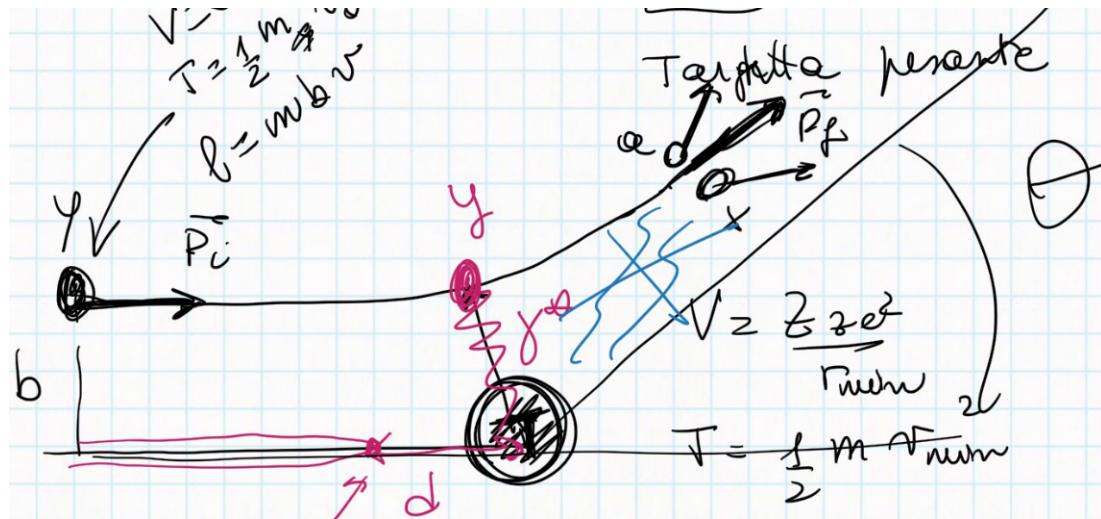


Figura I.8: Schema dello scattering con targhetta pesante. Notazione:  $d$  distanza minima se il parametro di impatto è nullo,  $b$  parametro di impatto,  $\theta$  angolo di scattering.

In generale:  $V = Zze^2/r_{\min}$ ,  $T = mv_{\min}/2$  e  $\ell = mr_{\min}v_{\min}$ . Se supponiamo di avere scattering elastico allora  $\Delta p \equiv |p_i - p_f| = 2p \sin(\theta/2) = 2mv_0 \sin(\theta/2)$ . Dalla relazione tra variazione di impulso e forza si ha  $\Delta p = \int F dt = zZe^2 \int \cos \beta dt / r^2$ , dove  $\beta$  è l'angolo formato dalla bisettrice dell'angolo  $\pi - \theta$  e il vettore distanza tra  $Y$  e  $Tg$ : se  $Y$  arriva da  $-\infty$  a  $t = 0$  si ha  $\beta(0) = -(\pi - \theta)/2$ , mentre a  $t = \infty \beta(\infty) = (\pi - \theta)/2$ .

Per trovare la relazione funzionale tra  $\beta$  e  $t$  scriviamo la conservazione del momento angolare<sup>29</sup>:

$$mv_0 b = mr^2 \dot{\beta}$$

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\beta}{v_0 b}$$

Dunque:

$$2mv_0 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{v_0 b} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \beta d\beta$$

$$b = \frac{d}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

dove abbiamo usato l'espressione di  $d$  trovata in precedenza.

A questo punto come al solito facciamo alcune approssimazioni:

1. Trascuriamo l'interazione nucleare (altrimenti non avrei  $\gamma$  virtuale), per cui  $b \gg 1$  e di conseguenza  $\theta \ll 1$ .
2. Facciamo l'approssimazione *one-photon-exchange*, quindi abbiamo lo scattering con un solo fotone e trascuriamo l'interazione (*photon exchange*) tra i prodotti  $a$  e  $X$  con il nucleo pesante (*post-acceleration effects*).

Grazie a queste due approssimazioni la velocità relativa tra i prodotti è piccola quindi possiamo lavorare a energie maggiori, migliorando la rivelazione, e non abbiamo grandi difficoltà con la barriera di Coulomb.



<sup>29</sup> $\vec{v}$  in coordinate polari:  $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\beta} \hat{\beta}$

Dalla misura della prima abbiamo la seconda. Non svolgiamo il calcolo, ma riportiamo il risultato solo per i multipoli elettrici:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{d\sigma_{E\lambda}^\gamma}{dE} \frac{dn_{E\lambda}}{dE}$$

dove l'ultima derivata è la densità di  $\gamma^*$  nello spazio delle fasi e dipende solamente dalla cinematica, non da  $Y$  (quindi possiamo calcolarla). Per quanto riguarda la derivata<sup>30</sup> della sezione d'urto in funzione dell'energia:

$$\frac{d\sigma_{E\lambda}^\gamma}{dE} \sim \frac{(\lambda + 1)}{\lambda[(2\lambda + 1)!!]^2} E_\gamma^{2\lambda - 1} \frac{d}{dE} (B(E\lambda))^*$$

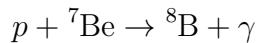
dove  $B$  è la *reduction transition probability* definita come:

$$B(E\lambda, J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f | \underbrace{Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) r^\lambda \rho(\vec{r})}_{E\lambda} | J_i \rangle \right|^2$$

L'elemento di matrice di multipolo si può calcolare tramite le stime di Weisskopf<sup>31</sup>.

Da  $d^2\sigma/d\Omega dE_\gamma$  si ottiene  $\sigma_{E\lambda}^\gamma$  e da questa  $\sigma_{\text{cattura}}$ . Conta in particolare  $E1$ , ma verificare che il contributo dei termini superiori  $\lambda > 1$  (per esempio  $M1$  ed  $E2$ ) è “piccolo” non è semplice, c'è molta teoria; inoltre, dev'essere trovato un buon bilancio tra  $\theta$  e  $b$  per rispettare l'approssimazione 1. e al contempo non rendere troppo difficoltosa la misura di  $\theta$ <sup>32</sup>, mentre per mantenere l'approssimazione 2. bisogna aumentare l'energia.

**Un esempio** Prendiamo la reazione:



Questa è una reazione studiata molto e con varie tecniche, per cui è un ottimo campione per testare un metodo.

Procedendo come abbiamo studiato<sup>33</sup>:



Si sono fatti vari esperimenti a energie differenti<sup>34</sup>:

- 47 AMeV e 52 AMeV, esperimento RIKEN in Giappone. Questa misura era affetta significativamente dal background dovuto ai fotoni di interazione tra prodotti e targhetta (*multi-photon-exchange*).
- 83 AMeV, esperimento MSU in America. I rivelatori usati in questa misurazione erano a bassa efficienza.
- 254 AMeV, esperimento GSI in Germania. È il migliore tra i tre.

Nel caso dell'ultimo esperimento (quello su cui ci concentriamo) fu fatta un'analisi in multipoli (fino a  $E2$ ). In Figura I.9 riportiamo i risultati ottenuti, mentre in Figura I.10 sono riportati i risultati anche degli altri esperimenti. Notiamo da quest'ultimo grafico che non vi è accordo, ma ciò è dovuto alle difficoltà spiegate precedentemente (tuttora vi è discussione).

Con questo metodo però non si riescono a vedere le risonanze.

<sup>30</sup>Osserviamo che il fattore moltiplicativo ricorda quello del rate in equazione (??) vista per il decadimento  $\gamma$ , dove però avevamo  $\lambda = J$ .

<sup>31</sup>Vedi ??-??.

<sup>32</sup> $\theta \rightarrow 0$  non è facile da misurare.

<sup>33</sup>Il piombo dev'essere nel fondamentale.

<sup>34</sup>L'unità di misura AMeV indica *tot* MeV per nucleone.

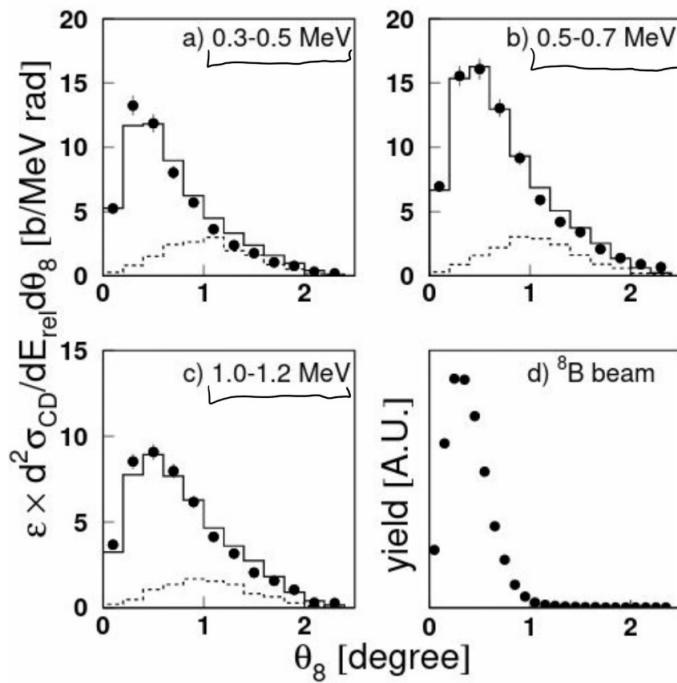


Figura I.9: Risultati dell'esperimento GSI. Il pannello in basso a destra è il fascio di  ${}^8\text{B}$  che non ci interessa. Negli altri pannelli abbiamo 3 intervalli di energia nel sistema del centro di massa: i punti rappresentano i dati sperimentali, mentre gli histogrammi in linea continua sono simulazioni con il contributo  $E1 + M1$  e quelli in linea tratteggiata sono simulazioni con il contributo solo di  $E2$ .

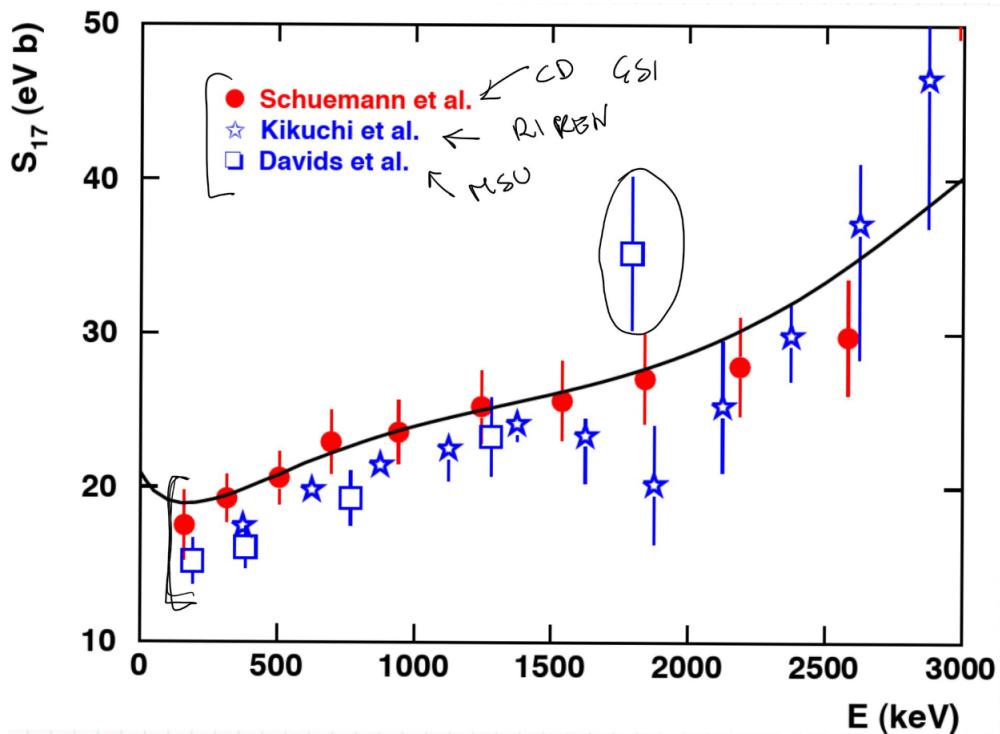


Figura I.10: Risultati dei vari esperimenti a confronto.

**Un'ultima osservazione** Si può avere  $E1$  e  $M1$  contemporaneamente, perché lo stato di scattering può avvenire con onde pari o dispari che portano allo stesso  $J$ , per esempio si potrebbe

avere<sup>35</sup>  $E1$  in onda  $S$  (pari) e  $M1$  in onda  $P$  (dispari), ma sperimentalmente è impossibile distinguerle; per cui se abbiamo un processo  $\gamma + X \rightarrow X^* \rightarrow a + b$  ( $\pi^a = \pi^b = 1$ ) ciò che si vede sono  $\sum_\ell (2\ell + 1)$  onde, con  $\ell$  momento relativo tra i prodotti, quindi non si può distinguere  $\ell$ .

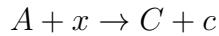
---

<sup>35</sup>Ricordarsi che:

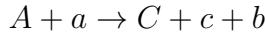
$$\begin{aligned} E \rightarrow \pi &= (-1)^L \\ M \rightarrow \pi &= (-1)^{L+1} \end{aligned}$$

## 2.2 Trojan Horse method

Consideriamo la reazione<sup>36</sup>:



L'idea del metodo consiste, come il nome suggerisce, nell'uso di un "cavalo di Troia" per far superare la barriera Coulombiana a  $x$ : si prende un nucleo  $a$  a cluster tale  $a = x + b$  dove  $b$  è uno spettatore (per rimanere nella metafora fa la parte degli dèi). Avremo allora:



La velocità di  $x$  è quindi limitata dal moto di Fermi all'interno del nucleo  $a$ ,  $\vec{v}_x = \vec{v}_a + \vec{v}_{\text{fermi}}$ , e questo permette di avere alte velocità per  $a$  senza però uscire dal range di energie di interesse astrofisico, dato che la velocità di  $x$  di interazione è limitata. Questo vale se il nucleo  $b$  si comporta da spettatore, per cui nello studio che faremo ci metteremo nella regione quasi-free.

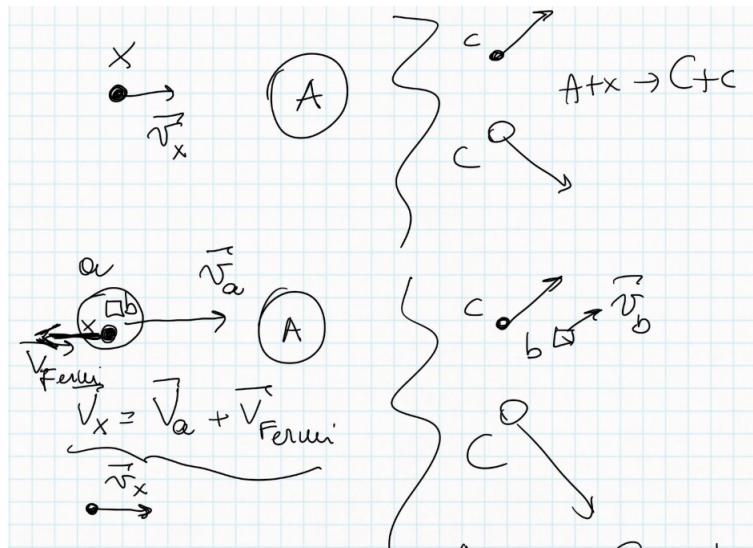


Figura I.11: Schema della reazione senza THM in alto e con THM in basso.

Questo metodo è stato sviluppato a Catania e anche se coinvolge un processo a 3 corpi in realtà la reazione di interesse è a 2, dal momento che uno di questi è solo uno spettatore. Vediamone gli aspetti principali.

**Primi passi** Dobbiamo sviluppare una teoria che leggi la sezione d'urto a 3 corpi con quella a 2 corpi. Procediamo per *step*:

I. Lavoriamo in *Distorted Wave Born Approximation*<sup>37</sup> (DWBA)

$$\begin{aligned}\psi^+(Aa) &\equiv \chi_{Aa}^+ \phi_A \phi_a \\ \psi^-(Bb) &\equiv \chi_{Bb}^- \psi_{Cc}^- \phi_b\end{aligned}$$

dove  $B \equiv C + c$ ,  $\phi$  sono le funzioni d'onda dei vari nuclei,  $\chi$  è l'onda distorta e  $\psi_{Cc}^- \equiv \chi_{Cc}^- \phi_C \phi_c$ . Avremo allora che l'elemento di matrice di transizione sarà dato da:

$$T_{fi} = \langle \chi_{Bb}^- \psi_{Cc}^- \phi_b | V_{xb} | \chi_{Aa}^+ \phi_A \phi_a \rangle$$

$V$  è un operatore interno di  $a$ .

<sup>36</sup>Cambiamo notazione.

<sup>37</sup>In parole povere è come la *Plane Wave Born Approximation* ma si tiene conto di Coulomb.

II. Poiché  $\psi_{Cc}^-$  non è semplice, facciamo la *surface approximation*, ovvero approssimiamo la funzione d'onda con il suo andamento asintotico fuori da  $R \sim R_{xA}$ , detto per questo *cutoff radius*; questo ci permette di legare l'elemento di matrice  $T_{fi}$  con la *S-Matrix* della reazione a 2 corpi (e quindi allo sfasamento).

III. Osserviamo che usare la PWBA rispetto alla DWBA influisce solo su un fattore moltiplicativo di normalizzazione dei dati. Avremo quindi un  $S_{TH}(E)$  da riscalare;

$$\frac{d^3\sigma}{dE_c d\Omega_c d\Omega_C} = K_F \frac{v_{Cc}}{v_{Ax}} \left| W(\vec{P}_{bx}) \right|^2 \frac{d\sigma^{TH}}{d\Omega_{Ax}}$$

dove  $K_F$  è un fattore cinematico, le velocità sono quelle relative e  $W$  è la *momentum amplitude*, ovvero la distribuzione dei momenti di  $x$  in  $a$ ; l'ultimo termine è quello di interesse.

Il metodo dipende quindi fortemente dalla scelta di  $a$  e in Figura I.12 abbiamo riportato alcune configurazioni. Tra questi i migliori sono  $d$  e  ${}^6\text{Li}$ .

TH nucleus	<i>x-s</i> cluster structure	Orbital angular momentum	Binding energy (MeV)
${}^2\text{H}$	p–n	0	2.225
${}^3\text{H}$	d–n	0	6.257
${}^3\text{He}$	d–p	0	5.493
${}^6\text{Li}$	d– $\alpha$	0	1.474
${}^9\text{Be}$	${}^5\text{He}$ – $\alpha$	0	2.464
${}^{16}\text{O}$	${}^{12}\text{C}$ – $\alpha$	0	7.162
${}^{20}\text{Ne}$	${}^{16}\text{O}$ – $\alpha$	0	4.730

Figura I.12: Varie possibilità per il nucleo a cluster  $a$ .

I criteri per determinare un buon “cavallo” sono:

- (i) un’energia di legame  $B$  “piccola” nel sistema  $x - b$ .
- (ii) una struttura semplice.
- (iii) un “buon”  $Q$ -valore per la reazione  $A + a \rightarrow C + c + b$ .
- (iv) una *momentum amplitude* nota.
- (v) una struttura tale da minimizzare i processi non-quasi-free, ovvero in cui  $b$  non è spettatore.

# Capitolo II

## Approfondimenti

In questo capitolo ho raccolto alcuni argomenti che ho personalmente approfondito o testi e articoli che ho usato durante la preparazione dell'esame

### 1 Modelli e decadimenti

Una trattazione che riprende quella adottata in questi appunti riguardo ai modelli nucleari e i decadimenti  $\beta$  e  $\gamma$  si trova in Krane, K., S., “*Introductory Nuclear Physics*”, USA, John Wiley & Sons, 1988.

#### 1.1 Decadimento $\varepsilon$

Nel calcolo del  $Q$ -value in ??-?? per la cattura  $\varepsilon$  compare a sottrarre l'energia di legame dell'elettrone catturato nell' $n$ -esimo shell  $B_n$ , dove  $n$  raccoglie tutti i numeri quantici che identificano tale particella. La ragione della presenza di questo termine è ben spiegata in (Krane, 1988), per cui ne riportiamo un piccolo riassunto: subito dopo la cattura il nucleo prodotto si trova in uno stato eccitato, per cui se l'elettrone occupava lo shell (interno)  $k$  (identificato da  $n = k, L, \dots$ ) il “vuoto” da esso lasciato verrà subito “riempito” da un elettrone di shell superiore; nel disegnarsi l'elettrone emette un fotone di energia pari all'energia di legame  $B_n$ , che viene quindi persa.

### 2 Regola d'oro di Fermi

Nei calcoli del rate molto spesso dall'espressione  $\lambda$  si passa a quella differenziata  $d\lambda$ . Si tratta di una questione puramente formale e si rimanda alla lettura del paragrafo **Commenti sulla regola di Fermi** della sezione 20.2 *Transizioni nel continuo e rate di un processo* delle dispense del professor G. Paffuti, *Note di Meccanica Quantistica, anno accademico: 2017-2018*.

Tuttavia, per avere un'idea<sup>1</sup> della giustificazione, si consideri l'espressione in ??-??:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 \frac{p^2 dp}{h^3} \frac{4\pi}{h^3} \frac{q^2 dq}{h^3} \frac{4\pi}{h^3} \frac{1}{dE_f} \sim p^2 q^2 dp$$

dove abbiamo fissato l'impulso  $p$  dell'elettrone per cui  $dE_f = dq$ . Sarebbe quindi più corretto indicare  $\lambda \rightarrow \lambda_p$  poiché è definito per quel particolare valore dell'energia dell'elettrone. Il rate totale sarà invece dato dalla somma su tutti gli impulsi possibili dell'elettrone finale; dal momento che l'impulso è una variabile continua si ha  $\lambda_p \rightarrow d\lambda$ . In altre parole, nella scrittura del rate si sottintende l'integrazione su  $p$  per poi esplicitarla al momento opportuno.

---

<sup>1</sup>Questa è una spiegazione sicuramente non rigorosa e particolarmente lacunosa, si consiglia la lettura del testo.

### 3 Sul numero di neutrini

Come spiegato in ??-??, quando  $T_e \rightarrow Q$  il neutrino non è più relativistico per cui  $T_\nu \sim q^2/2m_\nu$  e  $dq/dE_\nu = m_\nu/q$ . Abbiamo allora che:

$$N(p) \propto p^2 \sqrt{Q - \sqrt{p^2 + m_e^2} + m_e}$$

$$N(T_e) \propto \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e} \sqrt{Q - T_e} (T_e + m_e)$$

Si nota che quando  $T_e \rightarrow Q$   $dN/dp \rightarrow 0$  se  $m_\nu = 0$  e  $dN/dp \rightarrow \infty$  se  $m_\nu \neq 0$ , come si osserva in Figura ??; dalla pendenza è quindi possibile studiare il limite per la massa del neutrino.

### 4 Dettagli sul calcolo del decadimento $\gamma$

Nello sviluppo dell'onda piana in armoniche vettoriali in ??-?? si ottiene l'espressione:

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_\ell(kx) \sum_J \langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^{M=\lambda}$$

#### 4.1 Clebsch-Gordan

Poiché  $\ell = J, J \pm 1$ , i coefficienti di Clebsch-Gordan diversi da zero sono<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \langle J 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \langle J+1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J}{2J+3}} \\ \langle J-1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}} \end{aligned}$$

#### 4.2 Proprietà della Bessel

A questo punto si utilizza la proprietà della Bessel:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge j_J \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda &= ik \left[ \underbrace{\left( \frac{d}{d(kx)} - \frac{J}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J+1,1}^\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left( \frac{d}{d(kx)} - \frac{J+1}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J-1,1}^\lambda \right] \end{aligned}$$

#### 4.3 Proprietà armonica vettoriale

Deriviamo la proprietà<sup>3</sup>:

$$(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = (-)^{\lambda+1} \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$$

<sup>2</sup>Si ottengono calcolando  $\langle \ell 0, 11 | J1 \rangle$  e poi usando le loro proprietà per passare a  $\lambda = -1$ .

<sup>3</sup>Ricordarsi che  $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* = (-)^\lambda \hat{\varepsilon}_{\vec{k},-\lambda}$  e che  $\langle \ell m, SS_z | JM \rangle = (-)^{\ell+S-J} \langle \ell - m, S - S_z | J - M \rangle$

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* &= \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0}^* \hat{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}^* = \\
&= (-)^\lambda \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0} \hat{\varepsilon}_{\vec{k},-\lambda} = \\
&= (-)^{\lambda+1} \underbrace{\langle J0, 1 - \lambda | J - \lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0} \hat{\varepsilon}_{\vec{k},-\lambda}}_{\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

Nel caso  $|\lambda| = 1$  allora  $(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$ .

## 5 Effetto tunnel

Dimostriamo come ottenere l'espressione della probabilità di attraversamento per effetto tunnel nella sezione ??-??.

$$\begin{aligned}
P &\sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_0^a \sqrt{2m(V-E)} \right\} = \\
&= -\frac{2}{\hbar} \int_0^1 \sqrt{2mE} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \sqrt{\frac{1}{\rho} - 1} d\rho = \\
&= -2\pi \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar}
\end{aligned}$$

dove  $\rho \equiv rE/Z_1 Z_2 e^2$  e per risolvere abbiamo usato  $\rho = \sin^2(\alpha)$ .

## 6 CRM: indipendenza dal parametro $B$

Nel discutere il metodo della *Calculable R MATRIX* (sezione ??-??) siamo arrivati all'espressione:

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell^* R_\ell(E, B)}{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell R_\ell(E, B)}$$

Si può dimostrare<sup>4</sup> che  $U_\ell$  non dipende da  $B$ .

Consideriamo una matrice invertibile  $\mathbf{V}$  di dimensione  $N \times N$  e due vettori di dimensione  $N$   $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ; possiamo sempre costruire una matrice quadrata  $\mathbf{W}$  definita come:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

Notiamo che data l'espressione di  $\mathbf{W}$  si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{-1} &= \mathbf{V}^{-1} - \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}} \\
\mathbf{W}^{-1}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}} \Rightarrow (\mathbf{v}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{u})^{-1} = 1 + (\mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u})^{-1}
\end{aligned}$$

Osserviamo che se le matrici  $\mathbf{V} \equiv C(E, B)$  e  $\mathbf{W} \equiv C(E, 0)$  e i vettori<sup>5</sup>  $\mathbf{u} \equiv |\varphi\rangle$  e  $\mathbf{v} \equiv |\varphi\rangle$  allora possiamo scrivere:

$$C(E, 0) = C(E, B) + \frac{\hbar^2}{2\mu a} B |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

<sup>4</sup>Seguiamo la dimostrazione dell'articolo Descouvemont, P. & Baye, D., Rep. Prog. Phys., 2010, vol.3, DOI: 10.1088/0034-4885/73/3/036301, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1001.0678>.

<sup>5</sup>Dove abbiamo preso  $|\varphi\rangle \rightarrow \varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_N(a)) = \sum_k |\varphi_k\rangle$ ; dunque  $\langle\varphi_k|\varphi\rangle = \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle = 1$ .

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1}(\langle\varphi|C(E, 0)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1} = B + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1}(\langle\varphi|C(E, B)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1}$$

Usando l'espressione<sup>6</sup> di  $R_\ell$  in (??) si ottiene:

$$\frac{1}{R_\ell(E, 0)} = B + \frac{1}{R_\ell(E, B)}$$

dalla quale si ha l'indipendenza di  $U_\ell$  cercata.

## 7 Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$

Per l'analisi dei multipoli e altri approfondimenti sulla misura del fattore astrofisico della  $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$  (trattata nella sezione ??-??) consultare gli articoli Runkle, R.C., et al., Phys. Rev. Lett., 2005, vol.94,DOI:[10.1103/PhysRevLett.94.082503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.082503) e Formicola, A., et al., Phys. Lett. B, 2004, vol.591,DOI:[10.1016/j.physletb.2004.03.092](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.03.092).

---

<sup>6</sup>Notare che  $\langle\varphi|\mathbf{A}|\varphi\rangle = \sum_{ij} \varphi_j A_{ij} \varphi_i$ .



# Indice analitico

- acqua equivalente, 7
  - active shielding*, 7
  - ATOMKI *Anomaly*, 14
  - BGO, 12
  - Big Bang Nucleosynthesis, 12
  - Catena protone-protone *pp*, 11
    - ppI*, 9
  - channel radius*, 1
  - cinematica inversa, 15
  - Coulomb dissociation method*, 16
  - cutoff radius*, 22
  - Distorted Wave Born Approximation*, 21
  - elettroscreening, 11
  - fattore spettroscopico, 5
  - fotodisintegrazione, 16
  - funzioni di Lagrange, 1
  - Holy Grail* dell'astrofisica, 13
  - HPGe detector*, 13
  - Laboratori Nazionali del Gran Sasso, 7
  - Metodo *ab-initio*, 14
  - metodo *ab-initio*, 3, 5
  - metodo *R-MATRIX*, 5
    - Phenomenological, 4
    - scelta delle funzioni d'onda, 1
  - Misura di  ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ 
    - activation method*, 13
    - prompt \gamma method*, 13
  - multi-photon-exchange*, 18
  - one-photon-exchange approximation*, 17
  - particella di Majorana, 7
  - particella X17, 14
  - passive shielding*, 7
  - polinomi di Legendre, 1
  - principio del bilancio dettagliato, 16
  - recoil mass separator*, 14
  - reduction transition probability*, 18
  - shift factor*, 1
  - stime di Weisskopf, 18
  - surface approximation*, 22
  - Trojan Horse method*, 21
- ## Esperimenti
- ATOMKI, 14
  - Borexino, 7
  - DAMA, 14
  - DARKSIDE, 7
  - ERNA, 14
  - GSI, 18
  - LUNA, 9
    - LUNA I, 9
    - LUNA II, 12
    - LUNA MV, 13
  - MSU, 18
  - RIKEN, 18
  - XENON1T, 7
- ## Articoli
- Descouvemont & Baye, 26
  - Formicola et al., 27
  - Runkle et al., 27
  - Tribble et al., 15
- ## Background
- induced*, 9
  - radon, 8
  - raggi cosmici, 7
- ## Complementi
- Evoluzione protostellare, 11
  - l'ipotesi di Fowler, 9, 11
  - Piombo romano nei LNGS, 8, 13