

Appunti del corso
Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico

Bernardo Vettori
email: bernardo.vettori@outlook.it

A.A. 2020/2021

Introduzione

In queste dispense sono raccolti gli appunti delle lezioni del corso di Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico A.A. 2020/2021 tenute dalla professoressa L.E. Marcucci. Non è quindi presente la parte di descrizione del deutone e dello scattering di 2 nucleoni tenuta invece dal professor A. Kievsky. Le immagini che compaiono sono state prese dagli appunti digitali del corso e l'ordine degli argomenti trattati corrisponde a quello adottato durante il semestre. Ogni capitolo presenta un incipit che ne descrive sinteticamente il contenuto e indica in quali lezioni viene affrontato.

Per quanto riguarda la notazione, non vi è una scelta univoca, ma spesso viene ripresa quella degli articoli discussi a lezione; tuttavia le note a piè di pagina dovrebbero garantire la corretta comprensione della scelta adottata.

L'ultimo capitolo *Approfondimenti* raccoglie alcuni argomenti che ho personalmente approfondito durante lo studio, per cui non fanno parte del programma del corso.

Questo lavoro è totalmente personale e non ha alcuna validità in relazione all'esame dal momento che non è né stato controllato né approvato dalla docente. Per qualsiasi tipo di errore o imprecisione (anche solo grammaticale) mi farebbe piacere esserne informato, così da poter correggere prontamente.

Indice

Introduzione	ii
Indice	iii
I Nozioni principali	1
1 Binding Energy	1
1.1 Notazione	1
1.2 Primi passi	1
2 Formula Semi-empirica di massa	2
3 Panoramica sui decadimenti	4
4 Una parentesi: la stabilità	4
5 Q -value	5
II Modelli nucleari	7
1 Primi passi per il modello <i>a shell</i>	7
2 Modello <i>a shell</i>	8
2.1 Sciogliamo i nodi	8
2.2 Modello <i>a shell</i> + spin-orbita	11
2.2.1 I successi del modello	12
2.2.2 I problemi del modello	14
3 Modello <i>a goccia</i>	16
3.1 La necessità di un nuovo modello	16
3.2 Stati vibrazionali	16
3.3 Bande rotazionali	18
III Decadimenti	21
1 Decadimento β	21
1.1 La questione dei neutrini	21
1.2 Teoria di Fermi	23
1.2.1 La massa del neutrino	27
1.3 Decadimenti β <i>permessi</i> e <i>proibiti</i>	29
2 Decadimento γ	31
2.1 Teoria classica	31
2.2 Trattazione quantistica	33
2.2.1 Operatori multipolo	34
2.3 Riassunto	39
2.3.1 Regole di selezione	39
2.4 Alcuni esempi	39
2.5 Stato di scattering	42
IV Big Bang Nucleosynthesis	43
1 Introduzione alla teoria	45

2	Network di reazioni	47
2.1	La nucleosintesi primordiale	48
3	La BBN e i neutrini	52
4	La BBN oggi	52
5	La prima reazione	55
5.1	Cinematica	55
5.2	Funzioni d'onda	56
5.2.1	Buca di potenziale	60
5.2.2	Meson-Exchange Currents	61
5.3	Una parentesi: Metodo <i>ab-initio</i>	63
V	La catena protone-protone	64
1	Una prima occhiata	65
2	Il problema dei neutrini solari	66
3	Elementi di analisi	71
3.1	Fattore Astrofisico	71
3.2	Elettroscreening	77
3.2.1	Calcolo screening debole	78
3.2.2	In laboratorio	81
4	Studio <i>ab-initio</i>	81
4.1	Risultati	85
VI	<i>R</i>-MATRIX	87
1	Calculable RM	87
1.1	Proprietà della RM	89
1.2	Sfasamento e RM	90
1.2.1	RM e risonanza	91
1.3	Applicazioni	92
2	Phenomenological RM	94
VII	Tecniche sperimentali di misura	97
1	Metodi diretti	97
1.1	LUNA	99
1.1.1	LUNA I	99
1.1.2	LUNA II	102
1.1.3	LUNA MV	103
1.2	ERNA	104
1.2.1	<i>Recoil mass separator</i>	104
1.2.2	Cinematica Inversa	105
2	Metodi indiretti	106
2.1	<i>Coulomb Dissociation method</i>	106
2.2	<i>Trojan Horse method</i>	110
2.3	<i>Asymptotic Normalization Coefficients method</i>	115
VIII	Le ultime reazioni	119
1	La 3α	119
2	Biciclo CN-NO	121
2.1	Ciclo CNO	121
2.2	Ciclo NO	124
2.3	La reazione più lenta	125
3	<i>The Holy Grail</i>	128

3.1	Studio della reazione	129
3.2	La reazione dell'ossigeno	132
IX	Approfondimenti	135
1	Modelli e decadimenti	135
	1.1 Decadimento ε	135
2	Regola d'oro di Fermi	135
3	Sul numero di neutrini	136
4	Dettagli sul calcolo del decadimento γ	136
	4.1 Clebsch-Gordan	136
	4.2 Proprietà della Bessel	136
	4.3 Proprietà armonica vettoriale	137
5	Effetto tunnel	137
6	CRM: indipendenza dal parametro B	137
7	Trojan Horse method: da DWBA a PWBA	138
8	Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$	138
Indice analitico		139

Capitolo I

Nozioni principali

In questo capitolo introduciamo i concetti principali della fisica nucleare a grandi linee. Questo capitolo copre la lezione del 15/02/2021.

1 Binding Energy

1.1 Notazione

Dato un nucleo X con Z protoni, N neutroni e $A = Z + N$ numero di massa, si utilizza la notazione¹:



Definizione 1 (Energia di Legame) *Si definisce **energia di legame** o **binding energy**²:*

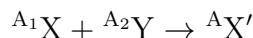
$$B(Z, A) = Zm_p + Nm_N - m({}^A_Z X_N) > 0 \quad \text{è definita positiva}$$

Misurando la massa del nucleo $m({}^A_Z X_N)$, possiamo studiare l'andamento di B/A in funzione di A e ottenere una curva come quella in Figura I.1.

1.2 Primi passi

Il primo stato legato possibile è lo stato pn ($A = 2$), ovvero ${}^2_1 H_1$, che ha una $B \simeq 2.2245$ MeV³; notiamo poi un picco nei dintorni del ${}^{56}Fe$:

- Per $A < 56$ allora si ha che “salendo” anche l'energia di legame aumenta, dunque è favorita la **fusione nucleare**⁴:



¹Da notare che la notazione è ridondante: sarebbe infatti sufficiente dare A e X o A e Z o N e Z ,...

²Si pone $c = 1$.

³Altri parametri caratteristici del deutone:

$$\begin{array}{ll} J^\pi = 1^+ & S = 1, T = 0, \ell = 0, 2 \\ r_d \simeq 1.975 \text{ fm} & A_S \simeq 0.8781 \text{ fm}^{-1/2} \\ \mu_d \simeq 0.8574 \mu_N & Q_d \simeq 0.2859 \text{ fm}^2 \end{array}$$

dove abbiamo chiamato il magnetone nucleare $\mu_N = e^2 \hbar / 2m_p c$.

⁴Fa eccezione l'elio per cui si ha una $B \sim 28$ MeV; cercheremo di spiegare più avanti il motivo. Lo stesso vale per il carbonio.

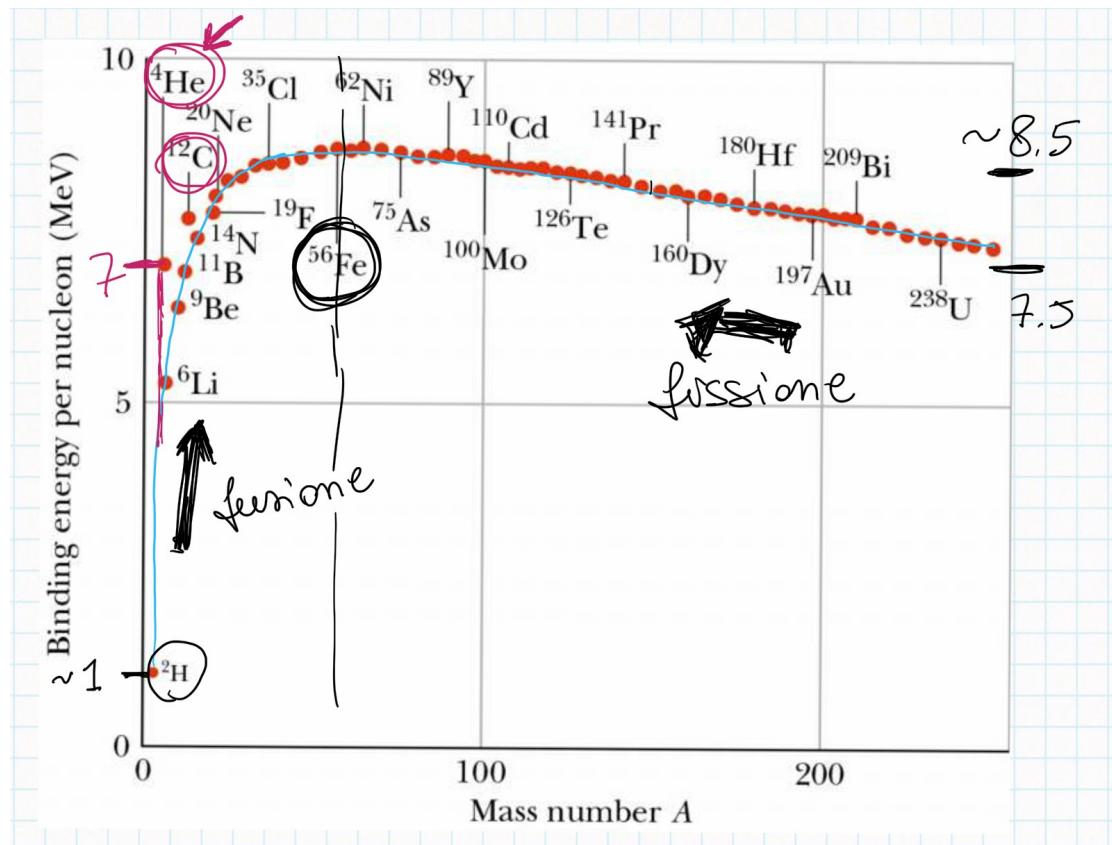


Figura I.1: Curva che rappresenta l'andamento dell'energia di legame (per nucleone) al crescere del numero di massa. Sono segnati il picco del ferro, le reazioni in funzione dei pesi atomici e i salti dei nuclei di elio e carbonio.

- Per $A > 56$ “salire” non è conveniente e vengono quindi privilegiati i processi di **fissione nucleare**:



Osserviamo anche che eccetto i primi salti la curva si assesta intorno a valori compresi tra i $7.5 \div 8.5$ MeV per cui consideriamo per la maggior parte degli elementi il valor medio di 8 MeV.

2 Formula Semi-empirica di massa

Per A “sufficientemente grande” esiste una formula empirica che *fitta* abbastanza bene i dati.

Definizione 2 (Formula Semi-empirica di Massa) *Esprime l'energia di legame per nuclei pesanti:*

$$B = \underbrace{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Modello a goccia}} - \underbrace{a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}}_{\text{Modello a shell nucleare}} + \delta$$

Termine di Volume $a_V = 15.5 \text{ MeV}$ **Termine di Coulomb** $a_C = 0.72 \text{ MeV}$

Termine di Superficie $a_S = 16.8 \text{ MeV}$ **Termine Simmetrico** $a_{sym} = 23 \text{ MeV}$

$$\text{Termine di Pairing} \quad \delta = \begin{cases} 34 \text{ MeV } A^{-3/4} & \text{even-even} \\ 0 & \text{A dispari} \\ -34 \text{ MeV } A^{-3/4} & \text{odd-odd} \end{cases}$$

Passiamo adesso a illustrare il significato dei singoli coefficienti:

- a_V : il primo termine è lineare in A , dal momento che l'interazione nucleare è a corto raggio, ovvero è un'interazione di primi vicini. Si chiama termine di volume, infatti il raggio nucleare scala⁵ come $r \simeq r_0 A^{1/3}$, di conseguenza il volume scala con A .
- a_S : i nucleoni sulla “superficie” hanno ovviamente meno vicini di quelli più “interni”, dunque dobbiamo tenere conto di questa assenza con un termine proporzionale alla superficie, cioè, dall'andamento visto prima, proporzionale a $A^{2/3}$.
- a_C : poiché la formula vale per atomi pesanti, spesso $Z \gg 1$ e il termine coulombiano viene riscritto come:

$$a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Questo deriva dall'espressione dell'energia coulombiana $\sim q^2/R = Z^2 e^2 / (r_0 A^{1/3})$; allora $a_C \propto e^2/r_0$.

- a_{sym} : questo è un termine puramente quantistico e può essere riscritto come⁶:

$$(A - 2Z)^2 = (N - Z)^2$$

Si vede allora che per $N = Z$ questo termine non contribuisce, ovvero il nucleo è più stabile; ciò è confermato dalle osservazioni solo per A “non troppo grandi”, come si vede in Figura I.2, quindi per tenerne conto si divide per A .

- δ : esistono solo 6 nuclei stabili in natura con A pari e N e Z dispari.

Infine valgono le seguenti diseguaglianze:

$$a_C \ll a_V < a_S < a_{sym}$$

⁵ $r_0 \sim 1.2$ fm.

⁶Si usa solo $A = Z + N$.

Carta di Segré

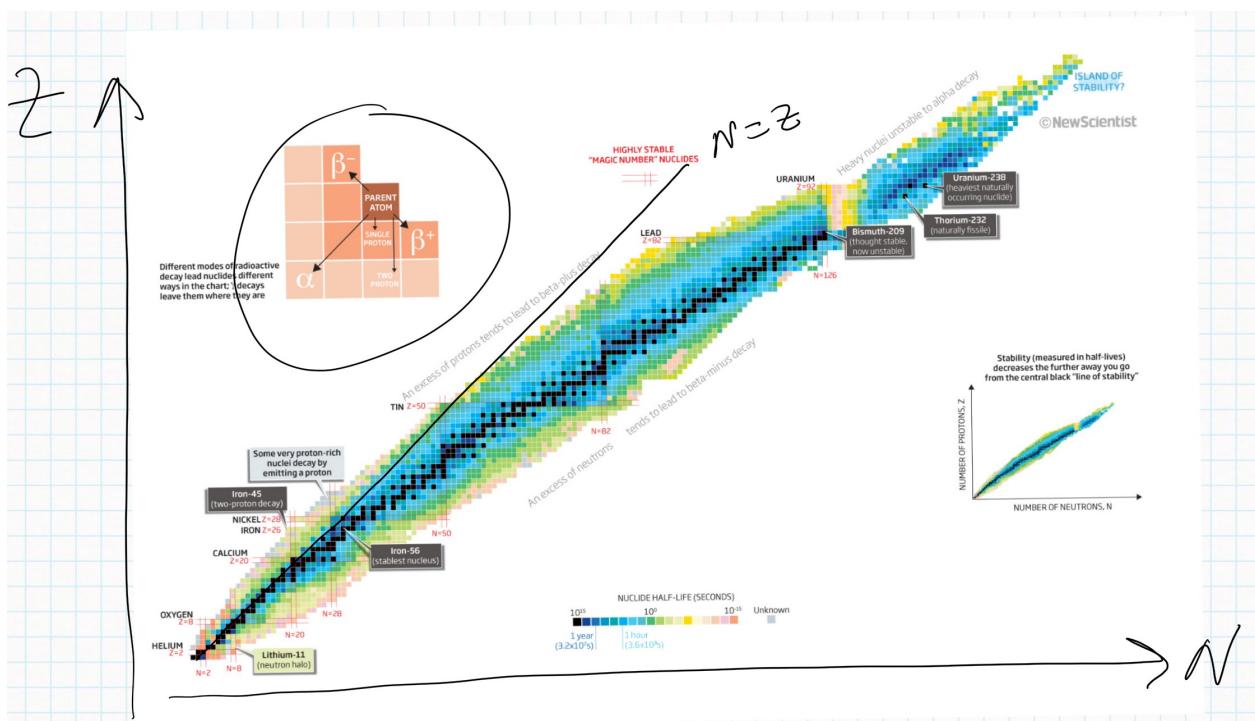
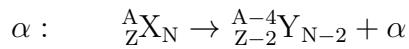


Figura I.2: Sono riportati i nuclei in base a Z e N . La linea centrale viene chiamata **valle di stabilità**. Indicativamente dopo il Ca non vale più $N = Z$ per i nuclei stabili, ma $N > Z$. In alto sono riportati i decadimenti.

3 Panoramica sui decadimenti

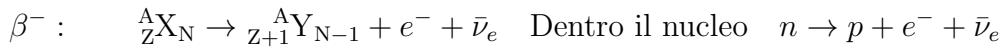
Illustriamo i principali decadimenti⁷.

Decadimento α Mediato dall'interazione forte (stato iniziale e stato finale presentano solo nuclei), è descritto da:



Non lo tratteremo.

Decadimenti β Mediati dall'interazione debole (presenza del neutrino):



4 Una parentesi: la stabilità

Procediamo adesso con una “dimostrazione” della stabilità dei nuclei con $N = Z = A/2$ per $Z \lesssim 20$.

Per primo scriviamo la massa di un generico nucleo in funzione di Z e A :

$$m({}_Z^A X_N) = Z m_p + N m_n - B(Z, A) \simeq Z m({}^1 H) + (A - Z) m_n - B(Z, A)$$

⁷Il decadimento γ non è riportato, tuttavia approfondiremo i vari decadimenti nel Capitolo III - *Decadimenti*.

Fissato A cerchiamo il minimo di m al variare di Z .

$$\frac{\partial m}{\partial Z} = 0 \Rightarrow m(^1\text{H}) - m_n + 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} - \frac{a_C}{A^{1/3}} - 4a_{sym} \frac{A - 2Z}{A} = 0$$

$$Z_{\min} = \frac{m_n - m(^1\text{H}) + a_C A^{1/3} + 4a_{sym}}{2[a_C A^{1/3} + 4a_{sym} A^{-1}]} \simeq \frac{A}{2}$$

dove nell'ultima approssimazione abbiamo usato che $m(^1\text{H}) \simeq m_n$ e che $a_C \ll a_{sym}$, per cui per A piccolo (ma non troppo) si può trascurare il termine $a_C A^{1/3}$ nel denominatore.

Dato che l'andamento di $B \propto Z^2$ allora possiamo rappresentare⁸ approssimativamente l'andamento di m al variare di Z come in Figura I.3⁹.

Curiosità: In Fisica Medica viene utilizzato il ^{64}Cu poiché può sia decadere β^+ che β^- ; il decadimento β^+ viene usato per la PET, mentre il β^- per la cura dei tumori.

5 Q-value

Dato un processo¹⁰ $A + B \rightarrow C + D$ si definisce Q -value:

$$Q = m_A + m_B - m_C - m_D$$

Si hanno allora:

- $Q > 0$ **esotermico** (spontaneo); l'energia relativa può essere nulla.
- $Q < 0$ **endotermico** (non spontaneo); l'energia relativa dev'essere positiva.

⁸Qui trattiamo Z come una variabile continua per ottenere gli andamenti.

⁹È molto raro ma è possibile osservare anche un decadimento doppio β indicato $2\nu\beta\beta$; quello che si cerca di osservare è un doppio β senza neutrino, ovvero $\phi\nu\beta\beta$, poiché in questo caso si avrebbe una violazione dello *standard model*, il neutrino non sarebbe una particella di Dirac, ma di Majorana per cui $\nu = \bar{\nu}$.

¹⁰Come sempre $c = 1$

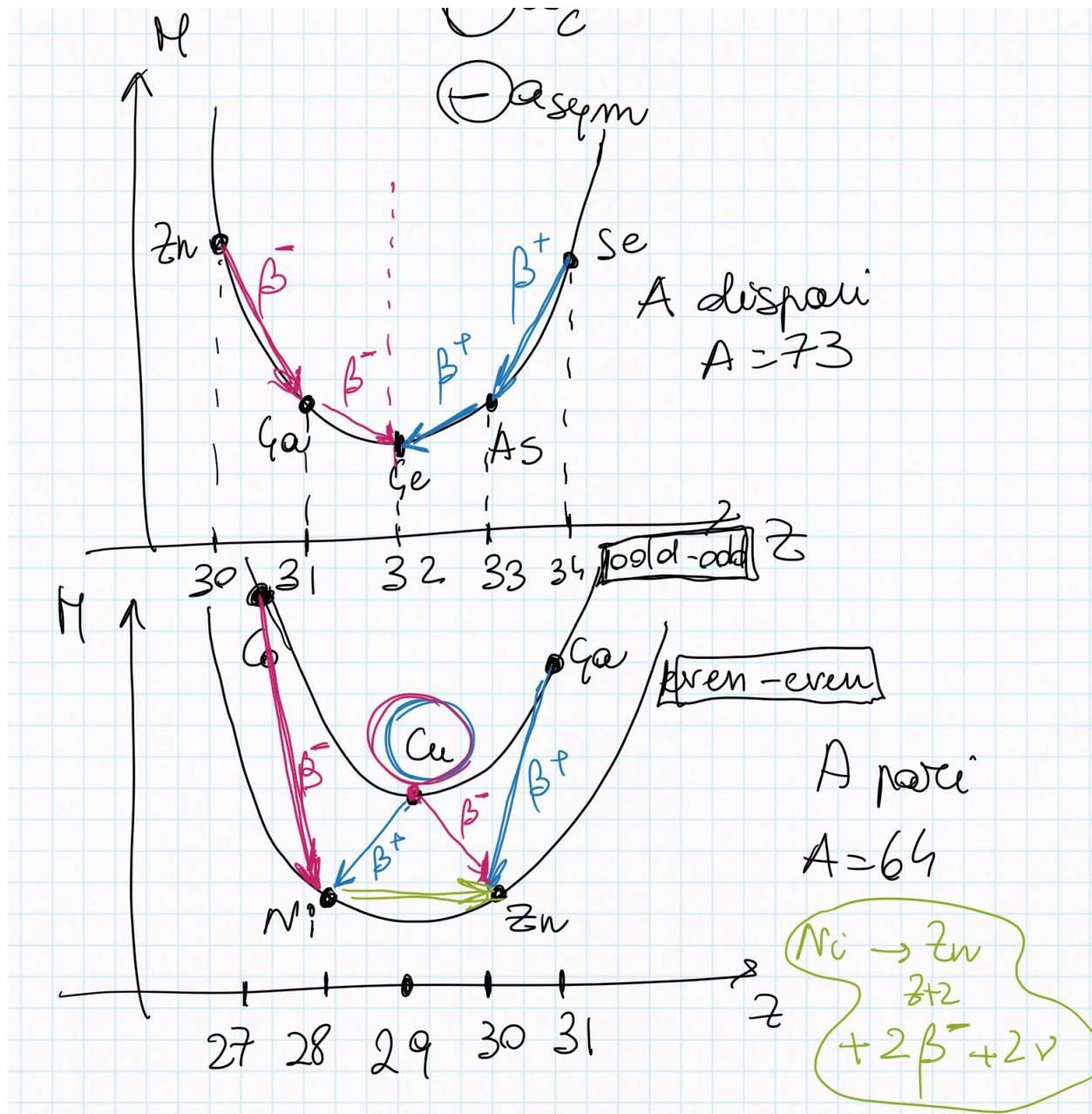


Figura I.3: Rappresentazione di $m \equiv M$ in funzione di Z . Si osserva che per i nuclei con A dispari si hanno decadimenti β^- scendendo verso destra, mentre β^+ scendendo verso sinistra. Per i nuclei con A pari il termine di pairing nell'energia di legame si fa sentire e questo porta a nuclei che possono avere sia β^+ che β^- (in questa configurazione i doppio β sono talmente "poco probabili" da poter essere trascurati).

Capitolo II

Modelli nucleari

In questo capitolo introduciamo e discutiamo i modelli nucleari *a shell* e *a goccia*. Il capitolo copre le Lezioni del 01/03/2021 e del 03/03/2021.

Introduzione Se il sistema a due nucleoni è “complicato”, quando A diviene proibitivo è necessario ricorrere a modelli per descrivere le proprietà nucleari¹. Dall’analoga con la fisica atomica, il modello “più semplice” che approfondiremo per primo è appunto un modello di tipo *a shell*.

1 Primi passi per il modello *a shell*

Nel caso della fisica atomica un modello *a shell* è supportato dagli andamenti del raggio atomico e dell’energia di ionizzazione (Figura II.1), i cui salti possono essere associati appunto alla “chiusura” di uno *shell*. In questo modello gli elettroni si muovono in un campo esterno generato dal nucleo, senza collidere tra loro.

Applicare tutto ciò alla fisica nucleare non è immediato: i nucleoni, infatti, “vivono” in un potenziale che non è esterno, ma generato da essi stessi e le loro dimensioni non sono trascurabili rispetto alle dimensioni del nucleo.

Tuttavia, vi sono alcune evidenze sperimentaliste a favore di tale modello. Innanzitutto, le differenze di energia di separazione² tra nuclei con $N = \text{cost}$ (**isotoni**) e nuclei con $Z = \text{cost}$ (**isotopi**) hanno salti ben determinati³, come mostrato in Figura II.2. I numeri atomico o neutronico per i quali si hanno i salti richiamano i numeri quantici di un modello “a shell” e vengono definiti **numeri magici**:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Un’altra evidenza consiste negli andamenti della sezione d’urto di cattura neutronica σ e dei raggi di carica nucleari, riportati in Figura II.3, che ricordano quello del raggio atomico.

¹Per un testo di riferimento sull’argomento vedi Approfondimenti 1 - *Modelli e decadimenti*.

²Sono le energie di separazione del protone e del neutrone rispettivamente.

³Dovrebbe comparire anche il 2, ma non lo vedo perché corrisponde alla separazione di 2 protoni. Per quanto riguarda il 126 non si vede in natura nel caso di Z , perché il nucleo non è stabile.

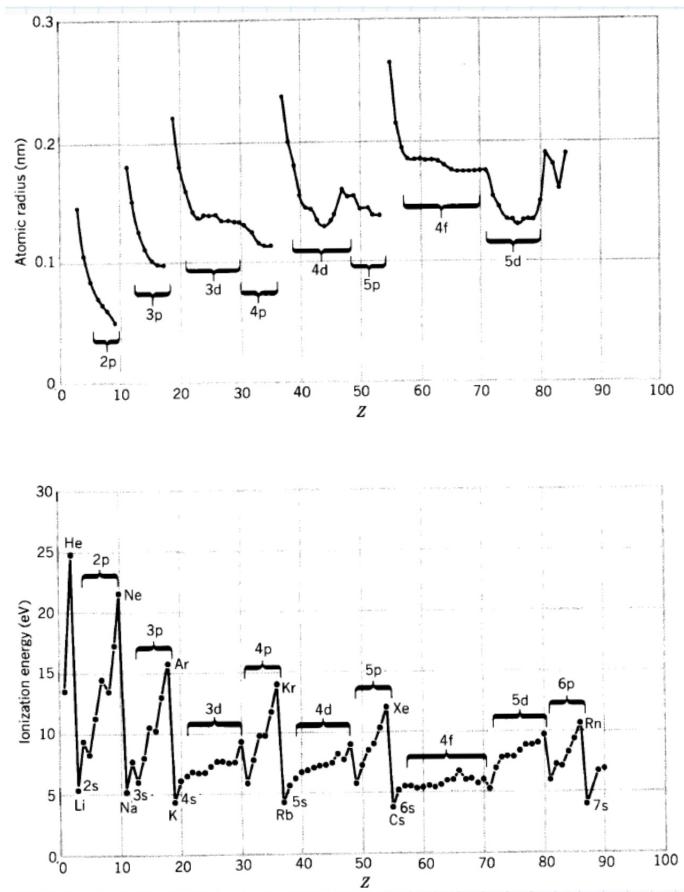


Figura II.1: Andamento in alto del raggio atomico e in basso dell'energia di ionizzazione al variare del numero atomico. I salti sono ben spiegati da un modello *a shell*.

2 Modello *a shell*

2.1 Sciogliamo i nodi

Innanzitutto risolviamo i problemi che ci eravamo posti nella formulazione del modello. Assumiamo che il moto del singolo nucleone sia governato dal potenziale generato da tutti gli altri con i quali interagisce, escluso esso stesso. Per quanto riguarda gli urti, essendo i nucleoni fermioni se avvenisse una collisione (quindi un trasferimento di energia) questo comporterebbe una promozione a un livello di valenza (unico disponibile per Pauli), ma le energie richieste per far ciò sono notevolmente maggiori di quelle scambiabili attraverso l'urto. Dunque, assumeremo che gli urti non avvengono.

Calcolo della funzione d'onda Dobbiamo ovviamente soddisfare all'equazione di Schrödinger, tuttavia per semplificare il calcolo possiamo prima rimaneggiare l'hamiltoniana del sistema:

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} V_{ij}$$

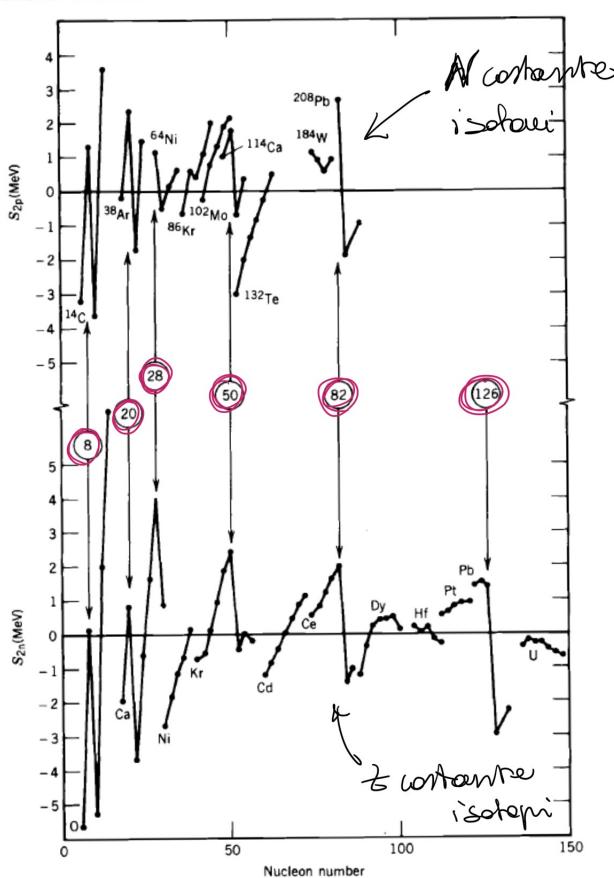


Figura II.2: In alto l’andamento dell’energia di separazione degli isotoni S_n e in basso quello dell’energia di separazione degli isotopi S_p . Al centro sono riportati i numeri magici.

con T_i l’energia cinetica e V_{ij} il potenziale di interazione. Sommando e sottraendo il potenziale U_i che sente la i -esima particella a causa degli altri $j \neq i$ nucleoni, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_i T_i + \sum_{i < j} V_{ij} + \sum_i U_i - \sum_i U_i = \\
 &= \sum_i (T_i + U_i) + \left[\sum_{i < j} V_{ij} - \sum_i U_i \right] \simeq \\
 &\simeq \sum_i (T_i + U_i) \\
 H_i &\simeq T_i + U_i
 \end{aligned}$$

dove nell’ultimo passaggio abbiamo trascurato il contributo dato dal potenziale residuo, perché se U_i è una buona approssimazione del campo che risente i allora quella differenza è molto “piccola”. Otteniamo così un’hamiltoniana di singola particella, per cui $H_i \psi_i = \varepsilon_i \psi_i$, con $\psi = \prod_i \psi_i$ e $E = \sum_i \varepsilon_i$. Data la natura dei fermioni, cerchiamo una ψ antisimmetrica, che

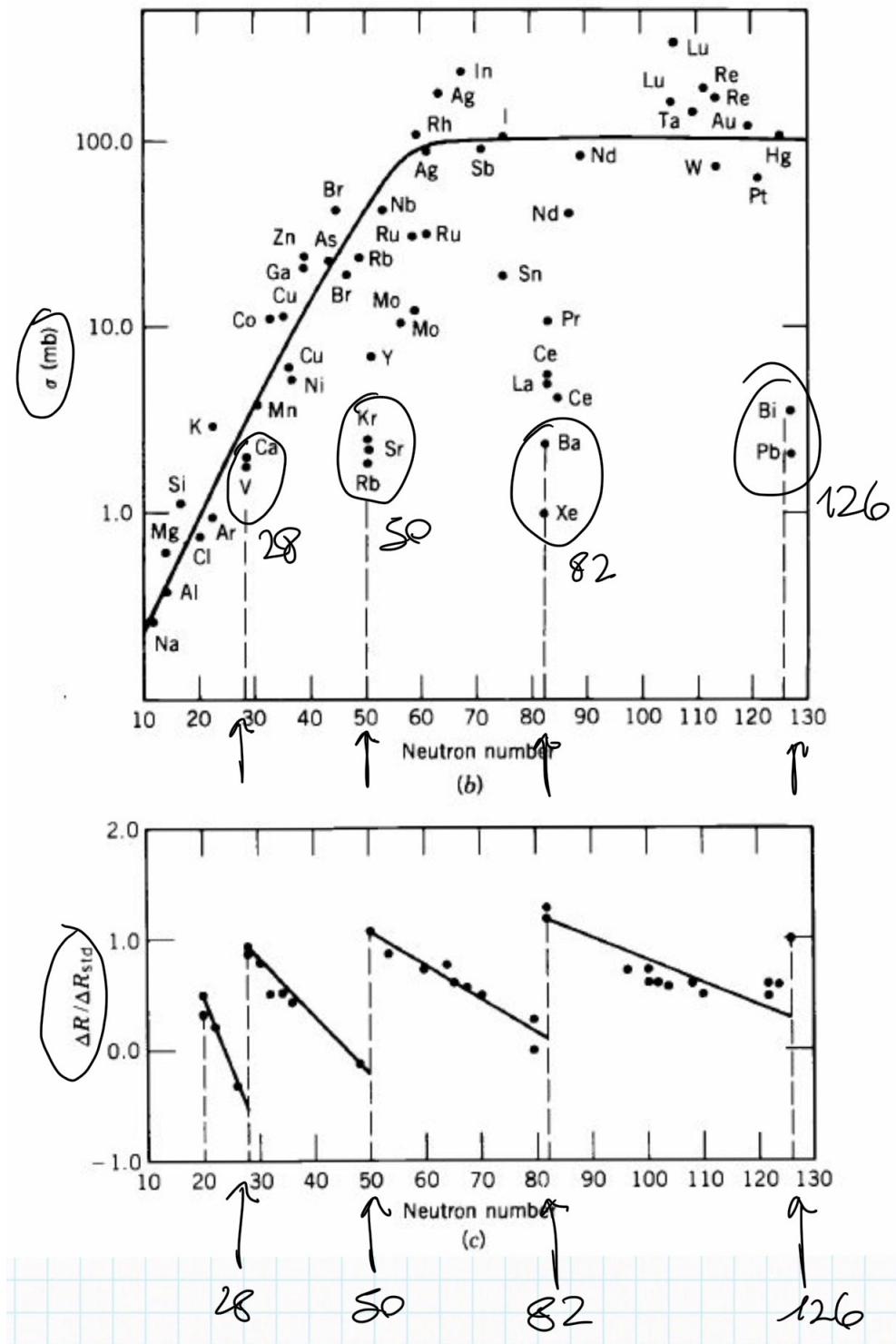


Figura II.3: Andamenti della sezione d’urto σ in alto e dei raggi di carica in basso in funzione del numero di neutroni nel nucleo. Si osservano salti in corrispondenza dei numeri magici.

otteniamo tramite il determinante di Slater⁴:

$$\psi = \det \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \dots & \psi_1(\xi_N) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \dots & \psi_2(\xi_N) \\ \vdots & \ddots & & \\ \psi_N(\xi_1) & \psi_N(\xi_2) & \dots & \psi_N(\xi_N) \end{vmatrix}$$

⁴Per puro scopo esemplificativo riportiamo il caso $N = 2$:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_1)\psi_1(\xi_2)$$

Rimane quindi da scegliere il potenziale U_i .

- **Potenziale a buca infinita:** conosciamo già la soluzione per gli stati legati⁵, ovvero $\psi = A \sin(kx) + B \cos(kx)$, con $k \equiv \sqrt{2mE}$. Dalle condizioni ai bordi $\psi(0) = \psi(a) = 0$, si ha $ka = n\pi$ per cui $\varepsilon_n = \hbar^2\pi^2n^2/2ma^2$.
- **Potenziale armonico** $V(x) = Kx^2/2$: anche in questo caso sappiamo che le soluzioni sono della forma $\psi(x) = H(x) \exp(-\alpha x^2/2)$, con $\alpha \equiv \sqrt{Km}$ e $H(x)$ polinomio di Hermite, il cui grado dà l'energia. Si ha quindi nel caso unidimensionale $\varepsilon_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$, dove $\omega_0 \equiv \sqrt{K/m}$, da cui generalizzando $E_N = \hbar\omega_0(N + 3/2)$, con $N = n_x + n_y + n_z$.
- **Buca Wood-Saxon:** in questo caso il conto è un po' più complicato, lo vedremo successivamente; intanto riportiamo soltanto l'espressione di questo potenziale:

$$V(x) = -\frac{V_0}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})}$$

dove V_0 è la profondità della buca in $r = 0$, R è il raggio medio e a è quella che viene chiamata *skin thickness*⁶.

Come per il modello *a shell* atomico usiamo la notazione spettroscopica per cui $N = 2(n-1)+\ell$, dove n non è però il numero quantico principale (tiene conto solo del numero di livelli con un certo ℓ) e ℓ è il momento angolare. Considerando anche lo *spin*, abbiamo una **degenerazione dello stato energetico** pari a: $2(2\ell+1)$, per cui:

N	n, ℓ	orbitale	Numero nucleoni	Totale
0	1, 0	1s	2	2
1	1, 1	1p	6	8
2	1, 2; 2, 0	1d; 2s	10 + 2	20
3	1, 3; 2, 1	1f; 2p	14 + 6	40
4	1, 4; 2, 2; 3, 0	1g; 2d; 3s	18+10 + 2	70

Osserviamo che il numero totale di nucleoni nei primi 3 livelli pieni corrisponde proprio ai primi 3 numeri magici, ma dal quarto in poi la sequenza non è più rispettata; con questo tipo di potenziale infatti riesco a spiegare bene solo le prime 3 configurazioni, come mostrato in Figura II.4 e in Figura II.5 a sinistra.

2.2 Modello *a shell* + spin-orbita

Consideriamo adesso il potenziale di Wood-Saxon (più realistico della buca e dell'armonico) e teniamo conto dell'interazione *spin-orbita*⁷:

$$U(r) = V_{WS}(r) + V_{s-o}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

$$H \rightarrow T + V_{WS}(r) + V_{s-o}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

dove abbiamo omesso le i ai pedici per semplicità. Aver introdotto questa interazione, però, rende ℓ_z e s_z non più dei buoni numeri quantici poiché non commutano con $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$; consideriamo

⁵Mettiamo $\hbar = 1$.

⁶Questi dettagli sono stati presi da Krane, K., S., “*Introductory Nuclear Physics*”, USA, John Wiley & Sons, 1988.

⁷Di questa ne abbiamo evidenze nello scattering neutrone-neutrone

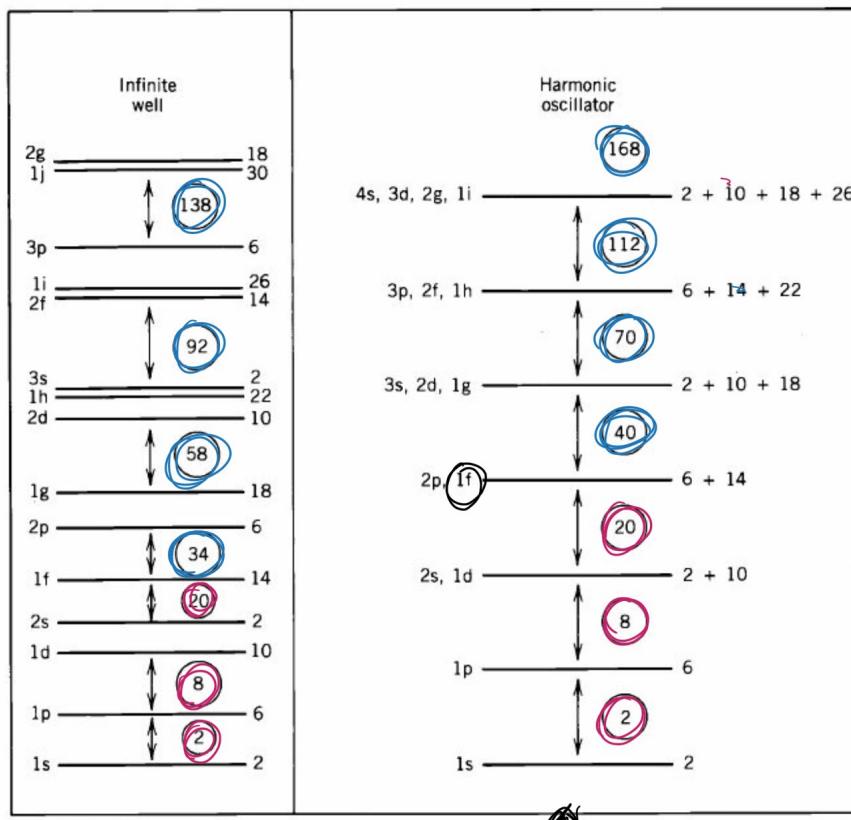


Figura II.4: Sequenza degli orbitali a sinistra con potenziale a buca e a destra con potenziale armonico.

allora il momento angolare totale $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ ed esprimiamo $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ in funzione di j (per il singolo nucleone):

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

Proviamo a questo punto a descrivere la configurazione $1f$ ($n = 1, \ell = 3$), che era la prima a non rispettare la sequenza dei numeri magici: abbiamo $j = 5/2, 7/2$ con degenerazione $2j+1$, per cui $1f_{5/2}$ ha 6 nucleoni e $1f_{7/2}$ ha 8 nucleoni⁸. Per fare i conti, supponiamo che V_{s-o} sia una buca rettangolare di profondità V_0 , allora:

$$\begin{aligned} \langle 1f_{7/2} | U_{s-o} | 1f_{7/2} \rangle &\sim -\frac{V_0}{2} \left[\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} - 3 \cdot 4 - \frac{3}{4} \right] = -\frac{3}{2} V_0 \\ \langle 1f_{5/2} | U_{s-o} | 1f_{5/2} \rangle &\sim -\frac{V_0}{2} \left[\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot 4 - \frac{3}{4} \right] = 2V_0 \end{aligned}$$

Abbiamo che i due stati sono separati e la configurazione $1f_{7/2}$ si avvicina agli orbitali precedenti, per cui si ha un rimescolamento degli *shell* che determina la sequenza dei numeri magici, come mostrato in Figura II.5.

2.2.1 I successi del modello

Questo modello è valso un premio Nobel, non solo perché riproduce i numeri magici, ma anche perché spiega varie evidenze sperimentali. Per esempio, giustifica il fatto che nuclei doppiamente magici, ovvero con sia N che Z numeri magici (come ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8, \dots$), siano fortemente legati e la presenza del $J^\pi = 0^+$ per il fondamentale di tutti i nuclei pari-pari (tutti i nucleoni sono accoppiati). Il modello⁹, infatti, permette di descrivere le proprietà dell'intero sistema dallo

⁸Questo ci piace perché sommato all'orbitale precedente si ottiene proprio 28.

⁹In realtà questo è *extreme independent particle model*.

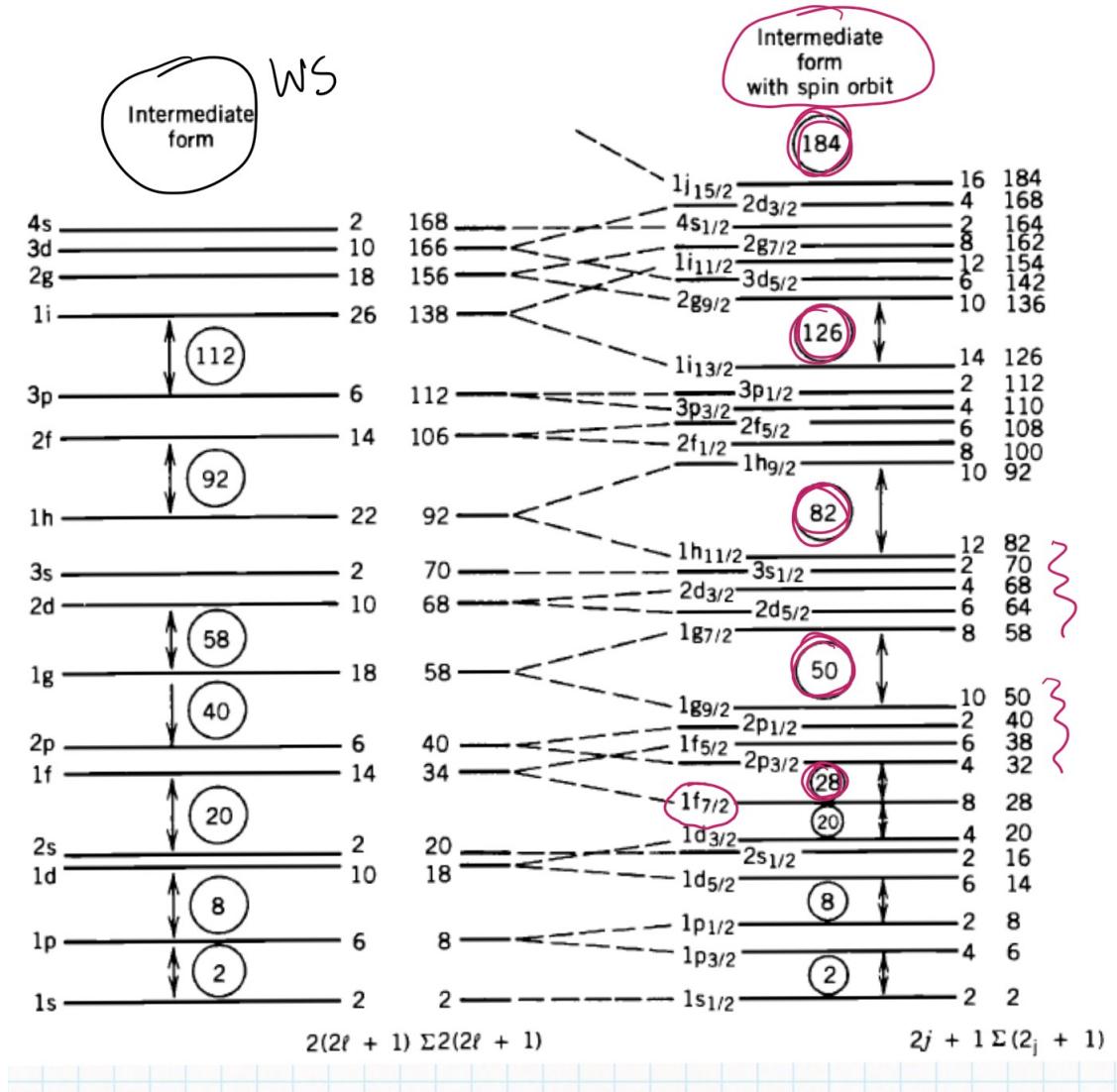


Figura II.5: Configurazioni degli orbitali a sinistra con un potenziale di Wood-Saxon senza interazione *spin-orbita* e a destra con lo stesso potenziale ma considerando tale interazione. Si vedono i rimescolamenti degli *shell* e i numeri magici. Nella figura è presente un errore: è segnato $2f_{1/2}$ invece di $2f_{7/2}$.

stato di un singolo nucleone spaiato. Maggior successo fu appunto la previsione del J^π dei nuclei pari-dispari con un solo nucleone disaccoppiato. Prendiamo a esempio $^{17}_8\text{O}_9$: osserviamo che, secondo il modello, ha un neutrone spaiato nel livello $1d_{5/2}$ ed è di conseguenza questo che determina il J^π del nucleo nel fondamentale, che è appunto $J^\pi = \frac{5}{2}^+$. Il $^{15}_8\text{O}_7$ ha invece un neutrone spaiato nello stato $1p_{3/2}$, quindi $J^\pi = \frac{1}{2}^-$. Tuttavia, questo funziona solo per i nuclei con A dispari e $A < 150 \vee 190 < A < 220$, ma è un aspetto che approfondiremo più avanti. Altro successo del modello è la predizione dei momenti di dipolo magnetico nucleare $\vec{\mu} = \mu_N(g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s})$, dove g_ℓ è il fattore giromagnetico per il momento angolare orbitale e g_s per lo spin¹⁰:

$$\mu \equiv \left\langle \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{j} j_z}{j^2} \right\rangle = \frac{j}{j(j+1)} \langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle$$

¹⁰Ricordiamo che nel caso del protone $g_\ell = 1$ e $g_s = g_s^p = 5.58$, mentre nel caso del neutrone $g_\ell = 0$ e $g_s = g_s^n = -3.82$.

Calcoliamoci allora $\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle$, sfruttando $(\vec{j} - \vec{\ell})^2 = j^2 + \ell^2 - 2\vec{j} \cdot \vec{\ell}$ e $(\vec{j} - \vec{s})^2 = j^2 + s^2 - 2\vec{j} \cdot \vec{s}$:

$$\begin{aligned}\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle &= \mu_N \left(g_\ell \langle \vec{\ell} \cdot \vec{j} \rangle + g_s \langle \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle \right) = \\ &= \frac{\mu_N}{2} \left[g_\ell(j^2 + \ell^2 - s^2) + g_s(j^2 - \ell^2 + s^2) \right] \\ \mu &= \frac{\mu_N}{2(j+1)} \left[(g_\ell + g_s)j(j+1) + (g_\ell - g_s)(\ell(\ell+1) - s(s+1)) \right]\end{aligned}$$

Poiché $s = 1/2$, si ha $\ell = j \pm 1/2$, per cui:

$$\mu = \begin{cases} \mu_N[g_\ell(j-1/2) + g_s/2] & j = \ell + 1/2 \\ \mu_N[g_\ell \frac{j(j+3/2)}{j+1} - g_s \frac{j}{2(j+1)}] & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

Vediamo alcuni risultati sperimentali per il neutrone e per il protone in Figura II.6, dove sono riportate le **linee di Smith** per i vari andamenti (ovvero il conto teorico). Si osserva che il modello riproduce solo qualitativamente i dati, che sembrano *shiftati* di una certa quantità e ciò è dovuto al fatto che le linee sono ottenute usando i valori di g_ℓ e g_s del nucleone libero, invece di tenere in conto che il nucleone è “immerso” in un mezzo denso; questa correzione viene chiamata *medium modification*.

Per quanto riguarda il momento di quadrupolo elettrico il modello riesce a dare una predizione dell’andamento.

$$Q_{ij} = \sum_{\text{part. cariche}} 3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}$$

Quello che viene misurato è $Q_{zz} = 3z^2 - r^2$, che va calcolato sugli stati con p spaiato¹¹. Si trova così:

$$\langle Q \rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle \quad \text{con } \langle r^2 \rangle = \frac{3}{5}R^2 = \frac{3}{5}R_0^2 A^{2/3}$$

che va valutato per $j = \ell \pm 1/2$. Riportiamo in Figura II.7 gli andamenti dei dati sperimentali, dove si osserva che per Z o N “grandi” si perde l’accordo con la teoria.

2.2.2 I problemi del modello

Partiamo proprio dall’ultimo grafico, quello in Figura II.7. Notiamo che per circa $Z > 50$ non vi è accordo, ma soprattutto per circa $N > 100$ compaiono momenti di quadrupolo elettrico per i neutroni e questo è assurdo! Si potrebbe cercare di spiegare questa evidenza imputando la presenza di questi quadrupoli ai protoni degli *shell* precedenti più vicini, ma in realtà non è così¹². Per questi nuclei, dunque, il modello *a shell* non è sufficiente a spiegare tali evidenze, poiché non tiene conto di alcun tipo di moti collettivi, ma imputa la totale descrizione del sistema al solo nucleone spaiato¹³. Vedremo che è necessario introdurre un nuovo modello.

¹¹Ovviamente se calcolato per n spaiato troviamo $\langle Q \rangle = 0$ esattamente.

¹²Le linee nella figura sono proprio ottenute con queste correzioni e come si vede non rappresentano i dati

¹³Tuttavia, in questo caso anche considerare più nucleoni spaiati non fornisce osservabili compatibili.

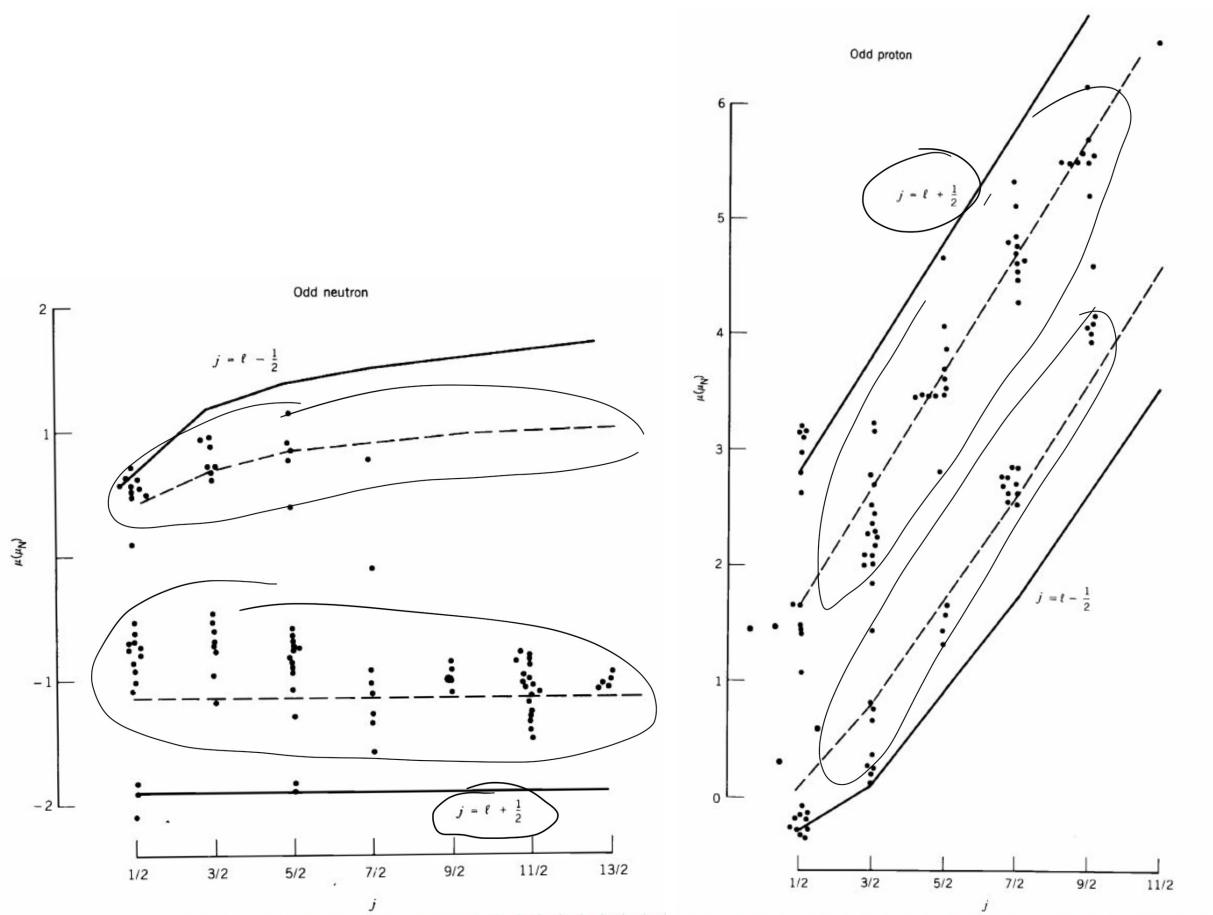


Figura II.6: Andamenti dei momenti di dipolo magnetico per il neutrone a sinistra e per il protone a destra. La linea continua rappresenta le linee di Smith senza correzione, mentre quella tratteggiata tiene conto della *medium modification*.

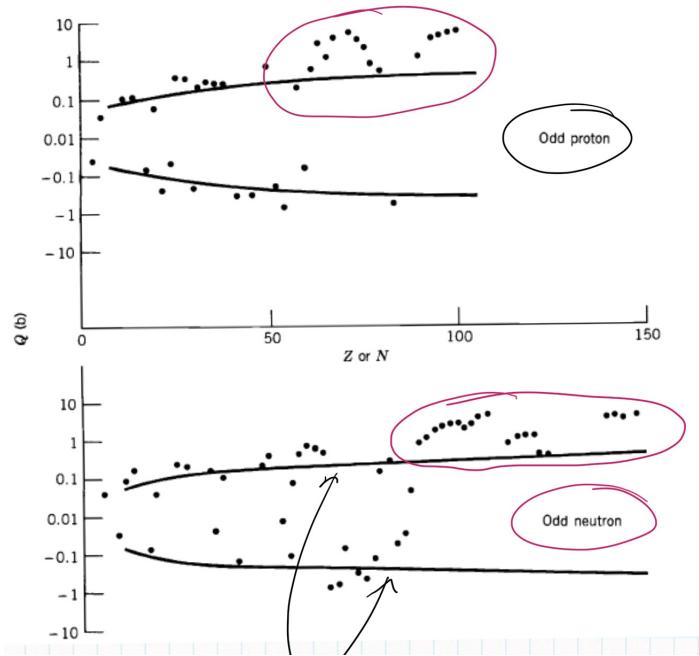


Figura II.7: Andamenti dei momenti di quadrupolo elettrico per il protone spaiato in alto e per il neutrone spaiato in basso.

3 Modello a goccia

3.1 La necessità di un nuovo modello

Torniamo sulle problematiche del modello *a shell*. Prendiamo $^{130}\text{Sn}_{80}$: è un pari-pari per cui ci aspettiamo che lo stato fondamentale sia uno 0^+ . I problemi del modello compaiono quando cerchiamo di spiegare lo stato 2^+ a 1 MeV dal fondamentale. Non ho protoni spaiati perché 50 è un numero magico; per quanto riguarda i neutroni, ne mancano 2 per fare il numero magico 82, allora potremmo provare a promuovere un neutrone da uno dei livelli inferiori. Tuttavia, poiché il salto dev'essere di 1 MeV non può certo venire da $1g_{9/2}$, allora supponiamo inizialmente provenga da $3s_{1/2}$: $5 \leq j_{3s} + j_{1h} \leq 6$, non portano ad avere un 2^+ . Anche se si prova a cercare un altro stato da cui prendere il neutrone non si riesce a trovarne uno che spieghi $J^\pi = 2^+$ e il salto di 1 MeV, poiché è sempre necessario “rompere” una coppia di nucleoni (circa 2 MeV). Inoltre, si osserva la presenza di questo stato (a energie minori) per ogni nucleo pari-pari con circa $150 < A < 200$, come in Figura II.8.

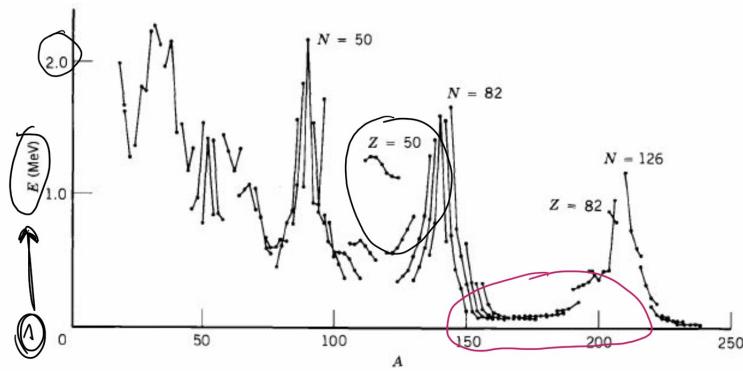


Figure 5.15a Energies of lowest 2^+ states of even- Z , even- N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

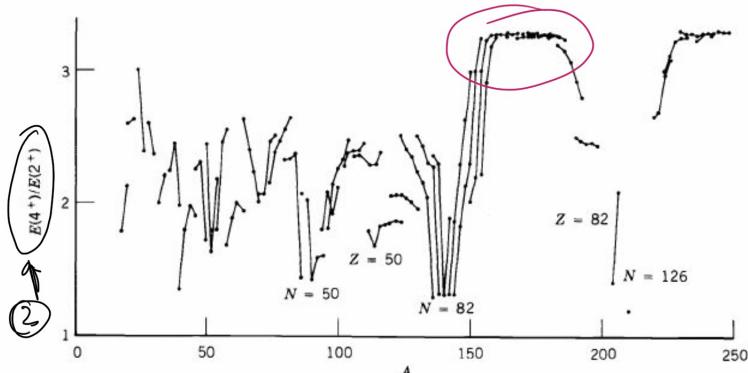


Figura II.8: In basso andamenti del rapporto tra $E(4^+)$ e $E(2^+)$ al variare A . Le linee non sono fit, ma collegano semplicemente i dati.

3.2 Stati vibrazionali

Una spiegazione soddisfacente di tali stati eccitati e dell'andamento dei momenti di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico (in Figura II.9), è data dal **Liquid Drop Model**: assunta una configurazione sferica di equilibrio, si descrivono come “vibrazioni” attorno a essa gli stati del nucleo, che a questo punto sono effettivamente stati collettivi (contrariamente al modello *a shell*).

Pensiamo allora a una “goccia” sferica che si deforma e definiamo $R(t)$ il raggio in funzione del

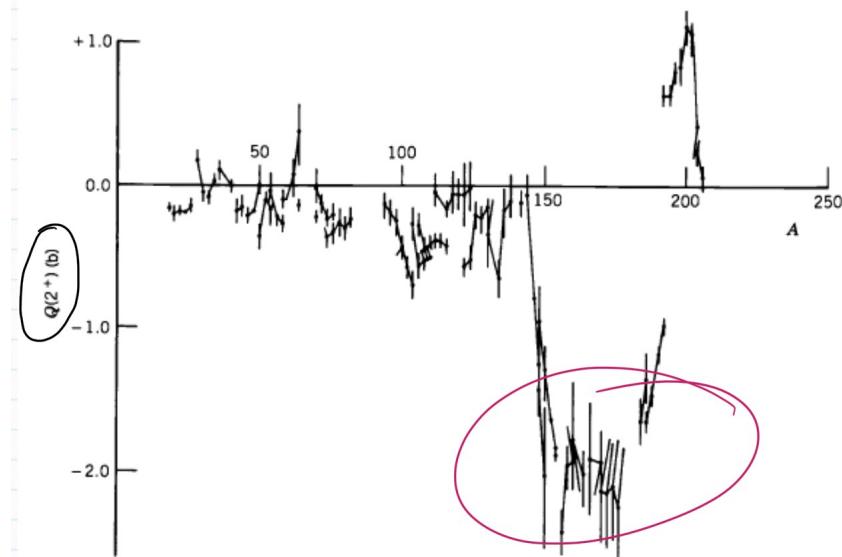
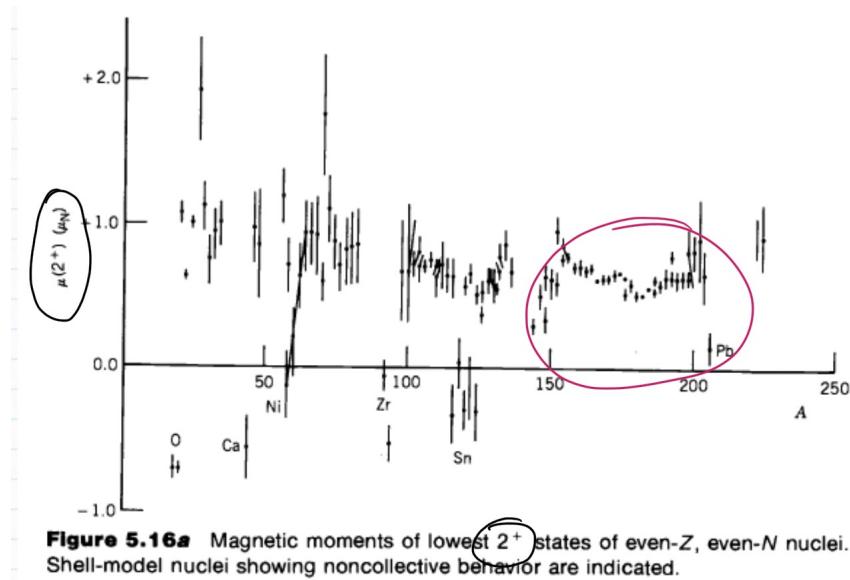


Figura II.9: In basso andamento del quadrupolo per lo stato 2^+ al variare di A . Le linee non sono fit, ma collegano semplicemente i dati.

tempo come:

$$R(t) = R_{av} + \sum_{\lambda \geq 1, \mu = -\lambda \dots \lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) \mathcal{Y}_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$$

con simmetria per riflessione $\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda-\mu}$, $\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$ l'armonica sferica e $R_{av} = R_0 A^{1/3}$ (corrispondente a $\lambda = 0$). Per $\lambda = 1$ (dipolo) abbiamo una semplice traslazione del centro della sfera (vettore spostamento del R_{CM}), quindi non ci interessa; per $\lambda = 2$, invece, si ha $\mathcal{Y}_{2\mu}$ che è legata a un quadrupolo e quindi a una deformazione della struttura. Partendo proprio dal quadrupolo proponiamo una descrizione quantizzata degli stati vibrazionali.

Fononi Possiamo allora prendere $\lambda = 2$ come unità e definire un quanto di energia vibrazionale, il **fonone**, che in questo caso prenderà il nome di fonone di quadrupolo; quindi $0^+ + 1$ fonone $\lambda = 2$, che si porta dietro $Y_{2\mu}$, $\ell = 2$ e $\pi = +$:

$$0^+ + 2^+ = 2^+$$

Il 2^+ è allora il primo stato eccitato vibrazionale del nucleo, anche se l'energia del fonone in questa trattazione è un parametro libero. Supponiamo allora di aggiungerne un altro: $\mu = \mu_1 + \mu_2$ e $\mu_i = -2, \dots, 2$, da cui $5 \cdot 5 = 25$ combinazioni possibili. In realtà non è così, le combinazioni effettive sono solo 15. Guardiamo infatti la Tabella II.1: per $\mu = 4$ abbiamo una sola possibilità; per $\mu = 3$ ne avremmo 2, ma dal momento che il fonone ha *spin* intero la sua funzione d'onda dev'essere simmetrica, di conseguenza le possibilità si riducono a una; per $\mu = 2$ avremmo 3 possibilità, ma si riducono a 2 e così via.

μ_2	μ_1				
	-2	-1	0	1	2
-2	-4	-3	-2	-1	0
-1	-3	-2	-1	0	1
0	-2	-1	0	1	2
1	-1	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4

Tabella II.1: Valori di $\mu = \mu_1 + \mu_2$ per 2 fononi di quadrupolo.

Tenendo conto dello *spin* del fonone, si arriva a 15 combinazioni, che possono essere descritte così:

$$\begin{array}{lll} \ell = 4 & \mu = -4, \dots, 4 & 9 \text{ Possibilità} \\ \ell = 2 & \mu = -2, \dots, 2 & 5 \text{ Possibilità} \\ \ell = 0 & \mu = 0 & 1 \text{ Possibilità} \\ \hline & \text{Tripletto} & 15 \text{ Possibilità} \end{array}$$

Ci aspetteremo dunque un tripletto $0^+, 2^+, 4^+$ degenere con energia circa il doppio di quella del 2^+ di un solo fonone. Ci sono evidenze di questo, per esempio, nel $^{120}_{52}\text{Te}_{68}{}^{14}$, dove però compaiono¹⁵, oltre al 2^+ e al tripletto, il quintetto $2^+, 0^+, 3^+, 4^+, 6^+$ (dovuto a 3 fononi) e il 3^- (ovvero un ottupolo $\ell = 3$).

3.3 Bande rotazionali

Con il modello vibrazionale abbiamo spiegato gli stati 2^+ e 4^+ , tuttavia non abbiamo ancora chiarito i problemi per i nuclei con $150 < A < 200$ per quanto riguarda il loro momento di quadrupolo (molto maggiore rispetto a quello dei nuclei con $A < 150$), come in Figura II.7). Tali valori del momento ci suggeriscono che i nuclei siano fortemente deformati rispetto alla simmetria sferica dello 0^+ , per cui li descriviamo come ellissodi di rotazione:

$$R(\theta, \phi) = R_{av}(1 + \beta \mathcal{Y}_{20}(\theta, \phi))$$

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_{av}}$$

dove ΔR è la differenza tra semiasse maggiore e minore e (in prima approssimazione) $R_{av} \simeq R_0 A^{\frac{1}{3}}$ è il raggio medio. In base al segno di β si ha una figura:

- **prolata** $\Rightarrow \beta > 0$, Figura II.10 a destra.
- **oblata** $\Rightarrow \beta < 0$, Figura II.10 a sinistra.

¹⁴Detto “la perfetta goccia vibrante”.

¹⁵Non è stato inserito il disegno dei livelli.

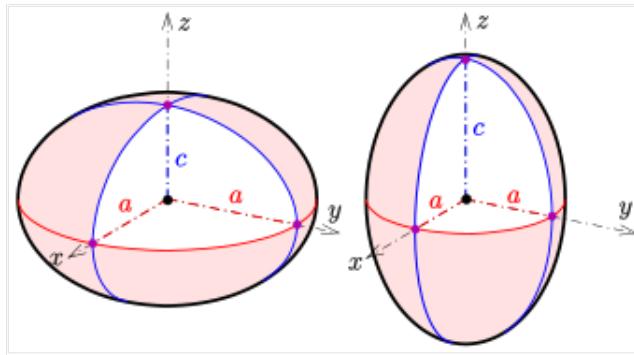


Figura II.10: A sinistra figura oblata, a destra prolata. Questa immagine è stata presa da internet e non fa parte di quelle del corso.

Possiamo allora calcolare il momento di quadrupolo magnetico nel sistema di riferimento del nucleo (corotante):

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5}\pi} R_{av}^2 Z \beta (1 + 0.16 \beta)$$

Tuttavia, se una figura prolata ruota può apparire oblata, per cui se il nucleo ha $Q_0 > 0$ osserviamo un $Q < 0$ nel sistema del laboratorio e questo spiega il valore negativo del momento di quadrupolo. A titolo di esempio, riportiamo il valore per il 2^+ (per il quale si osserva $Q \sim -2$ b):

$$-2 \text{ b} \simeq Q = -\frac{2}{7} Q_0 \Rightarrow Q_0 \simeq -7 \text{ b}$$

$$\beta \simeq 0.29$$

Abbiamo quindi un nucleo fortemente deformato.

Quantizzazione Per una descrizione quantizzata di tali nuclei scriviamo l'espressione dell'energia cinetica di rotazione:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L(L+1)}{I}$$

dove $I = L/\omega$ è il momento di inerzia del nucleo; possiamo allora descrivere¹⁶ i loro stati come **bande rotazionali** associate ai livelli energetici:

Stato	E_{cin}
0^+	0
2^+	$6 \frac{\hbar^2}{2I}$
4^+	$20 \frac{\hbar^2}{2I}$
\vdots	\vdots

Vediamo come esempio¹⁷ $^{176}_{72}\text{Hf}_{104}$, i cui livelli¹⁸ sono riportati in Figura II.11:

¹⁶ $\ell = L/\hbar \Rightarrow E_{cin} = \hbar^2 \ell(\ell+1)/2I$.

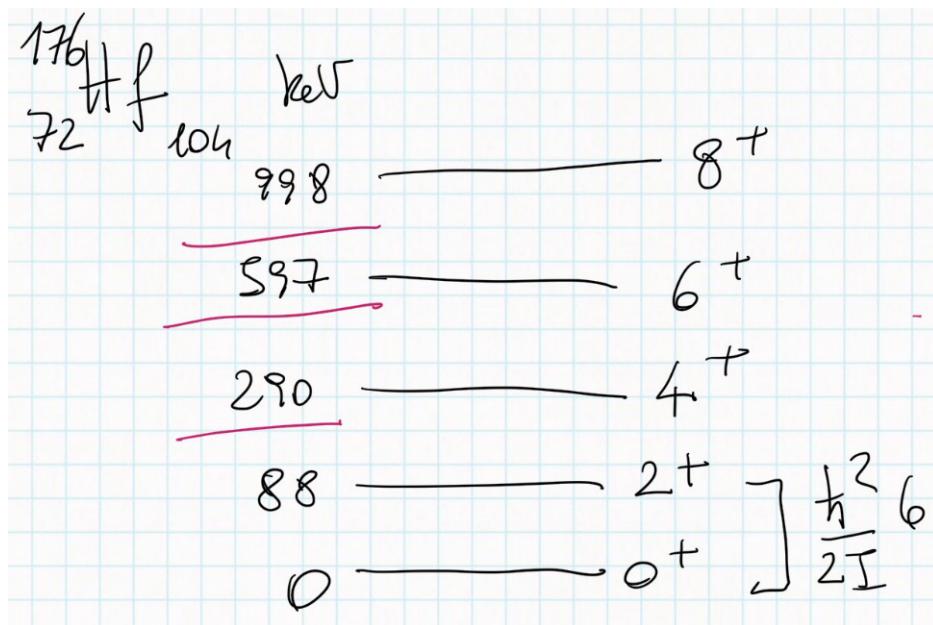


Figura II.11: Livelli energetici dell'afnio.

$$\begin{aligned}
 E(2^+) &= 6 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 88 \text{ keV} \\
 E(4^+) &= 20 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 293 \text{ keV} \\
 E(6^+) &= 42 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 621 \text{ keV} \\
 E(8^+) &= 72 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 1064 \text{ keV} \\
 \Rightarrow \frac{E(4^+)}{E(2^+)} &= 3.33
 \end{aligned}$$

L'ultimo risultato è interessante dal momento che è il valore esatto per i rapporti energetici del $^{164}_{68}\text{Er}_{96}$. Dunque il modello riproduce con ottimo accordo le osservazioni.

¹⁷L'afnio è importante perché il suo decadimento viene utilizzato in fisica medica.

¹⁸Per i calcoli abbiamo usato $\hbar^2/2I \sim 88/6 \sim 14.7$ keV

Capitolo III

Decadimenti

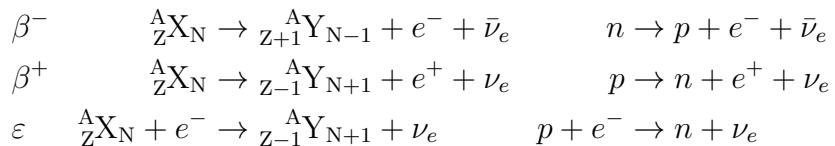
In questo capitolo descriveremo in modo rigoroso i decadimenti β e γ ¹. Il capitolo copre le lezioni 03/03/2021, 04/03/2021, 08/03/2021 e 10/03/2021

1 Decadimento β

Esistono tre tipologie di **decadimento β** :

- β^- : decadimento di un neutrone.
- β^+ : decadimento di un protone.
- ε : cattura elettronica da parte di un protone.

Abbiamo quindi:



dove abbiamo separato i processi nucleari da quelli base (che avvengono nel nucleo). Per capire se questi sono² *permessi* o *proibiti* è necessario calcolare il *Q-value* $Q = \sum T_i$; possiamo momentaneamente approssimare $m_\nu \simeq 0$ MeV e $m_e \simeq 0.5$ MeV, ma dobbiamo considerare $m_n \neq m_p$ per cui $m_n - m_p \simeq 1.3$ MeV: si osserva immediatamente che $m_n > m_p$ implica β^- *permesso* ($Q > 0$) e β^+ *proibito* ($Q < 0$). Dunque, il protone se libero non decade³, ma può fare β^+ solo se è legato e l'energia di legame sia almeno 1.3 MeV.

1.1 La questione dei neutrini

Fino al 1931, anno in cui Pauli propose l'esistenza del neutrino, i risultati dello spettro elettronico del decadimento β furono motivo di intensa discussione: trascurando la presenza di una terza particella nei prodotti, ci si aspettava un andamento del numero di elettroni in funzione dell'energia cinetica degli stessi di tipo a δ , centrata sul valore del *Q-value*⁴. Tuttavia, quello che invece si osserva è un andamento continuo decrescente come quello riportato in Figura III.1. Inizialmente, si diede come spiegazione a questo fatto la possibilità che gli elettroni

¹Per un testo di riferimento sull'argomento vedi Approfondimenti 1-*Modelli e decadimenti*.

²Con *permessi* e *proibiti* si intende rispettivamente “probabili” e “poco probabili”.

³Anche in questo caso si intende che i tempi di decadimento sono “lunghissimi”.

⁴dalla conservazione dell'energia si ha appunto $m(X) = m(Y) + m_e + T_e$ per cui $Q \simeq T_e$

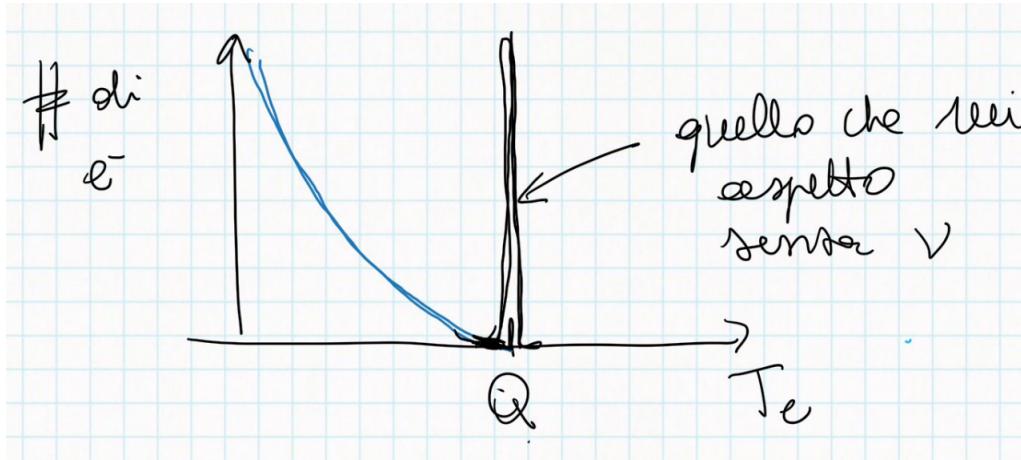


Figura III.1: Distribuzione del numero di neutrini in funzione dell’energia cinetica.

prima di uscire dal campione urtassero contro altri elettroni atomici, ridistribuendo così la loro energia cinetica, ma non era esaustiva. Fu Pauli a risolvere la questione, ipotizzando per primo l’esistenza di un’altra particella non rivelata (che appunto Fermi nel 1934 chiamò *neutrino*). Dal calcolo del *Q-value*:

$$Q = m_n - m_p - m_e - m_\nu \simeq 0.78 \text{ MeV} - m_\nu$$

La misura di questo dà, quindi, una stima della massa del neutrino. Il problema è che è estremamente difficile da fare: i dati riportarono $Q = (0.782 \pm 0.013)$ per cui $m_\nu \simeq 0$ entro 13 keV⁵. Dunque, non è una “cattiva” approssimazione quella di trascurare la massa del neutrino rispetto alle altre masse in gioco, a meno che i neutrini non siano i “protagonisti” del fenomeno in esame⁶.

Q-value Calcoliamo dunque il *Q-value* di questi decadimenti⁷ trascurando la massa del neutrino. Definiamo la massa atomica come:

$$m_{at}(Z X) \equiv m(^A_Z X_N) + Z m_e - \sum_{i=1}^Z B_i$$

dove B_i è l’energia di legame dell’ i -esimo elettrone.

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= m_{at}(Z X) - Z m_e + \sum_{i=1}^Z B_i - m_{at}(Z+1 Y) + (Z+1)m_e - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i - m_e = \\ &= m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) + \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \simeq \\ &\simeq m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) \\ Q_{\beta^+} &= m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) - 2m_e \\ Q_\varepsilon &= m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) - B_n \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto l’approssimazione $Z \sim Z+1$ poiché stiamo considerando atomi con Z molto “alto” e dove abbiamo definito B_n la *binding energy* per l’elettrone catturato dell’ n -esimo shell⁸

⁵Con le misure più recenti si ha $m_\nu \simeq 0$ entro 1 eV

⁶Vedremo in seguito un esempio in cui questo avviene.

⁷Procederemo in realtà al calcolo esplicito solo del decadimento β^- , poiché gli altri sono concettualmente identici.

⁸Per qualche dettaglio vedi Approfondimenti 1.1 - *Decadimento ε* .

($n = k, L, \dots$). Vediamo alcuni esempi:

Decadimento	Q	$\tau_{\frac{1}{2}}$
$^{23}\text{Ne} \xrightarrow{\beta^-} {}^{23}\text{Na}$	4.38	38 s
$^{99}\text{Tc} \xrightarrow{\beta^-} {}^{99}\text{Ru}$	0.29	$2 \cdot 10^5$ y
$^{25}\text{Al} \xrightarrow{\beta^+} {}^{25}\text{Mg}$	3.26	7.2 s
$^{134}\text{I} \xrightarrow{\beta^+} {}^{134}\text{Te}$	2.14	4.2 d

Dai dati sembra che non vi sia correlazione tra il Q -value e il periodo di dimezzamento, che copre vari ordini di grandezza.

Fermi riuscì a darne una spiegazione costruendo una teoria per il decadimento.

1.2 Teoria di Fermi

Ci concentriamo sulla teoria elaborata da Fermi riguardo al decadimento β .

Innanzitutto, consideriamo la **regola d'oro di Fermi**, definito λ il rate di decadimento:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

dove $\rho(E_f)$ è la densità degli stati finali⁹ e $V_{fi} = \int d\Omega \psi_f^* V \psi_i$ è l'elemento di matrice¹⁰ dell'interazione responsabile del decadimento.

Fermi intuì che fosse necessario introdurre un operatore Lorentz-invariante come osservabile; questo operatore O_X può essere un vettore ($_V$), un assiale ($_A$), uno scalare ($_S$), uno pseudoscalare ($_P$) o un tensore ($_T$) e dev'essere l'esperimento a determinarlo. Oggi sappiamo essere un vettore-assiale, tuttavia nella nostra descrizione lo lasceremo indeterminato.

Esplicitiamo allora le funzioni d'onda:

$$V_{fi} = g \int [\phi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^*] O_X \phi_i d\Omega$$

dove abbiamo indicato con g la **costante di accoppiamento debole** o **costante di Fermi**. Introduciamo la notazione per i quadrimpulsi finali $p_e \equiv p$, $p_\nu \equiv q$ e $P_Y \equiv P_f$ e scriviamo i differenziali delle densità di particella:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dE_f} &= \frac{dn_e dn_\nu dn_f}{dE_f} \\ dn_e &= p^2 dp d\hat{p} \frac{\Omega}{h^3} \\ dn_\nu &= q^2 dq d\hat{q} \frac{\Omega}{h^3} \\ dn_f &= P_f^2 dP_f d\hat{P}_f \frac{\Omega}{h^3} \end{aligned}$$

Queste 3 equazioni non sono però indipendenti perché sono legate dalla conservazione del quadrimpulso ($P_f + p + q = 0$), per cui dP_f è univocamente determinato da p e q :

$$dn = \frac{p^2 dp d\hat{p} q^2 dq d\hat{q} \Omega^2}{h^6}$$

⁹A volte si trova scritta come $\rho(E_f) = dn/dE_f$.

¹⁰Abbiamo definito $d\Omega$ come l'elemento di volume differenziale.

Per comprendere la relazione dalle direzioni \hat{p} e \hat{q} scriviamo le funzioni d'onda per il neutrino e per l'elettrone. Quella del neutrino essendo questo neutro ci aspettiamo sia un'onda piana $\phi_\nu = \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}_\nu/\hbar)/\sqrt{\Omega}$; per quella dell'elettrone dovremmo considerare l'interazione coulombiana col nucleo, ma momentaneamente la trascuriamo quindi $\phi_e = \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{r}_e/\hbar)/\sqrt{\Omega}$. A questo punto assumiamo l'ipotesi di Fermi, ovvero che il decadimento avvenga in un sol punto¹¹, per cui utilizzeremo la sola variabile \vec{r} per indicare la posizione:

$$\int \frac{1}{\Omega} \phi_f^* e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} O_X \phi_i d\Omega$$

A questo punto, il *Q-value* è dell'ordine del MeV, per cui anche gli impulsi del neutrino e dell'elettrone sono di quell'ordine; inoltre le funzioni d'onda nucleari tendono a zero molto rapidamente per $r > r_{nucleare}$, dunque ci aspettiamo di poter approssimare¹² $\phi_e \sim \phi_\nu \sim 1/\sqrt{\Omega}$. Per dare una stima dell'ordine di grandezza dell'argomento dell'esponenziale¹³:

$$|\frac{\vec{p} \cdot \vec{r} c}{\hbar c}| \simeq \frac{1 \cdot 10}{200} = 0.05 \ll 1$$

Questa approssimazione viene detta **approssimazione a transizione permessa**. Perché l'integrale sia non nullo le funzioni d'onda dei nucleoni devono avere la stessa parità.

Riscriviamo allora il rate:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 \frac{p^2 dp 4\pi}{h^3} \frac{q^2 dq 4\pi}{h^3} \frac{1}{dE_f}$$

dove abbiamo integrato su $d\hat{q}$ e $d\hat{p}$. Fissata¹⁴ l'energia dell'elettrone, la variazione dell'energia finale sarà data solo da quella dei neutrini $dE_f = dE_\nu = dq$, da cui¹⁵:

$$d\lambda = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 p^2 dp q^2$$

Il rate così definito può essere riscritto come il numero di elettroni con impulso tra p e $p + dp$ per l'intervallo infinitesimo dp : $d\lambda = N(p)dp \propto p^2 q^2 dp$. Esprimiamo q in funzione dell'energia dell'elettrone tramite il *Q-value* (che è fissato): $Q = T_Y + T_e + q \simeq T_e + q$ con $T_e = \sqrt{m_e^2 + p^2} - m_e$, quindi $q \simeq Q - T_e$. Abbiamo allora:

$$N(p) \propto p^2 (Q - \sqrt{m_e^2 + p^2} + m_e)^2$$

Esprimendo in funzione dell'energia cinetica dell'elettrone $dT_e = pdp/\sqrt{m_e^2 + p^2}$ si ottiene:

$$N(T_e) \propto (Q - T_e)^2 \sqrt{(T_e + m_e)^2 - m_e^2} (T_e + m_e)$$

Valutazione delle approssimazioni In Figura III.2 riportiamo gli andamenti attesi per $Q \simeq 2.5$ MeV, mentre in Figura III.3 riportiamo i dati sperimentali. Osserviamo che l'andamento del β^+ è molto simile a quello atteso, mentre il β^- presenta nella zona $T_e \rightarrow 0$ un disaccordo con la teoria; ciò è dovuto al fatto di aver considerato l'interazione coulombiana dei prodotti col nucleo: per dare una spiegazione un po' naïf, nel β^+ si produce un positrone che è allontanato dal nucleo, mentre nel β^- viene prodotto un elettrone, per il quale l'effetto dell'attrazione nucleare non è più trascurabile quando la sua energia cinetica è "bassa".

¹¹In altre parole le particelle sono distribuite secondo $\delta(\vec{r}_\nu - \vec{r}_e)\delta(\vec{r}_e - \vec{r}_i)$ con \vec{r}_i posizione del nucleone, che equivale a dire $r_e = r_\nu = r_i$. Questa ipotesi è stata dimostrata sperimentalmente, grazie all'osservazione dei bosoni W^\pm e Z mediatori dell'interazione debole, che avendo una massa "molto grande" hanno range di azione "molto piccoli".

¹²Come vedremo questa approssimazione ha senso solo se $\int \phi_f^* O_X \phi_i \neq 0$.

¹³Prendiamo $pc \sim 1$ MeV e un raggio tipico di $r \sim 10$ fm.

¹⁴In questi conti usiamo $c = 1$.

¹⁵Sul differenziale del rate vedi Approfondimenti 2-Regola d'oro di Fermi.

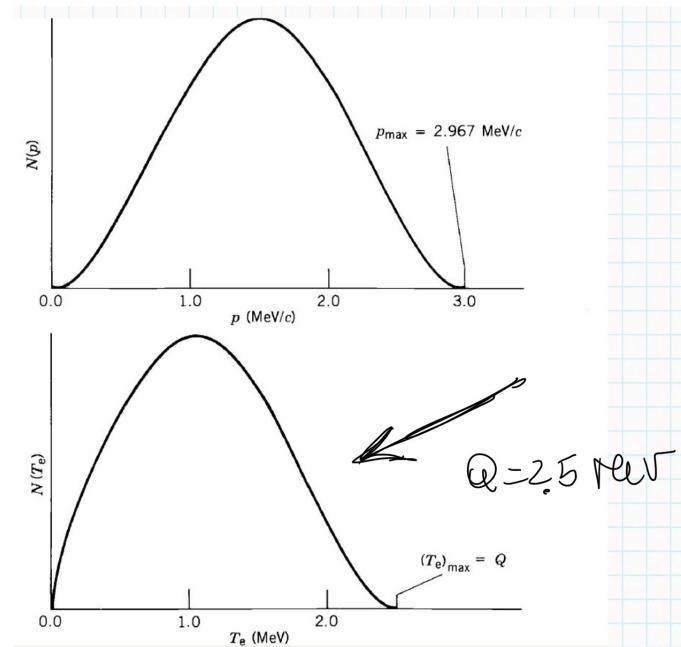


Figura III.2: Andamenti teorici del numero di elettroni in funzione dell'impulso (in alto) e dell'energia cinetica (in basso) per il decadimento β .

Fermi ovviamente aveva chiaro tutto ciò e non utilizzò l'onda piana per rappresentare la funzione d'onda dell'elettrone, ma un'onda distorta. Non riportiamo i calcoli di questa descrizione, ma basti sapere che viene introdotta una fattore correttivo dipendente da p e da Z_Y :

$$N(p) \propto p^2 q^2 F(Z_Y, p)$$

con $F(Z_Y, p)$ **funzione di Fermi**, che gode della proprietà $F \rightarrow 1$ se $p \rightarrow \infty$ (alte energie) o $Z_Y \rightarrow 0$ (carica nulla o trascurabile).

Come già anticipato, anche l'approssimazione a transizione *permessa* potrebbe essere non valida, se, per esempio, l'operatore valutato tra gli stati iniziali e finali dei nuclei è nullo, quindi è necessario sviluppare in serie gli esponenziali che compaiono nelle funzioni d'onda del neutrino e dell'elettrone¹⁶. Queste transizioni vengono chiamate **transizioni proibite**¹⁷ e prendono il nome dall'ordine dell'esponenziale al quale ci si ferma¹⁸:

$$\phi_\nu^* \simeq \underbrace{1}_{\text{permessa}} + \underbrace{i \vec{q} \cdot \vec{r}}_{\text{I proibita}} - \frac{1}{2} \underbrace{(\vec{q} \cdot \vec{r})^2}_{\text{II proibita}} + \dots$$

Considerando tutte le correzioni abbiamo:

$$N(p) \propto p^2 (Q - T_e)^2 F(Z_Y, p) |M_{fi}|^2 S(p, q)$$

dove abbiamo raccolto i termini risultanti dall'integrazione sull'angolo solido in $S(p, q)$, detto **shape factor** (che vale 1 se la transizione è *permessa*).

Possiamo allora esprimere $(Q - T_e)^2$ come:

$$(Q - T_e)^2 \propto \frac{N(p)}{F(Z_Y, p) p^2 S(p, q)}$$

¹⁶Questo comporta che nell'integrazione successiva comparirà una dipendenza dalle direzioni \hat{p} e \hat{q} , di cui dovremo tenere conto quando si integra nell'angolo solido.

¹⁷Come avevamo già spiegato, con *proibite* non si intende "non-*permesse*", bensì che il tempo di decadimento è molto "lungo" (dal momento che λ è minore di quelle *permesse*) e quindi l'osservazione è particolarmente difficile e rara.

¹⁸Nell'espansione non abbiamo riportato i fattori costanti come $\Omega^{-1/2}$ e \hbar^{-1} .

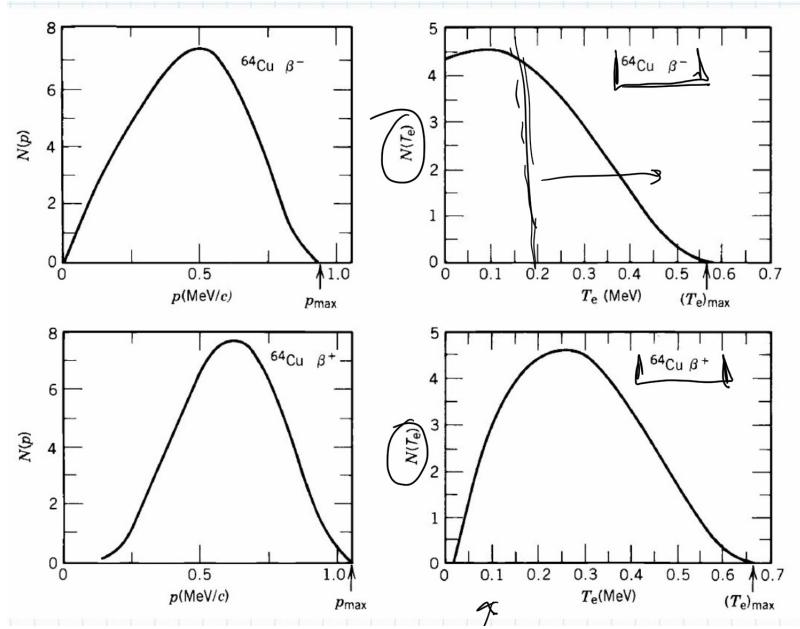


Figura III.3: Dati sperimentali per l'andamento del numero di elettroni nel decadimento β^- (in alto) e nel decadimento β^+ (in basso).

e rappresentarne la'andamento in funzione dell'energia dell'elettrone. Questo grafico è detto **grafico di Fermi-Kuree** e lo riportiamo per il decadimento $0^+ \rightarrow 0^+$ del ^{66}Ga (che è un *super-permesso*) in Figura III.4. Possiamo notare che per un certo valore dell'energia non vi è più accordo tra teoria ed esperimento a causa dell'interazione dell'elettrone con sorgenti radioattive.

Guardiamo, invece, lo stesso grafico per una transizione *proibita* del ^{91}Y in Figura III.5 e osserviamo l'accordo tra i dati e il modello senza considerare lo shape factor e con lo shape factor.

Calcolo del rate Abbiamo tutti gli strumenti dunque per proseguire con il calcolo del rate¹⁹:

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{p_{\max}} p^2 (Q - T_e)^2 F(Z_y, p) dp$$

Definizione 3 (Integrale di Fermi)

$$f(Z_Y, E_0) = \frac{1}{m_e^5 c^5} \int_0^{p_{\max}} p^2 F(Z_Y, p) (E_0 - E_e)^2 dp$$

dove $E_0 \equiv Q + m_e$. Non è un integrale analitico, ma è tabulato per vari Z_Y .

Per definizione di tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ si ha:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} m_e^5 f(Z_Y, E_0) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \\ ft_{1/2} &= \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 |M_{fi}|^2 m_e^5 c^4} \end{aligned}$$

dove abbiamo inizialmente trascurato c e poi reintrodotta²⁰. Quest'ultima espressione viene detta **ft-value** e dipende solo da $|M_{fi}|$ (contributo nucleare), variando in un range esteso, tra

¹⁹Per semplicità considereremo un decadimento permesso, ovvero $S(p, q) = 1$.

²⁰ c^{-1} compare da $\rho = dn/dE_f = dn/dE_\nu = dn/d(cq)$ che abbiamo calcolato nel paragrafo precedente.

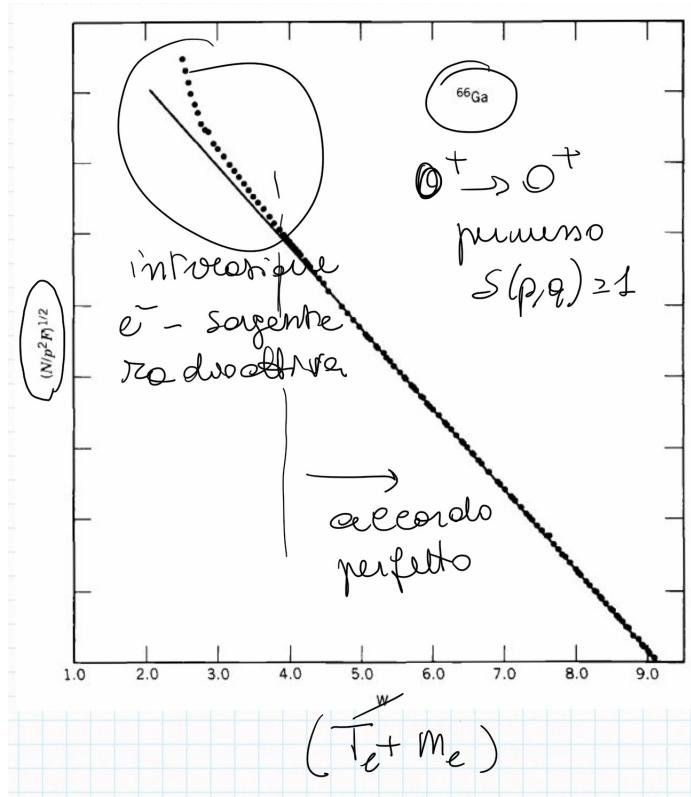


Figura III.4: Grafico di Fermi-Kuree che mostra l'andamento di $(Q-T_e)^2$ in funzione dell'energia dell'elettrone per il decadimento $0^+ \rightarrow 0^+$ del ^{66}Ga e l'accordo tra i dati e il modello.

10^3 e 10^{20} s, ragion per cui spesso se ne esprime il logaritmo.

Per $\log(ft) \sim 3 \div 4$, decadimenti molto veloci, si parla di decadimenti *super-permessi*: sono tutti $0^+ \rightarrow 0^+$ con $M_{fi} \sim \sqrt{2}$ (indipendente dai nuclei in gioco). Questo tipo di decadimento è allora perfetto per stimare la costante di accoppiamento debole g dal momento che presenta per ogni nucleo lo stesso valore ft , come riportato in Figura III.6; si ottiene così:

$$g \simeq 0.88 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^3$$

Per avere una quantità adimensionale possiamo definire una costante tipica dell'interazione $G = g m^2 c / \hbar^3$, per cui:

Forte	$\pi - N$	1
E.M.		10^{-2}
Debole		10^{-5}

In quest'ultimo caso viene detta **costante di Fermi** G_F .

1.2.1 La massa del neutrino

In tutti i calcoli svolti finora abbiamo considerato $m_\nu = 0$, ma non è sempre un'approssimazione corretta: per elettroni energetici, ovvero $T_e \rightarrow Q$, dalla conservazione dell'energia si ha che $q \ll 1$, quindi il neutrino non è più relativistico ($q \neq Q - T_e$) e gli effetti della sua massa non sono più trascurabili²¹ $E_\nu \simeq m_\nu + q^2/2m_\nu$. Poiché ciò influenza sul numero di elettroni, Fermi rielaborò i suoi conti²² e ottenne un andamento come quello riportato in Figura III.7.

²¹Posto $c = 1$.

²²Per maggiori dettagli vedi Approfondimenti 3 - *Sul numero di neutrini*.

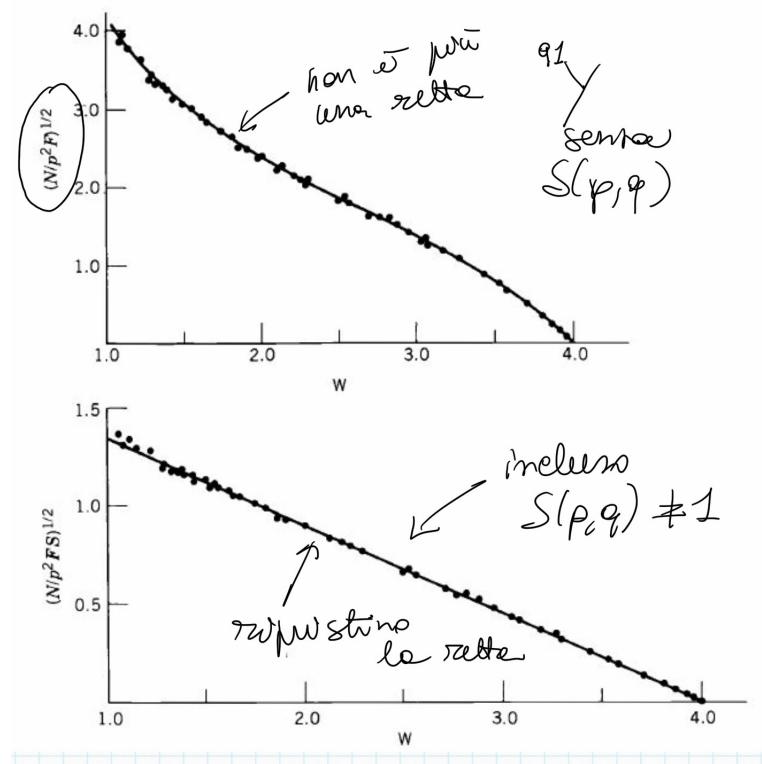
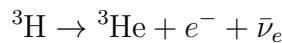


Figura III.5: Grafico di Fermi-Kuree che mostra l’andamento di $(Q - T_e)^2$ in funzione dell’energia dell’elettrone per il decadimento del ^{91}Y e l’accordo tra i dati e il modello senza shape factor (in alto) e con shape factor (in basso).

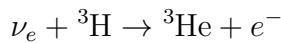
Esperimenti per m_ν Ci sono vari esperimenti che cercano di misurare la massa del neutrino; ne discutiamo 2:

- **Katrin:** in questo esperimento si sfrutta il decadimento β^- del trizio



In questo modo è possibile misurare direttamente la massa del neutrino, ma proprio per questo è particolarmente difficile.

- **Ptolemy:** si tratta in realtà di un esperimento ancora in progettazione che prevede di osservare una cattura neutrinica del trizio con neutrini “lenti”.



Poiché $T_\nu \sim 0$ l’energia dell’elettrone è fissata (non è più uno spettro continuo) $T_e = m({}^3\text{H}) - m({}^3\text{He}) - m_e + m_\nu$ e dal momento che il trizio decade β^- si avrà anche $Q^\beta = m({}^3\text{H}) - m({}^3\text{He}) - m_e - m_\nu$, da cui²³:

$$T_e = Q^\beta + 2m_\nu$$

Ci aspettiamo quindi di osservare un andamento come quello in Figura III.7 dove però compare anche una δ a distanza $2m_\nu$ da Q^β . Questa misura permetterebbe quindi di ottenere una stima per m_ν e un’evidenza sperimentale del **cosmic neutrino background**, dal quale ci si aspetta neutrini con $T_\nu \sim 0$.

Questa è, però, anche una delle maggiori difficoltà dell’esperimento, ovvero non ci sono

²³ $m({}^3\text{H}) = Q^\beta - m({}^3\text{He}) - m_e - m_\nu$

Table 9.2 ft Values for $0^+ \rightarrow 0^+$ Superallowed Decays

Decay	ft (s)
$^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}$	3100 ± 31
$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$	3092 ± 4
$^{18}\text{Ne} \rightarrow ^{18}\text{F}$	3084 ± 76
$^{22}\text{Mg} \rightarrow ^{22}\text{Na}$	3014 ± 78
$^{26}\text{Al} \rightarrow ^{26}\text{Mg}$	3081 ± 4
$^{26}\text{Si} \rightarrow ^{26}\text{Al}$	3052 ± 51
$^{30}\text{S} \rightarrow ^{30}\text{P}$	3120 ± 82
$^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$	3087 ± 9
$^{34}\text{Ar} \rightarrow ^{34}\text{Cl}$	3101 ± 20
$^{38}\text{K} \rightarrow ^{38}\text{Ar}$	3102 ± 8
$^{38}\text{Ca} \rightarrow ^{38}\text{K}$	3145 ± 138
$^{42}\text{Sc} \rightarrow ^{42}\text{Ca}$	3091 ± 7
$^{42}\text{Ti} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$	3275 ± 1039
$^{46}\text{V} \rightarrow ^{46}\text{Ti}$	3082 ± 13
$^{46}\text{Cr} \rightarrow ^{46}\text{V}$	2834 ± 657
$^{50}\text{Mn} \rightarrow ^{50}\text{Cr}$	3086 ± 8
$^{54}\text{Co} \rightarrow ^{54}\text{Fe}$	3091 ± 5
$^{62}\text{Ga} \rightarrow ^{62}\text{Zn}$	2549 ± 1280

Figura III.6: Tabella con la misura del ft -value per il decadimento $0^+ \rightarrow 0^+$ di alcuni nuclei.

ancora state evidenze di questo fondo di neutrini, quindi ci aspettiamo pochissimi eventi; inoltre “immobilizzare” il trizio non è un problema banale: anche se portato a ~ 0 K decade molto facilmente β^- , per cui è stato proposto di legarlo al grafene (o strutture reticolari particolari) in modo da smorzare possibili movimenti.

1.3 Decadimenti β permessi e proibiti

Prima di procedere con lo studio di altri decadimenti ci soffermiamo un attimo sulla probabilità di decadimento β .

Decadimenti permessi Per questo tipo di decadimenti abbiamo visto che $S(p, q) = 1$, da cui $\phi_e \sim \phi_e \sim 1$; e^\pm e ν sono centrati allora in $r = 0$, ovvero non si ha momento angolare orbitale ($\ell = 0$) ma solo spin $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, $S = 0, 1$:

$$\begin{aligned} S = 1 \uparrow\uparrow & \quad \text{Decadimento di Gamow-Teller} \\ S = 0 \downarrow\uparrow & \quad \text{Decadimento di Fermi} \end{aligned}$$

Ci chiediamo quindi quale sia l’operatore O che media il tipo di decadimento. Ci aspettiamo²⁴ per il decadimento con $S = 0$ di avere uno scalare (1), mentre con $S = 1$ un vettore ($\vec{\sigma}$). Per quanto riguarda l’isospin, poiché questo passa $-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow p$) o $\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ ($p \rightarrow n$) ci aspettiamo che compaiano gli operatori di salita e discesa dell’isospin, ovvero le matrici di Pauli nello spazio dell’isospin τ^\pm :

$$\begin{aligned} \tau^+ |n\rangle &= |p\rangle \quad \tau^+ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ \tau^- |p\rangle &= |n\rangle \quad \tau^- |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

²⁴Risultati che derivano dalla teoria di campo, che non trattiamo in questa sede.

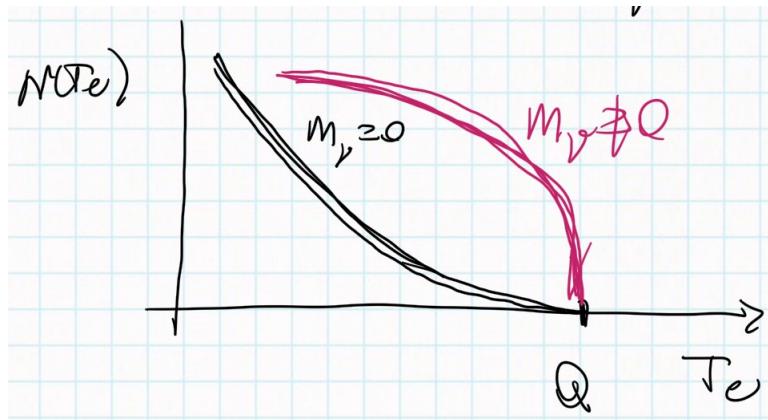


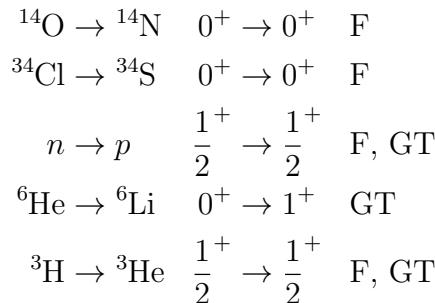
Figura III.7: Nel grafico sono rappresentati gli andamenti del numero di elettroni in funzione dell'energia cinetica dell'elettrone senza considerare la massa del neutrino e tenendone conto. Le due curve non sono in scala.

Riassumendo abbiamo allora:

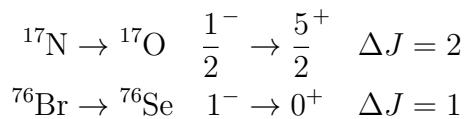
$$O = \begin{cases} \vec{\sigma}_i \tau_i^\pm & S = 1 \\ 1_i \tau_i^\pm & S = 0 \end{cases}$$

dove i indica l' i -esimo nucleone.

Concentriamoci adesso sul momento angolare totale²⁵: poiché questo deve conservarsi si ha per $S = 0$ $\Delta J = 0$, mentre per $S = 1$ $\Delta J = 0, 1$, escluso $J_i = J_f = 0$ (per quale si ha invece un decadimento di Fermi). Vediamo alcuni esempi²⁶:



Decadimenti proibiti Non valgono più i decadimenti di Fermi e di Gamow-Teller, perché $\ell \neq 0$, quindi può cambiare la parità ($\pi = (-)^{\ell}$). Consideriamo $\ell = 1$ (I proibito): per $S = 0$ $\Delta J = 0, 1$ ²⁷ e per $S = 1$ $\Delta J = 0, 1, 2$. Alcuni esempi importanti in astrofisica:



Per avere alcuni valori di riferimento:

$$\int \phi_f^* \vec{p} \cdot \vec{r} \phi_i \simeq 0.05 \sim 10^{-2}$$

$$\lambda \sim |M_{fi}|^2 \sim 10^{-4} \lambda_{\text{permesso}}$$

$$\tau \sim 10^4 \tau_{\text{permesso}}$$

²⁵Ci riferiamo al momento angolare del nucleo che decade \vec{J}_i che per conservazione è uguale a $\vec{J}_f + \vec{j}$, con j momento angolare dello stato νe^- . $\Delta J \equiv |\vec{J}_f - \vec{J}_i|$

²⁶Indichiamo con F il decadimento di Fermi e con GT quello di Gamow-Teller

²⁷Questa volta prendiamo entrambi perché si ha un cambio di parità.

2 Decadimento γ

Questo tipo di decadimento è simile a quello che accade sugli stati atomici; spesso, infatti, il nucleo figlio in un certo processo (per esempio nei decadimenti β , appena visti) si trova in uno stato eccitato, che decade nel fondamentale liberando un fotone (da cui il nome del decadimento):

$${}_{Z}^A X_N^* \rightarrow {}_{Z}^A X_N + \gamma$$

L'ordine di grandezza delle energie in gioco è $0.1 \div 10$ MeV. Questo tipo di decadimento viene solitamente usato per determinare il J^π degli stati eccitati, essendo legato a quello del fondamentale.

Anche se si ha la produzione di un fotone, alcuni processi in fisica sono dei decadimenti γ “camuffati”, ovvero non sono dei decadimenti ma processi di scattering, come per $n + p \rightarrow d + \gamma$

Energia dei livelli Analizziamo a questo punto il processo di decadimento γ dal punto di vista dell'equilibrio energetico.

Nel sistema del centro di massa:

$$\vec{P}_R + \vec{p}_\gamma = \vec{0}$$

dove abbiamo indicato con \vec{P}_R l'impulso del nucleo dovuto al rinculo, per cui $T_R = P_R^2/2M$; poiché i fotoni hanno energia²⁸ dell'ordine di 10 MeV (quindi $E_\gamma = p_\gamma = P_R$) siamo in regime non relativistico per il nucleo X.

$$\begin{aligned} E_i &= E_f + E_\gamma + T_R \\ \Delta E &= E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2M} \quad E_\gamma = M \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{M}} \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo definito $\Delta E \equiv E_i - E_f$ e abbiamo scartato la soluzione negativa perché priva di senso fisico. A questo punto poiché $\Delta E/M \ll 1$ sviluppiamo la radice:

$$\begin{aligned} E_\gamma &\simeq M \left[-1 + 1 + \frac{\Delta E}{M} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E}{M} \right)^2 + \dots \right] \\ E_\gamma &\simeq \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2M} \sim \Delta E \simeq Q \end{aligned}$$

Spesso anche il secondo ordine è trascurabile, per cui l'energia del fotone ci fornisce informazione sulla separazione tra i livelli di partenza e di arrivo.

2.1 Teoria classica

A scopo illustrativo, studiamo dapprima il decadimento secondo una trattazione classica²⁹.

Se supponiamo di avere una distribuzione di cariche e correnti statiche, avremo allora anche un campo elettrico e un campo magnetico statici che possiamo riscrivere in termini di momenti di multipolo. Se tali cariche e correnti non sono statiche, sarà sempre possibile lo sviluppo, ma

²⁸Come al solito $c = 1$

²⁹In questa trattazione riprendiamo concetti classici di elettromagnetismo.

avremo campi di radiazione. A titolo di esempio consideriamo il dipolo³⁰:

Dipolo Elettrico	Dipolo Magnetico
$d(t) = qz \cos \omega t$	$\mu(t) = ia \cos \omega t$
$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$	$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
$\vec{E} \rightarrow \vec{E}; \vec{B} \rightarrow -\vec{B}$	$\vec{E} \rightarrow -\vec{E}; \vec{B} \rightarrow \vec{B}$
$\vec{B} = k^2(\vec{n} \times \vec{d}) \frac{e^{ikr}}{r}$	$\vec{B} = ik \vec{n} \times \vec{a} \propto \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\mu})$
$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{n}$	$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{n}$

Poiché l'interazione tra cariche e campo è proporzionale al prodotto $\vec{v} \cdot \vec{A}$ e questo ha la stessa parità di \vec{B} , è il campo magnetico a determinare la parità del dipolo³¹; si ha quindi: $\Delta\pi \neq 0$ per quello elettrico e $\Delta\pi = 0$ per quello magnetico.

Riassumiamo adesso alcuni concetti di Fisica III³²:

1. La potenza irradiata in dA a θ dall'asse z è proporzionale al $\sin^2 \theta$.
2. La potenza irradiata media del dipolo è data dall'espressione:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} d^2 && \text{elettrico} \\ P &= \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^4}{c^5} \mu^2 && \text{magnetico} \end{aligned}$$

Cerchiamo allora di generalizzarli introducendo una nuova notazione per lo sviluppo in multipoli attraverso l'indice L in modo che 2^L sia l'ordine del multipolo (per esempio $L = 1$ dipolo, $L = 2$ quadrupolo, ...) e l'indice E o M a seconda se lo sviluppo sia di multipolo elettrico o magnetico. Formalizzando si ha che la radiazione di ordine 2^L ha una distribuzione angolare proporzionale al **polinomio di Legendre**³³ di ordine $2L$: $\mathcal{P}_{2L}(\cos \theta)$. È possibile esprimere anche la parità in funzione di tali indici:

$$\pi(ML) = (-)^{L+1} \quad \pi(EL) = (-)^L$$

Possiamo allora scrivere un'espressione³⁴ per la potenza dello sviluppo:

$$P(\sigma L) = \frac{2(L+1)c}{\epsilon_0 L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} [m(\sigma L)]^2$$

con $\sigma = E, M$ e $m(\sigma L)$ **ampiezza del momento di multipolo**³⁵.

A titolo di esempio, riportiamo il caso del dipolo elettrico:

$$P(E1) = \frac{4}{9\varepsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} [m(E1)]^2 \Rightarrow [m(E1)]^2 = \frac{3}{16\pi} d^2$$

Quest'ultimo risultato è molto utile in meccanica quantistica.

³⁰Le espressioni di dipolo elettrico e magnetico sono quelle per le configurazioni più semplici (cariche $+q$ e $-q$ a una certa distanza $z(t)$ e spira di area a percorsa da una corrente $i(t)$).

³¹ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ si ha allora che se la parità di \vec{B} è π , la parità di \vec{A} dev'essere $-\pi$ dal momento che $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}$. Infine $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ dunque $\pi(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \pi(\vec{B})$.

³²Dal momento che sono solo rimandi, non ci soffermiamo molto sulle spiegazioni.

³³Si vede infatti che

$$\begin{aligned} L = 1 \quad \mathcal{P}_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \sim \sin^2 \theta \\ L = 2 \quad \mathcal{P}_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \end{aligned}$$

che hanno l'andamento cercato.

³⁴In questa espressione compare il doppio fattoriale che ricordiamo essere $(n)!! = n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$.

³⁵Nel caso più semplice $m(E1) \propto d$ e $m(B1) \propto \mu$.

2.2 Trattazione quantistica

Secondo un approccio quantistico abbiamo il passaggio da una funzione d'onda del nucleo iniziale ψ_i a una finale ψ_f , dovuto all'operatore³⁶ di multipolo. Per analogia con il decadimento β , ci aspettiamo che questo sia determinato dall'elemento di matrice a esso associato³⁷:

$$m_{fi}(\sigma L) = \int \psi_f^* m(\sigma L) \psi_i d\Omega$$

Scriviamo il rate di emissione di un singolo fotone³⁸:

$$\lambda(\sigma L) = \frac{P(\sigma L)}{\hbar\omega} = \frac{2(L+1)}{\epsilon_0 \hbar L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2L+1} |m(\sigma L)|^2$$

Per semplificare il calcolo facciamo queste due assunzioni: viene scambiato un singolo fotone e il processo coinvolge un singolo protone che passa da uno *shell* a un altro.

Consideriamo inizialmente $\sigma = E$:

$$\begin{aligned} L &= 1 \quad d \rightarrow ez \\ L &= 2 \quad q \rightarrow 3z^2\Omega^2 \end{aligned}$$

dove $\Omega \equiv (1 - 1/3 \cos^2 \theta)$. Consideriamo come approssimazione della funzione d'onda nucleare una funzione a gradino, ovvero costante per $r < R$ e nulla altrimenti. Dato l'operatore³⁹ $er^L Y_{LM}(\theta, \phi)$, l'elemento di matrice normalizzato per questa funzione d'onda è:

$$m_{fi} \sim \frac{\int_0^R r^2 dr r^L}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{r^{L+3}/(L+3)}{r^3/3} \Big|_0^R = \frac{3}{L+3} R^L$$

dove non abbiamo considerato l'integrazione sulla parte angolare (l'armonica sferica). Sostituendo nel rate:

$$\lambda(EL) \simeq \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \alpha \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar c} \right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 c R^{2L}$$

con $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ costante di struttura di fine.

Se $R = R_0 A^{1/3}$ allora possiamo dare una stima dei vari termini di multipolo elettrico:

$$\begin{aligned} \lambda(E1) &\simeq 10^{14} A^{2/3} \mathcal{E}^3 \\ \lambda(E2) &\simeq 7 \cdot 10^7 A^{4/3} \mathcal{E}^5 \\ \lambda(E3) &\simeq 34 A^2 \mathcal{E}^7 \\ \lambda(E4) &\simeq 10^{-5} A^{8/3} \mathcal{E}^9 \end{aligned}$$

dove \mathcal{E} è in MeV (così da avere un rate in s^{-1}).

Consideriamo ora lo sviluppo per $\sigma = M$ con le stesse assunzioni fatte in precedenza:

$$m_{fi} \simeq \frac{3}{L+2} R^{L-1}$$

$$\lambda(ML) \simeq \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \alpha \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar c} \right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+2} \right)^2 c R^{2L-2} \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 \left(\mu_p - \frac{1}{L+1} \right)^2$$

³⁶In meccanica quantistica non si parla più di *momento*, ma di *operatore*. Vedremo che questo operatore, oltre a permettere la transizione, agendo sullo *stato di vuoto* crea anche un fotone.

³⁷Nel caso del decadimento β avevamo M_{fi} e O_X .

³⁸Questo sarà la potenza irraggiata divisa per l'energia del singolo fotone.

³⁹Non si dimostra come si arriva a questo risultato, ma si noti che così definito l'operatore permette di ottenere gli andamenti per il dipolo e il quadrupolo precedentemente mostrati.

Notiamo che l'espressione per il rate di multipolo magnetico non è molto diversa da quella per il multipolo elettrico, eccezion fatta per il termine in più che tiene conto del momento magnetico del protone (che non è quello di una particella elementare) e del $L+2$ a denominatore; tuttavia $L+2 \sim L+3$ e il valore tipico per $(\mu_p - (L+1)^{-1})^2$ è circa 10, per cui possiamo stimare il rate di multipolo magnetico da quello di multipolo elettrico secondo:

$$\lambda(ML) \simeq \frac{10\hbar^2}{m_p^2 c^2} \frac{\lambda(EL)}{R^2}$$

$$\lambda(M1) \simeq 3 \cdot 10^{13} \mathcal{E}^3$$

$$\lambda(M2) \simeq 2 \cdot 10^7 A^{2/3} \mathcal{E}^5$$

$$\lambda(M3) \simeq 10 A^{4/3} \mathcal{E}^7$$

$$\lambda(M4) \simeq 3 \cdot 10^{-6} A^2 \mathcal{E}^9$$

Queste stime per i rate dei termini di multipolo sono dette **stime di Weisskopf** e sono state verificate sperimentalmente; esse permettono di dedurre che i termini con il contributo maggiore sono quelli a L minori e che a parità di L $\lambda(EL) > \lambda(ML)$.

2.2.1 Operatori multipolo

First order perturbation theory Continuiamo lo sviluppo della teoria quantistica del decadimento secondo la così detta **first order perturbation theory**⁴⁰.

Consideriamo l'hamiltoniana nel caso di interazione⁴¹ con il campo \vec{A} :

$$H = H_0 - \frac{e}{2m} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + \frac{e^2}{2m} A^2$$

Il termine $e^2 A^2 / 2m$ è quello dovuto alla transizione con 2 fotoni ed è molto meno significativo⁴² rispetto all'altro termine di interazione, che riscriviamo⁴³:

$$\begin{aligned} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) \psi &= -i\nabla_i (A_i \psi) - iA_i \nabla_i \psi = \\ &= -i(\nabla_i A_i) \psi - 2iA_i (\nabla_i \psi) = \\ &= -2iA_i \nabla_i \psi \end{aligned}$$

dove ci siamo messi nella **gauge di Coulomb** ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$):

$$H_I \simeq -\frac{e}{2m} (-2iA_i \nabla_i) = -\frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} \Rightarrow -e \int d^3x \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

dove abbiamo riespresso il tutto in termini di densità di hamiltoniana, con $\vec{J}(\vec{x})$ densità di corrente (nucleare⁴⁴), che per ora⁴⁵ introduciamo come:

$$\vec{J}_N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^Z \frac{1}{2m} \left\{ \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i), \vec{p}_i \right\}$$

⁴⁰Questo metodo è utilizzato anche per il calcolo dei fattori di forma.

⁴¹Si tratta della sostituzione nell'hamiltoniana imperturbata $H_0 = p^2/2m$ di $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ (*minimal substitution*).

⁴²Da qui in poi trascureremo questo contributo nell'hamiltoniana di interazione.

⁴³Si ricorda che \vec{p} e \vec{A} sono operatori con commutatore non nullo.

⁴⁴In questa espressione introduciamo l'indice N per ricordare che si tratta della corrente nucleare.

⁴⁵Sono presenti infatti altri contributi che ricaveremo nel seguito.

dove abbiamo indicato con $\{ \}$ l'**anticommutatore**⁴⁶. Scriviamo l'espressione esplicita anche per il campo esterno:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \left[\underbrace{\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{Termine di assorbimento}} + \underbrace{\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{Termine di emissione}} \right]$$

dove abbiamo indicato con Ω il volume, a e a^+ gli operatori⁴⁷ di *distruzione* e *creazione* e con $\hat{\varepsilon}$ il vettore di polarizzazione, definito come:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}0} &= \hat{k} \\ \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\pm 1} &= \mp \frac{\hat{\varepsilon}_{\vec{k},x} \pm i\hat{\varepsilon}_{\vec{k},y}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Poiché stiamo studiando il decadimento γ ci interessa solo il termine di creazione in $\vec{A}(\vec{x})$, allora⁴⁸:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}\lambda | \vec{A}(\vec{x}) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} && \text{Funzione d'onda del fotone} \\ \langle J_f M_f, \vec{k}\lambda | H_I | J_i M_i \rangle &= -\frac{e}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \langle J_f M_f | \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* \cdot \vec{J}_N(\vec{x}) | J_i M_i \rangle \end{aligned}$$

dove J e M sono riferiti al momento angolare totale del nucleo prima e dopo il decadimento. Si osserva che la funzione d'onda del fotone si porta dietro un momento angolare⁴⁹; infatti l'onda piana può essere sviluppata in armoniche sferiche $\mathcal{Y}_{\ell m}$:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{\ell m} 4\pi i^\ell \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\hat{k}) \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{x}) j_\ell(kx) \\ \text{Se } \hat{k} \parallel \vec{z} \Rightarrow \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\hat{k}) &= \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta = 0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \delta_{m0} \\ \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \mathcal{Y}_{\ell 0}(\hat{x}) j_\ell(kx) \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto le funzioni di Bessel j .

Per arrivare a una forma più compatta dell'espressione, introduciamo le armoniche sferiche vettoriali $\vec{\mathcal{Y}}_{J\ell s}^M$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^M &\equiv \sum_{m\lambda} \langle \ell m, 1\lambda | JM \rangle \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{x}) \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \\ \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{x}) \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} &= \sum_{JM} \langle \ell m, 1\lambda | JM \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^M \\ \Rightarrow \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} j_\ell(kx) \sum_J \langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^{M=\lambda} \end{aligned}$$

⁴⁶L'anticommutatore di 2 operatori A e B è definito come:

$$\{ A, B \} = AB + BA$$

⁴⁷Ricordiamo che per l'emissione e l'assorbimento $[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} e a_{\vec{k}\lambda}^+ |0\rangle = |\vec{k}\lambda\rangle$.

⁴⁸Da qui in poi faremo un abuso di notazione, infatti la notazione coi *braket* sottintende l'integrazione, tuttavia per esplorare su quale variabile si integra da qui in poi utilizzeremo una notazione per cui i *bra* e i *ket* indicano le funzioni d'onda su cui integrare e racchiudono un integrale esplicito.

⁴⁹Ci aspetteremo allora delle regole di selezione

dove nel secondo passaggio abbiamo usato l'ortogonalità dei coefficienti di Clebsch-Gordan. Sempre per le proprietà di tali coefficienti abbiamo che $\langle \ell_0, 1\lambda | J\lambda \rangle$ è non nullo solo se $\ell = J, J - 1, J + 1$ e quindi possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{2}} \left\{ -\lambda j_J(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda + \right. \\ &\quad - i \left[\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{J(J-1)1}^\lambda + \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{J(J+1)1}^\lambda \right] \right\} \\ \widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{2}} \left\{ -\lambda j_J(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda - \frac{1}{k} \vec{\nabla} \wedge [j_J(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda] \right\}\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le proprietà del prodotto $\vec{\nabla} \wedge j \vec{\mathcal{Y}}^{50}$. Dunque il versore polarizzazione del fotone si porta dietro una parte proporzionale a un'armonica sferica vettoriale e una parte proporzionale al suo rotore (per questa ragione l'armonica sferica vettoriale è la *funzione tipo* del fotone). A questo punto riscriviamo l'elemento di matrice⁵¹ da cui eravamo partiti:

$$\begin{aligned}\langle J_f M_f, \vec{k}\lambda | H_I | J_i M_i \rangle &= e \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{\frac{2\pi(2J+1)}{2\omega_k \Omega}} [E_{J-\lambda}(k) + \lambda M_{J-\lambda}(k)] \\ E_{JM}(k) &= \frac{1}{k} \int d^3x [\vec{\nabla} \wedge j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \cdot \vec{J}(\vec{x}) \\ M_{JM}(k) &= \int d^3x [j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \cdot \vec{J}(\vec{x})\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto i termini di multipolo elettrico E_{JM} e magnetico M_{JM} e abbiamo usato la proprietà $(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = (-)^{\lambda+1} \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$ ⁵². La parità è data da⁵³:

$$\begin{aligned}\pi(EJ) &= (-)^J \\ \pi(MJ) &= (-)^{J+1}\end{aligned}$$

che è la parità che avevamo trovato anche nel conto classico.

Corrente di magnetizzazione Avevamo anticipato che l'espressione della corrente nucleare non era completa, mancava infatti il contributo magnetico:

$$\vec{J}_N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^Z \vec{J}_C(\vec{x}_i) + \sum_{i=1}^A \vec{J}_M(\vec{x}_i)$$

⁵⁰Vedi Approfondimenti 4-*Dettagli sul calcolo del decadimento γ* per approfondire.

⁵¹Nei calcoli ometteremo $\langle J_f M_f | J_i M_i \rangle$ per semplicità.

⁵²Si ricordi che stavamo calcolando $\widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (\widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}})^*$. Per la proprietà dell'armonica vettoriale vedi Approfondimenti 4.3-*Proprietà armonica vettoriale*.

⁵³Abbiamo un $(-)^J$ dall'armonica sferica, un $(-)$ dalla corrente \vec{J} e un $(-)$ dal $\vec{\nabla}$ (la Bessel dipende dal modulo di r quindi non influisce).

Vediamo allora da dove deriva questa corrente. Scriviamo l'operatore di momento magnetico del singolo nucleone:

$$\begin{aligned}\mu_i(\vec{x}) &= \left(\mu_p \frac{1 + \tau_z(i)}{2} + \mu_n \frac{1 - \tau_z(i)}{2} \right) \mu_N \vec{\sigma}_i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i) \\ \mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p c} \\ \mu_p &= \frac{g_p}{2} = 2.79 \\ \mu_n &= \frac{g_n}{2} = -1.91\end{aligned}$$

Allora se consideriamo l'hamiltoniana⁵⁴ di interazione con il momento magnetico:

$$\begin{aligned}H &= - \int d^3x \vec{\mu} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = - \int d^3x (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mu}) \cdot \vec{A} \\ \vec{J}_M(\vec{x}_i) &\equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{\mu}\end{aligned}$$

che è appunto una **corrente di magnetizzazione**⁵⁵.

Sui risultati della first order perturbation theory Possiamo rielaborare le espressioni per E_{JM} e M_{JM} sostituendo⁵⁶ i termini di corrente che abbiamo calcolato:

$$\begin{aligned}E_{JM}(k) &= \frac{1}{k} \int d^3x \left\{ [\vec{\nabla} \wedge j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \cdot \vec{J}_C(\vec{x}) + k^2 j_J(kx) \vec{\mu}(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M \right\} \\ M_{JM}(k) &= \int d^3x \left\{ j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M \cdot \vec{J}_C(\vec{x}) + \vec{\mu}(\vec{x}) \cdot [\vec{\nabla} \wedge j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \right\}\end{aligned}$$

Se $k \ll 1$ (situazione frequente) allora sarà dominante in E il termine di corrente \vec{J}_C ; inoltre a parità di J per k piccolo abbiamo $j_J \sim (kx)^J$ per cui $E_{JM} > M_{JM}$ (come avevamo trovato per le stime di Weisskopf).

Stima del dipolo Riprendiamo l'espressione dell'hamiltoniana di interazione⁵⁷:

$$\int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

Poiché $k < 1$ MeV/ $\hbar c$ (spesso si prende dell'ordine del keV) si ha che⁵⁸ $\langle \vec{k} \cdot \vec{x}_i \rangle \simeq 10/200 = 1/20 \ll 1$, quindi è ragionevole assumere la **Long Wavelength Approximation**. Nel calcolo dell'elemento di matrice, sfruttando la $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)$ che compare nell'espressione della corrente possiamo riscrivere l'esponenziale come $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}_i)$ e quindi approssimarla ~ 1 , per cui:

$$\int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot (\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{x} = - \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}))$$

⁵⁴Questa corrisponde a $H = - \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$, ma in termini di densità di hamiltoniana abbiamo rimosso gli indici e sostituito la somma con un integrale.

⁵⁵Si è usata l'identità vettoriale $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$

⁵⁶In realtà quello che facciamo è integrare per parti e poi usare il teorema di Gauss.

⁵⁷Da qui in poi chiameremo il versore di polarizzazione $\hat{\varepsilon}$ con \hat{e} per semplicità di scrittura.

⁵⁸Si tratta della stessa approssimazione fatta per il decadimento β e nasce dal fatto che il decadimento si osserva soprattutto nel caso di nuclei pesanti.

dove abbiamo usato $\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_j i = \delta_{ji}$ e abbiamo integrato per parti. Dall'equazione di continuità (valutata sugli stati iniziale e finale) si ha $\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) \rangle = -i \langle [H, \rho] \rangle = -i(E_f - E_i) \langle \rho \rangle = iE_\gamma \langle \rho \rangle$, quindi possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \langle J_f M_f | \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{J}(\vec{x}) | J_i M_i \rangle &= -iE_\gamma \langle J_f M_f | \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{x}\rho | J_i M_i \rangle = -iE_\gamma \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi} \\ \vec{d}_{fi} &\equiv \langle J_f M_f | \int d^3x \vec{x}\rho | J_i M_i \rangle \end{aligned}$$

dove \vec{d}_{fi} è l'**operatore di dipolo elettrico**.

Generalizzando per ogni termine di multipolo⁵⁹:

$$\begin{aligned} E_{JM} &\simeq \frac{k^J}{(2J+1)!!} \sqrt{\frac{J+1}{J}} \int d^3x \left[x^J \mathcal{Y}_{JM}(\hat{x}) \rho(\vec{x}) \right] \\ M_{JM} &\simeq i \frac{k^J}{(2J+1)!!} \sqrt{\frac{J+1}{J}} \int d^3x \left[\vec{\mu}(\vec{x}) + \frac{1}{J+1} \vec{r} \wedge \vec{J}_C(\vec{x}) \right] \cdot \vec{\nabla} x^J \mathcal{Y}_{JM}(\hat{x}) \end{aligned}$$

In realtà, non è necessario calcolarli esplicitamente per ogni M , perché questi (che indichiamo con T_{JM} dove $T = E, M$) sono operatori irriducibili e di conseguenza applicando il teorema di Wigner-Eckart si ha:

$$\langle J_f M_f | T_{JM} | J_i M_i \rangle = \underbrace{\frac{(-)^{J_i - M_i}}{\sqrt{2J+1}} \langle J_f M_f, J_i - M_i | J, M \rangle}_{\text{Dipendenza da } M} \underbrace{\langle J_f || T_J || J_i \rangle}_{\text{Elemento di matrice ridotta}}$$

Nell'espressione della sezione d'urto è l'elemento di matrice ridotta che compare e dunque può essere calcolato scegliendo il valore di M per il quale è più semplice valutare $\langle J_f M_f | T_{JM} | J_i M_i \rangle$.

Probabilità di decadimento per il dipolo Procediamo con il calcolo⁶⁰ della probabilità di decadimento per il dipolo elettrico (ci aspettiamo di ritrovare il risultato classico). Facciamo l'ipotesi di *long wavelength approximation*, per cui⁶¹:

$$d\lambda = \sum_{k\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f - E_\gamma) |T_{fi}|^2 \Omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$T_{fi} \equiv -\frac{e}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} iE_\gamma \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}$$

dove la somma su \vec{k} è intesa sullo spazio delle fasi e $\omega_k = E_\gamma$.

Soffermiamoci sull'elemento di matrice $|\hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2$, facendo riferimento allo schema in Figura III.8.

$$\sum_{\lambda=\pm 1} |\hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2 = \sum_{\lambda=-1}^{+1} |\hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2 - |\hat{e}_{k0}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2 = d_{fi}^2 - d_{fi}^2 \cos^2(\theta) = d_{fi}^2 \sin^2(\theta)$$

⁵⁹Trascuriamo il secondo termine di E_{JM} perché stiamo considerando k piccoli.

⁶⁰Nei calcoli tenderemo a tenere $c = \hbar = 1$.

⁶¹In questo caso chiamiamo l'elemento di matrice di transizione con T_{fi} .

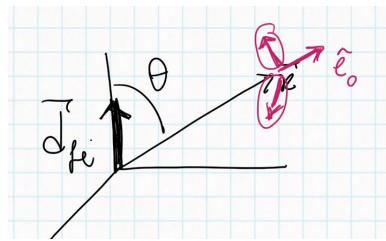


Figura III.8: Rappresentazione del sistema in esame.

Allora avremo per il rate:

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f - E_\gamma) \frac{e^2}{2} E_\gamma d_{fi}^2 \sin^2(\theta) \frac{k^2 dk d\hat{k}}{(2\pi)^3} \\
 p_\gamma = \hbar k \quad E_\gamma &= p_\gamma c \quad \frac{p_\gamma^2 dp_\gamma}{\hbar^3} \rightarrow \frac{E_\gamma^2 dE_\gamma}{(\hbar c)^3} \\
 \frac{d\lambda}{d\hat{k}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f - E_\gamma) \frac{e^2}{2} E_\gamma d_{fi}^2 \sin^2(\theta) \frac{E_\gamma^2 dE_\gamma}{(2\pi \hbar c)^3} \\
 \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\hat{k}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{2} E_\gamma^3 \frac{d_{fi}^2 \sin^2(\theta)}{(2\pi \hbar c)^3} \\
 \frac{d\lambda}{d\hat{k}} &= \frac{1}{\hbar} \frac{\alpha}{2\pi} E_\gamma^3 \frac{d_{fi}^2 \sin^2(\theta)}{(\hbar c)^2}
 \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo integrato la δ per cui $E_\gamma = E_i - E_f$ e nell'ultimo abbiamo sostituito la costante di struttura fine α . Possiamo notare che abbiamo ottenuto un andamento del tipo $E_\gamma^3 \sin^2(\theta)$ come nel caso classico.

2.3 Riassunto

Riassumiamo i concetti base del decadimento γ che abbiamo sviluppato finora.

- Fissato J , i termini di multipolo elettrico e magnetico hanno parità opposta.
- A parità di J il contributo elettrico è maggiore rispetto a quello magnetico.

2.3.1 Regole di selezione

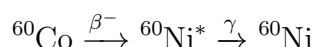
Poiché $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{J}$, si ha che $|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f$ e $\pi_i = \pi_f \cdot \pi(T_J)$, da cui derivano di conseguenza delle regole di selezione per i vari termini (non tutti i multipoli sono ammessi):

- Se $\pi_i = \pi_f$: allora per M ho J dispari e per E ho J pari.
- Se $\pi_i \neq \pi_f$: allora per E ho J dispari e per M ho J pari.

Notiamo che $J > 0$ anche se $J_i = J_f$, infatti se così non fosse (ovvero $J = 0$) allora avremmo un fotone emesso lungo \hat{k} , ma questo non è possibile (solo polarizzazione ± 1). Dunque le transizioni $0 \rightarrow 0$ non sono ammesse⁶².

2.4 Alcuni esempi

Primo esempio



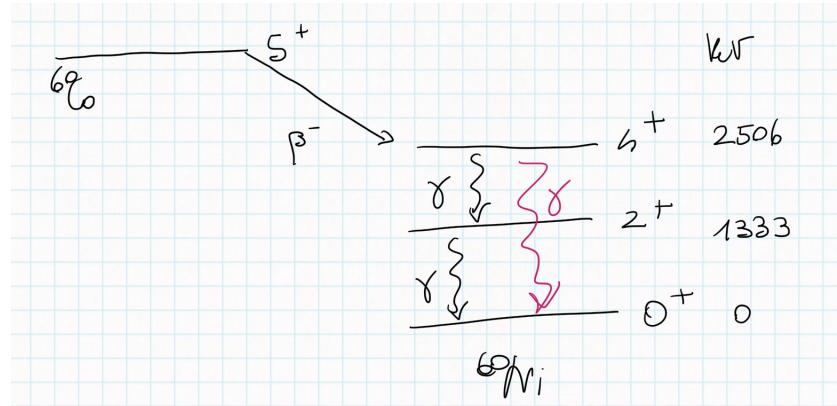


Figura III.9: Schema delle bande rotazionali coinvolte nel decadimento.

Come mostrato nello schema in Figura III.9, abbiamo 3 possibilità di decadimento:

- $4^+ \rightarrow 2^+$: in questo caso $2 \leq J \leq 6$ e $\Delta\pi = 0$, allora avremo $E2, M3, E4, M5, E6$, dove domina per $E_\gamma \simeq 1.2 \text{ MeV}$ ($k \ll 1$) solo $E2$, con $M3$ come correzione.
- $2^+ \rightarrow 0^+$: in questo caso $J = 2$ e $\Delta\pi = 0$, allora avremo $E2$.
- $4^+ \rightarrow 0^+$: in questo caso $J = 4$ e $\Delta\pi = 0$, allora avremo $E4$.

Per quanto riguarda le stime di Weisskopf, ovviamente non saranno precise perché queste sono bande rotazionali, quindi non è possibile fare l'approssimazione di simmetria sferica; tuttavia permettono di ottenere l'ordine di grandezza:

$$\begin{aligned} \lambda(E2) &\simeq 7 \cdot 10^7 60^{4/3} (1.2)^5 \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad \tau_{dec} = \frac{1}{\lambda} \sim 10^{-10} \text{ s} \quad 4^+ \rightarrow 2^+ \\ \lambda(E2) &\simeq 7 \cdot 10^7 60^{4/3} (1.3)^5 \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad \tau_{dec} = \frac{1}{\lambda} \sim 10^{-10} \text{ s} \quad 2^+ \rightarrow 0^+ \\ \lambda(E4) &\simeq 10^{-5} 60^{8/3} (2.5)^5 \sim 2 \text{ s}^{-1} \quad \tau_{dec} = \frac{1}{\lambda} \sim 0.5 \text{ s} \quad 4^+ \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

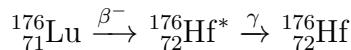
dove si può notare che tra $E2$ ed $E4$ c'è un fattore 10^{10} .

Secondo esempio



In questo caso abbiamo la transizione $\frac{11}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^+$ per cui $4 \leq J \leq 7$ e $\Delta\pi \neq 0$; allora i termini di multipolo saranno $M4, E5, M6, E7$, dove $M4$ sarà dominante e $E5$ una piccola correzione.

Terzo esempio



In tutti i casi $\Delta\pi = 0$, studiamo J :

1. $6^+ \rightarrow 4^+$: abbiamo $2 \leq J \leq 10$, dominante $E2$.
2. $4^+ \rightarrow 2^+$: abbiamo $2 \leq J \leq 6$, dominante $E2$.
3. $2^+ \rightarrow 0^+$: abbiamo $J = 2$, dominante $E2$.

⁶²Queste si vedono, ma sono dovute a un processo differente, ovvero avvengono per **conversione interna**: il nucleo interagisce con un elettrone dell'atomo e quest'ultimo viene emesso.

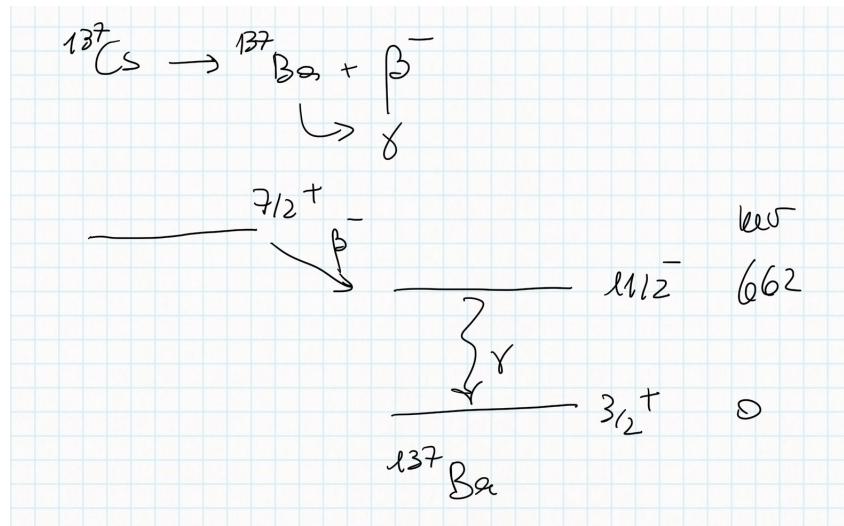


Figura III.10: Schema delle bande rotazionali coinvolte nel decadimento.

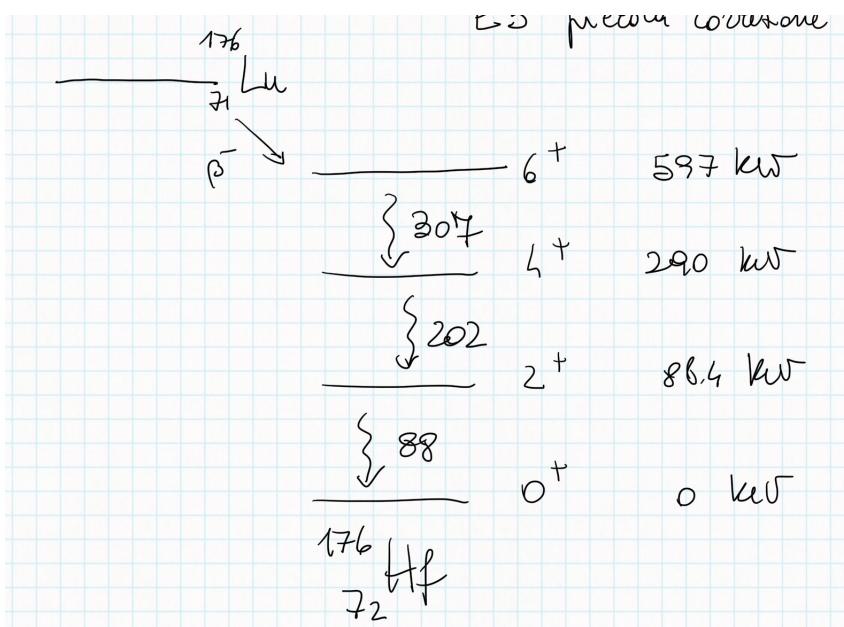


Figura III.11: Schema delle bande rotazionali coinvolte nel decadimento.

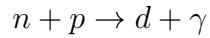
Guardiamo le stime di Weisskopf:

$$\begin{aligned} 1 \quad E2 &\simeq 1.9 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} & \tau_{1/2} &\simeq 3.6 \cdot 10^{-9} \text{ s} \\ 2 \quad E2 &\simeq 2.4 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} & \tau_{1/2} &\simeq 2.9 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ 3 \quad E2 &\simeq 3.8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} & \tau_{1/2} &\simeq 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

Poiché i decadimenti 1 e 2 sono molto più veloci del decadimento 3 li osserverò come fondo di quest'ultimo (in un esperimento che ha come interesse lo studio del decadimento 3). Tuttavia, il risultato sperimentale del decadimento 3 $\tau_{1/2}^{oss} \simeq 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ non è assolutamente compatibile con quanto atteso; ciò è dovuto principalmente al fatto della asimmetria del nucleo, come già avevamo accennato: le stime di Weisskopf non sono precise per nuclei particolarmente deformati (come in questo caso).

2.5 Stato di scattering

Vogliamo in questa trattazione studiare J , quindi non ci interessa che le particelle coinvolte siano nuclei o meno. Prendiamo lo stato di scattering:



Possiamo sempre definire lo stato iniziale come un autostato del momento J ed espanderlo in onde parziali ψ_{np} . Allora avremo $\ell = 0, 1, 2, \dots$, ma dal momento che lo stato è di scattering (basse energie) ci interessa solo $\ell = 0$; per quanto riguarda lo spin avremo $S = 0, 1$, tuttavia poiché i coefficienti di Clebsch-Gordan della transizione ${}^3S_1 \rightarrow {}^3S_1$ sono trascurabili rispetto a quelli della transizione ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$ avremo che rimarrà⁶³ solo $S = 0$.

Dunque, abbiamo ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$ con $J = 1$ e $\Delta\pi = 0$ e il termine dominante sarà $M1$.

Tuttavia, approfondiremo questo studio nella sezione 5-*La prima reazione*.

⁶³Il pezzo di corrente di magnetizzazione in questo caso è rilevante ($k \rightarrow 0$).

Capitolo IV

Big Bang Nucleosynthesis

In questo capitolo trattiamo le basi della teoria della *Big Bang Nucleosynthesis* e le reazioni nucleari da essa previste, con particolare attenzione allo studio *ab-initio* della reazione $p + n$. Il capitolo copre le lezioni 11/03/2021, 15/03/2021, 17/03/2021 e 18/03/2021.

Astronomical Observations Prima di passare allo studio delle reazioni nucleari che interessano la nucleosintesi primordiale e stellare, si riportano alcune evidenze di carattere astronomico.

- La Via Lattea è una galassia a spirale di diametro ca. 30 kpc¹ e spessore 1 kpc. È composta da $2 \cdot 10^{11}$ stelle, polveri e gas. Il Sole è situato a circa 8.5 kpc dal centro galattico, che consiste in un buco nero supermassiccio² chiamato Sgr A*. La nostra Galassia insieme alla galassia di Andromeda e una ventina di altre galassie nane forma il Gruppo Locale; questo è legato (gravitazionalmente) ad altri gruppi con cui forma il Superammasso della Vergine per un totale di quasi 10^{10} galassie che occupano circa il 5% dell'Universo.

Le masse in gioco sono:

$$M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad \rho_{\odot} \sim \rho_{\text{H}_2\text{O}} \quad M_{MW} > 2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$$

come abbiamo detto, non sono presenti solo stelle nella Via Lattea, ma anche mezzo e materia oscura. Per quanto riguarda il gas, questo ha una densità che varia da 10^9 atomi/m³ vicino al sistema solare fino a circa 10^5 altrove e contiene principalmente H ed He con tracce di molecole.

- Dall'analisi spettrale si ottengono informazioni sulla temperatura e la composizione chimica.
- La luminosità: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{sup}^4$ dove $\sigma \equiv 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann; per cui:

$$\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

Da questa relazione è possibile costruire un diagramma temperatura-luminosità detto diagramma Hertzsprung-Russell in Figura IV.1. In questo grafico si osserva che le stelle in *main sequence* si collocano quasi su una retta. Le linee parallele di colore grigio corrispondono a le linee di isoraggio.

¹Le misure sono riportate in *parsec*; ricordiamo che:

$$1 \text{ pc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.3 \text{ ly}$$

²Se non fosse per il mezzo interstellare avrebbe una luminosità apparente pari a quella del Sole.

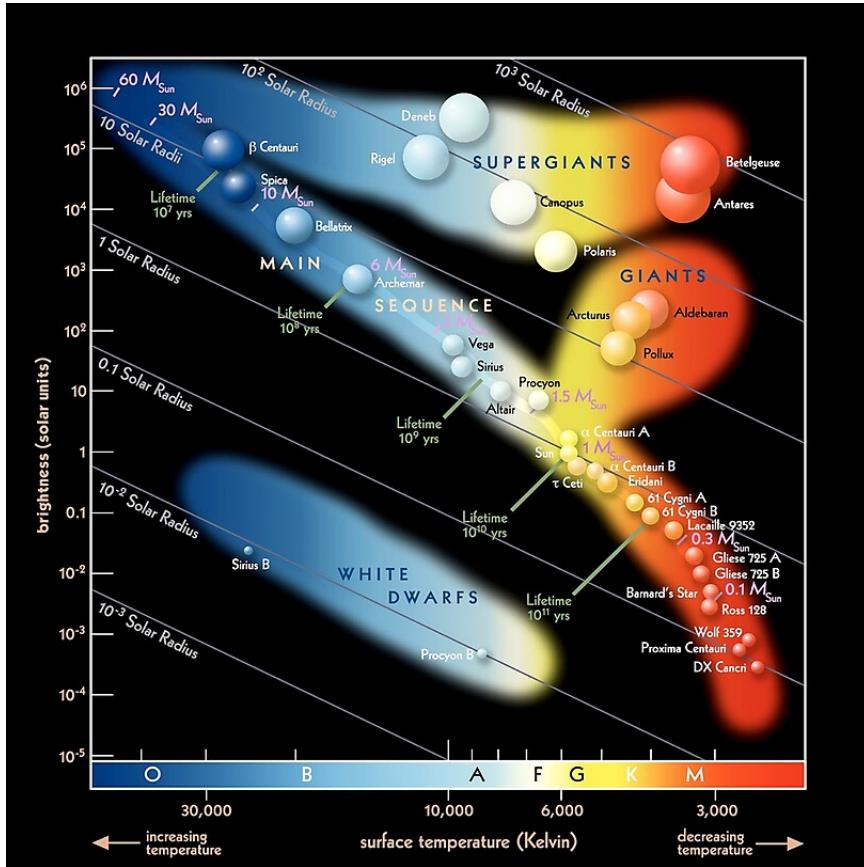


Figura IV.1: Diagramma di Hertzsprung-Russell

- Nel 1930 Hubble si rende conto che le galassie sono uniformemente distribuite nel cielo³ e che si stanno allontanando. L'evidenza di tale fenomeno di deriva si evince dall'effetto Doppler sulle righe spettrali di queste galassie, ovvero uno spostamento verso "il rosso" (lunghezze d'onda maggiori); si definisce allora il parametro di *redshift*:

$$z \equiv \frac{\lambda(v) - \lambda(0)}{\lambda(0)} \simeq \frac{v}{c}$$

con $v \ll c$. Le osservazioni mostrano una proporzionalità diretta tra z e la distanza d dell'oggetto secondo una costante detta costante di Hubble H . Sul valore di questa costante c'è tensione, riportiamo quello ottenuto dalla misura tramite la scala delle distanze: $H = 72 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \simeq 2.3 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Ipotizzando che il rate di espansione dell'universo non cambi nel tempo, H^{-1} dà una stima dell'età $t \sim 12 \cdot 10^9 \text{ y}$.

- Nasce la teoria del *Big Bang*. Secondo questa teoria, materia e radiazione erano inizialmente accoppiate fino a un tempo in cui la materia barionica ha ricombinato (universo neutro) e si è disaccoppiata. Da quel momento in poi la radiazione non ha più interagito con la materia⁴ e infatti si osserva un fondo di radiazione cosmica detto *Cosmic Microwave Background* (CMB), ancora oggi molto studiato. La teoria prevedeva⁵ una $\lambda \simeq 7.5 \text{ cm}$ (da cui il nome *microwave*), che per un corpo nero corrisponde a $T \simeq 2.7 \text{ K}$, e fu osservato nel 1965 da Penzias e Wilson.

³Da questo nascerà il Principio Cosmologico per cui l'Universo viene assunto uniforme e isotropo (su "grandi" scale).

⁴Si parla di scale cosmologiche. Inoltre il numero di fotoni interagenti dalla nascita dell'universo a oggi è trascurabile rispetto a quello del CMB.

⁵Questi valori dipendono fortemente dal modello.

- Per misurare H_0 (dove il pedice indica che la costante è misurata per il tempo attuale) si utilizzano principalmente 2 metodi: l'osservazione dell'espansione dell'Universo dagli spettri delle galassie lontane oppure lo studio statistico delle disomogeneità nel CMB. Nel primo caso, è necessario selezionare galassie per cui la velocità peculiare⁶ è trascurabile rispetto a quella di espansione e misurarne le distanze⁷; si ha così dalla legge di Hubble una misura di H_0 indipendente dal modello cosmologico.
- Nel metodo del CMB, invece, si osserva appunto lo spettro della radiazione di fondo: dal momento che questa era accoppiata alla materia (barionica) le fluttuazioni in temperatura ($\sim 10^{-5}$) rispecchiano quelle in densità dei barioni; all'epoca della ricombinazione queste oscillazioni si sono "congelate" ed è quindi possibile studiare il collasso delle strutture primordiali, Figura IV.2. In particolare, l'altezza e la distanza dei così detti *acoustic peaks* (i massimi locali della curva) permettono di vincolare alcuni parametri cosmologici tra cui $\Omega_{bary} = \rho_{bary}/\rho_c$, dove $\rho_c \equiv 3H_0^2/8\pi G$ la densità critica⁸ e quindi stimare H_0 (misura fortemente *model dependent*). Come mostrato dal grafico in Figura IV.3 vi è tensione tra le due misure e ancora oggi si sta cercando una risposta.

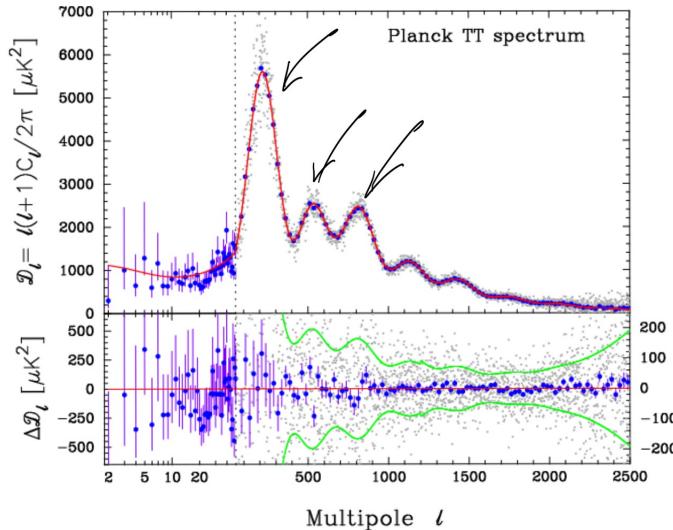


Figura IV.2: Analisi spettrale della sovradensità nel CMB. Si possono osservare i picchi di cui parlavamo.

1 Introduzione alla teoria

Il *Big Bang model* comporta necessariamente la formulazione di una teoria sulla nucleosintesi primordiale, detta ***Big Bang Nucleosynthesis Theory (BBN)***. Questa fu trattata per la prima volta in un articolo del 1940 degli autori Gamow, Adler e Bethe⁹.

Il problema di Y_P Prima di passare allo studio delle reazioni di interesse, mostriamo come alcuni risultati confermano la necessità di una nucleosintesi primordiale.

⁶Si tratta della velocità di avvicinamento dovuta alle interazioni gravitazionali tra galassie.

⁷Poiché la scala è dell'ordine delle centinaia di Mpc è necessario costruire appunto una scala delle distanze attraverso quelle che vengono chiamate *candele campione*, oggetti con poca astrofisica, ben identificabili.

⁸La densità critica è la densità che avrebbe l'universo se fosse piatto. La definizione deriva dall'equazione di Friedmann.

⁹Un aneddoto divertente: Gamow (che è lo stesso Gamow del decadimento di Gamow-Teller) insistette per avere la partecipazione anche di Bethe, per poter mettere nell'articolo i nomi "Adler, Bethe, Gamow" che ricordavano α , β , γ , nome con cui ormai viene ricordato l'articolo.

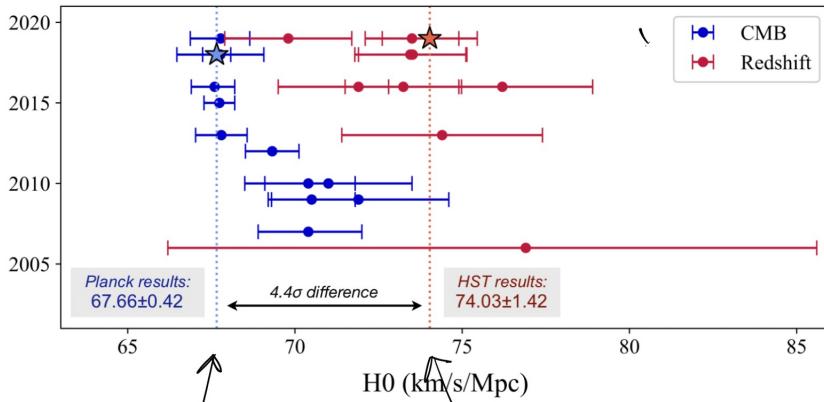


Figura IV.3: Tensione per le misure di H_0 . Si osserva che nel tempo i valori si sono allontanati.

Se assumiamo che $M_{MW} \sim 10^{11} M_\odot$ in stelle e $L_{MW} \sim 2 \cdot 10^{10} L_\odot$ allora l'energia totale liberata in un tempo H_0^{-1} sarà $E_{tot} \simeq L_{MW}/H_0 \sim 2.4 \cdot 10^{54}$ J; escludendo la nucleosintesi primordiale l'unica reazione possibile è $4p \rightarrow {}^4\text{He}$, allora $E_{{}^4\text{He}} = 28 \text{ MeV} = 4.5 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Se tutta la massa stellare bruciasse allora si libererebbe un'energia pari a $E_{burn} \equiv E_{{}^4\text{He}} \cdot M_{MW}/4m_p \sim 1.3 \cdot 10^{56} \text{ J}$, da cui otteniamo $E_{tot}/E_{burn} \sim 2\%$ che corrisponde alla percentuale in massa di ${}^4\text{He}$ “primordiale” Y_P . Tuttavia, sperimentalmente si osserva che $Y_P \simeq 25\%$, dunque le reazioni nucleari nei core stellari non sono sufficienti per spiegare questa abbondanza ed è necessario introdurre un altro meccanismo (la nucleosintesi primordiale, appunto).

A grandi linee Proviamo a correggere il risultato precedente con argomentazioni qualitative. Ovviamente per la nostra trattazione non siamo interessati al *Big Bang*, ma fisseremo come origine dei tempi l’“attimo prima” che protoni e neutroni si formino:

- a $t = 0$ s abbiamo quindi una sfera molto densa e molto calda $T > 10^{13} \text{ K}$.
- a $t \sim 0.01$ s domina ancora la radiazione e non riescono a formarsi protoni e neutroni perché $T \sim 10^{13} \text{ K}$ quindi $E = kT \sim 1 \text{ GeV}$, quindi anche se ci fossero p e n verrebbero fotodisintegriti.
- a $t \sim 0.1$ s la temperatura scende a $T \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ K}$ per cui $E \simeq 3 \text{ MeV}$ e si formano finalmente protoni e neutroni.

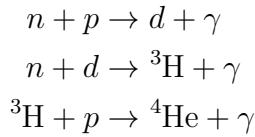
A questo punto è fondamentale ricordare che la massa del neutrone è maggiore di quella del protone $\Delta m = 1.3 \text{ MeV}$ per cui avremo al momento del *Freeze-out* dall’equazione di Saha:

$$\frac{N_n}{N_p} \propto \exp\left(-\frac{\Delta m}{kT}\right) \simeq 0.22 \simeq \frac{1}{5}$$

per cui per 1000 protoni abbiamo 220 neutroni circa. Ancora non si può formare il deutone.

- a $t \sim 180$ s la temperatura raggiunge $T \sim 10^9 \text{ K}$ a cui corrisponde $E \sim 0.09 \text{ MeV}$ e quindi si possono formare i nuclei. Tuttavia, è necessario ricordare che il neutrone decade con una legge del tipo $N_n(t) = N_n^0 \exp(-t/\tau_n)$ con $\tau_n \sim 886 \text{ s}$; nell’esempio da noi fatto ($N_n^0 = 220$) avremo $N_n \simeq 180$ e $N_p = N_p^0 + (N_n^0 - N_n) = 1040$.

Allora possiamo ipotizzare che qualitativamente¹⁰ avremo queste relazioni:



Ci chiediamo quanto valga Y_P ¹¹:

$$\begin{aligned} Y_P &= \frac{N_{\text{He}} m_{\text{He}}}{N_{\text{He}} m_{\text{He}} + N_{p,\text{rimasto}} m_p} \leftarrow \text{Mass fraction} \\ &= \frac{4N_{\text{He}}}{N_{p,\text{rimasto}} + 4N_{\text{He}}} \\ &= \frac{4 \frac{N_n}{2}}{(N_p - N_n) + 4 \frac{N_n}{2}} = \\ &\simeq 0.29 \end{aligned}$$

che si avvicina molto al 25% cercato.

Le basi della BBN Innanzitutto elenchiamo gli “ingredienti” essenziali della teoria:

- Un network di reazioni.
- Il numero di neutroni e protoni di partenza, che sarà determinato, come abbiamo accennato, dalla vita media del neutrone, misura sulla quale tuttora è presente una certa incertezza (fornitaci dal PDG¹²).
- Il rapporto tra barioni e fotoni detto ***entropy factor*** η ¹³. Questo parametro ci dice se è favorita la ricombinazione (η grande) o la fotodisintegrazione della materia.
- Il fattore η è legato alla ***barion density*** secondo $\rho_B = 6.8 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3} \cdot \eta$. Spesso però al posto di questa si tende a lavorare con la ***barion fraction of critical mass density***, definita¹⁴ come $\Omega_B h^2 = 3.6 \cdot 10^7 \cdot \eta$.

Come “output” da questi avremo le abbondanze degli elementi primordiali (ovvero H, He e metalli leggeri). Passiamo allora alla trattazione di questi “input”.

2 Network di reazioni

In Figura IV.4 riportiamo le reazioni coinvolte nella nucleosintesi primordiale; nel seguito con i numeri puntati tra parentesi (per esempio (1.), (2.)) faremo riferimento alle reazione riportate in questa figura.

¹⁰In realtà esiste un *full network* di relazioni.

¹¹Si usa $m_{{}^3\text{He}} \simeq 4m_p$ e $m_n \sim m_p$.

¹²PDG = Particle Data Group.

¹³È definito come rapporto tra la densità barionica e quella dei fotoni n_b/n_γ .

¹⁴Dove h è un parametro adimensionale per la costante di Hubble, definito come $h = H_0/100[\text{km/s Mpc}]$.

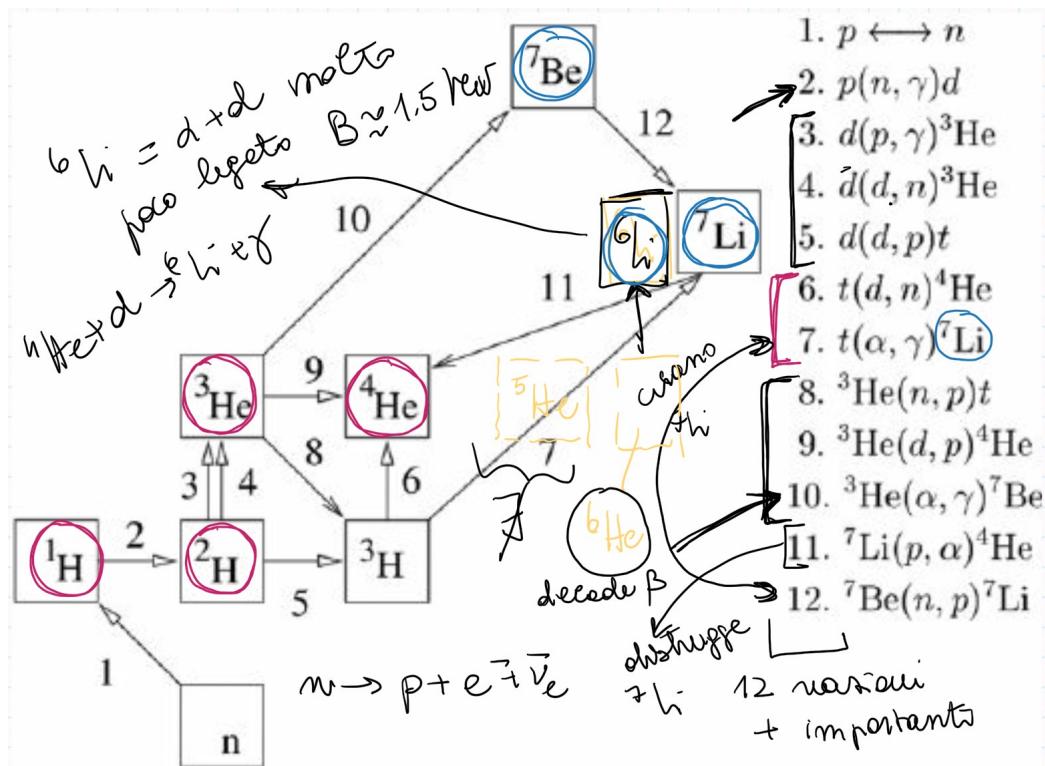


Figura IV.4: Sono riportate le 12 reazioni più importanti. Gli elementi segnati in rosa sono i primordiali più abbondanti.

Criteri qualitativi di reazione Prima di procedere ricordiamo alcune regole qualitative per capire quale tra i vari rami di una reazione è favorito rispetto agli altri:

- I. $\sigma_{\text{forte}} \gg \sigma_{\text{EM}} \gg \sigma_{\text{debole}}$. Per riconoscere a quale tipo di interazione appartiene la reazione è sufficiente osservare i prodotti: se compaiono neutrini l'interazione è debole, se invece il numero di protoni e neutroni è conservato abbiamo interazione forte e se si ha anche produzione di un fotone allora si ha interazione elettromagnetica.
- II. L'abbondanza dei reagenti è discriminante.
- III. La barriera Coulombiana da superare per avere la reazione è un fattore che influisce fortemente sulla probabilità di reazione.

2.1 La nucleosintesi primordiale

La prima reazione che abbiamo è il decadimento del neutrone¹⁵ (1.); successivamente segue una cattura radiativa $p-n$ (2.) e a questo punto abbiamo 3 possibili reazioni di distruzione del deuterio: secondo il I criterio la (4.) e la (5.) dovrebbero contare maggiormente rispetto alla (3.), ma poiché l'abbondanza di p è superiore a quella di d le probabilità delle tre reazioni sono dello stesso ordine¹⁶. Queste reazioni non sono sufficienti a consumare tutto il deuterio, che potrà interagire con il trizio t secondo la (6.); il trizio non è un elemento primordiale perché decade¹⁷, ma essendo un decadimento debole è molto probabile che interagisca nuovamente con α (7.) dando ${}^7\text{Li}$ ¹⁸. Per quanto riguarda ${}^3\text{He}$, invece, questo è stabile e ha varie reazioni di

¹⁵Si tratta dell'unica reazione di interazione debole.

¹⁶Si capisce allora come mai non si ha $d(d, \gamma){}^4\text{He}$ (poca abbondanza e interazione EM).

¹⁷A titolo informativo: $t \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$.

¹⁸Vedremo che la presenza di questo ${}^7\text{Li}$ sarà una questione delicata da trattare.

distruzione¹⁹, tra cui la più importante se ancora vi sono neutroni è la (8.), alla quale segue (nonostante la poca abbondanza di deuterio) la (9.) e quando si raggiunge un certo numero di ^3He e α si ha anche la (10.); ora il berillio che si è formato da questo viene distrutto praticamente tutto in ^7Li (12.).

Fermiamoci un attimo: come mai non troviamo reazioni per ^5He , ^6He e ^6Li ? Allora il ^5He non è uno stato legato, ma ^6He sì, tuttavia questo decade β molto velocemente (è poco legato) in ^6Li . Quest'ultimo si ottiene anche da $\alpha + d$ con l'emissione di un fotone e il motivo per cui la sua abbondanza non è significativa è dovuto al fatto che è poco legato, per cui si rompe facilmente. Abbiamo ancora un problema da risolvere, ovvero che la carta dei nuclei presenta un *gap* per $A = 8$: il ^8B e il ^8Li decadono β e il ^8Be decade α . Dunque, la BBN si ferma qui²⁰ con p , ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li (poco) e ^7Be (pochissimo).

Confronto con le osservazioni A questo punto per studiare la BBN è necessario prendere i valori delle varie sezioni d'urto delle reazioni coinvolte e vederne l'evoluzione temporale, come mostrato in Figura IV.5, dove è riportata la *mass fraction* dei principali elementi predetta dal modello²¹. Dunque, dalle misure di queste quantità è possibile stimare la bontà della teoria.

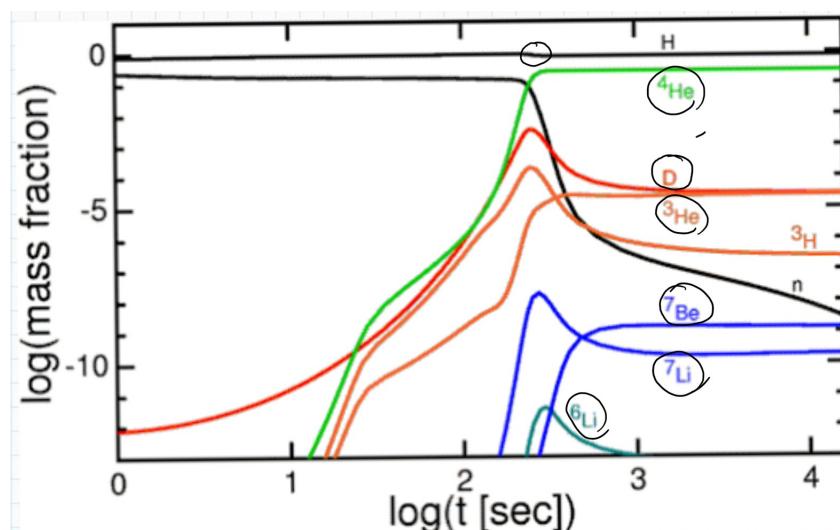


Figura IV.5: Andamento nel tempo della *mass fraction*, ovvero dell'abbondanza di un elemento sull'abbondanza di H. L'abbondanza di H ha un leggero scalino e quello segna l'inizio della BBN; si vede che n decade; il ^3H è indicato, ma decade; vi è un errore per l'andamento del ^6Li , dovrebbe essere più alto.

Riportiamo allora le osservazioni in Figura IV.6. Da queste misure è possibile stimare $\Omega_B h^2$ e alla fine degli anni '90 si ebbe la prima evidenza che la densità di materia dell'Universo fosse differente da quella attesa (a causa dell'assenza nel conto del contributo dovuto alla materia oscura).

¹⁹Esisterebbe anche $^3\text{He}(n, \gamma)^4\text{He}$, ma la (8.) (data l'abbondanza e la natura dell'interazione) è molto più importante.

²⁰In realtà esistono reazioni per saltare da $A = 5$ ad $A = 7$, ma sono comunque trascurabili rispetto a tutti gli altri processi.

²¹Una piccola nota sul berillio: non è facile da misurare, quindi spesso quello che si misura è il rapporto d/H o $^3\text{He}/\text{H}$.

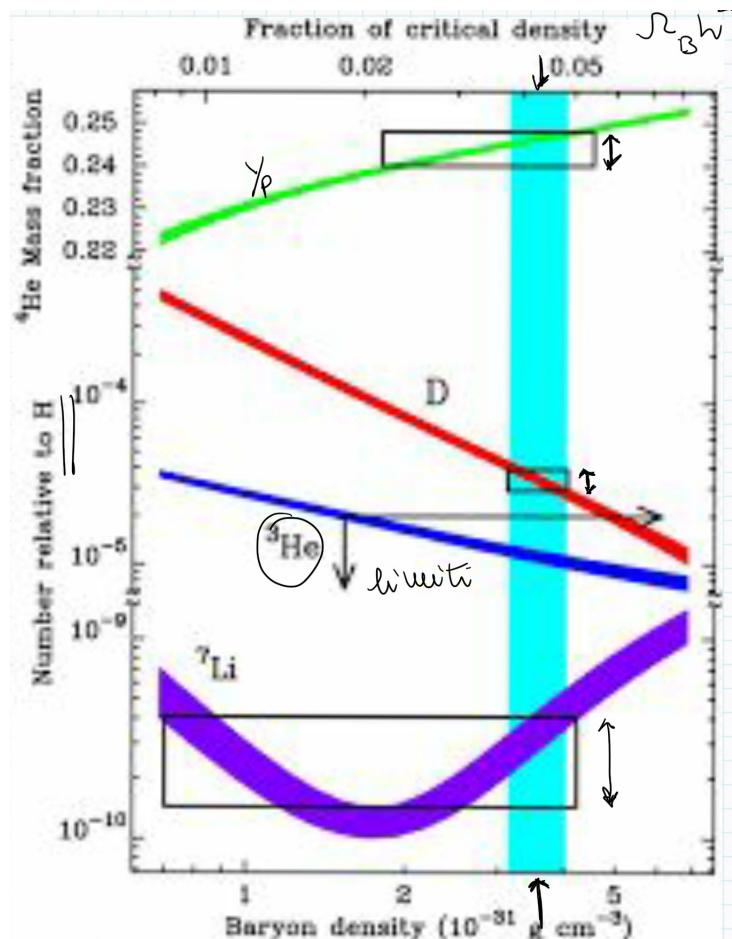


Figura IV.6: Le bande degli andamenti sono dovute alle incertezze. Coi rettangoli si riportano le misure. Il range di interesse è indicato dalla striscia celeste. Per il trizio ci sono solo limiti superiori e inferiori.

Misura delle abbondanze primordiali Partiamo dalla misura per ^4He . I primi problemi sorgono dal fatto che le stelle ne hanno aumentato la concentrazione, dunque si fanno misure del rapporto $^4\text{He}/\text{H}$ in regioni in cui è avvenuta poca o quasi nulla evoluzione stellare, ovvero galassie *metal-poor*. Riportiamo in Figura IV.7 un esempio. A oggi si ha un valore di circa $Y_p \sim 0.25$.

La misura del deuterio è anche più problematica: esso infatti è “fragile”, per cui vanno evitate le stelle e gli oggetti densi, anzi si fanno osservazioni nel mezzo interstellare.

Il 1973 il satellite Copernico riuscì a dare dei limiti (superiori e inferiori), ma non a raccogliere dei veri e propri dati. Successivamente, nel 1998, Tytler e Burles ebbero un’idea, ovvero quella di misurare d/H nelle *hydrogen clouds* ad alto *redshift* ($z > 3$, oggetti molto vecchi): si osservano le linee di assorbimento della Ly α in *quasi-stellar object* con metallicità $Z \sim 10^{-2} \div 10^{-3} Z_\odot$ (per cui ci aspettiamo che l’abbondanza sia quella primordiale). A oggi il valore più accurato riporta $d/\text{H} = (2.527 \pm 0.030) \cdot 10^{-5}$; questa accuratezza deriva dal fatto che l’abbondanza di deuterio è particolarmente sensibile alla densità di barioni.

Per quanto riguarda ^3He , anche questo è molto fragile e non dev’essere cercato nel mezzo interstellare, tuttavia la misura è complicata.

Il ^7Li , invece, viene ricercato nelle atmosfere stellari di stelle di popolazione II, ovvero *low-metallicity stars* (che si possono osservare nell’alone della nostra galassia). In Figura IV.8 riportiamo i dati sperimentali per il rapporto $^7\text{Li}/\text{H}$: notiamo dei dati (sulla destra) molto “diffusi” che però non sono di interesse poiché si riferiscono a metallicità alte; per quanto riguarda gli altri dati (sulla sinistra) vi è tuttora ancora discussione riguardo il valore di Fe/H

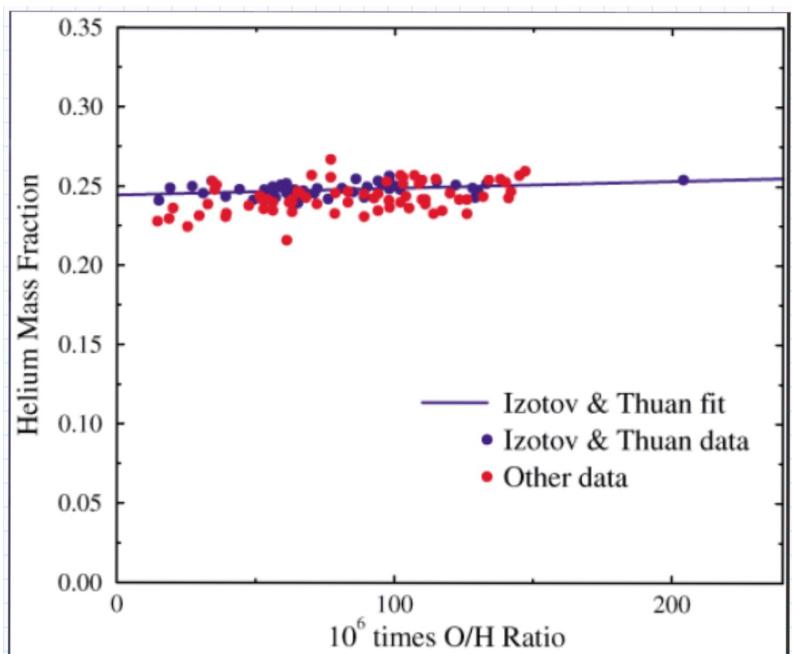


Figura IV.7: Risultati sperimentali per stelle con metallicità differente.

oltre il quale fermarsi per il fit. Negli ultimi tempi queste misure sono diventate più accurate e hanno portato a un valore stimato di $\Omega_B h^2$ diverso da quello ottenuto dal (${}^4\text{He}, d$), dando vita a quello che oggi viene definito Li-*problem* (o *puzzle*) della BBN.

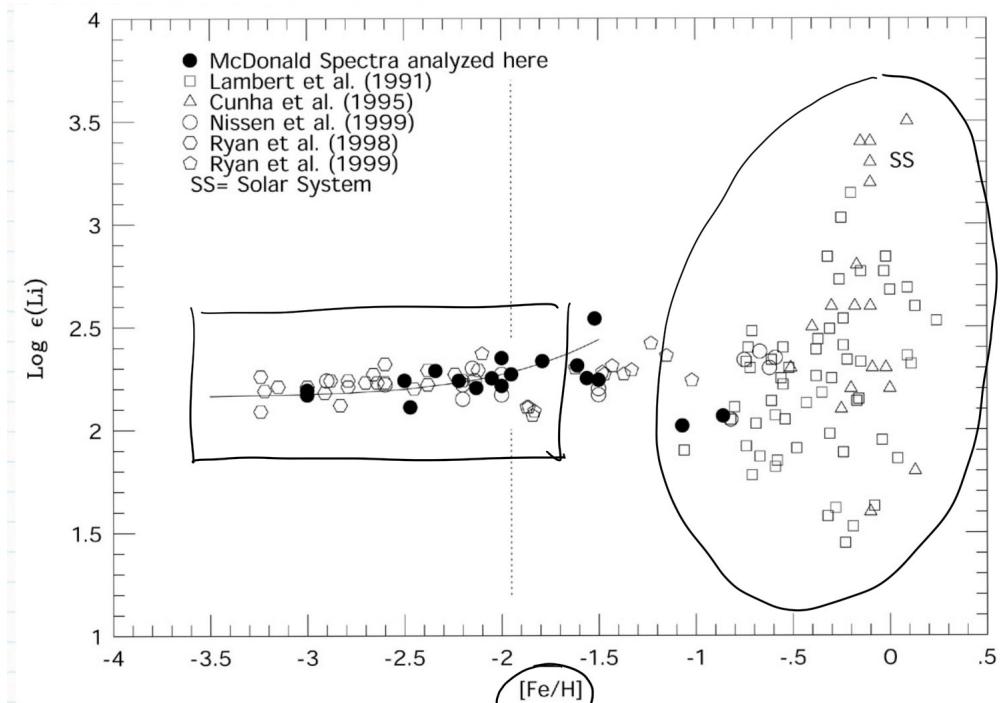


Figura IV.8: *Split Plateau* per il Li. Con $\epsilon(\text{Li})$ si indica la *mass fraction* del litio.

3 La BBN e i neutrini

Alla fine degli anni '90 la teoria della BBN era ormai supportata dall'accordo con evidenze sperimentali nell'abbondanza di 3 degli elementi più presenti nell'universo, acquisendo così un potere predittivo. Fu quindi impiegata per stimare il valore atteso per il numero di neutrini cosmici o per meglio dire la *radiation density* N_ν (l'osservabile che effettivamente si misura). All'interno del modello un aumento delle specie di neutrini comporterebbe un aumento nella densità di energia dell'universo, ovvero una crescita del rate di espansione e di conseguenza un anticipo del *Freeze-out*: $H^2 \propto N_\nu T^4$, dunque se N_ν è maggiore allora T è minore. Se riprendiamo l'esempio che avevamo fatto nel paragrafo “**A grandi linee**” a pg. 46 per il numero di neutroni al *Freeze-out* si ha in questo caso:

$$N_n = N_0 e^{-t/\tau} = 220 e^{-100/886} \simeq 196$$

Abbiamo quindi un maggior numero di neutroni e questo comporta una densità di ${}^4\text{He}$ più alta. Riportiamo in Figura IV.9 l'andamento della *mass fraction* per l'elio al variare della N_ν .

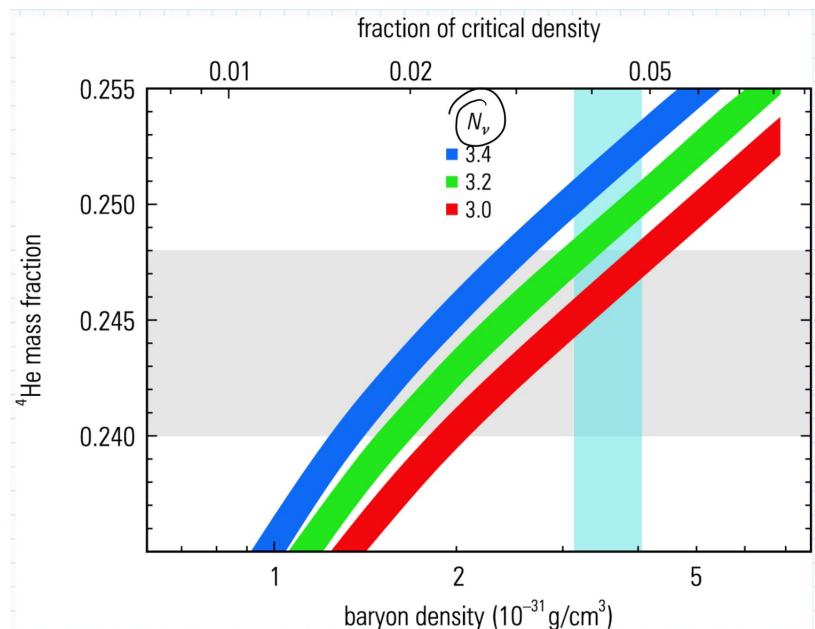


Figura IV.9: La banda grigia rappresenta i dati sperimentali. Data la densità dei barioni si evince che gli andamenti per $N_\nu = 3.4$ e 3.2 vadano esclusi.

4 La BBN oggi

La teoria della BBN oggi si basa sul modello cosmologico standard ΛCDM^{22} .

Di recente $\Omega_B h^2$ è stato misurato dal CMB ed è quindi possibile fare delle stime sulle abbondanze: il d/H , per esempio, che è particolarmente sensibile al valore di Ω_B e a N_ν^{23} e per il

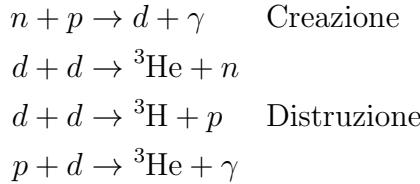
²²L'acronimo:

Λ sta per la costante cosmologica.

CDM sta per *Cold Dark Matter*.

²³Da qui in poi chiameremo N_ν con N_{eff} .

quale abbiamo una serie di reazioni che lo creano e lo distruggono²⁴:



Quello che si misura effettivamente è il **fattore astrofisico**²⁵ $S(E)$, che ha le dimensioni di una sezione d'urto per un'energia; si riportano i risultati sperimentali per l'ultima reazione di distruzione in Figura IV.10.

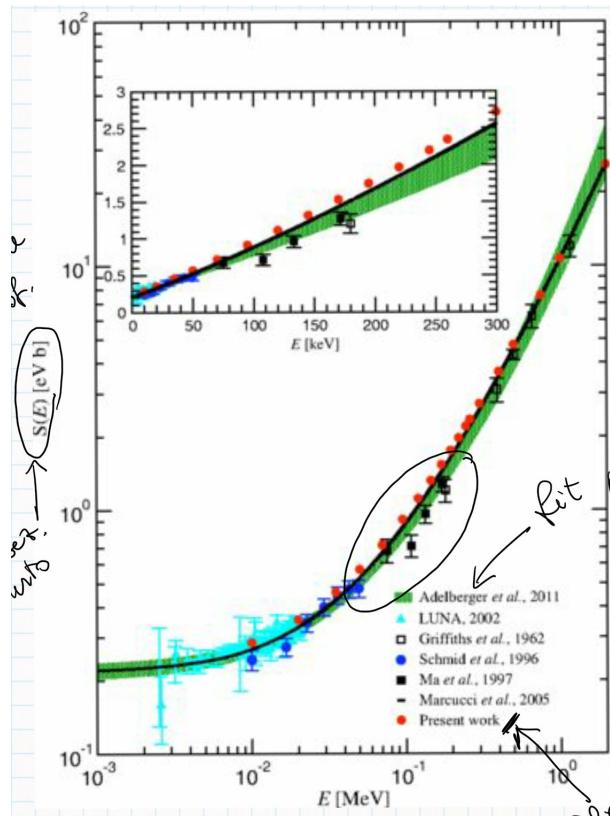


Figura IV.10: La parte cerchiata è il range di interesse per la BBN. La banda verde corrisponde a un fit polinomiale, i punti rossi ad alcuni calcoli teorici e i punti neri ai dati (che rimangono sotto a tutto).

Recentemente in Italia si sono fatte altre prese dati grazie all'esperimento LUNA²⁶, che ha raggiunto un'incertezza del 3%. Riportiamo i risultati in Figura IV.11. Rispetto al precedente, il rate di presa dati era molto maggiore e le misure molto più accurate, grazie un codice numerico detto *PArthenope*²⁷, che ritorna le funzioni di *likelihood* riportate in Figura IV.12²⁸.

Dato $\Omega_B h^2$ da Planck, è possibile predire $d/\text{H}_{\text{BBN}} = (2.52 \pm 0.03 \pm 0.06) \cdot 10^{-5}$ da confrontare con il valore Ω_B più probabile ottenuto attraverso l'algoritmo. Riportiamo in Figura IV.13 i risultati di LUNA, che hanno mostrato come non ci sia *nuova fisica* in questo campo: vi è un forte accordo tra il modello standard ΛCDM e la teoria della BBN.

²⁴Fino al 2020 l'ultima era la più incerta.

²⁵Si veda la sezione 3.1 - *Fattore Astrofisico* per la definizione

²⁶che discuteremo ampiamente nella sezione 1.1 - *LUNA*.

²⁷Per info: <http://parthenope.na.infn.it>.

²⁸La differenza tra il calcolo delle linee segnate come *Marcucci* è dovuta alle funzioni d'onda di scattering; si osserva che le misure del 2016 sono più accurate, tuttavia non se ne conosce il motivo.

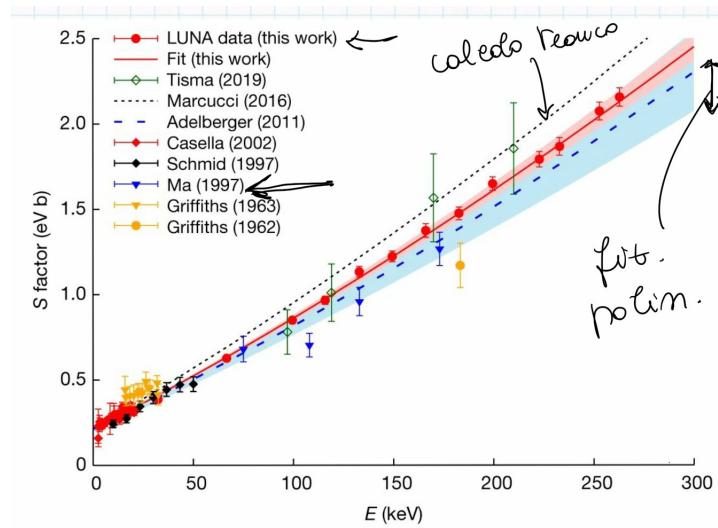


Figura IV.11: I dati blu sono quelli che nella figura precedente erano segnati in nero. Quelli rossi sono i nuovi dati, la banda celeste corrisponde al fit polinomiale e la linea tratteggiata è l’andamento teorico. I dati di Casella 2002 (basse energie) sono quelli di LUNA I, mentre i dati in rosso circolari sono quelli di LUNA II (vedi 1.1.2-*LUNA II*).

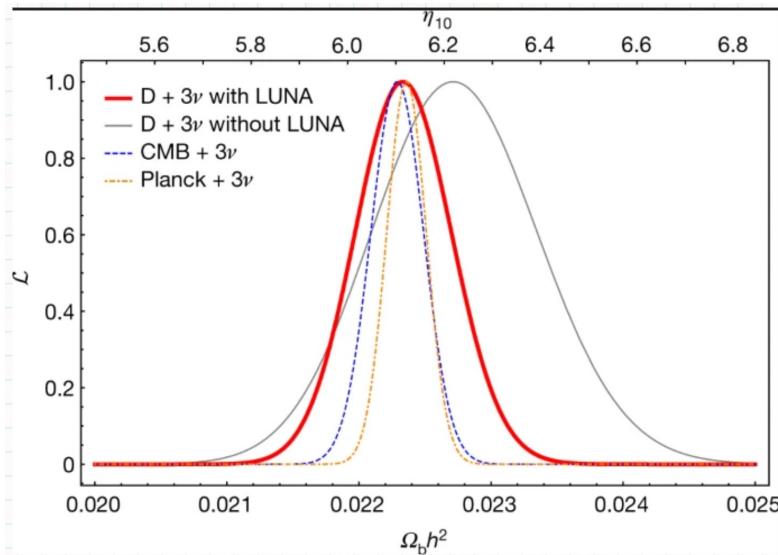


Figura IV.12: Risultati per i vari esperimenti ottenuti tramite *PArthENoPE*.

Rimane ancora in sospeso il Li-*problem*, ma le ipotesi più recenti sostengono che probabilmente sia dovuto a un errore nella misurazione dell’abbondanza primordiale del litio.

	$\Omega_b h^2$	δ (%)	N_{eff}
D + 3ν (without LUNA data)	0.02271 ± 0.00062	2.73	3.045
D + 3ν (with new LUNA data)	0.02233 ± 0.00036	1.61	3.045
CMB + 3ν	0.02230 ± 0.00021^a	0.94	3.045
Planck + 3ν	0.02236 ± 0.00015	0.67	3.045
(D + CMB)	0.02224 ± 0.00022	0.99	2.95 ± 0.22
(D + Y_p)	0.0221 ± 0.0006	2.71	$2.86^{+0.28}_{-0.27}$

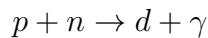
The first two lines show the results obtained from the likelihood analyses performed in this study, without and with the new D(p, γ) ^3He S factor obtained at LUNA and with N_{eff} fixed to its standard value^{23,24} of 3.045. The third and fourth lines show results obtained, respectively, using CMB data alone¹² (CMB + 3ν) and CMB data combined with the theoretical dependence of primordial ^4He on baryon density⁷ (Planck + 3ν). The last two lines correspond to cases in which both $\Omega_b h^2$ and N_{eff} are left as free parameters and the likelihood functions are constrained by either the deuterium abundance and a prior distribution on $\Omega_b h^2$, (D + CMB) case, or the observed and predicted abundances of both deuterium and helium, (D + Y_p) case (in both cases the predicted deuterium abundance takes into account our new LUNA results; see Methods for details).

^aQuoted in Fields et al.¹² as 0.022298 ± 0.000214 .

Figura IV.13: Risultati di LUNA. Nei casi delle ultime due righe è stata rilasciato il numero di neutrini, precedentemente fissato dall'abbondanza di elio.

5 La prima reazione

Dopo il decadimento del neutrone, la prima reazione che avviene (secondo la Figura IV.4) è:



Tra le reazioni del network questa è la più “semplice”, ovvero $A = 2$.

5.1 Cinematica

Studiamo allora la sezione d’urto di questa reazione:

$$d\sigma \stackrel{\text{Reg. d’Oro}}{=} \frac{\text{Rate di transizione}}{\text{Flusso incidente}} = \frac{\lambda}{v_{\text{rel}}}$$

Concentriamoci sulla probabilità di transizione $W_{i \rightarrow f}$, mettendoci nel sistema del centro di massa²⁹.

$$W_{i \rightarrow f} = |V_{i \rightarrow f}|^2 dn \quad \text{con } dn = \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_d}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_d + \vec{q}) \Rightarrow \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$$

dove $V_{i \rightarrow f}$ è l’elemento di matrice di transizione, T è il tempo di interazione e dn è l’elemento infinitesimo di spazio delle fasi (in cui abbiamo risolto per la δ). Dalla teoria perturbativa al primo ordine³⁰:

$$\begin{aligned} V_{i \rightarrow f} &= -i \int_0^T \langle f | V(t) | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t} dt \quad \text{dove } V(t) = -e \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) \\ \langle f | V(t) | i \rangle &= -e \int d^3 x \langle \gamma | \vec{A}(\vec{x}) | 0 \rangle \cdot \langle d(\vec{P}_d, \sigma_d) | \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle = \\ &= -e \int \frac{\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda)}{\sqrt{2q}} \cdot \underbrace{\underbrace{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \langle d | \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle d^3 x}_{\text{Definiamo questo } \vec{J}^+(\vec{q})}}_{\text{Definiamo questo } \vec{J}^+(\vec{q})} = \\ &= -\frac{e}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \end{aligned}$$

²⁹Usiamo la solita convenzione $c = \hbar = 1$, la notazione \vec{q} per l’impulso del fotone e \vec{P}_d per quello del deuterio e assumiamo volumi unitari.

³⁰Dove T è un tempo molto maggiore rispetto a quelli di evoluzione del sistema.

dove³¹ abbiamo assunto $\omega = E = q$. Per cui sostituendo:

$$\begin{aligned} V_{i \rightarrow f} &= \frac{ie}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t} = \\ &= \frac{ie}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \frac{2 \sin(T(E_f - E_i)/2)}{(E_f - E_i)} e^{i(E_f - E_i)T/2} \\ \frac{|V_{f \rightarrow i}|^2}{T} &= \frac{e^2}{2q} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 2\pi \delta(E_f - E_i) \end{aligned}$$

La δ rappresenta la conservazione dell'energia³².

Possiamo allora scrivere la sezione d'urto differenziale:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^2}{2} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 q dq \frac{d\Omega_{\hat{q}}}{(2\pi)^2} \delta(E_f - E_i) \frac{1}{v_{rel}} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{8\pi^2} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 q dq \delta(E_p + E_n - m_d - \frac{q^2}{2m_d} - q) \frac{1}{v_{rel}} \end{aligned}$$

Poiché vogliamo che la sezione d'urto sia mediata su tutte le polarizzazioni sommiamo su tutte quelle finali $\sum_{\lambda=\pm 1, \sigma_d=\pm 1,0}$ e mediamo su quelle iniziali $\frac{1}{4} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}}$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{8\pi v_{rel}} \sum_{\lambda=\pm 1, s_d=\pm 1,0} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}} \int q dq |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 \frac{\delta(q - \bar{q})}{1 + \frac{\bar{q}}{m_d}} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{8\pi v_{rel}} \sum_{\lambda=\pm 1, s_d=\pm 1,0} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 \frac{\bar{q}}{1 + \frac{\bar{q}}{m_d}} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà della δ ³³, per cui $\bar{q} = m_d \left(-1 + \sqrt{1 + 2\Delta E/m_d} \right)$ con $\Delta E = E_p + E_n - m_d \stackrel{\text{CM}}{=} m_n + m_p - m_d + T_{rel}$. Notiamo che questa espressione è simile a quella del decadimento γ , infatti questo formalismo³⁴ vale per ogni decadimento del tipo $a + b \rightarrow c + \gamma$. Notiamo che $\sigma \propto 1/v_{rel} \sim 1/\sqrt{T_{rel}}$ ed è quindi l'energia cinetica relativa che fa da discriminante per far avvenire la reazione; questo andamento si ritrova in generale a basse energie per $n + a$.

5.2 Funzioni d'onda

Finora abbiamo trattato solo la cinematica della reazione, per continuare è necessario sviluppare le funzioni d'onda³⁵.

$$\begin{aligned} &\left| \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \right|^2 = \\ &= \left| \langle d | \int d^3x e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle \right|^2 \equiv \\ &\equiv \left| \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \langle \psi_{1s_d} | \vec{J}_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(p) \rangle \right|^2 \\ \vec{J}_\lambda(\vec{q}) &\equiv \int d^3x e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \vec{J}(\vec{x}) \end{aligned}$$

³¹Si è fatto uso di un abuso di notazione esplicitando l'integrale racchiuso dal braket. Spesso faremo questo abuso per esplicitare su quale variabile integriamo.

³²La funzione $\sin^2(xT)/x^2 \rightarrow \pi T \delta(x)$ per $T \rightarrow \infty$; dunque $T \gg \hbar/(E_f - E_i)$ come avevamo assunto.
³³

$$\delta(f(q)) = \sum_{i=0}^N \frac{\delta(q - \bar{q}_i)}{|f'(\bar{q}_i)|}$$

con \bar{q}_i zeri della funzione f .

³⁴Ovvero potremo sempre scrivere $d\sigma/d\Omega_{\hat{q}} \propto 1/(8\pi v_{rel}) \sum \sum | \dots |^2 \bar{q}/(1 + \bar{q}/m_c)$.

³⁵Da qui in poi, ovviamente, i risultati trovati non varranno per ogni $a + b \rightarrow c + \gamma$.

per $\psi_{s_p s_n}(\vec{p})$ ci aspetteremo dei multipoli come avevamo visto nel decadimento γ . Per $\hat{\varepsilon}$ consideriamo polarizzazione circolare:

$$\hat{\varepsilon}(\lambda) = \mp \frac{\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y}{\sqrt{2}} \quad \text{con } \vec{q}/\hat{z}$$

Dato che il momento \vec{J} per gli stati iniziali non è ben definito non possiamo usare immediatamente l'espansione in multipoli, per cui prima sviluppiamo le funzioni d'onda in onde parziali³⁶:

$$\begin{aligned} \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) &= 4\pi \sum_{S, S_z} \left\langle \frac{1}{2} s_n, \frac{1}{2} s_p | S S_z \right\rangle \sum_{L, L_z, \Lambda, \Lambda_z} \left\langle SS_z, LL_z | \Lambda \Lambda_z \right\rangle i^L \mathcal{Y}_{LL_z}^*(\hat{p}) \psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)} \\ \left\langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \right\rangle &= 4\pi (\dots) \left\langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)} \right\rangle \end{aligned}$$

$\psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)}$ ha Λ ben definito, quindi è un'ottima candidata per l'espansione in multipoli. Poiché le energie sono basse³⁷, possiamo allora considerare solo 1S_0 ($S = L = \Lambda = 0$), ovvero le onde sferiche:

$$\begin{aligned} \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) &= 4\pi \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}_{\text{Arm. sfer.}} \psi_{np}({}^1S_0) \\ \left\langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \right\rangle &\equiv \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) \\ j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) &\equiv \left\langle \psi_{1s_d} | \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}(\vec{x}) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle = \\ &= -\sqrt{2\pi} \sum_{\Lambda' \geq 1} (-i)^{\Lambda'} \sqrt{2\Lambda' + 1} \left\langle \psi_{1s_d} | E_{\Lambda'-\lambda}(q) + \lambda M_{\Lambda'-\lambda}(q) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle \end{aligned}$$

dove abbiamo prima definito $j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q})$ e poi sviluppato in multipoli come nel decadimento γ ³⁸ (chiamando Λ' l'ordine del multipolo per distinguerlo da Λ). La parità³⁹ dei singoli termini è data da $\pi(E\Lambda) = (-1)^\Lambda$ e $\pi(M\Lambda) = (-1)^{\Lambda+1}$, per cui, poiché deve valere $\vec{\Lambda} + \vec{J}_i = \vec{J}_f$, per $J_f = 1$, $J_i = 0$ e $\pi_i = \pi_f = +$ allora $\Lambda = 1$ e solo $M1$ sarà rilevata ai fini del calcolo al primo ordine:

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) &\simeq \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle \left\langle \psi_{1s_d} | -\sqrt{2\pi}(-i)\sqrt{3}(\lambda M_{1-\lambda}(q)) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle \\ j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) &\simeq i\sqrt{6\pi}\lambda \left\langle \psi_{1s_d} | M_{1-\lambda} | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle = \\ &= i\sqrt{6\pi}\lambda \underbrace{\frac{\langle 00, 1 - \lambda | 1s_d \rangle}{\sqrt{3}}}_{\text{Dal teo. di W-E}} \underbrace{\langle \psi_{1s_d} || M_1 || \psi_{np}({}^1S_0) \rangle}_{\text{El. di matrice ridotta}} = \\ &= i\sqrt{2\pi}\lambda \delta_{-\lambda s_d} |M_1(q)| \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di Wigner-Eckart. Il segno di λ non è importante in questa trattazione perché siamo interessati alla somma su tutte le polarizzazioni (per cui $\sum_{\lambda=\pm 1}$):

$$\sum_{s_n s_p, \lambda s_d} |\sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q})|^2 = 4\pi \underbrace{\sum_{s_n s_p} \left| \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle \right|^2}_{=1} \sum_{\lambda s_d} 2\pi \delta_{\lambda s_d} |M_1|^2 = 16\pi^2 |M_1|^2$$

³⁶Per non confondere J corrente con J momento denoteremo quest'ultimo con la lettera Λ .

³⁷Stiamo considerando una cattura termica con neutroni, appunto, termici.

³⁸Si veda 2.2-*Trattazione quantistica*.

³⁹Qui con J si indica il momento angolare totale e con Λ quello del fotone e quindi l'ordine di multipolo.

dove abbiamo usato $\sum_{\lambda s_d} \delta_{\lambda s_d} = \delta_{11} + \delta_{-1-1} = 2$. Dobbiamo calcolare $M_1(q)$, ma dal momento che questo non dipende da λ possiamo stimarlo per qualsiasi valore di λ (per esempio $\lambda = -1$):

$$\begin{aligned} j_{\lambda, -\lambda}^{1S_0} &= i\sqrt{2\pi}\lambda M_1(q) \\ M_1(q) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &\propto \frac{1}{v_{rel}} \frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}/m_d} |j_{-11}^{1S_0}(\vec{q})|^2 \\ \sigma_{tot} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} d\Omega_{\hat{q}} \propto \frac{4\pi}{v_{rel}} \frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}/m_d} |j_{-11}^{1S_0}(\vec{q})|^2 \end{aligned}$$

Abbiamo così isolato la parte nucleare e il problema si riduce al calcolo di $j_{-11}^{1S_0}$:

$$j_{-11}^{1S_0} = \int d^3r_1 d^3r_2 \psi_{11}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, -1) \cdot \vec{J}_{-1} \psi^{1S_0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

A questo punto abbiamo bisogno della funzione d'onda del deutone, di quella di scattering np , del potenziale nucleare e di un metodo numerico che risolva l'equazione di Schrödinger sia per lo stato legato che per quello di scattering. Questo non è però sufficiente, è necessario anche un modello per la corrente elettrromagnetica⁴⁰ e ne avevamo uno:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\lambda, i} &= \frac{1}{2m} \underbrace{\varepsilon_i \left\{ \vec{p}_i, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \right\}}_{\text{corrente di convezione}} - \frac{i}{2m} \mu_i \vec{q} \times \vec{\sigma}_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \\ \varepsilon_i &\simeq \frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i}) \\ \mu_i &\simeq \frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i})\mu_p + \frac{1}{2}(1 - \tau_{z,i})\mu_n = \frac{1}{2}(\mu_S + \mu_V \tau_{z,i}) \end{aligned}$$

dove ε_i e μ_i sono proiettori e $\mu_S = \mu_p + \mu_n = 0.88 \mu_N$ e $\mu_V = \mu_p - \mu_n = 4.706 \mu_N$ sono rispettivamente la combinazione isoscalare e quella vettoriale. In generale, l'integrale scritto precedentemente per $j_{-11}^{1S_0}$ viene risolto numericamente in $d^3r_{rel} d^3r_{CM}$, ma dal momento che siamo interessati alla soluzione analitica e ci troviamo nel caso di basse energie (cattura di neutroni termici, quindi $\vec{p}_i \sim 0$, corrente di convezione trascurabile) possiamo studiare solo l'onda s ⁴¹:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u(r)}{r} \chi_{11} \zeta_{00} \right]}_{\text{deutone fermo}} e^{-i\vec{p}_d \cdot \vec{R}} \\ \psi^{1S_0} &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_S(r)}{r} \chi_{00} \zeta_{10} \right]}_{\text{moto}} e^{-i\vec{p}_{CM} \cdot \vec{R}} \end{aligned}$$

⁴⁰Attenzione: in $J_{\lambda, i}$ l'indice i indica l' i -esimo nucleone e non ha niente a che vedere con il momento angolare totale iniziale. Si invita il lettore da qui in poi a cercare di capire dal contesto il significato delle notazioni.

⁴¹Abbiamo indicato con χ la funzione di *spin* e con ζ quella di *isospin*:

$$\begin{aligned} \zeta_{00} &= \frac{|np\rangle - |pn\rangle}{\sqrt{2}} & \chi_{11} &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ \zeta_{10} &= \frac{|np\rangle + |pn\rangle}{\sqrt{2}} & \chi_{00} &= \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La corrente sarà quindi data da:

$$\vec{J}_i \simeq -\frac{i}{2m} \mu_i \vec{q} \times \vec{\sigma}_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i}$$

Notiamo che $\zeta_{00}^+ \mu_S \zeta_{10} = 0$ perché le due funzioni sono ortogonali fra loro, dunque sopravvive solo il pezzo con μ_V nella corrente:

$$\vec{J}_{\lambda=-1} = -\frac{i}{4m} \mu_V \left[(\vec{q} \times \vec{\sigma}_1)_{\lambda=-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} \tau_{z,1} + (\vec{q} \times \vec{\sigma}_2)_{\lambda=-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} \tau_{z,2} \right]$$

Studiamo adesso la componente del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} (\vec{q} \times \vec{\sigma}_i)_{\lambda=-1} &= \hat{\varepsilon}_{\lambda=-1}^* \cdot \vec{q} \times \vec{\sigma}_i = \\ &= -(\hat{\varepsilon}_{\lambda=+1} \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_i = \\ &= -\left(-\frac{\hat{e}_x + i\hat{e}_y}{\sqrt{2}} \times q\hat{e}_z\right) \cdot \vec{\sigma}_i = \\ &= i\frac{q}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \cdot (\sigma_{x,i} \hat{e}_x + \sigma_{y,i} \hat{e}_y) = \\ &= i\frac{q}{\sqrt{2}} \sigma_{+,i} = \\ &= i\sqrt{2}q s_{+,i} \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $\sigma_x + i\sigma_y = \sigma_+ = 2s_+$ operatore di salita⁴²; per la corrente avremo allora:

$$\vec{J}_{\lambda=-1} = \frac{q\sqrt{2}}{4m} \mu_V \left[e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} s_{+,1} \tau_{z,1} + e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} s_{+,2} \tau_{z,2} \right]$$

Nel calcolo di j^{1S_0} abbiamo:

$$\begin{aligned} j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) &= \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V \sqrt{2}q}{4m} \right) e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM}) \cdot \vec{R}} \left[\chi_{11}^+ \zeta_{00}^+ s_{+,1} \tau_{z,1} \chi_{00} \zeta_{10} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} \right. \\ &\quad \left. + \chi_{11}^+ \zeta_{00}^+ s_{+,2} \tau_{z,2} \chi_{00} \zeta_{10} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{00}^+ \tau_{z,1} \zeta_{10} &= \frac{-1 - 1}{2} = -1 & \chi_{11}^+ s_{+,1} \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \zeta_{00}^+ \tau_{z,2} \zeta_{10} &= \frac{1 + 1}{2} = 1 & \chi_{11}^+ s_{+,2} \chi_{00} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) = \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V \sqrt{2}q}{4m} \right) e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM}) \cdot \vec{R}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} + e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2})$$

dove $u(r)$ è la funzione ridotta del deutone e $u_S(r)$ è quella della funzione di scattering. Cambiamo variabili⁴³ per cui $\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}/2$ e $\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r}/2$:

$$j_{11}^{1S_0}(\vec{q}) = \int d^3 R d^3 r \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V q}{4m} \right) \underbrace{e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM} + \vec{q}) \cdot \vec{R}}}_{\delta \text{ per } \vec{p}_d - \vec{p}_{CM} + \vec{q}} \left[e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/2} + e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/2} \right]$$

⁴²Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} s_+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle & \tau_z |p\rangle &= |p\rangle \\ s_+ |\uparrow\rangle &= 0 & \tau_z |n\rangle &= -|n\rangle \end{aligned}$$

⁴³ $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ e $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

L'ultimo termine tra parentesi è simmetrico rispetto a parità $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ e dal momento che la funzione del deutone si annulla per grandi raggi allora $\langle \vec{q} \cdot \vec{r} \rangle \sim 0$ e quindi $\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}/2) \sim 1$.

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha}{v_{rel}} \frac{\mu_V^2 q^3}{4m^2} \left| \int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) \right|^2$$

Riassunto

1. Studio della cinetica: è generale e porta all'elemento di matrice ridotta e alla corrente.
2. Modello di corrente nucleare.
3. Approssimazioni per risoluzione analitica⁴⁴.

5.2.1 Buca di potenziale

Riprendiamo il calcolo analitico della reazione di scattering tra protone e neutrone scegliendo per $u(r)$ e $u_S(r)$ le soluzioni per una buca di potenziale. Partiamo dal deutone:

$$u(r) = \begin{cases} C_> e^{-\alpha r} & r > r_0 \\ C_< \sin k_0 r & r < r_0 \end{cases}$$

con $\alpha \equiv \sqrt{mB_d}$ e $k_0 \equiv \sqrt{m(V_0 - B_d)}$ e i valori $r_0 \simeq 2$ fm, $V_0 = 35$ MeV e $B_d \simeq 2.2$ MeV. Dalla continuità $C_> e^{-\alpha r_0} = C_< \sin k_0 r_0$ e dalla normalizzazione:

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3r \left(\frac{u(r)}{r} \right)^2 \frac{1}{4\pi} = \int dr (u(r))^2 = \\ &= \int_0^{r_0} C_<^2 \sin^2(k_0 r) dr + \int_{r_0}^{+\infty} C_>^2 e^{-2\alpha r} dr = \\ &= C_<^2 \left[\frac{r_0}{2} - \frac{\sin 2k_0 r_0}{2k_0} \right] + C_>^2 \frac{e^{-2\alpha r_0}}{2\alpha} \end{aligned}$$

è possibile trovare le due costanti $C_>$ e $C_<$; riportiamo solo $C_>$:

$$C_> = \sqrt{\frac{2e^{2\alpha r_0}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sin^2 k_0 r_0} \left(r_0 - \frac{\sin 2k_0 r_0}{2k_0} \right)}}$$

Per quanto riguarda invece l'onda di scattering:

$$\frac{u_S(r)}{r} = \begin{cases} \frac{1}{r} C_>^S \sin(kr + \delta) & r > r_0 \\ \frac{1}{r} C_<^S \sin k_1 r & r < r_0 \end{cases}$$

con δ sfasamento, $k = \sqrt{mE}$ e $k_1 \equiv \sqrt{m(E + V_0)} \rightarrow \sqrt{mV_0}$ per basse energie ($E \ll 1$). Dalla teoria dello scattering sappiamo che l'andamento asintotico per $r > r_0$ è $1 - a_S/r$ dove a_S è la lunghezza di scattering che per il canale 1S_0 è pari a circa -24 fm; la continuità impone quindi che

$$\frac{C_<^S}{r_0} \sin k_1 r_0 = 1 - \frac{a_S}{r_0} \Rightarrow C_<^S = \frac{r_0 - a_S}{\sin k_1 r_0}$$

⁴⁴Le elencheremo successivamente

Possiamo allora valutare l'integrale nell'espressione della sezione d'urto totale:

$$\int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) = \int_0^{r_0} dr C_> \frac{e^{-\alpha r_0}}{\sin k_0 r_0} \sin k_0 r C_<^S \sin k_1 r dr + \int_{r_0}^{+\infty} C_> e^{-\alpha r} (r - a_S) dr$$

$$\sigma = \frac{e^2}{v_{rel}} \frac{\mu_V^2 q^3}{4m^2} \left| \int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) \right|^2 \simeq 0.184 \text{ b}$$

Ricapitoliamo le approssimazioni fatte:

- Abbiamo trascurato \vec{J}_{conv} .
- Abbiamo considerato solo l'onda s nel deutone.
- $\langle \vec{q} \cdot \vec{r} \rangle \sim 0$ per cui $\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \sim 1$.
- Abbiamo usato soluzioni per buche di potenziale per u e u_S .

5.2.2 Meson-Exchange Currents

Osserviamo che il valore stimato $\sigma_{exp} \simeq 0.334 \text{ b}$ si discosta da quello teorico e ciò è dovuto appunto alle approssimazioni fatte, in particolare aver trascurato i termini di onda d per il deutone. Nel calcolo della sezione d'urto, infatti, si ha un *overlap* di due funzioni d'onda 3S_1 e 1S_0 , che sono collegate allo stato di scattering del *pn* e ortogonalni perché corrispondono a stati differenti; è proprio questa ortogonalità che “pompa” i termini piccoli⁴⁵ come 3D_1 . Tuttavia, questa approssimazione porta un contributo del 4% ed è insolito che comporti un fattore 2 nel risultato; infatti anche rilasciando tutte quante le ipotesi fatte otteniamo $\sigma_{tot} \simeq 0.303 \text{ b}$. La spiegazione di questa discrepanza di circa il 10% è legata alle *meson-exchange currents*. Un'argomentazione *naïf* per descrivere il fenomeno consiste nello studio della corrente totale:

$$\vec{J}(\vec{q}) = \sum_i (\vec{J}_{C,i} + \vec{J}_{M,i})$$

dove la sommatoria è estesa prima al caso in cui l'interazione è tra fotone e protone con neutrone spettatore e successivamente tra fotone e neutrone con protone spettatore. Abbiamo quindi trascurato l'interazione nucleare tra protone e neutrone durante il processo, che interpretiamo come uno scambio di mesoni (tipo pioni π); il fotone può allora interagire con il pion carico π^\pm e questo porta un termine di corrente a due corpi⁴⁶ \vec{J}_{ij}^{MEC} ⁴⁷ nella corrente totale, contribuendo a fornire per la sezione d'urto teorica un valore pari a 0.333 b.

Un metodo più rigoroso per mostrare la necessità di questo termine si sviluppa dalla conservazione della carica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

dove $\rho = \rho_1 + \rho_2$ e $\vec{J}(\vec{x}) = \int \vec{J}(\vec{q}) \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x}) d^3q$. Ricordando che la derivata temporale è legata al commutatore con l'hamiltoniana e osservando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \vec{q} \cdot \vec{J}(\vec{q})$ allora si ha⁴⁸:

$$\vec{q} \cdot \vec{J}(\vec{q}) \propto [H, \rho]$$

⁴⁵Questa situazione è simile a quella che avevamo incontrato per il decadimento β , quando avevamo fatto l'approssimazione di transizione permessa ($\phi_\nu^* \sim 1$).

⁴⁶Fu ipotizzata per la prima volta proprio nella risoluzione di questo problema.

⁴⁷MEC sta appunto per *meson-exchange current*.

⁴⁸Facciamo abuso di notazione scrivendo ρ anche per la trasformata di Fourier.

con $H = T + V_{12}$ ⁴⁹.

$$\begin{aligned}\vec{q} \cdot \vec{J} &\propto [T + V_{12}, \rho_1 + \rho_2] = \\ &= [T, \rho_1 + \rho_2] + [V_{12}, \rho_1 + \rho_2]\end{aligned}$$

Se non si considera un termine di accoppiamento nell'espressione della corrente è possibile mostrare che il prodotto scalare a sinistra è proporzionale solo al commutatore dell'energia cinetica; ciò implica necessariamente che debba esistere $\vec{q} \cdot \vec{J}_{12}^{MEC} \propto [V, \rho].x$

⁴⁹Ricordiamo che

$$T = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2m}$$

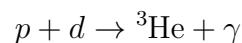
5.3 Una parentesi: Metodo *ab-initio*

Riassumiamo tutto quello che abbiamo fatto:

- 1 Studio della cinematica → Integrale ψ_i, ψ_f, \vec{J} .
- 2 Calcolo delle funzioni d'onda → Necessario conoscere V_{12} e un metodo numerico accurato per risolvere l'equazione di Schrödinger.
- 3 Considerare un modello “realistico” per \vec{J} → Introdurre il termine di corrente a due corpi \vec{J}_{ij}^{MEC} .
- 4 Risultato → Si ottengo una predizione per σ .

Questo metodo che parte da un'espressione del potenziale e della corrente conosciuta e ben testata e permette di ricavare una predizione viene definito *ab-initio*.

Consideriamo ora un problema a 2 corpi con 3 nucleoni ($A = 3$), per esempio:



Come anticipato la cinematica è la stessa dello *scattering pn*, ma in questo caso abbiamo difficoltà nel calcolo dell'espressione per V_{12} , infatti si ha una differenza di circa 1 MeV tra l'energia di legame attesa e quella misurata del ${}^3\text{He}$ ⁵⁰. Per risolvere questa discrepanza è necessario introdurre un termine di interazione a 3 corpi V_{123} ⁵¹, ma rimane comunque l'equazione di Schrödinger le cui soluzioni per $A = 3$ non sono semplici. Proprio questo è il difetto del metodo *ab-initio*: è limitato dalle tecniche numeriche per il calcolo di ψ_{in} e ψ_{out} . Nel caso di $A = 3$, come il nostro, esiste un metodo inventato a Pisa detto *Metodo delle Armoniche Ipersferiche*, che permette anche di lavorare con $A = 4$ e si sta sviluppando per raggiungere $A = 6$.

Per quanto riguarda la corrente, avremo anche un termine a 3 corpi:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i + \sum_{i < j} \vec{J}_{ij} + \sum_{i < j < k} \vec{J}_{ijk}$$

fortunatamente questo termine, per cui esiste un metodo di sviluppo, non contribuisce particolarmente al risultato.

I metodi *ab-initio*, quindi, sono generali e non necessitano di “aggiustare” valori per ottenere le corrette relazioni, tuttavia richiedono una struttura teorica alla base che diviene sempre più complessa al crescere di A ⁵².

⁵⁰Nello specifico: $B({}^3\text{He}) \sim 6.5 \div 6.9$ MeV contro il valore osservato $B^{oss}({}^3\text{He}) \sim 7.75$ MeV.

⁵¹Non si risolve comunque totalmente le difficoltà, dal momento che, nonostante i modelli siano studiati sin dagli anni '50, tuttora il campo dell'interazione a 3 corpi è un ambito di ricerca ancora aperto.

⁵²Vedremo nei capitoli successivi altri metodi per questi casi.

Capitolo V

La catena protone-protone

In questo capitolo studiamo la nucleosintesi stellare tramite la catena protone-protone, con *focus* sul problema dei neutrini solari e sullo studio *ab-initio* della reazione $p + p$; inoltre vengono approfonditi gli elementi di analisi quali il fattore astrofisico, le risonanze e l'elettroscreening. Il capitolo copre le lezioni 18/03/2021, 22/03/2021, 24/03/2021, 25/03/2021, 29/03/2021, 31/03/2021

Introduzione A circa $4 \cdot 10^5$ anni dal *Big Bang* l'energia degli elettroni è abbastanza bassa ($T \sim 10^3$ K ovvero $kT \sim 0.1$ eV) per legarsi in atomi e questo segna il disaccoppiamento dalla radiazione e la nascita del CMB; successivamente a 10^9 anni dal *Big Bang* si ha la formazione delle prime stelle e galassie. A questo punto ci concentreremo sulla nucleosintesi stellare.

Dentro il Sole: alcuni valori

- $T_{sup} \sim 6000$ K
- $T_{int} \sim 1.5 \cdot 10^7$ K
- $R_{\odot} \sim 7 \cdot 10^8$ m
- $M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{30}$ kg
- $L_{\odot} \sim 3.8 \cdot 10^{26}$ W
- $X \sim 70\%$, $Y \sim 29\%$, $Z \sim 1\%^1$.

È necessario “invocare” la nucleosintesi perché la sola energia gravitazionale non è sufficiente a sostenere la struttura per le quantità di tempo osservate, infatti se così non fosse si avrebbe:

$$\tau_{\odot}^g = \frac{\text{Energia disponibile}}{L_{\odot}} \simeq \frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot} L_{\odot}} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ y} \ll \tau_{\odot}^{oss}$$

Usando per esempio la $4p \rightarrow {}^4\text{He}$ detta appunto **catena protone-protone** si ha un'energia rilasciata legata alla differenza di massa: $\Delta m = 4m_p - m_{\text{He}} \simeq 4 \cdot (1.0078 \text{ u}) - 4.0026 \text{ u} = 0.029 \text{ u} \simeq 0.7\%$ della massa iniziale, per cui

$$\tau_{\odot}^{pp} \sim \frac{0.007 \cdot 0.1 M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \simeq 10^{10} \text{ y ordine di } \tau_{\odot}^{oss}$$

dove abbiamo supposto che il 10% della massa solare venga fusa.

¹Con X, Y, Z si intende rispettivamente la frazione su massa di idrogeno, di elio e la metallicità

1 Una prima occhiata

In termini puramente energetici:

$$\Delta mc^2 = (4m_p - m_{\text{He}})c^2 \simeq 4 \cdot 938.3 - 2 \cdot 938.3 - 2 \cdot 939.6 + \underbrace{B_{\text{He}}}_{28 \text{ MeV}} \sim 26 \text{ MeV}$$

Riportiamo in Figura V.1 uno schema per la catena pp con alcune delle varie diramazioni possibili.

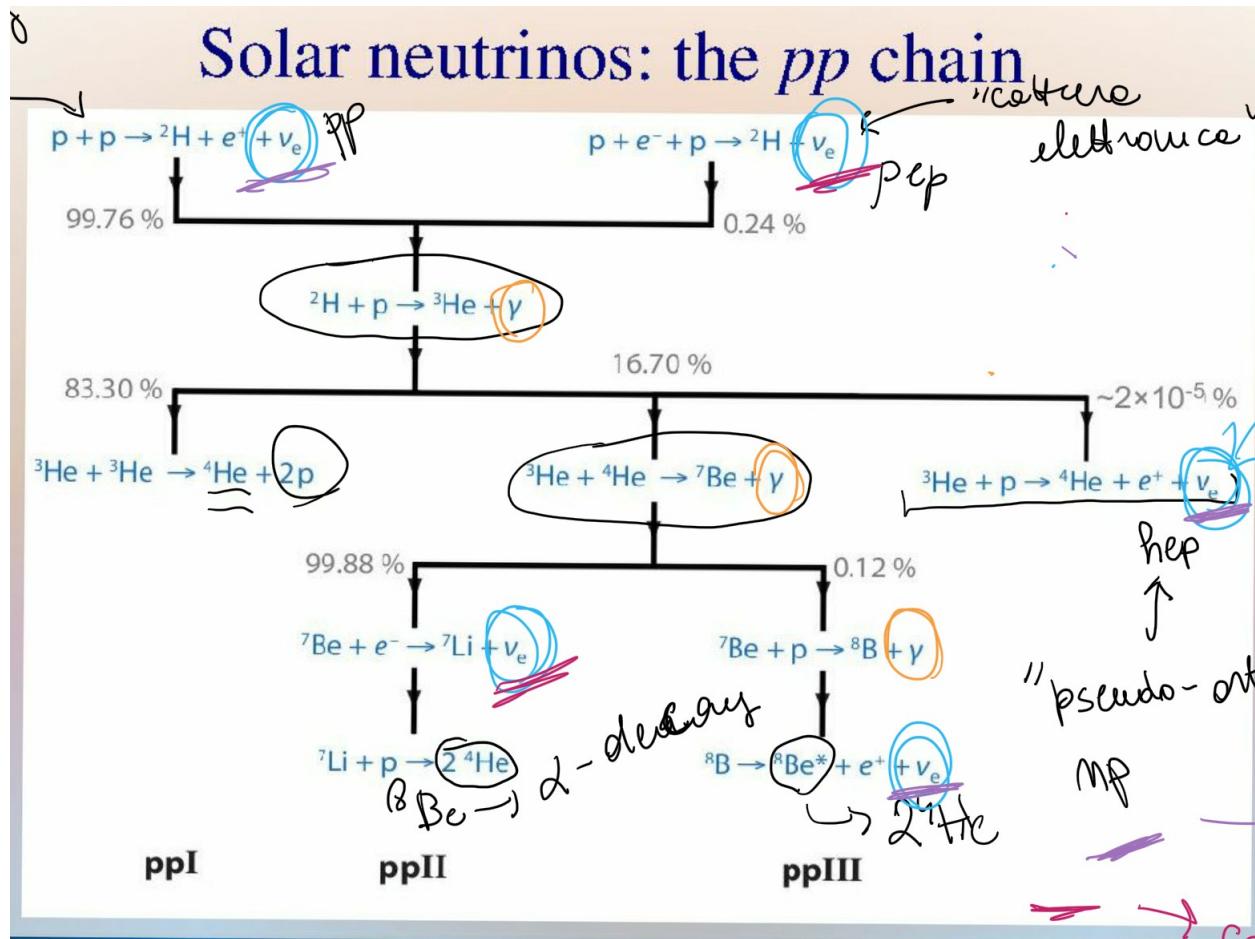


Figura V.1: Schema della catena protone-protone. In celeste sono stati cerchiati i neutrini prodotti, di cui quelli sottolineati in viola hanno spettro continuo, mentre quelli sottolineati in magenta hanno spettro a riga. In arancione sono cerchiati i fotoni prodotti. In nero sono cerchiati i decadimenti α del ^8Be .

- **Prima reazione:** poiché non esiste uno stato legato per $p+p$ si ha prima un decadimento (tipo β^+) $p \rightarrow n$ e poi $p+n$. Osserviamo che la prima reazione è debole ed è un processo di cattura di 2 protoni. Esiste anche la possibilità di un'altra reazione, chiamata *pep*, $p + e^- + p$ che assomiglia a una cattura elettronica, ma essendo una reazione a 3 corpi è molto meno probabile della *pp*.
- **Seconda reazione:** in questo caso si ha una sola reazione possibile con interazione elettromagnetica, quindi si forma velocemente ^3He .
- **Canale ppI:** intuitivamente si sarebbe portati a pensare che la reazione $^3\text{He}+p$, detta *hep*, sia favorita dato che ci sono molti protoni e la barriera coulombiana è la più bassa, anche

se è mediata dall'interazione debole; tuttavia questo non accade a causa dell'ortogonalità tra gli stati iniziale e finale (*pseudo-ortogonalità np*), rendendo rilevanti i contributi dei termini agli ordini successivi.

Nemmeno ${}^3\text{He} + d$ va bene, perché questa ha $A = 5$, per cui il primo canale della catena è quello che viene detto catena *ppI²*, ovvero ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$.

- **Reazioni successive:** a questo punto si ha una certa abbondanza di ${}^4\text{He}$ (prima troppo esigua) e si “sblocca” così la reazione ${}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ (che era presente anche nella BBN) con una probabilità di circa il 17%. A questo punto ci sono due rami: una cattura o elettronica o radiativa.

Il **canale ppII** è mediato dall'interazione debole, tuttavia è più probabile del **canale ppIII** che è invece mediato dall'interazione elettromagnetica; ciò è dovuto alla differenza nella barriera di potenziale delle due reazioni.

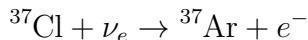
Infine, per quanto riguarda ${}^7\text{Li} + p$ della *ppII*, in realtà questo è un processo in 2 step: ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^8\text{Be}^* \rightarrow 2\alpha$, dove l'ultimo decadimento è molto veloce.

Indipendentemente dal ramo della catena si ha sempre la produzione di un α da $4p$.

Evidenze sperimentali Ovviamente tale modello necessita di una verifica osservabile. I fotoni confermano la luminosità, ma non dimostrano la necessità della nucleosintesi; sono quindi i neutrini (il cui cammino libero nel Sole è maggiore delle sue dimensioni) le principali evidenze. In particolare, neutrini che derivano da differenti reazioni hanno energie diverse³ e anche distribuzioni diverse⁴.

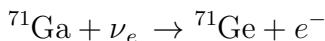
2 Il problema dei neutrini solari

Come anticipato precedentemente, i neutrini sono i miglior candidati per la verifica sperimentale della nucleosintesi; il primo esperimento di verifica fu fatto da Richard Davis nel 1960 e gli valse il premio Nobel: egli ebbe l'idea di studiare in una miniera del Sud Dakota (detta *Homestake*) la reazione



poiché attraverso analisi chimica è possibile contare Ar estratto ed essendo nel sottosuolo l'effetto dei raggi cosmici è attenuato; tuttavia, è necessario avere Cl purissimo. L'esperimento funzionò, i neutrini furono osservati, ma dal momento che la reazione ha una certa energia di soglia ($E_{th} \sim 1$ MeV) gli unici neutrini visibili furono quelli della *pep*, del ${}^8\text{B}$ e della *hep* che come mostrato in Figura V.2 sono i meno numerosi. Il problema principale, però, fu il fatto che il numero di neutrini osservati era circa la metà di quelli previsti.

Inizialmente si imputò questa discrepanza alla natura dell'esperimento per cui ne seguirono altri con reazioni differenti, uno di questi fu GALLEX tra il 1991 al 1997 al Gransasso:



in questo caso l'energia di soglia è $E_{th} \simeq 233.2$ keV (la linea celeste in Figura V.2), quindi vedo molti più neutrini. Il ${}^{71}\text{Ge}$ si estraе attraverso la molecola di germano ${}^{71}\text{GeH}_4$ e dato che il tempo di dimezzamento del ${}^{71}\text{Ge}$ è di circa 11.43 giorni i neutrini vengono contati dal numero

²Il Sole ha bruciato finora principalmente con questo canale.

³I neutrini della *hep*, per esempio, sono i più energetici

⁴Quelli che compaiono come uno dei 3 corpi di un prodotto avranno spettro continuo, gli altri avranno una riga.

⁵Si veda la sezione 2 -Biciclo CN-NO.

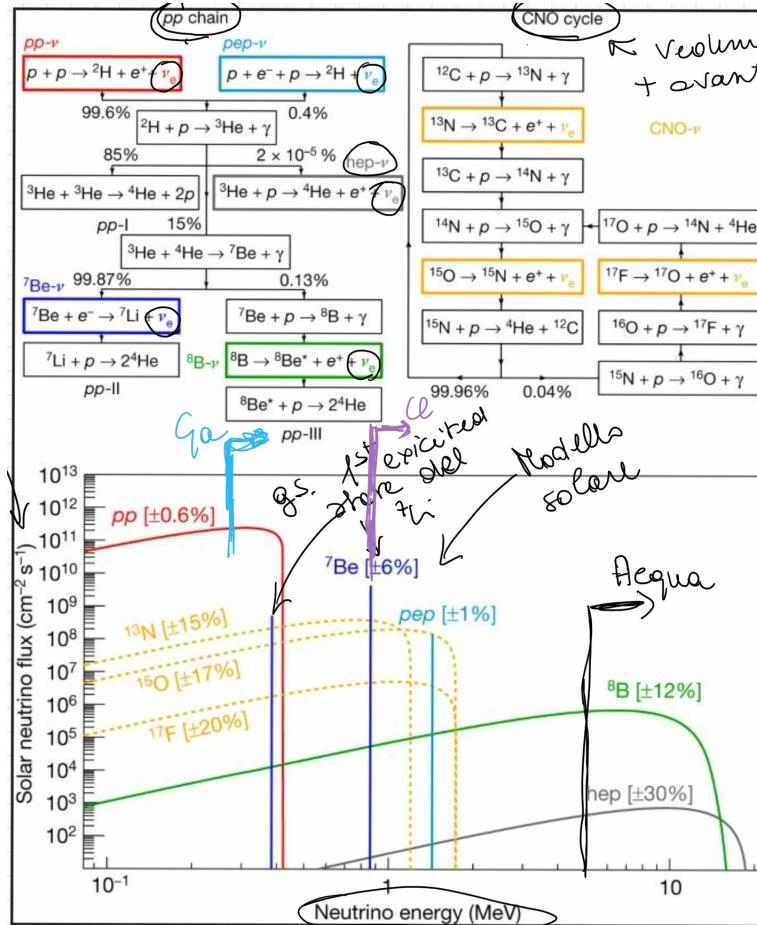


Figura V.2: I due processi di produzione dell'elio nel Sole: la catena *pp* e il biciclo CN-NO⁶. Sotto sono riportati risultati teorici per il vari flussi di neutrini in funzione della loro energia in base alla reazione che li ha prodotti: i rossi, i verdi e i grigi sono uno spettro continuo e il massimo dipende dal fatto che il neutrino è uno di tre corpi; i blu e il turchese sono righe. Ogni flusso ha ovviamente una certa incertezza teorica. La linea viola indica la soglia per l'esperimento di Davis, quella celeste per l'esperimento con il gallio e quella nera per esperimenti con l'acqua. I neutrini del CN-NO hanno tutti uno spettro continuo e sono indicati in giallo.

di decadimenti che si osservano. Nonostante i cambiamenti fatti all'apparato sperimentale, ottennero lo stesso risultato. Furono condotti allora esperimenti con rivelatori Čerenkov ad acqua:



Il vantaggio della luce Čerenkov è che è direzionale quindi era possibile determinare con precisione se i neutrini venissero dal Sole; lo svantaggio è che oltre ad avere bisogno di molta acqua purissima gli eventi sono pochi, perché l'elettrone per emettere deve superare una certa soglia e questo impone che il neutrino abbia energia alta (la soglia nera in Figura V.2), per cui si osservano solo quelli del ^8B e della *hep*. Inoltre, ogni tipo di neutrino può fare tale scattering: i ν_τ e i ν_μ per esempio possono scambiare solo un bosone che sia neutro, quindi, Z^0 , mentre i ν_e oltre a Z^0 dato che $\nu_e \rightarrow e^-$ o $e^- \rightarrow \nu_e$ possono mediare l'interazione anche tramite i bosoni W^\pm . In generale non c'è modo di distinguere un processo dall'altro, ma dal momento che $m_W \ll m_Z$ questa interazione è molto più probabile (quindi ν_e in maggior numero). Passiamo ora alla descrizione⁷ di 3 esperimenti di questo tipo:

⁷Le immagini e i dati sono raccolti nelle slide *Neutrino_flux_exp.pdf*.

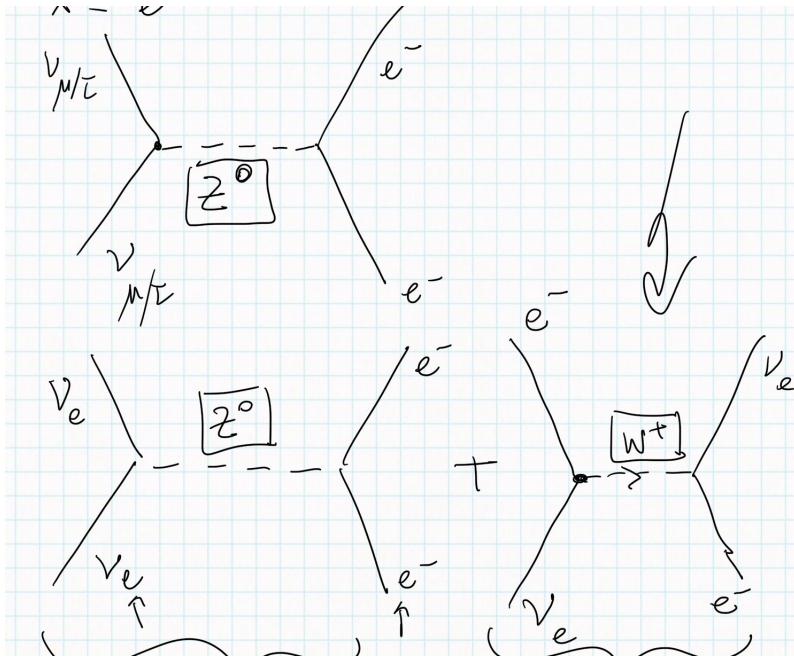


Figura V.3: Rappresentazione schematica dell'interazione nello scattering.

- **Super-Kamiokande (SK):** dal nome della miniera Kamioka in Giappone nella quale è situato è il successore del precedente Kamiokande. Contiene una cisterna di 50,000 tonnellate di acqua costellata di fotomoltiplicatori (maggiormente sensibili ai ν_e) che ne coprono l'intera superficie (circa 11,200).

Potendo acquisire risultati sia di giorno che di notte, SK osservò una differenza nel numero di neutrini nei due momenti del giorno, in particolare $\#\nu_{notte} < \#\nu_{diurno}$. Per la prima volta però si riesce a dare una spiegazione di queste fluttuazioni: assumendo, infatti, che $m_\nu \neq 0$ si può dimostrare che lo stato di neutrino di interazione debole (quindi di un certo *sapore*) può essere descritto come sovrapposizione di due stati di massa differente, ovvero:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= \alpha' |\nu_1\rangle + \beta' |\nu_2\rangle \end{aligned}$$

Lo stato del neutrino di interazione quindi oscilla $|\nu_e\rangle \simeq k|\nu_\mu\rangle$ con una probabilità che dipende dalla distanza percorsa prima dell'osservazione e questo spiega la discrepanza con il numero di neutrini previsti dalla teoria. Tuttavia, SK non poté verificarlo perché nel 2001 durante la manutenzione per la quale viene svuotata la cisterna non si accorsero che un fotomoltiplicatore si era leggermente incrinato e al successivo riempimento, quando il livello era circa a metà, questo fotomoltiplicatore si è rotto; il vuoto al suo interno ha risucchiato l'acqua producendo un'onda d'urto che ha innescato una reazione a catena e ha causando la rottura di 500 fotomoltiplicatori.

Dopo l'incidente i giapponesi iniziarono repentinamente le riparazioni, ma ormai era stato già avviato un altro esperimento in Canada per la verifica della teoria.

- **Sudbury Neutrino Observatory (SNO):** esperimento con rivelatore Čerenkov situato nella miniera Creighton in Canada, sfruttò l'acqua pesante ${}^2\text{H}_2\text{O}$ invece della semplice ${}^{16}\text{O}_2\text{H}_2\text{O}$, questo perché oltre allo scattering elastico era possibile anche la reazione⁸ $\nu_e + {}^2\text{H} \rightarrow p + e^- + p$; questa può avvenire solo con ν_e e si distingue da quella dello scattering dalla luce Čerenkov prodotta. Si noti, però, che è anche possibile: $\nu + {}^2\text{H} \rightarrow \nu + p + n$ ovvero scattering elastico. Per tenerne traccia, furono messe delle impurità di ${}^{35}\text{Cl}$ così

⁸Si tratta di una *pep* "al contrario"

che $^{35}\text{Cl} + n \rightarrow ^{36}\text{Cl} + \gamma$, identificabile quindi dai fotoni prodotti. Fu allora possibile contare sia il numero di neutrini elettronici che quello di neutrini generici e si ottenne l'evidenza di accordo con il valore predetto dalla teoria: non era quindi il modello solare a dover essere rivisto, ma quello standard.

- **Borexino:** in ultima battuta diamo uno sguardo anche al contributo italiano nell'ambito di tale ricerca. In quel periodo infatti al Gransasso era stato sistemato un esperimento che si componeva di uno scintillatore in una camera circondata da fotomoltiplicatori. Il vantaggio era quello di avere una soglia per la reazione molto bassa e questo permise a Borexino di verificare che nel Sole erano presenti anche le reazioni pp , ^7Be e pep , come mostrato in Figura V.4.

Una piccola nota dolente: Borexino sarebbe stato capace di verificare l'oscillazione dei neutrini prima dell'esperimento canadese, tuttavia la burocrazia italiana ha ritardato enormemente l'arrivo dei fondi.

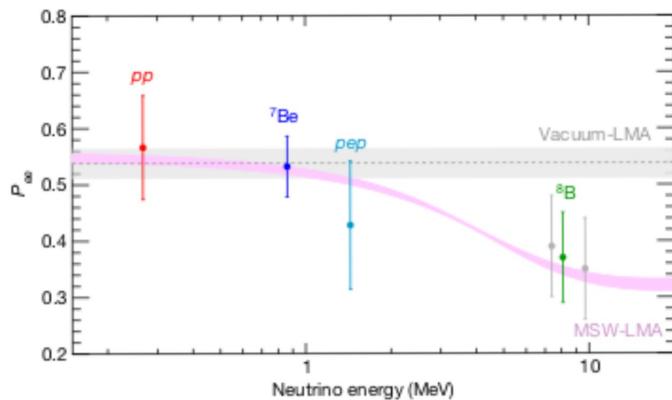


Figura V.4: Probabilità di sopravvivenza del neutrino in funzione della sua energia. I punti sono i risultati ottenuti da Borexino, in rosa la predizione teorica e in grigio il modello con parametri di oscillazione dati dai risultati di SNO.

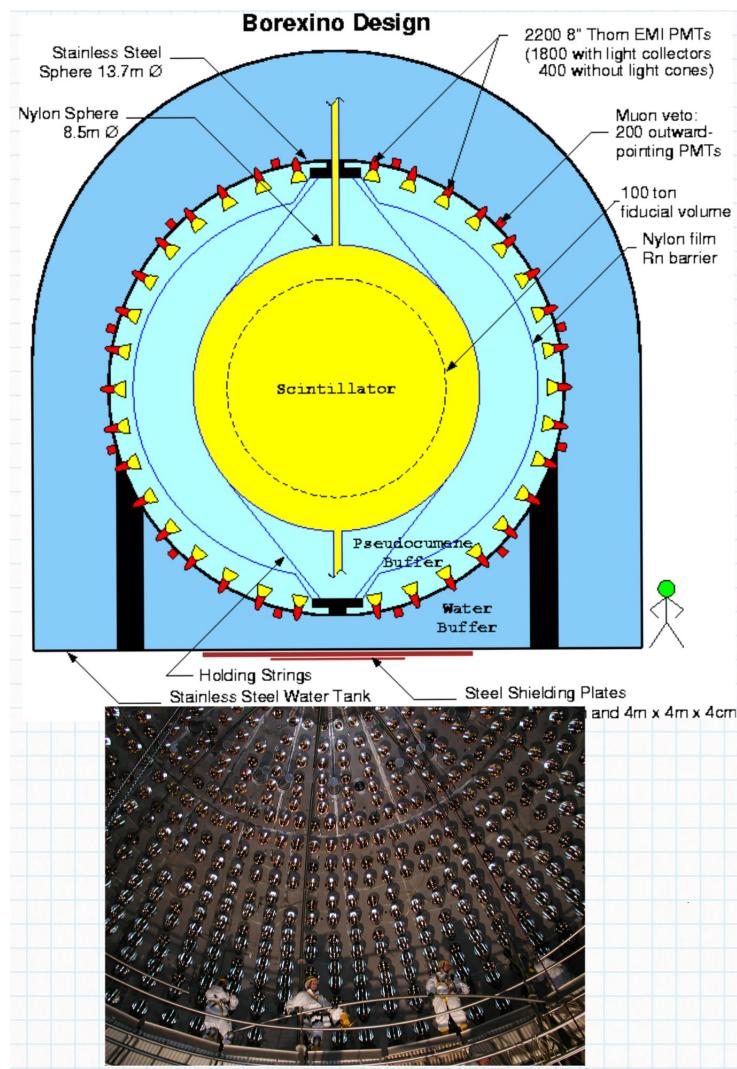


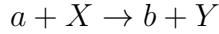
Figura V.5: Schema e foto dell'esperimento Borexino.

3 Elementi di analisi

Introduciamo adesso alcuni elementi essenziali per l'analisi nucleare, che utilizzeremo successivamente nello studio della catena pp .

3.1 Fattore Astrofisico

Consideriamo una generica reazione con particelle (proiettili) che incidono su nuclei (bersagli):



Dall'analisi dimensionale abbiamo per la sezione d'urto:

$$\sigma[L^2] = \frac{\#\text{reazioni/nucleo X/unità di tempo}}{\underbrace{\#\text{proiettili}/L^2/\text{unità di tempo}}_{\text{flusso particelle incidenti}}}$$

Cerchiamo di costruire l'espressione per il *reaction-rate* r : se N_a è la densità numerica dei proiettili, \vec{v} la loro velocità di volo e N_X la densità numerica dei bersagli allora si ha $r = N_a N_X \sigma v$; in generale però potremmo avere $a = X$ e non potendo distinguere tra i due con l'espressione precedente si otterebbe il doppio del *rate* effettivo, per cui:

$$r = \frac{N_a N_X}{1 + \delta_{aX}} \langle \sigma(\vec{v}) v \rangle$$

dove abbiamo mediato sulla distribuzione in velocità, che nel caso stellare è una Maxwelliana $\phi(v)$, poiché in generale non tutti i proiettili avranno velocità \vec{v} . Procedendo con il calcolo:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\vec{v}) v \rangle &= \int_0^\infty \sigma v \phi(v) dv = \\ &= \int_0^\infty \sigma v 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) v^2 dv = \quad \text{sostituendo } E = \frac{1}{2}\mu v^2 \\ &= 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{\mu^2} 2E \sigma(E) e^{-E/kT} dE = \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sigma(E) e^{-E/kT} dE \end{aligned}$$

La dipendenza di σ da E dipende principalmente da tre fattori:

1. La probabilità di attraversamento della barriera Coulombiana.
2. La probabilità di avere un'interazione.
3. La prossimità a una risonanza nucleare.

Tutti e tre infatti dipendono dall'energia. Studiamo prima le reazioni non-risonanti: per il contributo 2. dalla meccanica quantistica sappiamo che la probabilità di interazione è proporzionale a⁹ $\pi\lambda_{DB}^2 \sim p^{-2} \sim E^{-1}$; per il contributo 1. l'espressione è un po' più complessa, ma nel Sole ho tutte particelle cariche quindi:

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \simeq 1.44 \frac{Z_1 Z_2}{r[\text{fm}]} [\text{MeV}] \underset{\text{per } pp}{\sim} 1.44 \text{ MeV}$$

⁹ $\pi\lambda_{DB}^2$ non è altro che la sezione d'urto.

L'energia di agitazione termica media $\langle E \rangle \sim kT \sim 9 \cdot 10^{-8} T[\text{K}] [\text{keV}]$ per la temperatura interna del Sole ($T \sim 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$) è dell'ordine del keV, quindi trascurabile rispetto alla barriera. Valutiamo allora la probabilità di attraversamento per effetto tunnel¹⁰:

$$\begin{aligned} P &\sim \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) = \\ &= \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}\right) = \\ &= \exp\left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}\right) \end{aligned}$$

detto **fattore di penetrazione di Gamow**. Per quanto riguarda i vari contributi nucleari possiamo raccoglierli tutti in un fattore $S(E)$ che chiamiamo **fattore astrofisico**; abbiamo allora:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \exp\left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}\right) S(E)$$

A titolo di esempio riportiamo l'andamento di $\sigma(E)$ per la reazione $^{12}\text{C} + p \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$ in Figura V.6. Si osserva una risonanza per circa 0.5 MeV e la drastica pendenza della sezione d'urto sotto 0.3 MeV (dovuta al fattore di Gamow); in rosso è segnato il range di energie di interesse astrofisico.

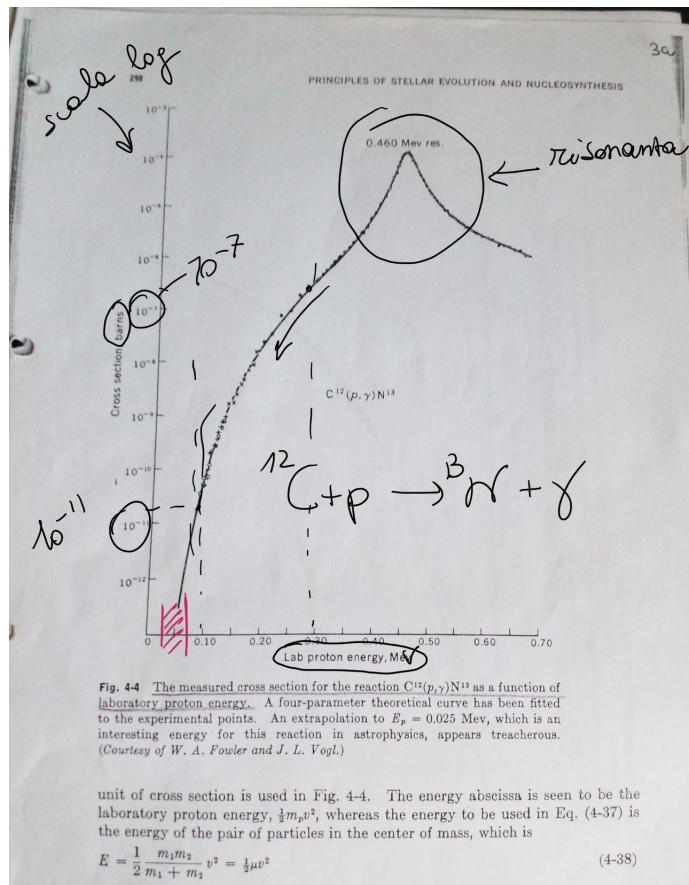


Figura V.6: Leggere la didascalia. In rosso il range di energie di interesse astrofisico.

Dall'espressione per la sezione d'urto possiamo invertire così da ottenere l'andamento del fattore

¹⁰Per il calcolo guarda Approfondimenti 5-Effetto tunnel.

astrofisico $S(E) = E\sigma(E)\exp(\dots)$ come mostrato in Figura V.7. Si nota che in questo caso l'andamento per basse energie è più “dolce”.

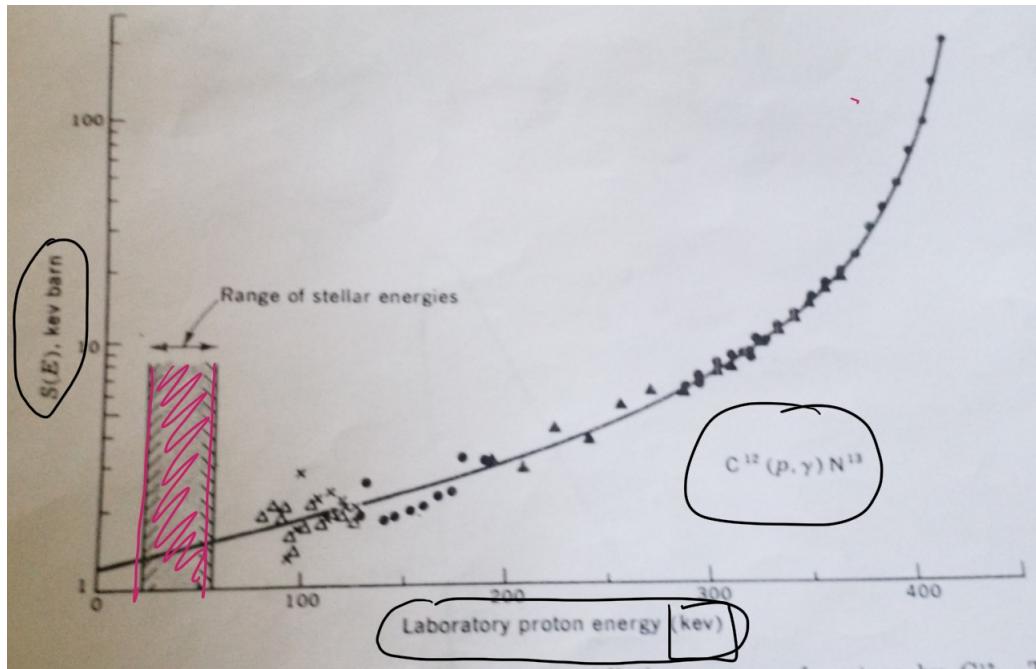


Figura V.7: Andamento del fattore astrofisico per la reazione precedente.

Fattore astrofisico Sostituiamo l'espressione per la sezione d'urto nel calcolo del *reaction-rate*:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{E} \exp \left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}} \right) S(E) \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) E dE = \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) \exp(-f(E)) dE \\ f(E) &\equiv \frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}} \\ b &\equiv \sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \simeq 0.99 Z_1 Z_2 A^{1/2} \text{ MeV}^{1/2} \end{aligned}$$

dove A è la massa ridotta in unità di masse atomiche. Studiamo allora l'andamento $\exp(-f(E))$ in Figura V.8. Notiamo che per $E = E_0$ si ha un massimo, per cui $f'(E_0) = 0$ da cui¹¹:

$$E_0 = \left(\frac{b}{2} kT \right)^{2/3} \simeq 1.22 (Z_1 Z_2 A^{1/2} T_6)^{2/3} \text{ keV}$$

questa è l'energia più probabile e $f(E_0)$ è detto **picco di Gamow**. Notiamo che il picco è molto sensibile alla temperatura; per esempio nel Sole ($T_6 \simeq 15$) per la pp si ha $E_0 = 1.22 (15 \cdot \sqrt{1/2})^{2/3} = 5.89$ keV. In generale, E_0 è un valore caratteristico della stella. Dal momento che non conosciamo $S(E)$ per ogni E , cercheremo di sviluppare l'integrale e a tale

¹¹Con T_6 si intende $T = T_6 \cdot 10^6$ K.

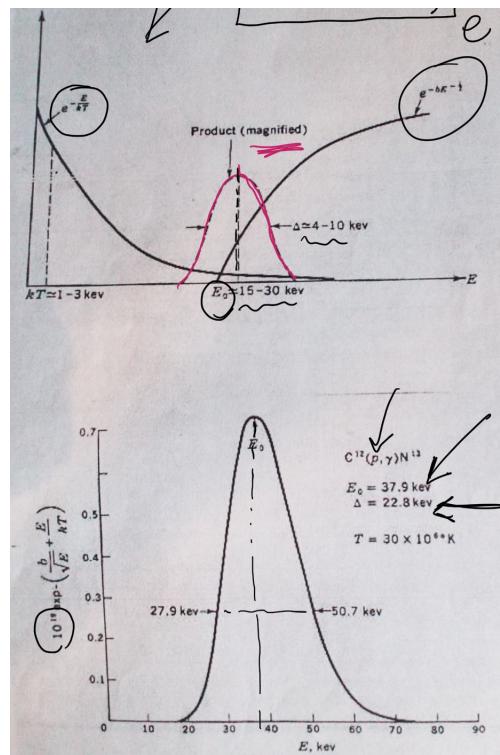


Figura V.8: In alto l'andamento di $\exp(-E/kT)$, di $\exp(-b/\sqrt{E})$ e di $\exp(-f(E))$; in basso l'ingrandimento del picco di Gamow.

scopo definiamo $\tau \equiv f(E_0) = 3E_0/kT^{12}$ (nel Sole $\tau_{pp} \sim 14 \gg 1$) e riscriviamo $f(E)$:

$$\begin{aligned} f(E) &= \left(\frac{E}{3E_0}\tau + \frac{b}{\sqrt{E}} \frac{kT}{3E_0}\tau \right) = \\ &= \tau \left(\frac{E}{3E_0} + \frac{2E_0^{3/2}}{kT\sqrt{E}} \frac{kT}{3E_0} \right) = \\ &= \tau \left(\frac{E}{3E_0} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \right) \end{aligned}$$

Definiamo x tale che $E \equiv E_0 \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{\tau}} \right)$

$$E - E_0 = \frac{2x}{\sqrt{\tau}} E_0 = 2 \sqrt{\frac{kTE_0}{3}} x \equiv \frac{\Delta}{2} x$$

¹² $f(E_0)$ si calcola facilmente sostituendo $b = 2E_0^{3/2}/kT$.

dove abbiamo definito $\Delta \equiv 4\sqrt{kTE_0/3}$ (per il Sole $\Delta_{pp} \sim 6.4$ keV). Facciamo allora un'espansione¹³ di $f(E)$ intorno a E_0 , che in termini di x è un'espansione¹⁴ intorno a $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tau \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{\tau}} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{(1+2x/\sqrt{\tau})}} \right] \simeq \\ &\simeq \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{\tau}} \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{3}{2} \frac{x^2}{\tau} - \frac{5}{2} \frac{x^3}{\tau \sqrt{\tau}} + \frac{35}{8} \frac{x^4}{\tau^2} + O(x^5) \right) \right] \simeq \\ &\simeq \tau + x^2 - \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} + \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} \end{aligned}$$

Sostituendo allora nell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S(E) \exp(-f(E)) dE &\simeq \int_{-\sqrt{\tau}/2}^\infty dx S(x) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} e^{-x^2} \underbrace{\exp\left(\frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau}\right)}_{\text{Parte non Gaussiana}} \simeq \\ &\simeq \int_{-\sqrt{\tau}/2}^\infty dx S(x) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) \end{aligned}$$

dove al primo passaggio abbiamo cambiato variabile $dE = dx 2E_0/\sqrt{\tau}$ e successivamente sviluppato l'esponenziale al II ordine, trascurando i termini $O(x^7)$. Per procedere analiticamente con il calcolo sviluppiamo anche il fattore astrofisico intorno a E_0 : $S(E) = S(E_0) + (2xE_0/\sqrt{\tau}) S'(E_0) + (2x^2 E_0^2 / \tau) S''(E_0) + \dots$; studiamo gli integrali dei vari ordini separatamente.

¹³Si ricordi che $f'(E_0) = 0$ e che $\tau/2E_0^2 = 8/\Delta^2$, per cui $f(E) = f(E_0) + ((E - E_0)/(\Delta/2))^2 + \dots$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^\alpha$$

te¹⁵:

Ordine 0

$$\begin{aligned} S(E_0) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^{\infty} dx e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &\simeq \\ \simeq S(E_0) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} 2 \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \left(1 - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &= \\ = \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} S(E_0) \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{5}{12} \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Ordine 1

$$\begin{aligned} S'(E_0) \frac{4E_0^2}{\tau} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^{\infty} dx x e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &\simeq \\ \simeq S'(E_0) \frac{4E_0^2}{\tau} e^{-\tau} 2 \int_0^{\infty} dx x e^{-x^2} \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} &= \\ = \frac{5E_0^2}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} S'(E_0) \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Ordine 2

$$\begin{aligned} S''(E_0) \frac{4E_0^3}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &\simeq \\ \simeq S''(E_0) \frac{4E_0^3}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} 2 \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \underbrace{\left(1 - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right)}_{O(1/\tau^2)} &\simeq \\ \simeq \frac{2E_0^3}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} S''(E_0) \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Troviamo così per il *reaction-rate*:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \sqrt{\pi} S(E_0) \underbrace{\left[1 + \frac{1}{\tau} \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{2} \frac{S'(E_0)}{S(E_0)} E_0 + \frac{S''(E_0)}{S(E_0)} E_0^2 \right) \right]}_{S_{eff}} \equiv \\ &\equiv \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \sqrt{\pi} S_{eff} = \\ &= \frac{2^{7/2} \tau^2 e^{-\tau}}{3^{5/2} b \sqrt{\mu}} S_{eff} \equiv \\ &\equiv K \frac{1}{AZ_1 Z_2} \tau^2 e^{-\tau} S_{eff} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che¹⁶ $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ e $kT = 27b^2/4\tau^3$ e abbiamo definito il fattore astrofisico efficace S_{eff} e la costante $K \simeq 7.2 \cdot 10^{-19}$. Osserviamo che $\langle \sigma v \rangle$ dipende fortemente da τ , ovvero dalla struttura della stella tramite T , e lo stesso vale per S_{eff} ; per

¹⁵Useremo principalmente che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^n = \begin{cases} 0 & n = 2s+1 \\ (2s-1)!! 2^{-s} \sqrt{\pi} & n = 2s \end{cases}$$

Inoltre dal momento che τ è “grande” (si guardi l’esempio di τ_{pp}) si approssima nell’estremo dell’integrale $-\sqrt{\tau} \sim -\infty$ e poi si sfrutta la parità della funzione integranda.

¹⁶Si ricavano direttamente dalle definizioni di b e di τ .

quanto riguarda quest'ultimo, facciamo uno sviluppo del fattore astrofisico e delle sue derivate in un intorno di $E = 0$ fino all'ordine 2 in S^{17} :

$$\begin{aligned} S_{eff} \simeq & S(0) \left(1 + \frac{5}{36} \frac{kT}{E_0} \right) + \\ & + S'(0) E_0 \left(1 + \frac{35}{36} \frac{kT}{E_0} \right) + \\ & + S''(0) E_0^2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{89}{36} \frac{kT}{E_0} \right) \end{aligned}$$

Questa espressione permette di trovare S indipendentemente dalla stella presa in considerazione, attraverso per esempio un fit polinomiale¹⁸ per $S(0)$, $S'(0)$ e $S''(0)$, tuttavia si perde l'informazione su $S(E_0)$ e gli errori per $E \sim 0$ sono particolarmente rilevanti. Si ricordi che prima dell'esperimento LUNA (i cui risultati sono riportati in turchese in Figura IV.10) non si avevano acquisizioni per basse energie tali da poter usare in un fit polinomiale, per cui la teoria era l'unica soluzione per esplorare tale *range*.

3.2 Elettroscreening

Passiamo alla trattazione¹⁹ del fenomeno dell'elettroscreening: immaginiamo l'atomo come un gas con una alta densità nel centro, dove si concentrano tutte le cariche positive; questo comporta una nuvola polarizzata che scherma il potenziale coulombiano (screening potenziale). Si ha allora una modifica nel termine di Gamow $P(E)$ in $\langle \sigma v \rangle$:

$$U_{tot}(r) = \underbrace{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}}_{U_{coul}} + U(r)$$

Definiamo allora alcune quantità che ci serviranno nel calcolo del contributo del termine $U(r)$:

- $E_{\max} \gg kT$ è l'energia del picco di Gamow.
- r_C è il *classical turning point*, ovvero il raggio per cui $E_{\max} = Z_1 Z_2 e^2 / r_C$.
- $r_n \ll r_C$ è il raggio nucleare, distanza dalla quale il potenziale attrattivo nucleare diviene maggiore della repulsione coulombiana.
- a è la grandezza scala della distanza tra le particelle. Data ρ la densità del gas e N_0 il numero di Avogadro, definiamo a come quel valore per cui:

$$4\pi a^3 \rho N_0 = 1 \Rightarrow 4\pi a^3 \tilde{\rho} = 1$$

Dal momento che²⁰ $\tilde{\rho} = \rho N_0$ e $\tilde{\rho} = 3M/4\pi a^3$, si ha $M = 1/3$ a.m.u., ovvero a può essere visto come il raggio di una sfera di massa media pari a un terzo di unità di massa atomica.

¹⁷Per cui:

$$\begin{aligned} S(E_0) &\simeq S(0) + S'(0) E_0 + \frac{1}{2} S''(0) E_0^2 \\ S'(E_0) &\simeq S'(0) + S''(0) E_0 \\ S''(E_0) &\simeq S''(0) \end{aligned}$$

¹⁸Per "calibrare" il fit ovviamente sono necessari degli input teorici che si ottengono dal *match* tra la teoria e i dati sperimentali a energie più alte.

¹⁹Calcolo ripreso dall'articolo Salpeter, E.E., Australian Journal of Physics, 1954, vol.7, p.373, DOI: [10.1071/PH540373](https://doi.org/10.1071/PH540373).

²⁰Se M è misurata in a.m.u..

- R è il raggio della nuvola elettronica (vedremo che $R > a$ e $R \gg r_C$, altrimenti non si avrebbe lo screening).

Per capire come si modifica $P(E)$ dobbiamo studiare $E - U(r) - Z_1 Z_2 e^2 / r$. Per $r \gg R$ ovviamente $U(r) \ll 1$ e per $r < R$ possiamo approssimare $U_0 \simeq Z_1 Z_2 e^2 / R = E_{\max} r_C / R \ll 1$ costante. Come mostrato in Figura V.9 l'effetto dell'elettroscreening è quello di abbassare la

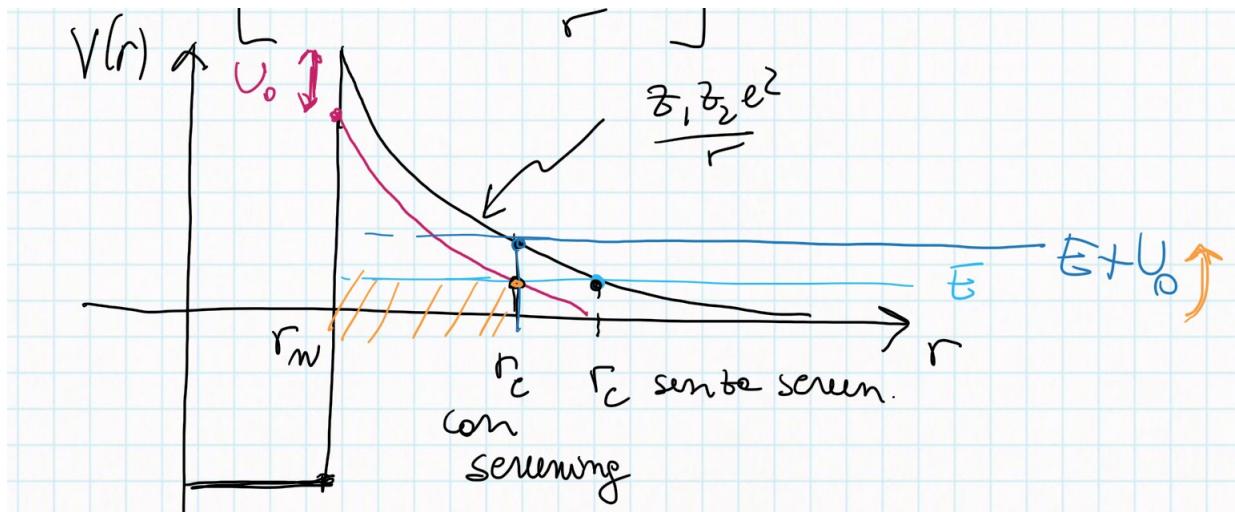


Figura V.9: Schema della barriera di potenziale con (linea nera) e senza (linea rosa) elettroscreening.

barriera di potenziale ed è possibile descrivere il problema nel caso di assenza di elettroscreening shiftando l'energia $E \rightarrow E + U_0$; l'integrale allora diviene²¹:

$$\int_0^\infty dE S(E + U_0) P(E + U_0) e^{-(E + U_0)/kT} \stackrel{U_0 \ll E_{\max}}{\simeq} e^{-U_0/kT} \left[\int_0^\infty dE S(E) P(E) e^{-E/kT} \right]$$

Alcuni valori tipici:

$$\langle \sigma v \rangle = r_n \simeq 2 \text{ fm} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad a \simeq 10^{-9} \text{ cm}$$

$$r_C \simeq 2 \cdot 10^{-11} \text{ cm} \quad R \simeq 3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

Per semplicità supponiamo che $Z_1 > Z_2$ e $z \equiv Z_2$ sia la carica dei costituenti principali del gas stellare.

Abbiamo allora due possibili effetti:

1. **screening forte** $E_{coul} > kT$ che riguarda principalmente gli esperimenti di fusione con plasma e che anche se trattati nell'articolo di Salpeter non discuteremo.
2. **screening debole** $E_{coul} \ll kT$ che interessa principalmente le stelle.

3.2.1 Calcolo screening debole

Ancora una volta definiamo alcune quantità utili:

- Il numero medio di elettroni per a.m.u. nel gas stellare:

$$\xi \equiv \sum_i \frac{X_i Z_i}{A_i}$$

dove con X_i si intende l'abbondanza frazionale in massa del nucleo i con carica Z_i e numero di massa A_i .

²¹Abbiamo approssimato l'estremo inferiore dell'integrale U_0 a 0, poiché $U_0/E_{\max} \ll 1$.

- L'energia di Fermi del gas di elettroni nel caso non relativistico:

$$E_F \equiv \frac{h^2}{8\pi^2 m} (3\pi^2 N_0 \rho \xi)^{2/3} = \left(\frac{3\pi\xi}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{8\pi^2 m}$$

- Infine definiamo il rapporto:

$$D \equiv \frac{E_F}{kT} \simeq 0.30 \frac{(\xi\rho)^{2/3}}{T_6}$$

Nel caso di screening debole supponiamo che il gas di elettroni sia non degenere e che i costituenti principali del gas stellare abbiano z e A ; allora si ha:

$$\begin{aligned} U_{tot}(r) &= Z_1 z e^2 \psi_{tot}(r) \\ \psi_{tot}(r) &\equiv \frac{1}{r} + \psi(r) \end{aligned}$$

Mettiamoci con Z_1 nel centro e con $V(r)$ potenziale elettrostatico e $\bar{\rho}(r)$ densità di carica elettronica mediati su tutte le particelle eccetto 1. Per una carica di prova $\delta Z e$ si ha dall'equazione di Poisson²²:

$$\nabla^2 Z_1 e \psi_{tot}(r) = -4\pi \bar{\rho} - 4\pi Z_1 e \delta^3(r) \quad (\text{V.1})$$

Per risolvere il sistema abbiamo però bisogno di un'altra equazione, che ci viene data dalla meccanica statistica: consideriamo una regione in cui ogni particella ha energia potenziale $U_e(r)$, allora la densità di carica media sarà data da:

$$\bar{\rho}(r) = \underbrace{\left(\frac{\rho N_0 z e}{A}\right)}_{\text{densità di carica}} \left[\underbrace{\exp\left(-\frac{Z_1 z e^2}{kT} \psi_{tot}(r)\right)}_{\text{parte nucleare}} - \underbrace{\exp\left(\frac{Z_1 e^2}{kT} \psi_{tot}(r)\right)}_{\text{parte elettronica}} \right]$$

Nel caso di screening debole possiamo sviluppare gli esponenziali al prim'ordine per cui l'espressione diviene:

$$\bar{\rho}(r) \simeq -\left(\frac{\rho N_0 z e}{A}\right) \psi_{tot}(r) \frac{Z_1 e^2}{kT} (1+z) \quad (\text{V.2})$$

Allora sostituendo questa in (V.1)abbiamo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} + \psi(r) \right) &= 4\pi \rho N_0 \frac{e^2(z+z^2)}{A k T} \left(\frac{1}{r} + \psi(r) \right) - 4\pi \delta^3(r) \\ \nabla^2 \psi(r) &= 4\pi \rho N_0 \frac{e^2(z+z^2)}{A k T} \left(\frac{1}{r} + \psi(r) \right) \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Le condizioni al contorno per questa equazione differenziale sono imposte dalla necessità di avere l'andamento del potenziale $\propto 1/r$ per grandi distanze e finito per $r = 0$:

$$\begin{aligned} r \rightarrow +\infty &\quad \psi(r) \rightarrow -\frac{1}{r} \\ r \rightarrow 0 &\quad \psi(r) \rightarrow \psi(0) < \infty \end{aligned}$$

Per semplicità definiamo R_{DH} ²³ in modo da raccogliere tutti i termini costanti in (V.3):

$$R_{DH}^2 \equiv \frac{kT}{4\pi\rho N_0 e^2} \frac{A}{z+z^2} = \frac{kT}{e^2} a^3 \frac{A}{z+z^2}$$

²² $\nabla^2 V(r) = -4\pi\rho(r)$.

²³ Dall'analisi dimensionale $[R_{DH}] = [L]$. Le lettere a pedice indicano le iniziali di Debye e Hückel, autori della teoria delle soluzioni diluite elettrolitiche; Salpeter scelse questa notazione perché le soluzioni dei due problemi erano le stesse.

La soluzione è data da²⁴:

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \left(e^{-r/R_{DH}} - 1 \right)$$

Notiamo che $\psi(0) \simeq (1 - r/R_{DH} - 1)/r = -1/R_{DH}$ e $\psi(r \rightarrow \infty) = -1/r$. Avremo allora per l'energia potenziale $U(r) = Z_1 Z_2 e^2 \psi(r)$:

$$U(r) = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{r} \left(e^{-r/R_{DH}} - 1 \right) \quad U(0) = U_0 = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{DH}}$$

$$-\frac{U_0}{kT} \simeq 0.188 Z_1 Z_2 \sqrt{\frac{\rho}{T_6^3}} \xi \quad (\text{V.4})$$

dove abbiamo definito $\xi \equiv \sqrt{(z + z^2)/A}$.

Un calcolo più preciso. Rilassiamo a questo punto alcune delle ipotesi fatte in precedenza. Consideriamo un gas a più specie nucleari z_i, A_i, X_i , per cui²⁵:

$$\bar{\rho}_i(r) \propto \sum_i \exp \left(-Z_i \frac{z_i e^2}{kT} \psi_{tot}(r) \right)$$

Inoltre dal momento che sono fermioni consideriamo gli elettroni distribuiti come una Fermi-Dirac ($x \equiv E/kT$):

$$f(\eta) = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} + 1}$$

con $\eta \equiv \mu/kT$; per elettroni non interagenti $f(\eta) = 2D^{2/3}/3$, dove $D \equiv E_F/kT$. Poiché la densità degli elettroni si aggiusta in modo tale da uniformare il potenziale termodinamico, per elettroni interagenti avremo:

$$\begin{aligned} f\left(\eta - \frac{U_e(r)}{kT}\right) &= \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} e^{U_e/kT} + 1} \simeq \\ &\simeq \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} (1 + U_e/kT) + 1} = \\ &= \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{\left(e^{x-\eta} + 1\right) \left(1 + \frac{U_e}{kT} \frac{e^{x-\eta}}{e^{x-\eta} + 1}\right)} \simeq \\ &\simeq \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} + 1} \left(1 - \frac{U_e}{kT} \frac{e^{x-\eta}}{e^{x-\eta} + 1}\right) = \\ &= f(\eta) - \frac{U_e}{kT} \frac{df}{d\eta} \end{aligned}$$

Il rapporto tra gli elettroni interagenti e quelli non interagenti sarà dato da:

$$\frac{f(\eta - U_e/kT)}{f(\eta)} \simeq 1 - \frac{U_e}{kT} \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}$$

²⁴

$\nabla^2 \psi(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r) \Rightarrow \frac{d^2 \Psi}{dr^2} - \frac{1}{R_{DH}^2} \Psi = \frac{1}{R_{DH}^2}$

con $\Psi(r) \equiv r \psi(r)$ per cui $\Psi \rightarrow -1$ per $r \rightarrow +\infty$ e $\Psi \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$.

²⁵È sufficiente mandare z^2/A in $\sum_i X_i z_i^2/A_i$.

²⁶

$\frac{df}{d\eta} = - \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{(e^{x-\eta} + 1)^2} (-e^{x-\eta})$

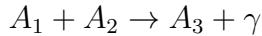
Questo termine entra nell'espressione di $\bar{\rho}$ influendo sul rapporto z/A , per cui adesso avremo la stessa espressione (V.4), ma ξ sarà definito come²⁷:

$$\xi^2 \equiv \sum_i \frac{X_i z_i^2}{A_i} + \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \sum_i \frac{X_i z_i}{A_i}$$

3.2.2 In laboratorio

Studiamo allora gli effetti dell'elettroscreening.

Prendiamo un nucleo proiettile A_1 (per es. ioni di un nucleo) e un nucleo bersaglio A_2 (per es. una targhetta o un gas) per cui si ha:



Per esempio $p + {}^7\text{Be}$. Dato che il nucleo è circondato dalla nuvola elettronica avremo un certo effetto di screening, tuttavia non si tratta dell'effetto di interesse astrofisico, poiché le densità stellari sono differenti da quelle ottenibili in laboratorio. Dalla sezione d'urto così misurata (σ_{lab}) dev'essere, quindi, rimosso l'effetto di screening così da avere (σ_{bare}), che verrà successivamente corretta con il contributo dello screeningstellare. Definito $\eta(E) \equiv Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$, abbiamo dalla teoria:

$$\sigma_{lab}(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta(E)}$$

Poiché²⁸ $U_0 \ll E_{\max}$, detta $E_{eff} \equiv E + U_0$ si ha che $S(E)/E \approx S(E_{eff})/E_{eff}$, per cui:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \simeq \frac{e^{-2\pi\eta(E_{eff})}}{e^{-2\pi\eta(E)}}$$

Facendo uno sviluppo per $\eta(E_{eff})$ in un intorno di E e notando che $d\eta/dE = -\eta(E)/2E$ otteniamo:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \simeq \exp\left(\pi Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \frac{U_0}{E}\right) \equiv e^{g(E)}$$

Dunque per basse energie è necessario “pulire” la σ misurata secondo quell'esponenziale e poi da questa calcolarsi la σ per i modelli stellari.

Solitamente $U_0 \approx Z_1 Z_2 e^2 / R_a$ con R_a raggio atomico, per cui quello che viene fatto è *fittare* i dati con U_0 come parametro; se osserviamo per $E \rightarrow 0$ un andamento crescente di tipo lorentziano abbiamo una risonanza (o stretta o sotto soglia), se invece tale andamento è $\sim \exp(g(E))$ allora siamo in presenza di elettroscreening. In ultima battuta osserviamo che minore è l'energia alla quale osserviamo e maggiore sarà la sensibilità dell'andamento a possibili effetti di screening.

4 Studio ab-initio

La *pp* non si riesce a misurare, tuttavia è possibile studiarla²⁹ col metodo che abbiamo discusso nella sezione 5.3 - *Una parentesi: Metodo ab-initio*; fu Bethe il primo a lavorarci, dando inizio al modello solare.

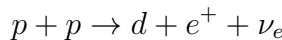
Prima di “addentrarci” nel calcolo, osserviamo che la funzione d'onda finale sarà la stessa di quella per lo studio della reazione in sezione 5 - *La prima reazione*, poiché il prodotto di entrambe

²⁷Ovviamente è necessario conoscere X_i ; fino a qualche anno fa non c'erano problemi, ma negli ultimi tempi nuove misure per il Sole hanno sollevato tensioni sui valori.

²⁸Si tenga a mente che $U_0^{lab} \neq U_0^{star}$.

²⁹Avvertiamo il lettore che ci saranno differenze di notazione rispetto a quando abbiamo mostrato il calcolo la prima volta.

è un deutone, tuttavia si avranno differenze per le funzioni d'onda dei reagenti e per il fatto che la pp non è mediata dall'interazione elettromagnetica.



Dunque studieremo la cinematica della reazione per avere la dipendenza dall'elemento di matrice ridotta e poi passeremo al calcolo di questo.

Calcolo della cinematica. Detto w il *rate* di decadimento, dalla teoria di Fermi:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

dove $V_{fi} = G_F M$ con G_F costante di Fermi e M elemento di matrice del decadimento β^+ . Trascuriamo la massa del neutrino per cui $E_i - E_f \equiv E_0 = E_e + E_\nu = E + cq$ e nel centro di massa $\vec{p}_d = -\vec{p} - \vec{q}$ (non indipendente da p e q , ma determinato da essi); possiamo allora riscrivere la densità di stati finali nello spazio delle fasi:

$$\begin{aligned} dn &= \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{p^2 q^2}{4\pi^4 \hbar^6} dp dq \quad ^{30} \\ \rho(E_f) &\equiv \frac{dn}{dE_\nu} = \frac{dn}{cdq} = \frac{p^2 (E_0 - E)^2}{4\pi^4 c \hbar^6 c^2} dp \end{aligned}$$

dove ci siamo limitati solo agli stati di interesse dn/dE_ν (come avevamo fatto nel decadimento β fissando l'energia dell'elettrone e differenziando in q). Avremo quindi per il *rate*:

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \frac{p^2 (E_0 - E)^2}{4\pi^4 c \hbar^6 c^2} dp \xrightarrow{p \rightarrow E} \frac{|V_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} (E_0 - E)^2 \sqrt{E^2 - m^2 c^4} E dE$$

Ricordando che $d\sigma = dw/j_{inc} = dw/v$, integrando in dE si ha³¹:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi^3 v} G_F^2 |M|^2 \underbrace{\int_m^{E_0} (E_0 - E)^2 \sqrt{E^2 - m^2} E dE}_{\text{int. di Fermi } f(E_0)}$$

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{(2S_p + 1)^2} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \left| \int d^3 x \psi_d^*(\vec{x}) \psi_{pp}(\vec{x}) \right|^2$$

dove abbiamo mediato sugli *spin*³². Da questo punto in poi adesso si procede numericamente, tuttavia a scopo illustrativo illustriamo il calcolo analitico che eseguì anche Bethe³³.

Risoluzione analitica. Anche se il calcolo è analitico il risultato è piuttosto valido. Per studiare ψ_d prendiamo:

- l'onda S $\psi_d \rightarrow {}^3S_1$, per cui $\psi_d = u(r)/r$.

³⁰Abbiamo integrato su $d\hat{q}d\hat{p}$.

³¹ $c = \hbar = 1$.

³²La parte di *isospin* $\eta_d(\tau = 0)(np) \sum_i \tau_i^- (pp)$ valutata sulle funzioni d'onda è 1.

³³L'articolo al quale ci riferiamo è Bethe, H. A. & Critchfield, C. L., Phys. Rev., 1938, vol.54, p.248, url: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.54.248>.

- buca di potenziale $V = -V_0$ per $r < r_0$.

$$\psi_d = \begin{cases} \frac{C}{r} e^{-\alpha r} & r > r_0 \\ \frac{C'}{r} \sin(k_0 r) & r < r_0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \alpha &\equiv \sqrt{mB}/\hbar \\ k_0 &\equiv \sqrt{m(V_0 - B)}/\hbar \end{aligned}$$

Abbiamo allora $b \equiv 1/\alpha \simeq 4.4$ fm e definendo $x \equiv r/b$, $x_0 \equiv r_0/b$ e $\mu \equiv \sqrt{(V_0 - B)/B} = k_0/\alpha$ si ottiene:

$$\psi_d = \begin{cases} \frac{A}{r} e^{-(x-x_0)} \equiv \psi_> & r > r_0 \\ \frac{A}{r} \sin(\mu x)/\sin(\mu x_0) \equiv \psi_< & r < r_0 \end{cases}$$

Osserviamo che questa espressione soddisfa automaticamente la continuità sia della funzione che della sua derivata in $r = r_0$, per cui dalla condizione di normalizzazione³⁴ si ottiene³⁵:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{1+x_0}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{-2}}}$$

Studiamo a questo punto ψ_{pp} :

- consideriamo sempre un'onda S ($\ell = 0$), perché le energie sono comunque basse³⁶.
- prendiamo la stessa buca di potenziale, ma per $r > r_0$ consideriamo un potenziale coulombiano V_{coul} . Dovremo risolvere allora l'equazione di Schrödinger con $\psi_{pp}(r) = u(r)/r$:

$$u'' - \frac{m}{\hbar^2} (V(r) - E) u = 0$$

Definita la massa ridotta $\mu \equiv m/2$ e $\rho \equiv kr$ con $k = \mu v/\hbar$ si ha³⁷ allora per $r < r_0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + 1 + \frac{2V_0}{\mu v^2} \right) u &= 0 \\ \psi_<(r) r = u(r) &= A \sin\left(\frac{\sqrt{mD}}{\hbar} r\right) \\ D \equiv \underbrace{V_0}_{\sim \text{MeV}} + \frac{\hbar^2 k^2}{\underbrace{m}_{\simeq 6 \text{ keV}}} &\simeq V_0 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece $r > r_0$ prendiamo le funzioni di Coulomb³⁸ regolare $F_L(kr)$ e irregolare $G_L(kr)$:

$$\psi_>(r) = \left[F_0(kr) + \tan(\delta_0) G_0(kr) \right] \frac{e^{i\delta_0} \cos(\delta_0)}{kr}$$

dove δ_0 è lo sfasamento. Per trovare A e δ_0 imponiamo:

- continuità delle derivate logaritmiche:

$$\begin{aligned} \frac{\psi'_>}{\psi_>} \Big|_{r=r_0} &= \frac{\psi'_<}{\psi_<} \Big|_{r=r_0} \\ \tan \delta_0 &= \frac{F_0(kr_0) - F_0(kr_0) \frac{d}{dr} \ln w(r_0)}{G_0(kr_0) \frac{d}{dr} \ln w(r_0) - G'_0(kr_0)} \end{aligned}$$

dove abbiamo definito $w(r) = A \sin(\sqrt{mD}r/\hbar)$.

³⁴ $1 = \int |\psi_d|^2 = \int_0^{r_0} |\psi_<|^2 + \int_{r_0}^{\infty} |\psi_>|^2$.

³⁵ Successivamente per non confonderci con la costante che compare in ψ_{pp} chiameremo questa $A \rightarrow A_d$.

³⁶ Si ricordi l'ordine di grandezza per le energie del picco di Gamow.

³⁷ $E = \mu v^2/2 = \hbar^2 k^2/m$.

³⁸ Nel nostro caso $L = 0$.

- continuità delle funzioni in $r = r_0$:

$$A \simeq \frac{F_0(kr_0) + \tan \delta_0 G_0(kr_0)}{k \sin(\sqrt{mD}r_0/\hbar)}$$

dove abbiamo approssimato $\cos \delta_0 \sim e^{i\delta_0} \sim 1$ dal momento che $\delta_0 \sim 0.002$.

Al tempo di Bethe F_0 e G_0 erano tabulate (non esistevano i calcolatori), per cui si aveva:

$$F_0(kr) \simeq \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma} - 1}}}_{\text{Cost. Coulomb}} kr \Phi(kr) \equiv C_0 kr \Phi(kr)$$

$$G_0(kr) = C_0^{-1} \Theta(kr)$$

dove $\gamma \equiv Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$ e Φ e Θ sono due polinomi tabulati³⁹. Possiamo allora riscrivere:

$$\begin{aligned} \tan \delta_0 &= C_0^2 kr_0 \lambda \\ A &= C_0 r_0 \left(\frac{\Phi(kr_0) + \lambda \Theta(kr_0)}{\sin(\nu r_0/b)} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo raccolto⁴⁰ in λ tutta la parte dipendente dai polinomi e abbiamo definito $b \equiv \hbar/\sqrt{mB}$ e $\nu \equiv \sqrt{mDb}/\hbar = \sqrt{D/B}$. Dunque, l'espressione di ψ_{pp} :

$$\begin{aligned} \psi_> &= C_0 \left[\Phi(kr) + \lambda \frac{r_0}{r} \Theta(kr) \right] \\ \psi_< &= \frac{C_0 r_0}{r} \left[\Phi(kr_0) + \lambda \Theta(kr_0) \right] \frac{\sin(\nu r)/b}{\sin(\nu r_0)/b} \end{aligned}$$

³⁹Non siamo interessati all'espressione di questi polinomi, ma la riportiamo solo per completezza:

$$\Phi(kr) \simeq 1 + \gamma kr - (2\gamma^2 - 1) \frac{(kr)^2}{6} + O((kr)^3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(kr)^i$$

$$\Theta(kr) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(kr)^j + (2kr\gamma \ln 2kr + f(\gamma))$$

Basti ricordare che Φ è un polinomio *smooth* e che $\Phi(0) = 1$.

⁴⁰Questa è una notazione di Bethe

Possiamo adesso calcolare l'elemento di matrice⁴¹:

$$\begin{aligned}
 M &= \int d^3x \psi_d^*(\vec{x}) \psi_{pp}(\vec{x}) = \\
 &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \psi_d(r) \psi_{pp}(r) = \\
 &= 4\pi \left[\int_0^{r_0} r^2 dr \psi_{pp,<}(r) \psi_{d,<}(r) + \int_{r_0}^\infty r^2 dr \psi_{pp,>}(r) \psi_{d,>}(r) \right] \\
 &= 4\pi C_0 A_d b^2 \left[\frac{x_0}{\sin \mu x_0} \frac{(\Phi(kr_0) + \lambda \Theta(kr_0))}{\sin \gamma x_0} \int_0^{x_0} dx \sin \mu x \sin \nu x \right. \\
 &\quad \left. + \int_{x_0}^\infty dx x e^{-(x-x_0)} \Phi(kbx) + \lambda \int_{x_0}^\infty x_0 e^{-(x-x_0)} \Theta(kbx) \right] \equiv \\
 &\equiv 4\pi C_0 b^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{1+x_0}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{-2}}} \left[\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \right] \equiv \\
 &\equiv 4\pi C_0 b^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \Lambda
 \end{aligned}$$

dove abbiamo definito Λ_i per raccogliere i vari integrali, anche se sono comunque tutti facilmente risolubili (prodotto di seni o integrali di polinomi per un esponenziale). Sostituiamo M nell'espressione della sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{C_0^2 b^3}{\pi^2 v} G_F^2 f(E_0) \Lambda^2$$

4.1 Risultati

Così facendo Bethe trovò $\Lambda^2 = 5.93 \div 8.08$ e un fattore astrofisico $S = (3.38 \div 4.61) \cdot 10^{-25}$ MeVb. I risultati⁴² globali sono riportati in Tabella V.10.

TABLE I. Numerical results for two values of the radius.

	$r_0 = e^2/mc^2$	$r_0 = e^2/2 mc^2$
x_0	0.645	0.322
V_0 (Mev)	20.9	66.5
D (Mev)	10.3	47.0
μ	2.94	5.45
ν	2.18	4.65
$(rd \log w/dr)$	0.236	0.110
$\Phi(r_0)$	1.050	1.025
$\Theta(r_0)$	0.769	0.854
$(rd \log \Phi/dr)$	0.050	0.025
ζ	0.814	0.915
λ	2.63	4.80
Λ_1	0.689	0.277
Λ_2	1.949	1.547
Λ_3	1.205	1.030
$(1+x_0)(1+\mu^{-2})$	1.835	1.367
Λ	2.84	2.44
Λ^2	8.08	5.93

Figura V.10: Risultati di Bethe per $r_0 \simeq 3$ fm e $r_0 \simeq 1.5$ fm.

L'“enorme” incertezza sul fattore astrofisico della pp si ripercuote anche sulle successive stime del flusso di neutrini solari, per questa ragione nel 1998 fu fatto un altro calcolo con potenziali dipendenti dal tempo (AV18 e CD-Bonn) detti *realistici* perché riproducono tutti i dati sperimentali $NN + d$ con un rapporto $\chi^2/\text{dati} \sim 1.04$. Inoltre in questo studio non è stato

⁴¹Si ricordi che $x \equiv r/b$.

⁴²È interessante osservare che il neutrino fu teorizzato proprio nel 1938 e Bethe ne tiene di conto, tuttavia non lo riporta.

considerato solo l'operatore di *isospin*, ma un operatore di Gamow-Teller, quindi a un corpo, perché si ha infatti il passaggio ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$, ovvero un operatore vettoriale nello spazio dello spin $\sum_i \vec{\sigma}_i \tau_i^\pm$. Per questo operatore è possibile fare uno studio *ab-initio* sui decadimenti β di nuclei leggeri come ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$: utilizzando tale operatore a un corpo sottostimiamo⁴³ $\tau_{1/2}$ di circa il 4% e questo è dovuto al fatto di aver trascurato le *meson-exchange currents*.

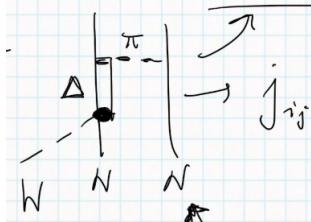


Figura V.11: Schema del decadimento β con nuclei leggeri. N sono i nuclei, W è il bosone di interazione, π è la corrente di mesoni e Δ è la risonanza che si dissecita.

Tornando al lavoro del 1998, che tenne conto del parametro di correzione all'operatore GT, si ottenne $\Lambda^2 = 7.035$ (circa il valore centrale del *range* trovato da Bethe) e un fattore astrofisico $S(0) = 4.01(1.000 \pm 0.009) \cdot 10^{-25}$ MeVb. Nel 2008 il conto è stato rifatto, ma con una trattazione dell'errore più rigorosa ed è stato confermato il risultato.

⁴³Esiste tuttavia un parametro nella teoria della MEC per correggere tale sottostima.

Capitolo VI

R-MATRIX

In questo capitolo viene presentato il metodo della *R*-Matrix sia *calculable* che *phenomenological* con alcuni esempi di applicazione. Il capitolo copre le lezioni 12/04/2021, 14/04/2021,

Introduzione Finora abbiamo visto che i metodi *ab-initio* permettono di calcolare la sezione d’urto partendo da una buona base teorica senza la necessità di “aggiustare” i risultati con osservazioni per ottenere le corrette relazioni, tuttavia dipendono fortemente dal metodo di calcolo delle funzioni d’onda, il quale diviene sempre più complesso al crescere di A . In questo capitolo tratteremo quindi le caratteristiche principali di un metodo alternativo a quello *ab-initio* detto metodo della *R*-MATRIX (RM) seguendo l’articolo di Descouvemont & Baye¹. Esistono due principali versioni:

1. *Phenomenological*
2. *Calculable*

Il primo a essere stato sviluppato è stato 1., ma dal punto di vista didattico è più chiaro il 2., per cui partiremo da questo.

1 Calculable RM

Studiamo lo scattering $A_1 + A_2$ all’energia E . Trascurando per semplicità lo *spin*, sviluppiamo in armoniche sferiche la soluzione dell’equazione di Schrödinger² $(T + V)\psi = E\psi$:

$$\psi = \sum_{\ell} \frac{u_{\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\hat{r})$$

Raccogliendo i vari termini in $H_{\ell} \equiv T_{\ell} + V_C + V_N$ si ha:

$$(H_{\ell} - E)u_{\ell}(r) = 0 \quad (\text{VI.1})$$

Per quanto riguarda il potenziale una schematizzazione come quella in Figura V.9 è troppo semplice, prenderemo invece un potenziale simile a quello in Figura VI.1 con un certo raggio a detto *channel radius* che separa la regione interna dove il contributo maggiore è dato da V_N da quella esterna in cui domina V_C .

¹ Descouvemont, P. & Baye, D., Rep. Prog. Phys., 2010, vol.3, DOI: [10.1088/0034-4885/73/3/036301](https://doi.org/10.1088/0034-4885/73/3/036301), arXiv: <https://arxiv.org/abs/1001.0678>.

²L’Hamiltoniana è simmetrica sotto rotazioni, traslazioni e riflessioni.

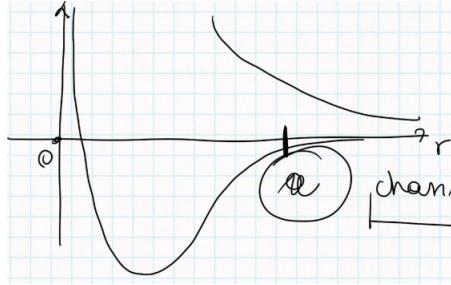


Figura VI.1: Schema del potenziale usato: V_N per $r < a$ e V_C per $r > a$.

Partiamo dalle soluzioni per $r > a$: $u_\ell^{ext}(r) \propto \cos \delta_\ell F_\ell(\eta, kr) + \sin \delta_\ell G_\ell(\eta, kr)$ dove F e G sono le funzioni di Coulomb e η è il coefficiente di Coulomb. Definiamo:

$$\begin{aligned} I_\ell(kr) &\equiv G_\ell(\eta, kr) - i F_\ell(\eta, kr) \\ O_\ell(kr) &\equiv G_\ell(\eta, kr) + i F_\ell(\eta, kr) \\ u_\ell^{ext}(r) &= C_\ell \left(I_\ell(kr) - \underbrace{U_\ell}_{\exp(2i\delta_\ell)} O_\ell(kr) \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.2})$$

Dal momento che si trascurano gli *spin* non si hanno canali accoppiati. Per $r < a$ espandiamo in funzioni φ_j note e nulle per $r \rightarrow 0$:

$$u_\ell^{int}(r) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(r) \quad (\text{VI.3})$$

Sono quindi da determinare solo le costanti C_ℓ e c_j attraverso le condizioni di continuità:

$$\begin{cases} u_\ell^{int}(a) = u_\ell^{ext}(a) \\ u_\ell'^{int}(a) = u_\ell'^{ext}(a) \end{cases} \quad (\text{VI.4})$$

Abbiamo però una difficoltà: H_ℓ non è hermitiano in $[0, a]$, quindi non è simmetrico:

$$\begin{aligned} \int_0^a dr \varphi_i \frac{d^2}{dr^2} \varphi_j &\neq \int_0^a dr \varphi_j \frac{d^2}{dr^2} \varphi_i \\ \varphi_i(a) \frac{d}{dr} \varphi_j(a) - \int_0^a dr \frac{d}{dr} \varphi_i \frac{d}{dr} \varphi_j &\neq \varphi_j(a) \frac{d}{dr} \varphi_i(a) - \int_0^a dr \frac{d}{dr} \varphi_j \frac{d}{dr} \varphi_i \\ \varphi_i(a) \frac{d}{dr} \varphi_j(a) &\neq \varphi_j(a) \frac{d}{dr} \varphi_i(a) \end{aligned}$$

Per questa ragione “hermitizzeremo” l’operatore tramite quello che viene definito operatore di Bloch:

$$\mathcal{L}(B) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \delta(r - a) \left(\frac{d}{dr} - \frac{B}{r} \right) \quad (\text{VI.5})$$

il risultato non dovrà ovviamente dipendere dal parametro B scelto. Avremo quindi una nuova hamiltoniana $H_\ell \rightarrow H_\ell + \mathcal{L}(B)$ hermitiana e l’equazione di Schrödinger diverrà l’equazione di Bloch-Schrödinger³:

$$(H_\ell + \mathcal{L}(B) - E) u_\ell^{int} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \delta(r - a) \left(\frac{d}{dr} - \frac{B}{r} \right) u_\ell^{int} = \mathcal{L}(B) u_\ell^{ext} \quad (\text{VI.6})$$

³Per passare da una all’altra è sufficiente sommare da ambo i lati $\mathcal{L}(B) u_\ell^{int}$.

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla condizione di continuità in $r = a$ (imposto dalla δ) in equazione (VI.4). Definiamo allora la matrice R come:

$$u_\ell(a) \equiv R_\ell(E, B)[a u'_\ell(a) - B u_\ell(a)] \quad (\text{VI.7})$$

$$\frac{1}{R_\ell(E, B)} \equiv a \frac{u'}{u} \Big|_{r=a} - B$$

Sostituendo l'espressione di u^{int} definita in equazione (VI.3) nell'equazione (VI.6):

$$\begin{aligned} \sum_j (H_\ell + \mathcal{L}(B) - E) c_j \varphi_j(r) &= \mathcal{L}(B) u_\ell^{ext} \\ \sum_j \underbrace{\int_0^a dr \varphi_i(r) (H_\ell + \mathcal{L}(B) - E) \varphi_j(r)}_{C_{ij}(E, B)} c_j &= \int_0^a dr \varphi_i(r) \frac{\hbar}{2\mu} \delta(r-a) \left(u_\ell'^{ext}(r) - B \frac{u_\ell^{ext}(r)}{r} \right) \\ \sum_j C_{ij}(E, B) c_j &= \frac{\hbar^2}{2\mu a} \varphi_i(a) \left(a u_\ell'^{ext}(a) - B u_\ell^{ext}(a) \right) \end{aligned}$$

dove $C_{ij}(E, B)$ sono elementi di una matrice simmetrica facilmente calcolabili dal momento che le φ sono note; pure le $u_\ell'^{ext}(a)$ e $u_\ell^{ext}(a)$ sono note per cui dall'ultima equazione si possono calcolare i coefficienti c_j e riscrivere in maniera più compatta:

$$\sum_j C_{ij}(E, B) c_j = \frac{\hbar^2}{2\mu a} \varphi_i(a) \frac{u_\ell^{ext}}{R_\ell(E, B)} \quad (\text{VI.8})$$

Possiamo da questa ricavare un'espressione per R_ℓ partendo dalla (VI.3):

$$\begin{aligned} u_\ell^{int}(a) &= \sum_j \varphi_j(a) \sum_i \left[C(E, B) \right]_{ij}^{-1} \varphi_i(a) \frac{\hbar^2}{2\mu a} \frac{u_\ell^{ext}(a)}{R_\ell(E, B)} \\ u_\ell^{int}(a) &= \frac{\hbar^2}{2\mu a} \frac{u_\ell^{ext}(a)}{R_\ell(E, B)} \sum_{i,j=1}^N \varphi_j(a) \left[C(E, B) \right]_{ij}^{-1} \varphi_i(a) \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

Usando la continuità:

$$R_\ell(E, B) = \frac{\hbar^2}{2\mu a} \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(a) \left[C(E, B) \right]_{ij}^{-1} \varphi_j(a) \quad (\text{VI.10})$$

Ricordiamo che il potenziale che viene usato non è quello di un singolo nucleone, ma quello di uno o due cluster e questo lo distingue da un metodo *ab-initio*.

1.1 Proprietà della RM

Supponiamo che N sia finito e le φ siano ortonormali. Per $E = 0$, poiché la matrice $[C]_{ij}$ è diagonalizzabile, avremo autovettori $\bar{v}_{n\ell}$ (che prendiamo ortonormali) e autovalori $E_{n\ell}$ per cui $C(0, B)\bar{v}_{n\ell} = E_{n\ell}\bar{v}_{n\ell}$. Possiamo allora fare una decomposizione spettrale del tipo $C_{ij}(0, B) = \sum_n E_{n\ell} \bar{v}_{n\ell,i} \bar{v}_{n\ell,j}^T$, da cui sfruttando l'ortonormalità delle φ si ha:

$$C_{ij}(E, B) = \langle \varphi_i | H_\ell + \mathcal{L}(B) - E | \varphi_j \rangle = C_{ij}(0, B) - E \delta_{ij} = \sum_{n=1}^N (E_{n\ell} - E) \bar{v}_{n\ell,i} \bar{v}_{n\ell,j}^T$$

Sostituendo nella (VI.10):

$$R_\ell(E, B) = \frac{\hbar^2}{2\mu a} \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(r) \sum_{n=1}^N \frac{\bar{v}_{n\ell,i} \bar{v}_{n\ell,j}^T}{E_{n\ell} - E} \varphi_j$$

Per rendere l'espressione più compatta⁴ definiamo la *reduced width* $\gamma_{n\ell} = \sqrt{\hbar^2/2\mu a} \phi_{n\ell}(a)$ dove abbiamo definito⁵ le funzioni d'onda $\phi_{n\ell}(r) = \sum_i \bar{v}_{n\ell,i} \varphi_i(r)$:

$$R_\ell(E, B) = \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_{n\ell}^2}{E_{n\ell} - E} \quad (\text{VI.11})$$

1.2 Sfasamento e RM

Per trovare una relazione tra la matrice di sfasamento U_ℓ in (VI.2) e la matrice R_ℓ egualiammo⁶ l'espressione (VI.2) con la definizione (VI.7) per $u_\ell^{ext}(a)$:

$$\begin{aligned} C_\ell \left[I_\ell(ka) - U_\ell O_\ell(ka) \right] &= u_\ell^{ext} = R_\ell(E, B) [a u_\ell^{ext'}(a) - B u_\ell^{ext}] \\ U_\ell &= \frac{I_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} \frac{1 + B R_\ell - R_\ell \underbrace{ka I'_\ell(ka)/I_\ell(ka)}_{L_\ell^*}}{1 + B R_\ell - R_\ell \underbrace{ka O'_\ell(ka)/O_\ell(ka)}_{L_\ell}} \end{aligned}$$

dove abbiamo definito le quantità L_ℓ e L_ℓ^* . Ricordando l'espressione per I_ℓ e O_ℓ possiamo definire un'angolo di sfasamento Φ_ℓ che caratterizza il contributo coulombiano secondo:

$$\begin{aligned} \frac{I_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} &= \frac{(1 - i F_\ell/G_\ell)^2}{1 + (F_\ell/G_\ell)^2} = \left(\frac{1 - i F_\ell/G_\ell}{\sqrt{1 + (F_\ell/G_\ell)^2}} \right)^2 \equiv e^{i2\Phi_\ell} \\ \tan \Phi_\ell &= -F_\ell/G_\ell \Big|_{ka} \end{aligned}$$

Per cui otteniamo un'espressione di U_ℓ che è indipendente da B ⁷ (come atteso):

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{1 - L_\ell^* R_\ell(E)}{1 - L_\ell R_\ell(E)}$$

Questa relazione può essere usata anche per determinare l'accuratezza del metodo numerico. Possiamo ancora però lavorare con tale espressione per raggiungere una forma più compatta e che evidensi maggiormente la relazione con lo sfasamento δ_ℓ . Scriviamo $L_\ell = S_\ell + i P_\ell$, dove

⁴Questa è l'espressione che solitamente si trova per R , dove si evidenzia il fatto che è una funzione *meromorfa*, cioè olomorfa ovunque eccetto in una serie di punti isolati.

⁵Se N è finito, allora $\phi_{n\ell}$ sono l'approssimazione variazionale delle autofunzioni dell'operatore $H + \mathcal{L}$ in a e l'espressione per R diviene un'approssimazione.

⁶Adottiamo la notazione per cui l'apice ' indica la derivata rispetto all'argomento della funzione:

$$\begin{aligned} f'(r) &= df/dr \\ g'(kr) &= dg/d(kr) \end{aligned}$$

⁷Non è evidente, ma è possibile dimostrarlo; non siamo interessati al conto, la dimostrazione è riportata in Complementi 6-CRM: *indipendenza dal parametro B* .

abbiamo definito S_ℓ shift factor e P_ℓ penetration factor, e dal momento che vale il Wronskiano $G_\ell F'_\ell - F_\ell G'_\ell = 1$ abbiamo:

$$P_\ell = \frac{ka}{F_\ell^2(ka) + G_\ell^2(ka)}$$

$$S_\ell = P_\ell [F'_\ell(ka)F_\ell(ka) + G'_\ell(ka)G_\ell(ka)]$$

Troviamo allora:

$$e^{2i\delta_\ell} = U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{(1 - S_\ell R_\ell + i P_\ell R_\ell)^2}{(1 - S_\ell R_\ell)^2 + (P_\ell R_\ell)^2}$$

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\frac{R_\ell P_\ell}{1 - S_\ell R_\ell} \right) \quad (\text{VI.12})$$

1.2.1 RM e risonanza

Consideriamo un processo di scattering $A_1 + A_2 \rightarrow A + \gamma$ e supponiamo che esista una risonanza in E_R (che avevamo visto manifestarsi in un salto di $\pi/2$ nello sfasamento). Dal momento che compare anche l'interazione coulombiana non sarà δ a saltare di $\pi/2$, ma $\delta_\ell - \Phi_\ell = \pi/2$ e questo implica per la risonanza $P_\ell R_\ell / (1 - S_\ell R_\ell) \rightarrow \infty$, ovvero $S_\ell(E_R) R_\ell(E_R) = 1$ (è un modo per definire E_R perché è una condizione univoca). Espandiamo in serie di Taylor il prodotto $S_\ell(E) R_\ell(E)$:

$$S_\ell(E) R_\ell(E) \simeq \overbrace{S_\ell(E_R) R_\ell(E_R)}^{=1} + (E - E_R) \frac{d}{dE} (S_\ell(E) R_\ell(E)) \Big|_{E=E_R}$$

Sostituiamo in U_ℓ :

$$U_\ell \simeq e^{2i\Phi_\ell} \frac{(E_R - E) + i P_\ell(E) R_\ell(E) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)}{(E_R - E) - i P_\ell(E) R_\ell(E) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)}$$

Definendo l'ampiezza della risonanza come $\Gamma(E) \equiv 2P_\ell(E) R_\ell(E) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)$ si arriva a:

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{E - E_R + i \Gamma/2}{E - E_R - i \Gamma/2} \quad (\text{VI.13})$$

Qualche nota formale Notiamo che l'espressione per U_ℓ in (VI.13) ha una forma che ricorda una lorentziana (come ci aspettavamo).

Poiché $E \sim E_R$ e la matrice R non ha particolari discontinuità in E ($R(E) \sim R(E_R)$ ⁸) si usa una forma approssimata per $\Gamma(E)$:

$$\frac{\Gamma(E)}{\Gamma(E_R)} \simeq \frac{P_\ell(E)}{P_\ell(E_R)}$$

Per cui definendo $\gamma^2 \equiv R_\ell(E_R) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)$ si ha $\Gamma(E) \simeq 2\gamma^2 P_\ell(E)$.

⁸Non vale per P_ℓ che invece dipende fortemente dall'energia.

Risonanza e autovalori Un altro modo per vedere la risonanza è considerare $E \sim E_{\bar{n}\ell}$ con \bar{n} fissato; infatti per tale energia R diverge, per cui trascuriamo nella (VI.11) tutti i termini con $n \neq \bar{n}$ ⁹:

$$R_\ell(E) \simeq \frac{\gamma_{n\ell}^2}{E_{\bar{n}\ell} - E}$$

Avremo allora per l'angolo di sfasamento in (VI.12):

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\frac{P_\ell \gamma_{n\ell}^2}{E_{n\ell} - E - \gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E)} \right)$$

Poiché vale anche (VI.13) si ha $\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\Gamma(E)/2(E_R - E) \right)$, da cui:

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &\simeq 2\gamma_{n\ell}^2 P_\ell(E) \\ E_R &\simeq E_{n\ell} - \gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E) \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

Dunque, l'energia del polo di R non corrisponde a quella di risonanza, ma questa è *shiftata* di un certo fattore $\gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E)$ ¹⁰.

1.3 Applicazioni

Studiamo lo scattering $A_1 + A_2$. La scelta delle $\varphi(r)$ è fondamentale per l'efficienza del metodo; in letteratura troviamo quelle per cui si ha la miglior convergenza:

$$-\varphi_k(r) = \sin \left[\frac{\pi r}{a} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{VI.15})$$

$$-\varphi_k(r) = r^{\ell+1} \exp \left(-\frac{r^2}{b_k^2} \right) \quad \text{con } b_k = b_1 x_0^{k-1} \quad (\text{VI.16})$$

$$-\varphi_k(r) = (-1)^{N+k} \left(\frac{r}{ax_k} \right)^n \sqrt{ax_k(1-x_k)} \frac{P_N(2r/a - 1)}{r - ax_k} \quad \text{con } x_k : P_N(2x_k - 1) = 0 \quad (\text{VI.17})$$

Per tutte a corrisponde al solito *channel radius*, mentre b_1 e x_0 nelle (VI.16) sono parametri da determinare. Le ultime, (VI.17), sono dette funzioni di Lagrange, i P_N sono i polinomi di Legendre e gli x_k i loro zeri; l'esponente n viene spesso preso $n \sim 1$.

Passiamo adesso alla trattazione di 2 esempi di scattering:

1. $p + {}^{12}\text{C}$: dati $V_N + V_C$ e φ_i si ricava δ_ℓ e si cerca la risonanza a $E_R = 0.42$ MeV e una larghezza (risonanza stretta) $\Gamma = 37$ keV come *test*.
2. $\alpha + \alpha$: procendendo come per il caso precedente si cerca $E_R = (11.35 \pm 0.15)$ MeV e una larghezza (risonanza larga) $\Gamma \simeq 3.5$ MeV.
[NON RIPORTATO]

Esempio $p + {}^{12}\text{C}$ Riportiamo i risultati per lo sfasamento in Figura VI.2 e per la funzione d'onda ridotta di onda S in Figura VI.3. In generale si osserva che le funzioni di Lagrange hanno convergenza più veloce e un miglior accordo tra regione esterna e interna per u_0 . In Figura VI.4 è invece riportato il *matching* dei parametri che permette di stimare la bontà della convergenza. Le funzioni seno sono le prime a essere state studiate, ma come mostrano i risultati le gaussiane e quelle di Lagrange sono migliori.

Una piccola osservazione Notiamo la differenza con un metodo *ab-initio*: non abbiamo fatto uno studio su 13 nucleoni, ma abbiamo lavorato solo con 2 oggetti p e ${}^{12}\text{C}$.

⁹Per semplicità da adesso in poi dal momento che non ci sarà ambiguità $\bar{n} \rightarrow n$

¹⁰Da cui deriva appunto il nome *shift factor*. Per quanto riguarda il *penetration factor* esso dà informazioni sulla penetrazione della barriera coulombiana.

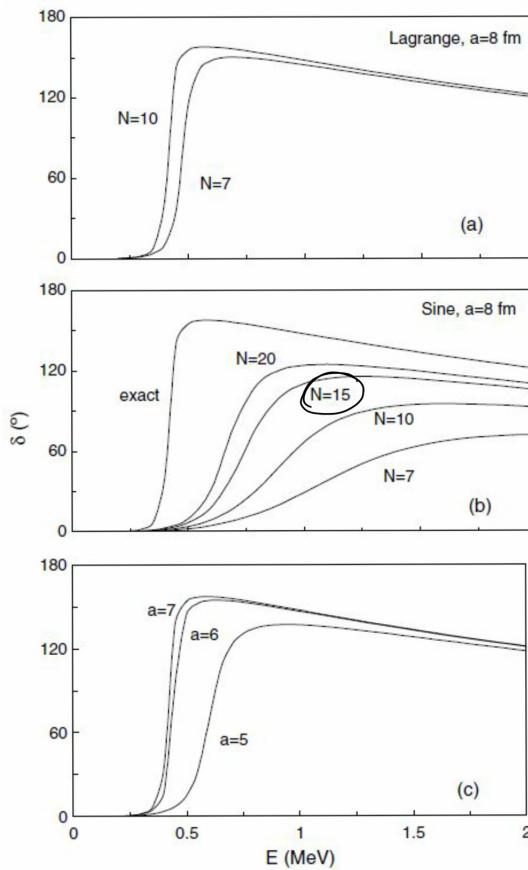


Figura VI.2: Risultati per lo sfasamento di $p + {}^{12}\text{C}$: (a) funzioni di Lagrange con $a = 8 \text{ fm}$, notiamo che già per $N = 10$ si ha quasi la convergenza; (b) funzioni Gaussiane e Lagrange con $a = 8 \text{ fm}$, la convergenza è più lenta (non basta $N = 20$); (c) convergenza delle funzioni di Lagrange + Gaussiane in funzione di a ($N = 15$), il risultato esatto è $a = 7$.

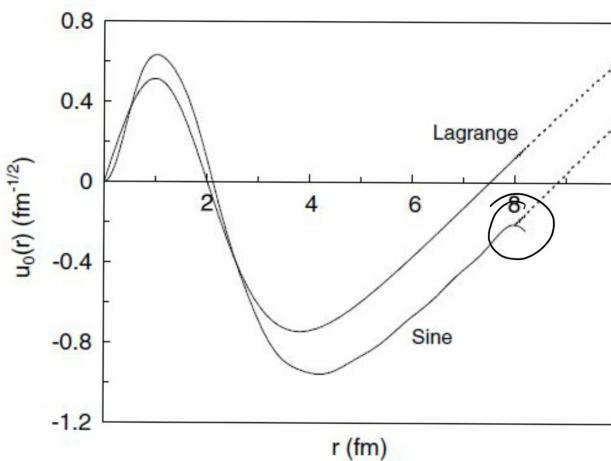


Figura VI.3: Funzioni d'onda ridotte calcolate per $\ell = 0$, $N = 15$ e $a = 8 \text{ fm}$ con le funzioni di Lagrange e con quelle seno. Notiamo che quest'ultime portano a una deviazione nella zona di raccordo con l'esterno.

E (MeV)	Exact	Phase shift			Matching parameter		
		N = 7	N = 10	N = 15	N = 7	N = 10	N = 15
<i>Lagrange</i>							
0.5	154.66	112.90	154.94	154.59	5.96	0.65	0.01
1.0	147.48	144.22	147.55	147.48	3.68	0.28	0.00
1.5	133.30	311.02	133.35	133.30	1.67	0.20	0.00
2.0	121.18	299.30	121.23	121.18	1.21	0.16	0.00
<i>Gaussian</i>							
0.5	154.66	179.36	154.53	154.53	5.61	0.02	0.01
1.0	147.48	146.52	147.47	147.47	0.04	0.01	0.01
1.5	133.30	130.28	133.29	133.29	1.06	0.00	0.01
2.0	121.18	112.15	121.18	121.18	1.55	0.01	0.01
<i>Sine</i>							
0.5	154.66	2.03	3.74	6.68	0.12	0.66	1.54
1.0	147.48	28.90	66.57	109.98	1.30	4.66	29.35
1.5	133.30	63.84	94.53	113.28	11.46	6.97	3.53
2.0	121.18	71.76	92.24	105.34	5.73	3.14	2.38

Figura VI.4: Matching dei parametri per $a = 8$.

2 Phenomenological RM

Riprendiamo l'espressione che avevamo trovato per δ nel caso di risonanza:

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma_R/2}{E_R - E} \right)$$

con $\Gamma_R \equiv 2\gamma^2 P_\ell(E_R)$. Se quindi abbiamo dati sperimentali di Γ_R ed E_R avremo un certo γ_{obs}^2 , per cui possiamo ricavare l'andamento in funzione dell'energia di δ_ℓ e u^{int} e di conseguenza dal formalismo sviluppato finora anche $\sigma(E)$ e $S(E)$ per ogni energia. In altre parole il metodo *phRM* consiste nell'“aggiustare” i poli della matrice R ai dati, senza passare dall'hamiltoniana.

Un metodo “semplice” Dobbiamo fare attenzione perché $E_{n\ell}$ e $\gamma_{n\ell}$ (come abbiamo già visto) non coincidono con E_R e γ_{obs} . Per ricavare la relazione tra queste quantità come in (VI.14) non possiamo seguire gli stessi passaggi fatti in precedenza (altrimenti $\gamma_{n\ell} \sim \gamma_{obs}$), ma il risultato sarà simile. Consideriamo per semplicità un solo polo per $R(E)$ in E_1 e sviluppiamo S_ℓ intorno a questo valore:

$$S_\ell(E) = S_\ell(E_1) + (E - E_1) S'_\ell(E_1)$$

Allora per δ_ℓ si avrà¹¹:

$$\begin{aligned} \delta &\simeq \Phi + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_1^2 P(E)}{E_1 - E - \gamma_1^2 S(E_1) - \gamma_1^2 (E - E_1) S'(E_1)} \right) = \\ &= \Phi + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_1^2 P(E)}{E_1 - \gamma_1^2 S(E_1) + \gamma_1^2 E_1 S'(E_1) - E (1 + \gamma_1^2 S'(E_1))} \right) = \\ &= \Phi + \tan^{-1} \left(\underbrace{\frac{\gamma_1^2}{1 + \gamma_1^2 S'(E_1)}}_{\gamma_{obs}^2} P(E) \underbrace{\frac{1}{E_1 - \gamma_1^2 S(E_1)/(1 + \gamma_1^2 S'(E_1)) - E}}_{E_R} \right) = \\ &= \Phi + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{obs}^2 P(E_R)}{E_R - E} \right) \end{aligned}$$

¹¹Si omette il pedice ℓ .

Da cui si ottiene¹²:

$$\gamma_{1\ell}^2 \simeq \frac{\gamma_{obs}^2}{1 - \gamma_{obs}^2 S'_\ell(E_R)} \quad (\text{VI.18})$$

$$E_{1\ell} \simeq E_R + \gamma_{1\ell}^2 S_\ell(E_R) \quad (\text{VI.19})$$

Da queste si ottiene $R_\ell(E)$ e quindi $\sigma(E)$ o $S(E)$.

Il caso di $p + {}^{12}\text{C}$ In letteratura si definiscono spesso queste quantità:

$$\gamma_W \equiv \frac{3\hbar^2}{2\mu a^2}$$

$$\theta_{obs}^2 \equiv \frac{\gamma_{obs}^2}{\gamma_W^2}$$

$$\theta_1^2 \equiv \frac{\gamma_1^2}{\gamma_W^2}$$

Il parametro γ_W viene detto *Wigner limit*. Quando $\theta^2 \sim 1$ i nuclei che collidono conservano la loro struttura nella risonanza. Riportiamo in Figura VI.5 i risultati per tale reazione di

	$a = 4 \text{ fm}$	$a = 5 \text{ fm}$	$a = 6 \text{ fm}$	$a = 7 \text{ fm}$
${}^{12}\text{C} + p (J^\pi = 1/2^+, l = 0, E_R = 0.42 \text{ MeV}, \Gamma_R = 32 \text{ keV})$				
γ_{obs}^2	1.089	0.592	0.353	0.227
θ_{obs}^2	0.258	0.220	0.189	0.165
γ_1^2	3.083	1.157	0.569	0.323
E_1	-2.152	-0.614	-0.110	-0.113
${}^{12}\text{C} + \alpha (J^\pi = 1^-, l = 1, E_R = 2.42 \text{ MeV}, \Gamma_R = 420 \text{ keV})$				
γ_{obs}^2		0.574	0.277	0.165
θ_{obs}^2		0.6920	0.481	0.389
γ_1^2		1.172	0.374	0.191
E_1		0.491	1.921	2.219

Figura VI.5: Risultati per lo scattering $p + {}^{12}\text{C}$.

scattering in funzione di a , dal momento che P_ℓ ne dipende e quindi di conseguenza anche Γ_R . In Figura VI.6 invece è riportato l'andamento ottenuto per il fattore astrofisico. Anche se il calcolo sembra riprodurre bene i dati, si è considerato il ${}^{12}\text{C}$ puntiforme nonostante $\theta \neq 1$. È possibile rendersi conto di questa approssimazione dall'andamento di $S(E)$ (e quindi anche della sezione d'urto) rispetto ai dati. Si introduce allora un termine di correzione \mathcal{S} (*overall factor*)

¹²Abbiamo linearizzato $S(E_1)$ sviluppando intorno a E_R in

$$\gamma_{obs}^2 \simeq \frac{\gamma_{1\ell}^2}{1 + \gamma_{1\ell}^2 S'_\ell(E_{1\ell})}$$

$$E_R \simeq E_{1\ell} - \gamma_{obs}^2 S_\ell(E_{1\ell})$$

Abbiamo rimesso il pedice ℓ .

detto **fattore spettroscopico**¹³ che moltiplica il fattore astrofisico. Nel caso particolare da noi studiato per ottenere accordo¹⁴ $S = 0.45$ (come in Figura VI.6).

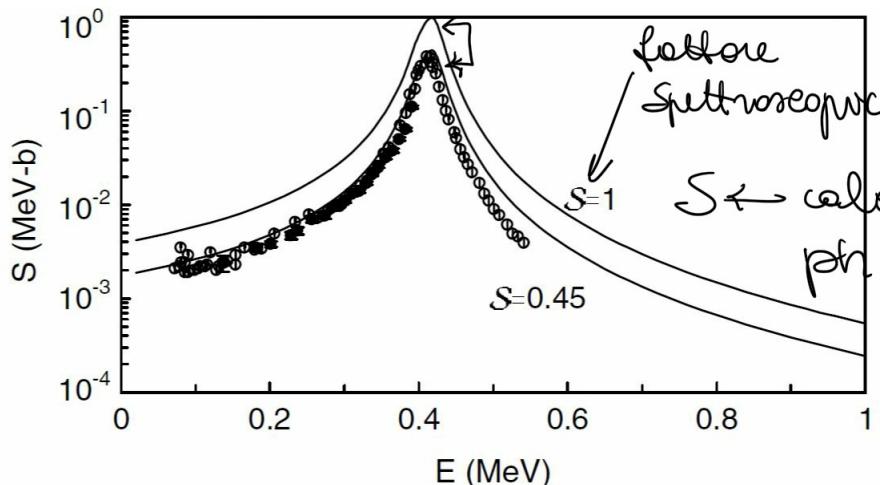


Figura VI.6: Andamento del fattore astrofisico ricavato con il metodo *phRM*. La curva continua in alto è l’andamento calcolato senza correzione, mentre quella che “fitta” i dati corrisponde a un fattore spettroscopico pari a 0.45.

Conclusioni Concludiamo così la trattazione dei metodi di studio di reazioni. I metodi *ab-initio* sono certamente indipendenti dai dati, ma molto dispendiosi e complicati; il metodo RM invece permette il calcolo anche nel caso di molti nucleoni, ma dipende fortemente dai dati a disposizione (in un certo senso è un fit).

¹³Tecnicamente per ottenere un’espressione di questo parametro avrei bisogno di un metodo *ab-initio*, ma se lo avessi non ci sarebbe motivo di usare il metodo RM.

¹⁴Per decidere l’accordo si cerca di fare un *matching* per il picco della risonanza.

Capitolo VII

Tecniche sperimentali di misura

In questo capitolo vengono presentati alcuni degli esperimenti condotti per misure dirette di reazioni nucleari di interesse astrofisico, quali LUNA ed ERNA, e tre differenti tecniche di misura indiretta. Il capitolo copre le lezioni 14/04/2021, 15/04/2021, 19/04/2021 e 21/04/2021.

Tecniche di misura Abbiamo visto che la sezione d’urto “precipita” vari ordini di grandezza per energie sempre più piccole, quindi vi saranno pochissimi eventi; non solo, a quelle energie segnale e rumore si confondono, per cui è necessario trovare delle tecniche che permettano di migliorare la misura. Esistono principalmente due strategie:

1. Metodi diretti di misura con l’uso di qualche “trucco”.
2. Metodi indiretti di misura.

1 Metodi diretti

Innanzitutto per risolvere il problema del numero di eventi si utilizzano acceleratori ad altissima luminosità (fasci molto intensi). Per quanto riguarda il *background*, si cerca di schermalo il più possibile: i Laboratori Nazionali del Gran Sasso (LNGS)¹ sono usati per esperimenti con pochi eventi, come quelli di fisica nucleare (LUNA), sui neutrini (esperimento GERDA col decadimento² $0\nu\beta\beta$ o lo stesso Borexino) e sulla *dark matter* (XENON1T o DARKSIDE).

Raggi cosmici Particelle cariche (muoni per esempio) ad alta energia molto penetranti. Per schermare questo tipo di fondo esistono principalmente due tipi di tecniche:

- *active shielding*: si circonda il rivelatore con uno secondario sensibile ai raggi cosmici e si studiano gli eventi in anticoincidenza.
- *passive shielding*: si posiziona il rivelatore in un mezzo schermante (come un blocco o il sottosuolo), tuttavia l’interazione tra mezzo e raggi (o prodotti) può portare a un aumento del fondo.

L’unità di misura dello schermaggio è *l’acqua equivalente*; al Gran Sasso per esempio vi sono 1400 m di roccia che corrispondono a 3800 m di acqua equivalente e questo comporta una riduzione per muoni dell’ordine di 10^6 , per neutroni di 10^3 e per raggi γ di 10.

In Figura VII.1 riportiamo lo spettro dei raggi γ in grigio sulla superficie e in nero nei laboratori

¹Link al sito: <https://www.lngs.infn.it/it/astrofisica-nucleare>

²Si tratta di un decadimento $\beta\beta$ nel quale non dovrebbe comparire il neutrino; se così fosse allora $\nu = \bar{\nu}$ (*particelle di Majorana*).

del Gran Sasso. Fino a circa 3 MeV si ha un certo flusso di fotoni dovuto per una “piccola” parte ai raggi cosmici (schermati) e per il contributo maggiore agli elementi radioattivi presenti nelle rocce; per energie superiori a 2.6 MeV invece abbiamo principalmente raggi cosmici, che vengono appunto ben schermati (fatta eccezione per alcuni picchi di reazioni note e quindi semplici da contare).

Ci chiediamo adesso se sia possibile migliorare lo schermaggio. La soluzione più semplice sembrerebbe quella di aggiungere un ulteriore schermo, per esempio circondando il rivelatore di piombo, ed effettivamente questo si fa, come mostrato in Figura VII.1 (b). Tuttavia, il mezzo dev’essere “ripulito” da qualsiasi impurità radioattiva e spesso quel che si fa è aspettare un tempo sufficiente affinché divenga inerte³.

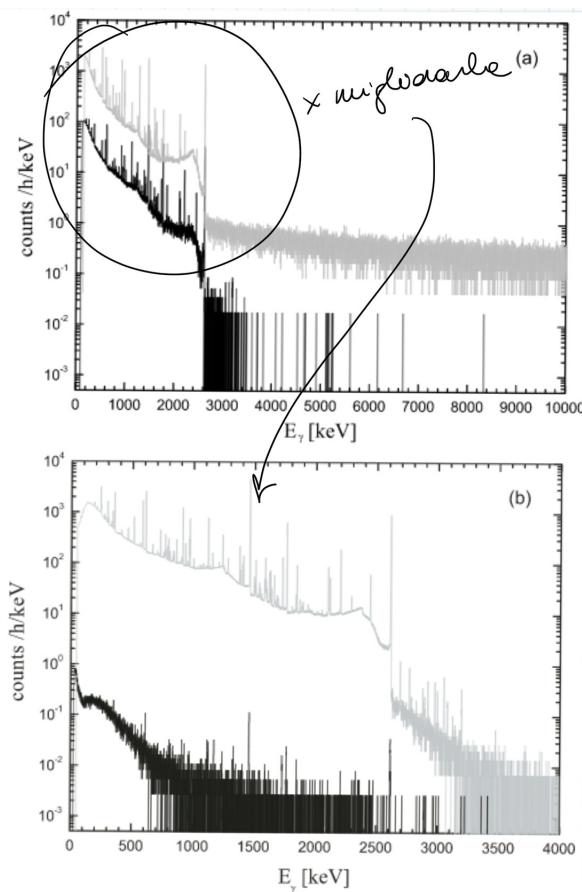


Figura VII.1: Spettro dei raggi γ : (a) per rivelatore sulla superficie (in grigio) e nei laboratori (in nero); (b) per rivelatore ai LNGS senza schermaggio (in grigio) e con schermo (in nero).

Un nemico nel sottosuolo Abbiamo visto che porsi nel sottosuolo permette lo schermaggio dai raggi γ , tuttavia si presenta un’altra difficoltà: il radon ^{222}Rn . Questo è radioattivo e si trova in stato gassoso, intrappolato nel sottosuolo circola nella zona sperimentale. Per risolvere tale problema tipicamente si installa il rivelatore in un contenitore in cui si genera un flusso d’aria continuo.

³ Un piccolo aneddoto a tal riguardo: nel Gennaio del 2016 in Sardegna fu ritrovata sul fondo del mare una nave romana che conteneva 30 lingotti di piombo; non avevano alcun valore artistico o economico, ma per i fisici furono “oro” dal momento che la concentrazione di isotopi radioattivi al suo interno dopo 2000 anni era effimera e per questa ragione furono portati nei LNGS, dove tuttora si trovano.

1.1 LUNA

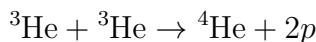
Discussiamo in questa sezione il *Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics* detto LUNA.

Qualche data I lavori per l'esperimento LUNA iniziarono nel 1990 insieme a quelli al Gran Sasso (1982) ed è tuttora operativo.

1. LUNA I dal 1994 al 2003.
2. LUNA II dal 2000 al 2020.
3. LUNA MV in progettazione.

1.1.1 LUNA I

La prima reazione Nell'esperimento⁴ LUNA I si studiò per prima la reazione⁵:



dove un ${}^3\text{He}$ cosisteva in un fascio con una corrente pari a $300 \mu\text{A}$ e l'altro in una targhetta gassosa posta nella camera di interazione a una pressione⁶ di 0.5 mbar . Un *beam dump*, anch'esso collocato nella camera di interazione, bloccava il fascio e permetteva, tramite la misura della variazione di temperatura, di stimare la *beam current* con una precisione del 3%⁷.

Fu scelta questa reazione non solo perché presente nella *ppI*, ma anche perché negli anni '90 era particolarmente discussa la questione dei neutrini solari e Fowler aveva supposto che la sezione d'urto di tale reazione fosse sottostimata a causa di una risonanza non osservata⁸. Prima di LUNA non si avevano acquisizioni per energie inferiori ai 26 keV e il picco di Gamow di tale reazione è $21 \pm 5 \text{ keV}$; con LUNA I si raggiunsero 16.5 keV misurando⁹ una sezione d'urto pari a $20 \text{ fb} = 2 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2$. Il rivelatore (composto da quattro $\Delta E - E$ particle detector¹⁰) permetteva di identificare per ogni evento una regione nel piano $\Delta E - E$ in cui esso si collocava, al fine di poter distinguere il contributo dell'*induced background*¹¹: nel fascio era presente infatti una contaminazione di deuterio (nella molecola pd^+) di circa $d/{}^3\text{He} \sim 1 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-6}$, che tramite la reazione¹² ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$ "sporcava" la misura. In Figura VII.2 riportiamo i risultati della presa dati: si possono facilmente distinguere 2 regioni.

Si osserva anche la presenza di un certo *noise* sulle ascisse, che tuttavia non preoccupa dal momento che la regione di interesse è molto meno popolata.

Per energie inferiori ai 20.7 keV le 2 regioni si sovrapponevano e non era più possibile distinguere tra fondo e misura di interesse, allora furono installati 2 rivelatori di protoni in successione e in coincidenza, dal momento che la reazione ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$ produce un solo protone e non due. Per avere un'idea di quanto fu ridotto il fondo si guardi la Figura VII.3.

⁴Fu impiegato un acceleratore "home made", progetto di laurea di uno studente, che cosisteva di un Van de Graaff a 50 kV . Il fascio aveva uno *spread* $< 20 \text{ eV}$ (molto piccolo) che permetteva un'accurata determinazione dell'energia delle particelle incidenti e inoltre il voltaggio era noto meglio di 1 parte su 10^{-4} .

⁵Reazione *ppI*, guarda Figura V.1.

⁶Da una versione a quella successiva si è migliorato anche questo settaggio.

⁷Per ottenere questa precisione era stato posto nella camera anche un calorimetro che tenesse conto dell'effetto di ionizzazione dovuto al passaggio del fascio attraverso il gas.

⁸Guarda la sezione ?? - ?? per l'ipotesi di Fowler.

⁹Si avevano 2 eventi al mese.

¹⁰La configurazione dei rivelatori $\Delta E - E$ consiste in due mezzi di diverso spessore (fissato in modo tale da distinguere le due reazioni) posti in successione: ΔE si riferisce all'energia persa dal fascio nell'attraversamento del mezzo più sottile, mentre E a quella scambiata con il mezzo più spesso, che "frena" il fascio.

¹¹Ovvero il fondo indotto dalla misura stessa.

¹²La cui sezione d'urto è 10^6 volte maggiore di quella della reazione di interesse.

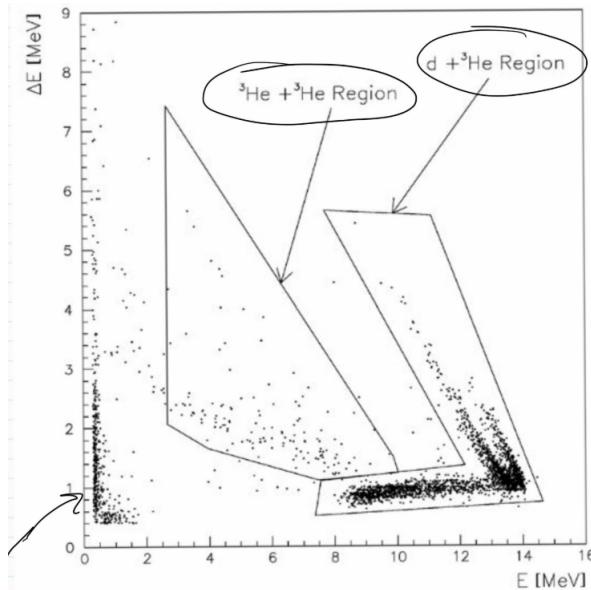


Figura VII.2: Dati dell'esperimento. Si riescono a identificare 2 regioni, una di interesse e l'altra di rumore. Si osserva anche una zona particolarmente popolata nelle basse energie lungo le ascisse che è dovuta al rumore elettronico indotto dal fascio.

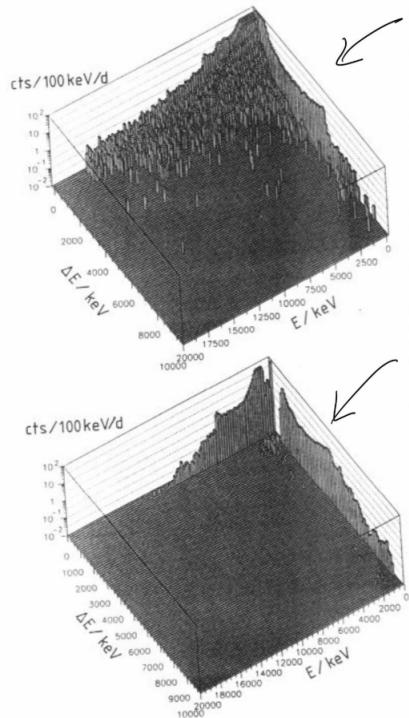


Figura VII.3: Riduzione del fondo, sul piano $x - y$ vi è la matrice $\Delta E - E$, mentre sull'asse z sono riportati i conteggi: in alto risultati con *running time* di 16 giorni per un solo rivelatore a terra (presenza anche di raggi cosmici), in basso 2 rivelatori in coincidenza nel sottosuolo con *running time* di 61 giorni.

Si ottenne così i risultati per la sezione d'urto e il fattore astrofisico di Figura VII.4. Notiamo che per basse energie il fattore astrofisico tende a crescere; ciò è dovuto non a una risonanza

sotto soglia, ma dai risultati del fit sembrerebbe legato all'elettroscreening¹³:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \sim \exp\left(\frac{\pi\eta U_e}{E}\right)$$

Fu confutata così l'ipotesi di Fowler e non solo, si poté valutare anche l'effetto dell'elettroscreening.

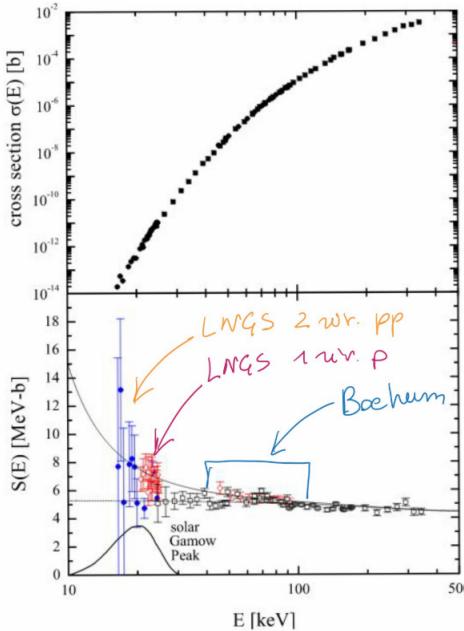
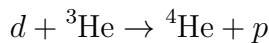
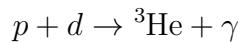


Figura VII.4: Risultati degli esperimenti. In alto la sezione d'urto; in basso il fattore astrofisico: i cerchi blu pieni sono i risultati al Gran Sasso con rivelatori di protoni in coincidenza, i cerchi rossi vuoti per energie comprese tra 20 e 25 keV sono i dati LUNA I con un solo rivelatore di protoni, mentre per energie tra 45 e 92 keV (soglia in cui il segnale è maggiore del *background*) sono i dati raccolti con lo stesso rivelatore ma a Bochum in Germania a terra. La crescita a basse energie del fattore astrofisico è dovuta all'elettroscreening.

Il problema dello screening L'effetto di elettroscreening dato dal modello $U_e = 220$ eV non era compatibile con quello misurato $U_e \simeq (294 \pm 47)$ eV. Si iniziò quindi a studiare tale fenomeno. Fu scelta la reazione (precedentemente non di interesse):



arrivando a energie inferiori a 4.2 keV, come mostrato in Figura VII.5. Nonostante l'accordo qualitativo, si ottenne così $U_e^{exp} \simeq (132 \pm 9)$ eV, non compatibile con $U_e^{th} \equiv U_{ad} = 65$ eV. L'ultima reazione studiata in questo campo è:



intorno al picco di Gamow. Questa reazione fa parte della catena pp ¹⁴, ma è l'unico canale aperto per cui non influisce sul conto dei neutrini solari. I *range* di energie di interesse per questa reazione:

¹³Riguarda la sezione 3.2 -Elettroscreening.

¹⁴Importante nelle proto-stelle: quando si raggiungono temperature $T \sim 10^6$ K il poco deuterio presente (dovuto all'arricchimento di popolazioni precedenti) può reagire $p + d$, innescando un *d-burning* prima della catena pp . Questo comporta un rallentamento della contrazione e quindi un aumento della vita media della proto-stella: le sue caratteristiche (luminosità, temperatura,...) rimangono infatti "congelate" fin quando dura il *d-burning* e ciò avrà conseguenze su tali quantità all'innesto del *H-buring* successivo.

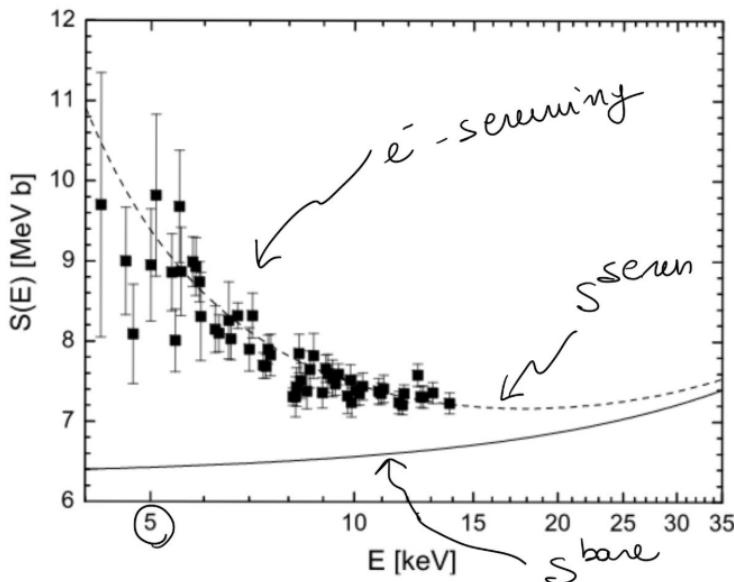


Figura VII.5: Dati di LUNA I per il fattore astrofisico: la linea continua rappresenta il modello senza schermo elettronico, la linea tratteggiata quello che ne tiene conto.

- $1 - 2 \text{ keV} \rightarrow d\text{-burning}$ di proto-stelle.
- $\simeq 9 \text{ keV} \rightarrow d\text{-burning}$ del Sole.
- $\simeq 100 \text{ keV} \rightarrow pd$ della BBN.

LUNA I si concentrò sulle energie inferiori ai 100 keV e dovette ovviamente cambiare *set-up* dal momento che l'interazione era differente (elettromagnetica): rivelatore ad alta efficienza (prendere più eventi possibile) e a grande angolo solido (ampio campo di osservazione). Fu impiegato il germanato di bismuto BGO($\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$) come scintillatore, dotato di un'efficienza di circa 70% e una risoluzione in energia di $\sim 8\%$.

1.1.2 LUNA II

Nel 2000 LUNA II fu impiegato per lo studio della pd della BBN (100 keV). Fu utilizzato un acceleratore commerciale a *high current* (Cockcroft-Walton): 1 mA per H^+ e $500 \mu\text{A}$ per He^+ con un voltaggio pari a 400 kV, rimanendo stabile anche per 40 giorni di operatività. Furono costruite 2 linee di prese dati:

I targhetta gassosa

II targhetta solida

Le reazioni studiate da LUNA II furono:

1. ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, studio della BBN e della pp ¹⁵.
2. ${}^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma){}^{15}\text{O}$, studio biciclo CN-NO¹⁶.
3. ${}^{25}\text{Mg}(\text{p}, \gamma){}^{26}\text{Al}$, studio di altre reazioni di interesse stellare.
4. pd , studio della BBN.

Ricordiamo la Figura IV.11, dove compaiono in rosso per basse energie i dati di LUNA I (Casella 2002) e per energie maggiori quelli di LUNA II.

¹⁵Vedi i capitoli IV -*Big Bang Nucleosynthesis* e V -*La catena protone-protone*

¹⁶Vedi sezione 2 -*Biciclo CN-NO*

Lo studio della $\text{he}\alpha$ Discutiamo adesso la reazione ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Prima di LUNA erano stati sviluppati 2 metodi di misura:

1. *Prompt γ method* che si basa principalmente sulla misura dei fotoni prodotti. Da questo si era ottenuto:

$$S(0) = (0.507 \pm 0.016) \text{ keVb}$$

2. *Activation method* che sfrutta la cattura elettronica¹⁷ del ${}^7\text{Be}$, per cui studiando la radioattività si può risalire al numero di ${}^7\text{Be}$. Con questo metodo si ottenne invece:

$$S(0) = (0.572 \pm 0.026) \text{ keVb}$$

Queste due misure erano quindi in disaccordo, per cui LUNA II utilizzò contemporaneamente entrambi: fu impiegata una targhetta gassosa di ${}^3\text{He}$ e un *HPGe (High Purity Germanium) detector*, che permetteva di raccogliere i fotoni emessi vicino alla *interaction chamber*; successivamente raccolsero anche il ${}^7\text{Be}$ per studiare la radioattività¹⁸. Come risultato, riportato in Figura VII.6, si ebbe l'assenza di discrepanza e un valore¹⁹ $S(0) = (0.567 \pm 0.022) \text{ keVb}$ in accordo con quello del metodo 2., perciò si suppose che nell'esperimento con il metodo 1. non furono raccolti tutti i fotoni.

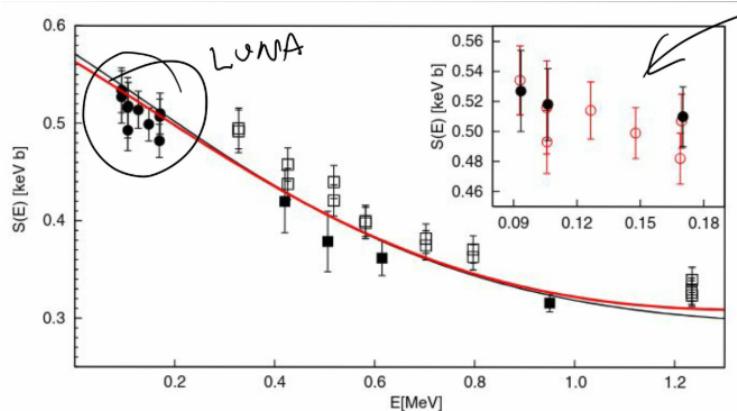
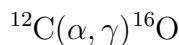


Figura VII.6: Risultati di LUNA II. I quadratini pieni sono i dati più recenti, quelli vuoti sono i dati meno recenti e i cerchi sono i dati di LUNA. Nel riguardo in alto a destra si distinguono i dati ottenuti con il metodo 2. (in nero) e con il metodo 1. (in rosso); non si osserva alcuna discrepanza.

1.1.3 LUNA MV

L'ultima frontiera per LUNA è una macchina acceleratrice con un voltaggio di 3.5 MV detta appunto LUNA MV, ma per tale scopo le dimensioni non sono conformi allo spazio disponibile nei LNGS per cui verrà costruita da un'altra parte e questo lascia a disposizione LUNA II per possibili misurazioni future. L'obiettivo di LUNA MV sarà lo studio di reazioni di difficile misura e importanti per la verifica del modello; per esempio il cosiddetto *holy grail* dell'astrofisica²⁰:



¹⁷ ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$ con un tempo di dimezzamento pari a $\tau_{\frac{1}{2}} \sim 53$ d.

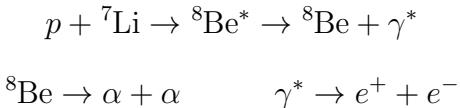
¹⁸ Per schermare i fotoni del fondo dovuti alla radiazione naturale (la cui energia $E_\gamma \sim Q \sim 1.586$ MeV *value* della reazione) rivestirono il rivelatore del piombo ritrovato nella nave romana.

¹⁹ In realtà questo valore deriva sia dalle misure sia da un'estrapolazione; infatti 4 eV di errore deriva dal modello teorico scelto.

²⁰ Guarda sezione 3 - *The Holy Grail*.

Determinare con precisione la sezione d’urto di questa reazione permetterebbe di stimare con altrettanta precisione le abbondanze di ^{12}C e ^{16}O , difficili da misurare.

ATOMKI Anomaly Per quanto riguarda la ricerca di nuova fisica acceleratori di maggiore potenza permetterebbero lo studio dell’anomalia di ATOMKI, per la prima volta osservata con la reazione



Non fecero *particles identification*, ovvero non misurarono direttamente gli elettroni e i positroni prodotti. L’anomalia che osservarono fu un picco nella sezione d’urto per un angolo $\theta_{ee} \sim 120^\circ$; si è quindi pensato alla possibilità che venisse prodotta una particella massiva sconosciuta²¹ (materia oscura) ${}^8\text{Be}^* \rightarrow {}^8\text{Be} + X$ e $X \rightarrow e^+ + e^-$ con $M_X \sim 17$ MeV, da cui il nome di particella X17. Ci fu molta discussione al riguardo, anche perché il *background* non era stato calcolato bene e non si era considerata la velocità di decadimento del ${}^8\text{Be}$ in 2α .

ATOMKI si spinse più avanti²² studiando:



Oltre al canale $\rightarrow {}^4\text{He} + \gamma^*$ si potrebbe avere $\rightarrow {}^4\text{He} + X$; osservarono la stessa anomalia. Questa reazione si può studiare con un metodo *ab-initio* che ha confermato l’assenza di questo picco.

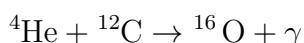
LUNA MV potrebbe mettere fine a questa discussione poiché riuscirà a raggiungere i 17 MeV per le reazioni $p + {}^3\text{H}$ e $p + {}^7\text{Li}$. Per quanto riguarda quest’ultima, sta per essere studiata al *Laboratory of Paul Scherrer Institute* (LPSI) in Svizzera, dove cercano anche di misurare il decadimento non standard²³ del μ .

1.2 ERNA

Un altro esperimento che discuteremo è *European Recoil separator for Nuclear Astrophysics* o ERNA, situato a Caserta in Campania, che utilizza appunto il metodo del *recoil* (adottato anche in altri esperimenti).

1.2.1 *Recoil mass separator*

Prendiamo una reazione a due corpi “poco probabile”²⁴ $a + b \rightarrow c + \gamma$ con a ioni accelerati e b targhetta, per esempio:



Oltre alla radiazione che viene raccolta da un rilevatore, dal momento che la reazione è “rara”, avremo un fascio uscente di a e c ; per separare il reagente dal prodotto si utilizza una macchina *recoil mass separator* che sfrutta la differenza di massa tra a e c per deviare la traiettoria del fascio di a attraverso campi magnetici, facendo sì che solo il fascio di c raggiunga il rivelatore. Quest’ultimo è messo in coincidenza con il rivelatore di fotoni.

²¹Tipicamente le particelle della coppia hanno un angolo molto “piccolo”.

²²Anche nell’esperimento DAMA ai LNGS dicono di aver osservato fluttuazioni di materia oscura, tuttavia solo loro riescono a ossevarle.

²³ $\mu \rightarrow e^+ + \gamma$.

²⁴Supponiamo di trovarci nella condizione per cui la reazione sia poco efficiente.

1.2.2 Cinematica Inversa

Poniamoci nel sistema del centro di massa²⁵, dove vediamo a e b scontrarsi e γ e c “scatteredare” con un certo angolo θ_{CM} :

Stato Iniziale	Stato Finale
$(E'_a, p', 0, 0) + (E'_b, -p', 0, 0)$	$(E'_c, -p'_c \cos \theta_{CM}, -p'_c \sin \theta_{CM}, 0) + (E'_\gamma, E'_\gamma \cos \theta_{CM}, E'_\gamma \sin \theta_{CM}, 0)$

Dalla conservazione del quadrimpulso:

$$\begin{aligned} m_a + m_b + \underbrace{\frac{p'^2}{2\mu_{ab}}}_{T_{rel}} &= m_c + \cancel{\frac{E'_c^2}{2m_c}} + E'_\gamma \\ -p'_c \cos \theta_{CM} + E'_\gamma \cos \theta_{CM} &= 0 \\ -p'_c \sin \theta_{CM} + E'_\gamma \sin \theta_{CM} &= 0 \end{aligned}$$

per cui $E'_\gamma = p'_c$ e $E'_\gamma = \overbrace{m_a + m_b - m_c}^{\Delta M = Q} + T_{rel}$, dove abbiamo trascurato T_c .
Nel sistema del laboratorio:

Stato Iniziale	Stato Finale
$(E_a, p_a, 0, 0) + (m_b, 0, 0, 0)$	$(E_c, p_c \cos \theta_c, p_c \sin \theta_c, 0) + (E_\gamma, E_\gamma \cos \theta_\gamma, E_\gamma \sin \theta_\gamma, 0)$

da cui $p_{CM} = p_a$ ed $E_{CM} = m_b + E_a$; trasformando con Lorentz ($\beta = p_{CM}/E_{CM}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$) si ottiene:

$$p_{c,y} = p'_{c,y} \Rightarrow \tan \theta_c = -\frac{p'_c \sin \theta_{CM}}{\gamma[\beta E'_c + p'_c \cos \theta_{CM}]}$$

Ci chiediamo allora quale sia l’angolo massimo di scattering per c : $\sin \theta_{CM} = 1$ per cui $\theta_{CM} = \pi/2$.

$$\tan \theta_c|_{\max} = \frac{p'_c}{\gamma \beta E'_c} = \frac{E'_\gamma}{\beta E_c} \simeq \frac{E_\gamma}{p_c}$$

dove abbiamo trascurato il segno e usato le trasformazioni di Lorentz nel secondo passaggio. Abbiamo allora che la traiettoria di c sta dentro un cono di ampiezza massima $\theta_{c,\max} \sim \tan^{-1} E_\gamma/p_c$ e per convergere il fascio bisogna massimizzare p_c ; questo scala come p_{CM} che è maggiore per $m_a > m_b$.

Dunque, nello studio di ${}^4\text{He} + {}^{12}\text{C}$ si usa il carbonio come proiettile e non l’olio. Questa configurazione viene detta **cinematica inversa** e migliora la separazione nella macchina di *recoil*. Riportiamo uno schema dell’apparato sperimentale in Figura VII.7.

L’unico difetto del metodo sta nel fatto che minore è l’energia incidente maggiore dev’essere il raggio della struttura.

²⁵Mettiamo $c = 1$ e indichiamo le quantità riferite al sistema del centro di massa con l’apostrofo ‘.

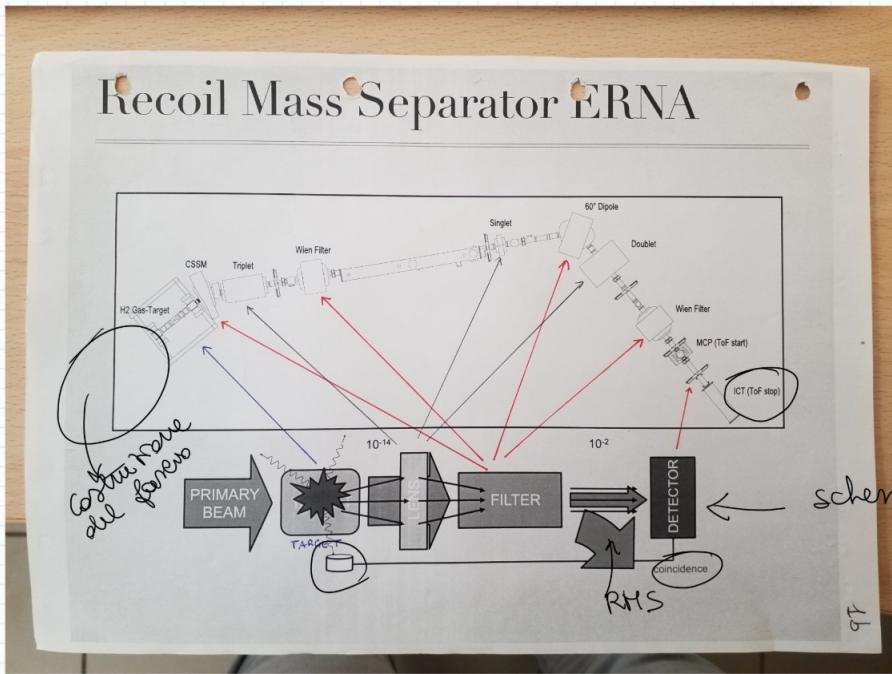
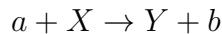


Figura VII.7: Schema dell'apparato sperimentale di ERNA: sono presenti lenti focalizzanti all'uscita di ogni filtro. In questo caso a curvare sono le *c* mentre le *a* vanno a dritto.

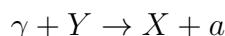
2 Metodi indiretti

Passiamo ora a illustrare 3 metodi di misura indiretti²⁶: *Coulomb dissociation method* (CD), *Trojan Horse method* (TH) e *Asymptotic Normalization Coefficients method* (ANC)

2.1 Coulomb Dissociation method



dove spesso $b \equiv \gamma$. Invece di studiare questa ci concentreremo sulla fotodisintegrazione:



Dallo studio della sezione d'urto²⁷, detta S la matrice di scattering:

$$\begin{aligned} \sigma_{aX} &= \frac{\pi}{k_1^2} \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_X + 1)} \sum_{\ell} (2\ell + 1) |S_{if}|^2 \\ \sigma_{\gamma Y} &= \frac{\pi}{k_2^2} \frac{1}{2(2S_Y + 1)} \sum_{\ell} (2\ell + 1) |S_{fi}|^2 \end{aligned}$$

con $k_1 \equiv \sqrt{2\mu_{aX} E_{CM}}$, $k_2 \equiv E_{\gamma} = Q + E_{CM}$ ²⁸ e $S_{if} = (S_{fi})^*$, per cui $|S_{if}| = |S_{fi}|$. Da questo otteniamo il **principio del bilancio dettagliato**:

$$\frac{\sigma_{aX}}{\sigma_{\gamma Y}} = \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{2(2S_Y + 1)}{(2S_a + 1)(2S_X + 1)}$$

che deriva dall'invarianza per inversione temporale dell'interazione elettromagnetica. Dunque se misuriamo $\sigma_{\gamma Y}$ abbiamo una stima di σ_{aX} . Sperimentalmente viene fatto interagire Y con una targhetta pesante Tg (tipo piombo) così che la reazione $Y\gamma$ sia dovuta a un fotone virtuale γ^* . Schema in Figura VII.8.

²⁶Per approfondire Tribble, R.E. et al., Rep.Prog.Phys., 2014, vol.77, DOI: [10.1088/0034-4885/77/10/106901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/10/106901).

²⁷Ricordarsi che il fotone ha solo 2 polarizzazioni possibili.

²⁸Abbiamo trascurato il rinculo del nucleo Y .

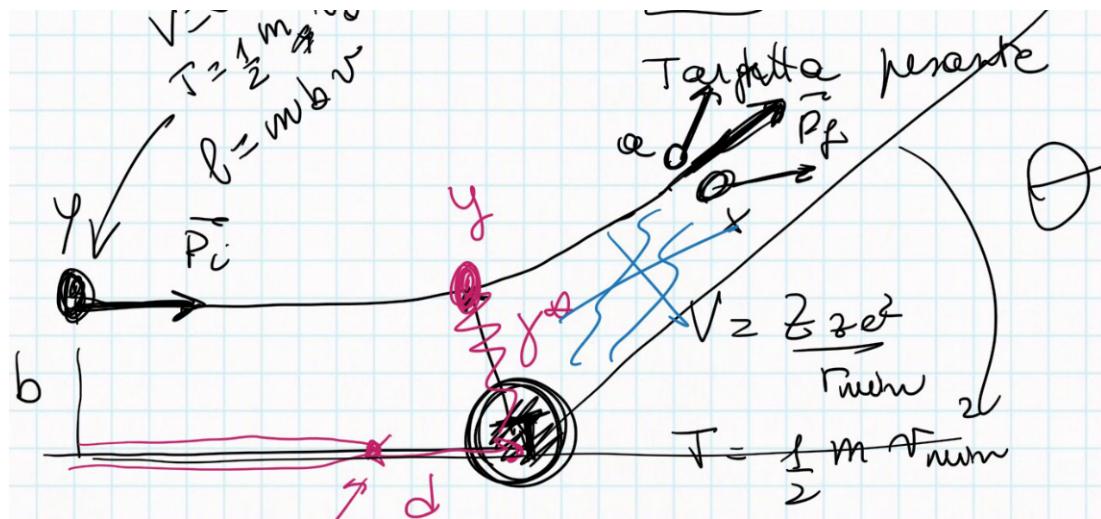


Figura VII.8: Schema dello scattering con targhetta pesante. Notazione: d distanza minima se il parametro di impatto è nullo, b parametro di impatto, θ angolo di scattering.

Se il parametro di impatto è nullo, $b = 0$, si ha nel punto di minima distanza: $V = Zze^2/d$ e $T = 0$. Dalla conservazione dell'energia, con v_0 velocità iniziale:

$$d = 2 \frac{zZe^2}{mv_0^2}$$

In generale: $V = Zze^2/r_{\min}$, $T = mv_{\min}/2$ e $\ell = mr_{\min}v_{\min}$. Se supponiamo di avere scattering elastico allora $\Delta p \equiv |p_i - p_f| = 2p \sin(\theta/2) = 2mv_0 \sin(\theta/2)$. Dalla relazione tra variazione di impulso e forza si ha $\Delta p = \int F dt = zZe^2 \int \cos \beta dt / r^2$, dove β è l'angolo formato dalla bisettrice dell'angolo $\pi - \theta$ e il vettore distanza tra Y e Tg : se Y arriva da $-\infty$ a $t = 0$ si ha $\beta(0) = -(\pi - \theta)/2$, mentre a $t = \infty \beta(\infty) = (\pi - \theta)/2$.

Per trovare la relazione funzionale tra β e t scriviamo la conservazione del momento angolare²⁹:

$$mv_0 b = mr^2 \dot{\beta}$$

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\beta}{v_0 b}$$

Dunque:

$$2mv_0 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{v_0 b} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \beta d\beta$$

$$b = \frac{d}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

dove abbiamo usato l'espressione di d trovata in precedenza.

A questo punto come al solito facciamo alcune approssimazioni:

1. Trascuriamo l'interazione nucleare (altrimenti non avrei γ virtuale), per cui $b \gg 1$ e di conseguenza $\theta \ll 1$.
2. Facciamo l'approssimazione *one-photon-exchange*, quindi abbiamo lo scattering con un solo fotone e trascuriamo l'interazione (*photon exchange*) tra i prodotti a e X con il nucleo pesante (*post-acceleration effects*).

²⁹ \vec{v} in coordinate polari: $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\beta} \hat{\beta}$

Date queste due assunzioni, la velocità relativa tra i prodotti è piccola per cui possiamo lavorare a energie maggiori, migliorando così la rivelazione e risolvendo le difficoltà con la barriera di Coulomb.

$$Y + Tg \rightarrow Tg + a + X \Rightarrow \gamma^* + Y \rightarrow a + X$$

Dalla misura della prima abbiamo la seconda. Non svolgiamo il calcolo, ma riportiamo il risultato solo per i multipoli elettrici:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{d\sigma_{E\lambda}^\gamma}{dE} \frac{dn_{E\lambda}}{dE}$$

dove l'ultima derivata è la densità di γ^* nello spazio delle fasi e dipende solamente dalla cinematica, non da Y (quindi possiamo calcolarla). Per quanto riguarda la derivata³⁰ della sezione d'urto in funzione dell'energia:

$$\frac{d\sigma_{E\lambda}^\gamma}{dE} \sim \frac{(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} E_\gamma^{2\lambda-1} \frac{d}{dE} (B(E\lambda))^*$$

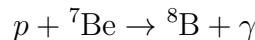
dove B è la *reduction transition probability* definita come:

$$B(E\lambda, J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \left\langle J_f \mid \underbrace{Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) r^\lambda \rho(\vec{r})}_{E\lambda} \right\rangle \right|^2$$

L'elemento di matrice di multipolo si può stimare tramite le stime di Weisskopf³¹.

Da $d^2\sigma/d\Omega dE_\gamma$ si ottiene $\sigma_{E\lambda}^\gamma$ e da questa σ_{cattura} . Conta in particolare $E1$, ma verificare che il contributo dei termini superiori $\lambda > 1$ (per esempio $M1$ ed $E2$) è “piccolo” non è semplice, c'è molta teoria; inoltre, dev'essere trovato un buon bilancio tra θ e b per rispettare l'approssimazione 1. e al contempo non rendere troppo difficoltosa la misura di θ ³², mentre per mantenere l'approssimazione 2. bisogna aumentare l'energia.

Un esempio Prendiamo la reazione³³:



Questa è una reazione studiata molto e con varie tecniche, per cui è un ottimo campione per testare un metodo.

Procedendo come abbiamo studiato³⁴:



Si sono fatti vari esperimenti a energie differenti³⁵:

- 47 AMeV e 52 AMeV, esperimento RIKEN in Giappone. Questa misura era affetta significativamente dal background dovuto ai fotoni di interazione tra prodotti e targhetta (*multi-photon-exchange*).
- 83 AMeV, esperimento MSU in America. I rivelatori usati in questa misurazione erano a bassa efficienza.

³⁰Osserviamo che il fattore moltiplicativo ricorda quello del rate in equazione (2.2) vista per il decadimento γ , dove però avevamo $\lambda = J$.

³¹Vedi 2.2 - *Trattazione quantistica*.

³² $\theta \rightarrow 0$ non è facile da misurare.

³³Compare nella ppIII.

³⁴Il piombo dev'essere nel fondamentale.

³⁵L'unità di misura AMeV indica *tot* MeV per nucleone.

- 254 AMeV, esperimento GSI in Germania. È il migliore tra i tre.

Nel caso dell'ultimo esperimento (quello su cui ci concentriamo) fu fatta un'analisi in multipoli (fino a $E2$). In Figura VII.9 riportiamo i risultati ottenuti, mentre in Figura VII.10 sono riportati i risultati anche degli altri esperimenti. Notiamo da quest'ultimo grafico che non vi è accordo, ma ciò è dovuto alle difficoltà spiegate precedentemente (tuttora vi è discussione).

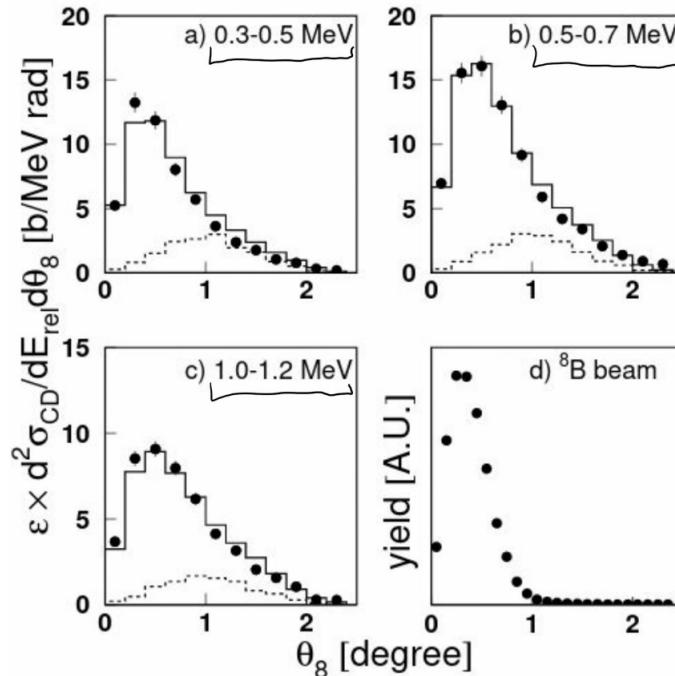


Figura VII.9: Risultati dell'esperimento GSI. Il pannello in basso a destra è il fascio di 8B che non ci interessa. Negli altri pannelli abbiamo 3 intervalli di energia nel sistema del centro di massa: i punti rappresentano i dati sperimentali, mentre gli histogrammi in linea continua sono simulazioni con il contributo $E1 + M1$ e quelli in linea tratteggiata sono simulazioni con il contributo solo di $E2$.

Con questo metodo però non si riescono a vedere le risonanze.

Un'ultima osservazione Si può avere $E1$ e $M1$ contemporaneamente, perché lo stato di scattering può avvenire con onde pari o dispari che portano allo stesso J , per esempio si potrebbe avere³⁶ $E1$ in onda S (pari) e $M1$ in onda P (dispari), ma sperimentalmente è impossibile distinguerle; per cui se abbiamo un processo $\gamma + X \rightarrow X^* \rightarrow a + b$ ($\pi^a = \pi^b = 1$) ciò che si vede sono $\sum_\ell (2\ell + 1)$ onde, con ℓ momento relativo tra i prodotti, quindi non si può distinguere ℓ .

³⁶Ricordarsi che:

$$E \rightarrow \pi = (-1)^L$$

$$M \rightarrow \pi = (-1)^{L+1}$$

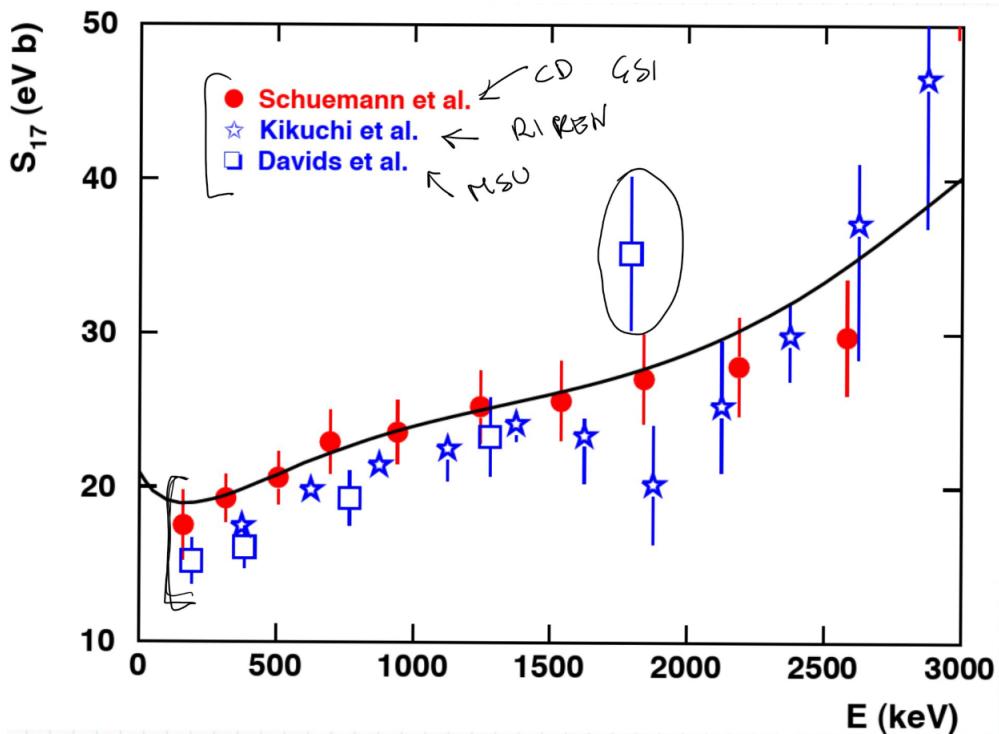
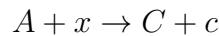


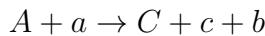
Figura VII.10: Risultati dei vari esperimenti a confronto.

2.2 Trojan Horse method

Consideriamo la reazione³⁷:



L'idea del metodo consiste, come il nome suggerisce, nell'uso di un "cavalo di Troia" per far superare la barriera Coulombiana a x : si prende un nucleo a a cluster tale $a = x + b$ dove b è uno spettatore (per rimanere nella metafora fa la parte degli dèi). Avremo allora:



La velocità di x all'interno del nucleo a è vincolata dall'energia di Fermi, quindi nel sistema del laboratorio $\vec{v}_x = \vec{v}_a + \vec{v}_{\text{fermi}}$; ciò permette di avere alte velocità per a senza però uscire dal range di energie di interesse astrofisico, dato che la velocità relativa tra x e A è limitata. Affinché questa condizione si verifichi, è necessario, però, che il nucleone b si comporti da spettatore, per cui nello studio che faremo ci metteremo nella regione detta quasi-free³⁸.

Questo metodo è stato sviluppato a Catania e anche se coinvolge un processo a 3 corpi in realtà la reazione di interesse è a 2, dal momento che uno di questi è solo uno spettatore. Vediamone gli aspetti principali.

Primi passi Dobbiamo sviluppare una teoria che leggi la sezione d'urto a 3 corpi con quella a 2 corpi. Procediamo per *step*:

I. Lavoriamo in *Distorted Wave Born Approximation*³⁹ (DWBA)

$$\begin{aligned} \psi^+(Aa) &\equiv \chi_{Aa}^+ \phi_A \phi_a \\ \psi^-(Bb) &\equiv \chi_{Bb}^- \psi_{Cc}^- \phi_b \end{aligned}$$

³⁷Cambiamo notazione.

³⁸In questa regione il momento relativo tra x e b è trascurabile, in altre parole la distanza tra i due nucleoni è massima e l'interazione minima. Si ottiene così che la distanza tra x e A è molto inferiore a quella tra x e b .

³⁹In parole povere è come la *Plane Wave Born Approximation* ma si tiene conto di Coulomb.

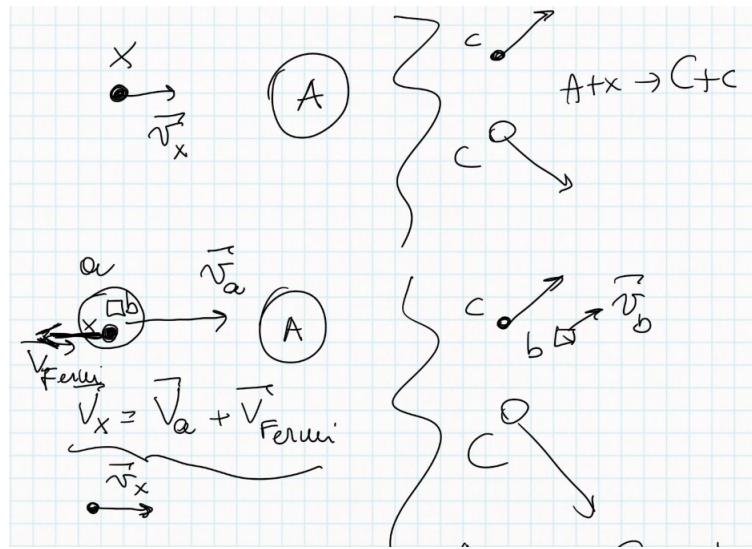


Figura VII.11: Schema della reazione senza THM in alto e con THM in basso.

dove $B \equiv C + c$, ϕ sono le funzioni d'onda dei vari nuclei, χ è l'onda distorta e $\psi_{Cc}^- \equiv \chi_{Cc}^- \phi_C \phi_c$. Avremo allora che l'elemento di matrice di transizione sarà dato da:

$$T_{fi} = \langle \chi_{Bb}^- \psi_{Cc}^- \phi_b | V_{xb} | \chi_{Aa}^+ \phi_A \phi_a \rangle$$

V è un operatore interno di a .

- II. Poiché ψ_{Cc}^- non è semplice, facciamo la *surface approximation*, ovvero approssimiamo la funzione d'onda con il suo andamento asintotico fuori da $R \sim R_{xA}$ (distanza tra i nucleoni), detto per questo *cutoff radius*; questo ci permette di legare l'elemento di matrice T_{fi} con la *S-Matrix* della reazione a 2 corpi (e quindi allo sfasamento).
- III. Osserviamo che usare la PWBA rispetto alla DWBA influisce solo su un fattore moltiplicativo di normalizzazione dei dati⁴⁰. Avremo quindi un fattore astrofisico $S_{TH}(E)$ da riscalare.

$$\frac{d^3\sigma}{dE_c d\Omega_c d\Omega_C} = K_F \frac{v_{Cc}}{v_{Ax}} \left| W(\vec{P}_{bx}) \right|^2 \frac{d\sigma^{TH}}{d\Omega_{Ax}}$$

dove K_F è un coefficiente cinematico, le velocità sono quelle relative e W è la *momentum amplitude*, ovvero la distribuzione dei momenti di x in a ; l'ultimo termine è quello di interesse.

Il metodo dipende quindi fortemente dalla scelta di a e in Figura VII.12 abbiamo riportato alcune configurazioni. Tra questi i migliori sono d e ${}^6\text{Li}$.

⁴⁰Vedi 7 - *Trojan Horse method: da DWBA a PWBA*

TH nucleus	$x-s$ cluster structure	Orbital angular momentum	Binding energy (MeV)
^2H	p-n	0	2.225
^3H	d-n	0	6.257
^3He	d-p	0	5.493
^6Li	d- α	0	1.474
^9Be	$^5\text{He}-\alpha$	0	2.464
^{16}O	$^{12}\text{C}-\alpha$	0	7.162
^{20}Ne	$^{16}\text{O}-\alpha$	0	4.730

Figura VII.12: Varie possibilità per il nucleo a cluster a .

I criteri per determinare un buon “cavallo” sono:

- (i) un’energia di legame B “piccola” nel sistema $x - b$.
- (ii) una struttura semplice.
- (iii) un “buon” Q -valore per la reazione $A + a \rightarrow C + c + b$.
- (iv) una *momentum amplitude* nota.
- (v) una struttura tale da minimizzare i processi non-quasi-free, ovvero in cui b non è spettatore.

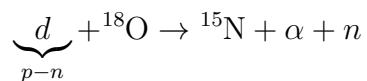
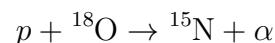
Analisi del metodo Per comprendere meglio il procedimento che porta alla realizzazione della misura, discutiamo brevemente i singoli *step* del metodo:

Step I. Scegliamo un opportuno “cavallo” (come studiato precedentemente).

Step II. *Settiamo* l’energia del fascio e le condizioni iniziali così che:

- (a) la velocità sia tale da superare la barriera coulombiana, ma rimanga vincolata dall’energia di Fermi.
- (b) la cinematica rimanga quasi-free.

Per quanto riguarda quest’ultimo punto prendiamo a esempio:



Questo è il processo che vorremmo osservare, tuttavia se il neutrone non è spettatore potremmo avere gli stessi prodotti, ma con un’interazione differente, come riportato in Figura VII.13. Questi processi, poiché non desiderati, “sporcano” la misura, quindi è necessario trovare un modo per riconoscerli; notiamo che ognuno di essi passa per un *compound nucleus* (${}^{19}\text{F}^*$, ${}^{16}\text{N}^*$, ${}^5\text{He}^*$) per cui sono facilmente individuabili attraverso gli *energy correlation spectra* da un picco di risonanza⁴¹ che non compare nella reazione cercata. Ne riportiamo un esempio in Figura VII.14 (a sinistra). Individuate le energie di risonanza si mettono dei tagli così si “ripulisce” il fascio.

⁴¹Per questi processi si osservano infatti delle regioni particolarmente dense nei grafici, per esempio, delle energie relative tra prodotti. Da queste si deducono possibili risonanze e quindi le zone da rimuovere nello studio della reazione.

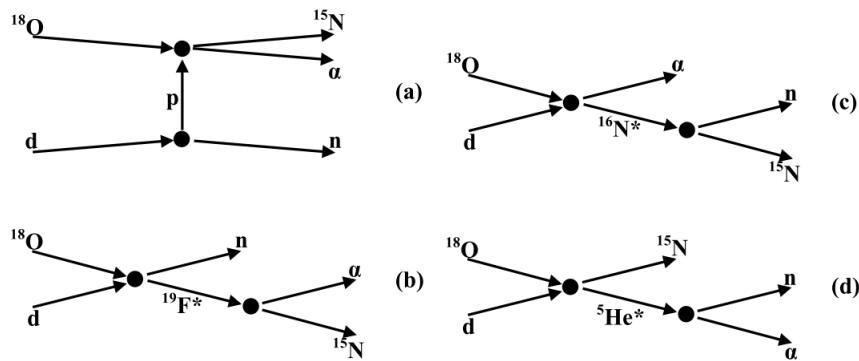


Figura VII.13: Possibili processi di reazione di $d + ^{18}\text{O}$. Solo nel caso (a) il neutrone è spettatore, gli altri costituiscono il *fondo*.

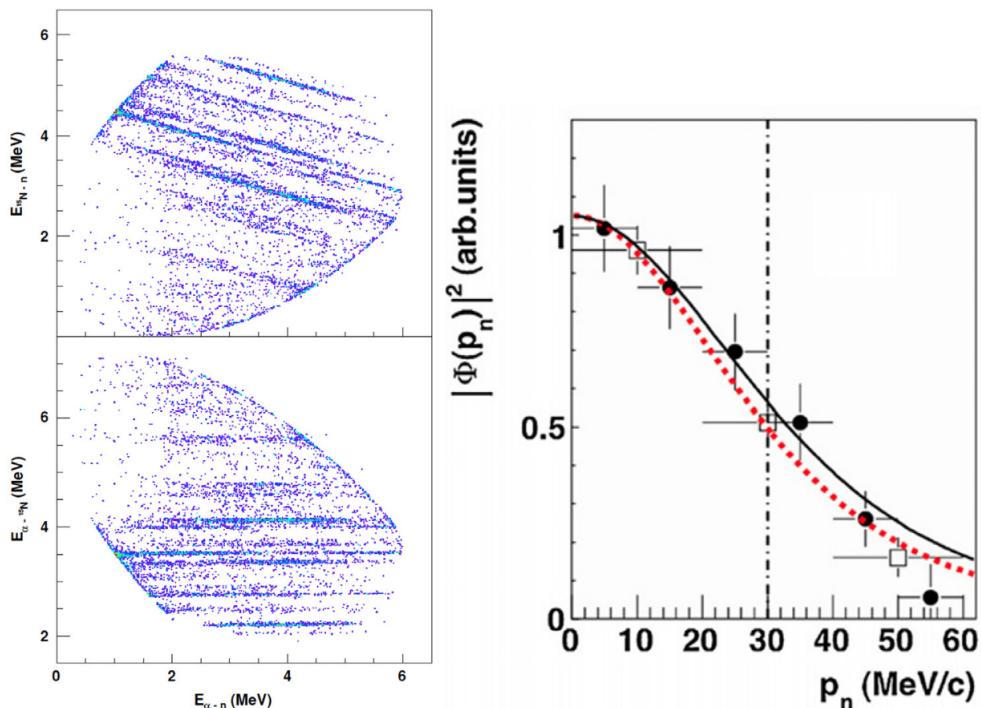
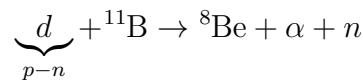


Figura VII.14: A sinistra *energy correlation spectra*: energia relativa tra α e ^{15}N contro quella tra α e n . Nel riquadro in basso i fasci orizzontali corrispondono agli stati eccitati del $^{19}\text{F}^*$. A destra distribuzione dei momenti, con $\Phi \equiv W$: i pallini sono i dati sperimentali, in rosso tratteggiata è la teoria in PWBA, mentre in nero continua è un fit con parametri liberi.

Step III. Dobbiamo conoscere $|W(\vec{P}_{bx})|^2$ e per far questo ci sono 2 strade:

- viene calcolato (caso di nuclei leggeri);
- oppure si sviluppa prima una teoria di scattering e poi si misura.

Nel secondo caso si può ottenere la misura facendo uno scattering in un certo range di energie. Prendiamo come esempio la reazione:



I risultati sono riportati in Figura VII.14 (a destra).

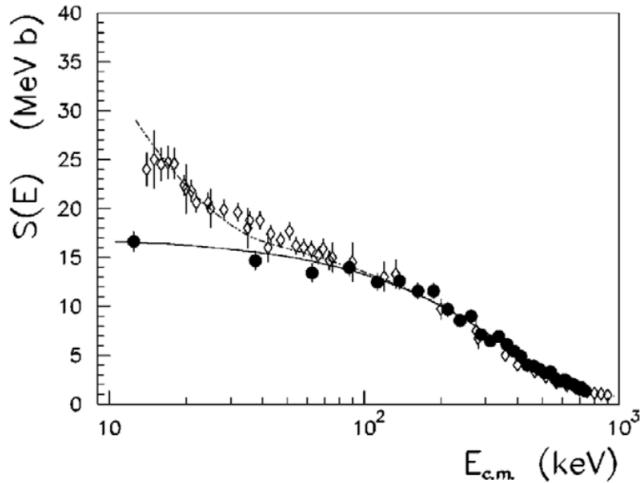
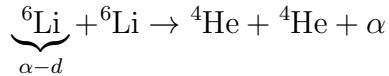


Figura VII.15: Fattore astrofisico per ${}^6\text{Li} + {}^6\text{Li}$: i puntini neri sono ottenuti con THM, i punti vuoti sono i dati sperimentali, la linea continua nera è un fit. Il *gap* a basse energie è dovuto all'elettroscreening, non considerato dalla teoria del THM.

Fattore astrofisico Effettivamente ciò che si misura è $\frac{d^3\sigma}{dE_c d\Omega_c d\Omega_C}$, da questa si stima $\frac{d\sigma^{TH}}{d\Omega_{Ax}}$ e infine si ottiene $S(E)$ da normalizzare. Per normalizzare spesso quello che si fa è calcolare il fattore astrofisico anche per range in cui si riescono a fare misure dirette (anche se non è di interesse) e poi si *matchano* i dati con la teoria.

La prima reazione così studiata⁴² fu:



e si ottennero i risultati in Figura VII.15: il fattore astrofisico è stato normalizzato con i dati raccolti nel range di energie tra 600 keV e 1 MeV. Osserviamo che il THM fornisce una misura della sezione d'urto senza il contributo dell'elettroscreening⁴³, σ_{bare} , che può essere comunque stimato, per cui $U_e^{th} = 186$ eV $\ll U_e = (340 \pm 51)$ eV. Si fa allora un fit sviluppando⁴⁴ il fattore astrofisico in 0: $S(E) \simeq S(0) + S_1 E + S_2 E^2 + S_3 E^3$. I risultati sono riportati nella tabella in Figura VII.16 per differenti valori del *cutoff radius* R .

Si ha così un fattore astrofisico compreso tra 14.8 MeV b e 16.8 MeV b e questo dimostrò che il metodo funzionava, dando una stima per $S(E)$ e il suo errore.

⁴²Fu scelto il litio perché per questo W è facile da calcolare e anche da misurare.

⁴³Il metodo è ideato appunto per penetrare la barriera coulombiana.

⁴⁴Seguiamo la notazione della tabella per cui:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv S'(0) \\ S_2 &\equiv \frac{1}{2}S''(0) \\ S_3 &\equiv \frac{1}{6}S'''(0) \end{aligned}$$

Coefficients	$R = 3.69 \text{ fm}$	$R = 4.00 \text{ fm}$	$R = 4.31 \text{ fm}$
$S(0) \text{ (MeV b)}$	15.2 ± 0.5	16.1 ± 0.5	16.9 ± 0.5
$S_1 \text{ (b)}$	-33.25	-36.975	-39.950
$S_2 \text{ (MeV}^{-1} \text{ b)}$	19.984	23.588	26.067
$S(0) \text{ (MeV b)}$	14.8 ± 0.5	15.6 ± 0.5	16.6 ± 0.5
$S_1 \text{ (b)}$	-27.9	-30.9	-35.8
$S_2 \text{ (MeV}^{-1} \text{ b)}$	3.7	4.9	13.3
$S_3 \text{ (MeV}^{-1} \text{ b)}$	14.0	16.1	11.0

Figura VII.16: Valori dei parametri del fit per differenti raggi di *cutoff*.

2.3 Asymptotic Normalization Coefficients method

Introduzione Consideriamo anche questa volta un nucleo fortemente a cluster⁴⁵ $X \equiv b + Y$. L'equazione di Schrödinger ridotta per $b + Y$ sarà:

$$u_L'' + \left(-\frac{2\mu}{\hbar^2} V + \frac{2\mu}{\hbar^2} E - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) u_L = 0$$

Prendiamo uno stato legato $E < 0$ e definiamo $k \in \mathbb{C}$ tale $E \equiv \hbar^2 k^2 / 2\mu$, da cui $k = i\sqrt{2\mu|E|/\hbar^2} \equiv i k_I$ con $k_I \in \mathbb{R}$. Il potenziale sarà quello coulombiano più quello dovuto all'interazione nucleare $V = V_{nucl} + Z_1 Z_2 e^2 / r$; definiamo allora il parametro:

$$\eta \equiv \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \frac{\mu}{\hbar k} = -i \frac{Z_1 Z_2 e^2 \mu}{\hbar^2 k_I} \equiv i \eta_I$$

A questo punto ci mettiamo a grande distanza ($V_{nucl} \simeq 0$ per $r > R_N$) e studiamo le soluzioni dell'equazione di Schrödinger, ovvero le funzioni di Coulomb *in-going* e *out-going*: $u_L^\pm(\eta, kr)$. In realtà, siccome siamo interessati solo alla soluzione asintotica prendiamo la *in-going* perché vogliamo un andamento che sia $e^{ikr} = e^{-k_I r}$, dunque abbiamo solo $u_L^+(\eta, kr)$; questa però non è ben definita per $1 + L + i\eta = 0$, allora per correggere si usa la funzione di Whittaker:

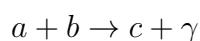
$$W_{-\eta, L+1/2}(-2i\rho) = e^{-\pi\eta/2} e^{-iL\pi/2} u_L^+(\eta, \rho)$$

con $\rho \equiv kr$. Si può mostrare che per $r \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$):

$$W_{-\eta, L+1/2}(-2i\rho) \rightarrow \underbrace{e^{i\rho - i\eta \ln 2\rho}}_{\text{Onda distorta}} e^{-\eta\pi/2} = e^{-k_I r + \eta_I \ln 2k_I r} e^{i\eta_I \pi/2}$$

Dunque la nostra soluzione $u_L(r)$ asintoticamente sarà proporzionale a $W_{\eta_I, L+1/2}(2k_I r)$ e il fattore di proporzionalità C_L viene appunto detto **Coefficiente Asintotico di Normalizzazione** (ANC).

Nel metodo Prendiamo la reazione:



in modo che sia perfetta⁴⁶, $E_{CM} \sim 0$: i nuclei b e c o si "avvicinano poco" oppure entrano in interazione per breve tempo.

⁴⁵La notazione è stata cambiata. Tale scelta è stata fatta affinché non si confondano i due metodi.

⁴⁶Per quanto riguarda la notazione: con $\vec{\xi}_i$ indichiamo la posizione del nucleo i rispetto all'origine (coordinate interne), con \vec{r} invece indichiamo la distanza relativa tra il nucleo b e il nucleo c .

Sappiamo ormai che la sezione d'urto dipenderà dall'elemento di matrice:

$$\begin{aligned} M &= \langle \psi_c | \hat{\Theta}_\gamma | \psi_{ab}^{scatt} \rangle = \\ &= \langle \psi_c(\vec{\xi}_a, \vec{\xi}_b, \vec{r}) | \hat{\Theta}_\gamma(\vec{r}) | \psi_a(\vec{\xi}_a) \psi_b(\vec{\xi}_b) \underbrace{\phi_{k_i}^+(\vec{r})}_{\text{onda distorta}} \rangle = \\ &= \langle I_{ab}^c(\vec{r}) | \Theta_\gamma(\vec{r}) | \phi_{k_i}^+(\vec{r}) \rangle \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'operatore dipenda esclusivamente dalla distanza relativa \vec{r} e quindi abbiamo integrato sulle coordinate interne, definendo⁴⁷:

$$I_{ab}^c(\vec{r}) = \langle \psi_a(\vec{\xi}_a) \psi_b(\vec{\xi}_b) | \psi_c(\vec{\xi}_a, \vec{\xi}_b, \vec{r}) \rangle = \sum_{\ell, m, S, S_z} i^\ell \langle J_a M_a, J_b M_b | S S_z \rangle \langle S S_z, \ell m | J_c M_c \rangle Y_{\ell m}(\hat{r}) I_{ab, \ell S}^c(r)$$

Questo ci permette di scrivere l'andamento asintotico della ψ_a come una certa funzione di *overlap*⁴⁸ $I_{ab, \ell S}^c(r)$; allora ci aspettiamo che asintoticamente ($r \gg R_N$) avremo (usando gli ANC per la ridotta):

$$I_{ab, \ell S}^c(r) \rightarrow \frac{C_{\ell S}}{r} W_{-in, \ell+1/2}(2kr)$$

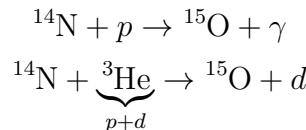
Dunque se conosco gli ANC allora conosco anche I e di conseguenza M .

Come trovare ANC Esistono principalmente 2 modi:

- calcolarli dalla teoria (non molto affidabili);
- oppure prenderli da altri esperimenti, dove si ha lo stesso vertice ($a + b \longleftrightarrow c$) e valgono le condizioni di reazione periferica.

Nel secondo caso si scelgono spesso reazioni di *transfer* $a(X, Y)c$, con $X = b + Y$ cluster (per cui il vertice è lo stesso).

Per fare un esempio prendiamo:

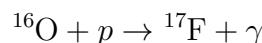


Sperimentalmente si misura $d\sigma^{transf}/d\Omega$ e questa è legata ai coefficienti di normalizzazione secondo:

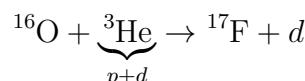
$$\frac{d\sigma^{transf}}{d\Omega} \propto \sum_{J_X J_c} (C_{bY}^X)^2 (C_{ab}^c)^2 \sigma_{DWBA}$$

Se conosciamo σ_{DWBA} e C_{bY}^X otteniamo il valore cercato C_{ac}^c ; σ_{DWBA} si calcola facilmente, per quanto riguarda C_{bY}^X si prende da un'altra reazione oppure si calcola (nel caso dell'esempio $C_{pd}^{{}^3\text{He}}$ è calcolabile).

Test case Consideriamo la reazione:



per cui sono stati acquisiti dati da misure dirette. Dobbiamo allora trovare il ANC di ${}^{17}\text{F} \longleftrightarrow {}^{16}\text{O} + p$ e a tale scopo prendiamo la reazione:



⁴⁷ $I_{ab}^c \equiv I_{J_a J_b}^{J_c}$.

⁴⁸ Porta infatti l'informazione dell'*overlap* tra la funzione d'onda di scattering bc e quella di a .

con un fascio di ${}^3\text{He}$ a 29.75 MeV (reazione periferica). Si misura $d\sigma^{transf}/d\Omega$, si calcola⁴⁹ σ_{DWBA} e $C_{pd}^{{}^3\text{He}}$.

I risultati sono riportati in Figura VII.17 a sinistra per la distribuzione angolare della reazione di *transfer* e a destra per il fattore astrofisico da questa ottenuto; osserviamo che c'è sia uno stato fondamentale che un primo eccitato. Questo dimostra che il metodo funziona.

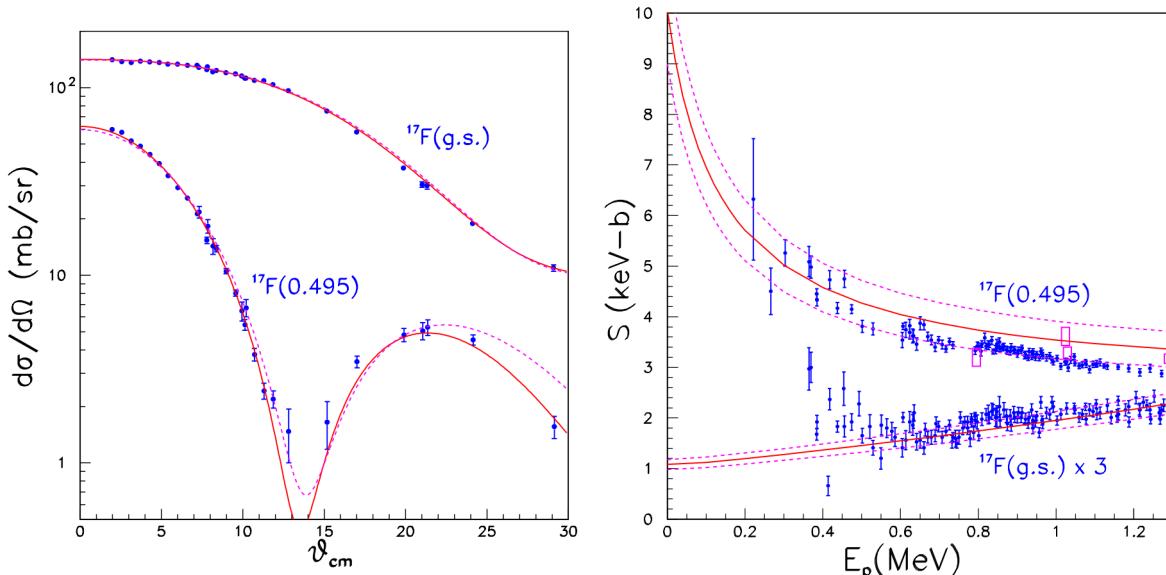
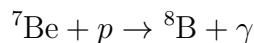


Figura VII.17: A sinistra distribuzione angolare per la reazione ${}^{16}\text{O}({}^3\text{He}, d){}^{17}\text{F}$: le curve sono un fit in DWBA con parametri differenti; g.s. sta per *ground-state*. A destra andamento del fattore astrofisico per ${}^{16}\text{O}(p, \gamma){}^{17}\text{F}$: i puntini sono i dati delle misure dirette, mentre la curva rossa è ottenuta dagli ANC del grafico a sinistra.

Il suo utilizzo Il ANC *method* fu usato per misurare la reazione:



Ci sono varie opzioni per la reazione di *transfer* da scegliere:

- ${}^7\text{Be}({}^3\text{He}, d){}^8\text{B}$
- ${}^7\text{Be}({}^{10}\text{B}, {}^9\text{Be}){}^8\text{B}$
- ${}^7\text{Be}({}^{14}\text{N}, {}^{13}\text{C}){}^8\text{B}$

Per l'ultima è riportato il grafico della distribuzione angolare in Figura VII.18 a sinistra. Si ottenne così un fattore astrofisico $S_{17}^{ANC}(0) = (18.0 \pm 1.9)$ eVb compatibile con quello della misura diretta $S_{17}^{direct}(0) = (20.8 \pm 0.7 \pm 1.4)$ eVb, dati in Figura VII.18 a destra. Notiamo che mentre per il CD *method* in Figura VII.10 non si osservava nessuna risonanza qui invece compare.

⁴⁹In realtà si tiene conto di un potenziale nucleare (spesso Wood-Saxon) a parametri liberi, così da poter valutare se la condizione di soluzione asintotica è ben soddisfatta: questa infatti, se asintotica, deve rimanere la stessa al variare dei parametri del potenziale.

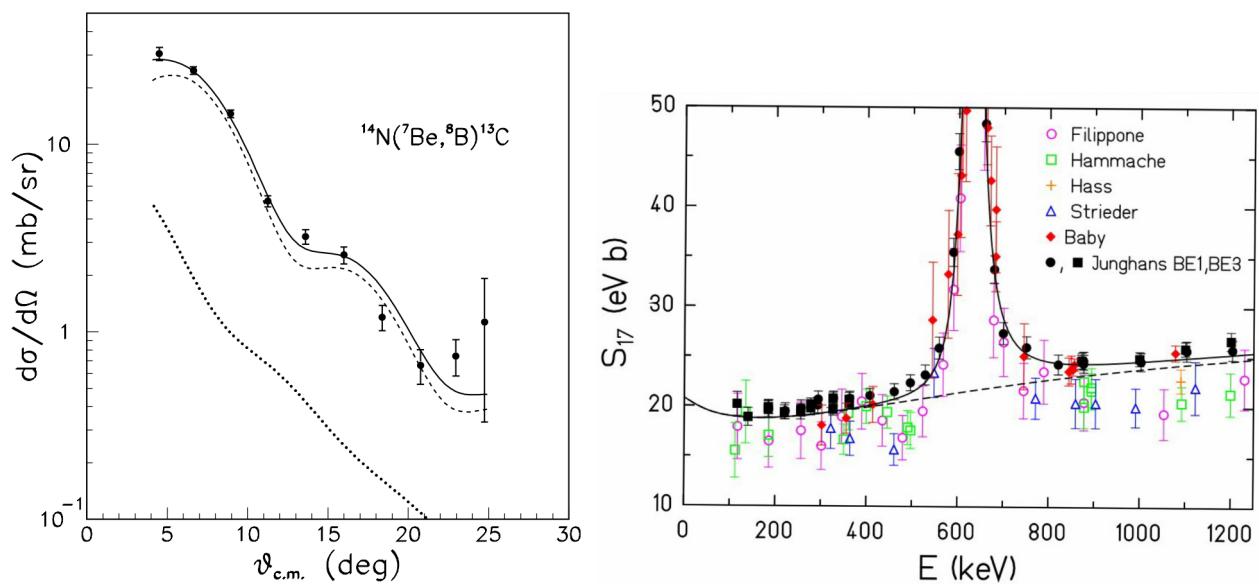


Figura VII.18: A sinistra distribuzione angolare della reazione $^{14}\text{N}(^{7}\text{Be}, ^{8}\text{B})^{13}\text{C}$: le linee rappresentano i fit in DWBA. A destra fattore astrofisico in funzione dell'energia ottenuto sia da misure dirette che con metodi indiretti.

Capitolo VIII

Le ultime reazioni

In questo capitolo sono presentate alcune reazioni di nucleosintesi stellare quali la 3α , il biciclo CNNO con la reazione dell'azoto, l’“*Holy Grail* dell’astrofisica” e infine la reazione dell’ossigeno in neon, focalizzandosi sui diversi contributi alla sezione d’urto dei vari processi. Il capitolo copre le lezioni 21/04/2021, 22/04/2021, 26/04/2021 e 28/04/2021.

1 La 3α

Abbiamo studiato¹ che sia la catena pp sia la BBN terminano con la produzione di particelle α . Come avevamo già trattato nella sezione 2.1-*La nucleosintesi primordiale*, andare oltre sembra impossibile dal momento che non esistono nuclei legati per $A = 5$ e quelli per $A = 8$ decadono molto velocemente (*mass gap*); tuttavia, le osservazioni mostrano che il ^{12}C è il quarto elemento più abbondante nell'universo.

La soluzione arrivò da Salpeter²: l'idea si basava sull'ipotesi che il carbonio si formasse in 2 *step*.

1) $\alpha + \alpha \rightarrow {}^8\text{Be}.$

Questo in realtà è instabile perché lo stato 0^+ è sopra la soglia di $\alpha + \alpha$, $Q = 92$ keV e $\tau_{dec} \sim 10^{-16}$ s. Se abbiamo 2α con energia cinetica $T \sim Q$ allora $v = \sqrt{4Q/m_\alpha} \sim 10^{-2} c \simeq 3 \cdot 10^6$ m/s; possiamo trovare un ordine di grandezza del tempo di transito prendendo la distanza di interazione $d \sim 3$ fm, per cui $t \sim d/v \sim 10^{-21}$ s $\ll \tau_{dec}$. Dunque, abbiamo una “piccolissima” concentrazione di ${}^8\text{Be}$ che sappiamo essere $N({}^8\text{Be})/N(\alpha) \simeq 5 \cdot 10^{-10}$. Può avvenire allora il secondo *step*.

2) ${}^8\text{Be} + \alpha \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma.$

Si tratta di una cattura diretta, ma il fattore astrofisico sarebbe troppo piccolo per spiegare l’abbondanza di carbonio. Ecco che intervenne Hoyle: egli suppose che esistesse una risonanza per questo processo. A quel tempo la sua fu una predizione perché non c’era modo di raccogliere dati per energie in quel range; ormai è stata osservata e confermata: $J^\pi = 0^+$ e $\Gamma_{tot} = (8.90 \pm 1.08)$ eV (risonanza stretta), dove con Γ_{tot} abbiamo indicato la larghezza del processo totale³ $\Gamma_{tot} = \Gamma_\alpha + \Gamma_{rad} \equiv \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma + \Gamma_{e^+e^-}$.

Per avere $0^+ \rightarrow 0^+$ non può esserci decadimento γ perché per questo è vietata la transizione, mentre si può ottenere con produzione di coppia e^+e^- ; tuttavia, è più probabile una transizione a 2 *step*: $0^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ ($E2+E2$). In questo caso $\Gamma_\gamma = (3.6 \pm 0.5)$ meV $\ll \Gamma_\alpha$ ($E2$ è “piccolo”).

¹Vedi i capitoli IV-*Big Bang Nucleosynthesis* e V-*La catena protone-protone*.

²Salpeter, E.E., ApJ, 1952, vol.115, DOI: [10.1086/145546](https://doi.org/10.1086/145546).

³Abbiamo considerato anche il processo di decadimento Γ_α .

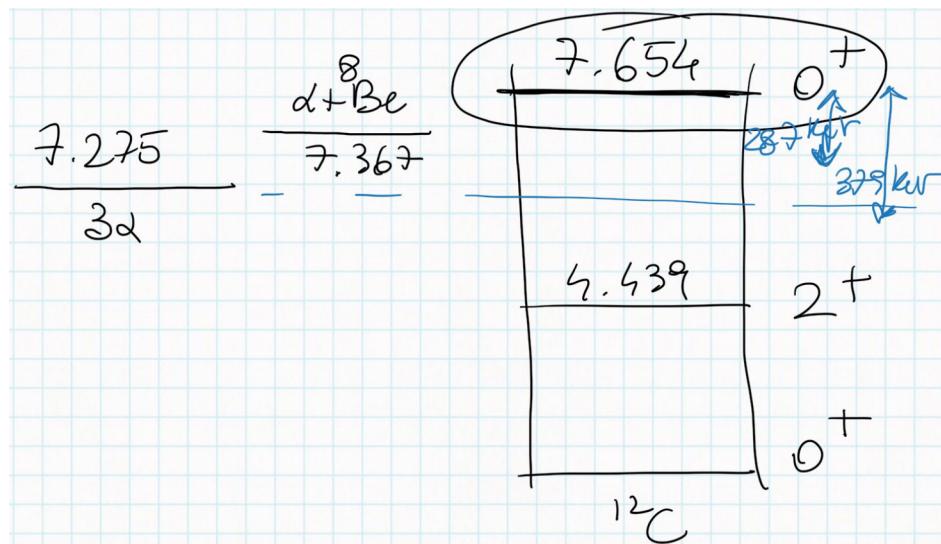


Figura VIII.1: Livelli energetici per la risonanza di Hoyle della 3α .

Dalla Breit-Wigner⁴:

$$\langle \sigma v \rangle \simeq \left(\frac{2\pi}{\mu kT} \right)^{3/2} \hbar^2 \left(g \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_\alpha}{\Gamma_{tot}} \right) e^{-E_R/kT} \simeq \left(\frac{2\pi}{\mu kT} \right)^{3/2} \hbar^2 \Gamma_\gamma e^{-E_R/kT}$$

dove abbiamo calcolato⁵ g per 0^+ e fatto l'approssimazione $\Gamma_{tot} \simeq \Gamma_\alpha$. Avremo allora per il rate:

$$r_{3\alpha} = N_{^8Be} N_\alpha \langle \sigma v \rangle$$

⁴

$\sigma_{BW} = \pi \frac{\hbar^2}{2\mu E} g \Gamma_a \Gamma_b \frac{1}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$

⁵

$g = \frac{2J + 1}{(2S_\alpha + 1)(2S_{^8Be} + 1)} = 1 \quad \text{per } 0^+$

2 Biciclo CN-NO

Nelle stelle come il Sole (popolazione I) l'abbondanza di metalli è tale che i protoni possono reagire in elio con un processo diverso dalla catena pp .

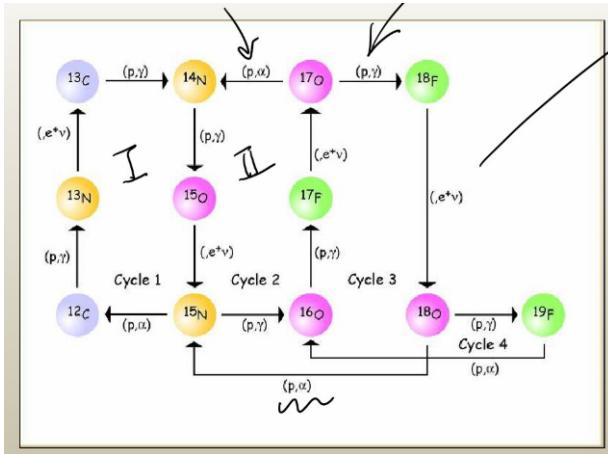


Figura VIII.2: Schema completo del biciclo CN-NO

2.1 Ciclo CNO

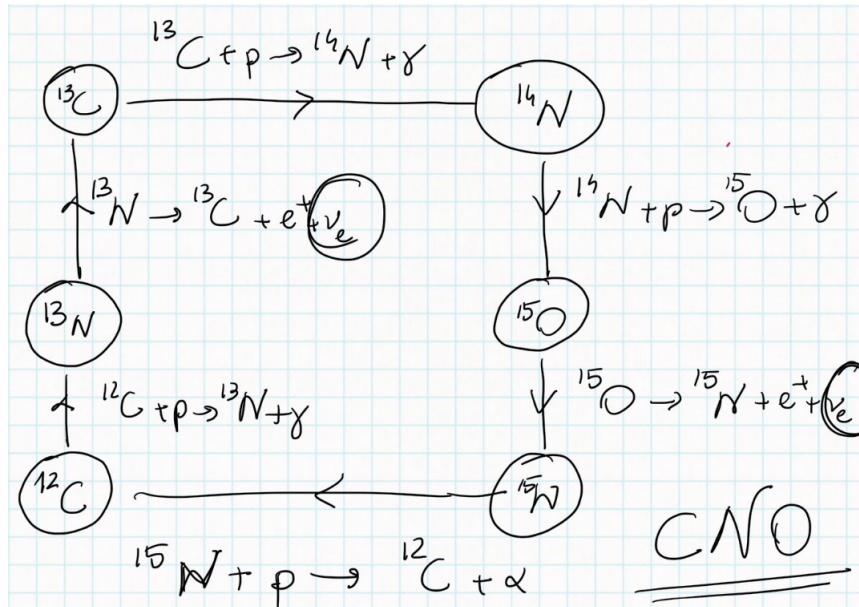


Figura VIII.3: Schema del ciclo CNO.



Come suggerisce il nome, non si tratta di una catena ma di un ciclo: si parte da $4p$ e si producono $\alpha + 2e^+ + 2\nu_e$ con $Q = 26.7$ MeV, ristabilendo le condizioni per far ripartire il network di reazioni (i cosiddetti *seed*, ovvero ^{12}C e ^{13}N , non si esauriscono).

Vediamo in Figura VIII.4 che in base alla temperatura interna della stella il ciclo è più o meno dominante rispetto alla catena pp . Anche questa volta, per studiare questo network di reazioni si osservano i neutrini (ν_O e ν_N), i cui flussi comparivano nella Figura V.2 (quando abbiamo

studiato quelli della *pp*), e le rispettive reazioni hanno tempi di decadimento pari a $\tau_O \sim 2$ m e $\tau_N \sim 10$ m.

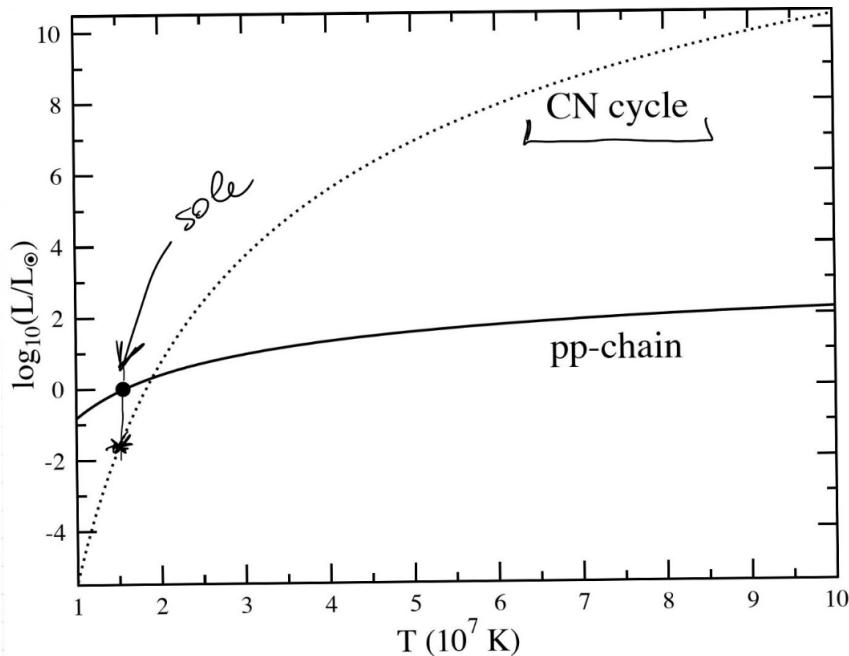


Figura VIII.4: Contibuto della catena *pp* e del ciclo CNO alla luminosità al variare della temperatura interna della stella. Il punto indica la posizione del Sole.

Un po' di notazione Prima di studiare il network introduciamo una notazione per scrivere il reaction rate dei vari processi in gioco. Finora abbiamo visto:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \rightarrow \dots & & r_{12} = \frac{n_1 n_2}{1 + \delta_{12}} \langle \sigma v \rangle_{12} \\ 1 \rightarrow \dots & & r_1 = \lambda_1 n_1 \end{aligned}$$

dove $\lambda \equiv 1/\tau$ è la costante di decadimento. Definiamo allora i fattori combinatoriali:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \leftarrow \text{numero di coppie distinte} & r_{ij} &= C_{ij} n_i n_j \langle \sigma v \rangle_{ij} \\ C_{ijk} &= \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ diversi} \\ 1/2! & \forall i = j, j = k, i = k \\ 1/3! & i = j = k \end{cases} & r_{ijk} &= C_{ijk} n_i n_j n_k \langle \sigma v \rangle_{ijk} \end{aligned}$$

Attraverso questi possiamo riscrivere la variazione nel tempo di densità di specie i (equazione di rate) come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \sum_j r_j + \sum_{jk} r_{jk} + \sum_{jkl} r_{jkl} = \\ &= \sum_j \lambda_j n_j + \sum_{jk} C_{jk} n_j n_k \langle \sigma v \rangle_{jk} + \sum_{jkl} C_{jkl} n_j n_k n_l \langle \sigma v \rangle_{jkl} \end{aligned}$$

dove i termini con $j, k, l = i$ sono negativi (termini di distruzione) e viceversa quelli con $j, k, l \neq i$ (termini di creazione). Spesso questa relazione viene riscritta con la *fractional nuclear*

abundance Y_i , ovvero il numero di nuclei i sul numero di nuclei totali, per cui⁶ $\sum_i Y_i A_i = 1$:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = \sum_j \lambda_j Y_j + \rho N_u \sum_{jk} C_{jk} Y_j Y_k \langle \sigma v \rangle_{jk} + (\rho N_u)^2 \sum_{jkl} C_{jkl} Y_j Y_k Y_\ell \langle \sigma v \rangle_{jkl}$$

Studio del network Vediamo le reazioni che abbiamo:

1. 3 reazioni (p, γ) per $X = {}^{12}\text{C}, {}^{13}\text{C}, {}^{14}\text{N}$, per le quali chiameremo $\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_{p,X}$.
2. 2 decadimenti β^+ per $X = {}^{14}\text{N}, {}^{15}\text{O}$, per i quali definiamo λ_X .
3. 1 reazione (p, α) per ${}^{15}\text{N}$ e quindi $\langle \sigma v \rangle$.

Riportiamo in Figura VIII.5 la variazione nel tempo delle *fractional nuclear abundance* per ogni specie; dalla fisica nucleare abbiamo ogni $\langle \sigma v \rangle$ e λ e queste equazioni vengono risolte numericamente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_p}{\partial t} &= -\rho N_u \left[Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{12}\text{C}} + Y_p Y_{^{13}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{13}\text{C}} \right. \\ &\quad \left. + Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{14}\text{N}} + Y_p Y_{^{15}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{15}\text{N}} \right] \\ \frac{\partial Y_{^{12}\text{C}}}{\partial t} &= \rho N_u \left[-Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{12}\text{C}} + Y_p Y_{^{15}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{15}\text{N}} \right] \\ \frac{\partial Y_{^{13}\text{C}}}{\partial t} &= -\lambda_{^{13}\text{N}} Y_{^{13}\text{N}} + \rho N_u Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{12}\text{C}} \\ \frac{\partial Y_{^{14}\text{N}}}{\partial t} &= +\lambda_{^{13}\text{N}} Y_{^{13}\text{N}} - \rho N_u Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{12}\text{C}} \\ \frac{\partial Y_{^{15}\text{N}}}{\partial t} &= \rho N_u \left[Y_p Y_{^{13}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{13}\text{C}} - Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{14}\text{N}} \right] \\ \frac{\partial Y_{^{15}\text{O}}}{\partial t} &= -\lambda_{^{15}\text{O}} Y_{^{15}\text{O}} + Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{14}\text{N}} \\ \frac{\partial Y_{^{16}\text{N}}}{\partial t} &= +\lambda_{^{15}\text{O}} Y_{^{15}\text{O}} - \rho N_u Y_p Y_{^{15}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{15}\text{N}} \\ \frac{\partial Y_{^A}}{\partial t} &= +\rho N_u Y_p Y_{^{15}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{15}\text{N}} \end{aligned}$$

Figura VIII.5: Evoluzione nel tempo per ogni specie.

Ci possiamo chiedere però quale tra queste sia la reazione più lenta. Abbiamo 2 processi deboli (${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C}$ $\tau \sim 10$ min e ${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{16}\text{N}$ $\tau \sim 2$ min), ma nessuno dei due ha barriera coulombiana, quindi non sono i più lenti. La barriera è presente invece nei processi: $p + {}^{12}\text{C}$, $p + {}^{13}\text{C}$, $p + {}^{14}\text{N}$ e $p + {}^{15}\text{N}$; avendo l'azoto $Z = 7$ maggiore di quello del carbonio $Z = 6$, la barriera è più intensa per le reazioni con N e tra queste dal momento che $p + {}^{15}\text{N}$ è un'interazione forte la più lenta è $p + {}^{14}\text{N}$. Anche se sembra poco intuitivo i processi deboli raggiungono velocemente l'equilibrio (*steady state*), $\partial_t Y = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_{^{13}\text{N}} Y_{^{13}\text{N}} &= \rho N_u Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{12}\text{C}} \\ \lambda_{^{15}\text{O}} Y_{^{15}\text{O}} &= \rho N_u Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{14}\text{N}} \end{aligned}$$

⁶Se abbiamo una singola specie $Y = 1/A$ e $n = \rho/A m_u = Y \rho/m_u$, per cui ricordandosi che il valore del numero d'Avogadro $N_u = 1/m_u$ si ha $n = \rho N_u Y$; generalizzando a più specie $n_i = \rho N_u Y_i$.

Sostituendo in Figura VIII.5 e imponendo l'equilibrio di tutte le specie si ottiene:

$$\frac{Y_{^{14}\text{N}}}{Y_{^{12}\text{C}}} = \frac{\langle \sigma v \rangle_{^{12}\text{C}}}{\langle \sigma v \rangle_{^{14}\text{N}}} \simeq \frac{1.26 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3/\text{mol s}}{1.3 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^3/\text{mol s}} \sim 100$$

Si intuisce quindi che al termine del ciclo anche se i *seeds* sono ancora presenti, non hanno le stesse abbondanze iniziali, ma la maggior parte del carbonio⁷ viene processato e contribuisce ad aumentare l'abbondanza di azoto. Lo studio della reazione più lenta $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ diviene allora fondamentale per la stima delle abbondanze e dell'evoluzione stellare.

2.2 Ciclo NO

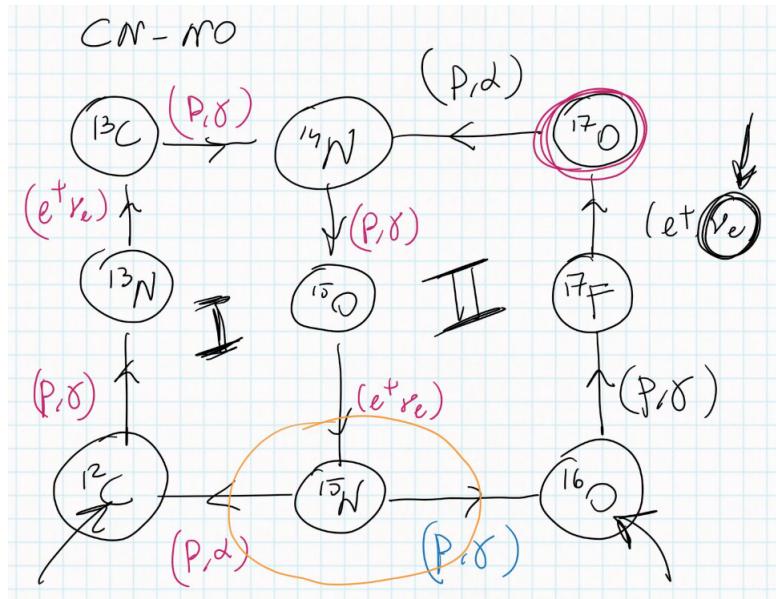
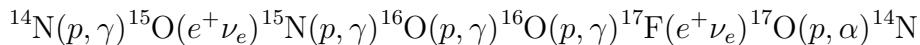


Figura VIII.6: schema del biciclo CN-NO.



È presente in realtà un secondo ciclo (da cui il nome biciclo) che coinvolge l'azoto e l'ossigeno (*seed*); si può infatti avere, invece che $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$, la reazione $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$. Il rapporto tra i rate delle due reazioni è dato da⁸:

$$\frac{r_{p\alpha}}{r_{p\gamma}} \simeq \frac{\langle \sigma v \rangle_{p\alpha}}{\langle \sigma v \rangle_{p\gamma}} \sim \frac{S_{p\alpha}(0)}{S_{p\gamma}(0)} \simeq \frac{65 \text{ MeV b}}{64 \text{ keV b}} \sim 1000$$

Dunque, il secondo ciclo si accende circa ogni 1000 volte che si è completato il primo⁹. Particolarmente importante per il rilevamento di questo network è il decadimento β^+ del ^{17}F (neutrini ν_F come si vede in Figura V.2).

Lo studio del biciclo CN-NO permette di determinare le abbondanze degli elementi C,N, O.

⁷Vale anche per l'ossigeno.

⁸Cambiamo notazione dal momento che i reagenti sono gli stessi per le due reazioni; in questo caso vengono indicati i prodotti.

⁹Si può notare infatti che l'interazione della reazione che porta al primo ciclo è forte, mentre l'altra è elettromagnetica.

Non solo due cicli Come si può notare in Figura VIII.2 sono presenti altri due cicli che si attivano con la reazione $^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}$, ma questi riguardano stelle massicce le cui temperature interne superano le barriere di potenziale delle reazioni.

2.3 La reazione più lenta

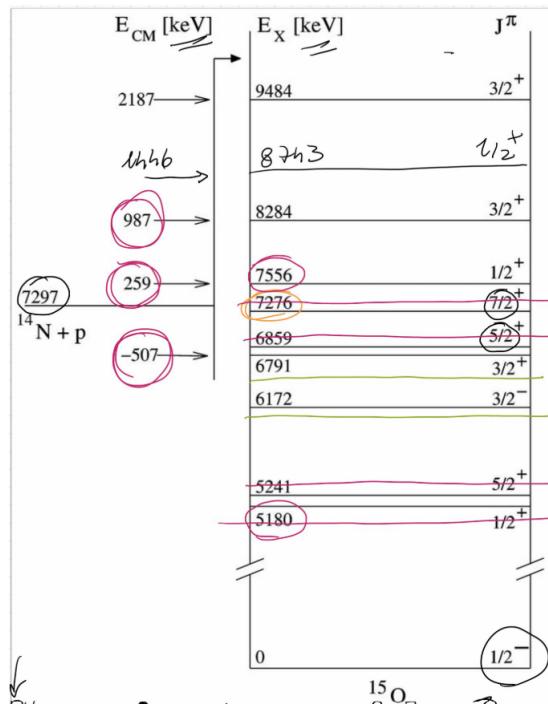


Figura VIII.7: Schema dei livelli energetici della reazione $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$: 7297 keV è il Q -valore. I livelli sottolineati e cerchiati corrispondono alle risonanze, i livelli barrati sono risonanze trascurabili.

Nel Sole (e in tutte le stelle di massa maggiore), come già detto, la reazione $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ è particolarmente importante sia per l'evoluzione che per la stima delle abbondanze dei *seeds*. Riportiamo i livelli energetici del ^{15}O in Figura VIII.7. La finestra di Gamow è $30 \div 110$ keV, per cui la risonanza $1/2^+$ a 5180 keV (lontana) non ci preoccupa; anche le risonanze con $J^\pi > 5/2$ data la multipolarità elevata non danno fastidio, mentre non possiamo trascurare la risonanza per $1/2^+$ (soprasoglia) e $3/2^\pm$ (risonanza sottosoglia) e la cattura diretta sul *ground state* $1/2^-$. Sono state studiate in particolar modo dall'esperimento LUNA¹⁰.

- **Cattura diretta.** Riportiamo in Figura VIII.8 il fit eseguito con il metodo della *R-MATRIX*¹¹. Osserviamo 3 risonanze, a 259 keV, a 987 keV e a 1446 keV (non di interesse), e una risonanza sottosoglia (a -507 keV); la multipolarità si distingue invece dalla distribuzione angolare. Si stima un fattore astrofisico:

$$S(0) = (0.27 \pm 0.05) \text{ keV b}$$

- **Cattura $E_R = 6.17 \text{ MeV}$.** Il fattore astrofisico dello stato eccitato $3/2^-$ è riportato in Figura VIII.9 (fit con *R-MATRIX*). Si vedono le stesse 3 risonanze soprasoglia, ma non quella sottosoglia. Estrapolando dai dati:

$$S_{6.17}(0) = (0.13 \pm 0.06) \text{ keV b}$$

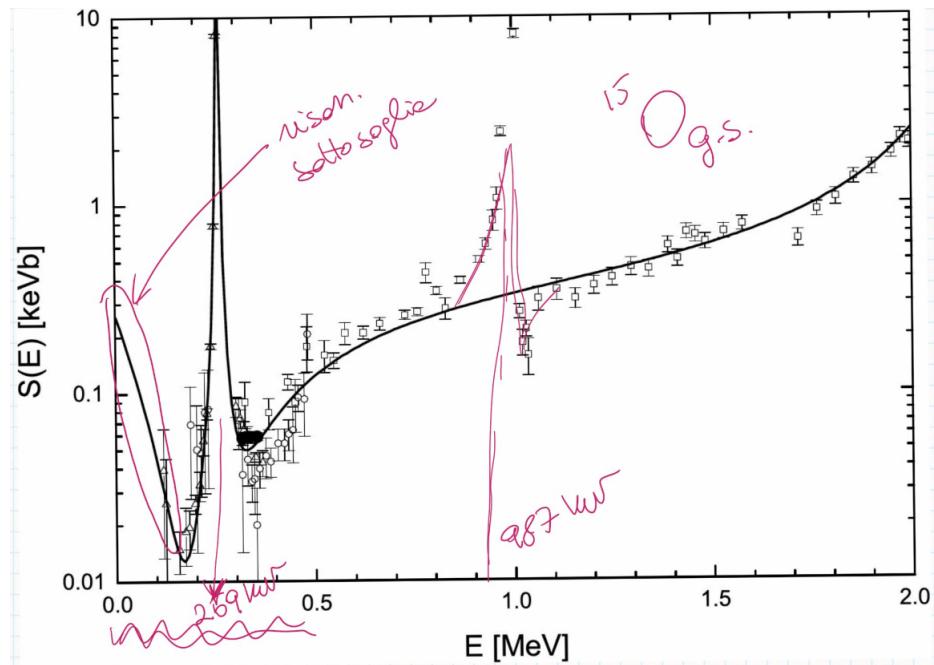


Figura VIII.8: Fattore astrofisico per la cattura diretta sul fondamentale: la linea nera corrisponde al fit ottenuto con il metodo *R-MATRIX*.

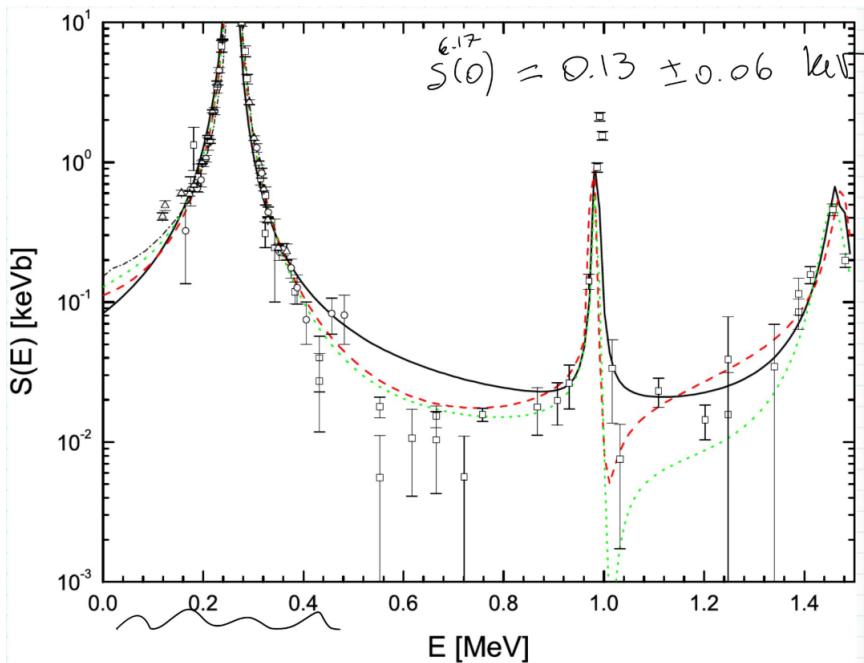


Figura VIII.9: Fattore astrofisico per la cattura sullo stato risonante $E_R = 6.17$ MeV: la linea nera corrisponde al fit ottenuto con il metodo *R-MATRIX*.

I multipoli coinvolti sono $M1$ e $E2$.

- **Cattura $E_R = 6.79$ MeV.** I risultati per lo stato eccitato risonante $3/2^+$ sono riportati in Figura VIII.10. Il valore del fattore astrofisico così ottenuto è:

$$S_{6.79}(0) = (1.18 \pm 0.05) \text{ keV b}$$

¹⁰Guarda Approfondimenti 8 - Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$.

¹¹Vedi il capitolo VI - *R-MATRIX*.

Il multipolo coinvolto è $E1$.

Questo è il termine che dà il contributo maggiore al fattore astrofisico totale (misura di LUNA II):

$$S_{tot}(0) = (1.66 \pm 0.12) \text{ keV b}$$

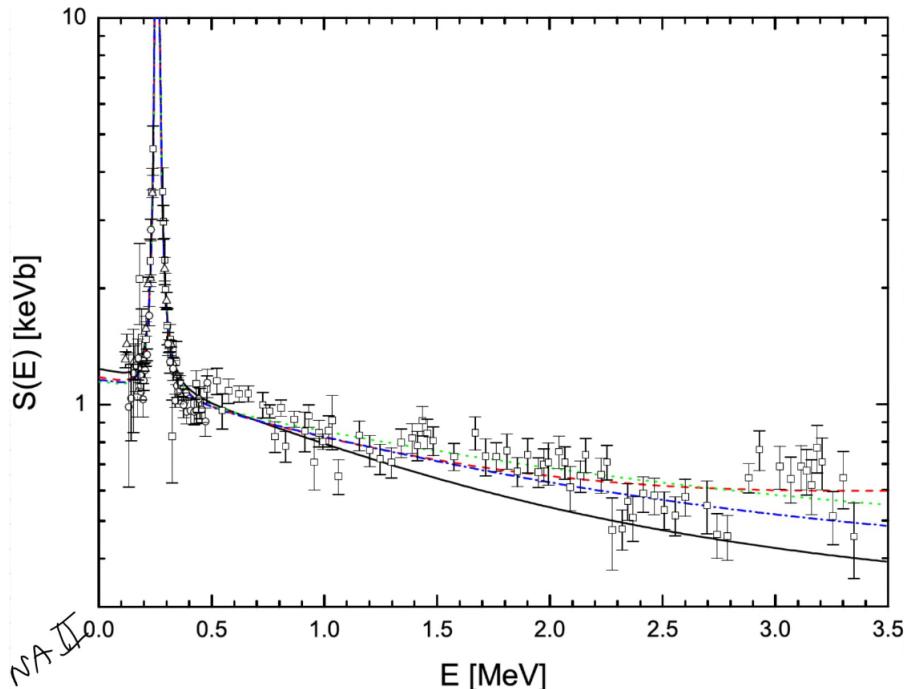


Figura VIII.10: Fattore astrofisico per la cattura sullo stato risonante $E_R = 6.79$ MeV: la linea nera corrisponde al fit ottenuto con il metodo *R-MATRIX*.

Un po' di storia Nel tempo si sono susseguiti diversi studi di questa reazione per stimarne il fattore astrofisico.

- 1988 - pochi dati che non permettevano di confermare o confutare la presenza della risonanza. Figura VIII.11 a sinistra.
- 1998 - si ottiene un fit, ma le incertezze sono “enormi”. Il fattore astrofisico così calcolatore fu:

$$S(0) = \begin{pmatrix} 3.5 & +1.0 \\ & -2.0 \end{pmatrix} \text{ keV b}$$

Figura VIII.11 a destra. L'articolo di riferimento è Adelberger et al., Rev. Mod. Phys., 1998, vol.70, DOI: [10.1103/RevModPhys.70.1265](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.1265).

- 2001 - viene introdotto il metodo *R-MATRIX* e si effettua un'analisi su dati precedenti, ottenendo così:

$$S(0) = (1.77 \pm 0.20) \text{ keV b}$$

Figura VIII.12.

- Infine come abbiamo già visto LUNA II

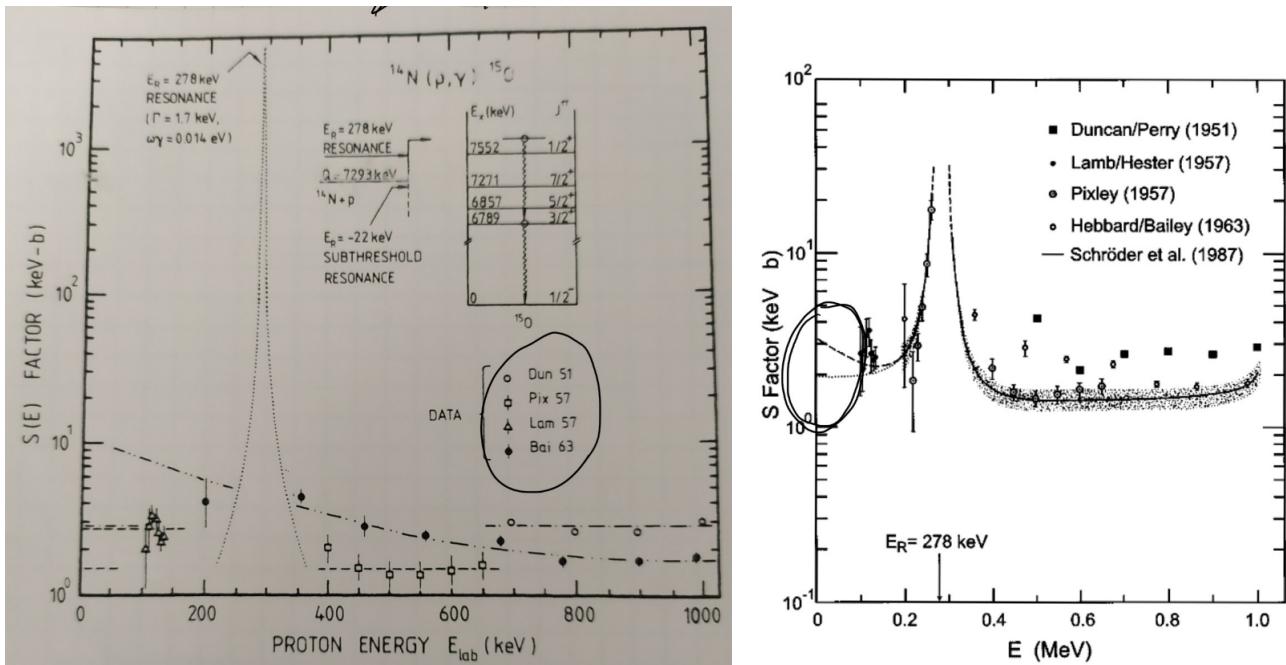


Figura VIII.11: A sinistra risultati del 1988. A destra risultati del 1998: la linea a puntini non tiene conto della risonanza sottosoglia, quella a tratti sì.

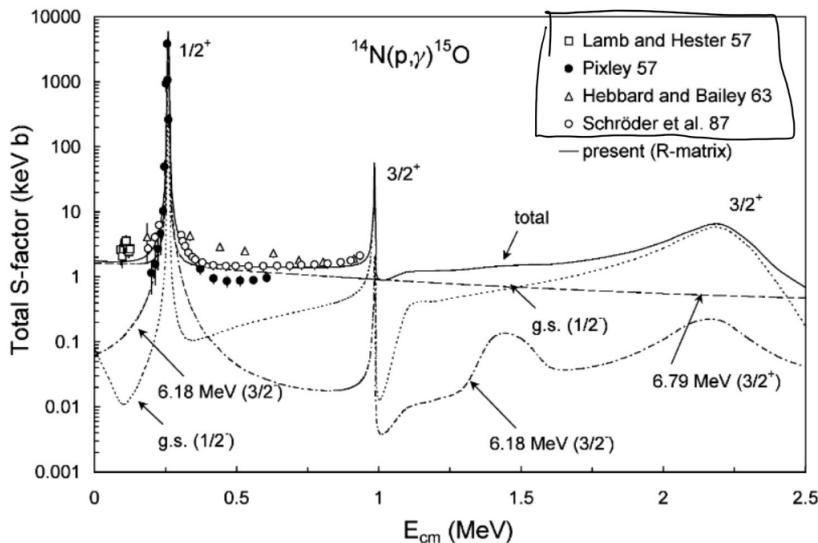
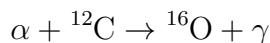


Figura VIII.12: Risultati del 2001.

3 The Holy Grail

La misura della reazione di distruzione del carbonio:



è di importanza tale da essere stata definita nel 1983 da William Fowler nella sua *Nobel Prize lecture* “The Holy Grail of Nuclear Astrophysics”. Se infatti la 3α produce carbonio, questa reazione lo distrugge in favore dell’ossigeno¹², dunque lo studio della combinazione dei due processi diviene fondamentale per la stima delle abbondanze di questi elementi, peraltro tra i

¹²La 3α è conosciuta con un’incertezza del 10%, ma questo non vale per la $\alpha + {}^{12}\text{C}$ (circa il 20%).

più presenti nell'universo. Nella nostra galassia, per esempio¹³:

74%	H
24%	⁴ He
0.85%	¹⁶ O
0.39%	¹² C
...	

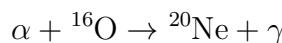
È una reazione fondamentale anche per l'innesto del C-*burning* e quindi influenza l'evoluzione¹⁴ delle *low e high mass stars*. Non solo, questa reazione determina anche l'abbondanza di carbonio e ossigeno nelle popolazioni stellari successive.

3.1 Studio della reazione

Studiamo¹⁵ adesso la combinazione di questa reazione con la 3α . Usando la stessa notazione di Figura VIII.5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_{^{12}\text{C}}}{\partial t} &= \frac{1}{3!} Y_\alpha^3 \rho^2 N_u^2 \langle \sigma v \rangle_{^{3\alpha}} - Y_\alpha Y_{^{12}\text{C}} \rho N_u \langle \sigma v \rangle_{^{^{12}\text{C}}} \\ \frac{\partial Y_{^{16}\text{O}}}{\partial t} &= Y_\alpha Y_{^{12}\text{C}} \rho N_u \langle \sigma v \rangle_{^{^{12}\text{C}}} - Y_\alpha Y_{^{16}\text{O}} \rho N_u \langle \sigma v \rangle_{^{^{16}\text{O}}}\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto anche della reazione di distruzione¹⁶ dell'ossigeno:



con $\langle \sigma v \rangle_{^{16}\text{O}} \ll \langle \sigma v \rangle_{^{^{12}\text{C}}}$.

Vediamo come questa reazione influenza l'evoluzione stellare:

a) $M \leq 8M_\odot$ stars¹⁷.

Terminato He-*burning*, non riescono a innescare il carbonio e il nucleo di C-O comincia a contrarre; gli strati esterni si espandono e raffreddano e la stella entra nella fase di AGB. La quantità $\langle \sigma v \rangle_{^{^{12}\text{C}}}$ determina il tempo dell'He-*burning*, l'inizio dell'AGB e le abbondanze di carbonio e ossigeno della Nana Bianca che si formerà (e quindi della possibile SN Ia).

b) $M \geq 8M_\odot$ stars¹⁸.

Per queste il He-*burning* dura circa 10^6 y e dunque la 3α e la $\alpha + {}^{12}\text{C}$ divengono essenziali per la produzione di energia (e da qui la loro importanza). Negli stati finali (alte temperature e densità) la $\alpha + {}^{12}\text{C}$ non è l'unica reazione che “consuma” α ; vi sono 3 processi:

- $\alpha + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma$
- $\alpha + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma$

¹³Stime spettroscopiche.

¹⁴Infatti, durante H-*burning in shell* il nucleo di He è inerte e collassa, fin quando non si raggiungono le temperature per l'innesto del He-*burning* tramite la 3α ; i residui di questo processo sono appunto il carbonio e l'ossigeno che deriva da ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$. Conoscere l'abbondanza di questi elementi determina l'evoluzione successiva.

¹⁵Facciamo riferimento all'articolo R.J., de Boer et al., Rev. Mod. Phys., 2017, vol.89, n.3, DOI: [10.1103/RevModPhys.89.035007](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.035007).

¹⁶La studieremo successivamente.

¹⁷Sono quelle che fanno il ramo di AGB e terminano in Nane Bianche.

¹⁸Queste evolvono fino a raggiungere *Core-collapse Supernovæ*.

- $\alpha + {}^{22}\text{Ne} \rightarrow {}^{25}\text{Mg} + n$

Questa è una delle principali sorgenti¹⁹ di neutroni (che tipicamente non sono presenti nelle stelle) ed è quindi essenziale per le catture neutroniche successive che permettono di superare il picco del ferro (processo s^{20}).

In realtà, negli ultimi processi la α -radioattività non si attiva per cui prima ci sono altri *burning* (C,O,Ne,Si).

Risonanza dell'ossigeno In Figura VIII.13 riportiamo i livelli dell'ossigeno e alcune reazioni di produzione, tra cui α -radioattività. Osserviamo che i dati si fermano a circa 2 MeV mentre l'energia di Gamow è di circa 300 keV, quindi è necessaria la teoria per l'estrapolazione dei risultati.

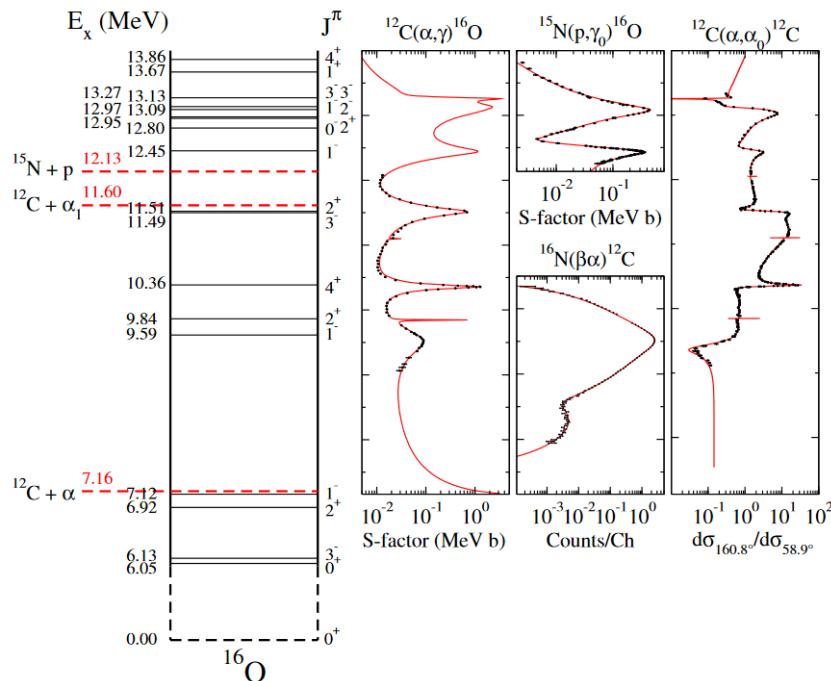


Figura VIII.13: Livelli energetici dell'ossigeno (a sinistra) e fattore astrofisico (a destra) per le reazioni ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$, ${}^{15}\text{N}(p, \gamma){}^{16}\text{O}$ e ${}^{12}\text{C}(\alpha, \alpha){}^{12}\text{C}$ (scattering elastico). Sotto i 7.12 MeV abbiamo stati legati, che non ci interessano perché sottosoglia; per lo stato 1^- abbiamo una risonanza larga. I punti sono i dati sperimentali mentre la curva in rosso è un fit “teorico-fenomenologico”.

Studiamo le catture che possiamo avere:

- Cattura diretta** quindi su uno dei 5 stati legati e di conseguenza non risonante. $S = 0$ per cui $J_i = \ell_i$ e $\pi_i = (-)^\ell$; per l'ossigeno abbiamo $J^\pi = 0^+, 3^-, 2^+, 1^-$ (dove 0^+ è preso 2 volte). Ricordiamo che $\ell = 0$ non è possibile dal momento che la transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ non è permessa dal decadimento γ .

- $\ell = 1$ $1^- \rightarrow 0^+$ (g.s.) con un $E1$.
- $\ell = 2$ $2^+ \rightarrow 0^+$ (g.s.) con un $E2$.

Ricordiamo che per $\ell \neq 0$ il termine di barriera centrifuga si fa sentire e sopprime in parte la cattura diretta. Per $E1$, inoltre, abbiamo anche un altro problema: per $q \rightarrow 0$

$$E\lambda \rightarrow Z_{eff}^{(\lambda)} r_\alpha^\lambda C Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_\alpha C)$$

¹⁹Su come avere una certa abbondanza di ${}^{22}\text{Ne}$ non è banale discutere.

²⁰L'incertezza di questi processi dipende quindi dalla α -radioattività.

$$Z_{eff}^{(\lambda)} \equiv Z_\alpha \left(\frac{m_C}{m_\alpha + m_C} \right)^\lambda + Z_C \left(\frac{-m_\alpha}{m_\alpha + m_C} \right)^\lambda$$

dove abbiamo definito la carica efficace $Z_{eff}^{(\lambda)}$ (ma non approfondiamo il significato di tale definizione). Allora valutiamo la carica efficacie per $E1$:

$$Z_{eff}^{(1)} = 2 \frac{m_C}{m_\alpha + m_C} - 6 \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_C} \stackrel{C \sim 3\alpha}{\simeq} 2 \frac{3m_\alpha}{4m_\alpha} - 6 \frac{m_\alpha}{4m_\alpha} = 0$$

Il termine $E1$ è quindi soppresso. Una spiegazione più elegante di questo fatto è data dal fatto che essendo Z_{eff} molto piccola i nuclei coinvolti saranno tutti circa a isospin nullo: ${}^4\text{He} = nnpp$ $T_z = 0$ e $T = 0, 1, 2$, dove però $T = 0$ sarà dominante; ugualmente per ${}^{12}\text{C}_6$ e ${}^{16}\text{O}_8$. $E1$ si porta dietro nella corrente la dipendenza dall'isospin secondo il termine in τ_z (isovettoriale) allora dal momento che $T_i = 0 \rightarrow 0 = T_f$ è soppressa lo è anche $E1$. In sintesi, $E1 \sim E2$ sono paragonabili²¹ e questo comporta che la cattura diretta sia fortemente soppressa.

- ii. **Cattura risonante soprasoglia** per $E_X = 9.59 \text{ MeV } J^\pi = 1^-$ e $E_X = 9.84 \text{ MeV } J^\pi = 2^+$. Quest'ultima è stretta e non ci interessa; 1^- ha invece larghezza $\Gamma = 2.4 \text{ MeV}$ (molto larga). Il contributo sarà $E1$ perché la transizione è $1^- \rightarrow 0^+$ e non abbiamo il problema della soppressione.
- iii. **Cattura risonante sottosoglia** per $E_X = 7.12 \text{ MeV } J^\pi = 1^-$ ($E_R \simeq -45 \text{ keV}$) e $E_X = 6.92 \text{ MeV } J^\pi = 2^+$ ($E_R \simeq -245 \text{ keV}$). Queste sono responsabili della risalita del fattore astrofisico in Figura VIII.13 per $E \rightarrow 0$. Abbiamo quindi $E1$ da $1^- \rightarrow 0^+$ ed $E2$ da $2^+ \rightarrow 0^+$ con lo stesso ordine di grandezza ($E1 \sim E2$).

Teoria ed esperimenti Nel 1937 Wheeler fece per la prima volta i conti per questa reazione e propose un *cluster model*²²: si considerano i nuclei come *cluster* di particelle α (che sono particolarmente legate, $B_\alpha = 28 \text{ MeV}$), per cui ${}^{12}\text{C} = 3\alpha$ e ${}^{16}\text{O} = 4\alpha$; l'approssimazione è buona se rimaniamo a basse energie (come quelle di interesse astrofisico). L'unica difficoltà del modello è che richiede un potenziale di interazione effettivo $V_{\alpha\alpha}$ e con questo si ha però problemi a riprodurre le risonanze. Il metodo quindi sarebbe anche valido con un ottimo potere predittivo, tuttavia l'accuratezza richiesta dall'astrofisica non è ancora stata raggiunta.

Anche metodi *ab-initio* non sono congeniali, dal momento che la teoria per $A = 16$ non è affatto semplice. A oggi, la scelta più frequente è il metodo della *Phenomenological R-MATRIX*, che però non dà informazioni sulla funzione d'onda. Si ha quindi in *input* i dati sperimentali e in *output* la stima del fattore astrofisico, di cui riportiamo i risultati in Figura VIII.14. Notiamo che per $E_{\text{Gamow}} \simeq 300 \text{ keV}$ non ci sono dati e che se i dati per $E1$ sono approssimativamente in accordo tra le varie acquisizioni non si può certo dire lo stesso dei dati per $E2$, per i quali spesso c'è discrepanza anche tra il fit e l'andamento degli stessi. Si ritiene che ciò derivi da una raccolta dati "sporcata" da un *overall factor* di normalizzazione, che si può correggere con misure a risonanza larga.

Come appunto detto, per l'energia di Gamow non ci sono dati per cui è chiaro come il metodo *phRM* sia essenziale in questo studio. Nella Figura VIII.15 riportiamo l'andamento del valore del fattore astrofisico nel tempo al variare del metodo e dell'anno dei vari esperimenti e analisi. La stima più recente dà:

$$S(300 \text{ keV}) = (140 \pm 21) \text{ keV b}$$

L'incertezza è del 20% circa (dovuta per esempio a inconsistenze tra set di dati sperimentalni) e dev'essere ridotta al 10%.

²¹Questo avviene anche per altre reazioni.

²²Modello ripreso di recente.

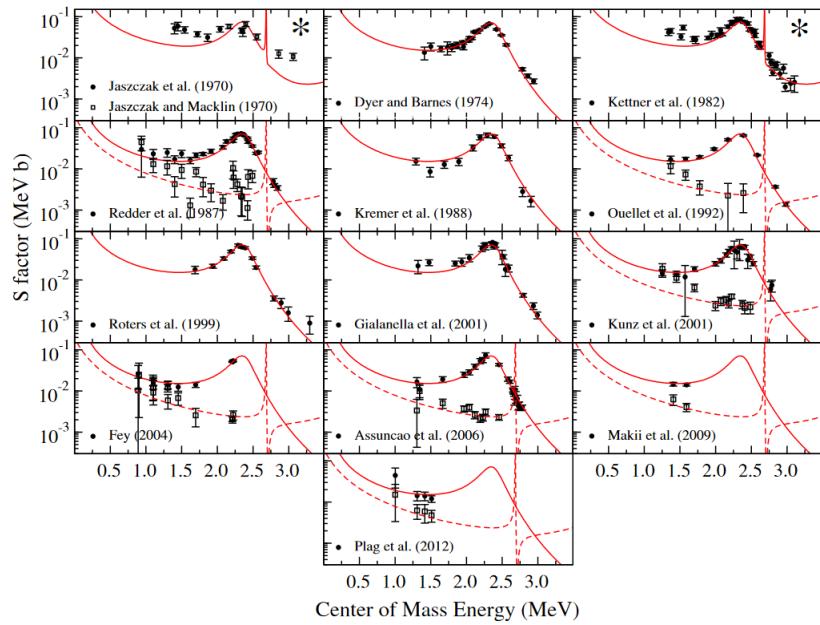


Figura VIII.14: Risultati per l'analisi con *phRM* di dati acquisiti in diversi esperimenti dal 1970 al 2012. La linea rossa è il fit ottenuto con *phRM*: a eccezione dei pannelli con l'asterisco dove è stato misurato $E1 + E2$, la linea continua sta per $E1$, mentre quella a tratti per $E2$.

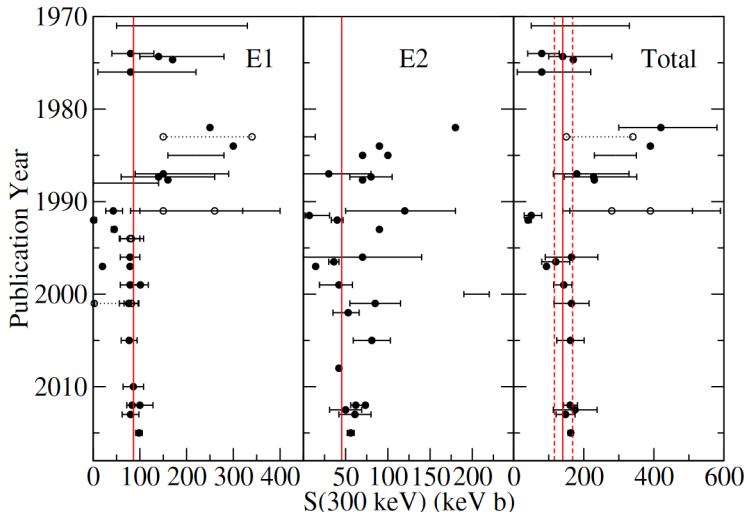


Figura VIII.15: Andamento del valore del fattore astrofisico al picco di Gamow nel tempo al variare della pubblicazione su tale studio: la linea rossa rappresenta il valore ottenuto con *phRM*.

L'obiettivo di LUNA MV e di altri esperimenti come ERNA²³ e all'estero DRAGON è proprio la misura di questa reazione.

3.2 La reazione dell'ossigeno

Come anticipato, in questa sezione torniamo sulla reazione $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$. Se questa fosse “veloce” allora dopo la α ^{12}C l'ossigeno prodotto verrebbe subito distrutto, ma non è ciò che

²³ERNA vuole ottenere la misura con il *recoil separation method*. Le misure indicate con il nome Galianella et al. in Figura VIII.14 sono state ottenute con ERNA.

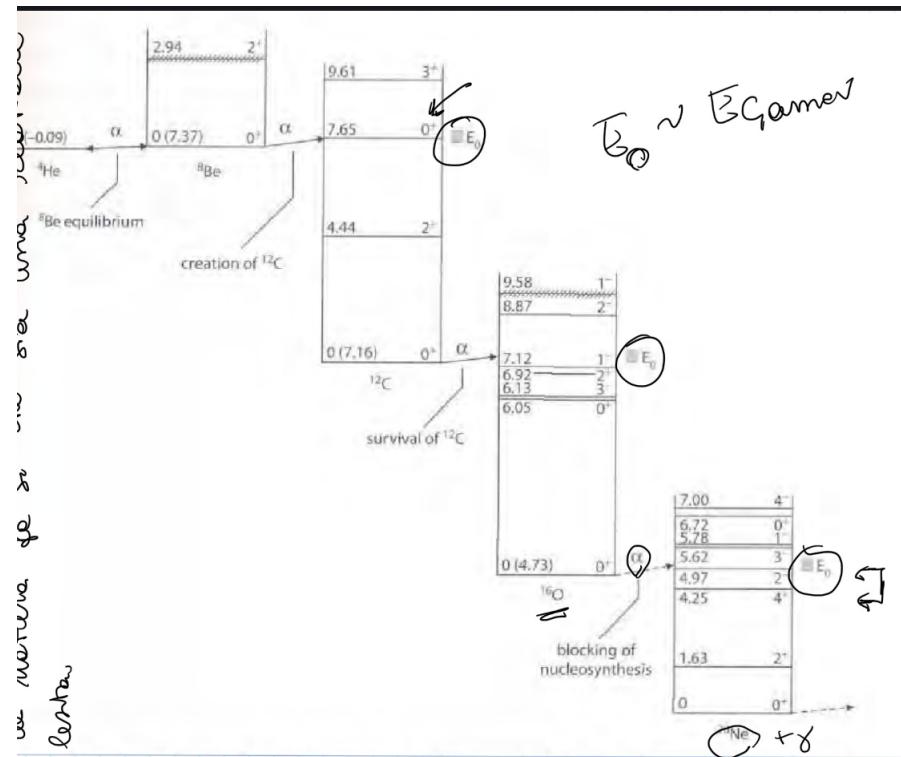
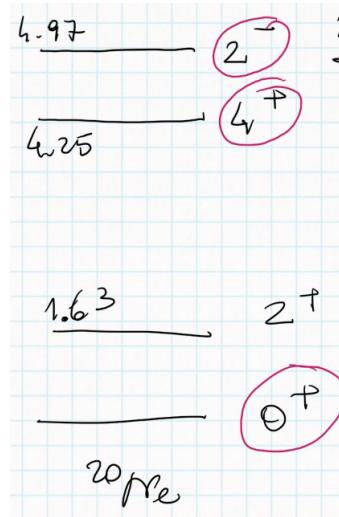


Figura VIII.16: Schema dei livelli delle reazioni dell'He-bruning.

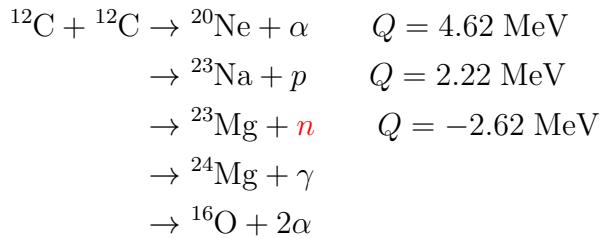
si osserva, per cui la reazione dev'essere "lenta". Riportiamo in Figura VIII.16 i livelli delle reazioni successive all'He-burning.

Figura VIII.17: Livelli energetici in MeV del ^{20}Ne .

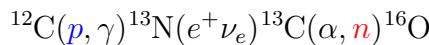
Concentriamoci sui livelli energetici del neon²⁴ (Figura VIII.17). Il picco di Gamow si trova intorno al 2^- per cui si ha una risonanza, insieme a quella del 4^+ (il 2^+ è troppo lontano). Abbiamo allora cattura diretta su 0^+ : $\ell = 0$ è proibito, per cui si ha $\ell = 1$ $J^\pi = 1^- \rightarrow 0^+$ e $\ell = 2$ $J^\pi = 2^+ \rightarrow 0^+$ e per le ragioni già discusse $E_1 \sim E_2$. La cattura diretta ha però un contributo minore rispetto alle risonanze sottosoglia con $E_R = 4.97$ MeV per 2^- e con $E_R = 4.25$ MeV per 4^+ ; tuttavia, per avere una transizione $0^+ \rightarrow 2^-$ devo prendere $M2$ ("piccolissimo") e per $0^+ \rightarrow 4^+$ $E4$ (anche questo soppresso). Possiamo allora capire come mai $\langle \sigma v \rangle_{\alpha O} \ll \langle \sigma v \rangle_{\alpha C}$:

²⁴Il fondamentale è 0^+ perché $A = 2Z$.

le “ceneri” dell’He-*burning* sono appunto C e O²⁵, perché pochissimo ossigeno viene distrutto. Se la stella è sufficientemente massiccia si innesta il C-*burning*:



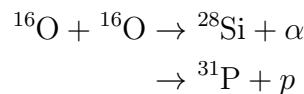
Le ultime²⁶ 3 hanno Q valore negativo, mentre la seconda ha un’intensa barriera di potenziale. Se, invece, la massa non è sufficiente la stella converte il carbonio in ossigeno e così facendo porta i protoni in neutroni e consuma un nucleo α per ogni nucleo di ossigeno:



Anche se la $\alpha^{16}\text{O}$ è, come abbiamo visto, soppressa può avvenire.



Ovviamente questo non sarà il canale principale perché appunto la $\alpha^{16}\text{O}$ è soppressa. Per stelle veramente massicce si potrà innescare anche l’O-*burning* (intensa barriera coulombiana):



Seguono poi altre reazioni fino al Fe, oltre cui non si può più fondere; tuttavia, la presenza di molti neutroni permette di superare il picco del ferro e produrre gli elementi successivi.

²⁵E in abbondanze nettamente inferiori anche altri elementi.

²⁶Abbiamo evidenziato che una delle reazioni è una sorgente di neutroni, processo importante nelle fasi terminali della stella.

Capitolo IX

Approfondimenti

In questo capitolo ho raccolto alcuni argomenti che ho personalmente approfondito o testi e articoli che ho usato durante la preparazione dell'esame

1 Modelli e decadimenti

Una trattazione che riprende quella adottata in questi appunti riguardo ai modelli nucleari e i decadimenti β e γ si trova in Krane, K., S., “*Introductory Nuclear Physics*”, USA, John Wiley & Sons, 1988.

1.1 Decadimento ε

Nel calcolo del Q -value in 1.1-*Q-value* per la cattura ε compare a sottrarre l'energia di legame dell'elettrone catturato nell' n -esimo shell B_n , dove n raccoglie tutti i numeri quantici che identificano tale particella. La ragione della presenza di questo termine è ben spiegata in (Krane, 1988), per cui ne riportiamo un piccolo riassunto: subito dopo la cattura il nucleo prodotto si trova in uno stato eccitato, per cui se l'elettrone occupava lo shell (interno) k (identificato da $n = k, L, \dots$) il “vuoto” da esso lasciato verrà subito “riempito” da un elettrone di shell superiore; nel diseggitarsi l'elettrone emette un fotone di energia pari all'energia di legame B_n , che viene quindi persa.

2 Regola d'oro di Fermi

Nei calcoli del rate molto spesso dall'espressione λ si passa a quella differenziata $d\lambda$. Si tratta di una questione puramente formale e si rimanda alla lettura del paragrafo **Commenti sulla regola di Fermi** della sezione 20.2 *Transizioni nel continuo e rate di un processo* delle dispense del professor G. Paffuti, *Note di Meccanica Quantistica, anno accademico: 2017-2018*.

Tuttavia, per avere un'idea¹ della giustificazione, si consideri l'espressione in 1.2-*Teoria di Fermi*:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 \frac{p^2 dp 4\pi}{h^3} \frac{q^2 dq 4\pi}{h^3} \frac{1}{dE_f} \sim p^2 q^2 dp$$

dove abbiamo fissato l'impulso p dell'elettrone per cui $dE_f = dq$. Sarebbe quindi più corretto indicare $\lambda \rightarrow \lambda_p$ poiché è definito per quel particolare valore dell'energia dell'elettrone. Il rate totale sarà invece dato dalla somma su tutti gli impulsi possibili dell'elettrone finale; dal

¹Questa è una spiegazione sicuramente non rigorosa e particolarmente lacunosa, si consiglia la lettura del testo.

momento che l'impulso è una variabile continua si ha $\lambda_p \rightarrow d\lambda$. In altre parole, nella scrittura del rate si sottintende l'integrazione su p per poi esplicitarla al momento opportuno.

3 Sul numero di neutrini

Come spiegato in 1.2.1 -*La massa del neutrino*, quando $T_e \rightarrow Q$ il neutrino non è più relativistico per cui $T_\nu \sim q^2/2m_\nu$ e $dq/dE_\nu = m_\nu/q$. Abbiamo allora che:

$$N(p) \propto p^2 \sqrt{Q - \sqrt{p^2 + m_e^2} + m_e}$$

$$N(T_e) \propto \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e} \sqrt{Q - T_e} (T_e + m_e)$$

Si nota che quando $T_e \rightarrow Q$ $dN/dp \rightarrow 0$ se $m_\nu = 0$ e $dN/dp \rightarrow \infty$ se $m_\nu \neq 0$, come si osserva in Figura III.7; dalla pendenza è quindi possibile studiare il limite per la massa del neutrino.

4 Dettagli sul calcolo del decadimento γ

Nello sviluppo dell'onda piana in armoniche vettoriali in 2.2.1 -*First order perturbation theory* si ottiene l'espressione:

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_\ell(kx) \sum_J \langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^{M=\lambda}$$

4.1 Clebsch-Gordan

Poiché $\ell = J, J \pm 1$, i coefficienti di Clebsch-Gordan diversi da zero sono²:

$$\begin{aligned} \langle J 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \langle J+1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J}{2J+3}} \\ \langle J-1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}} \end{aligned}$$

4.2 Proprietà della Bessel

A questo punto si utilizza la proprietà della Bessel:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge j_J \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda &= ik \left[\underbrace{\left(\frac{d}{d(kx)} - \frac{J}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J+1,1}^\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left(\frac{d}{d(kx)} - \frac{J+1}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J-1,1}^\lambda \right] \end{aligned}$$

²Si ottengono calcolando $\langle \ell 0, 11 | J1 \rangle$ e poi usando le loro proprietà per passare a $\lambda = -1$.

4.3 Proprietà armonica vettoriale

Deriviamo la proprietà³:

$$(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = (-)^{\lambda+1} \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* &= \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0}^* \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* = \\ &= (-)^\lambda \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}, -\lambda} = \\ &= (-)^{\lambda+1} \underbrace{\langle J0, 1 - \lambda | J - \lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}, -\lambda}}_{\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Nel caso $|\lambda| = 1$ allora $(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$.

5 Effetto tunnel

Dimostriamo come ottenere l'espressione della probabilità di attraversamento per effetto tunnel nella sezione 3.1 - *Fattore Astrofisico*.

$$\begin{aligned} P &\sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_0^a \sqrt{2m(V-E)} \right\} = \\ &= -\frac{2}{\hbar} \int_0^1 \sqrt{2mE} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \sqrt{\frac{1}{\rho} - 1} d\rho = \\ &= -2\pi \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \end{aligned}$$

dove $\rho \equiv rE/Z_1 Z_2 e^2$ e per risolvere abbiamo usato $\rho = \sin^2(\alpha)$.

6 CRM: indipendenza dal parametro B

Nel discutere il metodo della *Calculable R MATRIX* (sezione 1 - *Calculable RM*) siamo arrivati all'espressione:

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell^* R_\ell(E, B)}{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell R_\ell(E, B)}$$

Si può dimostrare⁴ che U_ℓ non dipende da B .

Consideriamo una matrice invertibile \mathbf{V} di dimensione $N \times N$ e due vettori di dimensione N \mathbf{u} e \mathbf{v} ; possiamo sempre costruire una matrice quadrata \mathbf{W} definita come:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

Notiamo che data l'espressione di \mathbf{W} si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1} &= \mathbf{V}^{-1} - \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}} \\ \mathbf{W}^{-1}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}} \Rightarrow (\mathbf{v}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{u})^{-1} = 1 + (\mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u})^{-1} \end{aligned}$$

³Ricordarsi che $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* = (-)^\lambda \hat{\varepsilon}_{\vec{k}, -\lambda}$ e che $\langle \ell m, SS_z | JM \rangle = (-)^{\ell+S-J} \langle \ell - m, S - S_z | J - M \rangle$

⁴Seguiamo la dimostrazione dell'articolo Descouvemont, P. & Baye, D., Rep. Prog. Phys., 2010, vol.3, DOI: 10.1088/0034-4885/73/3/036301, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1001.0678>.

Osserviamo che se le matrici $\mathbf{V} \equiv C(E, B)$ e $\mathbf{W} \equiv C(E, 0)$ e i vettori⁵ $\mathbf{u} \equiv |\varphi\rangle$ e $\mathbf{v} \equiv |\varphi\rangle$ allora possiamo scrivere:

$$C(E, 0) = C(E, B) + \frac{\hbar^2}{2\mu a} B |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1} (\langle\varphi|C(E, 0)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1} = B + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1} (\langle\varphi|C(E, B)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1}$$

Usando l'espressione⁶ di R_ℓ in (VI.10) si ottiene:

$$\frac{1}{R_\ell(E, 0)} = B + \frac{1}{R_\ell(E, B)}$$

dalla quale si ha l'indipendenza di U_ℓ cercata.

7 Trojan Horse method: da DWBA a PWBA

Nello studio del TH *method* nella sezione 2.2-*Trojan Horse method* dalla *Distorted Wave Born Approximation* (DWBA) ci mettiamo in *Plane Wave Born Approximation* (PWBA) correggendo per un fattore moltiplicativo. La ragione di tale passaggio risiede nell'assenza di misure dirette della reazione alle energie di interesse: se anche si tenesse conto del contributo coulombiano all'onda il risultato andrebbe comunque aggiustato con dati a energie più alte; per tale motivo conviene fare i calcoli con un'approssimazione più semplice e correggere successivamente.

8 Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$

Per l'analisi dei multipoli e altri approfondimenti sulla misura del fattore astrofisico della $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ (trattata nella sezione 2.3-*La reazione più lenta*) consultare gli articoli Runkle, R.C., et al., Phys. Rev. Lett., 2005, vol.94, DOI:[10.1103/PhysRevLett.94.082503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.082503) e Formicola, A., et al., Phys. Lett. B, 2004, vol.591, DOI:[10.1016/j.physletb.2004.03.092](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.03.092).

⁵Dove abbiamo preso $|\varphi\rangle \rightarrow \varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_N(a)) = \sum_k |\varphi_k\rangle$; dunque $\langle\varphi_k|\varphi\rangle = \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle = 1$.

⁶Notare che $\langle\varphi|\mathbf{A}|\varphi\rangle = \sum_{ij} \varphi_j A_{ij} \varphi_i$.

Indice analitico

- abbondanza frazionale in massa, 78
acoustic peaks, 45
acqua equivalente, 97
active shielding, 97
Ammasso della Vergine, 43
ampiezza del momento di multipolo, 32
analisi spettrale, 43
anticommutatore, 35
armoniche sferiche, 35, 57
vettoriali, 35
articolo *alpha, beta, gamma*, 45
Asymptotic Normalization Coefficients method, 115
ATOMKI Anomaly, 104
bande rotazionali, 19, 40, 41
barion density ρ_B , 47
barion fraction of critical mass density $\Omega_B h^2$, 47
BGO, 102
Big Bang, 44, 46
Big Bang Nucleosynthesis, 45, 66, 102
binding energy, 1
buca di Wood-Saxon, 11
candela campione, 45
carica efficace, 131
carta di Segré, 4
Catena protone-protone *pp*, 64, 65, 67, 101, 119, 121
 pp, 65
 pep, 65
 dp, 65
 hep, 65
 ppI, 65, 99
 ppII, 66
 ppIII, 66
cattura termica, 57
channel radius, 87, 92
Ciclo CN-NO, 67, 121
cinematica inversa, 105
classical turning point, 77
cluster model, 131
Coefficiente Asintotico di Normalizzazione, 115
coefficiente di Coulomb, 88
coefficienti di Clebsch-Gordan, 36, 42
combinazione isoscalare, 58
combinazione vettoriale, 58
compound nucleus, 112
corrente di convezione, 58
corrente di magnetizzazione, 37
Cosmic Microwave Background CMB, 44, 64
costante cosmologica Λ , 52
costante di accoppiamento debole g , 23, 82
costante di Fermi, 27
costante di Fermi G_F , 23, 82
costante di Hubble H , 44
costante di Stefan-Boltzmann σ , 43
 α -costante di struttura fine, 33, 39
Coulomb dissociation method, 106
cutoff radius, 111, 114
decadimento
 Gamow-Teller, 45
decadimento β , 86
decadimento di
 Fermi, 29
 Gamow-Teller, 29, 86
densità critica ρ_c , 45
densità di corrente nucleare, 34
deutone, 1
diagramma Hertzsprung-Russell, 43
dipolo
 elettrico, 32
 magnetico, 32
Distorted Wave Born Approximation, 110
distribuzione di Fermi-Dirac, 80
effetto Doppler, 44
effetto tunnel, 72

- elemento di matrice ridotta, 38
 elettroscreening, 77, 78, 81, 101, 114
 debole, 78, 79
 forte, 78
energy correlation spectra, 112
entropy factor η , 47
- fattore astrofisico $S(E)$, 53, 72, 75, 85
 efficace S_{eff} , 76, 77
- fattore di forma, 25
- fattore di penetrazione di Gamow, 72
- fattore spettroscopico, 96
- fattori combinatoriali, 122
- figura
- oblata, 18
 - prolata, 18
- first order perturbation theory, 34
- fonone, 17
- formula semi-empirica di massa, 2
- termine di Coulomb, 3
 - termine di superficie, 3
 - termine di volume, 3
 - termine simmetrico, 3
- fotodisintegrazione, 106
- fractional abundance, 78
- fractional nuclear abundance*, 123
- Freeze-out*, 46, 52
- ft-value***, 26
- funzione di Whittaker, 115
- funzione di Fermi, 25
- funzione meromorfa, 90
- j funzioni di Bessel, 35
- funzioni di Coulomb, 83, 84, 88, 115
- irregolare, 83
 - regolare, 83
- funzioni di Lagrange, 92
- galassia di Andromeda, 43
- gas del mezzo interstellare, 43
- gauge di Coulomb, 34
- grafico di Fermi-Kuree, 26
- Gruppo Locale, 43
- hamiltoniana di interazione, 34
- Holy Grail* dell'astrofisica, 103
- HPGe detector*, 103
- incidente al Super-Kamiokande, 68
- integrale di Fermi, 26
- integrale di Fermi $f(E_0)$, 82
- Laboratori Nazionali del Gran Sasso, 97
- legge di Hubble, 45
- Li-problem*, 54
- Li-problem*, 51
- Li-puzzle*, 54
- Li-puzzle*, 51
- linee di Smith, 14
- long wavelength approximation, 37, 38
- low-metallicity stars*, 50
- luminosità, 43
- LUNA
- LUNA II, 127
- lunghezza d'onda di De Broglie λ_{DB} , 71
- as* lunghezza di scattering, 60
- Lymann α , 50
- magnetone nucleare μ_N , 1
- main sequence*, 43
- J_{ij}^{MEC} meson-exchange current, 61, 86
- metallicità, 64
- Metodo *ab-initio*, 63, 81, 104, 131
- metodo *ab-initio*, 87, 89, 92, 96
- metodo *R-MATRIX*, 87, 96, 125
- Calculable, 87
 - Phenomenological, 87, 94, 131
 - scelta delle funzioni d'onda, 92
- Misura di ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$
- activation method*, 103
 - prompt γ method*, 103
- modelli nucleari
- a goccia*, 16
 - a shell*, 8
- modello cosmologico standard ΛCDM , 52
- multi-photon-exchange*, 108
- nucleo
- isotonico, 7
 - isotopo, 7
- numeri magici, 7
- numero di Avogadro, 77
- one-photon-exchange approximation*, 107
- operatore di Bloch, 88
- operatore di creazione, 35
- operatore di dipolo elettrico, 38
- operatore di distruzione, 35
- operatore di Gamow-Teller, 86
- operatore di momento magnetico, 37
- operatore di salita, 59
- oscillazione di sapore dei neutrini, 68
- parametro di *redshift* z , 44
- parsec, 43

PArthenope, 53
particella di Majorana, 97
particella X17, 104
passive shielding, 97
penetration factor, 91
picco di Gamow, 73, 74, 77
polinomi di Legendre, 92
polinomio di Legendre, 32
popolazione II, 50
potenziali *realistici*
 AV18, 85
 CD-Bonn, 85
Principio Cosmologico, 44
principio del bilancio dettagliato, 106
processo s , 130
pseudo-ortogonalità np , 66
quasi-stellar object, 50

R-Matrix, 89
radiation density N_ν , 52
reaction-rate r , 71, 76
reazione periferica, 115
recoil mass separator, 104
redshift, 50
reduced width, 90
reduction transition probability, 108
regola d'oro di Fermi, 23, 82
risonanza nucleare, 71

scintillatore, 69
Sgr A*, 43
shift factor, 91, 92
stime di Weisskopf, 34, 37, 40, 41, 108
surface approximation, 111
sviluppo in onde parziali, 57

teorema di Wigner-Eckart, 57
teorema di Wigner-Eckart, 38
termini di multipolo
 elettrico, 36, 38
 magnetico, 36, 38
The Holy grail of Nuclear Astrophysics, 128
Trojan Horse method, 110

valle di stabilità, 4

velocità peculiare, 45
Via Lattea, 43

Esperimenti
 ATOMKI, 104
 Borexino, 69, 97
 DAMA, 104
 DARKSIDE, 97
 DRAGON, 132
 ERNA, 104, 132
 esperimento con acqua, 67
 esperimento di Davis, 66
 GALLEX, 66
 GSI, 109
 Katrín, 28
 LUNA, 53, 77, 99, 125
 LUNA I, 99
 LUNA II, 102
 LUNA MV, 103, 132
 MSU, 108
 Ptolemy, 28
 RIKEN, 108
 Sudbury Neutrino Observatory, 68
 Super-Kamiokande, 68
 XENON1T, 97

Articoli
 Bethe, 82
 de Boer, 129
 Descouvemont & Baye, 87, 137
 Formicola et al., 138
 Runkle et al., 138
 Salpeter, 77, 119
 Tribble et al., 106

Background
 induced, 99
 radon, 98
 raggi cosmici, 97

Complementi
 Evoluzione protostellare, 101
 l'ipotesi di Fowler, 99, 101
 la teoria di Debye-Hückel, 79
 Metodo delle Armoniche Ipersferiche, 63
 Piombo romano nei LNGS, 98, 103
 Valori solari, 64