

Appunti del corso
Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico

Bernardo Vettori

A.A. 2020/2021

Introduzione

In queste dispense sono raccolti gli appunti delle lezioni del corso di Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico A.A. 2020/2021 tenute dalla professoressa L.E. Marcucci. Non è quindi presente la parte di descrizione del deutone e dello scattering di 2 nucleoni tenuta invece dal professor A. Kievsky. Le immagini che compaiono sono state prese dagli appunti digitali del corso e l'ordine degli argomenti trattati corrisponde a quello adottato nel corso. Ogni capitolo infatti è organizzato con una piccola introduzione che ne descrive sinteticamente il contenuto e che indica le lezioni corrispondenti.

Per quanto riguarda la notazione, non vi è una scelta univoca, ma spesso viene ripresa quella degli articoli discussi a lezione; tuttavia le note a piè di pagina dovrebbero garantire la corretta comprensione della scelta adottata.

L'ultimo capitolo *Approfondimenti* raccoglie alcuni argomenti che ho personalmente approfondito durante lo studio, per cui non fanno parte del programma del corso.

Questo lavoro è totalmente personale e non ha alcuna validità in relazione all'esame dal momento che non è né stato controllato né approvato dalla docente. Per qualsiasi tipo di errore o imprecisione (anche solo grammaticale) mi farebbe piacere esserne informato, così da poter correggere prontamente.

Indice

Introduzione	ii
Indice	iii
I Nozioni principali	1
1 Binding Energy	1
1.1 Notazione	1
1.2 Primi passi	1
2 Formula Semi-empirica di massa	2
3 Panoramica sui decadimenti	4
4 Una parentesi: la stabilità	4
5 Q -value	5
II Modelli nucleari	7
1 Primi passi per il modello <i>a shell</i>	7
2 Modello <i>a shell</i>	8
2.1 Sciogliamo i nodi	8
2.2 Modello <i>a shell</i> + spin-orbita	11
2.2.1 I successi del modello	12
2.2.2 I problemi del modello	14
3 Modello <i>a goccia</i>	16
3.1 La necessità di un nuovo modello	16
3.2 Stati vibrazionali	16
3.3 Bande rotazionali	18
III Decadimenti	21
1 Decadimento β	21
1.1 La questione dei neutrini	21
1.2 Teoria di Fermi	23
1.2.1 La massa del neutrino	27
1.3 Decadimenti β <i>permessi</i> e <i>proibiti</i>	29
2 Decadimento γ	31
2.1 Teoria classica	31
2.2 Trattazione quantistica	33
2.2.1 First order perturbation theory	34
2.2.2 Riassunto	39
2.2.3 Alcuni esempi	39
2.2.4 Stato di scattering	41
IV Big Bang Nucleosynthesis	43
1 Introduzione alla teoria	45
2 Network di reazioni	47

2.1	La nucleosintesi primordiale	48
3	La BBN e i neutrini	52
4	La BBN oggi	52
5	La prima reazione	55
5.1	Cinematica	55
5.2	Funzioni d'onda	56
5.2.1	Buca di potenziale	60
5.2.2	Meson-Exchange Currents	61
5.3	Una parentesi: Metodo <i>ab-initio</i>	63
V	La catena protone-protone	64
1	Una prima occhiata	65
2	Il problema dei neutrini solari	66
3	Elementi di analisi	71
3.1	Fattore Astrofisico	71
3.2	Risonanza	77
3.2.1	Analisi Semi-classica	77
3.2.2	Analisi Quantistica	78
3.2.3	Reaction-rate e fattore astrofisico	81
3.2.4	Risonanze sotto soglia	82
3.2.5	Risonanza e neutrini solari	83
3.3	Elettroscreening	83
3.3.1	Calcolo screening debole	85
3.3.2	In laboratorio	87
4	Studio <i>ab-initio</i>	88
4.1	Risultati	92
VI	<i>R</i>-MATRIX	93
1	Calculable RM	93
1.1	Proprietà della RM	95
1.2	Sfasamento e RM	96
1.2.1	RM e risonanza	97
1.3	Applicazioni	98
2	Phenomenological RM	99
VII	Tecniche sperimentali di misura	104
1	Metodi diretti	104
1.1	LUNA	105
1.1.1	LUNA I	105
1.1.2	LUNA II	109
1.1.3	LUNA MV	110
1.2	ERNA	111
1.2.1	<i>Recoil mass separator</i>	112
1.2.2	Cinematica Inversa	112
2	Metodi indiretti	113
2.1	<i>Coulomb Dissociation method</i>	113
2.2	<i>Trojan Horse method</i>	117
2.3	<i>Asymptotic Normalization Coefficients method</i>	122
VIII	Le ultime reazioni	126
1	La 3α	126

2	Biciclo CN-NO	128
2.1	Ciclo CNO	128
2.2	Ciclo NO	131
2.3	La reazione più lenta	132
3	<i>The Holy Grail</i>	134
3.1	Studio della reazione	135
3.2	La reazione dell'ossigeno	139
IX	Approfondimenti	142
1	Modelli e decadimenti	142
1.1	Decadimento ε	142
2	Regola d'oro di Fermi	142
3	Sul numero di neutrini	143
4	Dettagli sul calcolo del decadimento γ	143
4.1	Clebsch-Gordan	143
4.2	Proprietà della Bessel	143
4.3	Proprietà armonica vettoriale	144
5	CRM: indipendenza dal parametro B	144
6	Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$	145
Indice analitico		146

Capitolo I

Nozioni principali

In questo capitolo introduciamo i concetti principali della fisica nucleare a grandi linee. Questo capitolo copre la lezione del 15/02/2021.

1 Binding Energy

1.1 Notazione

Dato un nucleo X con Z protoni, N neutroni e $A = Z + N$ numero di massa, si utilizza la notazione¹:



Definizione 1 (Energia di Legame) *Si definisce **energia di legame** o **binding energy**²:*

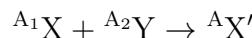
$$B(Z, A) = Zm_p + Nm_N - m({}^A_Z X_N) > 0 \quad \text{è definita positiva}$$

Misurando la massa del nucleo $m({}^A_Z X_N)$, possiamo studiare l'andamento di B/A in funzione di A e ottenere una curva come quella in Figura I.1.

1.2 Primi passi

Il primo stato legato possibile è lo stato pn ($A = 2$), ovvero ${}^2_1 H_1$, che ha una $B \simeq 2.2245$ MeV³; notiamo poi un picco nei dintorni del ${}^{56}Fe$:

- Per $A < 56$ allora si ha che “salendo” anche l'energia di legame aumenta, dunque è favorita la **fusione nucleare**⁴:



¹Da notare che la notazione è ridondante: sarebbe infatti sufficiente dare A e X o A e Z o N e Z ,...

²Si pone $c = 1$.

³Altri parametri caratteristici del deutone:

$$\begin{array}{ll} J^\pi = 1^+ & S = 1, T = 0, \ell = 0, 2 \\ r_d \simeq 1.975 \text{ fm} & A_S \simeq 0.8781 \text{ fm}^{-1/2} \\ \mu_d \simeq 0.8574 \mu_N & Q_d \simeq 0.2859 \text{ fm}^2 \end{array}$$

dove abbiamo chiamato il magnetone nucleare $\mu_N = e^2 \hbar / 2m_p c$.

⁴Fa eccezione l'elio per cui si ha una $B \sim 28$ MeV; cercheremo di spiegare più avanti il motivo. Lo stesso vale per il carbonio.

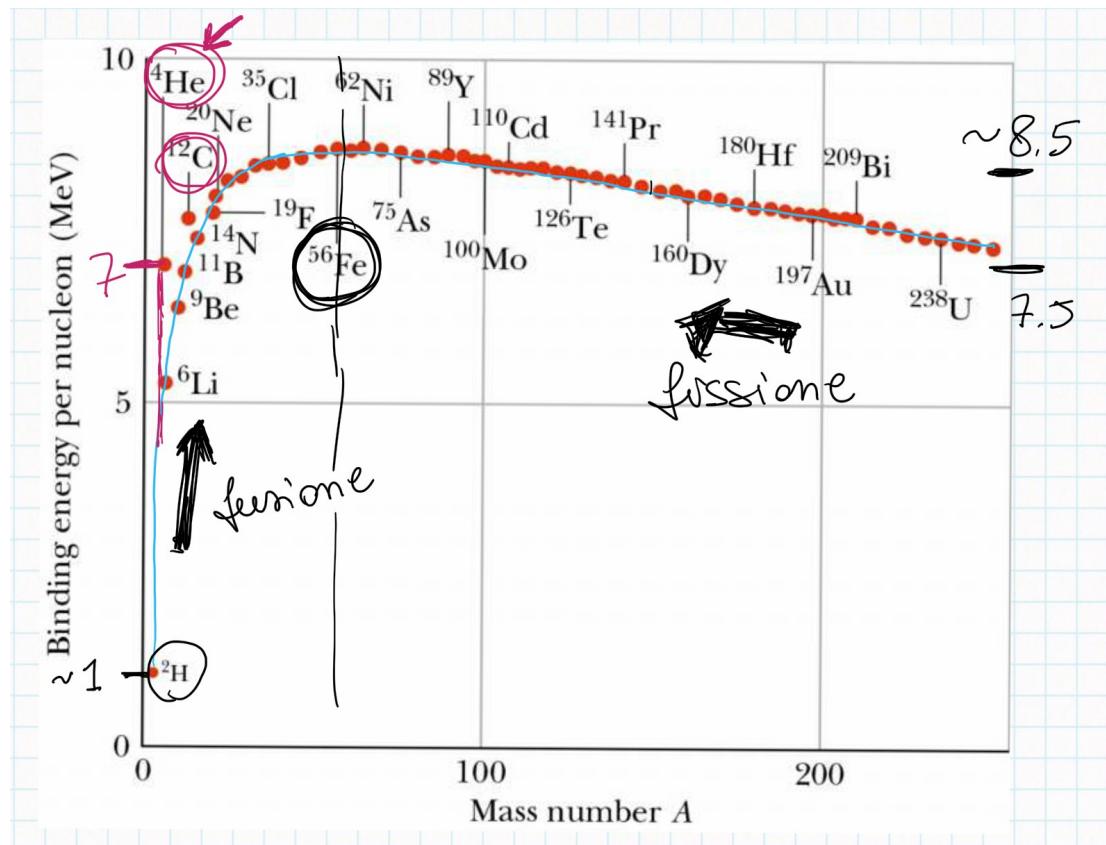


Figura I.1: Curva che rappresenta l'andamento dell'energia di legame (per nucleone) al crescere del numero di massa. Sono segnati il picco del ferro, le reazioni in funzione dei pesi atomici e i salti dei nuclei di elio e carbonio.

- Per $A > 56$ “salire” non è conveniente e vengono quindi privilegiati i processi di **fissione nucleare**:



Osserviamo anche che eccetto i primi salti la curva si assesta intorno a valori compresi tra i $7.5 \div 8.5$ MeV per cui consideriamo per la maggior parte degli elementi il valor medio di 8 MeV.

2 Formula Semi-empirica di massa

Per A “sufficientemente grande” esiste una formula empirica che *fitta* abbastanza bene i dati.

Definizione 2 (Formula Semi-empirica di Massa) *Esprime l'energia di legame per nuclei pesanti:*

$$B = \underbrace{a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Modello a goccia}} - \underbrace{a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}}_{\text{Modello a shell nucleare}} + \delta$$

Termine di Volume $a_V = 15.5 \text{ MeV}$ **Termine di Coulomb** $a_C = 0.72 \text{ MeV}$

Termine di Superficie $a_S = 16.8 \text{ MeV}$ **Termine Simmetrico** $a_{sym} = 23 \text{ MeV}$

$$\text{Termine di Pairing} \quad \delta = \begin{cases} 34 \text{ MeV } A^{-3/4} & \text{even-even} \\ 0 & A \text{ dispari} \\ -34 \text{ MeV } A^{-3/4} & \text{odd-odd} \end{cases}$$

Passiamo adesso a illustrare il significato dei singoli coefficienti:

- a_V : il primo termine è lineare in A , dal momento che l'interazione nucleare è a corto raggio, ovvero è un'interazione di primi vicini. Si chiama termine di volume, infatti il raggio nucleare scala⁵ come $r \simeq r_0 A^{1/3}$, di conseguenza il volume scala con A .
- a_S : i nucleoni sulla “superficie” hanno ovviamente meno vicini di quelli più “interni”, dunque dobbiamo tenere conto di questa assenza con un termine proporzionale alla superficie, cioè, dall'andamento visto prima, proporzionale a $A^{2/3}$.
- a_C : poiché la formula vale per atomi pesanti, spesso $Z \gg 1$ e il termine coulombiano viene riscritto come:

$$a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Questo deriva dall'espressione dell'energia coulombiana $\sim q^2/R = Z^2 e^2 / (r_0 A^{1/3})$; allora $a_C \propto e^2/r_0$.

- a_{sym} : questo è un termine puramente quantistico e può essere riscritto come⁶:

$$(A - 2Z)^2 = (N - Z)^2$$

Si vede allora che per $N = Z$ questo termine non contribuisce, ovvero il nucleo è più stabile; ciò è confermato dalle osservazioni solo per A “non troppo grandi”, come si vede in Figura I.2, quindi per tenerne conto si divide per A .

- δ : esistono solo 6 nuclei stabili in natura con A pari e N e Z dispari.

Infine valgono le seguenti diseguaglianze:

$$a_C \ll a_V < a_S < a_{sym}$$

⁵ $r_0 \sim 1.2$ fm.

⁶Si usa solo $A = Z + N$.

Carta di Segré

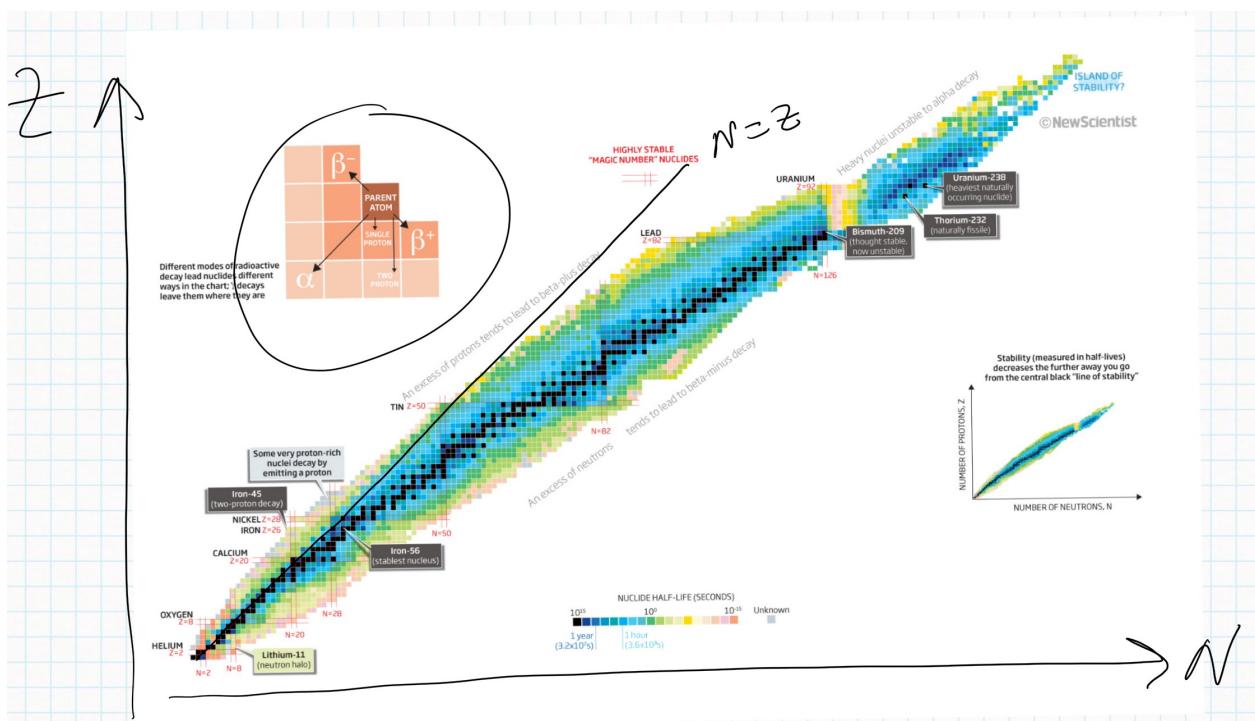
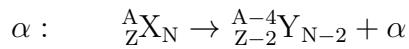


Figura I.2: Sono riportati i nuclei in base a Z e N . La linea centrale viene chiamata **valle di stabilità**. Indicativamente dopo il Ca non vale più $N = Z$ per i nuclei stabili, ma $N > Z$. In alto sono riportati i decadimenti.

3 Panoramica sui decadimenti

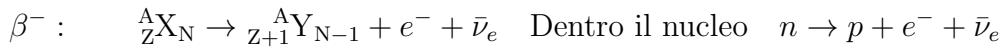
Illustriamo i principali decadimenti⁷.

Decadimento α Mediato dall'interazione forte (stato iniziale e stato finale presentano solo nuclei), è descritto da:



Non lo tratteremo.

Decadimenti β Mediati dall'interazione debole (presenza del neutrino):



4 Una parentesi: la stabilità

Procediamo adesso con una “dimostrazione” della stabilità dei nuclei con $N = Z = A/2$ per $Z \lesssim 20$.

Per primo scriviamo la massa di un generico nucleo in funzione di Z e A :

$$m({}_Z^A X_N) = Z m_p + N m_n - B(Z, A) \simeq Z m({}^1 H) + (A - Z) m_n - B(Z, A)$$

⁷Il decadimento γ non è riportato, tuttavia approfondiremo i vari decadimenti nel Capitolo III - *Decadimenti*.

Fissato A cerchiamo il minimo di m al variare di Z .

$$\frac{\partial m}{\partial Z} = 0 \Rightarrow m(^1\text{H}) - m_n + 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} - \frac{a_C}{A^{1/3}} - 4a_{sym} \frac{A - 2Z}{A} = 0$$

$$Z_{\min} = \frac{m_n - m(^1\text{H}) + a_C A^{1/3} + 4a_{sym}}{2[a_C A^{1/3} + 4a_{sym} A^{-1}]} \simeq \frac{A}{2}$$

dove nell'ultima approssimazione abbiamo usato che $m(^1\text{H}) \simeq m_n$ e che $a_C \ll a_{sym}$, per cui per A piccolo (ma non troppo) si può trascurare il termine $a_C A^{1/3}$ nel denominatore.

Dato che l'andamento di $B \propto Z^2$ allora possiamo rappresentare⁸ approssimativamente l'andamento di m al variare di Z come in Figura I.3⁹.

Curiosità: In Fisica Medica viene utilizzato il ^{64}Cu poiché può sia decadere β^+ che β^- ; il decadimento β^+ viene usato per la PET, mentre il β^- per la cura dei tumori.

5 Q-value

Dato un processo¹⁰ $A + B \rightarrow C + D$ si definisce Q -value:

$$Q = m_A + m_B - m_C - m_D$$

Si hanno allora:

- $Q > 0$ **esotermico** (spontaneo); l'energia relativa può essere nulla.
- $Q < 0$ **endotermico** (non spontaneo); l'energia relativa dev'essere positiva.

⁸Qui trattiamo Z come una variabile continua per ottenere gli andamenti.

⁹È molto raro ma è possibile osservare anche un decadimento doppio β indicato $2\nu\beta\beta$; quello che si cerca di osservare è un doppio β senza neutrino, ovvero $\phi\nu\beta\beta$, poiché in questo caso si avrebbe una violazione dello *standard model*, il neutrino non sarebbe una particella di Dirac, ma di Majorana per cui $\nu = \bar{\nu}$.

¹⁰Come sempre $c = 1$

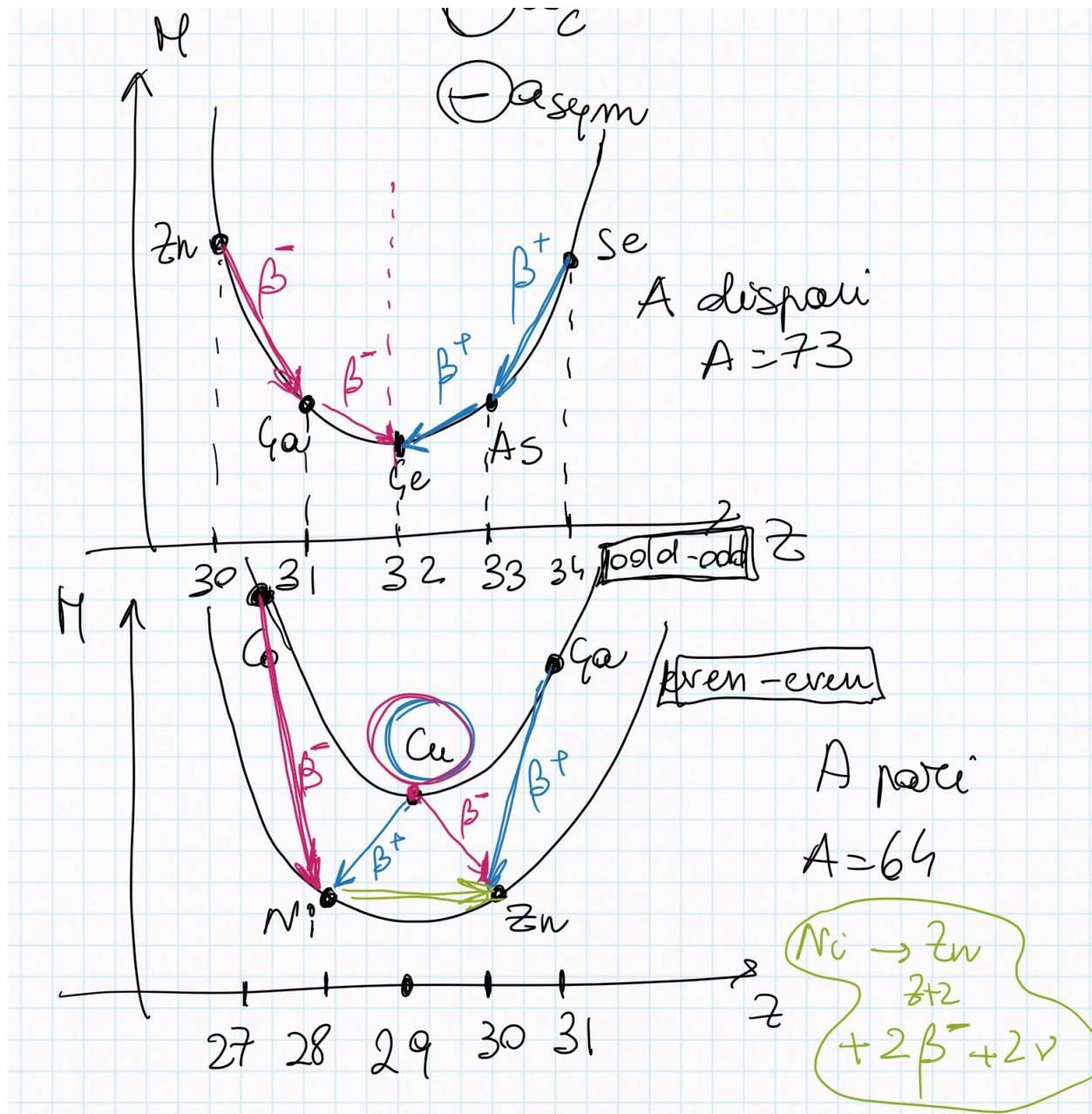


Figura I.3: Rappresentazione di $m \equiv M$ in funzione di Z . Si osserva che per i nuclei con A dispari si hanno decadimenti β^- scendendo verso destra, mentre β^+ scendendo verso sinistra. Per i nuclei con A pari il termine di pairing nell'energia di legame si fa sentire e questo porta a nuclei che possono avere sia β^+ che β^- (in questa configurazione i doppio β sono talmente "poco probabili" da poter essere trascurati).

Capitolo II

Modelli nucleari

In questo capitolo introduciamo e discutiamo i modelli nucleari *a shell* e *a goccia*. Il capitolo copre le Lezioni del 01/03/2021 e del 03/03/2021.

Introduzione Se il sistema a due nucleoni è “complicato”, quando A diviene proibitivo è necessario ricorrere a modelli per descrivere le proprietà nucleari¹. Dall’analoga con la fisica atomica, il modello “più semplice” che approfondiremo per primo è appunto un modello di tipo *a shell*.

1 Primi passi per il modello *a shell*

Nel caso della fisica atomica un modello *a shell* è supportato dagli andamenti del raggio atomico e dell’energia di ionizzazione (Figura II.1), i cui salti possono essere associati appunto alla “chiusura” di uno *shell*. In questo modello gli elettroni si muovono in un campo esterno generato dal nucleo, senza collidere tra loro.

Applicare tutto ciò alla fisica nucleare non è immediato: i nucleoni, infatti, “vivono” in un potenziale che non è esterno, ma generato da essi stessi e le loro dimensioni non sono trascurabili rispetto alle dimensioni del nucleo.

Tuttavia, vi sono alcune evidenze sperimentaliste a favore di tale modello. Innanzitutto, le differenze di energia di separazione² tra nuclei con $N = \text{cost}$ (**isotoni**) e nuclei con $Z = \text{cost}$ (**isotopi**) hanno salti ben determinati³, come mostrato in Figura II.2. I numeri atomico o neutronico per i quali si hanno i salti richiamano i numeri quantici di un modello “a shell” e vengono definiti **numeri magici**:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Un’altra evidenza consiste negli andamenti della sezione d’urto di cattura neutronica σ e dei raggi di carica nucleari, riportati in Figura II.3, che ricordano quello del raggio atomico.

¹Per un testo di riferimento sull’argomento vedi Approfondimenti 1 - *Modelli e decadimenti*.

²Sono le energie di separazione del protone e del neutrone rispettivamente.

³Dovrebbe comparire anche il 2, ma non lo vedo perché corrisponde alla separazione di 2 protoni. Per quanto riguarda il 126 non si vede in natura nel caso di Z , perché il nucleo non è stabile.

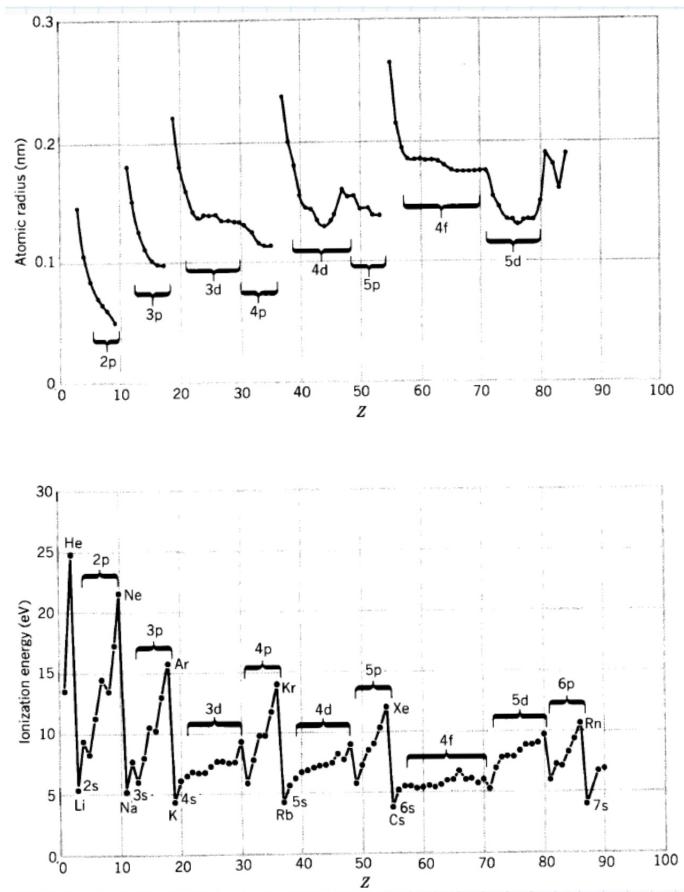


Figura II.1: Andamento in alto del raggio atomico e in basso dell'energia di ionizzazione al variare del numero atomico. I salti sono ben spiegati da un modello *a shell*.

2 Modello *a shell*

2.1 Sciogliamo i nodi

Innanzitutto risolviamo i problemi che ci eravamo posti nella formulazione del modello. Assumiamo che il moto del singolo nucleone sia governato dal potenziale generato da tutti gli altri con i quali interagisce, escluso esso stesso. Per quanto riguarda gli urti, essendo i nucleoni fermioni se avvenisse una collisione (quindi un trasferimento di energia) questo comporterebbe una promozione a un livello di valenza (unico disponibile per Pauli), ma le energie richieste per far ciò sono notevolmente maggiori di quelle scambiabili attraverso l'urto. Dunque, assumeremo che gli urti non avvengono.

Calcolo della funzione d'onda Dobbiamo ovviamente soddisfare all'equazione di Schrödinger, tuttavia per semplificare il calcolo possiamo prima rimaneggiare l'hamiltoniana del sistema:

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} V_{ij}$$

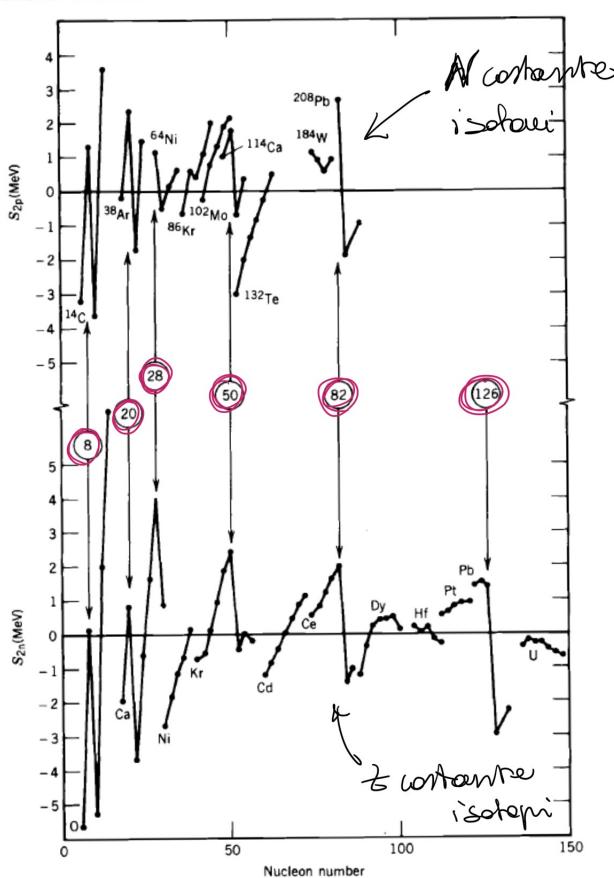


Figura II.2: In alto l’andamento dell’energia di separazione degli isotoni S_n e in basso quello dell’energia di separazione degli isotopi S_p . Al centro sono riportati i numeri magici.

con T_i l’energia cinetica e V_{ij} il potenziale di interazione. Sommando e sottraendo il potenziale U_i che sente la i -esima particella a causa degli altri $j \neq i$ nucleoni, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_i T_i + \sum_{i < j} V_{ij} + \sum_i U_i - \sum_i U_i = \\
 &= \sum_i (T_i + U_i) + \left[\sum_{i < j} V_{ij} - \sum_i U_i \right] \simeq \\
 &\simeq \sum_i (T_i + U_i) \\
 H_i &\simeq T_i + U_i
 \end{aligned}$$

dove nell’ultimo passaggio abbiamo trascurato il contributo dato dal potenziale residuo, perché se U_i è una buona approssimazione del campo che risente i allora quella differenza è molto “piccola”. Otteniamo così un’hamiltoniana di singola particella, per cui $H_i \psi_i = \varepsilon_i \psi_i$, con $\psi = \prod_i \psi_i$ e $E = \sum_i \varepsilon_i$. Data la natura dei fermioni, cerchiamo una ψ antisimmetrica, che

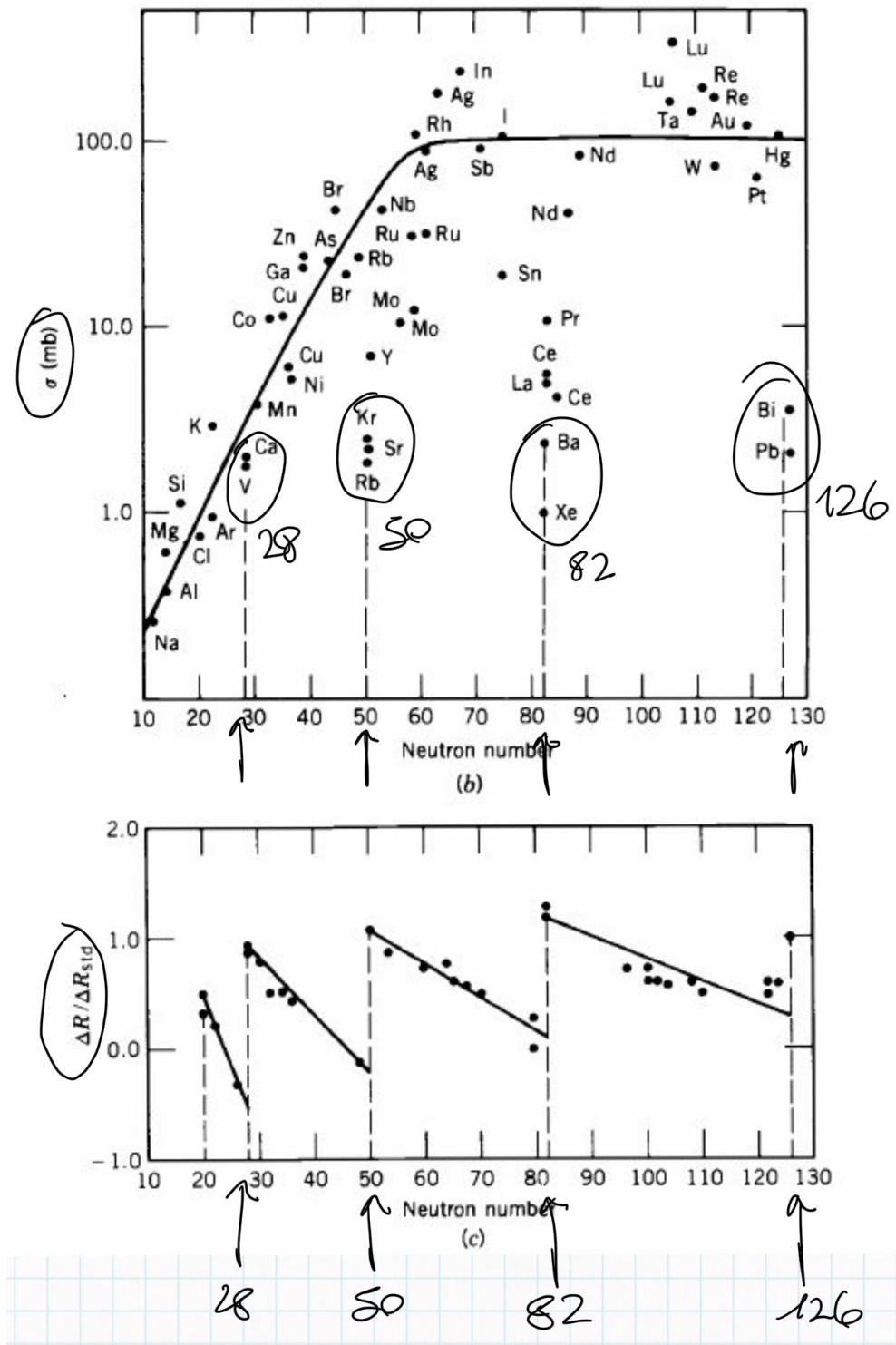


Figura II.3: Andamenti della sezione d'urto σ in alto e dei raggi di carica in basso in funzione del numero di neutroni nel nucleo. Si osservano salti in corrispondenza dei numeri magici.

otteniamo tramite il determinante di Slater⁴:

$$\psi = \det \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \dots & \psi_1(\xi_N) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \dots & \psi_2(\xi_N) \\ \vdots & \ddots & & \\ \psi_N(\xi_1) & \psi_N(\xi_2) & \dots & \psi_N(\xi_N) \end{vmatrix}$$

⁴Per puro scopo esemplificativo riportiamo il caso $N = 2$:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_1)\psi_1(\xi_2)$$

Rimane quindi da scegliere il potenziale U_i .

- **Potenziale a buca infinita:** conosciamo già la soluzione per gli stati legati⁵, ovvero $\psi = A \sin(kx) + B \cos(kx)$, con $k \equiv \sqrt{2mE}$. Dalle condizioni ai bordi $\psi(0) = \psi(a) = 0$, si ha $ka = n\pi$ per cui $\varepsilon_n = \hbar^2\pi^2n^2/2ma^2$.
- **Potenziale armonico** $V(x) = Kx^2/2$: anche in questo caso sappiamo che le soluzioni sono della forma $\psi(x) = H(x) \exp(-\alpha x^2/2)$, con $\alpha \equiv \sqrt{Km}$ e $H(x)$ polinomio di Hermite, il cui grado dà l'energia. Si ha quindi nel caso unidimensionale $\varepsilon_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$, dove $\omega_0 \equiv \sqrt{K/m}$, da cui generalizzando $E_N = \hbar\omega_0(N + 3/2)$, con $N = n_x + n_y + n_z$.
- **Buca Wood-Saxon:** in questo caso il conto è un po' più complicato, lo vedremo successivamente; intanto riportiamo soltanto l'espressione di questo potenziale:

$$V(x) = -\frac{V_0}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})}$$

dove V_0 è la profondità della buca in $r = 0$, R è il raggio medio e a è quella che viene chiamata *skin thickness*⁶.

Come per il modello *a shell* atomico usiamo la notazione spettroscopica per cui $N = 2(n-1)+\ell$, dove n non è però il numero quantico principale (tiene conto solo del numero di livelli con un certo ℓ) e ℓ è il momento angolare. Considerando anche lo *spin*, abbiamo una **degenerazione dello stato energetico** pari a: $2(2\ell+1)$, per cui:

N	n, ℓ	orbitale	Numero nucleoni	Totale
0	1, 0	1s	2	2
1	1, 1	1p	6	8
2	1, 2; 2, 0	1d; 2s	10 + 2	20
3	1, 3; 2, 1	1f; 2p	14 + 6	40
4	1, 4; 2, 2; 3, 0	1g; 2d; 3s	18+10 + 2	70

Osserviamo che il numero totale di nucleoni nei primi 3 livelli pieni corrisponde proprio ai primi 3 numeri magici, ma dal quarto in poi la sequenza non è più rispettata; con questo tipo di potenziale infatti riesco a spiegare bene solo le prime 3 configurazioni, come mostrato in Figura II.4 e in Figura II.5 a sinistra.

2.2 Modello *a shell* + spin-orbita

Consideriamo adesso il potenziale di Wood-Saxon (più realistico della buca e dell'armonico) e teniamo conto dell'interazione *spin-orbita*⁷:

$$U(r) = V_{WS}(r) + V_{s-o}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

$$H \rightarrow T + V_{WS}(r) + V_{s-o}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

dove abbiamo omesso le i ai pedici per semplicità. Aver introdotto questa interazione, però, rende ℓ_z e s_z non più dei buoni numeri quantici poiché non commutano con $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$; consideriamo

⁵Mettiamo $\hbar = 1$.

⁶Questi dettagli sono stati presi da Krane, K., S., “*Introductory Nuclear Physics*”, USA, John Wiley & Sons, 1988.

⁷Di questa ne abbiamo evidenze nello scattering neutrone-neutrone

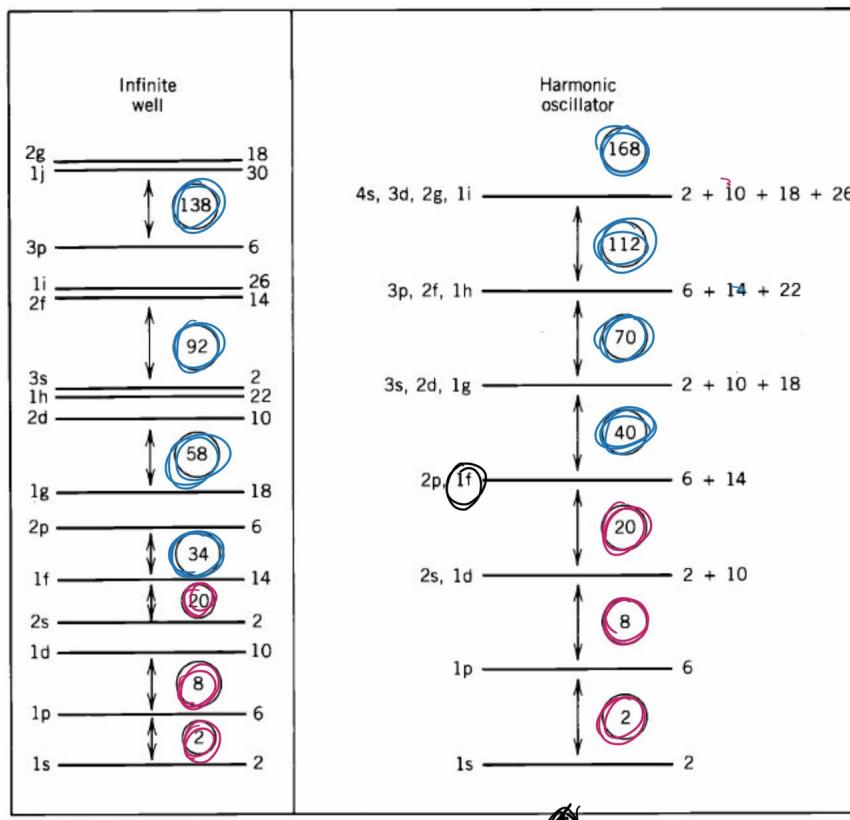


Figura II.4: Sequenza degli orbitali a sinistra con potenziale a buca e a destra con potenziale armonico.

allora il momento angolare totale $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ ed esprimiamo $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ in funzione di j (per il singolo nucleone):

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

Proviamo a questo punto a descrivere la configurazione $1f$ ($n = 1, \ell = 3$), che era la prima a non rispettare la sequenza dei numeri magici: abbiamo $j = 5/2, 7/2$ con degenerazione $2j+1$, per cui $1f_{5/2}$ ha 6 nucleoni e $1f_{7/2}$ ha 8 nucleoni⁸. Per fare i conti, supponiamo che V_{s-o} sia una buca rettangolare di profondità V_0 , allora:

$$\begin{aligned} \langle 1f_{7/2} | U_{s-o} | 1f_{7/2} \rangle &\sim -\frac{V_0}{2} \left[\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} - 3 \cdot 4 - \frac{3}{4} \right] = -\frac{3}{2} V_0 \\ \langle 1f_{5/2} | U_{s-o} | 1f_{5/2} \rangle &\sim -\frac{V_0}{2} \left[\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot 4 - \frac{3}{4} \right] = 2V_0 \end{aligned}$$

Abbiamo che i due stati sono separati e la configurazione $1f_{7/2}$ si avvicina agli orbitali precedenti, per cui si ha un rimescolamento degli *shell* che determina la sequenza dei numeri magici, come mostrato in Figura II.5.

2.2.1 I successi del modello

Questo modello è valso un premio Nobel, non solo perché riproduce i numeri magici, ma anche perché spiega varie evidenze sperimentali. Per esempio, giustifica il fatto che nuclei doppiamente magici, ovvero con sia N che Z numeri magici (come ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8, \dots$), siano fortemente legati e la presenza del $J^\pi = 0^+$ per il fondamentale di tutti i nuclei pari-pari (tutti i nucleoni sono accoppiati). Il modello⁹, infatti, permette di descrivere le proprietà dell'intero sistema dallo

⁸Questo ci piace perché sommato all'orbitale precedente si ottiene proprio 28.

⁹In realtà questo è *extreme independent particle model*.

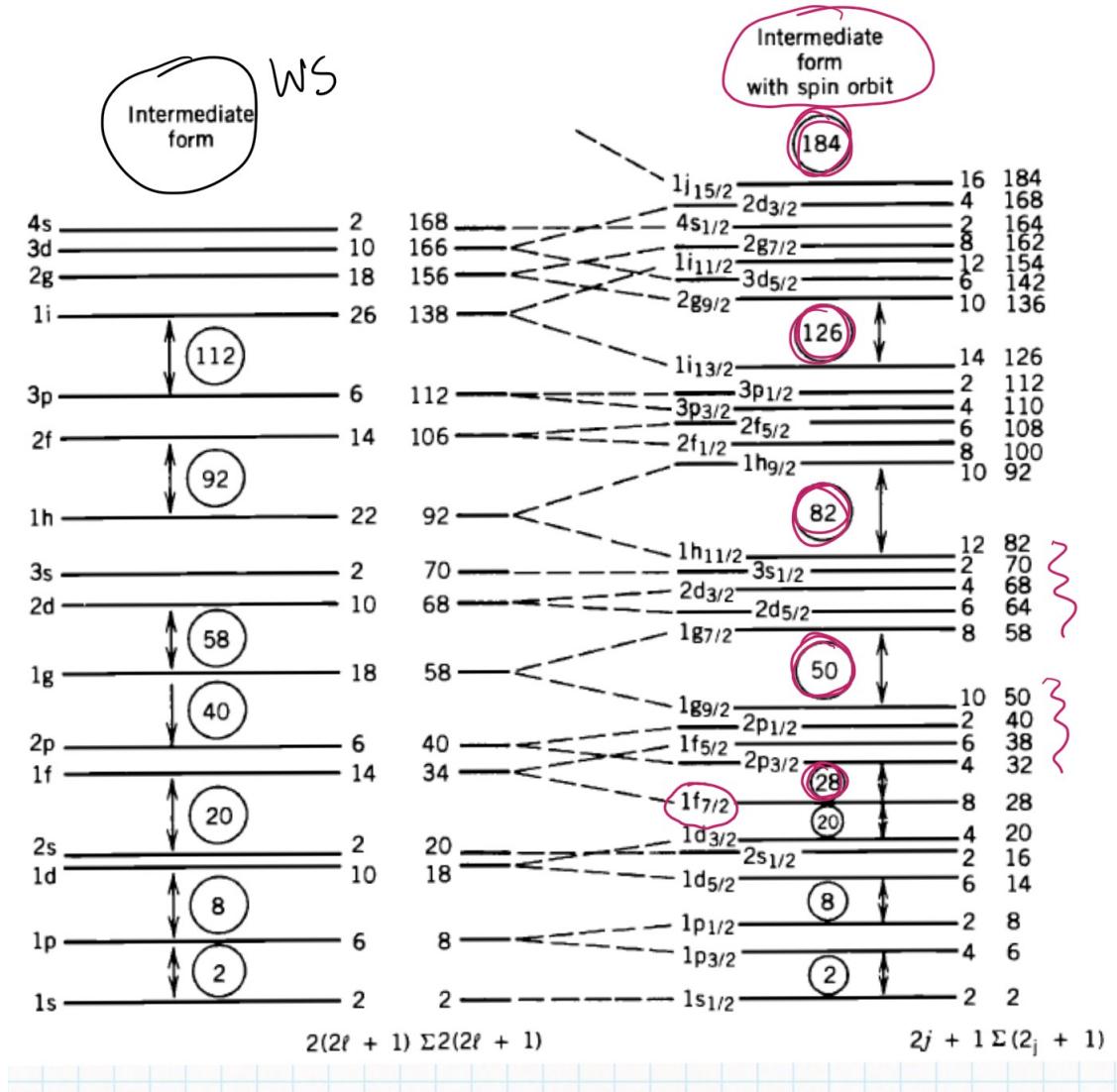


Figura II.5: Configurazioni degli orbitali a sinistra con un potenziale di Wood-Saxon senza interazione *spin-orbita* e a destra con lo stesso potenziale ma considerando tale interazione. Si vedono i rimescolamenti degli *shell* e i numeri magici. Nella figura è presente un errore: è segnato $2f_{1/2}$ invece di $2f_{7/2}$.

stato di un singolo nucleone spaiato. Maggior successo fu appunto la previsione del J^π dei nuclei pari-dispari con un solo nucleone disaccoppiato. Prendiamo a esempio $^{17}_8\text{O}_9$: osserviamo che, secondo il modello, ha un neutrone spaiato nel livello $1d_{5/2}$ ed è di conseguenza questo che determina il J^π del nucleo nel fondamentale, che è appunto $J^\pi = \frac{5}{2}^+$. Il $^{15}_8\text{O}_7$ ha invece un neutrone spaiato nello stato $1p_{3/2}$, quindi $J^\pi = \frac{1}{2}^-$. Tuttavia, questo funziona solo per i nuclei con A dispari e $A < 150 \vee 190 < A < 220$, ma è un aspetto che approfondiremo più avanti. Altro successo del modello è la predizione dei momenti di dipolo magnetico nucleare $\vec{\mu} = \mu_N(g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s})$, dove g_ℓ è il fattore giromagnetico per il momento angolare orbitale e g_s per lo spin¹⁰:

$$\mu \equiv \left\langle \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{j} j_z}{j^2} \right\rangle = \frac{j}{j(j+1)} \langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle$$

¹⁰Ricordiamo che nel caso del protone $g_\ell = 1$ e $g_s = g_s^p = 5.58$, mentre nel caso del neutrone $g_\ell = 0$ e $g_s = g_s^n = -3.82$.

Calcoliamoci allora $\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle$, sfruttando $(\vec{j} - \vec{\ell})^2 = j^2 + \ell^2 - 2\vec{j} \cdot \vec{\ell}$ e $(\vec{j} - \vec{s})^2 = j^2 + s^2 - 2\vec{j} \cdot \vec{s}$:

$$\begin{aligned}\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle &= \mu_N \left(g_\ell \langle \vec{\ell} \cdot \vec{j} \rangle + g_s \langle \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle \right) = \\ &= \frac{\mu_N}{2} \left[g_\ell(j^2 + \ell^2 - s^2) + g_s(j^2 - \ell^2 + s^2) \right] \\ \mu &= \frac{\mu_N}{2(j+1)} \left[(g_\ell + g_s)j(j+1) + (g_\ell - g_s)(\ell(\ell+1) - s(s+1)) \right]\end{aligned}$$

Poiché $s = 1/2$, si ha $\ell = j \pm 1/2$, per cui:

$$\mu = \begin{cases} \mu_N[g_\ell(j-1/2) + g_s/2] & j = \ell + 1/2 \\ \mu_N[g_\ell \frac{j(j+3/2)}{j+1} - g_s \frac{j}{2(j+1)}] & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

Vediamo alcuni risultati sperimentali per il neutrone e per il protone in Figura II.6, dove sono riportate le **linee di Smith** per i vari andamenti (ovvero il conto teorico). Si osserva che il modello riproduce solo qualitativamente i dati, che sembrano *shiftati* di una certa quantità e ciò è dovuto al fatto che le linee sono ottenute usando i valori di g_ℓ e g_s del nucleone libero, invece di tenere in conto che il nucleone è “immerso” in un mezzo denso; questa correzione viene chiamata *medium modification*.

Per quanto riguarda il momento di quadrupolo elettrico il modello riesce a dare una predizione dell’andamento.

$$Q_{ij} = \sum_{\text{part. cariche}} 3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}$$

Quello che viene misurato è $Q_{zz} = 3z^2 - r^2$, che va calcolato sugli stati con p spaiato¹¹. Si trova così:

$$\langle Q \rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle \quad \text{con } \langle r^2 \rangle = \frac{3}{5}R^2 = \frac{3}{5}R_0^2 A^{2/3}$$

che va valutato per $j = \ell \pm 1/2$. Riportiamo in Figura II.7 gli andamenti dei dati sperimentali, dove si osserva che per Z o N “grandi” si perde l’accordo con la teoria.

2.2.2 I problemi del modello

Partiamo proprio dall’ultimo grafico, quello in Figura II.7. Notiamo che per circa $Z > 50$ non vi è accordo, ma soprattutto per circa $N > 100$ compaiono momenti di quadrupolo elettrico per i neutroni e questo è assurdo! Si potrebbe cercare di spiegare questa evidenza imputando la presenza di questi quadrupoli ai protoni degli *shell* precedenti più vicini, ma in realtà non è così¹². Per questi nuclei, dunque, il modello *a shell* non è sufficiente a spiegare tali evidenze, poiché non tiene conto di alcun tipo di moti collettivi, ma imputa la totale descrizione del sistema al solo nucleone spaiato¹³. Vedremo che è necessario introdurre un nuovo modello.

¹¹Ovviamente se calcolato per n spaiato troviamo $\langle Q \rangle = 0$ esattamente.

¹²Le linee nella figura sono proprio ottenute con queste correzioni e come si vede non rappresentano i dati

¹³Tuttavia, in questo caso anche considerare più nucleoni spaiati non fornisce osservabili compatibili.

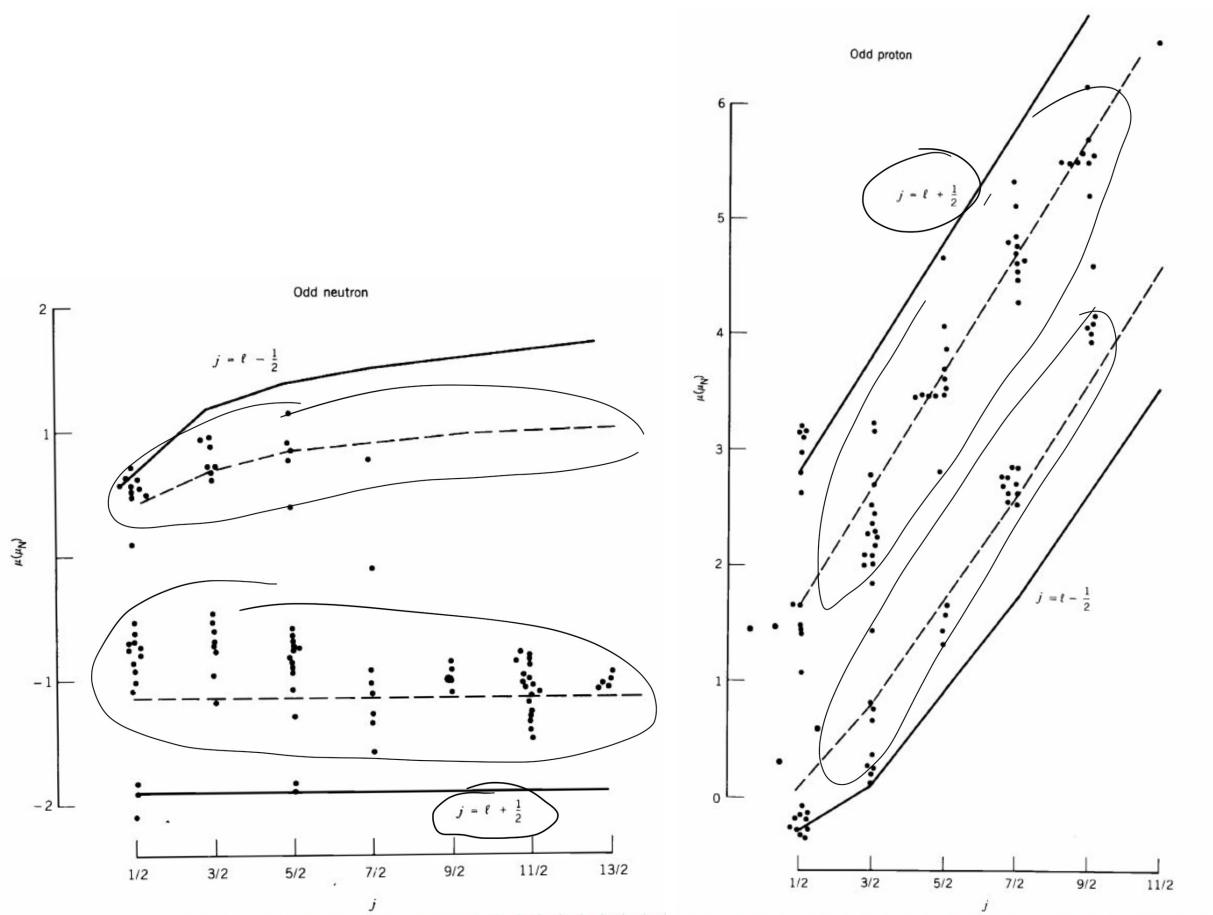


Figura II.6: Andamenti dei momenti di dipolo magnetico per il neutrone a sinistra e per il protone a destra. La linea continua rappresenta le linee di Smith senza correzione, mentre quella tratteggiata tiene conto della *medium modification*.

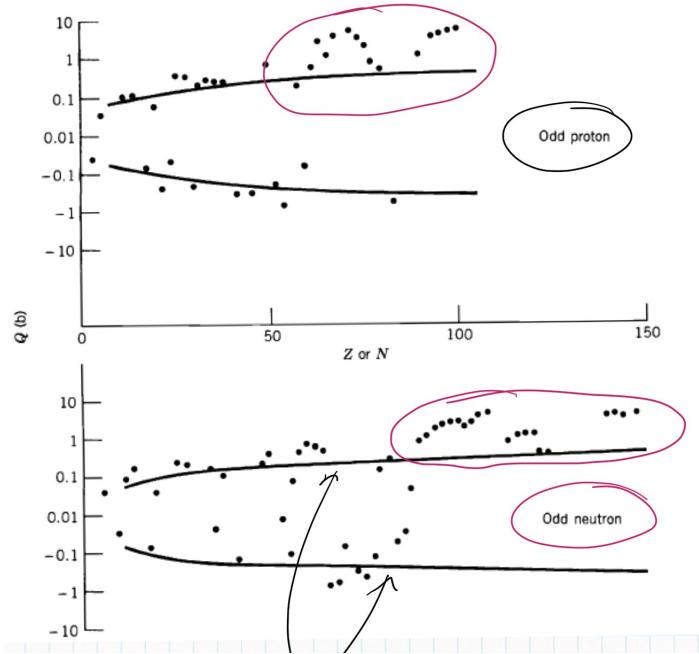


Figura II.7: Andamenti dei momenti di quadrupolo elettrico per il protone spaiato in alto e per il neutrone spaiato in basso.

3 Modello a goccia

3.1 La necessità di un nuovo modello

Torniamo sulle problematiche del modello *a shell*. Prendiamo $^{130}\text{Sn}_{80}$: è un pari-pari per cui ci aspettiamo che lo stato fondamentale sia uno 0^+ . I problemi del modello compaiono quando cerchiamo di spiegare lo stato 2^+ a 1 MeV dal fondamentale. Non ho protoni spaiati perché 50 è un numero magico; per quanto riguarda i neutroni, ne mancano 2 per fare il numero magico 82, allora potremmo provare a promuovere un neutrone da uno dei livelli inferiori. Tuttavia, poiché il salto dev'essere di 1 MeV non può certo venire da $1g_{9/2}$, allora supponiamo inizialmente provenga da $3s_{1/2}$: $5 \leq j_{3s} + j_{1h} \leq 6$, non portano ad avere un 2^+ . Anche se si prova a cercare un altro stato da cui prendere il neutrone non si riesce a trovarne uno che spieghi $J^\pi = 2^+$ e il salto di 1 MeV, poiché è sempre necessario “rompere” una coppia di nucleoni (circa 2 MeV). Inoltre, si osserva la presenza di questo stato (a energie minori) per ogni nucleo pari-pari con circa $150 < A < 200$, come in Figura II.8.

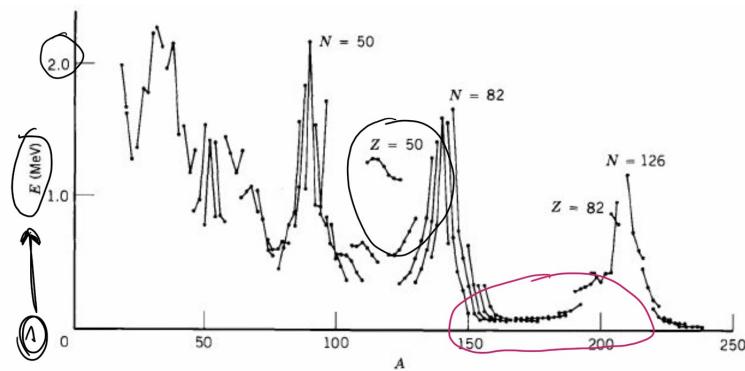


Figure 5.15a Energies of lowest 2^+ states of even- Z , even- N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

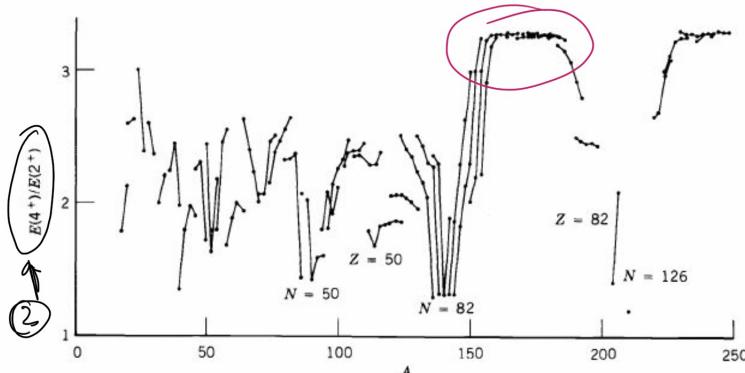


Figura II.8: In basso andamenti del rapporto tra $E(4^+)$ e $E(2^+)$ al variare A . Le linee non sono fit, ma collegano semplicemente i dati.

3.2 Stati vibrazionali

Una spiegazione soddisfacente di tali stati eccitati e dell'andamento dei momenti di dipolo magnetico e di quadrupolo elettrico (in Figura II.9), è data dal **Liquid Drop Model**: assunta una configurazione sferica di equilibrio, si descrivono come “vibrazioni” attorno a essa gli stati del nucleo, che a questo punto sono effettivamente stati collettivi (contrariamente al modello *a shell*).

Pensiamo allora a una “goccia” sferica che si deforma e definiamo $R(t)$ il raggio in funzione del

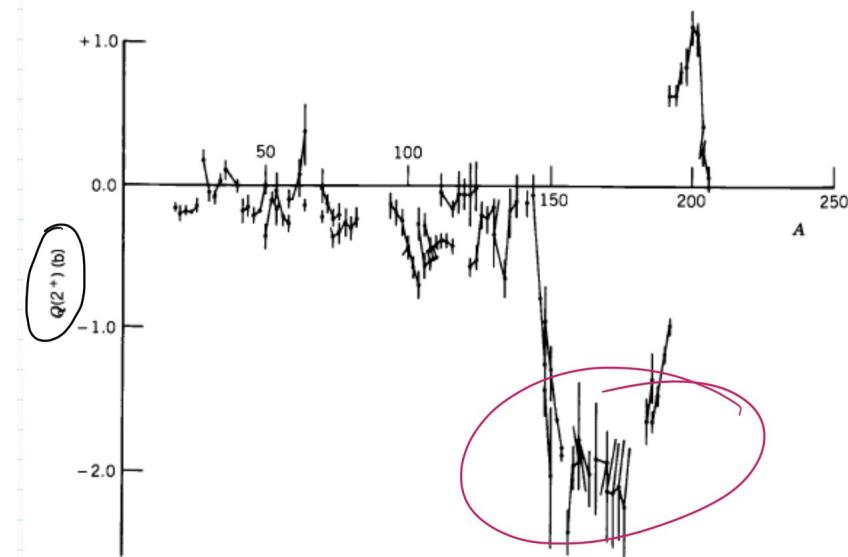
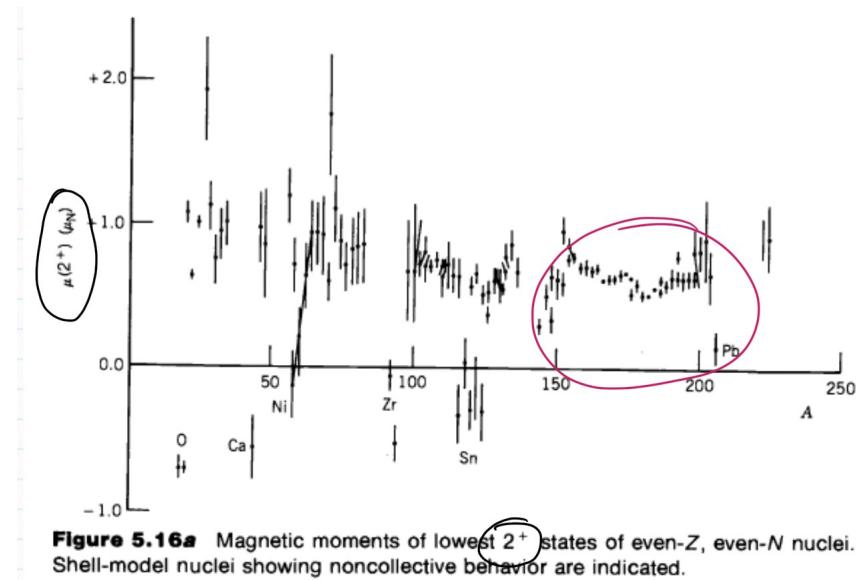


Figura II.9: In basso andamento del quadrupolo per lo stato 2^+ al variare di A . Le linee non sono fit, ma collegano semplicemente i dati.

tempo come:

$$R(t) = R_{av} + \sum_{\lambda \geq 1, \mu = -\lambda \dots \lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) \mathcal{Y}_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$$

con simmetria per riflessione $\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda-\mu}$, $\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$ l'armonica sferica e $R_{av} = R_0 A^{1/3}$ (corrispondente a $\lambda = 0$). Per $\lambda = 1$ (dipolo) abbiamo una semplice traslazione del centro della sfera (vettore spostamento del R_{CM}), quindi non ci interessa; per $\lambda = 2$, invece, si ha $\mathcal{Y}_{2\mu}$ che è legata a un quadrupolo e quindi a una deformazione della struttura. Partendo proprio dal quadrupolo proponiamo una descrizione quantizzata degli stati vibrazionali.

Fononi Possiamo allora prendere $\lambda = 2$ come unità e definire un quanto di energia vibrazionale, il **fonone**, che in questo caso prenderà il nome di fonone di quadrupolo; quindi $0^+ + 1$ fonone $\lambda = 2$, che si porta dietro $Y_{2\mu}$, $\ell = 2$ e $\pi = +$:

$$0^+ + 2^+ = 2^+$$

Il 2^+ è allora il primo stato eccitato vibrazionale del nucleo, anche se l'energia del fonone in questa trattazione è un parametro libero. Supponiamo allora di aggiungerne un altro: $\mu = \mu_1 + \mu_2$ e $\mu_i = -2, \dots, 2$, da cui $5 \cdot 5 = 25$ combinazioni possibili. In realtà non è così, le combinazioni effettive sono solo 15. Guardiamo infatti la Tabella II.1: per $\mu = 4$ abbiamo una sola possibilità; per $\mu = 3$ ne avremmo 2, ma dal momento che il fonone ha *spin* intero la sua funzione d'onda dev'essere simmetrica, di conseguenza le possibilità si riducono a una; per $\mu = 2$ avremmo 3 possibilità, ma si riducono a 2 e così via.

		μ_1				
		-2	-1	0	1	2
μ_2	-2	-4	-3	-2	-1	0
	-1	-3	-2	-1	0	1
	0	-2	-1	0	1	2
	1	-1	0	1	2	3
	2	0	1	2	3	4

Tabella II.1: Valori di $\mu = \mu_1 + \mu_2$ per 2 fononi di quadrupolo.

Tenendo conto dello *spin* del fonone, si arriva a 15 combinazioni, che possono essere descritte così:

$$\begin{array}{lll} \ell = 4 & \mu = -4, \dots, 4 & 9 \text{ Possibilità} \\ \ell = 2 & \mu = -2, \dots, 2 & 5 \text{ Possibilità} \\ \ell = 0 & \mu = 0 & 1 \text{ Possibilità} \\ \hline & \text{Tripletto} & 15 \text{ Possibilità} \end{array}$$

Ci aspetteremo dunque un tripletto $0^+, 2^+, 4^+$ degenere con energia circa il doppio di quella del 2^+ di un solo fonone. Ci sono evidenze di questo, per esempio, nel $^{120}_{52}\text{Te}_{68}{}^{14}$, dove però compaiono¹⁵, oltre al 2^+ e al tripletto, il quintetto $2^+, 0^+, 3^+, 4^+, 6^+$ (dovuto a 3 fononi) e il 3^- (ovvero un ottupolo $\ell = 3$).

3.3 Bande rotazionali

Con il modello vibrazionale abbiamo spiegato gli stati 2^+ e 4^+ , tuttavia non abbiamo ancora chiarito i problemi per i nuclei con $150 < A < 200$ per quanto riguarda il loro momento di quadrupolo (molto maggiore rispetto a quello dei nuclei con $A < 150$), come in Figura II.7). Tali valori del momento ci suggeriscono che i nuclei siano fortemente deformati rispetto alla simmetria sferica dello 0^+ , per cui li descriviamo come ellissodi di rotazione:

$$R(\theta, \phi) = R_{av}(1 + \beta \mathcal{Y}_{20}(\theta, \phi))$$

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_{av}}$$

dove ΔR è la differenza tra semiasse maggiore e minore e (in prima approssimazione) $R_{av} \simeq R_0 A^{\frac{1}{3}}$ è il raggio medio. In base al segno di β si ha una figura:

- **prolata** $\Rightarrow \beta > 0$, Figura II.10 a destra.
- **oblata** $\Rightarrow \beta < 0$, Figura II.10 a sinistra.

¹⁴Detto “la perfetta goccia vibrante”.

¹⁵Non è stato inserito il disegno dei livelli.

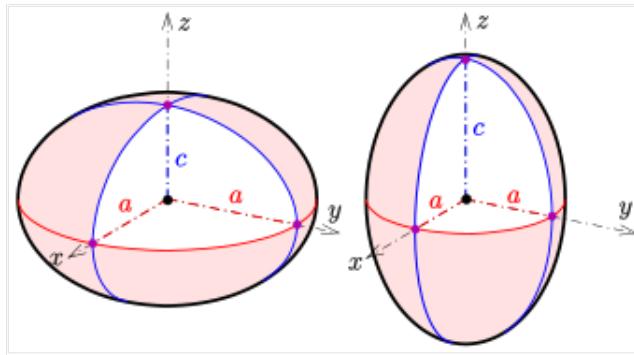


Figura II.10: A sinistra figura oblata, a destra prolata. Questa immagine è stata presa da internet e non fa parte di quelle del corso.

Possiamo allora calcolare il momento di quadrupolo magnetico nel sistema di riferimento del nucleo (corotante):

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5}\pi} R_{av}^2 Z \beta (1 + 0.16 \beta)$$

Tuttavia, se una figura prolata ruota può apparire oblata, per cui se il nucleo ha $Q_0 > 0$ osserviamo un $Q < 0$ nel sistema del laboratorio e questo spiega il valore negativo del momento di quadrupolo. A titolo di esempio, riportiamo il valore per il 2^+ (per il quale si osserva $Q \sim -2$ b):

$$-2 \text{ b} \simeq Q = -\frac{2}{7} Q_0 \Rightarrow Q_0 \simeq -7 \text{ b}$$

$$\beta \simeq 0.29$$

Abbiamo quindi un nucleo fortemente deformato.

Quantizzazione Per una descrizione quantizzata di tali nuclei scriviamo l'espressione dell'energia cinetica di rotazione:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L(L+1)}{I}$$

dove $I = L/\omega$ è il momento di inerzia del nucleo; possiamo allora descrivere¹⁶ i loro stati come **bande rotazionali** associate ai livelli energetici:

Stato	E_{cin}
0^+	0
2^+	$6 \frac{\hbar^2}{2I}$
4^+	$20 \frac{\hbar^2}{2I}$
\vdots	\vdots

Vediamo come esempio¹⁷ $^{176}_{72}\text{Hf}_{104}$, i cui livelli¹⁸ sono riportati in Figura II.11:

¹⁶ $\ell = L/\hbar \Rightarrow E_{cin} = \hbar^2 \ell(\ell+1)/2I$.

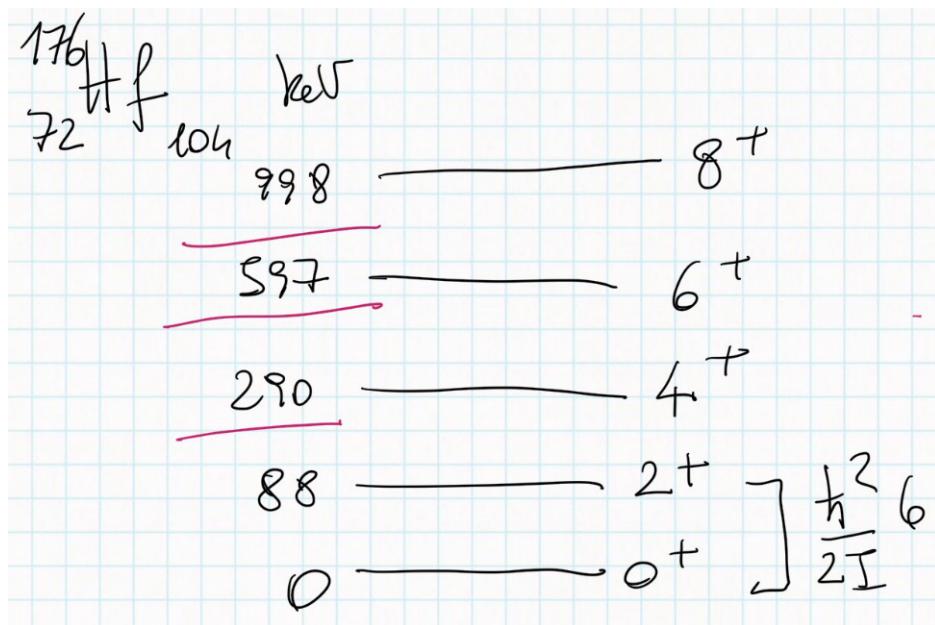


Figura II.11: Livelli energetici dell'afnio.

$$\begin{aligned}
 E(2^+) &= 6 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 88 \text{ keV} \\
 E(4^+) &= 20 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 293 \text{ keV} \\
 E(6^+) &= 42 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 621 \text{ keV} \\
 E(8^+) &= 72 \frac{\hbar^2}{2I} \sim 1064 \text{ keV} \\
 \Rightarrow \frac{E(4^+)}{E(2^+)} &= 3.33
 \end{aligned}$$

L'ultimo risultato è interessante dal momento che è il valore esatto per i rapporti energetici del $^{164}_{68}\text{Er}_{96}$. Dunque il modello riproduce con ottimo accordo le osservazioni.

¹⁷L'afnio è importante perché il suo decadimento viene utilizzato in fisica medica.

¹⁸Per i calcoli abbiamo usato $\hbar^2/2I \sim 88/6 \sim 14.7$ keV

Capitolo III

Decadimenti

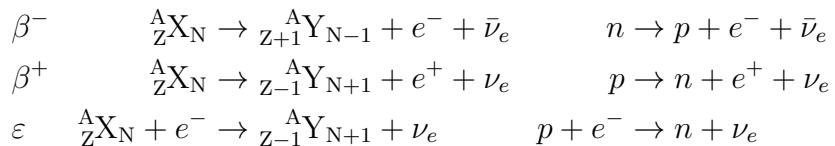
In questo capitolo descriveremo in modo rigoroso i decadimenti β e γ ¹. Il capitolo copre le lezioni 03/03/2021, 04/03/2021, 08/03/2021 e 10/03/2021

1 Decadimento β

Esistono tre tipologie di **decadimento β** :

- β^- : decadimento di un neutrone.
- β^+ : decadimento di un protone.
- ε : cattura elettronica da parte di un protone.

Abbiamo quindi:



dove abbiamo separato i processi nucleari da quelli base (che avvengono nel nucleo). Per capire se questi sono² *permessi* o *proibiti* è necessario calcolare il *Q-value* $Q = \sum T_i$; possiamo momentaneamente approssimare $m_\nu \simeq 0$ MeV e $m_e \simeq 0.5$ MeV, ma dobbiamo considerare $m_n \neq m_p$ per cui $m_n - m_p \simeq 1.3$ MeV: si osserva immediatamente che $m_n > m_p$ implica β^- *permesso* ($Q > 0$) e β^+ *proibito* ($Q < 0$). Dunque, il protone se libero non decade³, ma può fare β^+ solo se è legato e l'energia di legame sia almeno 1.3 MeV.

1.1 La questione dei neutrini

Fino al 1931, anno in cui Pauli propose l'esistenza del neutrino, i risultati dello spettro elettronico del decadimento β furono motivo di intensa discussione: trascurando la presenza di una terza particella nei prodotti, ci si aspettava un andamento del numero di elettroni in funzione dell'energia cinetica degli stessi di tipo a δ , centrata sul valore del *Q-value*⁴. Tuttavia, quello che invece si osserva è un andamento continuo decrescente come quello riportato in Figura III.1. Inizialmente, si diede come spiegazione a questo fatto la possibilità che gli elettroni

¹Per un testo di riferimento sull'argomento vedi Approfondimenti 1-*Modelli e decadimenti*.

²Con *permessi* e *proibiti* si intende rispettivamente "probabili" e "poco probabili".

³Anche in questo caso si intende che i tempi di decadimento sono "lunghissimi".

⁴dalla conservazione dell'energia si ha appunto $m(X) = m(Y) + m_e + T_e$ per cui $Q \simeq T_e$

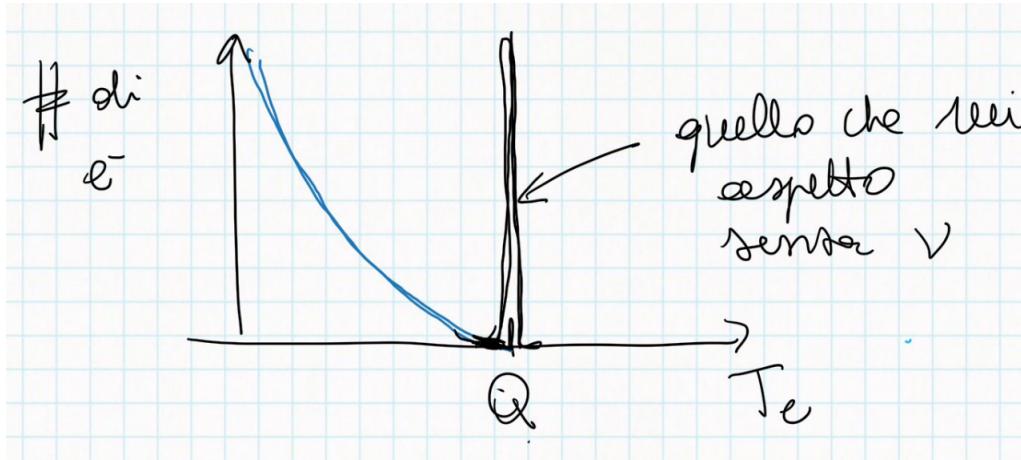


Figura III.1: Distribuzione del numero di neutrini in funzione dell’energia cinetica.

prima di uscire dal campione urtassero contro altri elettroni atomici, ridistribuendo così la loro energia cinetica, ma non era esaustiva. Fu Pauli a risolvere la questione, ipotizzando per primo l’esistenza di un’altra particella non rivelata (che appunto Fermi nel 1934 chiamò *neutrino*). Dal calcolo del *Q-value*:

$$Q = m_n - m_p - m_e - m_\nu \simeq 0.78 \text{ MeV} - m_\nu$$

La misura di questo dà, quindi, una stima della massa del neutrino. Il problema è che è estremamente difficile da fare: i dati riportarono $Q = (0.782 \pm 0.013)$ per cui $m_\nu \simeq 0$ entro 13 keV⁵. Dunque, non è una “cattiva” approssimazione quella di trascurare la massa del neutrino rispetto alle altre masse in gioco, a meno che i neutrini non siano i “protagonisti” del fenomeno in esame⁶.

Q-value Calcoliamo dunque il *Q-value* di questi decadimenti⁷ trascurando la massa del neutrino. Definiamo la massa atomica come:

$$m_{at}(Z X) \equiv m(^A_Z X_N) + Z m_e - \sum_{i=1}^Z B_i$$

dove B_i è l’energia di legame dell’ i -esimo elettrone.

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= m_{at}(Z X) - Z m_e + \sum_{i=1}^Z B_i - m_{at}(Z+1 Y) + (Z+1)m_e - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i - m_e = \\ &= m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) + \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \simeq \\ &\simeq m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) \\ Q_{\beta^+} &= m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) - 2m_e \\ Q_\varepsilon &= m_{at}(Z X) - m_{at}(Z+1 Y) - B_n \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto l’approssimazione $Z \sim Z+1$ poiché stiamo considerando atomi con Z molto “alto” e dove abbiamo definito B_n la *binding energy* per l’elettrone catturato dell’ n -esimo shell⁸

⁵Con le misure più recenti si ha $m_\nu \simeq 0$ entro 1 eV

⁶Vedremo in seguito un esempio in cui questo avviene.

⁷Procederemo in realtà al calcolo esplicito solo del decadimento β^- , poiché gli altri sono concettualmente identici.

⁸Per qualche dettaglio vedi Approfondimenti 1.1 - *Decadimento ε* .

($n = k, L, \dots$). Vediamo alcuni esempi:

Decadimento	Q	$\tau_{\frac{1}{2}}$
$^{23}\text{Ne} \xrightarrow{\beta^-} {}^{23}\text{Na}$	4.38	38 s
$^{99}\text{Tc} \xrightarrow{\beta^-} {}^{99}\text{Ru}$	0.29	$2 \cdot 10^5$ y
$^{25}\text{Al} \xrightarrow{\beta^+} {}^{25}\text{Mg}$	3.26	7.2 s
$^{134}\text{I} \xrightarrow{\beta^+} {}^{134}\text{Te}$	2.14	4.2 d

Dai dati sembra che non vi sia correlazione tra il Q -value e il periodo di dimezzamento, che copre vari ordini di grandezza.

Fermi riuscì a darne una spiegazione costruendo una teoria per il decadimento.

1.2 Teoria di Fermi

Ci concentriamo sulla teoria elaborata da Fermi riguardo al decadimento β .

Innanzitutto, consideriamo la **regola d'oro di Fermi**, definito λ il rate di decadimento:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

dove $\rho(E_f)$ è la densità degli stati finali⁹ e $V_{fi} = \int d\Omega \psi_f^* V \psi_i$ è l'elemento di matrice¹⁰ dell'interazione responsabile del decadimento.

Fermi intuì che fosse necessario introdurre un operatore Lorentz-invariante come osservabile; questo operatore O_X può essere un vettore ($_V$), un assiale ($_A$), uno scalare ($_S$), uno pseudoscalare ($_P$) o un tensore ($_T$) e dev'essere l'esperimento a determinarlo. Oggi sappiamo essere un vettore-assiale, tuttavia nella nostra descrizione lo lasceremo indeterminato.

Esplicitiamo allora le funzioni d'onda:

$$V_{fi} = g \int [\phi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^*] O_X \phi_i d\Omega$$

dove abbiamo indicato con g la **costante di accoppiamento debole** o **costante di Fermi**. Introduciamo la notazione per i quadrimpulsi finali $p_e \equiv p$, $p_\nu \equiv q$ e $P_Y \equiv P_f$ e scriviamo i differenziali delle densità di particella:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dE_f} &= \frac{dn_e dn_\nu dn_f}{dE_f} \\ dn_e &= p^2 dp d\hat{p} \frac{\Omega}{h^3} \\ dn_\nu &= q^2 dq d\hat{q} \frac{\Omega}{h^3} \\ dn_f &= P_f^2 dP_f d\hat{P}_f \frac{\Omega}{h^3} \end{aligned}$$

Queste 3 equazioni non sono però indipendenti perché sono legate dalla conservazione del quadrimpulso ($P_f + p + q = 0$), per cui dP_f è univocamente determinato da p e q :

$$dn = \frac{p^2 dp d\hat{p} q^2 dq d\hat{q} \Omega^2}{h^6}$$

⁹A volte si trova scritta come $\rho(E_f) = dn/dE_f$.

¹⁰Abbiamo definito $d\Omega$ come l'elemento di volume differenziale.

Per comprendere la relazione dalle direzioni \hat{p} e \hat{q} scriviamo le funzioni d'onda per il neutrino e per l'elettrone. Quella del neutrino essendo questo neutro ci aspettiamo sia un'onda piana $\phi_\nu = \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}_\nu/\hbar)/\sqrt{\Omega}$; per quella dell'elettrone dovremmo considerare l'interazione coulombiana col nucleo, ma momentaneamente la trascuriamo quindi $\phi_e = \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{r}_e/\hbar)/\sqrt{\Omega}$. A questo punto assumiamo l'ipotesi di Fermi, ovvero che il decadimento avvenga in un sol punto¹¹, per cui utilizzeremo la sola variabile \vec{r} per indicare la posizione:

$$\int \frac{1}{\Omega} \phi_f^* e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} O_X \phi_i d\Omega$$

A questo punto, il *Q-value* è dell'ordine del MeV, per cui anche gli impulsi del neutrino e dell'elettrone sono di quell'ordine; inoltre le funzioni d'onda nucleari tendono a zero molto rapidamente per $r > r_{nucleare}$, dunque ci aspettiamo di poter approssimare¹² $\phi_e \sim \phi_\nu \sim 1/\sqrt{\Omega}$. Per dare una stima dell'ordine di grandezza dell'argomento dell'esponenziale¹³:

$$|\frac{\vec{p} \cdot \vec{r} c}{\hbar c}| \simeq \frac{1 \cdot 10}{200} = 0.05 \ll 1$$

Questa approssimazione viene detta **approssimazione a transizione permessa**. Perché l'integrale sia non nullo le funzioni d'onda dei nucleoni devono avere la stessa parità.

Riscriviamo allora il rate:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 \frac{p^2 dp 4\pi}{h^3} \frac{q^2 dq 4\pi}{h^3} \frac{1}{dE_f}$$

dove abbiamo integrato su $d\hat{q}$ e $d\hat{p}$. Fissata¹⁴ l'energia dell'elettrone, la variazione dell'energia finale sarà data solo da quella dei neutrini $dE_f = dE_\nu = dq$, da cui¹⁵:

$$d\lambda = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 p^2 dp q^2$$

Il rate così definito può essere riscritto come il numero di elettroni con impulso tra p e $p + dp$ per l'intervallo infinitesimo dp : $d\lambda = N(p)dp \propto p^2 q^2 dp$. Esprimiamo q in funzione dell'energia dell'elettrone tramite il *Q-value* (che è fissato): $Q = T_Y + T_e + q \simeq T_e + q$ con $T_e = \sqrt{m_e^2 + p^2} - m_e$, quindi $q \simeq Q - T_e$. Abbiamo allora:

$$N(p) \propto p^2 (Q - \sqrt{m_e^2 + p^2} + m_e)^2$$

Esprimendo in funzione dell'energia cinetica dell'elettrone $dT_e = pdp/\sqrt{m_e^2 + p^2}$ si ottiene:

$$N(T_e) \propto (Q - T_e)^2 \sqrt{(T_e + m_e)^2 - m_e^2} (T_e + m_e)$$

Valutazione delle approssimazioni In Figura III.2 riportiamo gli andamenti attesi per $Q \simeq 2.5$ MeV, mentre in Figura III.3 riportiamo i dati sperimentali. Osserviamo che l'andamento del β^+ è molto simile a quello atteso, mentre il β^- presenta nella zona $T_e \rightarrow 0$ un disaccordo con la teoria; ciò è dovuto al fatto di aver considerato l'interazione coulombiana dei prodotti col nucleo: per dare una spiegazione un po' naïf, nel β^+ si produce un positrone che è allontanato dal nucleo, mentre nel β^- viene prodotto un elettrone, per il quale l'effetto dell'attrazione nucleare non è più trascurabile quando la sua energia cinetica è "bassa".

¹¹In altre parole le particelle sono distribuite secondo $\delta(\vec{r}_\nu - \vec{r}_e)\delta(\vec{r}_e - \vec{r}_i)$ con \vec{r}_i posizione del nucleone, che equivale a dire $r_e = r_\nu = r_i$. Questa ipotesi è stata dimostrata sperimentalmente, grazie all'osservazione dei bosoni W^\pm e Z mediatori dell'interazione debole, che avendo una massa "molto grande" hanno range di azione "molto piccoli".

¹²Come vedremo questa approssimazione ha senso solo se $\int \phi_f^* O_X \phi_i \neq 0$.

¹³Prendiamo $pc \sim 1$ MeV e un raggio tipico di $r \sim 10$ fm.

¹⁴In questi conti usiamo $c = 1$.

¹⁵Sul differenziale del rate vedi Approfondimenti 2-Regola d'oro di Fermi.

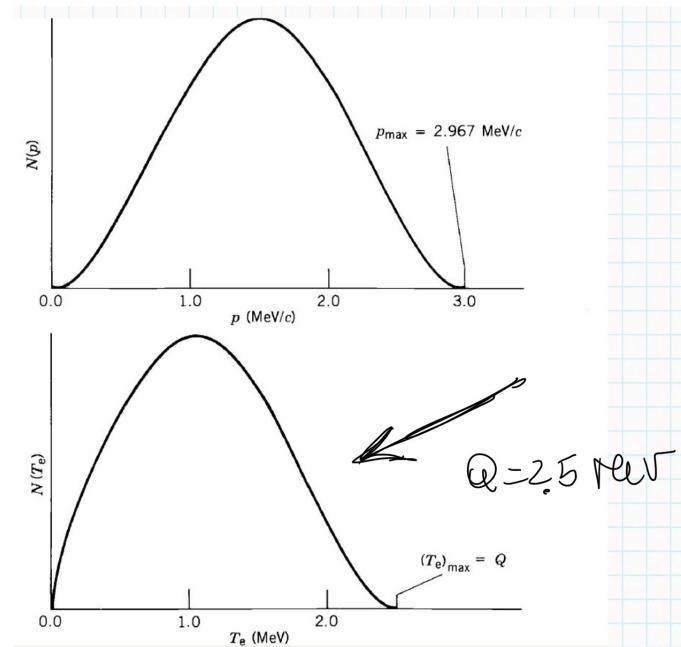


Figura III.2: Andamenti teorici del numero di elettroni in funzione dell'impulso (in alto) e dell'energia cinetica (in basso) per il decadimento β .

Fermi ovviamente aveva chiaro tutto ciò e non utilizzò l'onda piana per rappresentare la funzione d'onda dell'elettrone, ma un'onda distorta. Non riportiamo i calcoli di questa descrizione, ma basti sapere che viene introdotta una fattore correttivo dipendente da p e da Z_Y :

$$N(p) \propto p^2 q^2 F(Z_Y, p)$$

con $F(Z_Y, p)$ **funzione di Fermi**, che gode della proprietà $F \rightarrow 1$ se $p \rightarrow \infty$ (alte energie) o $Z_Y \rightarrow 0$ (carica nulla o trascurabile).

Come già anticipato, anche l'approssimazione a transizione *permessa* potrebbe essere non valida, se, per esempio, l'operatore valutato tra gli stati iniziali e finali dei nuclei è nullo, quindi è necessario sviluppare in serie gli esponenziali che compaiono nelle funzioni d'onda del neutrino e dell'elettrone¹⁶. Queste transizioni vengono chiamate **transizioni proibite**¹⁷ e prendono il nome dall'ordine dell'esponenziale al quale ci si ferma¹⁸:

$$\phi_\nu^* \simeq \underbrace{1}_{\text{permessa}} + \underbrace{i\vec{q} \cdot \vec{r}}_{\text{I proibita}} - \frac{1}{2} \underbrace{(\vec{q} \cdot \vec{r})^2}_{\text{II proibita}} + \dots$$

Considerando tutte le correzioni abbiamo:

$$N(p) \propto p^2 (Q - T_e)^2 F(Z_Y, p) |M_{fi}|^2 S(p, q)$$

dove abbiamo raccolto i termini risultanti dall'integrazione sull'angolo solido in $S(p, q)$, detto **shape factor** (che vale 1 se la transizione è *permessa*).

Possiamo allora esprimere $(Q - T_e)^2$ come:

$$(Q - T_e)^2 \propto \frac{N(p)}{F(Z_Y, p) p^2 S(p, q)}$$

¹⁶Questo comporta che nell'integrazione successiva comparirà una dipendenza dalle direzioni \hat{p} e \hat{q} , di cui dovremo tenere conto quando si integra nell'angolo solido.

¹⁷Come avevamo già spiegato, con *proibite* non si intende "non-*permesse*", bensì che il tempo di decadimento è molto "lungo" (dal momento che λ è minore di quelle *permesse*) e quindi l'osservazione è particolarmente difficile e rara.

¹⁸Nell'espansione non abbiamo riportato i fattori costanti come $\Omega^{-1/2}$ e \hbar^{-1} .

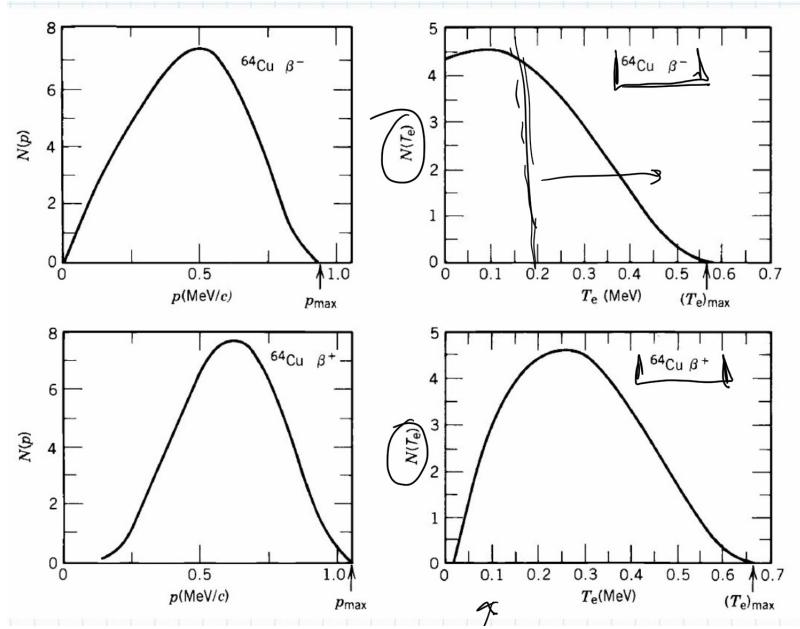


Figura III.3: Dati sperimentali per l’andamento del numero di elettroni nel decadimento β^- (in alto) e nel decadimento β^+ (in basso).

e rappresentarne la’andamento in funzione dell’energia dell’elettrone. Questo grafico è detto **grafico di Fermi-Kuree** e lo riportiamo per il decadimento $0^+ \rightarrow 0^+$ del ^{66}Ga (che è un *super-permesso*) in Figura III.4. Possiamo notare che per un certo valore dell’energia non vi è più accordo tra teoria ed esperimento a causa dell’interazione dell’elettrone con sorgenti radioattive.

Guardiamo, invece, lo stesso grafico per una transizione *proibita* del ^{91}Y in Figura III.5 e osserviamo l’accordo tra i dati e il modello senza considerare lo shape factor e con lo shape factor.

Calcolo del rate Abbiamo tutti gli strumenti dunque per proseguire con il calcolo del rate¹⁹:

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{p_{\max}} p^2 (Q - T_e)^2 F(Z_y, p) dp$$

Definizione 3 (Integrale di Fermi)

$$f(Z_Y, E_0) = \frac{1}{m_e^5 c^5} \int_0^{p_{\max}} p^2 F(Z_Y, p) (E_0 - E_e)^2 dp$$

dove $E_0 \equiv Q + m_e$. Non è un integrale analitico, ma è tabulato per vari Z_Y .

Per definizione di tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ si ha:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} m_e^5 f(Z_Y, E_0) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \\ ft_{1/2} &= \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 |M_{fi}|^2 m_e^5 c^4} \end{aligned}$$

dove abbiamo inizialmente trascurato c e poi reintrodotta²⁰. Quest’ultima espressione viene detta **ft-value** e dipende solo da $|M_{fi}|$ (contributo nucleare), variando in un range esteso, tra

¹⁹Per semplicità considereremo un decadimento permesso, ovvero $S(p, q) = 1$.

²⁰ c^{-1} compare da $\rho = dn/dE_f = dn/dE_\nu = dn/d(cq)$ che abbiamo calcolato nel paragrafo precedente.

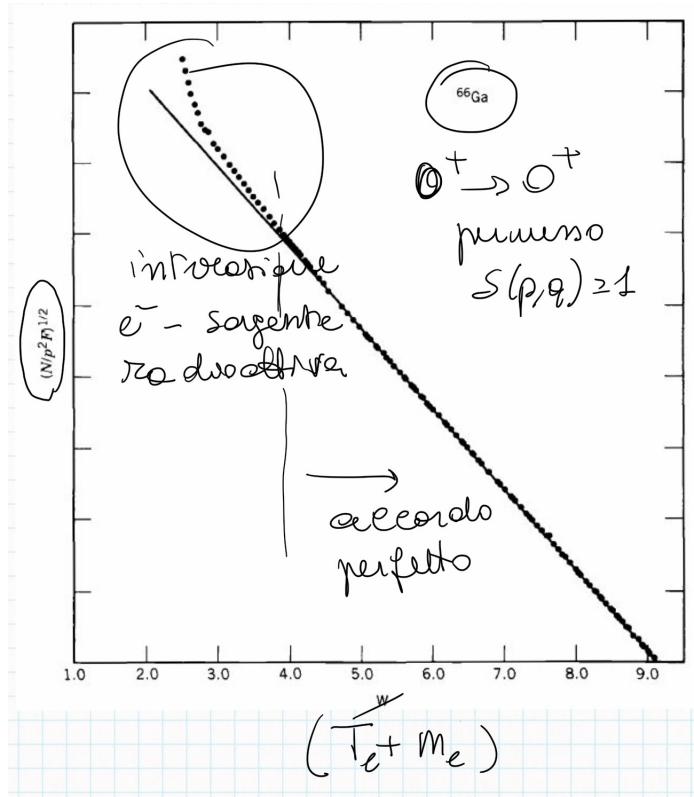


Figura III.4: Grafico di Fermi-Kuree che mostra l'andamento di $(Q-T_e)^2$ in funzione dell'energia dell'elettrone per il decadimento $0^+ \rightarrow 0^+$ del ^{66}Ga e l'accordo tra i dati e il modello.

10^3 e 10^{20} s, ragion per cui spesso se ne esprime il logaritmo.

Per $\log(ft) \sim 3 \div 4$, decadimenti molto veloci, si parla di decadimenti *super-permessi*: sono tutti $0^+ \rightarrow 0^+$ con $M_{fi} \sim \sqrt{2}$ (indipendente dai nuclei in gioco). Questo tipo di decadimento è allora perfetto per stimare la costante di accoppiamento debole g dal momento che presenta per ogni nucleo lo stesso valore ft , come riportato in Figura III.6; si ottiene così:

$$g \simeq 0.88 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^3$$

Per avere una quantità adimensionale possiamo definire una costante tipica dell'interazione $G = g m^2 c / \hbar^3$, per cui:

Forte	$\pi - N$	1
E.M.		10^{-2}
Debole		10^{-5}

In quest'ultimo caso viene detta **costante di Fermi** G_F .

1.2.1 La massa del neutrino

In tutti i calcoli svolti finora abbiamo considerato $m_\nu = 0$, ma non è sempre un'approssimazione corretta: per elettroni energetici, ovvero $T_e \rightarrow Q$, dalla conservazione dell'energia si ha che $q \ll 1$, quindi il neutrino non è più relativistico ($q \neq Q - T_e$) e gli effetti della sua massa non sono più trascurabili²¹ $E_\nu \simeq m_\nu + q^2/2m_\nu$. Poiché ciò influenza sul numero di elettroni, Fermi rielaborò i suoi conti²² e ottenne un andamento come quello riportato in Figura III.7.

²¹Posto $c = 1$.

²²Per maggiori dettagli vedi Approfondimenti 3 - *Sul numero di neutrini*.

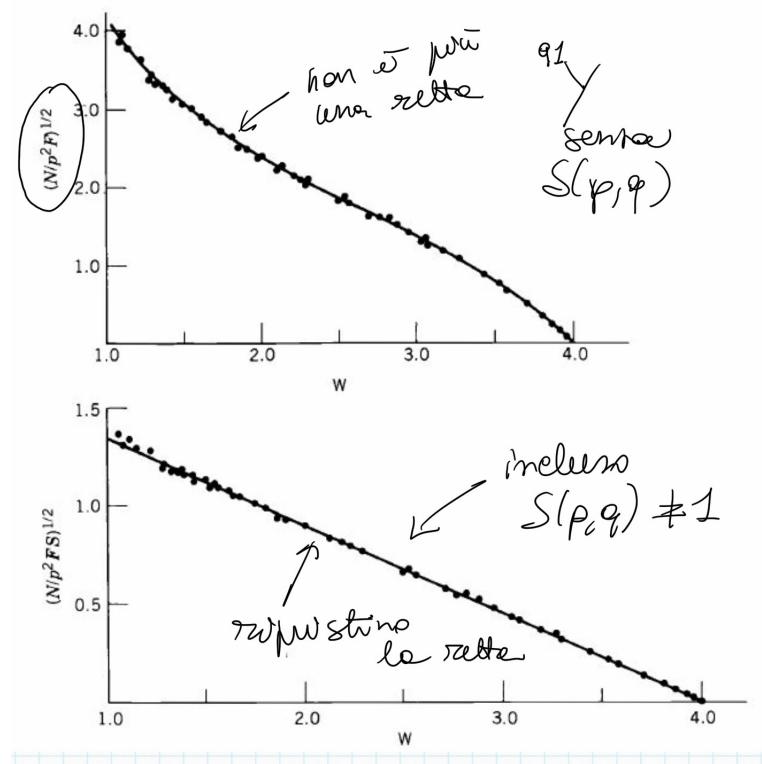
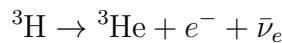


Figura III.5: Grafico di Fermi-Kuree che mostra l’andamento di $(Q - T_e)^2$ in funzione dell’energia dell’elettrone per il decadimento del ^{91}Y e l’accordo tra i dati e il modello senza shape factor (in alto) e con shape factor (in basso).

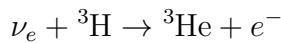
Esperimenti per m_ν Ci sono vari esperimenti che cercano di misurare la massa del neutrino; ne discutiamo 2:

- **Katrin:** in questo esperimento si sfrutta il decadimento β^- del trizio



In questo modo è possibile misurare direttamente la massa del neutrino, ma proprio per questo è particolarmente difficile.

- **Ptolemy:** si tratta in realtà di un esperimento ancora in progettazione che prevede di osservare una cattura neutrinica del trizio con neutrini “lenti”.



Poiché $T_\nu \sim 0$ l’energia dell’elettrone è fissata (non è più uno spettro continuo) $T_e = m({}^3\text{H}) - m({}^3\text{He}) - m_e + m_\nu$ e dal momento che il trizio decade β^- si avrà anche $Q^\beta = m({}^3\text{H}) - m({}^3\text{He}) - m_e - m_\nu$, da cui²³:

$$T_e = Q^\beta + 2m_\nu$$

Ci aspettiamo quindi di osservare un andamento come quello in Figura III.7 dove però compare anche una δ a distanza $2m_\nu$ da Q^β . Questa misura permetterebbe quindi di ottenere una stima per m_ν e un’evidenza sperimentale del **cosmic neutrino background**, dal quale ci si aspetta neutrini con $T_\nu \sim 0$.

Questa è, però, anche una delle maggiori difficoltà dell’esperimento, ovvero non ci sono

²³ $m({}^3\text{H}) = Q^\beta - m({}^3\text{He}) - m_e - m_\nu$

Table 9.2 ft Values for $0^+ \rightarrow 0^+$ Superallowed Decays

Decay	ft (s)
$^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}$	3100 ± 31
$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$	3092 ± 4
$^{18}\text{Ne} \rightarrow ^{18}\text{F}$	3084 ± 76
$^{22}\text{Mg} \rightarrow ^{22}\text{Na}$	3014 ± 78
$^{26}\text{Al} \rightarrow ^{26}\text{Mg}$	3081 ± 4
$^{26}\text{Si} \rightarrow ^{26}\text{Al}$	3052 ± 51
$^{30}\text{S} \rightarrow ^{30}\text{P}$	3120 ± 82
$^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S}$	3087 ± 9
$^{34}\text{Ar} \rightarrow ^{34}\text{Cl}$	3101 ± 20
$^{38}\text{K} \rightarrow ^{38}\text{Ar}$	3102 ± 8
$^{38}\text{Ca} \rightarrow ^{38}\text{K}$	3145 ± 138
$^{42}\text{Sc} \rightarrow ^{42}\text{Ca}$	3091 ± 7
$^{42}\text{Ti} \rightarrow ^{42}\text{Sc}$	3275 ± 1039
$^{46}\text{V} \rightarrow ^{46}\text{Ti}$	3082 ± 13
$^{46}\text{Cr} \rightarrow ^{46}\text{V}$	2834 ± 657
$^{50}\text{Mn} \rightarrow ^{50}\text{Cr}$	3086 ± 8
$^{54}\text{Co} \rightarrow ^{54}\text{Fe}$	3091 ± 5
$^{62}\text{Ga} \rightarrow ^{62}\text{Zn}$	2549 ± 1280

Figura III.6: Tabella con la misura del ft -value per il decadimento $0^+ \rightarrow 0^+$ di alcuni nuclei.

ancora state evidenze di questo fondo di neutrini, quindi ci aspettiamo pochissimi eventi; inoltre “immobilizzare” il trizio non è un problema banale: anche se portato a ~ 0 K decade molto facilmente β^- , per cui è stato proposto di legarlo al grafene (o strutture reticolari particolari) in modo da smorzare possibili movimenti.

1.3 Decadimenti β permessi e proibiti

Prima di procedere con lo studio di altri decadimenti ci soffermiamo un attimo sulla probabilità di decadimento β .

Decadimenti permessi Per questo tipo di decadimenti abbiamo visto che $S(p, q) = 1$, da cui $\phi_e \sim \phi_e \sim 1$; e^\pm e ν sono centrati allora in $r = 0$, ovvero non si ha momento angolare orbitale ($\ell = 0$) ma solo spin $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, $S = 0, 1$:

$$\begin{aligned} S = 1 \uparrow\uparrow & \quad \text{Decadimento di Gamow-Teller} \\ S = 0 \downarrow\uparrow & \quad \text{Decadimento di Fermi} \end{aligned}$$

Ci chiediamo quindi quale sia l’operatore O che media il tipo di decadimento. Ci aspettiamo²⁴ per il decadimento con $S = 0$ di avere uno scalare (1), mentre con $S = 1$ un vettore ($\vec{\sigma}$). Per quanto riguarda l’isospin, poiché questo passa $-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow p$) o $\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ ($p \rightarrow n$) ci aspettiamo che compaiano gli operatori di salita e discesa dell’isospin, ovvero le matrici di Pauli nello spazio dell’isospin τ^\pm :

$$\begin{aligned} \tau^+ |n\rangle &= |p\rangle \quad \tau^+ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ \tau^- |p\rangle &= |n\rangle \quad \tau^- |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

²⁴Risultati che derivano dalla teoria di campo, che non trattiamo in questa sede.

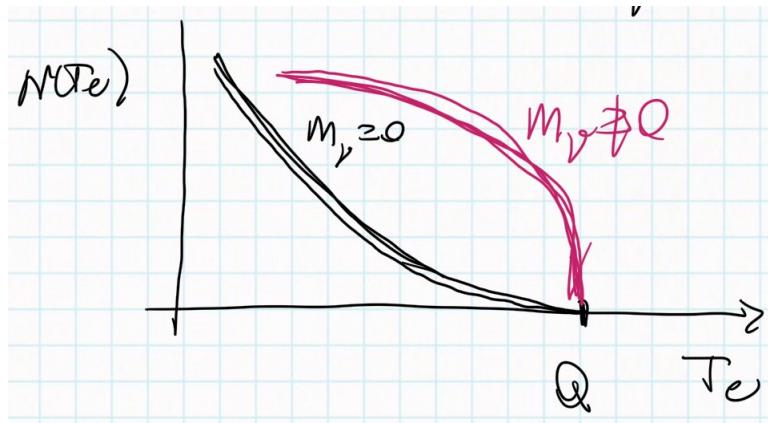


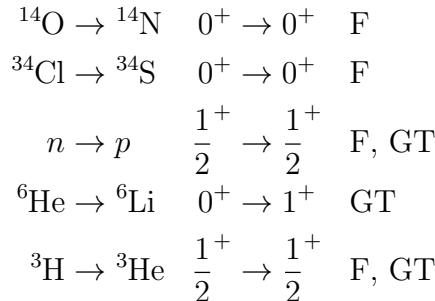
Figura III.7: Nel grafico sono rappresentati gli andamenti del numero di elettroni in funzione dell'energia cinetica dell'elettrone senza considerare la massa del neutrino e tenendone conto. Le due curve non sono in scala.

Riassumendo abbiamo allora:

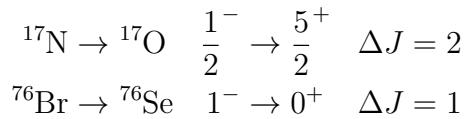
$$O = \begin{cases} \vec{\sigma}_i \tau_i^\pm & S = 1 \\ 1_i \tau_i^\pm & S = 0 \end{cases}$$

dove i indica l' i -esimo nucleone.

Concentriamoci adesso sul momento angolare totale²⁵: poiché questo deve conservarsi si ha per $S = 0$ $\Delta J = 0$, mentre per $S = 1$ $\Delta J = 0, 1$, escluso $J_i = J_f = 0$ (per quale si ha invece un decadimento di Fermi). Vediamo alcuni esempi²⁶:



Decadimenti proibiti Non valgono più i decadimenti di Fermi e di Gamow-Teller, perché $\ell \neq 0$, quindi può cambiare la parità ($\pi = (-)^{\ell}$). Consideriamo $\ell = 1$ (I proibito): per $S = 0$ $\Delta J = 0, 1$ ²⁷ e per $S = 1$ $\Delta J = 0, 1, 2$. Alcuni esempi importanti in astrofisica:



Per avere alcuni valori di riferimento:

$$\int \phi_f^* \vec{p} \cdot \vec{r} \phi_i \simeq 0.05 \sim 10^{-2}$$

$$\lambda \sim |M_{fi}|^2 \sim 10^{-4} \lambda_{\text{permesso}}$$

$$\tau \sim 10^4 \tau_{\text{permesso}}$$

²⁵Ci riferiamo al momento angolare del nucleo che decade \vec{J}_i che per conservazione è uguale a $\vec{J}_f + \vec{j}$, con j momento angolare dello stato νe^- . $\Delta J \equiv |\vec{J}_f - \vec{J}_i|$

²⁶Indichiamo con F il decadimento di Fermi e con GT quello di Gamow-Teller

²⁷Questa volta prendiamo entrambi perché si ha un cambio di parità.

2 Decadimento γ

Questo tipo di decadimento è simile a quello che accade sugli stati atomici; spesso, infatti, il nucleo figlio in un certo processo (per esempio nei decadimenti β , appena visti) si trova in uno stato eccitato, che decade nel fondamentale liberando un fotone (da cui il nome del decadimento):

$${}_{Z}^A X_N^* \rightarrow {}_{Z}^A X_N + \gamma$$

L'ordine di grandezza delle energie in gioco è $0.1 \div 10$ MeV. Questo tipo di decadimento viene solitamente usato per determinare il J^π degli stati eccitati, essendo legato a quello del fondamentale.

Anche se si ha la produzione di un fotone, alcuni processi in fisica sono dei decadimenti γ “camuffati”, ovvero non sono dei decadimenti ma processi di scattering, come per $n + p \rightarrow d + \gamma$

Energia dei livelli Analizziamo a questo punto il processo di decadimento γ dal punto di vista dell'equilibrio energetico.

Nel sistema del centro di massa:

$$\vec{P}_R + \vec{p}_\gamma = \vec{0}$$

dove abbiamo indicato con \vec{P}_R l'impulso del nucleo dovuto al rinculo, per cui $T_R = P_R^2/2M$; poiché i fotoni hanno energia²⁸ dell'ordine di 10 MeV (quindi $E_\gamma = p_\gamma = P_R$) siamo in regime non relativistico per il nucleo X.

$$E_i = E_f + E_\gamma + T_R$$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2M} \quad E_\gamma = M \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{M}} \right]$$

dove abbiamo definito $\Delta E \equiv E_i - E_f$ e abbiamo scartato la soluzione negativa perché priva di senso fisico. A questo punto poiché $\Delta E/M \ll 1$ sviluppiamo la radice:

$$E_\gamma \simeq M \left[-1 + 1 + \frac{\Delta E}{M} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E}{M} \right)^2 + \dots \right]$$

$$E_\gamma \simeq \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2M} \sim \Delta E \simeq Q$$

Spesso anche il secondo ordine è trascurabile, per cui l'energia del fotone ci fornisce informazione sulla separazione tra i livelli di partenza e di arrivo.

2.1 Teoria classica

A scopo illustrativo, studiamo dapprima il decadimento secondo una trattazione classica²⁹.

Se supponiamo di avere una distribuzione di cariche e correnti statiche, avremo allora anche un campo elettrico e un campo magnetico statici che possiamo riscrivere in termini di momenti di multipolo. Se tali cariche e correnti non sono statiche, sarà sempre possibile lo sviluppo, ma

²⁸Come al solito $c = 1$

²⁹In questa trattazione riprendiamo concetti classici di elettromagnetismo.

avremo campi di radiazione. A titolo di esempio consideriamo il dipolo³⁰:

Dipolo Elettrico	Dipolo Magnetico
$d(t) = qz \cos \omega t$	$\mu(t) = ia \cos \omega t$
$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$	$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
$\vec{E} \rightarrow \vec{E}; \vec{B} \rightarrow -\vec{B}$	$\vec{E} \rightarrow -\vec{E}; \vec{B} \rightarrow \vec{B}$
$\vec{B} = k^2(\vec{n} \times \vec{d}) \frac{e^{ikr}}{r}$	$\vec{B} = ik \vec{n} \times \vec{a} \propto \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\mu})$
$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{n}$	$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{n}$

Poiché l'interazione tra cariche e campo è proporzionale al prodotto $\vec{v} \cdot \vec{A}$ e questo ha la stessa parità di \vec{B} , è il campo magnetico a determinare la parità del dipolo³¹; si ha quindi: $\pi = -1$ per quello elettrico e $\pi = +1$ per quello magnetico.

Riassumiamo adesso alcuni concetti di Fisica III³²:

1. La potenza irradiata in dA a θ dall'asse z è proporzionale al $\sin^2 \theta$.
2. La potenza irradiata media del dipolo è data dall'espressione:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} d^2 && \text{elettrico} \\ P &= \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^4}{c^5} \mu^2 && \text{magnetico} \end{aligned}$$

Cerchiamo allora di generalizzarli introducendo una nuova notazione per lo sviluppo in multipolo attraverso l'indice L in modo che 2^L sia l'ordine del multipolo (per esempio $L = 1$ dipolo, $L = 2$ quadrupolo,...) e l'indice E o M a seconda se lo sviluppo sia di multipolo elettrico o magnetico. Formalizzando si ha che la radiazione 2^L ha una distribuzione angolare proporzionale al **polinomio di Legendre**³³ di ordine $2L$ $\mathcal{P}_{2L}(\cos \theta)$. È possibile esprimere anche la parità in funzione di tali indici:

$$\pi(ML) = (-)^{L+1} \quad \pi(EL) = (-)^L$$

Possiamo allora scrivere un'espressione³⁴ per la potenza dello sviluppo:

$$P(\sigma L) = \frac{2(L+1)c}{\epsilon_0 L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} [m(\sigma L)]^2$$

con $\sigma = E, M$ e $m(\sigma L)$ **ampiezza del momento di multipolo**³⁵.

A titolo di esempio, riportiamo il caso del dipolo elettrico:

$$P(E1) = \frac{4}{9\varepsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} [m(E1)]^2 \Rightarrow [m(E1)]^2 = \frac{3}{16\pi} d^2$$

Quest'ultimo risultato è molto utile in meccanica quantistica.

³⁰Le espressioni di dipolo elettrico e magnetico sono quelle per le configurazioni più semplici (cariche $+q$ e $-q$ a una certa distanza $z(t)$ e spira di area a percorsa da una corrente $i(t)$).

³¹ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ si ha allora che se la parità di \vec{B} è π , la parità di \vec{A} dev'essere $-\pi$ dal momento che $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}$. Infine $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ dunque $\pi(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \pi(\vec{B})$.

³²Dal momento che sono solo rimandi, non ci soffermiamo molto sulle spiegazioni.

³³Si vede infatti che

$$\begin{aligned} L = 1 \quad \mathcal{P}_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \sim \sin^2 \theta \\ L = 2 \quad \mathcal{P}_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \end{aligned}$$

che hanno l'andamento cercato.

³⁴In questa espressione compare il doppio fattoriale che ricordiamo essere $(n)!! = n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$.

³⁵Nel caso più semplice $m(E1) \propto d$ e $m(B1) \propto \mu$.

2.2 Trattazione quantistica

Secondo un approccio quantistico abbiamo il passaggio da una funzione d'onda iniziale ψ_i e una funzione d'onda finale ψ_f dovuto agli operatori³⁶ di multipolo. Per analogia con il decadimento β ci aspettiamo che sia determinato da un elemento di matrice associato a un operatore³⁷:

$$m_{fi}(\sigma L) = \int \psi_f^* m(\sigma L) \psi_i d\Omega$$

Scriviamo il rate di emissione di un singolo fotone³⁸:

$$\lambda(\sigma L) = \frac{P(\sigma L)}{\hbar\omega} = \frac{2(L+1)}{\epsilon_0 \hbar L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+1} |m(\sigma L)|^2$$

Per semplificare il calcolo facciamo queste due assunzioni: viene scambiato un singolo fotone e il processo coinvolge un singolo protone che passa da uno *shell* a un altro.

Consideriamo inizialmente $\sigma = E$:

$$\begin{aligned} L = 1 & \quad d \rightarrow ez \\ L = 2 & \quad q \rightarrow 3z^2\Omega^2 \end{aligned}$$

Consideriamo una funzione d'onda a gradino, ovvero costante per $r < R$ e nulla altrimenti; allora dato l'operatore $er^L Y_{LM}(\theta, \phi)$ l'elemento di matrice normalizzato per questa funzione d'onda è dato da:

$$m_{fi} \sim \frac{\int_0^R r^2 dr r^L}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{r^{L+3}/(L+3)}{r^3/3} \Big|_0^R = \frac{3}{L+3} R^L$$

dove non abbiamo considerato l'integrazione sulla parte angolare (l'armonica sferica). Sostituendo nel rate:

$$\lambda(EL) \simeq \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \alpha \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 c R^{2L}$$

con $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ costante di struttura di fine.

Se $R = R_0 A^{1/3}$ allora possiamo dare una stima dei vari termini di multipolo elettrico:

$$\begin{aligned} \lambda(E1) &\simeq 10^{14} A^{2/3} E^3 \\ \lambda(E2) &\simeq 7 \cdot 10^7 A^{4/3} E^5 \\ \lambda(E3) &\simeq 34 A^2 E^7 \\ \lambda(E4) &\simeq 10^{-5} A^{8/3} E^9 \end{aligned}$$

dove E è in MeV (così da avere un rate in s^{-1}).

Consideriamo ora lo sviluppo per $\sigma = M$ con le stesse assunzioni fatte in precedenza:

$$m_{fi} \simeq \frac{3}{L+2} R^{L-1}$$

$$\lambda(ML) \simeq \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \alpha \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+2}\right)^2 c R^{2L-2} \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \left(\mu_p - \frac{1}{L+1}\right)^2$$

Notiamo che l'espressione per il rate di multipolo magnetico non è molto diversa da quella per il multipolo elettrico, eccezion fatta per il termine in più che tiene conto del momento magnetico del protone (che non è quello di una particella elementare) e del $L+2$ a denominatore; tuttavia

³⁶In meccanica quantistica non si parla più di *momenti*, ma di *operatori*.

³⁷Nel caso del decadimento β avevamo M_{fi} e O_X .

³⁸Questo sarà la potenza irraggiata divisa per l'energia del singolo fotone.

$L + 2 \sim L + 3$ e il valore tipico per $(\mu_p - (L + 1)^{-1})^2$ è circa 10, per cui possiamo stimare il rate di multipolo magnetico da quello di multipolo elettrico secondo:

$$\lambda(ML) \simeq \frac{10\hbar^2}{m_p^2 c^2} \frac{\lambda(EL)}{R^2}$$

$$\begin{aligned}\lambda(M1) &\simeq 3 \cdot 10^{13} E^3 \\ \lambda(M2) &\simeq 2 \cdot 10^7 A^{2/3} E^5 \\ \lambda(M3) &\simeq 10 A^{4/3} E^7 \\ \lambda(M4) &\simeq 3 \cdot 10^{-6} A^2 E^9\end{aligned}$$

Queste stime per i rate dei termini di multipolo sono dette **stime di Weisskopf** e sono state verificate sperimentalmente; esse permettono di dedurre che i termini con il contributo maggiore sono quelli a L minori e che a parità di L $\lambda(EL) > \lambda(ML)$.

2.2.1 First order perturbation theory

Continuiamo lo sviluppo della teoria quantistica del decadimento secondo la così detta **first order perturbation theory**³⁹.

Consideriamo l'hamiltoniana nel caso di interazione⁴⁰ con il campo \vec{A} :

$$H = H_0 - \frac{e}{2m}(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + \frac{e^2}{2m}A^2$$

Il termine $e^2 A^2 / 2m$ è quello dovuto alla transizione con 2 fotoni ed è molto meno significativo⁴¹ rispetto all'altro termine di interazione⁴², che riscriviamo:

$$\begin{aligned}(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) \psi &= -i\nabla_i(A_i\psi) - iA_i\nabla_i\psi = \\ &= -i(\nabla_i A_i)\psi - 2iA_i(\nabla_i\psi) = \\ &= -2iA_i\nabla_i\psi\end{aligned}$$

dove ci siamo messi nella **gauge di Coulomb** ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$). Riscrivendo l'hamiltoniana di interazione:

$$H_I \simeq -\frac{e}{2m}(-2iA_i\nabla_i) = -\frac{e}{m}\vec{A} \cdot \vec{p} \Rightarrow -e \int d^3x \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

dove abbiamo riespresso il tutto in termini di densità di hamiltoniana, con $\vec{J}(\vec{x})$ densità di corrente nucleare⁴³, che per ora⁴⁴ introduciamo come:

$$\vec{J}_N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^Z \frac{1}{2m} \left\{ \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i), \vec{p}_i \right\}$$

³⁹Questo metodo è utilizzato anche per il calcolo dei fattori di forma.

⁴⁰Si tratta della sostituzione nell'hamiltoniana imperturbata $H_0 = p^2/2m$ di $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ (*minimal substitution*).

⁴¹Da qui in poi trascureremo questo contributo nell'hamiltoniana di interazione.

⁴²Si ricorda che \vec{p} e \vec{A} sono operatori con commutatore non nullo.

⁴³In questa espressione introduciamo l'indice N per ricordare che si tratta della corrente nucleare.

⁴⁴Sono presenti infatti altri contributi che ricaveremo nel seguito.

dove abbiamo indicato con $\{ \}$ l'**anticommutatore**⁴⁵. Scriviamo l'espressione esplicita anche per il campo esterno:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \left[\underbrace{\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{Termine di assorbimento}} + \underbrace{\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{Termine di emissione}} \right]$$

dove abbiamo indicato con a e a^+ gli operatori⁴⁶ di *distruzione* e *creazione* e con $\hat{\varepsilon}$ il vettore di polarizzazione, definito come:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}0} &= \hat{k} \\ \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\pm 1} &= \mp \frac{\hat{\varepsilon}_{\vec{k}x} \pm i\hat{\varepsilon}_{\vec{k}y}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Poiché stiamo studiando il decadimento γ ci interessa solo il termine di emissione in $\vec{A}(\vec{x})$, allora⁴⁷:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}\lambda | \vec{A}(\vec{x}) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} && \text{Funzione d'onda del fotone} \\ \langle J_f M_f, \vec{k}\lambda | H_I | J_i M_i \rangle &= -\frac{e}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \langle J_f M_f | \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* \cdot \vec{J}_N(\vec{x}) | J_i M_i \rangle \end{aligned}$$

dove J e M sono riferiti al momento angolare totale del nucleo prima e dopo il decadimento. Si osserva che la funzione d'onda del fotone si porta dietro un momento angolare⁴⁸; infatti l'onda piana può essere sviluppato in armoniche sferiche $\mathcal{Y}_{\ell m}$:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \left[\sum_{\ell m} i^\ell (4\pi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\hat{k}) \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{x}) j_\ell(kx) \right] \\ \text{Se } \hat{k} \parallel \vec{z} \Rightarrow \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\hat{k}) &= \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta = 0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \delta_{m0} \\ \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \mathcal{Y}_{\ell 0}(\hat{x}) j_\ell(kx) \end{aligned}$$

Per arrivare a una forma più compatta dell'espressione, introduciamo le armoniche sferiche vettoriali $\vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^M$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^M &\equiv \sum_{m\lambda} \langle \ell m, 1\lambda | JM \rangle \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{x}) \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \\ \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{x}) \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} &= \sum_{JM} \langle \ell m, 1\lambda | JM \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^M \\ \Rightarrow \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} j_\ell(kx) \sum_J \langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^{M=\lambda} \end{aligned}$$

⁴⁵L'anticommutatore di 2 operatori A e B è definito come:

$$\{ A, B \} = AB + BA$$

⁴⁶Ricordiamo che per l'emissione e l'assorbimento $[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} e a_{\vec{k}\lambda}^+ |0\rangle = |\vec{k}\lambda\rangle$.

⁴⁷Da qui in poi faremo un abuso di notazione, infatti la notazione coi *braket* sottintende l'integrazione, tuttavia per esplorare su quale variabile si integra da qui in poi utilizzeremo una notazione per cui i *bra* e i *ket* indicano le funzioni d'onda su cui integrare e racchiudono un integrale esplicito.

⁴⁸Ci aspetteremo allora delle regole di selezione

dove abbiamo introdotto le funzioni di Bessel j e nel secondo passaggio abbiamo usato l'ortogonalità dei coefficienti di Clebsch-Gordan. Sempre per le proprietà di tali coefficienti abbiamo che $\langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle$ è non nullo solo se $\ell = J, J - 1, J + 1$ e quindi possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{2}} \left\{ -\lambda j_J(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda + \right. \\ &\quad -i \left[\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{J(J-1)1}^\lambda + \right. \\ &\quad \left. \left. -\sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{J(J+1)1}^\lambda \right] \right\} \\ \widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} &= \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{2}} \left\{ -\lambda j_J(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda - \frac{1}{k} \vec{\nabla} \wedge [j_J(kz) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda] \right\}\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le proprietà del prodotto $\vec{\nabla} \wedge j \vec{\mathcal{Y}}$ ⁴⁹. Dunque il versore polarizzazione del fotone si porta dietro una parte proporzionale a un'armonica sferica vettoriale e una parte proporzionale al suo rotore (per questa ragione l'armonica sferica vettoriale è la *funzione tipo* del fotone). A questo punto riscriviamo l'elemento di matrice⁵⁰ da cui eravamo partiti:

$$\begin{aligned}\langle J_f M_f, \vec{k}\lambda | H_I | J_i M_i \rangle &= e \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{\frac{2\pi(2J+1)}{2\omega_k \Omega}} [E_{J-\lambda}(k) + \lambda M_{J-\lambda}(k)] \\ E_{JM}(k) &= \frac{1}{k} \int d^3x [\vec{\nabla} \wedge j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \cdot \vec{J}(\vec{x}) \\ M_{JM}(k) &= \int d^3x [j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \cdot \vec{J}(\vec{x})\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto i termini di multipolo elettrico E_{JM} e magnetico M_{JM} e abbiamo usato la proprietà $(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = (-)^{\lambda+1} \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$ ⁵¹. La parità è data da⁵²:

$$\begin{aligned}\pi(EJ) &= (-)^J \\ \pi(MJ) &= (-)^{J+1}\end{aligned}$$

che è la parità che avevamo trovato anche nel conto classico.

Corrente di magnetizzazione Avevamo anticipato che l'espressione della corrente nucleare non era completa, mancava infatti il contributo magnetico:

$$\vec{J}_N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^Z \vec{J}_C(\vec{x}_i) + \sum_{i=1}^A \vec{J}_M(\vec{x}_i)$$

⁴⁹Vedi Approfondimenti 4-Dettagli sul calcolo del decadimento γ per approfondire.

⁵⁰Nei calcoli ometteremo $\langle J_f M_f | J_i M_i \rangle$ per semplicità.

⁵¹Si ricordi che stavamo calcolando $\widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$). Per la proprietà dell'armonica vettoriale vedi Approfondimenti 4.3-Proprietà armonica vettoriale.

⁵²Abbiamo un $(-)^J$ dall'armonica sferica, un $(-)$ dalla corrente \vec{J} e un $(-)$ dal $\vec{\nabla}$ (la Bessel dipende dal modulo di r quindi non influisce).

Vediamo allora da dove deriva questa corrente. Scriviamo l'operatore di momento magnetico del singolo nucleone:

$$\begin{aligned}\mu_i(\vec{x}) &= \left(\mu_p \frac{1 + \tau_z(i)}{2} + \mu_n \frac{1 - \tau_z(i)}{2} \right) \vec{\sigma}_i \mu_N \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i) \\ \mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p c} \\ \mu_p &= \frac{g_p}{2} = 2.79 \\ \mu_n &= \frac{g_n}{2} = -1.91\end{aligned}$$

Allora se consideriamo l'hamiltoniana⁵³ di interazione con il momento magnetico:

$$\begin{aligned}H &= - \int d^3x \vec{\mu} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = - \int d^3x (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mu}) \cdot \vec{A} \\ \vec{J}_M(\vec{x}_i) &\equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{\mu}\end{aligned}$$

che è appunto una **corrente di magnetizzazione**.

Sui risultati della first order perturbation theory Possiamo rielaborare le espressioni per E_{JM} e M_{JM} sostituendo⁵⁴ i termini di corrente che abbiamo calcolato:

$$\begin{aligned}E_{JM}(k) &= \frac{1}{k} \int d^3x \left\{ [\vec{\nabla} \wedge j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \cdot \vec{J}_C(\vec{x}) + k^2 j_J(kx) \vec{\mu}(\vec{x}) \cdot \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M \right\} \\ M_{JM}(k) &= \int d^3x \left\{ j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M \cdot \vec{J}_C(\vec{x}) + \vec{\mu}(\vec{x}) \cdot [\vec{\nabla} \wedge j_J(kx) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^M] \right\}\end{aligned}$$

Se $k \ll 1$ (situazione frequente) allora sarà dominante in E il termine di corrente \vec{J}_C ; inoltre a parità di J per k piccolo abbiamo $j_J \sim (kx)^J$ per cui $E_{JM} > M_{JM}$ (come avevamo trovato per le stime di Weisskopf).

Stima del dipolo Consideriamo adesso i termini di dipolo. Poiché $k < 1$ MeV (spesso si prende dell'ordine del keV) si ha che $\langle \vec{k} \cdot \vec{r}_i \rangle / \hbar c \simeq 10/200 = 1/20 \ll 1$, quindi è ragionevole assumere la **Long Wavelength Approximation**; sfruttando la $\delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i)$ che compare nell'espressione della corrente possiamo approssimare $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}_i) \sim 1$ nel calcolo dell'elemento di matrice, per cui⁵⁵:

$$\int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{J}(\vec{x}) = \int d^3x \hat{e}_{k\lambda_i}^* (\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}) x_i = - \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}))$$

dove abbiamo usato $\partial_j x_i = \delta_{ji}$ e abbiamo integrato per parti. Dall'equazione di continuità per la carica elettrica si ha $\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}) \rangle = -i \langle [H, \rho] \rangle = -i(E_f - E_i) \langle \rho \rangle = -iE_\gamma \langle \rho \rangle$ valutato sugli stati iniziale e finale, quindi possiamo riscrivere l'equazione precedente come:

$$\begin{aligned}\langle J_f M_f | \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{J}(\vec{x}) | J_i M_i \rangle &= iE_\gamma \langle J_f M_f | \int d^3x \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{x} \rho | J_i M_i \rangle = iE_\gamma \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi} \\ \vec{d}_{fi} &\equiv \langle J_f M_f | \int d^3x \vec{x} \rho | J_i M_i \rangle\end{aligned}$$

⁵³Questa corrisponde a $H = - \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$, ma in termini di densità di hamiltoniana abbiamo rimosso gli indici e sostituito la somma con un integrale.

⁵⁴In realtà quello che facciamo è integrare per parti e poi usare il teorema di Gauss.

⁵⁵Da qui in poi chiameremo il versore di polarizzazione $\hat{\varepsilon}$ con \hat{e} per semplicità di scrittura.

dove \vec{d}_{fi} è l'**operatore di dipolo elettrico**.

Se consideriamo invece tutti i termini di multipolo⁵⁶:

$$E_{JM} \simeq \frac{k^J}{(2J+1)!!} \sqrt{\frac{J+1}{J}} \int d^3x \left[x^J \mathcal{Y}_{JM}(\hat{x}) \rho(\vec{x}) \right]$$

$$M_{JM} \simeq i \frac{k^J}{(2J+1)!!} \sqrt{\frac{J+1}{J}} \int d^3x \left[\vec{\mu}(\vec{x}) + \frac{1}{J+1} \vec{r} \wedge \vec{J}_C(\vec{x}) \right] \cdot \vec{\nabla} x^J \mathcal{Y}_{JM}(\hat{x})$$

In realtà, non è necessario calcolare esplicitamente ogni termine, perché questi (che indichiamo con T_{JM} dove $T = E, M$) sono operatori irriducibili quindi vale il teorema di Wigner-Eckart per cui:

$$\langle J_f M_f | T_{JM} | J_i M_i \rangle = \underbrace{\frac{(-)^{J_i - M_i}}{\sqrt{2J+1}} \langle J_f M_f, J_i M_i | J, M \rangle}_{\text{Dipendenza da } M} \underbrace{\langle J_f || T_J || J_i \rangle}_{\text{Elemento di matrice ridotta}}$$

Nell'espressione della sezione d'urto è l'elemento di matrice ridotta che compare e che è comune a ogni termine, quindi posso calcolarlo per il termine di multipolo più conveniente.

Probabilità di decadimento per il dipolo Procediamo con il calcolo⁵⁷ della probabilità di decadimento per il dipolo elettrico e ci aspetteremo di ritrovare il risultato classico. Facciamo l'ipotesi di *long wavelength approximation*, per cui:

$$d\lambda = \sum_{k\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f - E_\gamma) |T_{fi}|^2 \Omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$T_{fi} \equiv -\frac{e}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} i E_\gamma \hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}$$

dove la somma su \vec{k} è intesa sullo spazio delle fasi e $\omega_k = E_\gamma$.

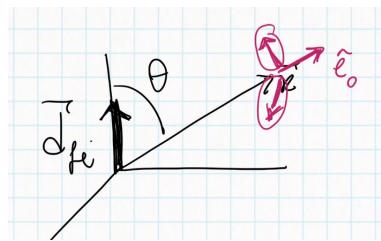


Figura III.8: Rappresentazione del sistema in esame.

Soffermiamoci sull'elemento di matrice $|\hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2$; poiché $\hat{e}_{kz'} = \hat{k}$ dovremo sommare⁵⁸ solo su $\lambda = x', y'$:

$$\sum_{\lambda=x',y'} |\hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2 = \sum_{\lambda=x',y',z'} |\hat{e}_{k\lambda}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2 - |\hat{e}_{kz'}^* \cdot \vec{d}_{fi}|^2 = d_{fi}^2 - d_{fi}^2 \cos^2(\theta) = d_{fi}^2 \sin^2(\theta)$$

⁵⁶Trascuriamo il secondo termine di E_{JM} perché stiamo considerando k piccoli.

⁵⁷Nei calcoli tenderemo a tenere $c = \hbar = 1$.

⁵⁸Con gli indici primati ci riferiamo al sistema di coordinate costruito sul versore di polarizzazione come in Figura III.8.

Allora avremo per il rate:

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f - E_\gamma) \frac{e^2}{2} E_\gamma d_{fi}^2 \sin^2(\theta) \frac{k^2 dk d\hat{k}}{(2\pi)^3} \\
 p_\gamma = \hbar k \quad E_\gamma &= p_\gamma c \quad \frac{p_\gamma^2 dp_\gamma}{\hbar^3} \rightarrow \frac{E_\gamma^2 dE_\gamma}{(\hbar c)^3} \\
 \frac{d\lambda}{d\hat{k}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f - E_\gamma) \frac{e^2}{2} E_\gamma d_{fi}^2 \sin^2(\theta) \frac{E_\gamma^2 dE_\gamma}{(2\pi \hbar c)^3} \\
 \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\hat{k}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{2} E_\gamma^3 \frac{d_{fi}^2 \sin^2(\theta)}{(2\pi \hbar c)^3} \\
 \frac{d\lambda}{d\hat{k}} &= \frac{1}{\hbar} \frac{\alpha}{2\pi} E_\gamma^3 \frac{d_{fi}^2 \sin^2(\theta)}{(\hbar c)^2}
 \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo integrato la δ per cui $E_\gamma = E_i - E_f$ e nell'ultimo abbiamo sostituito la costante di struttura fine α . Possiamo notare che abbiamo ottenuto un andamento del tipo $E_\gamma^3 \sin^2(\theta)$ come nel caso classico.

2.2.2 Riassunto

Riassumiamo i concetti base del decadimento γ che abbiamo visto nei paragrafi precedenti.

- La parità dei termini di multipolo è opposta a parità di J .
- A parità di J il contributo elettrico è maggiore rispetto a quello magnetico.

Regole di selezione Poiché $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{J}$ ho che $\pi_i = \pi_f \cdot \pi(T_J)$, per cui non tutti i multipoli sono ammessi; infatti $|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f$:

- Se $\pi_i = \pi_f$: allora per M ho J dispari e per E ho J pari.
- Se $\pi_i \neq \pi_f$: allora per E ho J dispari e per M ho J pari.

Notiamo che $J > 0$ anche se $J_i = J_f$, infatti se così non fosse (ovvero $J = 0$) allora avremmo un fotone emesso lungo \hat{k} , ma questo non è possibile perché può avere solo polarizzazione ± 1 . Dunque le transizioni $0 \rightarrow 0$ non sono ammesse⁵⁹.

2.2.3 Alcuni esempi

Primo esempio



Come mostrato nello schema in Figura III.9, abbiamo 3 possibilità di decadimento:

- $4^+ \rightarrow 2^+$: in questo caso $2 \leq J \leq 6$ e $\delta\pi = 0$, allora avremo $E2, M3, E4, M5, E6$, dove domina per $E_\gamma \simeq 1.2$ MeV ($k \ll 1$) solo $E2$, con $M3$ come correzione.
- $2^+ \rightarrow 0^+$: in questo caso $J = 2$ e $\delta\pi = 0$, allora avremo $E2$.
- $4^+ \rightarrow 0^+$: in questo caso $J = 4$ e $\delta\pi = 0$, allora avremo $E4$.

⁵⁹Queste si vedono, ma sono dovute a un processo differente, ovvero avvengono per **conversione interna**: il nucleo interagisce con un elettrone dell'atomo e quest'ultimo viene emesso.

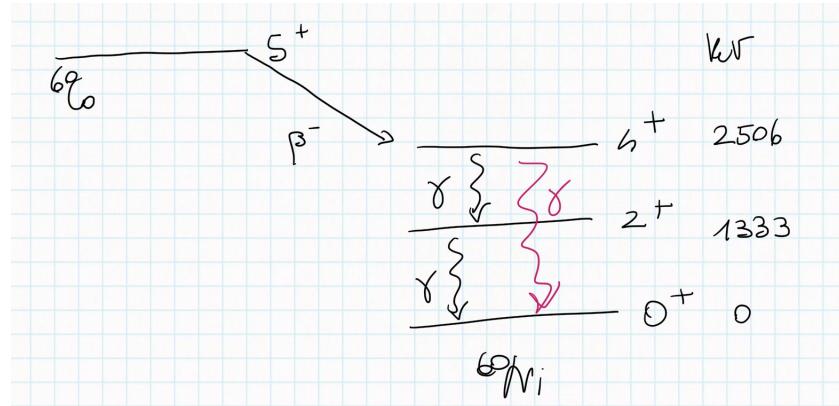


Figura III.9: Schema delle bande rotazionali coinvolte nel decadimento.

Per quanto riguarda le stime di Weisskopf, ovviamente non saranno precise perché queste sono bande rotazionali, quindi non è possibile fare l'approssimazione di simmetria sferica; tuttavia ci danno l'ordine di grandezza:

$$\begin{aligned} \lambda(E2) &\simeq 7 \cdot 10^7 60^{4/3} (1.2)^5 \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad \tau_{dec} = \frac{1}{\lambda} \sim 10^{-10} \text{ s} \quad 4^+ \rightarrow 2^+ \\ \lambda(E2) &\simeq 7 \cdot 10^7 60^{4/3} (1.3)^5 \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad \tau_{dec} = \frac{1}{\lambda} \sim 10^{-10} \text{ s} \quad 2^+ \rightarrow 0^+ \\ \lambda(E4) &\simeq 10^{-5} 60^{8/3} (2.5)^5 \sim 2 \text{ s}^{-1} \quad \tau_{dec} = \frac{1}{\lambda} \sim 0.5 \text{ s} \quad 4^+ \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

dove si può notare che tra $E2$ ed $E4$ c'è un fattore 10^{10} .

Secondo esempio

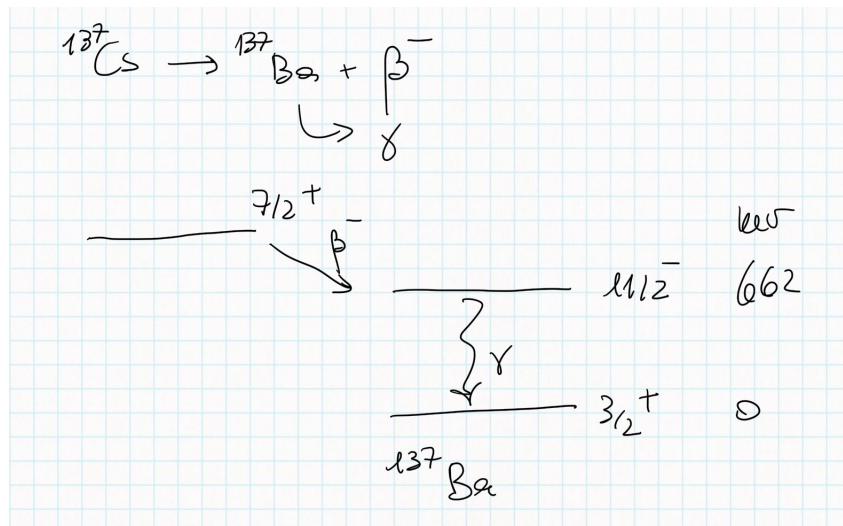
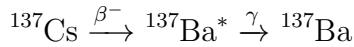


Figura III.10: Schema delle bande rotazionali coinvolte nel decadimento.

In questo caso abbiamo la transizione $\frac{11}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^+$ per cui $4 \leq J \leq 7$ e $\Delta\pi \neq 0$; allora i termini di multipolo saranno $M4, E5, M6, E7$, dove $M4$ sarà dominante e $E5$ una piccola correzione.

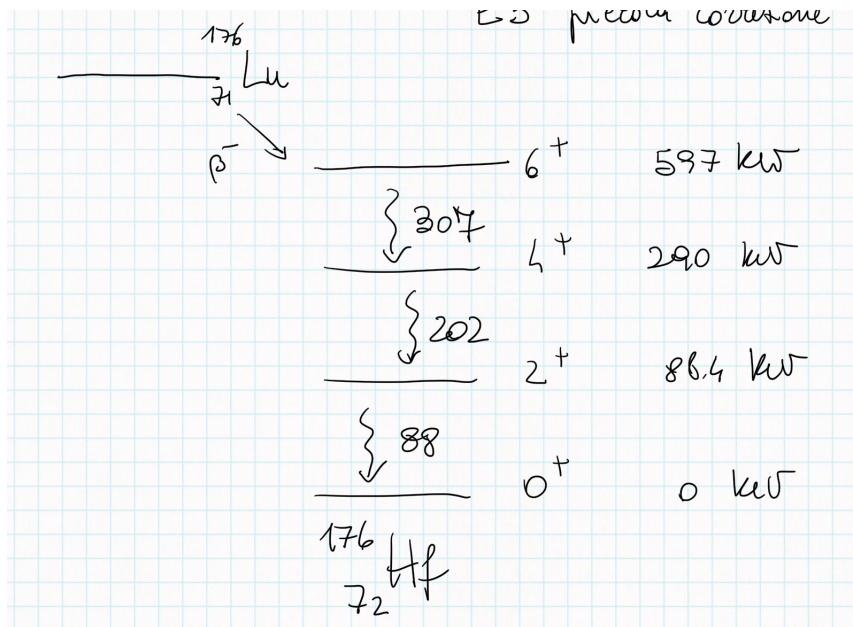
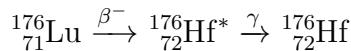


Figura III.11: Schema delle bande rotazionali coinvolte nel decadimento.

Terzo esempio

In tutti i casi $\Delta\pi = 0$, studiamo J :

1. $6^+ \rightarrow 4^+$: abbiamo $2 \leq J \leq 10$, dominante $E2$.
2. $4^+ \rightarrow 2^+$: abbiamo $2 \leq J \leq 6$, dominante $E2$.
3. $2^+ \rightarrow 0^+$: abbiamo $J = 2$, dominante $E2$.

Guardiamo le stime di Weisskopf:

$$\begin{aligned} 1 \quad E2 &\simeq 1.9 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \quad \tau_{\frac{1}{2}} \simeq 3.6 \cdot 10^{-9} \text{ s} \\ 2 \quad E2 &\simeq 2.4 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \quad \tau_{\frac{1}{2}} \simeq 2.9 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ 3 \quad E2 &\simeq 3.8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \quad \tau_{\frac{1}{2}} \simeq 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

Poiché i decadimenti 1 e 2 sono molto più veloci del decadimento 3 li osserverò come fondo di quest'ultimo (in un esperimento che ha come interesse lo studio del decadimento 3). Tuttavia, il risultato sperimentale del decadimento 3 $\tau_{\frac{1}{2}}^{oss} \simeq 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ non è assolutamente compatibile con quanto atteso; ciò è dovuto principalmente al fatto della asimmetria del nucleo, come già avevamo accennato: le stime di Weisskopf non sono precise per nuclei particolarmente deformati (come in questo caso).

2.2.4 Stato di scattering

Vogliamo in questa trattazione studiare J , quindi non ci interessa che le particelle coinvolte siano nuclei o meno. Prendiamo lo stato di scattering:

$$n + p \rightarrow d + \gamma$$

Possiamo sempre definire lo stato iniziale come un autostato del momento J ed espanderlo in onde parziali ψ_{np} . Allora avremo $\ell = 0, 1, 2, \dots$, ma dal momento che lo stato è di scattering

(basse energie) ci interessa solo $\ell = 0$; per quanto riguarda lo spin avremo $S = 0, 1$, tuttavia poiché i coefficienti di Clebsch-Gordan della transizione ${}^3S_1 \rightarrow {}^3S_1$ sono trascurabili rispetto a quelli della transizione ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$ avremo che rimarrà⁶⁰ solo $S = 0$.

Dunque,abbiamo ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$ con $J = 1$ e $\Delta\pi = 0$ e il termine dominante sarà $M1$.

⁶⁰Il pezzo di corrente di magnetizzazione in questo caso è rilevante.

Capitolo IV

Big Bang Nucleosynthesis

In questo capitolo trattiamo le basi della teoria della *Big Bang Nucleosynthesis* e le reazioni nucleari da essa previste, con particolare attenzione allo studio *ab-initio* della reazione $p + n$. Il capitolo copre le lezioni 11/03/2021, 15/03/2021, 17/03/2021 e 18/03/2021.

Astronomical Observations Riportiamo adesso alcune informazioni generali su osservazioni astronomiche che ci serviranno per poterci poi concentrare sulla nucleosintesi primordiale e sulle reazioni all'interno delle stelle.

- La Via Lattea è una galassia a spirale larga circa 30 kpc¹ e spessa 1 kpc. È composta da $2 \cdot 10^{11}$ stelle, polveri e gas. Il Sole è situato a circa 8.5 kpc dal centro galattico, che consiste in un buco nero supermassiccio² chiamato Sgr A*. La nostra Galassia insieme alla galassia di Andromeda e una ventina di altre galassie nane forma il Gruppo Locale; questo è legato (gravitazionalmente) a sua volta ad altri gruppi con cui forma l'Ammasso della Vergine per un totale di circa 10^{10} galassie che occupano circa il 5% dell'Universo. Le masse in gioco sono:

$$M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad \rho_{\odot} \sim \rho_{\text{H}_2\text{O}} \quad M_{MW} > 2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$$

come abbiamo detto, non sono presenti solo stelle nella Via Lattea, ma anche mezzo e materia oscura. Per quanto riguarda il gas, questo ha una densità che varia da 10^9 atomi/m³ vicino al sistema solare fino a circa 10^5 altrove e contiene principalmente H ed He con tracce di molecole.

- L'analisi spettrale mi dà informazioni sulla temperatura e la composizione chimica.
- La luminosità è la densità di flusso di energia: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{sup}^4$ dove $\sigma \equiv 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann; per cui:

$$\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

Da questa relazione è possibile costruire un diagramma temperatura-luminosità detto diagramma Hertzsprung-Russell in Figura IV.1. In questo grafico si osserva che le stelle in *main sequence* si collocano quasi su una retta. Le rette grige corrispondono a linee lungo le quali si ha un raggio costante.

¹Le misure sono riportate in *parsec*; ricordiamo che:

$$1 \text{ pc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.3 \text{ ly}$$

²Se non fosse per il mezzo interstellare avrebbe una luminosità apparente pari a quella del Sole.

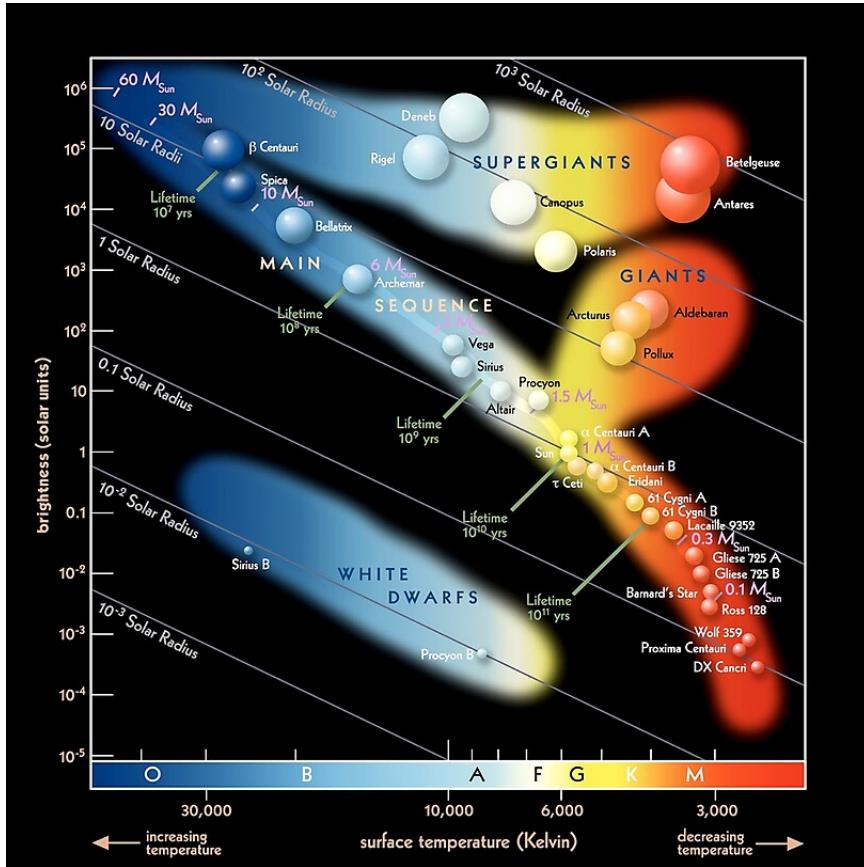


Figura IV.1: Diagramma di Hertzsprung-Russell

- Nel 1930 Hubble si rende conto che le galassie sono uniformemente distribuite nel cielo³ e che si stanno allontanando. Tale deriva è osservabile dall'effetto Doppler sulle righe spettrali di queste galassie, ovvero uno spostamento verso "il rosso" (lunghezze d'onda maggiori); si definisce allora il parametro di *redshift*:

$$z \equiv \frac{\lambda(v) - \lambda(0)}{\lambda(0)} \simeq \frac{v}{c}$$

con $v \ll c$. Dalle osservazioni si evince che z è proporzionale alla distanza d dell'oggetto; la costante di proporzionalità tra la velocità di allontanamento e la distanza è detta costante di Hubble H . Sul valore di questa costante c'è tensione, riportiamo il valore ottenuto dalla misura sulle scale di distanza: $H = 72 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \simeq 2.3 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Ipotizzando che il rate di espansione sia rimasto sempre lo stesso allora H^{-1} dà una stima dell'età dell'universo $t \sim 12 \cdot 10^9 \text{ y}$.

- Nasce così l'idea (riavvolgendo nel tempo l'espansione) di un punto di inizio da cui tutto è partito: il *Big Bang*. Secondo questa teoria, materia e radiazione erano inizialmente accoppiate fino a un tempo di disaccoppiamento e di successiva ricombinazione tra i barioni. Da quel momento in poi la radiazione (su larga scala) non ha più interagito con la materia e infatti si osserva un fondo di radiazione cosmica detto *Cosmic Microwave Background* (CMB), ancora oggi molto studiato. La teoria prevedeva⁴ una $\lambda \simeq 7.5 \text{ cm}$ (da cui il nome *microwave*), che per un corpo nero corrisponde a $T \simeq 2.7 \text{ K}$, e fu osservato nel 1965 da Penzias e Wilson.

³Da questo nascerà il Principio Cosmologico per cui l'Universo viene assunto uniforme e isotropo (su "grandi" scale).

⁴Questi valori dipendono fortemente dal modello.

- Per misurare H_0 (dove il pedice indica che la costante è misurata per il tempo attuale) si utilizzano principalmente 2 metodi: l'osservazione dell'espansione dell'Universo dagli spettri delle galassie lontane oppure delle disomogeneità nel CMB. Nel primo caso, è necessario selezionare galassie per cui la velocità di espansione è più rilevante rispetto alla velocità peculiare⁵ e misurarne le distanze; a tal scopo si fa uso di candele campione (oggetti con poca astrofisica, ben identificabili) e dalla legge di Hubble ottengo una stima indipendente dal modello cosmologico di H_0 .

Nel metodo della CMB, invece, si osservano le sovradensità dovute a fluttuazioni in densità dell'ordine di 10^{-2} nell'Universo primordiale che hanno portato a un gradiente di pressione, quindi a onde sonore; al momento della ricombinazione queste oscillazioni si sono congelate e ci aspettiamo quindi dei picchi in queste fluttuazioni detti appunto *acoustic peaks*, visibili per alcuni \vec{k} tramite un'analisi spettrale, come mostrato in Figura IV.2. Questi picchi dipendono da alcuni parametri cosmologici tra cui Ω_b che è legata alla densità critica $\rho_c \equiv 3H_0^2/8\pi G$, per cui si ottiene una stima di H_0 , ma che dipende fortemente dal modello. Come si vede in Figura IV.3 vi è tensione e ancora oggi si sta cercando una risposta.

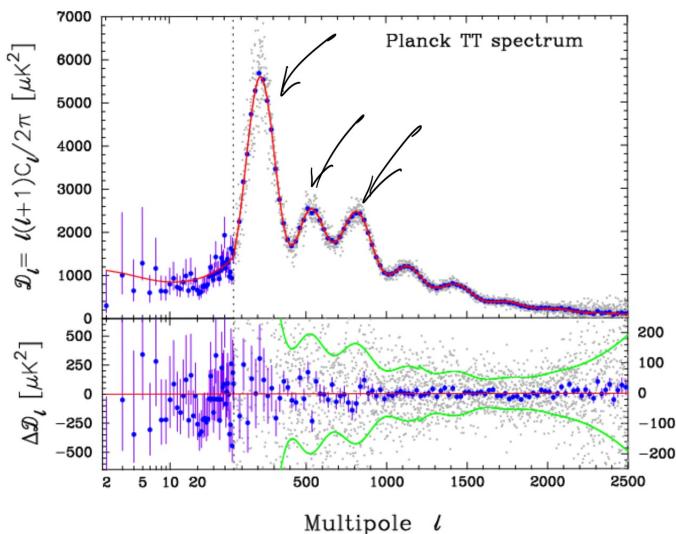


Figura IV.2: Analisi spettrale della sovradensità nel CMB. Si possono osservare i picchi di cui parlavamo.

Queste osservazioni ci hanno portati alla teoria del *Big Bang*, necessaria per introdurre il prossimo fondamentale argomento, ovvero la trattazione dei meccanismi e delle tipologie delle reazioni nucleari che hanno caratterizzato l'Universo primordiale, detta ***Big Bang Nucleosynthesis Theory (BBN)***.

1 Introduzione alla teoria

Il *Big Bang model* comporta necessariamente la formulazione di una teoria sulla nucleosintesi primordiale. Questa fu trattata per la prima volta in un articolo del 1940 degli autori Gamow, Adler e Bethe⁶.

⁵Si tratta della velocità di avvicinamento dovuta alle interazioni gravitazionali tra galassie ed è dell'ordine del 100 km/s.

⁶Un aneddoto diverte: Gamow (che è lo stesso Gamow del decadimento di Gamow-Teller) insistette per avere la partecipazione anche di Bethe, per poter mettere nell'articolo i nomi "Adler, Bethe, Gamow" che ricordavano α , β , γ , nome con cui ormai viene ricordato l'articolo.

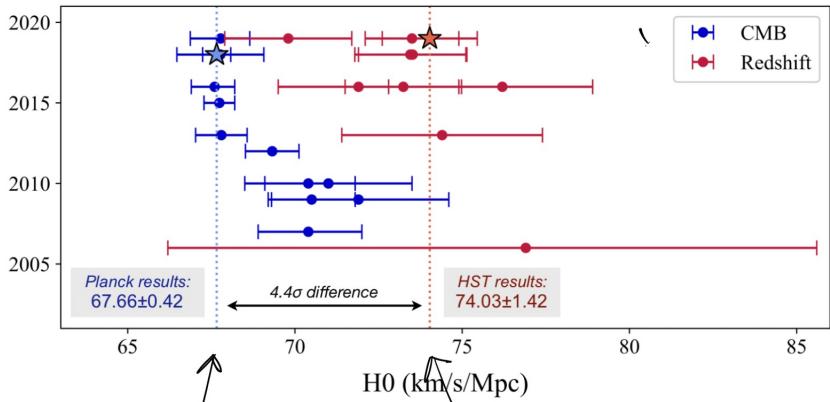


Figura IV.3: Tensione per le misure di H_0 . Si osserva che nel tempo i valori si sono allontanati.

Il problema di Y_P Prima di passare allo studio delle reazioni di interesse, mostriamo come alcuni risultati confermano la necessità di una nucleosintesi primordiale.

Se assumiamo che $M_{MW} \sim 10^{11} M_\odot$ e $L_{MW} \sim 2 \cdot 10^{10} L_\odot$ allora l'energia totale liberata in un tempo H_0^{-1} sarà $E_{tot} \simeq L_{MW}/H_0 \sim 2.4 \cdot 10^{54}$ J; escludendo la nucleosintesi primordiale l'unica reazione possibile è $4p \rightarrow {}^4\text{He}$, allora $E_{{}^4\text{He}} = 28 \text{ MeV} = 4.5 \cdot 10^{-12}$ J. Se tutta la massa stellare bruciasse allora si libererebbe un'energia pari a $E_{burn} \equiv E_{{}^4\text{He}} \cdot M_{MW}/4m_p \sim 1.3 \cdot 10^{56}$ J, da cui otteniamo $E_{tot}/E_{burn} \sim 2\%$ che corrisponde alla percentuale in massa di ${}^4\text{He}$ “primordiale” Y_P . Tuttavia, sperimentalmente si osserva che $Y_P \simeq 25\%$, dunque le reazioni nucleari nei core stellari non sono sufficienti per spiegare questa abbondanza ed è necessario introdurre un altro meccanismo (la nucleosintesi primordiale, appunto).

A grandi linee Proviamo a correggere il risultato precedente con argomentazioni qualitative. Ovviamente per la nostra trattazione non siamo interessati al *Big Bang*, ma fisseremo come origine dei tempi l’“attimo prima” che protoni e neutroni si formino:

- a $t = 0$ s abbiamo quindi una sfera molto densa e molto calda $T > 10^{13}$ K.
- a $t \sim 0.01$ s domina ancora la radiazione e non riescono a formarsi protoni e neutroni perché $T \sim 10^{13}$ quindi $E = kT \sim 1$ GeV, quindi anche se ci fossero p e n verrebbero fotodisintegrati.
- a $t \sim 0.1$ s la temperatura scende a $T \sim 3 \cdot 10^{10}$ K per cui $E \simeq 3$ MeV e si formano finalmente protoni e neutroni.

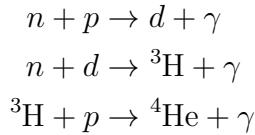
A questo punto è fondamentale ricordare che la massa del neutrone è maggiore di quella del protone $\Delta m = 1.3$ MeV per cui avremo al momento del *Freeze-out*:

$$\frac{N_n}{N_p} \propto \exp\left(-\frac{\Delta m}{kT}\right) \simeq 0.22 \simeq \frac{1}{5}$$

per cui per 1000 protoni abbiamo 220 neutroni circa. Ancora non si può formare il deutone.

- a $t \sim 180$ s la temperatura raggiunge $T \sim 10^9$ K a cui corrisponde $E \sim 0.09$ MeV e quindi si possono formare i nuclei. Tuttavia, è necessario ricordare che il neutrone decade con una legge del tipo $N_n(t) = N_n^0 \exp(-t/\tau_n)$ con $\tau_n \sim 886$ s; nell'esempio da noi fatto ($N_n^0 = 220$) avremo $N_n \simeq 180$ e $N_p = N_p^0 + (N_n^0 - N_n) = 1040$.

Allora possiamo ipotizzare che qualitativamente⁷ avremo queste relazioni:



Ci chiediamo quanto valga Y_P :

$$\begin{aligned} Y_P &= \frac{4N_{\text{He}}}{N_{p,\text{rimasto}} + 4N_{\text{He}}} \leftarrow \text{Mass fraction} \\ &= \frac{4\frac{N_n}{2}}{(N_p - N_n) + 4\frac{N_n}{2}} = \\ &\simeq 0.29 \end{aligned}$$

che si avvicina molto al 25% cercato.

Le basi della BBN Innanzitutto elenchiamo gli “ingredienti” essenziali della BBN:

- Un network di reazioni.
- Il numero di neutroni e protoni di partenza, che sarà determinato, come abbiamo accennato, dalla vita media del neutrone, misura sulla quale tuttora è presente una certa incertezza (fornitaci dal PDG⁸).
- Il rapporto tra barioni e fotoni detto ***entropy factor*** η^9 . Questo parametro ci dice se è favorita la ricombinazione (η grande) o la fotodisintegrazione della materia.
- Il fattore η è legato alla ***barion density*** secondo $\rho_B = 6.8 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3} \cdot \eta$. Spesso però al posto di questa si tende a lavorare con la ***barion fraction of critical mass density***, definita come $\Omega_B h^2 = 3.6 \cdot 10^7 \cdot \eta^{10}$.

Come “output” da questi avremo le abbondanze degli elementi primordiali (ovvero H, He e metalli leggeri). Passiamo allora alla trattazione di questi “input”.

2 Network di reazioni

In Figura IV.4 riportiamo le reazioni coinvolte nella nucleosintesi primordiale; nel seguito con i numeri puntati tra parentesi (per esempio (1.), (2.)) faremo riferimento alle reazione riportate in questa figura.

Criteri qualitativi di reazione Prima di procedere ricordiamo alcune regole qualitative per capire quale tra i vari rami di una reazione è favorito rispetto agli altri:

I $\sigma_{\text{forte}} \gg \sigma_{\text{EM}} \gg \sigma_{\text{debole}}$. Per riconoscere a quale tipo di interazione appartiene la reazione è sufficiente osservare i prodotti: se compaiono neutrini l’interazione è debole, se invece il numero di protoni e neutroni è conservato abbiamo interazione forte e se si ha anche produzione di un fotone allora si ha interazione elettromagnetica.

⁷In realtà esiste un *full network* di relazioni.

⁸PDG = Particle Data Group.

⁹È definito come rapporto tra la densità barionica e quella dei fotoni n_b/n_γ .

¹⁰Dove h è un parametro adimensionale per la costante di Hubble, definito come $h = H_0/100[\text{km/s Mpc}]$.

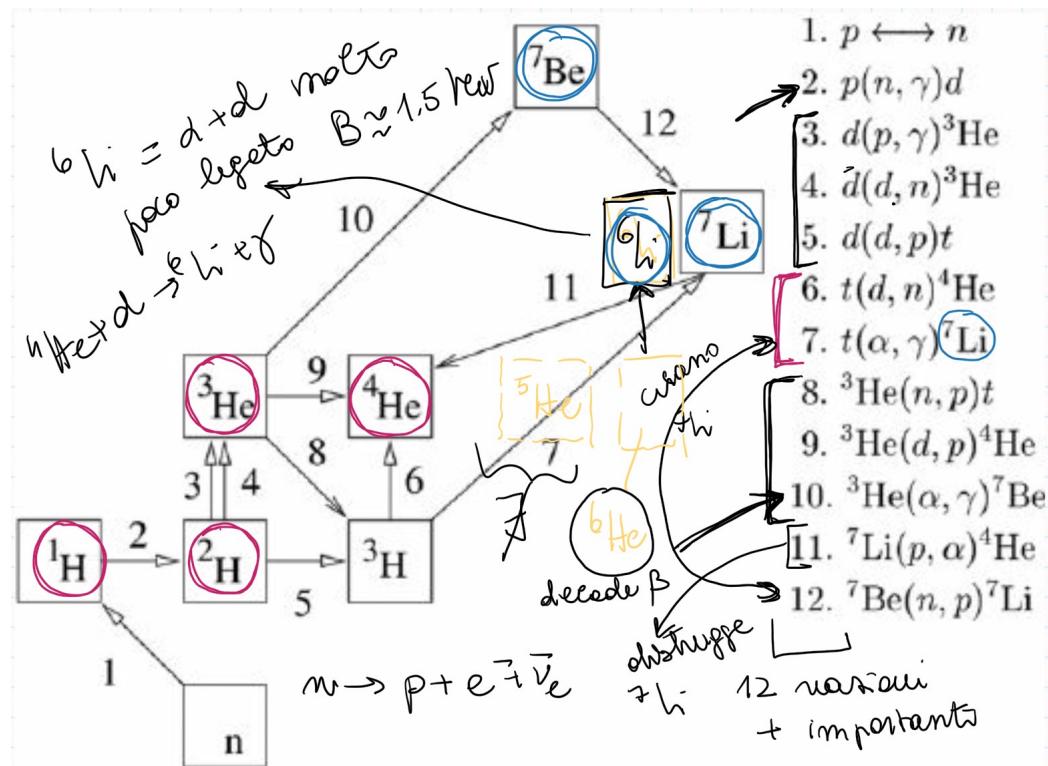


Figura IV.4: Sono riportate le 12 reazioni più importanti. Gli elementi segnati in rosa sono i primordiali più abbondanti.

II L'abbondanza dei reagenti è discriminante.

III La barriera Coulombiana da superare per avere la reazione è un fattore che influisce fortemente sulla probabilità di reazione.

2.1 La nucleosintesi primordiale

La prima reazione che abbiamo è il decadimento del neutrone¹¹ (1.); successivamente segue una cattura radiativa p - n (2.) e a questo punto abbiamo 3 possibili reazioni di distruzione del deuterio: secondo il I criterio la (4.) e la (5.) dovrebbero contare maggiormente rispetto alla (3.), ma poiché l'abbondanza di p è superiore a quella di d le probabilità delle tre reazioni sono dello stesso ordine¹². Queste reazioni non sono sufficienti a consumare tutto il deuterio, che potrà interagire con il trizio t secondo la (6.); il trizio non è un elemento primordiale perché decade, ma essendo un decadimento debole è molto probabile che interagisca nuovamente con α (7.) dando ${}^7\text{Li}^{13}$. Per quanto riguarda ${}^3\text{He}$, invece, questo è stabile e ha varie reazioni di distruzione¹⁴, tra cui la più importante se ancora vi sono neutroni è la (8.), alla quale segue (nonostante la poca abbondanza di deuterio) la (9.) e quando si raggiunge un certo numero di ${}^3\text{He}$ e α si ha anche la (10.); ora il berillio che si è formato da questo viene distrutto praticamente tutto in ${}^7\text{Li}$ (12.).

Fermiamoci un attimo: come mai non troviamo reazioni per ${}^5\text{He}$, ${}^6\text{He}$ e ${}^6\text{Li}$? Allora il ${}^5\text{He}$ non è uno stato legato, ma ${}^6\text{He}$ sì, tuttavia questo decade β molto velocemente (è poco legato) in ${}^6\text{Li}$. Quest'ultimo si ottiene anche da $\alpha + d$ con l'emissione di un fotone e il motivo per cui la sua

¹¹Si tratta dell'unica reazione di interazione debole.

¹²Si capisce allora come mai non si ha $d(d, \gamma)^4\text{He}$ (poca abbondanza e interazione EM).

¹³Vedremo che la presenza di questo ⁷Li sarà una questione delicata da trattare.

¹⁴Esisterebbe anche ${}^3\text{He}(n, \gamma){}^4\text{He}$, ma la (8.) (data l'abbondanza e la natura dell'interazione) è molto più importante.

abbondanza non è significativa è dovuto al fatto che è poco legato, per cui si rompe facilmente. Abbiamo ancora un problema da risolvere, ovvero che la carta dei nuclei presenta un *gap* per $A = 8$: il ^8B e il ^8Li decadono β e il ^8Be decade α . Dunque, la BBN si ferma qui¹⁵ con p , ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li (poco) e ^7Be (pochissimo).

Confronto con le osservazioni A questo punto per studiare la BBN è necessario prendere i valori delle varie sezioni d'urto delle reazioni coinvolte e vederne l'evoluzione temporale, come mostrato in Figura IV.5, dove è riportata la *mass fraction* dei principali elementi predetta dal modello¹⁶. Dunque, dalle misure di queste quantità è possibile stimare la bontà della teoria.

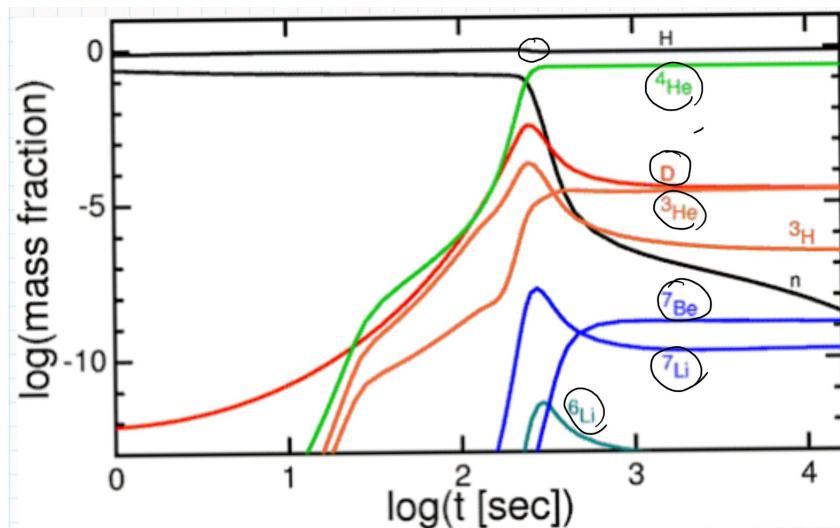


Figura IV.5: Andamento nel tempo della *mass fraction*, ovvero dell'abbondanza di un elemento sull'abbondanza di ^1H . L'abbondanza di ^1H ha un leggero scalino e quello segna l'inizio della BBN; si vede che n decade; il ^3H è indicato, ma decade; vi è un errore per l'andamento del ^6Li , dovrebbe essere più alto.

Riportiamo allora le osservazioni in Figura IV.6. Da queste misure è possibile stimare $\Omega_B h^2$ e alla fine degli anni '90 si ebbe la prima evidenza che la densità di materia dell'Universo fosse differente da quella attesa (a causa dell'assenza nel conto del contributo dovuto alla materia oscura).

Misurazione delle abbondanze primordiali Partiamo dalla misura per ^4He . I primi problemi sorgono dal fatto che le stelle ne hanno aumentato la concentrazione, dunque si fanno misure del rapporto $^4\text{He}/\text{H}$ in regioni in cui è avvenuta poca o quasi nulla evoluzione stellare, ovvero galassie *metal-poor*. Riportiamo in Figura IV.7 un esempio. A oggi si ha un valore di circa $Y_p \sim 0.25$.

La misura del deuterio è anche più problematica: esso infatti è “fragile”, per cui vanno evitate le stelle e gli oggetti densi, anzi si fanno osservazioni nel mezzo interstellare.

Il 1973 il satellite Copernico riuscì a dare dei limiti (superiori e inferiori), ma non a raccogliere dei veri e propri dati. Successivamente, nel 1998, Tytler e Burles ebbero un'idea, ovvero quella di misurare d/H nelle *hydrogen clouds* ad alto *redshift* ($z > 3$, oggetti molto vecchi): si osservano le linee di assorbimento della Ly α in *quasi-stellar object* con metallicità $Z \sim 10^{-2} \div 10^{-3} Z_\odot$ (per cui ci aspettiamo che l'abbondanza sia quella primordiale). A oggi il valore più accurato

¹⁵In realtà esistono reazioni per saltare da $A = 5$ ad $A = 7$, ma sono comunque trascurabili rispetto a tutti gli altri processi.

¹⁶Una piccola nota sul berillio: non è facile da misurare, quindi spesso quello che si misura è il rapporto d/H o $^3\text{He}/\text{H}$.

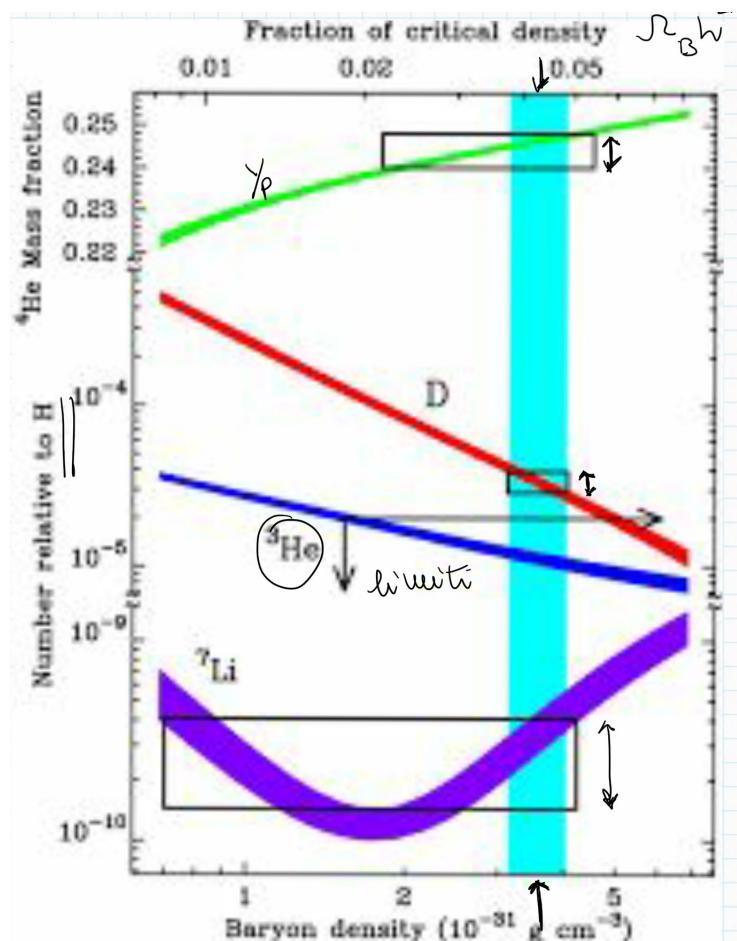


Figura IV.6: Le bande degli andamenti sono dovute alle incertezze. Coi rettangoli si riportano le misure. Il range di interesse è indicato dalla striscia celeste. Per il trizio ci sono solo limiti superiori e inferiori.

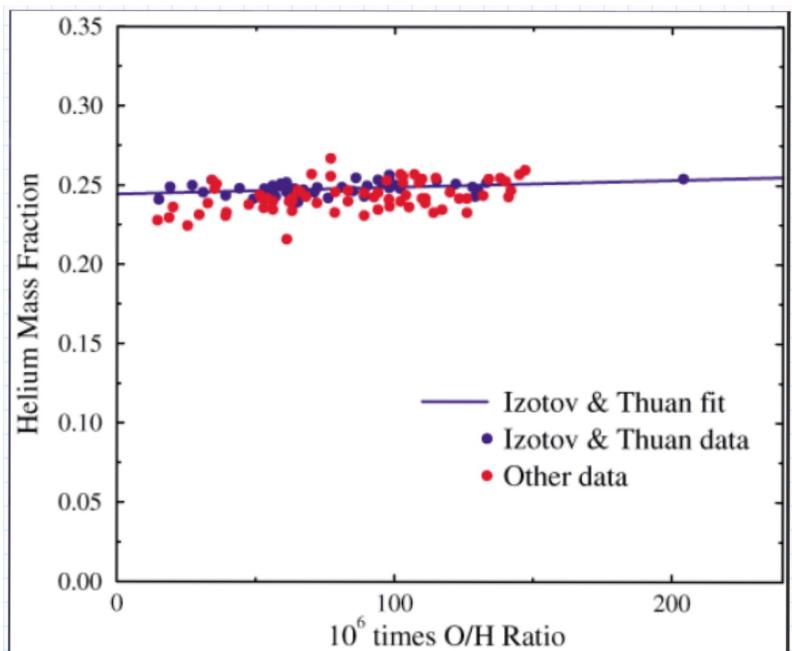


Figura IV.7: Risultati sperimentali per stelle con metallicità differente.

riporta $d/\text{H} = (2.527 \pm 0.030) \cdot 10^{-5}$; questa accuratezza deriva dal fatto che l'abbondanza di

deuterio è particolarmente sensibile alla densità di barioni.

Per quanto riguarda ^3He , anche questo è molto fragile e non dev'essere cercato nel mezzo interstellare, tuttavia la sua misurazione è complicata.

Il ^7Li , invece, viene ricercato nelle atmosfere stellari di stelle di popolazione II, ovvero *low-metallicity stars* (che si possono osservare nell'alone della nostra galassia). In Figura IV.8 riportiamo i dati sperimentali per il rapporto $^7\text{Li}/\text{H}$: notiamo dei dati (sulla destra) molto *scatterati* che però non sono di interesse poiché si riferiscono a metallicità alte; per quanto riguarda gli altri dati (sulla sinistra) vi è tuttora ancora discussione riguardo il valore di Fe/H oltre il quale fermarsi per il fit. Negli ultimi tempi queste misure sono diventate più accurate e hanno portato a un valore stimato di $\Omega_B h^2$ diverso da quello ottenuto dal ($^4\text{He}, d$), dando vita a quello che oggi viene definito *Li-problem* (o *puzzle*) della BBN.

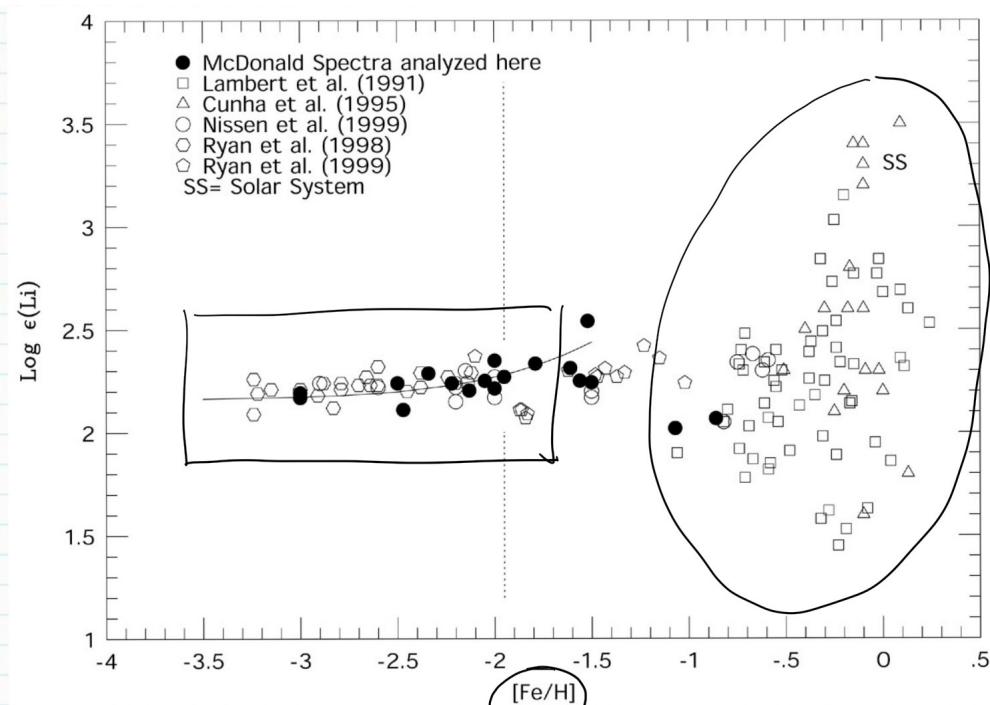


Figura IV.8: *Split Plateau* per il Li. Con $\varepsilon(\text{Li})$ si indica la *mass fraction* del litio.

3 La BBN e i neutrini

Alla fine degli anni '90 la teoria della BBN era ormai supportata dall'accordo con evidenze sperimentali nell'abbondanza di 3 degli elementi più presenti, per cui aveva acquistato un potere predittivo; essa può essere usata infatti per rielaborare il numero di neutrini o meglio la *radiation density* N_ν (l'osservabile che effettivamente si misura). Un aumento delle specie di neutrini, appunto, porterebbe a un aumento nella densità di energia, che regola il rate di espansione (per cui un'espansione più veloce) e quindi ci aspetteremmo che il *Freeze-out* accada prima: $H^2 \propto N_\nu T^4$, dunque se N_ν è maggiore allora T è minore. Se riprendiamo l'esempio che avevamo fatto nel paragrafo “**A grandi linee**” a pg. 46 per il numero di neutroni al *Freeze-out* si ha in questo caso:

$$N_n = N_0 e^{-t/\tau} = 220 e^{-100/886} \simeq 196$$

Abbiamo quindi un maggior numero di neutroni e questo comporta una densità di ${}^4\text{He}$ più alta. Riportiamo in Figura IV.9 l'andamento della *mass fraction* per l'elio al variare della N_ν .

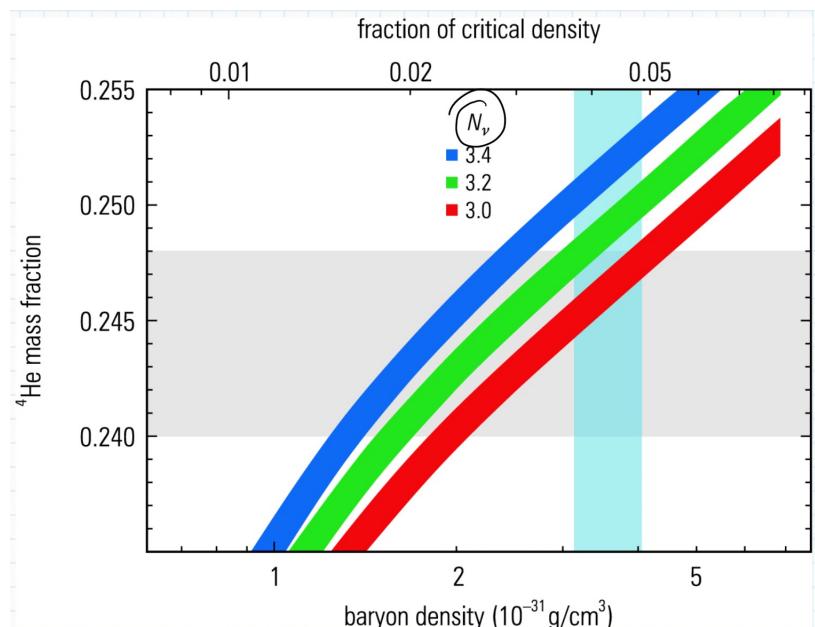


Figura IV.9: La banda grigia rappresenta i dati sperimentali. Data la densità dei barioni si evince che gli andamenti per $N_\nu = 3.4$ e 3.2 vadano esclusi.

4 La BBN oggi

La teoria della BBN a oggi si basa sul modello cosmologico standard ΛCDM ¹⁷.

Di recente $\Omega_B h^2$ è stato misurato dal CMB ed è quindi possibile fare delle stime sulle abbondanze; il d/H , per esempio, che è particolarmente sensibile al valore di Ω_B e a N_ν ¹⁸ e per il

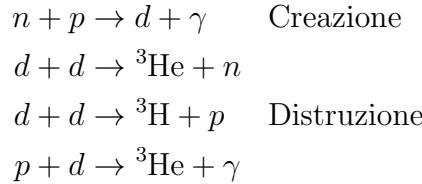
¹⁷L'acronimo:

Λ sta per la costante cosmologica.

CDM sta per *Cold Dark Matter*.

¹⁸Da qui in poi chiameremo N_ν con N_{eff} .

quale abbiamo una serie di reazioni che lo creano e lo distruggono¹⁹:



Quello che si misura effettivamente è il **fattore astrofisico** $S(E)$, che ha le dimensioni di una sezione d'urto per un'energia; si riportano i risultati sperimentali per l'ultima reazione di distruzione in Figura IV.10.

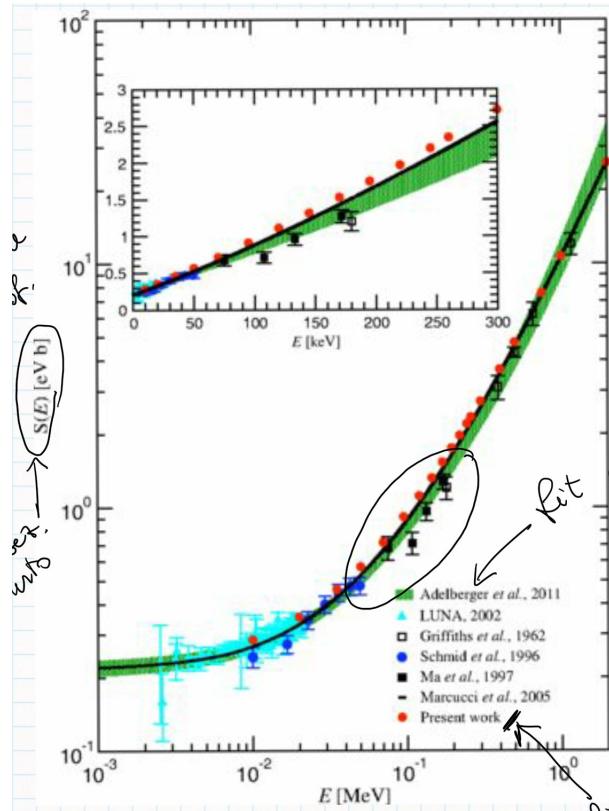


Figura IV.10: La parte cerchiata è il range di interesse per la BBN. La banda verde corrisponde a un fit polinomiale, i punti rossi ad alcuni calcoli teorici e i punti neri ai dati (che rimangono sotto a tutto).

¹⁹Fino al 2020 l'ultima era la più incerta.

Recentemente in Italia si sono fatte altre prese dati grazie all'esperimento LUNA²⁰, che ha raggiunto un'incertezza del 3%. Riportiamo i risultati in Figura IV.11. Rispetto al precedente, il rate di presa dati era molto maggiore e le misure molto più accurate, grazie un codice numerico detto *PArthenope*²¹, che ritorna le funzioni di *likelihood* riportate in Figura IV.12²².

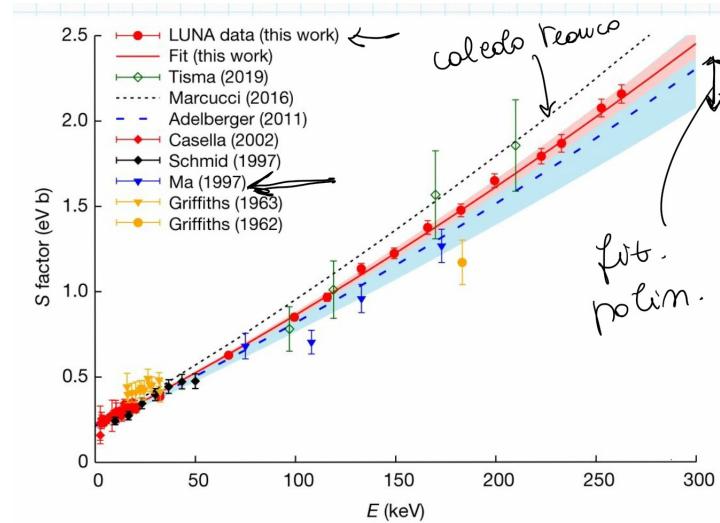


Figura IV.11: I dati blu sono quelli che nella figura precedente erano segnati in nero. Quelli rossi sono i nuovi dati, la banda celeste corrisponde al fit polinomiale e la linea tratteggiata è l'andamento teorico. I dati di Casella 2002 (basse energie) sono quelli di LUNA I, mentre i dati in rosso circolari sono quelli di LUNA II (vedi 1.1.2-*LUNA II*).

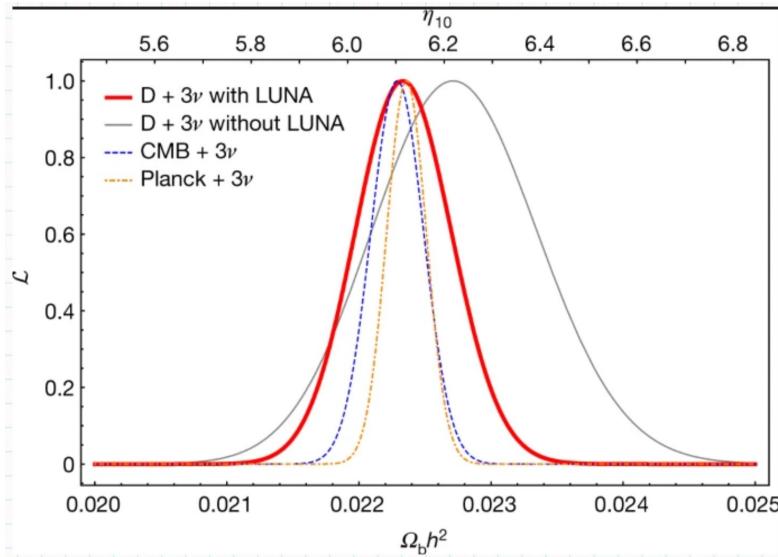


Figura IV.12: Risultati per i vari esperimenti ottenuti tramite *PArthenope*.

²⁰che discuteremo ampiamente nella sezione 1.1-*LUNA*.

²¹Per info: <http://parthenope.na.infn.it>.

²²La differenza tra il calcolo delle linee segnate come *Marcucci* è dovuta alle funzioni d'onda di scattering; si osserva che le misure del 2016 sono più accurate, tuttavia non se ne conosce il motivo.

Dato $\Omega_B h^2$ da Planck, è possibile predire $d/H|_{\text{BBN}} = (2.52 \pm 0.03 \pm 0.06) \cdot 10^{-5}$ da confrontare con il valore Ω_B più probabile ottenuto attraverso l'algoritmo. Riportiamo in Figura IV.13 i risultati di LUNA, che hanno mostrato come non ci sia *nuova fisica* in questo campo: vi è un forte accordo tra il modello standard ΛCDM e la teoria della BBN.

Rimane ancora in sospeso il *Li-problem*, ma le ipotesi più recenti sostengono che probabilmente sia dovuto a un errore nella misurazione dell'abbondanza primordiale del litio.

	$\Omega_b h^2$	$\delta (\%)$	N_{eff}
D + 3ν (without LUNA data)	0.02271 ± 0.00062	2.73	3.045
D + 3ν (with new LUNA data)	0.02233 ± 0.00036	1.61	3.045
CMB + 3ν	$0.02230 \pm 0.00021^{\text{a}}$	0.94	3.045
Planck + 3ν	0.02236 ± 0.00015	0.67	3.045
(D + CMB)	0.02224 ± 0.00022	0.99	2.95 ± 0.22
(D + Y_p)	0.0221 ± 0.0006	2.71	$2.86^{+0.28}_{-0.27}$

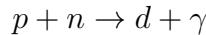
The first two lines show the results obtained from the likelihood analyses performed in this study, without and with the new D(p, γ)³He S factor obtained at LUNA and with N_{eff} fixed to its standard value^{23,24} of 3.045. The third and fourth lines show results obtained, respectively, using CMB data alone¹² (CMB + 3ν) and CMB data combined with the theoretical dependence of primordial ⁴He on baryon density⁷ (Planck + 3ν). The last two lines correspond to cases in which both $\Omega_b h^2$ and N_{eff} are left as free parameters and the likelihood functions are constrained by either the deuterium abundance and a prior distribution on $\Omega_b h^2$, (D + CMB) case, or the observed and predicted abundances of both deuterium and helium, (D + Y_p) case (in both cases the predicted deuterium abundance takes into account our new LUNA results; see [Methods](#) for details).

^aQuoted in Fields et al.¹² as 0.022298 ± 0.000214 .

Figura IV.13: Risultati di LUNA. Nei casi delle ultime due righe è stata rilasciato il numero di neutrini, precedentemente fissato dall'abbondanza di elio.

5 La prima reazione

Dopo il decadimento del neutrone, la prima reazione che avviene (secondo la Figura IV.4) è:



Tra le reazioni del network questa è la più “semplice”, ovvero $A = 2$.

5.1 Cinematica

Studiamo allora la sezione d’urto di questa reazione:

$$d\sigma \stackrel{\text{Reg. d’Oro}}{=} \frac{\text{Probabilità di transizione}}{\text{Flusso incidente}} = \frac{\lambda}{v_{\text{rel}}}$$

Concentriamoci sulla probabilità di transizione $W_{i \rightarrow f}$, mettendoci nel sistema del centro di massa²³.

$$W_{i \rightarrow f} = |V_{i \rightarrow f}|^2 dn \quad \text{con } dn = \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_d}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_d + \vec{q}) \Rightarrow \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$$

dove $V_{i \rightarrow f}$ è l’elemento di matrice di transizione, T è il tempo di interazione e dn è l’elemento infinitesimo di spazio delle fasi (in cui abbiamo risolto per la δ). Dalla teoria perturbativa al primo ordine:

$$V_{f \rightarrow i} = -i \int_0^T \langle f | V(t) | i \rangle e^{i(E-f-E_i)t} dt \quad \text{dove } V(t) = -e \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x})$$

²³Usiamo la solita convenzione $c = \hbar = 1$, la notazione \vec{q} per l’impulso del fotone e \vec{P}_d per quello del deuterio e assumiamo volumi unitari.

$$\begin{aligned}
\langle f | V(t) | i \rangle &= - \int d^3x \langle \gamma | \vec{A}(\vec{x}) | 0 \rangle \cdot \langle d(\vec{P}_d, \sigma_d) | \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle = \\
&= -e \int \frac{\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda)}{\sqrt{2q}} \cdot \underbrace{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle d | \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle d^3x}_{\text{Definiamo questo } \vec{J}^+(\vec{q})} = \\
&= -\frac{e}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})
\end{aligned}$$

dove abbiamo assunto $\omega = E = q$. Per cui sostituendo nell'espressione dell'elemento matriciale:

$$\begin{aligned}
V_{i \rightarrow f} &= \frac{ie}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t} \\
\frac{|V_{f \rightarrow i}|^2}{T} &= \frac{e^2}{2q} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 2\pi\delta(E_i - E_f)
\end{aligned}$$

La δ rappresenta la conservazione dell'energia.

Possiamo allora scrivere la sezione d'urto differenziale:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{e^2}{2} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 q dq \frac{d\Omega_{\hat{q}}}{(2\pi)^2} \delta(E_i - E_f) \frac{1}{v_{rel}} \\
\frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{8\pi^2} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 q dq \delta(E_p + E_n - m_d - \frac{q^2}{2m_d} - q) \frac{1}{v_{rel}}
\end{aligned}$$

Poiché vogliamo che la sezione d'urto sia mediata su tutte le polarizzazioni sommiamo su tutte quelle finali $\sum_{\lambda=\pm 1, \sigma_d=\pm 1,0}$ e mediamo su quelle iniziali $\frac{1}{4} \sum_{\sigma_n, \sigma_p=\pm \frac{1}{2}}$, per cui:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{8\pi v_{rel}} \sum_{\lambda=\pm 1, s_d=\pm 1,0} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}} \int q dq |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 \frac{\delta(q - \bar{q})}{1 + \frac{\bar{q}}{m_d}} \\
\frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{8\pi v_{rel}} \sum_{\lambda=\pm 1, s_d=\pm 1,0} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 \frac{\bar{q}}{1 + \frac{\bar{q}}{m_d}}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà della δ ²⁴, per cui $\bar{q} = m_d \left(-1 + \sqrt{1 + 2\Delta E/m_d} \right)$ con $\Delta E = E_p + E_n - m_d \stackrel{\text{CM}}{=} m_n + m_p - m_d + T_{rel}$. Notiamo che questa espressione è simile a quella del decadimento γ , infatti questo formalismo²⁵ vale per ogni decadimento del tipo $a + b \rightarrow c + \gamma$. Notiamo che $\sigma \propto 1/v_{rel} \sim 1/\sqrt{T_{rel}}$ ed è quindi l'energia cinetica relativa che fa da discriminante per far avvenire la reazione; questo andamento si ritrova in generale a basse energie per $n + a$.

5.2 Funzioni d'onda

Finora abbiamo trattato solo la cinematica della reazione, per continuare è necessario sviluppare le funzioni d'onda²⁶.

$$\begin{aligned}
&\left| \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \right|^2 = \\
&= \left| \left\langle d \mid \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}(\vec{x}) \mid pn \right\rangle \right|^2 = \\
&= \left| \left\langle \psi_{1s_d} \mid J_\lambda(\vec{q}) \mid \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \right\rangle \right|^2
\end{aligned}$$

²⁴

$$\delta(f(q)) = \sum_{i=0}^N \frac{\delta(q - \bar{q}_i)}{|f'(\bar{q}_i)|}$$

con \bar{q}_i zeri della funzione f .

²⁵Ovvero potremo sempre scrivere $d\sigma/d\Omega_{\hat{q}} \propto 1/(8\pi v_{rel}) \sum \sum |\dots|^2 \bar{q}/(1 + \bar{q}/m_c)$.

²⁶Da qui in poi, ovviamente, i risultati trovati non varranno per ogni $a + b \rightarrow c + \gamma$.

per $\psi_{s_p s_n}(\vec{p})$ ci aspetteremo dei multipoli come avevamo visto nel decadimento γ . Per $\hat{\varepsilon}$ consideriamo polarizzazione circolare:

$$\hat{\varepsilon}(\lambda) = \mp \frac{\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y}{\sqrt{2}} \quad \text{con } \vec{q}/\hat{z}$$

Dal momento che \vec{J} per gli stati iniziali non è ben definito non possiamo usare immediatamente l'espansione in multipoli, per cui prima sviluppiamo le funzioni d'onda in onde parziali²⁷:

$$\begin{aligned} \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) &= 4\pi \sum_{S, S_z} \left\langle \frac{1}{2} s_n, \frac{1}{2} s_p | S S_z \right\rangle \sum_{L, L_z, \Lambda, \Lambda_z} \left\langle S S_z, LL_z | \Lambda \Lambda_z \right\rangle i^L \mathcal{Y}_{LL_z}^*(\vec{p}) \psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)} \\ \langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \rangle &= 4\pi (\dots) \langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)} \rangle \end{aligned}$$

$\psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)}$ ha Λ ben definito, quindi è un'ottima candidata per l'espansione in multipoli. Poiché le energie sono basse²⁸, possiamo allora considerare solo 1S_0 ($S = L = \Lambda = 0$), ovvero le onde sferiche:

$$\begin{aligned} \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) &= 4\pi \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}_{\text{Arm. sfer.}} \psi_{np}({}^1S_0) \\ \langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \rangle &\equiv \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{({}^1S_0)}(\vec{q}) \\ j_{\lambda s_d}^{({}^1S_0)}(\vec{q}) &\equiv \left\langle \psi_{1s_d} | \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}(\vec{x}) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle = \\ &= -\sqrt{2\pi} \sum_{\Lambda' \geq 1} (-i)^{\Lambda'} \sqrt{2\Lambda' + 1} \langle \psi_{1s_d} | E_{\Lambda'-\lambda}(q) + \lambda M_{\Lambda'-\lambda}(q) | \psi_{np}({}^1S_0) \rangle \end{aligned}$$

dove abbiamo prima definito $j_{\lambda s_d}^{({}^1S_0)}(\vec{q})$ e poi sviluppato in multipoli come nel decadimento γ ²⁹ (chiamando Λ' l'ordine del multipolo per distinguerlo da Λ). La parità dei singoli termini è data da $\pi(E\Lambda) = (-1)^\Lambda$ e $\pi(M\Lambda) = (-1)^{\Lambda+1}$, per cui, poiché deve valere $\vec{\Lambda} + \vec{J}_i = \vec{J}_f$ ³⁰, per $J_f = 1$, $J_i = 0$ e $\pi_i = \pi_f = +$ allora $\Lambda = 1$ e solo $M1$ sarà rilevata ai fini del calcolo al primo ordine:

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{({}^1S_0)}(\vec{q}) &= \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle \left\langle \psi_{1s_d} | -\sqrt{2\pi}(-i)\sqrt{3}(\lambda M_{1-\lambda}(q)) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle \\ j_{\lambda s_d}^{({}^1S_0)}(\vec{q}) &\simeq i\sqrt{6\pi}\lambda \langle \psi_{1s_d} | M_{1-\lambda} | \psi_{np}({}^1S_0) \rangle = \\ &= i\sqrt{6\pi}\lambda \underbrace{\frac{\langle 00, 1-\lambda | 1s_d \rangle}{\sqrt{1}}}_{\text{Dal teo. di W-E}} \underbrace{\langle \psi_{1s_d} || M_1 || \psi_{np}({}^1S_0) \rangle}_{\text{El. di matrice ridotta}} = \\ &= i\sqrt{6\pi}\lambda \delta_{-\lambda s_d} |M_1(q)| \end{aligned}$$

dove abbiamo trascurato il segno di λ perché siamo interessati alla somma su tutte le polarizzazioni (per cui $\sum_{\lambda=\pm 1}$) e abbiamo applicato il teorema di Wigner-Eckart.

$$\sum_{s_n s_p, \lambda s_d} |\sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{({}^1S_0)}(\vec{q})|^2 = 4\pi \underbrace{\sum_{s_n s_p} |\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \rangle|^2}_{=1} \sum_{\lambda s_d} 6\pi \delta_{\lambda s_d} |M_1|^2 = 48\pi^2 |M_1|^2$$

²⁷Per non confondere J corrente con J momento denoteremo quest'ultimo con la lettera Λ .

²⁸Stiamo considerando una cattura termica con neutroni, appunto, termici.

²⁹Guarda 2.2 - Trattazione quantistica.

³⁰Qui con J si indica il momento angolare totale e con Λ quello del fotone e quindi l'ordine di multipolo.

dove abbiamo usato $\sum_{\lambda s_d} \delta_{\lambda s_d} = \delta_{11} + \delta_{-1-1} = 2$. Dobbiamo calcolare $M_1(q)$, ma dal momento che questo non dipende da λ possiamo stimarlo per qualsiasi valore di λ (per esempio $\lambda = -1$):

$$\begin{aligned} j_{-\lambda\lambda}^{1S_0} &= i\sqrt{6\pi}\lambda M_1(q) \\ M_1(q) &= \frac{-i}{\sqrt{6\pi}} j_{-\lambda\lambda}^{1S_0}(\vec{q}) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\vec{q}}} &\propto \frac{1}{v_{rel}} \frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}/m_d} |j_{-\lambda\lambda}^{1S_0}(\vec{q})|^2 \\ \sigma_{tot} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega_{\vec{q}}} d\Omega_{\vec{q}} \propto \frac{4\pi}{v_{rel}} \frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}/m_d} |j_{-\lambda\lambda}^{1S_0}(\vec{q})|^2 \end{aligned}$$

Abbiamo così isolato la parte nucleare e il problema si riduce al calcolo di $j_{-11}^{1S_0}$:

$$j_{-11}^{1S_0} = \int d^3r_1 d^3r_2 \psi_{11}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \vec{J}_{-1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \psi^{1S_0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

A questo punto abbiamo bisogno della funzione d'onda del deutone, di quella di scattering np , del potenziale nucleare e di un metodo numerico che risolva l'equazione di Schrödinger sia per lo stato legato che per quello di scattering. Questo non è però sufficiente, è necessario anche un modello per la corrente elettromagnetica³¹ e ne avevamo uno:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\lambda,i} &= \frac{1}{2m} \underbrace{\varepsilon_i \left\{ \vec{p}_i, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \right\}}_{\text{corrente di convezione}} - \frac{i}{2m} \mu_i \vec{q} \times \vec{\sigma}_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \\ \varepsilon_i &\simeq \frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i}) \\ \mu_i &\simeq \frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i})\mu_p + \frac{1}{2}(1 - \tau_{z,i})\mu_n = \frac{1}{2}(\mu_S + \mu_V \tau_{z,i}) \end{aligned}$$

dove ε_i e μ_i sono proiettori e $\mu_S = \mu_p + \mu_n = 0.88 \mu_N$ e $\mu_V = \mu_p - \mu_n = 4.706 \mu_N$ sono rispettivamente la combinazione isoscalare e quella vettoriale. In generale, l'integrale scritto precedentemente per $j_{11}^{1S_0}$ viene risolto numericamente in $d^3r_{rel} d^3r_{CM}$, ma dal momento che siamo interessati alla soluzione analitica e ci troviamo nel caso di basse energie (cattura di neutroni termici, quindi $\vec{p}_i \sim 0$, corrente di convezione trascurabile) possiamo studiare solo l'onda s ³²:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u(r)}{r} \chi_{11} \zeta_{00} \right]}_{\text{deutone fermo}} e^{-i\vec{p}_d \cdot \vec{R}} \\ \psi^{1S_0} &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_S(r)}{r} \chi_{00} \zeta_{10} \right]}_{\text{moto}} e^{-i\vec{p}_{CM} \cdot \vec{R}} \end{aligned}$$

³¹Attenzione: in $J_{\lambda,i}$ l'indice i indica l' i -esimo nucleone e non ha niente a che vedere con il momento angolare totale iniziale. Si invita il lettore da qui in poi a cercare di capire dal contesto il significato delle notazioni.

³²Abbiamo indicato con χ la funzione di *spin* e con ζ quella di *isospin*:

$$\begin{aligned} \zeta_{00} &= \frac{|np\rangle - |pn\rangle}{\sqrt{2}} & \chi_{11} &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ \zeta_{10} &= \frac{|np\rangle + |pn\rangle}{\sqrt{2}} & \chi_{00} &= \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La corrente sarà quindi data da:

$$\vec{J}_i = -\frac{i}{2m} \mu_i \vec{q} \times \vec{\sigma}_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i}$$

Notiamo che $\zeta_{00}^+ \mu_S \zeta_{10} = 0$ perché le due funzioni sono ortogonali fra loro, dunque sopravvive solo il pezzo con μ_V nella corrente:

$$\vec{J}_{\lambda=-1} = -\frac{i}{4m} \mu_V \left[(\vec{q} \times \vec{\sigma}_1)_{\lambda=-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} \tau_{z,1} + (\vec{q} \times \vec{\sigma}_2)_{\lambda=-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} \tau_{z,2} \right]$$

Studiamo adesso la componente del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} (\vec{q} \times \vec{\sigma}_i)_{\lambda=-1} &= \hat{\varepsilon}_{\lambda=-1}^* \cdot \vec{q} \times \vec{\sigma}_i = \\ &= -(\hat{\varepsilon}_{\lambda=+1} \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_i = \\ &= -\left(-\frac{\hat{e}_x + i\hat{e}_y}{\sqrt{2}} \times q\hat{e}_z\right) \cdot \vec{\sigma}_i = \\ &= i\frac{q}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \cdot (\sigma_{x,i} \hat{e}_x + \sigma_{y,i} \hat{e}_y) = \\ &= i\frac{q}{\sqrt{2}} \sigma_{+,i} = \\ &= i\sqrt{2} q s_{+,i} \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $\sigma_x + i\sigma_y = \sigma_+ = 2s_+$ operatore di salita³³; per la corrente avremo allora:

$$\vec{J}_{\lambda=-1} = \frac{q\sqrt{2}}{4m} \mu_V \left[e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} s_{+,1} \tau_{z,1} + e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} s_{+,2} \tau_{z,2} \right]$$

Nel calcolo di j^{1S_0} abbiamo:

$$\begin{aligned} j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) &= \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V \sqrt{2}q}{4m} \right) e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM}) \cdot \vec{R}} \left[\chi_{11}^+ \zeta_{00}^+ s_{+,1} \tau_{z,1} \chi_{00} \zeta_{10} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} \right. \\ &\quad \left. + \chi_{11}^+ \zeta_{00}^+ s_{+,2} \tau_{z,2} \chi_{00} \zeta_{10} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{00}^+ \tau_{z,1} \zeta_{10} &= \frac{-1 - 1}{2} = -1 & \chi_{11}^+ s_{+,1} \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \zeta_{00}^+ \tau_{z,2} \zeta_{10} &= \frac{1 + 1}{2} = 1 & \chi_{11}^+ s_{+,2} \chi_{00} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) = \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V \sqrt{2}q}{4m} \right) e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM}) \cdot \vec{R}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} + e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2})$$

dove $u(r)$ è la funzione ridotta del deutone e $u_S(r)$ è quella della funzione di scattering. Cambiamo variabili³⁴ per cui $\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}/2$ e $\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r}/2$:

$$j_{11}^{1S_0}(\vec{q}) = \int d^3 R d^3 r \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V q}{4m} \right) \underbrace{e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM} + \vec{q}) \cdot \vec{R}}}_{\delta \text{ per } \vec{p}_d - \vec{p}_{CM} + \vec{q}} \left[e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/2} + e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/2} \right]$$

³³Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} s_+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle & \tau_z |p\rangle &= |p\rangle \\ s_+ |\uparrow\rangle &= 0 & \tau_z |n\rangle &= -|n\rangle \end{aligned}$$

³⁴ $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ e $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

L'ultimo termine tra parentesi è simmetrico rispetto a parità $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ e dal momento che la funzione del deutone si annulla per grandi raggi allora $\langle \vec{q} \cdot \vec{r} \rangle \sim 0$ e quindi $\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}/2) \sim 1$.

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha}{v_{rel}} \frac{\mu_V^2 q^3}{4m^2} \left| \int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) \right|^2$$

Riassunto

1. Studio della cinetica: è generale e porta all'elemento di matrice ridotta e alla corrente.
2. Modello di corrente nucleare.
3. Approssimazioni per risoluzione analitica³⁵.

5.2.1 Buca di potenziale

Riprendiamo il calcolo analitico della reazione di scattering tra protone e neutrone scegliendo per $u(r)$ e $u_S(r)$ una buca di potenziale. Partiamo dal deutone:

$$u(r) = \begin{cases} C_> e^{-\alpha r} & r > r_0 \\ C_< \sin k_0 r & r < r_0 \end{cases}$$

con $\alpha \equiv \sqrt{mB_d}$ e $k_0 \equiv \sqrt{m(V_0 - B_d)}$ e i valori $r_0 \simeq 2$ fm, $V_0 = 35$ MeV e $B_d \simeq 2.2$ MeV. Dalla continuità $C_> e^{-\alpha r_0} = C_< \sin k_0 r_0$ e dalla normalizzazione:

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3r \left(\frac{u(r)}{r} \right)^2 \frac{1}{4\pi} = \int dr (u(r))^2 = \\ &= \int_0^{r_0} C_<^2 \sin^2 k_0 r dr + \int_{r_0}^{+\infty} C_>^2 e^{-2\alpha r} dr = \\ &= C_<^2 \frac{r_0}{2} - \frac{\sin 2k_0 r_0}{2k_0} + C_>^2 \frac{e^{-2\alpha r_0}}{2\alpha} \end{aligned}$$

è possibile trovare le due costanti $C_>$ e $C_<$; riportiamo solo $C_>$:

$$C_> = \sqrt{\frac{2e^{2\alpha r_0}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sin^2 k_0 r_0} \left(r_0 - \frac{\sin 2k_0 r_0}{2k_0} \right)}}$$

Per quanto riguarda invece l'onda di scattering:

$$\frac{u_S(r)}{r} = \begin{cases} \frac{1}{r} C_>^S \sin(kr + \delta) & r > r_0 \\ \frac{1}{r} C_<^S \sin k_1 r & r < r_0 \end{cases}$$

con δ sfasamento, $k = \sqrt{mE}$ e $k_1 \equiv \sqrt{m(E + V_0)} \rightarrow \sqrt{mV_0}$ per basse energie ($E \ll 1$). Dalla teoria dello scattering sappiamo che l'andamento asintotico per $r > r_0$ è $1 - a_S/r$ dove a_S è la lunghezza di scattering che per il canale 1S_0 è pari a circa -24 fm; la continuità impone quindi che

$$\frac{C_<^S}{r_0} \sin k_1 r_0 = 1 - \frac{a_S}{r_0} \Rightarrow C_<^S = \frac{r_0 - a_S}{\sin k_1 r_0}$$

³⁵Le elencheremo successivamente

Possiamo allora valutare l'integrale nell'espressione della sezione d'urto totale:

$$\int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) = \int_0^{r_0} dr C_> \frac{e^{-\alpha r_0}}{\sin k_0 r_0} \sin k_0 r C_<^S \sin k_1 r dr + \int_{r_0}^{+\infty} C_> e^{-\alpha r} (r - a_S) dr$$

$$\sigma = \frac{e^2}{v_{rel}} \frac{\mu_V^2 q^3}{4m^2} \left| \int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) \right|^2 \simeq 0.184 \text{ b}$$

Ricapitoliamo le approssimazioni fatte:

- Abbiamo trascurato \vec{J}_{conv} .
- Abbiamo considerato solo l'onda s nel deutone.
- $\langle \vec{q} \cdot \vec{r} \rangle \sim 0$ per cui $\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \sim 1$.
- Abbiamo usato buche di potenziale per u e u_S .

5.2.2 Meson-Exchange Currents

Osserviamo che il dato sperimentale $\sigma_{exp} \simeq 0.334 \text{ b}$ si discosta da quello teorico e ciò è dovuto appunto alle approssimazioni fatte, in particolare aver trascurato i termini di onda d per il deutone. Nel calcolo della sezione d'urto, infatti, si ha un *overlap* di due funzioni d'onda 3S_1 e 1S_0 , che sono collegate allo stato di scattering del pn e ortogonali perché corrispondono a stati differenti; è proprio questa ortogonalità che “pompa” i termini piccoli³⁶ come 3D_1 . Tuttavia, questa approssimazione porta un contributo del 4% ed è insolito che comporti un fattore 2 nel risultato; infatti anche rilasciando tutte quante le ipotesi fatte otteniamo $\sigma_{tot} \simeq 0.303 \text{ b}$. La spiegazione di questa discrepanza di circa il 10% è legata alle *meson-exchange currents*. Un'argomentazione *naïf* per descrivere il fenomeno consiste nello studio della corrente totale:

$$\vec{J}(\vec{q}) = \sum_i (\vec{J}_{C,i} + \vec{J}_{M,i})$$

dove la sommatoria è estesa prima al caso in cui l'interazione è tra fotone e protone con neutrone spettatore e successivamente tra fotone e neutrone con protone spettatore. Abbiamo quindi trascurato l'interazione nucleare tra protone e neutrone durante il processo, che interpretiamo come uno scambio di mesoni (tipo pioni π); il fotone può allora interagire con il pion carico π^\pm e questo porta un termine di corrente a due corpi³⁷ \vec{J}_{ij}^{MEC} ³⁸ nella corrente totale, contribuendo a fornire per la sezione d'urto teorica un valore pari a 0.333 b.

Un metodo più rigoroso per mostrare la necessità di questo termine si sviluppa dalla conservazione della carica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

dove $\rho = \rho_1 + \rho_2$ e $\vec{J}(\vec{x}) = \int \vec{J}(\vec{q}) \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x}) d^3q$. Ricordando che la derivata temporale è legata al commutatore con l'hamiltoniana e osservando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \vec{q} \cdot \vec{J}(\vec{q})$ allora si ha:

$$\vec{q} \cdot \vec{J}(\vec{q}) \propto [H, \rho]$$

³⁶Questa situazione è simile a quella che avevamo incontrato per il decadimento β , quando avevamo fatto l'approssimazione di transizione permessa ($\phi_\nu^* \sim 1$).

³⁷Fu ipotizzata per la prima volta proprio nella risoluzione di questo problema.

³⁸MEC sta appunto per *meson-exchange current*.

con $H = T + V_{12}$ ³⁹.

$$\begin{aligned}\vec{q} \cdot \vec{J} &\propto [T + V_{12}, \rho_1 + \rho_2] = \\ &= [T, \rho_1 + \rho_2] + [V_{12}, \rho_1 + \rho_2]\end{aligned}$$

Se non si considera un termine di accoppiamento nell'espressione della corrente è possibile mostrare che il prodotto scalare a sinistra è proporzionale solo al commutatore dell'energia cinetica; ciò implica necessariamente che debba esistere $\vec{q} \cdot \vec{J}_{12}^{MEC} \propto [V, \rho]$ e dalle osservazioni intuiamo che debbano valere tra 0.30 e 0.33.

³⁹Ricordiamo che

$$T = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2m}$$

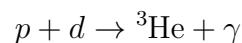
5.3 Una parentesi: Metodo *ab-initio*

Riassumiamo tutto quello che abbiamo fatto:

- 1 Studio della cinematica → Integrale ψ_i, ψ_f, \vec{J} .
- 2 Calcolo delle funzioni d'onda → Necessario conoscere V_{12} e un metodo numerico accurato per risolvere l'equazione di Schrödinger.
- 3 Considerare un modello “realistico” per \vec{J} → Introdurre il termine di corrente a due corpi \vec{J}_{ij}^{MEC} .
- 4 Risultato → Ottengo una predizione per σ .

Questo metodo che parte da un'espressione del potenziale e della corrente conosciuta e ben testata e permette di ricavare una predizione viene definito *ab-initio*.

Consideriamo ora un problema a 2 corpi con 3 nucleoni ($A = 3$), per esempio:



Come anticipato la cinematica è la stessa dello *scattering pn*, ma in questo caso abbiamo difficoltà nel calcolo dell'espressione per V_{12} , infatti si ha una differenza di circa 1 MeV tra l'energia di legame attesa e quella misurata del ${}^3\text{He}$ ⁴⁰. Per risolvere questa discrepanza è necessario introdurre un termine di interazione a 3 corpi V_{123} ⁴¹, ma rimane comunque l'equazione di Schrödinger le cui soluzioni per $A = 3$ non sono semplici. Proprio questo è il difetto del metodo *ab-initio*: è limitato dalle tecniche numeriche per il calcolo di ψ_{in} e ψ_{out} . Nel caso di $A = 3$, come il nostro, esiste un metodo inventato a Pisa detto *Metodo delle Armoniche Ipersferiche*, che permette anche di lavorare con $A = 4$ e si sta sviluppando per raggiungere $A = 6$.

Per quanto riguarda la corrente, avremo anche un termine a 3 corpi:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i + \sum_{i < j} \vec{J}_{ij} + \sum_{i < j < k} \vec{J}_{ijk}$$

fortunatamente questo termine, per cui esiste un metodo di sviluppo, non contribuisce particolarmente al risultato.

I metodi *ab-initio*, quindi, sono generali e non necessitano di “aggiustare” valori per ottenere le corrette relazioni, tuttavia richiedono una struttura teorica alla base che diviene sempre più complessa al crescere di A ⁴².

⁴⁰Nello specifico: $B({}^3\text{He}) \sim 6.5 \div 6.9$ MeV contro il valore osservato $B^{oss}({}^3\text{He}) \sim 7.75$ MeV.

⁴¹Non si risolve comunque totalmente le difficoltà, dal momento che, nonostante i modelli siano studiati sin dagli anni '50, tuttora il campo dell'interazione a 3 corpi è un ambito di ricerca ancora aperto.

⁴²Vedremo nei capitoli successivi altri metodi per questi casi.

Capitolo V

La catena protone-protone

In questo capitolo studiamo la nucleosintesi stellare tramite la catena protone-protone, con *focus* sul problema dei neutrini solari e sullo studio *ab-initio* della reazione $p + p$; inoltre vengono approfonditi gli elementi di analisi quali il fattore astrofisico, le risonanze e l'elettroscreening. Il capitolo copre le lezioni 18/03/2021, 22/03/2021, 24/03/2021, 25/03/2021, 29/03/2021, 31/03/2021

Introduzione Dopo questa breve digressione torniamo alla BBN: a circa $4 \cdot 10^5$ anni dal *Big Bang* l'energia degli elettroni è abbastanza bassa ($T \sim 10^3$ K ovvero $kT \sim 0.1$ eV) per legarsi in atomi e questo segna il disaccoppiamento dalla radiazione e la nascita del CMB; successivamente a 10^9 anni dal *Big Bang* si ha la formazione delle prime stelle e galassie. A questo punto ci concentreremo sulla nucleosintesi stellare.

Dentro il Sole: alcuni valori

- $T_{sup} \sim 6000$ K
- $T_{int} \sim 1.5 \cdot 10^7$ K
- $R_{\odot} \sim 7 \cdot 10^8$ m
- $M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{30}$ kg
- $L_{\odot} \sim 3.8 \cdot 10^{26}$ W
- $X \sim 70\%$, $Y \sim 29\%$, $Z \sim 1\%^1$.

È necessario “invocare” la nucleosintesi perché la sola energia gravitazionale non è sufficiente a sostenere la struttura per le quantità di tempo osservate, infatti si avrebbe:

$$\tau_{\odot}^g = \frac{\text{Energia disponibile}}{L_{\odot}} \simeq \frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot} L_{\odot}} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ y} \ll \tau_{\odot}^{oss}$$

Usando per esempio la $4p \rightarrow {}^4\text{He}$ detta appunto **catena protone-protone** si ha un'energia rilasciata legata alla differenza di massa: $\Delta m = 4m_p - m_{\text{He}} \simeq 4 \cdot (1.0078 \text{ u}) - 4.0026 \text{ u} = 0.029 \text{ u} \simeq 0.7\%$ della massa iniziale, per cui

$$\tau_{\odot}^{pp} \sim \frac{0.007 \cdot 0.1 M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \simeq 10^{10} \text{ y ordine di } \tau_{\odot}^{oss}$$

dove abbiamo supposto che il 10% della massa solare venga fusa.

¹Con X, Y, Z si intende rispettivamente la frazione su massa di idrogeno, di elio e la metallicità

1 Una prima occhiata

In termini puramente energetici:

$$\Delta mc^2 = (4m_p - m_{\text{He}})c^2 \simeq 4 \cdot 938.3 - 2 \cdot 938.3 - 2 \cdot 939.6 + \underbrace{B_{\text{He}}}_{28} \sim 26 \text{ MeV}$$

Riportiamo in Figura V.1 uno schema per la catena pp con alcune delle varie diramazioni possibili.

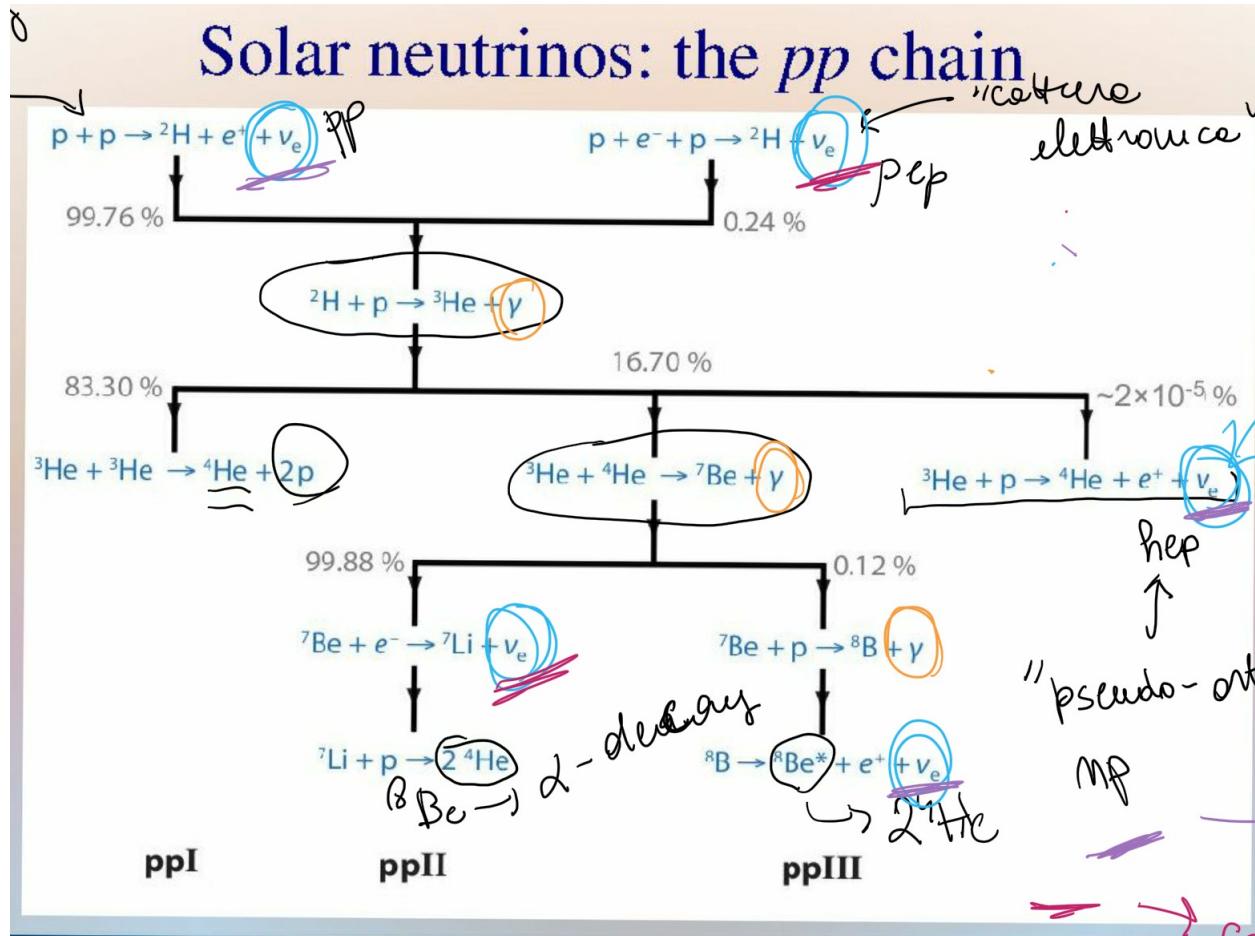


Figura V.1: Schema della catena protone-protone. In celeste sono stati cerchiati i neutrini prodotti, di cui quelli sottolineati in viola hanno spettro continuo, mentre quelli sottolineati in magenta hanno spettro a riga. In arancione sono cerchiati i fotoni prodotti. In nero sono cerchiati i decadimenti α del ^8Be .

- **Prima reazione:** poiché non esiste uno stato legato per $p+p$ si ha prima un decadimento (tipo β^+) $p \rightarrow n$ e poi $p+n$. Osserviamo che la prima reazione è debole ed è un processo di cattura di 2 protoni. Esiste anche la possibilità di un'altra reazione, chiamata *pep*, $p + e^- + p$ che assomiglia a una cattura elettronica, ma essendo una reazione a 3 corpi è molto meno probabile della *pp*.
- **Seconda reazione:** in questo caso si ha una sola reazione possibile con interazione elettromagnetica, quindi si forma velocemente ^3He .
- **Canale ppI:** intuitivamente si sarebbe portati a pensare che la reazione $^3\text{He}+p$, detta *hep*, sia favorita dato che ci sono molti protoni e la barriera coulombiana è la più bassa, anche

se è mediata dall'interazione debole; tuttavia questo non accade a causa dell'ortogonalità tra gli stati iniziale e finale (*pseudo-ortogonalità np*), rendendo rilevanti i contributi dei termini agli ordini successivi.

Nemmeno ${}^3\text{He} + d$ va bene, perché questa ha $A = 5$, per cui il primo canale della catena è quella che viene detta catena $pp\text{I}^2$, ovvero ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$.

- **Reazioni successive:** a questo punto si ha una certa abbondanza di ${}^4\text{He}$ (prima troppo esigua) e si “sblocca” così la reazione ${}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ (che era presente anche nella BBN) con una probabilità di circa il 17%. A questo punto ci sono due rami: una cattura o elettronica o radiativa.

Il **canale ppII** è mediato dall'interazione debole, tuttavia è più probabile del **canale ppIII** che è invece mediato dall'interazione elettromagnetica; ciò è dovuto alla differenza nella barriera di potenziale delle due reazioni.

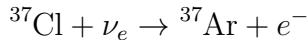
Infine, per quanto riguarda ${}^7\text{Li} + p$ della ppII, in realtà questo è un processo in 2 step: ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^8\text{Be}^* \rightarrow 2\alpha$, dove l'ultimo decadimento è molto veloce.

Indipendentemente dal ramo della catena si ha sempre la produzione di un α da $4p$.

Evidenze sperimentali Ovviamente tale modello necessita di una verifica osservabile. I fotoni confermano la luminosità, ma non dimostrano la necessità della nucleosintesi; sono quindi i neutrini (il cui cammino libero nel Sole è maggiore delle sue dimensioni) le principali evidenze. In particolare, neutrini che derivano da differenti reazioni hanno energie diverse³ e anche distribuzioni diverse⁴.

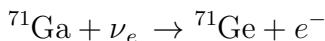
2 Il problema dei neutrini solari

Come anticipato precedentemente, i neutrini sono i miglior candidati per la verifica sperimentale della nucleosintesi; il primo esperimento di verifica fu fatto da Richard Davis nel 1960 e gli valse il premio Nobel: egli ebbe l'idea di studiare in una miniera del Sud Dakota (detta *Homestake*) la reazione



poiché attraverso analisi chimica è possibile contare Ar estratto ed essendo nel sottosuolo l'effetto dei raggi cosmici è attenuato; tuttavia, è necessario avere Cl purissimo. L'esperimento funzionò, i neutrini furono osservati, ma dal momento che la reazione ha una certa energia di soglia ($E_{th} \sim 1$ MeV) perché avvenga gli unici neutrini visibili furono quelli della *pep*, del ${}^8\text{B}$ e della *hep* che come mostrato in Figura V.2 sono i meno numerosi. Il problema principale, però, fu il fatto che il numero di neutrini osservati era circa la metà di quelli previsti.

Inizialmente si imputò questa discrepanza alla natura dell'esperimento per cui ne seguirono altri con reazioni differenti, uno di questi fu GALLEX tra il 1991 al 1997 al Gransasso:



in questo caso l'energia di soglia è $E_{th} \simeq 233.2$ keV (la linea celeste in Figura V.2), quindi vedo molti più neutrini. Il ${}^{71}\text{Ge}$ si estraе attraverso la molecola di ${}^{71}\text{GeH}_4$ e dato che il tempo di dimezzamento del ${}^{71}\text{Ge}$ è di circa 11.43 giorni i neutrini vengono contati dal numero di

²Il Sole ha bruciato finora principalmente con questo canale.

³I neutrini della *hep*, per esempio, sono i più energetici

⁴Quelli che compaiono come uno dei 3 corpi di un prodotto avranno spettro continuo, gli altri avranno una distribuzione a δ .

⁶Si veda la sezione 2-Biciclo CN-NO.

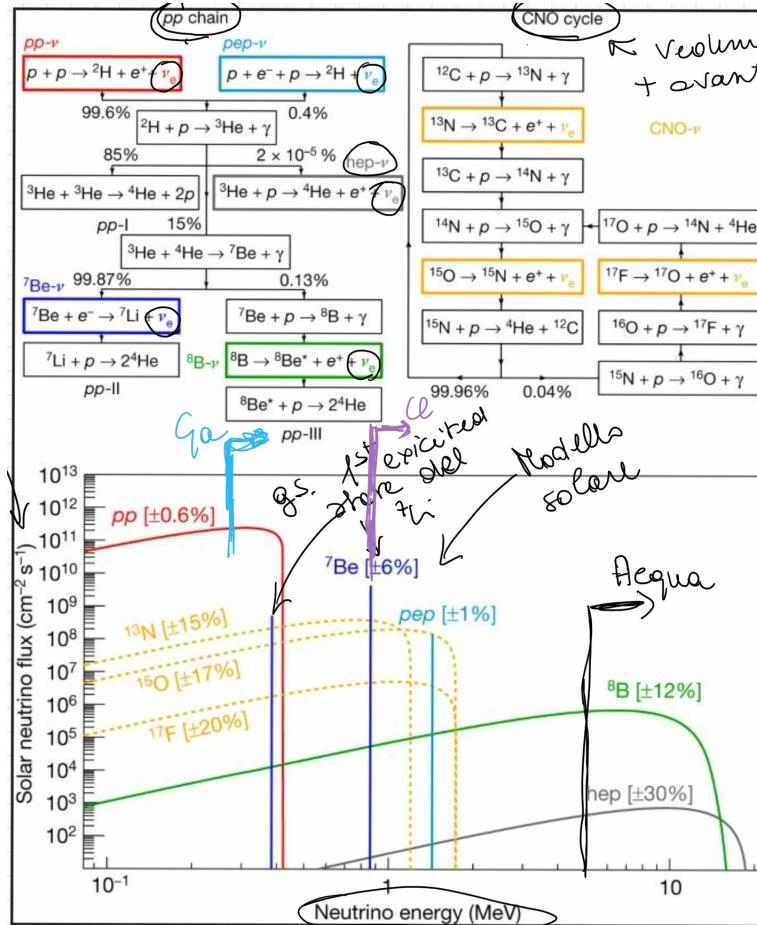


Figura V.2: I due processi di produzione dell'elio nel Sole: la catena *pp* e il biciclo CN-NO⁶. Sotto sono riportati risultati teorici per il vari flussi di neutrini in funzione della loro energia in base alla reazione che li ha prodotti: i rossi, i verdi e i grigi sono uno spettro continuo e il massimo dipende dal fatto che il neutrino è uno di tre corpi; i blu e il turchese sono righe. Ogni flusso ha ovviamente una certa incertezza teorica. La linea viola indica la soglia per l'esperimento di Davis, quella celeste per l'esperimento con il gallio e quella nera per esperimenti con l'acqua. I neutrini del CN-NO hanno tutti uno spettro continuo e sono indicati in giallo.

decadimenti che si osservano. Nonostante i cambiamenti fatti all'apparato sperimentale, il risultato fu la stessa discrepanza. Furono condotti allora esperimenti con rivelatori Čerenkov ad acqua:



Il vantaggio della luce Čerenkov è che è direzionale quindi era possibile determinare con precisione se i neutrini venissero dal Sole; lo svantaggio è che oltre ad avere bisogno di molta acqua purissima gli eventi sono pochi, perché l'elettrone per emettere deve superare una certa soglia e questo impone che il neutrino abbia energia alta (la soglia nera in Figura V.2), per cui si osservano solo quelli del ⁸B e della *hep*. Inoltre, ogni tipo di neutrino può fare tale scattering: i ν_τ e i ν_μ per esempio possono scambiare solo un bosone che sia neutro, quindi, Z^0 , mentre i ν_e oltre a Z^0 dato che $\nu_e \rightarrow e^-$ o $e^- \rightarrow \nu_e$ possono mediare l'interazione anche tramite i bosoni W^\pm . In generale non c'è modo di distinguere un processo dall'altro, ma dal momento che $m_W \ll m_Z$ questa interazione è molto più probabile (quindi ν_e in maggior numero). Passiamo ora alla descrizione⁷ di 3 esperimenti di questo tipo:

⁷Le immagini e i dati sono raccolti nelle slide *Neutrino_flux_exp.pdf*.

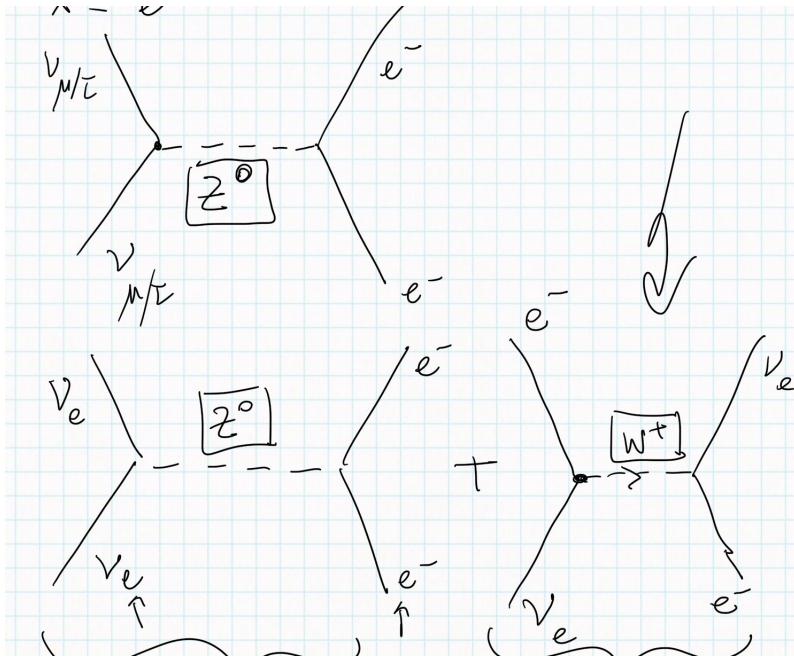


Figura V.3: Rappresentazione schematica dell'interazione nello scattering.

- **Super-Kamiokande (SK):** dal nome della miniera Kamioka in Giappone nella quale è situato è il successore del precedente Kamiokande. Contiene una cisterna di 50,000 tonnellate di acqua costellata di fotomoltiplicatori (maggiormente sensibili ai ν_e) che ne coprono l'intera superficie (circa 11,200).

Potendo acquisire risultati sia di giorno che di notte, SK osservò una differenza nel numero di neutrini nei due momenti del giorno, in particolare $\#\nu_{notte} < \#\nu_{diurno}$. Per la prima volta però si riesce a dare una spiegazione di queste fluttuazioni: assumendo, infatti, che $m_\nu \neq 0$ si può dimostrare che lo stato di neutrino di interazione debole (quindi di un certo *sapore*) può essere descritto come sovrapposizione di due stati di massa differente , ovvero:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= \alpha' |\nu_1\rangle + \beta' |\nu_2\rangle \end{aligned}$$

Lo stato del neutrino di interazione quindi oscilla $|\nu_e\rangle \simeq k|\nu_\mu\rangle$ con una probabilità che dipende dalla distanza percorsa prima dell'osservazione e questo spiega la discrepanza con il numero di neutrini previsti dalla teoria. Tuttavia, SK non poté verificarlo perché nel 2001 durante la manutenzione per la quale viene svuotata la cisterna non si accorsero che un fotomoltiplicatore si era leggermente incrinato e al successivo riempimento, quando il livello era circa a metà, questo fotomoltiplicatore si è rotto; il vuoto al suo interno ha risucchiato l'acqua producendo un'onda d'urto che ha innescato una reazione a catena e ha causando la rottura di 500 fotomoltiplicatori.

Dopo l'incidente i giapponesi iniziarono repentinamente le riparazioni, ma ormai era stato già avviato un altro esperimento in Canada per la verifica della teoria.

- **Sudbury Neutrino Observatory (SNO):** esperimento con rivelatore Čerenkov situato nella miniera Creighton in Canada, sfruttò l'acqua pesante ${}^2\text{H}_2\text{O}$ invece della semplice ${}^{1}\text{H}_2\text{O}$, questo perché oltre allo scattering elastico era possibile anche la reazione⁸ $\nu_e + {}^2\text{H} \rightarrow p + e^- + p$; questa può avvenire solo con ν_e e si distingue da quella dello scattering dalla luce Čerenkov prodotta. Si noti, però, che è anche possibile: $\nu + {}^2\text{H} \rightarrow \nu + p + n$ ovvero scattering elastico. Per tenerne traccia, furono messe delle impurità di ${}^{35}\text{Cl}$ così

⁸Si tratta di una *pep* “al contrario”

che $^{35}\text{Cl} + n \rightarrow ^{36}\text{Cl} + \gamma$, identificabile quindi dai fotoni prodotti. Fu allora possibile contare sia il numero di neutrini elettronici che quello di neutrini generici e si ottenne l'evidenza di accordo con il valore predetto dalla teoria: non era quindi il modello solare a dover essere rivisto, ma quello standard.

- **Borexino:** in ultima battuta diamo uno sguardo anche al contributo italiano nell'ambito di tale ricerca. In quel periodo infatti al Gransasso era stato sistemato un esperimento che si componeva di uno scintillatore in una camera circondato da fotomoltiplicatori. Il vantaggio era quello di avere una soglia per la reazione molto bassa e questo permise a Borexino di verificare che nel Sole erano presenti anche le reazioni pp , ^7Be e pep , come mostrato in Figura V.4.

Una piccola nota dolente: Borexino sarebbe stato capace di verificare l'oscillazione dei neutrini prima dell'esperimento canadese, tuttavia la burocrazia italiana ha ritardato enormemente l'arrivo dei fondi.

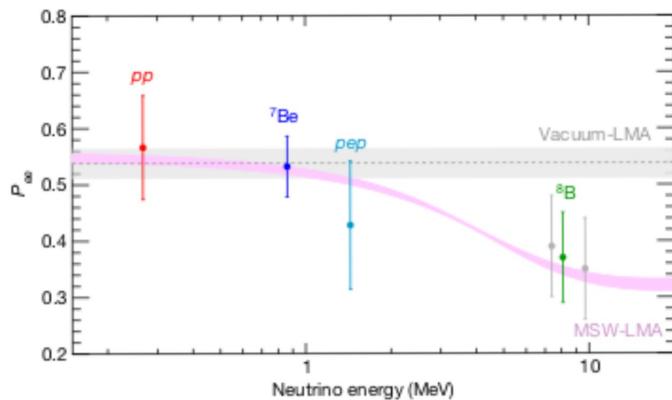


Figura V.4: Probabilità di sopravvivenza del neutrino in funzione della sua energia. I punti sono i risultati ottenuti da Borexino, in rosa la predizione teorica e in grigio il modello con parametri di oscillazione dati dai risultati di SNO.

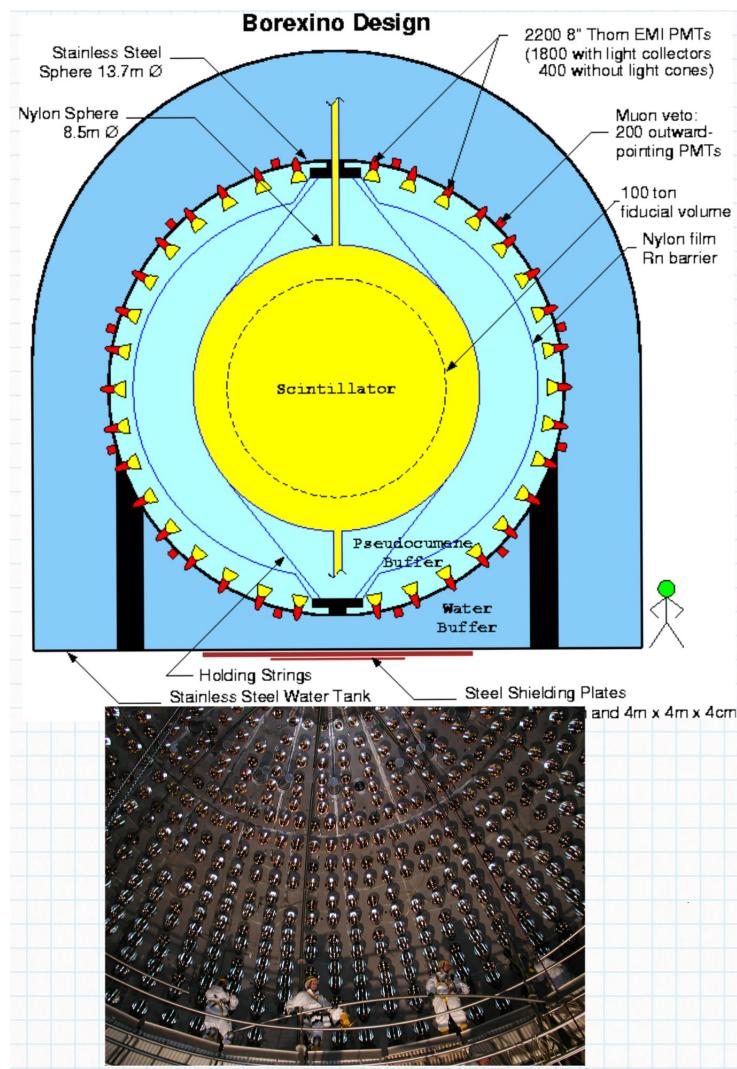


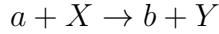
Figura V.5: Schema e foto dell'esperimento Borexino.

3 Elementi di analisi

Introduciamo adesso alcuni elementi essenziali per l'analisi nucleare, che utilizzeremo successivamente nello studio della catena pp .

3.1 Fattore Astrofisico

Consideriamo una generica reazione con particelle (proiettili) che incidono su nuclei (bersagli):



Dall'analisi dimensionale abbiamo per la sezione d'urto:

$$\sigma[L^2] = \frac{\#\text{reazioni/nucleo X/unità di tempo}}{\underbrace{\#\text{proiettili}/L^2/\text{unità di tempo}}_{\text{flusso particelle incidenti}}}$$

Cerchiamo di costruire l'espressione per il *reaction-rate* r : se N_a è la densità numerica dei proiettili, \vec{v} la loro velocità di volo e N_X la densità numerica dei bersagli allora si ha $r = N_a N_X \sigma v$; in generale però potremmo avere $a = X$ e non potendo distinguere tra i due con l'espressione precedente si otterebbe il doppio del *rate* effettivo, per cui:

$$r = \frac{N_a N_X}{1 + \delta_{aX}} \langle \sigma(\vec{v}) v \rangle$$

dove abbiamo mediato sulla distribuzione in velocità, che nel caso stellare è una Maxwelliana $\phi(v)$, poiché in generale non tutti i proiettili avranno velocità \vec{v} . Procedendo con il calcolo:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\vec{v}) v \rangle &= \int_0^\infty \sigma v \phi(v) dv = \\ &= \int_0^\infty \sigma v 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) v^2 dv = \quad \text{sostituendo } E = \frac{1}{2}\mu v^2 \\ &= 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{\mu^2} 2E \sigma(E) e^{-E/kT} dE = \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sigma(E) e^{-E/kT} dE \end{aligned}$$

La dipendenza di σ da E dipende principalmente da tre fattori:

1. La probabilità di attraversamento della barriera Coulombiana.
2. La probabilità di avere un'interazione.
3. La prossimità a una risonanza nucleare.

Tutti e tre infatti dipendono dall'energia. Studiamo prima le reazioni non-risonanti: per il contributo 2. dalla meccanica quantistica sappiamo che la probabilità di interazione è proporzionale a⁹ $\pi\lambda_{DB}^2 \sim p^{-2} \sim E^{-1}$; per il contributo 1. l'espressione è un po' più complessa, ma nel Sole ho tutte particelle cariche quindi:

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \simeq 1.44 \frac{Z_1 Z_2}{r[\text{fm}]} [\text{MeV}] \underset{\text{per } pp}{\sim} 1.44 \text{ MeV}$$

⁹ $\pi\lambda_{DB}^2$ non è altro che la sezione d'urto.

L'energia di agitazione termica media $\langle E \rangle \sim kT \sim 9 \cdot 10^{-8} T[\text{K}] [\text{keV}]$ per la temperatura interna del Sole ($T \sim 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$) è dell'ordine del keV, quindi trascurabile rispetto alla barriera. Valutiamo allora la probabilità di attraversamento per effetto tunnel:

$$\begin{aligned} P &\sim \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) = \\ &= \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}\right) = \\ &= \exp\left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}\right) \end{aligned}$$

detto **fattore di penetrazione di Gamow**. Per quanto riguarda i vari contributi nucleari possiamo raccoglierli tutti in un fattore $S(E)$ che chiamiamo **fattore astrofisico**; abbiamo allora:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \exp\left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}\right) S(E)$$

A titolo di esempio riportiamo l'andamento di $\sigma(E)$ per la reazione $^{12}\text{C} + p \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$ in Figura V.6. Si osserva una risonanza per circa mezzo MeV e che la sezione precipita sotto 0.3 MeV (è dovuto al fattore di Gamow); in rosso è segnato il range di energie di interesse astrofisico.

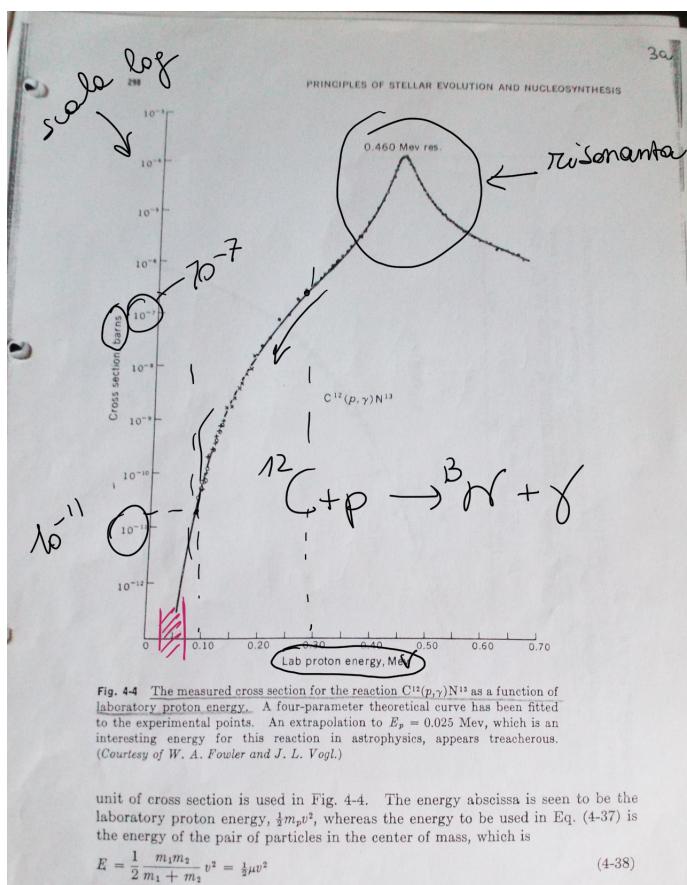


Figura V.6: Leggere la didascalia. In rosso il range di energie di interesse astrofisico.

Dall'espressione per la sezione d'urto possiamo invertire per ottenere l'andamento del fattore astrofisico $S(E) = E\sigma(E) \exp(\dots)$ come mostrato in Figura V.7. Si nota che in questo caso la pendenza per basse energie è più "dolce" (maggior stabilità).

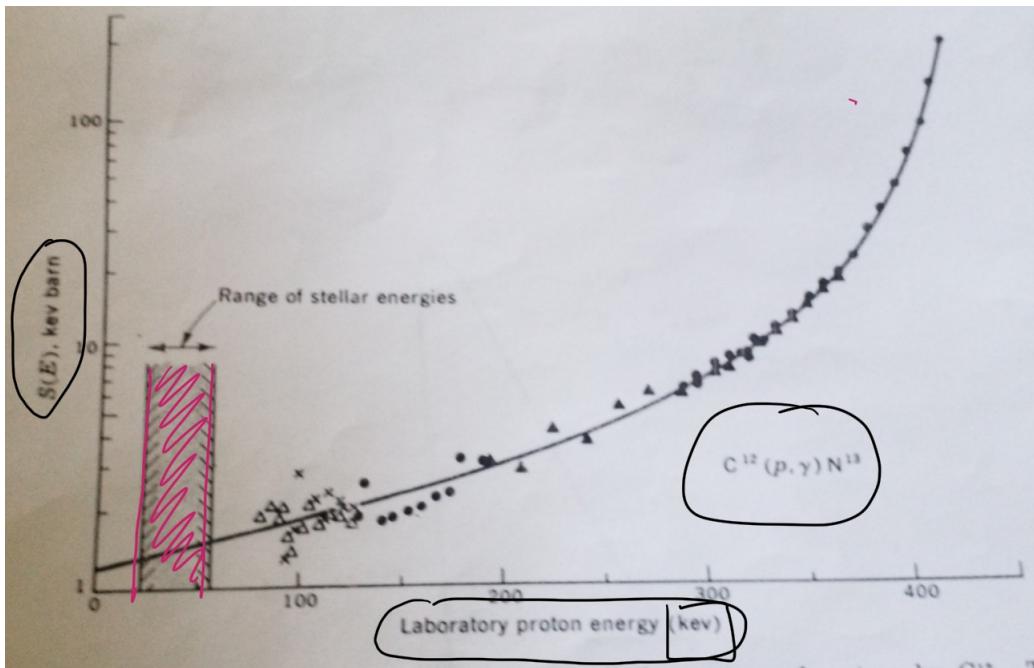


Figura V.7: Andamento del fattore astrofisico per la reazione precedente.

Fattore astrofisico Sostituiamo l'espressione per la sezione d'urto nel calcolo del *reaction-rate*:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{E} \exp \left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}} \right) S(E) \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) E dE = \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) \exp(-f(E)) \\ f(E) &\equiv \frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}} \\ b &\equiv \sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \simeq 0.99 Z_1 Z_2 A^{1/2} \text{ MeV}^{1/2} \end{aligned}$$

dove A è la massa ridotta in unità di masse atomiche. Studiamo allora l'andamento $\exp(-f(E))$ in Figura V.8. Notiamo che per $E = E_0$ si ha un massimo, per cui $f'(E_0) = 0$ da cui¹⁰:

$$E_0 = \left(\frac{b}{2} kT \right)^{2/3} \simeq 1.22 (Z_1 Z_2 A^{1/2} T_6)^{2/3} \text{ keV}$$

questa è l'energia più probabile e $f(E_0)$ è detto **picco di Gamow**. Notiamo che il picco è molto sensibile alla temperatura; per esempio nel Sole ($T_6 \simeq 15$) per la pp si ha $E_0 = 1.22 (15 \cdot \sqrt{1/2})^{2/3} = 5.89$ keV. In generale, E_0 è un valore caratteristico della stella. Dal momento che non conosciamo $S(E)$ per ogni E , cercheremo di sviluppare l'integrale e a tale

¹⁰Con T_6 si intende $T = T_6 \cdot 10^6$ K.

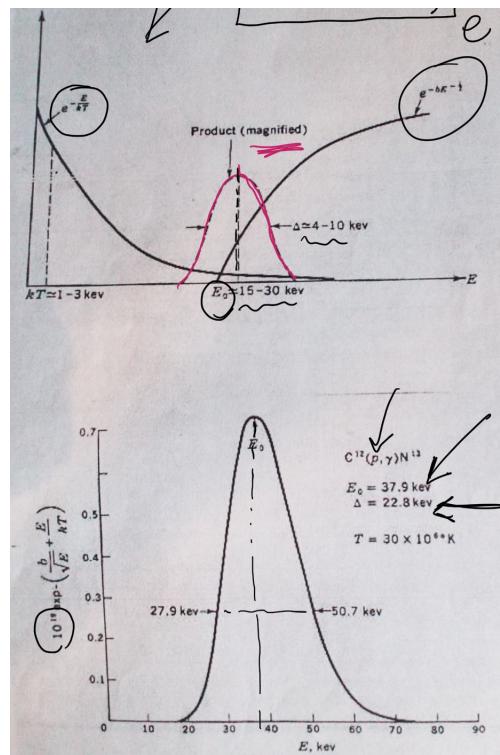


Figura V.8: In alto l'andamento di $\exp(-E/kT)$, di $\exp(-b/\sqrt{E})$ e di $\exp(-f(E))$; in basso l'ingrandimento del picco di Gamow.

scopo definiamo $\tau \equiv f(E_0) = 3E_0/kT^{11}$ (nel Sole $\tau_{pp} \sim 14 \gg 1$) e riscriviamo $f(E)$ come:

$$\begin{aligned} f(E) &= \left(\frac{E}{3E_0}\tau + \frac{b}{\sqrt{E}} \frac{kT}{3E_0}\tau \right) = \\ &= \tau \left(\frac{E}{3E_0} + \frac{2E_0^{3/2}}{kT\sqrt{E}} \frac{kT}{3E_0} \right) = \\ &= \tau \left(\frac{E}{3E_0} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \right) \end{aligned}$$

Definiamo x tale che $E \equiv E_0 \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{\tau}} \right)$

$$E - E_0 = \frac{2x}{\sqrt{\tau}} E_0 = 2 \sqrt{\frac{kTE_0}{3}} x \equiv \frac{\Delta}{2} x$$

¹¹ $f(E_0)$ si calcola facilmente sostituendo $b = 2E_0^{2/3}/kT$.

dove abbiamo definito $\Delta \equiv 4\sqrt{kTE_0/3}$ (per il Sole $\Delta_{pp} \sim 6.4$ keV). Facciamo allora un'espansione¹² di $f(E)$ intorno a E_0 , che in termini di x è un'espansione intorno a $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tau \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{\tau}} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{(1+2x/\sqrt{\tau})}} \right] \simeq \\ &\simeq \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{\tau}} \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{3}{2} \frac{x^2}{\tau} - \frac{5}{2} \frac{x^3}{\tau \sqrt{\tau}} + \frac{35}{8} \frac{x^4}{\tau^2} + O(x^5) \right) \right] \simeq \\ &\simeq \tau + x^2 - \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} + \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} \end{aligned}$$

Sostituendo allora nell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S(E) \exp(-f(E)) dE &\simeq \int_{-\sqrt{\tau}/2}^\infty dx S(x) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} e^{-x^2} \underbrace{\exp\left(\frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau}\right)}_{\text{Parte non Gaussiana}} \simeq \\ &\simeq \int_{-\sqrt{\tau}/2}^\infty dx S(x) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) \end{aligned}$$

dove al primo passaggio abbiamo cambiato variabile $dE = dx 2E_0/\sqrt{\tau}$ e successivamente sviluppato l'esponenziale al II ordine, trascurando i termini $O(x^7)$. Per procedere analiticamente con il calcolo sviluppiamo anche il fattore astrofisico intorno a E_0 : $S(E) = S(E_0) +$

¹²Si ricordi che $f'(E_0) = 0$ e che $\tau/2E_0^2 = 8/\Delta^2$, per cui $f(x) = f(E_0) + ((E - E_0)/(\Delta/2))^2 + \dots$.

$(2xE_0/\sqrt{\tau}) S'(E_0) + (2x^2 E_0^2/\tau) S''(E_0) + \dots$; studiamo l'integrale dei vari ordini¹³:

Ordine 0

$$\begin{aligned} S(E_0) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^{\infty} dx e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &\simeq \\ \simeq S(E_0) \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} 2 \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \left(1 - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &= \\ = \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} S(E_0) \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{5}{12} \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Ordine 1

$$\begin{aligned} S'(E_0) \frac{4E_0^2}{\tau} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^{\infty} dx x e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &\simeq \\ \simeq S'(E_0) \frac{4E_0^2}{\tau} e^{-\tau} 2 \int_0^{\infty} dx x e^{-x^2} \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} &= \\ = \frac{5E_0^2}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} S'(E_0) \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Ordine 2

$$\begin{aligned} S''(E_0) \frac{4E_0^3}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \left(1 + \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sqrt{\tau}} - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right) &\simeq \\ \simeq S''(E_0) \frac{4E_0^3}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} 2 \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \underbrace{\left(1 - \frac{35}{12} \frac{x^4}{\tau} + \frac{25}{18} \frac{x^6}{\tau} \right)}_{O(1/\tau^2)} &\simeq \\ \simeq \frac{2E_0^3}{\tau \sqrt{\tau}} e^{-\tau} S''(E_0) \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Troviamo così per il *reaction-rate*:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \sqrt{\pi} S(E_0) \underbrace{\left[1 + \frac{1}{\tau} \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{2} \frac{S'(E_0)}{S(E_0)} E_0 + \frac{S''(E_0)}{S(E_0)} E_0^2 \right) \right]}_{\equiv} \\ &\equiv \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \frac{2E_0}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau} \sqrt{\pi} S_{eff} = \\ &= \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \frac{\tau^2 e^{-\tau}}{b \sqrt{\mu}} S_{eff} \equiv \\ &\equiv K \frac{1}{AZ_1 Z_2} \tau^2 e^{-\tau} S_{eff} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che¹⁴ $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ e $kT = 27 b^2 / 4\tau^3$ e abbiamo definito il fattore astrofisico efficace S_{eff} e la costante $K \simeq 7.2 \cdot 10^{-19}$. Osserviamo che $\langle \sigma v \rangle$ dipende fortemente da τ , ovvero dalla struttura della stella tramite T , e lo stesso vale per S_{eff} ; per

¹³Useremo principalmente che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^n = \begin{cases} 0 & n = 2s + 1 \\ (2s-1)!! 2^{-s} \sqrt{\pi} & n = 2s \end{cases}$$

Inoltre dal momento che τ è “grande” (si guardi l'esempio di τ_{pp}) si approssima nell'estremo dell'integrale $-\sqrt{\tau} \sim -\infty$ e poi si sfrutta la parità della funzione integranda.

¹⁴Si ricavano direttamente dalle definizioni di b e di τ .

quanto riguarda quest'ultimo, facciamo uno sviluppo del fattore astrofisico e delle sue derivate in un intorno di $E = 0$ fino all'ordine 2 in S^{15} :

$$\begin{aligned} S_{eff} \simeq & S(0) \left(1 + \frac{5}{36} \frac{kT}{E_0} \right) + \\ & + S'(0) E_0 \left(1 + \frac{35}{36} \frac{kT}{E_0} \right) + \\ & + S''(0) E_0^2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{89}{36} \frac{kT}{E_0} \right) \end{aligned}$$

Questa espressione permette di trovare S_{eff} indipendentemente dalla stella presa in considerazione, attraverso per esempio un fit polinomiale¹⁶ per $S(0)$, $S'(0)$ e $S''(0)$, tuttavia si perde l'informazione su $S(E_0)$ e gli errori per $E \sim 0$ sono particolarmente rilevanti. Si ricordi che prima dell'esperimento LUNA (i cui risultati sono riportati in turchese in Figura IV.10) non si avevano acquisizioni per basse energie tali da poter usare in un fit polinomiale, per cui la teoria era l'unica soluzione per esplorare tale *range*.

3.2 Risonanza

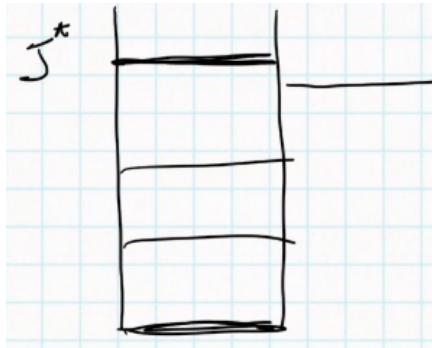


Figura V.9: Livelli energetici del ^{20}Ne ; la linea all'esterno rappresenta la reazione $p + ^{19}\text{F}$

Come per l'elettrone, anche il nucleo presenta dei livelli energetici; se prendiamo per esempio la reazione $p + ^{19}\text{F} \rightarrow ^{20}\text{Ne}$, possiamo osservare dal disegno in Figura V.9 che la reazione è molto vicina al $^{20}\text{Ne}^*$ per cui:



Si tratta quindi di una reazione $a + X$ che produce $Y + b$ passando per uno stadio intermedio Z^* detto *compound nucleus*; questo tipo di processo viene denominato **processo risonante**¹⁷.

3.2.1 Analisi Semi-classica

Iniziamo studiando il processo con un approccio semi-classico. Se definiamo con b il parametro di impatto per il proiettile a sul bersaglio X , abbiamo per la sezione d'urto (classica) $\sigma = \pi b^2$;

¹⁵Per cui:

$$\begin{aligned} S(E_0) &\simeq S(0) + S'(0) E_0 + \frac{1}{2} S''(0) E_0^2 \\ S'(E_0) &\simeq S'(0) + S''(0) E_0 \\ S''(E_0) &\simeq S''(0) \end{aligned}$$

¹⁶Per "calibrare" il fit ovviamente sono necessari degli input teorici che si ottengono dal *match* tra la teoria e i dati sperimentali a energie più alte.

¹⁷Si osservi che la σ di tale processo è diversa sia da quella della reazione $a + X \rightarrow Y + b$ sia da $a + X \rightarrow Z$.

tal parametro in meccanica quantistica è legato alla quantità di moto da $b = \ell \hbar/p \equiv \ell \lambda_{DB}$ ¹⁸. Supponiamo di poter trascurare gli spin (ℓ si conserva) e dividere la zona di interazione in “fette” al variare del valore di ℓ : $0 \leq \ell \leq 1$ allora $\sigma = \pi \lambda_{DB}^2$, $1 \leq \ell \leq 2$ allora $\sigma = 3\pi \lambda_{DB}^2$ (area della corona); per un generico ℓ

$$\sigma = \pi[(\ell + 1)\lambda_{DB}]^2 - \pi[\ell\lambda_{DB}]^2 = (2\ell + 1)\pi\lambda_{DB}^2$$

Dalla conservazione, ℓ è lo stesso per Z^* , quindi $\sigma(\ell)$ è la sezione d’urto d’eccitazione di Z . Se a questo punto consideriamo anche gli spin ($J_a, J_X, \ell \rightarrow J$), sarà necessario eseguire una media per cui:

$$\sigma = \pi \lambda_{DB} \frac{2J+1}{(2J_a+1)(2J_X+1)} \equiv \pi \lambda_{DB} g$$

Inoltre ogni livello ha un certo allargamento di riga distribuito come una Lorentziana $f(E)$ ¹⁹ di cui tenere conto nell’espressione di σ .

Per quanto riguarda Z^* , abbiamo la possibilità sia che decada in $b + Y$ sia che faccia scattering elastico $a + X$, per cui ci sarà una certa probabilità di decadimento nell’ i -esimo canale $P_i = \Gamma_i/\Gamma$, dove $\Gamma = \hbar/\tau^{20}$; questa entra nella sezione d’urto per cui $\sigma \propto \Gamma_a \Gamma_b / \Gamma^2$. Si ottiene infine un’espressione per σ detta **formula di Breit-Wigner**²¹:

$$\sigma = \pi \frac{\hbar^2}{2\mu E} g \Gamma_a \Gamma_b \frac{1}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

3.2.2 Analisi Quantistica

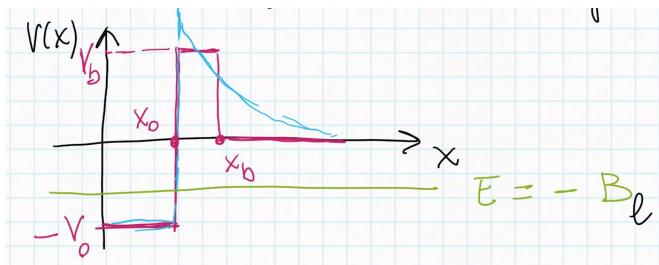


Figura V.10: Schema della barriera di potenziale.

Studiamo a questo punto il processo con l’approccio della meccanica quantistica²², servendoci però di un semplice “modellino” unidimensionale a singola particella (come nel modello *a shell* i nucleoni si muovono in un potenziale medio comune per tutti) dove non facciamo distinzione tra protoni e neutroni e rappresentiamo la barriera di potenziale come un “muro” (Figura V.10). Studiamo l’equazione di Schrödinger e le relative soluzioni per le varie zone ($x \leq x_0, x_b$) per lo

¹⁸Abbiamo definito $\lambda_{DB} \equiv \lambda_{DB}/2\pi = \hbar/p$.
¹⁹

$$f(E) = \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

²⁰ τ tempo di decadimento.

²¹Abbiamo usato $p^2 = 2\mu E$.

²²Si segue il calcolo riportato nell’articolo Charity, R.J., Eur. Phys. J. Plus, 2016, vol.131, art.63, DOI: [10.1140/epjp/i2016-16063-1](https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16063-1).

stato legato $E = -B_\ell$:

Equazioni

1. $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad x > x_b$
2. $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_b\right) \psi(x) = E\psi(x) \quad x_0 < x < x_b$
3. $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - V_0\right) \psi(x) = E\psi(x) \quad x < x_0$

Soluzioni

1. $\psi(x) = G e^{-k_\infty x} + F e^{k_\infty x} \quad x > x_b$
2. $\psi(x) = C e^{k_b x} + D e^{-k_b x} \quad x_0 < x < x_b$
3. $\psi(x) = A \sin(k_0 x) + B \cos(k_0 x) \quad x < x_0$

$$k_0 \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - B_\ell)}}{\hbar} \quad k_b \equiv \frac{\sqrt{2m(V_b + B_\ell)}}{\hbar} \quad k_\infty \equiv \frac{\sqrt{2mB_\ell}}{\hbar}$$

Per trovare i vari coefficienti e B_ℓ si impone la continuità della funzione e della derivata prima e la normalizzazione. In Figura V.11 abbiamo riportato i risultati per $A = 5$ nel fondamentale. Come si ottiene lo stato eccitato? Si potrebbe promuovere un nucleone dal secondo livello a

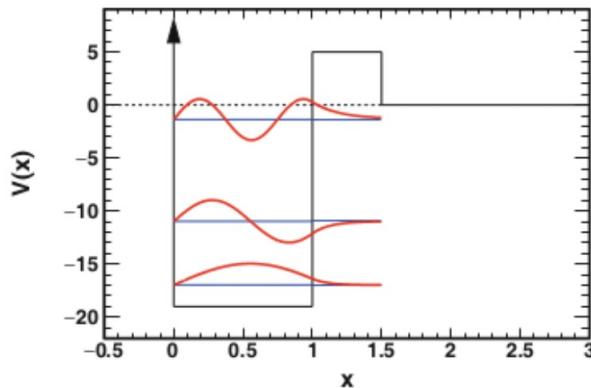


Fig. 2. Single-particle bound states obtained from the simple potential of fig. 1. Bound-state energies are indicated by the horizontal lines (blue) and the corresponding wave functions (red) are plotted relative to these lines.

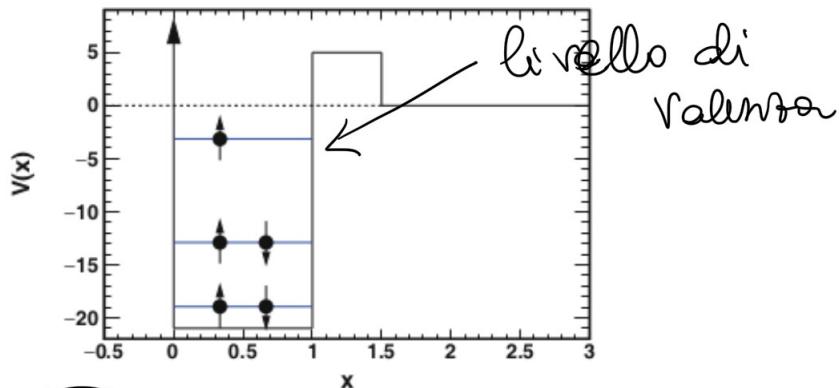


Fig. 3. The ground state of the $A = 5$ nucleus in the simple 1-d single-particle model.

Figura V.11: Grafici del potenziale e delle soluzioni del calcolo riportato nell'articolo.

quello di valenza, ma questo non sarebbe lo stato risonante. Osserviamo però che modificando

V_0 (cioè “alzandolo”) si potrebbe fare in modo che l’energia del livello di valenza divenga positiva, ma rimanga inferiore a V_b (Figura V.12); esiterebbe allora una certa probabilità di *tunneling*²³ per quel nucleone:

$$\frac{dP_{stay}}{dt} = -\Gamma P_{stay} \Rightarrow P_{stay} \propto e^{-\Gamma t}$$

Dobbiamo allora considerare l’equazione di Schrödinger in funzione del tempo²⁴ e cercare

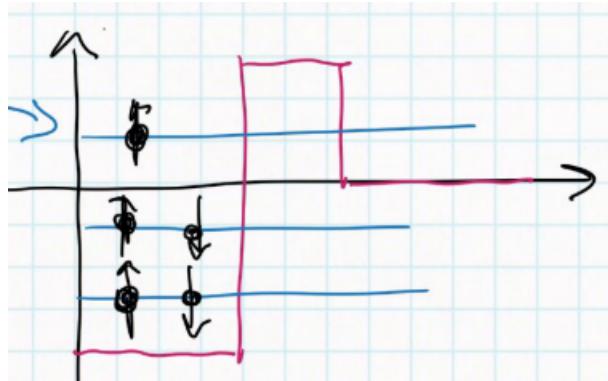


Figura V.12: Schema dello stato risonante.

una soluzione del tipo $\psi(x, t) = \exp(-it E/\hbar) \psi(x)$, dove $\psi(x)$ è soluzione dell’equazione di Schrödinger precedente. Ora l’andamento di P_{stay} impone²⁵ che $E \in \mathbb{C}$, per cui scegliamo $E = E_R - i\Gamma/2 \Rightarrow |\psi(x, t)|^2 = \exp(-t\Gamma/\hbar) |\psi(x)|^2$. Osserviamo che il termine di dipendenza temporale si fa sentire solo per $x > x_b$ (Figura V.13), dunque:

$$x > x_b \quad \psi(x, t) = H e^{i(-\frac{E}{\hbar} t + i k_\infty x)}$$

Questo non è quindi uno stato eccitato, ma una **risonanza**. Dal punto di vista dello scattering, siamo interessati al processo inverso, ovvero all’effetto *tunnel* per entrare; dall’equazione di Schrödinger:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \sin(k_\infty x + \delta) & x > x_b \\ &= \frac{A}{2i} e^{-i\delta} \left(e^{i(k_\infty x + 2\delta)} - e^{-i k_\infty x} \right) \\ \psi(x) &= C e^{k_b x} + D e^{-k_b x} & x_0 < x < x_b \\ \psi(x) &= A' \sin(k_0 x) & x < x_0 \end{aligned}$$

La probabilità di penetrazione sarà data da $P_{in} \propto \int_0^{x_0} |\psi(x)|^2 dx$ e ne osserviamo i risultati in Figura V.14. Si noti che l’andamento di $P_{in} \propto \Gamma^2 / ((E - E_r)^2 + \Gamma^2/4)$ con E_r energia del picco e $\Gamma = \text{FWHM}$ e in particolar modo che per $E = E_r$ δ ha un salto di π (questo è uno degli indicatori della presenza di una risonanza). Si ritrova allora la Breit-Wigner.

²³ $P_{tunnel} = 1 - P_{stay}$.

²⁴

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt}(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi(x, t)$$

²⁵ $P_{stay} \propto |\psi(x, t)|^2 = |\exp(-it E/\hbar)|^2 |\psi(x)|^2$

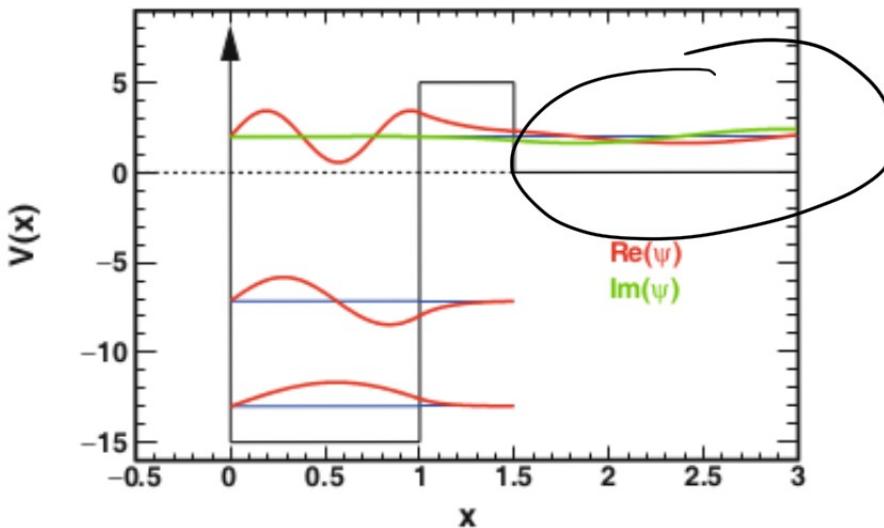


Figura V.13: Grafici del potenziale e delle soluzioni del calcolo riportato nell'articolo.

3.2.3 Reaction-rate e fattore astrofisico

Sostituiamo allora in $\langle \sigma v \rangle$ l'espressione di Breit-Wigner per σ ²⁶:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \frac{\pi\hbar^2}{2\mu} g \Gamma_a \Gamma_b \int_0^\infty \frac{1}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2} e^{-E/kT} dE \simeq \\ &\simeq \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\mu kT}\right)^{3/2} g \hbar^2 \Gamma_a \Gamma_b e^{-E_R/kT} \int_0^\infty \frac{dE}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2} = \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\mu kT}\right)^{3/2} g \hbar^2 \Gamma_a \Gamma_b e^{-E_R/kT} \frac{2}{\Gamma} \arctan\left(\frac{2}{\Gamma}(E - E_R)\right) \Big|_0^\infty \simeq \quad \frac{E_R}{\Gamma} \rightarrow \infty \\ &\simeq \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\mu kT}\right)^{3/2} g \hbar^2 \Gamma_a \Gamma_b e^{-E_R/kT} \frac{2\pi}{\Gamma} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{\mu kT}\right)^{3/2} \hbar^2 \left(g \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma}\right) e^{-E_R/kT} \end{aligned}$$

dove abbiamo approssimato $\exp(-E/kT) \sim \exp(-E_R/kT)$, perché $E_R \gg \Gamma \sim 1$ eV e la distribuzione è molto piccata intorno E_R . Studiamo anche il fattore astrofisico:

$$S(E) = E \sigma(E) e^{2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}} = \frac{\pi}{2\mu} \hbar^2 g \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2} e^{b/\sqrt{E}}$$

Prendiamo a titolo di esempio la reazione $p + {}^7\text{Be} \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$: $E_R = 700$ keV, $\Gamma_p \simeq 35$ keV, $\Gamma_\gamma \simeq 25$ meV (trascurabile, $\Gamma \sim \Gamma_p$) e $b = 0.99 \cdot 3 \sqrt{7/8}$ MeV^{1/2}.

Tipologie di risonanze Le risonanze si dividono principalmente in due tipologie in base al rapporto Γ/E_R :

- **strette** $\Gamma/E_R < 10\%$.
- **larghe** $\Gamma/E_R > 10\%$.

²⁶Attenzione nelle note del corso vi è un errore: è riportato un $-$ al denominatore, invece di un $+$.

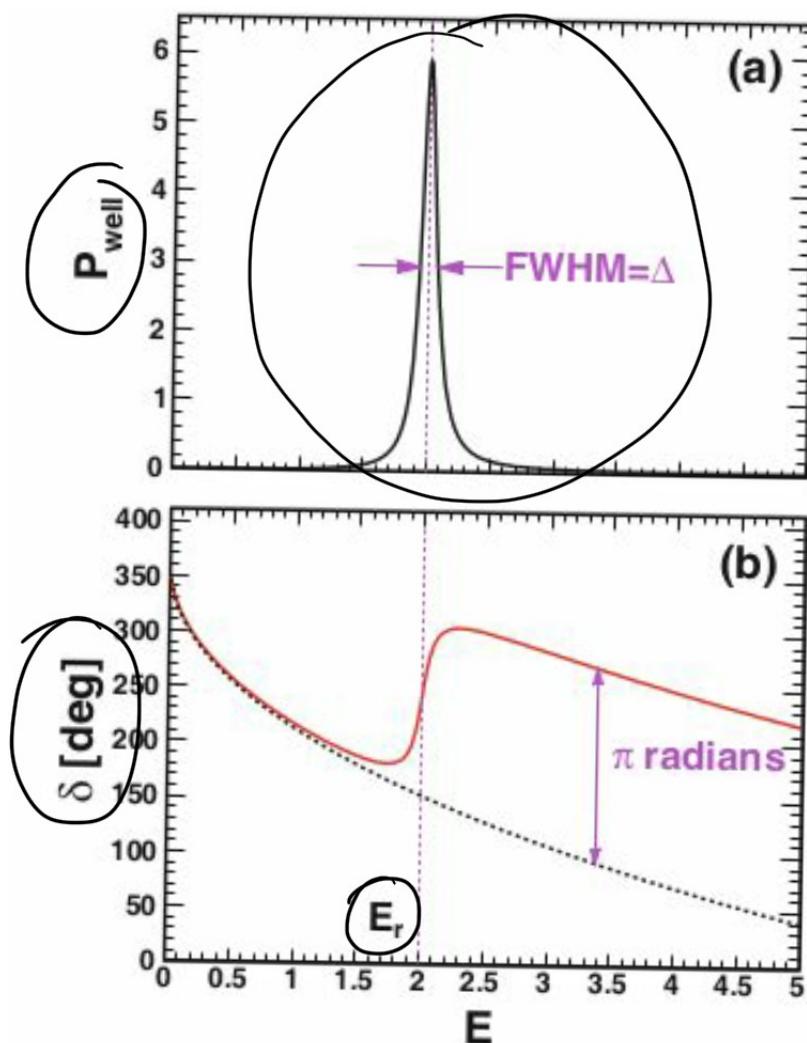


Figura V.14: Andamenti della probabilità di penetrazione e dello sfasamento in funzione dell'energia.

Il tipo di risonanza può essere significativo nello studio del fattore astrofisico: se infatti la risonanza è stretta, nel caso in cui il nostro *range* di interesse sia lontano dal valore di risonanza le misure non risentono di alcun effetto del picco; al contrario con una risonanza larga, si possono avere effetti dovuti alle code della risonanza che alterano le acquisizioni (per esempio si registrano valori maggiori di quelli attesi senza la risonanza).

3.2.4 Risonanze sotto soglia

Esiste anche un particolare tipo di risonanza detta **risonanza sotto soglia**, per cui tra i livelli del *compound nucleus* compare uno stato risonante sotto alla soglia della reazione (Figura V.15); se la risonanza è sufficientemente larga può influenzare le misure portando per esempio a un piccolo andamento crescente (“una risalita”) del fattore astrofisico per energie prossime a $E = 0$ (Figura V.16). Questo ci mostra l’importanza di una buona guida teorica nella zona di estrapolazione.

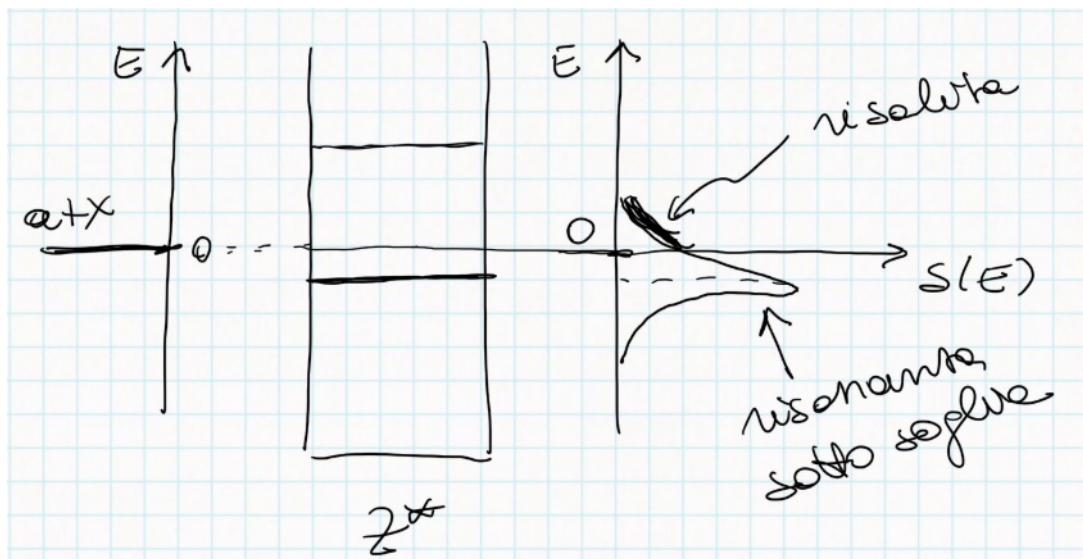


Figura V.15: Schema risonanza sotto soglia

3.2.5 Risonanza e neutrini solari

Abbiamo già studiato nella sezione 2 - *Il problema dei neutrini solari* come la questione dei neutrini solari, prima degli esperimenti di rivelazione delle oscillazioni di sapore, fosse un problema alquanto discusso. Tra le varie teorie avanzate ve ne fu una anche da parte di Fowler che prevedeva appunto la possibilità di una risonanza non studiata: egli supponeva che il calcolo del fattore astrofisico fosse sbagliato a causa di una risonanza o sotto soglia o molto stretta nella reazione ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$ (*ppI*) nel *range* di energie di interesse astrofisico (che nel 1980 non era ancora stato esplorato); dunque il valore di $S(E)$ sarebbe stato sottostimato. Tale soluzione, però, fu confutata dalle misure di LUNA²⁷ che dimostrarono l'assenza di qualsiasi tipo di risonanza.

3.3 Elettroscreening

Passiamo alla trattazione²⁸ del fenomeno dell'elettroscreening: immaginiamo l'atomo come un gas con una alta densità nel centro, dove si concentrano tutte le cariche positive; questo comporta una nuvola polarizzata che scherma il potenziale coulombiano (screening potenziale). Si ha allora una modifica nel termine di Gamow $P(E)$ in $\langle \sigma v \rangle$:

$$U_{tot}(r) = \underbrace{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}}_{U_{coul}} + U(r)$$

Definiamo allora alcune quantità che ci serviranno nel calcolo del contributo del termine $U(r)$:

- $E_{\max} \gg kT$ è l'energia del picco di Gamow.
- r_C è il *classical turning point*, ovvero il raggio per cui $E_{\max} = Z_1 Z_2 e^2 / r_C$.
- $r_n \ll r_C$ è il raggio nucleare, distanza dalla quale il potenziale attrattivo nucleare diviene maggiore della repulsione coulombiana.

²⁷Guarda 1.1.1-LUNA I.

²⁸Calcolo ripreso dall'articolo Salpeter, E.E., Australian Journal of Physics, 1954, vol.7, p.373, DOI: 10.1071/PH540373.

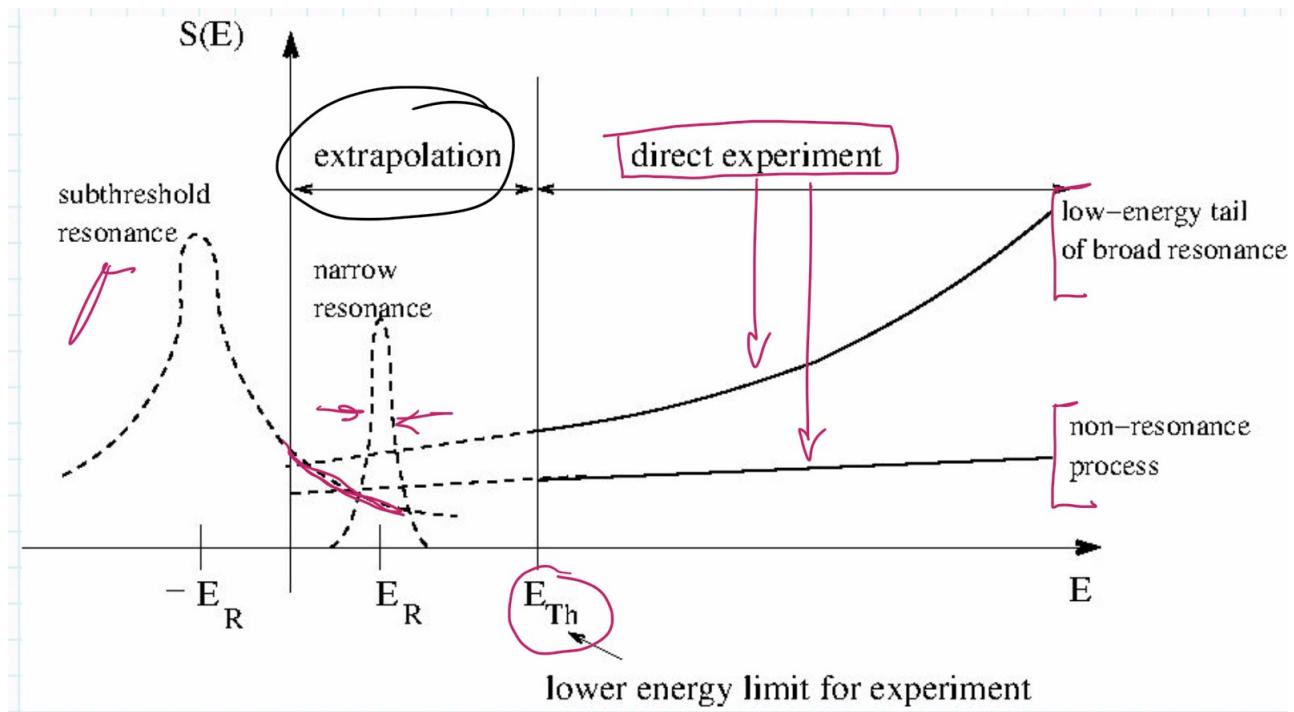


Figura V.16: Simulazione di una situazione sperimentale con risonanza sotto soglia. E_{Th} è la minima energia raggiunta dagli esperimenti diretti.

- a è la grandezza scala della distanza tra le particelle. Data ρ la densità del gas e N_0 il numero di Avogadro, definiamo a come quel valore per cui:

$$4\pi a^3 \rho N_0 = 1 \Rightarrow 4\pi a^3 \tilde{\rho} = 1$$

Dal momento che²⁹ $\tilde{\rho} = 3M/4\pi a^3$, si ha $M = 1/3$ a.m.u., ovvero a può essere visto come il raggio di una sfera di massa media pari a un terzo di unità di massa atomica.

- R è il raggio della nuvola elettronica (vedremo che $R > a$ e $R \gg r_C$, altrimenti non si avrebbe lo screening).

Per capire come si modifica $P(E)$ dobbiamo studiare $E - U(r) - Z_1 Z_2 e^2 / r$. Per $r \gg R$ ovviamente $U(r) \ll 1$ possiamo quindi approssimarla come costante $U_0 \simeq Z_1 Z_2 e^2 / R = E_{max} r_C / R \ll 1$. Come mostrato in Figura V.17 l'effetto dell'elettroscreening è quello di abbassare la barriera di potenziale ed è possibile descrivere il problema nel caso di assenza di elettroscreening *shiftando* l'energia $E \rightarrow E + U_0$; l'integrale allora diviene³⁰:

$$\int_0^\infty dE S(E + U_0) P(E + U_0) e^{-(E+U_0)/kT} \stackrel{U_0 \ll E_{max}}{\simeq} e^{-U_0/kT} \left[\int_0^\infty dE S(E) P(E) e^{-E/kT} \right]$$

Alcuni valori tipici:

$$\begin{aligned} r_n &\simeq 2 \text{ fm} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} & a &\simeq 10^{-9} \text{ cm} \\ r_C &\simeq 2 \cdot 10^{-11} \text{ cm} & R &\simeq 3 \cdot 10^{-9} \text{ cm} \end{aligned}$$

Per semplicità supponiamo che $Z_1 > Z_2$ e $z \equiv Z_2$ sia la carica dei costituenti principali del gas stellare.

Abbiamo allora due possibili effetti:

²⁹Se M è misurata in a.m.u..

³⁰Abbiamo approssimato l'estremo inferiore dell'integrale U_0 a 0, poiché $U_0/E_{min} \ll 1$.

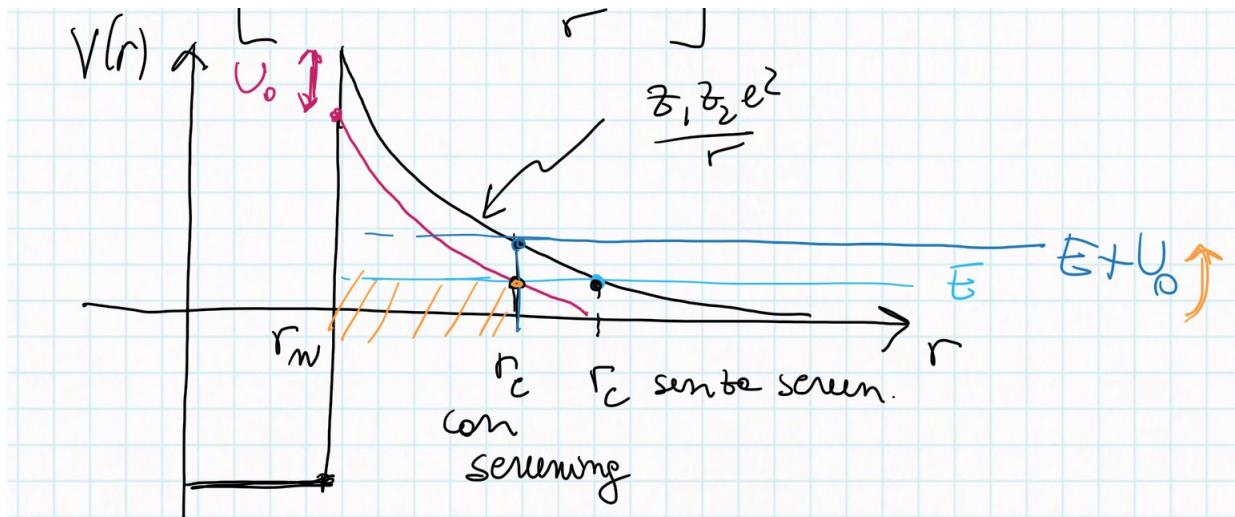


Figura V.17: Schema della barriera di potenziale con (linea nera) e senza (linea rosa) elettro-screening.

1. **screening forte** $E_{coul} > kT$ che riguarda principalmente gli esperimenti di fusione con plasma e che anche se trattati nell'articolo di Salpeter non discuteremo.
2. **screening debole** $E_{coul} \ll kT$ che interessa principalmente le stelle.

3.3.1 Calcolo screening debole

Ancora una volta definiamo alcune quantità utili:

- Il numero medio di elettroni per a.m.u. nel gas stellare:

$$\xi \equiv \sum_i \frac{X_i Z_i}{A_i}$$

dove con X_i si intende l'abbondanza frazionale in massa del nucleo i con carica Z_i e numero di massa A_i .

- L'energia di Fermi del gas di elettroni nel caso non relativistico:

$$E_F \equiv \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} (3\pi^2 N_0 \rho \xi)^{2/3} = \left(\frac{3\pi\xi}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{\hbar}{a}\right)^2 \frac{1}{8\pi^2 m}$$

- Infine definiamo il rapporto:

$$D \equiv \frac{E_F}{kT} \simeq 0.30 \frac{(\xi\rho)^{2/3}}{T_6}$$

Nel caso di screening debole supponiamo che il gas di elettroni sia non degenere e che i costituenti principali del gas stellare abbiano z e A ; allora si ha:

$$U_{tot}(r) = Z_1 z e^2 \psi_{tot}(r)$$

$$\psi_{tot}(r) \equiv \frac{1}{r} + \psi(r)$$

Mettiamoci con Z_1 nel centro e con $V(r)$ potenziale elettrostatico e $\bar{\rho}(r)$ densità di carica elettronica mediati su tutte le particelle eccetto 1. Per una carica di prova $\delta Z e$ si ha dall'equazione di Poisson³¹:

$$\nabla^2 Z_1 e \psi_{tot}(r) = -4\pi \bar{\rho} - 4\pi Z_1 e \delta^3(r) \quad (\text{V.1})$$

Per risolvere il sistema abbiamo però bisogno di un'altra equazione, che ci viene data dalla meccanica statistica: consideriamo una regione in cui ogni particella ha energia potenziale $U_e(r)$, allora la densità di carica media sarà data da:

$$\bar{\rho}(r) = \underbrace{\left(\frac{\rho N_0 z e}{A} \right)}_{\text{densità di carica}} \left[\underbrace{\exp \left(-\frac{Z_1 z e^2}{kT} \psi_{tot}(r) \right)}_{\text{parte nucleare}} - \underbrace{\exp \left(\frac{Z_1 e^2}{kT} \psi_{tot}(r) \right)}_{\text{parte elettronica}} \right]$$

Nel caso di screening debole possiamo sviluppare gli esponenziali al prim'ordine per cui l'espressione diviene:

$$\bar{\rho}(r) \simeq - \left(\frac{\rho N_0 z e}{A} \right) \psi_{tot}(r) \frac{Z_1 e^2}{kT} (1 + z) \quad (\text{V.2})$$

Allora sostituendo questa in (V.1) abbiamo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} + \psi(r) \right) &= 4\pi \rho N_0 \frac{e^2(z+z^2)}{A kT} \left(\frac{1}{r} + \psi(r) \right) - 4\pi \delta^3(r) \\ \nabla^2 \psi(r) &= 4\pi \rho N_0 \frac{e^2(z+z^2)}{A kT} \left(\frac{1}{r} + \psi(r) \right) \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Le condizioni al contorno per questa equazione differenziale sono imposte dalla necessità di avere il potenziale $\propto 1/r$ per grandi distanze e finito per $r = 0$:

$$\begin{aligned} r \rightarrow +\infty \quad \psi(r) &\rightarrow -\frac{1}{r} \\ r \rightarrow 0 \quad \psi(r) &\rightarrow \psi(0) < \infty \end{aligned}$$

Per semplicità definiamo R_{DH} ³² in modo da raccogliere tutti i termini costanti in (V.3):

$$R_{DH}^2 \equiv \frac{kT}{4\pi \rho N_0 e^2} \frac{A}{z+z^2} = \frac{kT}{e^2} a^3 \frac{A}{z+z^2}$$

La soluzione è data da³³:

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \left(e^{-r/R_{DH}} - 1 \right)$$

Notiamo che $\psi(0) \simeq (1 - r/R_{DH} - 1)/r = -1/R_{DH}$ e $\psi(r \rightarrow \infty) = -1/r$. Avremo allora per l'energia potenziale $U(r) = Z_1 Z_2 e^2 \psi(r)$:

$$\begin{aligned} U(r) &= Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{r} \left(e^{-r/R_{DH}} - 1 \right) \quad U(0) = U_0 = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{DH}} \\ &- \frac{U_0}{kT} \simeq 0.188 Z_1 Z_2 \sqrt{\frac{\rho}{T_6^3}} \xi \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

dove abbiamo definito $\xi \equiv \sqrt{(z+z^2)/A}$.

³¹ $\nabla^2 V(r) = -4\pi \rho(r)$.

³² Dall'analisi dimensionale $[R_{DH}] = [L]$. Le lettere a pedice indicano le iniziali di Debye e Hückel, questa scelta fu fatta da Salpeter poiché le soluzioni di questo problema erano le stesse di quelle della teoria delle soluzioni diluite elettrolitiche, costruita dai due scienziati.

³³

$$\nabla^2 \psi(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r) \Rightarrow \frac{d^2 \Psi}{dr^2} - \frac{1}{R_{DH}^2} \Psi = \frac{1}{R_{DH}^2}$$

con $\Psi(r) \equiv r \psi(r)$ per cui $\Psi \rightarrow -1$ per $r \rightarrow +\infty$ e $\Psi \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$.

Un calcolo più preciso. Rilassiamo a questo punto alcune delle ipotesi fatte in precedenza. Consideriamo un gas a più specie nucleari z_i, A_i, X_i , per cui³⁴:

$$\bar{\rho}(r) \propto \sum_i \exp\left(-Z_1 \frac{z_i X_i e^2}{kT} \psi_{tot}(r)\right)$$

Inoltre dal momento che sono fermioni consideriamo gli elettroni distribuiti come una Fermi-Dirac:

$$f(\eta) = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} + 1}$$

con $\eta \equiv \mu/kT$; per elettroni non interagenti $f(\eta) = 2D^{2/3}/3$. Poiché la densità degli elettroni si aggiusta in modo tale da uniformare il potenziale termodinamico, per elettroni interagenti avremo:

$$\begin{aligned} f\left(\eta - \frac{U_e(r)}{kT}\right) &= \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} e^{U_e/kT} + 1} \simeq \\ &\simeq \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} (1 + U_e/kT) + 1} = \\ &= \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{(e^{x-\eta} + 1) \left(1 + \frac{U_e}{kT} \frac{e^{x-\eta}}{e^{x-\eta} + 1}\right)} \simeq \\ &\simeq \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta} + 1} \left(1 - \frac{U_e}{kT} \frac{e^{x-\eta}}{e^{x-\eta} + 1}\right) = \\ &= f(\eta) - \frac{U_e}{kT} \frac{df}{d\eta} \end{aligned}$$

Il rapporto tra gli elettroni interagenti e quelli non interagenti sarà dato da:

$$\frac{f(\eta - U_e/kT)}{f(\eta)} \simeq 1 - \frac{U_e}{kT} \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}$$

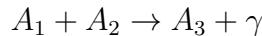
Questo termine entra nell'espressione di $\bar{\rho}$ influendo sul rapporto z/A , per cui adesso avremo la stessa espressione (V.4), ma ξ sarà definito come³⁶:

$$\xi^2 \equiv \sum_i \frac{X_i z_i^2}{A_i} + \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} \sum_i \frac{X_i z_i}{A_i}$$

3.3.2 In laboratorio

Studiamo allora gli effetti dell'elettroscreening.

Prendiamo un nucleo proiettile A_1 (per es. ioni di un nucleo) e un nucleo bersaglio A_2 (per es. una targhetta o un gas) per cui si ha:



Per esempio $p + {}^7\text{Be}$. Dato che il nucleo è circondato dalla nuvola elettronica avremo un certo effetto di screening, tuttavia non si tratta dell'effetto di interesse astrofisico, poiché le densità

³⁴È sufficiente mandare z^2/A in $\sum_i X_i z_i^2/A_i$.

³⁵

$$\frac{df}{d\eta} = - \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{(e^{x-\eta} + 1)^2} (-e^{x-\eta})$$

³⁶Ovviamente è necessario conoscere X_i ; fino a qualche anno fa non c'erano problemi, ma negli ultimi tempi nuove misure per il Sole hanno sollevato tensioni sui valori.

stellari sono differenti da quelle ottenibili in laboratorio; non siamo quindi interessati alla sezione d’urto con lo screening (σ_{lab}), ma a quella priva di esso (σ_{bare}). Definito $\eta(E) \equiv Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$, abbiamo dalla teoria:

$$\sigma_{lab}(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta(E)}$$

Poiché³⁷ $U_0 \ll E_{max}$, detta $E_{eff} \equiv E + U_0$ si ha che $S(E)/E \approx S(E_{eff})/E_{eff}$, per cui:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \simeq \frac{e^{-2\pi\eta(E_{eff})}}{e^{-2\pi\eta(E)}}$$

Facendo uno sviluppo per $\eta(E_{eff})$ in un intorno di E e notando che $d\eta/dE = -\eta(E)/2E$ otteniamo:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \simeq \exp\left(\pi Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{\frac{2\mu}{E}} \frac{U_0}{E}\right) \equiv e^{g(E)}$$

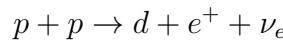
Dunque per basse energie è necessario “pulire” la σ misurata secondo quell’esponenziale e poi da questa calcolarsi la σ per i modelli stellari.

Solitamente $U_0 \approx Z_1 Z_2 e^2 / R_a$ con R_a raggio atomico, per cui quello che viene fatto è *fittare* i dati con U_0 come parametro; se osserviamo per $E \rightarrow 0$ un andamento crescente di tipo lorentziano abbiamo una risonanza (o stretta o sotto soglia), se invece tale andamento è $\sim \exp(g(E))$ allora siamo in presenza di elettroscreening. In ultima battuta osserviamo che minore è l’energia alla quale osserviamo e maggiore sarà la sensibilità dell’andamento a possibili effetti di screening.

4 Studio *ab-initio*

La *pp* non si riesce a misurare, tuttavia è possibile studiarla³⁸ col metodo che abbiamo discusso nella sezione 5.3-*Una parentesi: Metodo ab-initio*; fu Bethe il primo a lavorarci, dando inizio al modello solare.

Prima di “addentrarci” nel calcolo, osserviamo che la funzione d’onda finale sarà la stessa di quella per lo studio della reazione in sezione 5-*La prima reazione*, poiché il prodotto di entrambe è un deutone, tuttavia si avranno differenze per le funzioni d’onda dei reagenti e per il fatto che la *pp* non è mediata dall’interazione elettromagnetica.



Dunque studieremo la cinematica della reazione per avere la dipendenza dall’elemento di matrice ridotta e poi passeremo al calcolo di questo.

Calcolo della cinematica. Detto w il *rate* di decadimento, dalla teoria di Fermi:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

dove $V_{fi} = G_F M$ con G_F costante di Fermi e M elemento di matrice del decadimento β^+ . Trascuriamo la massa del neutrino per cui $E_i - E_f \equiv E_0 = E_e + E_\nu = E + cq$ e nel centro di massa $\vec{p}_d = -\vec{p} - \vec{q}$ (non indipendente da p e q , ma determinato da essi); possiamo allora

³⁷Si tenga a mente che $U_0^{lab} \neq U_0^{star}$.

³⁸Avvertiamo il lettore che ci saranno differenze di notazione rispetto a quando abbiamo mostrato il calcolo la prima volta.

riscrivere la densità di stati finali nello spazio delle fasi:

$$\begin{aligned} dn &= \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{p^2 q^2}{4\pi^4 \hbar^6} dp dq {}^{39} \\ \rho(E_f) \equiv \frac{dn}{dE_\nu} &= \frac{dn}{cdq} = \frac{p^2(E_0 - E)^2}{4\pi^4 c \hbar^6 c^2} dp \end{aligned}$$

dove ci siamo limitati solo agli stati di interesse dn/dE_ν (come avevamo fatto nel decadimento β fissando l'energia dell'elettrone e differenziando in q). Avremo quindi per il *rate*:

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \frac{p^2(E_0 - E)^2}{4\pi^4 c \hbar^6 c^2} dp \stackrel{p \rightarrow E}{=} \frac{|V_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} (E_0 - E)^2 \sqrt{E^2 - m^2 c^4} E dE$$

Ricordando che $d\sigma = dw/j_{inc} = dw/v$, integrando in dE si ha⁴⁰:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2\pi^3 v} G_F^2 |M|^2 \underbrace{\int_m^{E_0} (E_0 - E)^2 \sqrt{E^2 - m^2} E dE}_{\text{int. di Fermi } f(E_0)} \\ |M|^2 &\rightarrow \frac{1}{(2S_p + 1)^2} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \left| \int d^3 x \psi_d^*(\vec{x}) \psi_{pp}(\vec{x}) \right|^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo mediato sugli *spin*⁴¹. Da questo punto in poi adesso si procede numericamente, tuttavia a scopo illustrativo illustriamo il calcolo analitico che eseguì anche Bethe⁴².

Risoluzione analitica. Anche se il calcolo è analitico il risultato è piuttosto valido. Per studiare ψ_d prendiamo:

- l'onda S $\psi_d \rightarrow {}^3S_1$, per cui $\psi_d = u(r)/r$.
- buca di potenziale $V = -V_0$ per $r < r_0$.

$$\psi_d = \begin{cases} \frac{C}{r} e^{-\alpha r} & r > r_0 \\ \frac{C'}{r} \sin(k_0 r) & r < r_0 \end{cases} \quad \alpha \equiv \sqrt{mB}/\hbar \quad k_0 \equiv \sqrt{m(V_0 - B)}/\hbar$$

Abbiamo allora $b \equiv 1/\alpha \simeq 4.4$ fm e definendo $x \equiv r/b$, $x_0 \equiv r_0/b$ e $\mu \equiv \sqrt{(V_0 - B)/B} = k_0/\alpha$ si ottiene:

$$\psi_d = \begin{cases} \frac{A}{r} e^{-(x-x_0)} \equiv \psi_> & r > r_0 \\ \frac{A}{r} \sin(\mu x)/\sin(\mu x_0) \equiv \psi_< & r < r_0 \end{cases}$$

Osserviamo che questa espressione soddisfa automaticamente la continuità sia della funzione che della sua derivata in $r = r_0$, per cui dalla condizione di normalizzazione⁴³ si ottiene⁴⁴:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{1+x_0}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{-2}}}$$

³⁹Abbiamo integrato su $d\hat{q}d\hat{p}$.

⁴⁰ $c = \hbar = 1$.

⁴¹La parte di *isospin* $\eta_d(\tau = 0)(np) \sum_i \tau_i^- (pp)$ valutata sulle funzioni d'onda è 1.

⁴²L'articolo al quale ci riferiamo è Bethe, H. A. & Critchfield, C. L., Phys. Rev., 1938, vol.54, p.248, url: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.54.248>.

⁴³ $1 = \int |\psi_d|^2 = \int_0^{r_0} |\psi_<|^2 + \int_{r_0}^{\infty} |\psi_>|^2$.

⁴⁴Successivamente per non confonderci con la costante che compare in ψ_{pp} chiameremo questa $A \rightarrow A_d$.

Studiamo a questo punto ψ_{pp} :

- consideriamo sempre un'onda S ($\ell = 0$), perché le energie sono comunque basse⁴⁵.
- prendiamo la stessa buca di potenziale, ma per $r > r_0$ consideriamo un potenziale coulombiano V_{coul} . Dovremo risolvere allora l'equazione di Schrödinger con $\psi_{pp}(r) = u(r)/r$:

$$u'' - \frac{m}{\hbar^2} (V(r) - E) u = 0$$

Definita la massa ridotta $\mu \equiv m/2$ e $\rho \equiv kr$ con $k = \mu v/\hbar$ si ha⁴⁶ allora per $r < r_0$:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + 1 + \frac{2V_0}{\mu v^2} \right) u = 0$$

$$\psi_<(r) r = u(r) = A \sin \left(\frac{\sqrt{mD}}{\hbar} r \right)$$

$$D \equiv \underbrace{V_0}_{\sim \text{MeV}} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{m}}_{\simeq 6 \text{ keV}} \simeq V_0$$

Per quanto riguarda invece $r > r_0$ prendiamo le funzioni di Coulomb⁴⁷ regolare $F_L(kr)$ e irregolare $G_L(kr)$:

$$\psi_>(r) = \left[F_0(kr) + \tan(\delta_0) G_0(kr) \right] \frac{e^{i\delta_0} \cos(\delta_0)}{kr}$$

dove δ_0 è lo sfasamento. Per trovare A e δ_0 imponiamo:

- continuità delle derivate logaritmiche:

$$\frac{\psi'_>}{\psi_>} \Big|_{r=r_0} = \frac{\psi'_<}{\psi_<} \Big|_{r=r_0}$$

$$\tan \delta_0 = \frac{F_0(kr_0) - F_0(kr_0) \frac{d}{dr} \ln w(r_0)}{G_0(kr_0) \frac{d}{dr} \ln w(r_0) - G'_0(kr_0)}$$

dove abbiamo definito $w(r) = A \sin(\sqrt{mD}r/\hbar)$.

- continuità delle funzioni in $r = r_0$:

$$A \simeq \frac{F_0(kr_0) + \tan \delta_0 G_0(kr_0)}{k \sin(\sqrt{mD}r_0/\hbar)}$$

dove abbiamo approssimato $\cos \delta_0 \sim e^{i\delta_0} \sim 1$ dal momento che $\delta_0 \sim 0.002$.

Al tempo di Bethe F_0 e G_0 erano tabulate (non esistevano i calcolatori), per cui si aveva:

$$F_0(kr) \simeq \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma} - 1}}}_{\text{Cost. Coulomb}} kr \Phi(kr) \equiv C_0 kr \Phi(kr)$$

⁴⁵Si ricordi l'ordine di grandezza per le energie del picco di Gamow.

⁴⁶ $E = \mu v^2/2 = \hbar^2 k^2/m$.

⁴⁷Nel nostro caso $L = 0$.

$$G_0(kr) = C_0^{-1} \Theta(kr)$$

dove $\gamma \equiv Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$ e Φ e Θ sono due polinomi tabulati⁴⁸. Possiamo allora riscrivere:

$$\begin{aligned} \tan \delta_0 &= C_0^2 kr_0 \lambda \\ A &= C_0 r_0 \left(\frac{\Phi(kr_0) + \lambda \Theta(kr_0)}{\sin(\nu r_0/b)} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo raccolto⁴⁹ in λ tutta la parte dipendente dai polinomi e abbiamo definito $b \equiv \hbar/\sqrt{mB}$ e $\nu \equiv \sqrt{mDb}/\hbar = \sqrt{D/B}$. Dunque, l'espressione di ψ_{pp} :

$$\begin{aligned} \psi_> &= C_0 \left[\Phi(kr) + \lambda \frac{r_0}{r} \Theta(kr) \right] \\ \psi_< &= \frac{C_0 r_0}{r} \left[\Phi(kr_0) + \lambda \Theta(kr_0) \right] \frac{\sin(\nu r)/b}{\sin(\nu r_0)/b} \end{aligned}$$

Possiamo adesso calcolare l'elemento di matrice⁵⁰:

$$\begin{aligned} M &= \int d^3x \psi_d^*(\vec{x}) \psi_{pp}(\vec{x}) = \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \psi_d(r) \psi_{pp}(r) = \\ &= 4\pi \left[\int_0^{r_0} r^2 dr \psi_{pp,<}(r) \psi_{d,<}(r) + \int_{r_0}^\infty r^2 dr \psi_{pp,>}(r) \psi_{d,>}(r) \right] \\ &= 4\pi C_0 A_d b^2 \left[\frac{x_0}{\sin \mu x_0} \frac{(\Phi(kr_0) + \lambda \Theta(kr_0))}{\sin \gamma x_0} \int_0^{x_0} dx \sin \mu x \sin \nu x \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^\infty dx x e^{-(x-x_0)} \Phi(kbx) + \lambda \int_{x_0}^\infty x_0 e^{-(x-x_0)} \Theta(kbx) \right] \equiv \\ &\equiv 4\pi C_0 b^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{1}{\sqrt{1+x_0}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{-2}}} \left[\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \right] \equiv \\ &\equiv 4\pi C_0 b^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \Lambda \end{aligned}$$

dove abbiamo definito Λ_i per raccogliere i vari integrali, anche se sono comunque tutti facilmente risolubili (prodotto di seni o integrali di polinomi per un esponenziale). Sostituiamo M nell'espressione della sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{C_0^2 b^3}{\pi^2 v} G_F^2 f(E_0) \Lambda^2$$

⁴⁸Non siamo interessati all'espressione di questi polinomi, ma la riportiamo solo per completezza:

$$\Phi(kr) \simeq 1 + \gamma kr - (2\gamma^2 - 1) \frac{(kr)^2}{6} + O((kr)^3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(kr)^i$$

$$\Theta(kr) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(kr)^j + (2kr\gamma \ln 2kr + f(\gamma))$$

Basti ricordare che Φ è un polinomio *smooth* e che $\Phi(0) = 1$.

⁴⁹Questa è una notazione di Bethe

⁵⁰Si ricordi che $x \equiv r/b$.

4.1 Risultati

Così facendo Bethe trovò $\Lambda^2 = 5.93 \div 8.08$ e un fattore astrofisico $S = (3.38 \div 4.61) \cdot 10^{-25}$ MeVb. I risultati⁵¹ globali sono riportati in Tabella V.18. L’“enorme” incertezza sul fattore astrofisico

TABLE I. Numerical results for two values of the radius.

	$r_0 = e^2/mc^2$	$r_0 = e^2/2 mc^2$
x_0	0.645	0.322
V_0 (Mev)	20.9	66.5
D (Mev)	10.3	47.0
μ	2.94	5.45
ν	2.18	4.65
$(rd \log w/dr)$	0.236	0.110
$\Phi(r_0)$	1.050	1.025
$\Theta(r_0)$	0.769	0.854
$(rd \log \Phi/dr)$	0.050	0.025
ζ	0.814	0.915
λ	2.63	4.80
Λ_1	0.689	0.277
Λ_2	1.949	1.547
Λ_3	1.205	1.030
$(1+x_0)(1+\mu^{-2})$	1.835	1.367
Λ	2.84	2.44
Λ^2	8.08	5.93

Figura V.18: Risultati di Bethe per $r_0 \simeq 3$ fm e $r_0 \simeq 1.5$ fm.

della pp si ripercuote anche sulle successive stime del flusso di neutrini solari, per questa ragione nel 1998 fu fatto un altro calcolo con potenziali dipendenti dal tempo (AV18 e CD-Bonn) detti *realistici* perché riproducono tutti i dati sperimentali $NN + d$ con un rapporto $\chi^2/\text{dati} \sim 1.04$. Inoltre in questo studio non è stato considerato solo l’operatore di *isospin*, ma un operatore di Gamow-Teller, quindi a un corpo, perché si ha infatti il passaggio ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$, ovvero un operatore vettoriale nello spazio dello spin $\sum_i \vec{\sigma}_i \tau_i^\pm$. Per questo operatore è possibile fare uno studio *ab-initio* sui decadimenti β di nuclei leggeri come ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$: utilizzando tale operatore a un corpo sottostimiamo⁵² $\tau_{1/2}$ di circa il 4% e questo è dovuto al fatto di aver trascurato le *meson-exchange currents*.

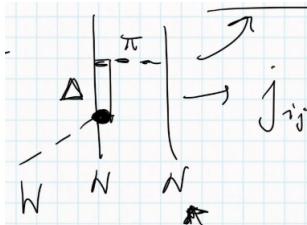


Figura V.19: Schema del decadimento β con nuclei leggeri. N sono i nuclei, W è il bosone di interazione, π è la corrente di mesoni e Δ è la risonanza che si diseccita.

Tornando al lavoro del 1998, che tenne conto del parametro di correzione all’operatore GT, si ottenne $\Lambda^2 = 7.035$ (circa il valore centrale del *range* trovato da Bethe) e un fattore astrofisico $S(0) = 4.01(1.000 \pm 0.009) \cdot 10^{-25}$ MeVb. Nel 2008 il conto è stato rifatto, ma con una trattazione dell’errore più rigorosa ed è stato confermato il risultato.

⁵¹È interessante osservare che il neutrino fu teorizzato proprio nel 1938 e Bethe ne tiene di conto, tuttavia non lo riporta.

⁵²Esiste tuttavia un parametro nella teoria della MEC per correggere tale sottostima.

Capitolo VI

R-MATRIX

In questo capitolo viene presentato il metodo del *R*-Matrix sia *calculable* che *phenomenological* con alcuni esempi di applicazione. Il capitolo copre le lezioni 12/04/2021, 14/04/2021,

Introduzione Finora abbiamo visto che i metodi *ab-initio* permettono di calcolare la sezione d’urto partendo da una buona base teorica senza la necessità di “aggiustare” i risultati con osservazioni per ottenere le corrette relazioni, tuttavia dipendono fortemente dal metodo di calcolo delle funzioni d’onda, il quale diviene sempre più complesso al crescere di A . In questo capitolo tratteremo quindi le caratteristiche principali di un metodo alternativo a quello *ab-initio* detto metodo della *R*-MATRIX (RM) seguendo l’articolo di Descouvemont & Baye¹. Esistono due principali versioni:

1. *Phenomenological*
2. *Calculable*

Il primo a essere stato sviluppato è stato 1., ma dal punto di vista didattico è più chiaro il 2., per cui partiremo da questo.

1 Calculable RM

Studiamo lo scattering $A_1 + A_2$ all’energia E . Trascurando per semplicità lo *spin*, sviluppiamo in armoniche sferiche la soluzione dell’equazione di Schrödinger² $(T + V)\psi = E\psi$:

$$\psi = \sum_{\ell} \frac{u_{\ell}(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{r})$$

Raccogliendo i vari termini in $H_{\ell} \equiv T_{\ell} + V_C + V_N$ si ha:

$$(H_{\ell} - E)u_{\ell}(r) = 0 \tag{VI.1}$$

Per quanto riguarda il potenziale una schematizzazione come quella in Figura V.17 è troppo semplice, prenderemo invece un potenziale simile a quello in Figura VI.1 con un certo raggio a detto *channel radius* che separa la regione interna dove il contributo maggiore è dato da V_N da quella esterna in cui domina V_C .

¹ Descouvemont, P. & Baye, D., Rep. Prog. Phys., 2010, vol.3, DOI: [10.1088/0034-4885/73/3/036301](https://doi.org/10.1088/0034-4885/73/3/036301), arXiv: <https://arxiv.org/abs/1001.0678>.

²L’Hamiltoniana è simmetrica sotto rotazioni, traslazioni e riflessioni.

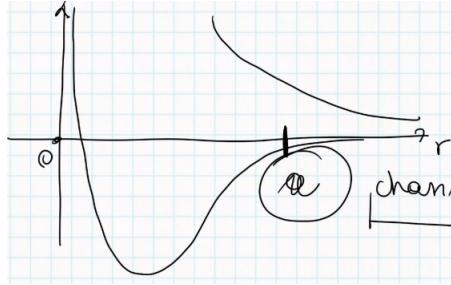


Figura VI.1: Schema del potenziale usato: V_N per $r < a$ e V_C per $r > a$.

Partiamo dalle soluzioni per $r > a$: $u_\ell^{ext}(r) \propto \cos \delta_\ell F_\ell(\eta, kr) + \sin \delta_\ell G_\ell(\eta, kr)$ dove F e G sono le funzioni di Coulomb e η è il coefficiente di Coulomb. Definiamo:

$$\begin{aligned} I_\ell(kr) &\equiv G_\ell(\eta, kr) - i F_\ell(\eta, kr) \\ O_\ell(kr) &\equiv G_\ell(\eta, kr) + i F_\ell(\eta, kr) \\ u_\ell^{ext}(r) &= C_\ell \left(I_\ell(kr) - \underbrace{U_\ell}_{\exp(2i\delta_\ell)} O_\ell(kr) \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.2})$$

Dal momento che si trascurano gli *spin* non si hanno canali accoppiati.
Per $r < a$ espandiamo in funzioni φ_j note e nulle per $r \rightarrow 0$:

$$u_\ell^{int}(r) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(r) \quad (\text{VI.3})$$

Sono quindi da determinare solo le costanti C_ℓ e c_j attraverso le condizioni di continuità:

$$\begin{cases} u_\ell^{int}(a) = u_\ell^{ext}(a) \\ u_\ell'^{int}(a) = u_\ell'^{ext}(a) \end{cases} \quad (\text{VI.4})$$

Abbiamo però una difficoltà: H_ℓ non è hermitiano in $[0, a]$, quindi non è simmetrico:

$$\begin{aligned} \int_0^a dr \varphi_i \frac{d^2}{dr^2} \varphi_j &\neq \int_0^a dr \varphi_j \frac{d^2}{dr^2} \varphi_i \\ \varphi_i(a) \frac{d}{dr} \varphi_j(a) - \int_0^a dr \frac{d}{dr} \varphi_i \frac{d}{dr} \varphi_j &\neq \varphi_j(a) \frac{d}{dr} \varphi_i(a) - \int_0^a dr \frac{d}{dr} \varphi_j \frac{d}{dr} \varphi_i \\ \varphi_i(a) \frac{d}{dr} \varphi_j(a) &\neq \varphi_j(a) \frac{d}{dr} \varphi_i(a) \end{aligned}$$

Per questa ragione “hermitizzeremo” l’operatore tramite quello che viene definito operatore di Bloch:

$$\mathcal{L}(B) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \delta(r - a) \left(\frac{d}{dr} - \frac{B}{r} \right) \quad (\text{VI.5})$$

il risultato non dovrà ovviamente dipendere dal parametro B scelto. Avremo quindi una nuova hamiltoniana $H_\ell \rightarrow H_\ell + \mathcal{L}(B)$ hermitiana e l’equazione di Schrödinger diverrà l’equazione di Bloch-Schrödinger³:

$$(H_\ell + \mathcal{L}(B) - E) u_\ell^{int} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \delta(r - a) \left(\frac{d}{dr} - \frac{B}{r} \right) u_\ell^{int} = \mathcal{L}(B) u_\ell^{ext} \quad (\text{VI.6})$$

³Per passare da una all’altra è sufficiente sommare da ambo i lati $\mathcal{L}(B) u_\ell^{int}$.

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla condizione di continuità in $r = a$ (imposto dalla δ) in equazione (VI.4). Definiamo allora la matrice R come:

$$u_\ell(a) \equiv R_\ell(E, B)[a u'_\ell(a) - B u_\ell(a)] \quad (\text{VI.7})$$

$$\frac{1}{R_\ell(E, B)} \equiv a \frac{u'}{u} \Big|_{r=a} - B$$

Sostituendo l'espressione di u^{int} definita in equazione (VI.3) nell'equazione (VI.6):

$$\begin{aligned} \sum_j (H_\ell + \mathcal{L}(B) - E) c_j \varphi_j(r) &= \mathcal{L}(B) u_\ell^{ext} \\ \sum_j \underbrace{\int_0^a dr \varphi_i(r) (H_\ell + \mathcal{L}(B) - E) \varphi_j(r)}_{C_{ij}(E, B)} c_j &= \int_0^a dr \varphi_i(r) \frac{\hbar}{2\mu} \delta(r-a) \left(u_\ell'^{ext}(r) - B \frac{u_\ell^{ext}(r)}{r} \right) \\ \sum_j C_{ij}(E, B) c_j &= \frac{\hbar^2}{2\mu a} \varphi_i(a) \left(a u_\ell'^{ext}(a) - B u_\ell^{ext}(a) \right) \end{aligned}$$

dove $C_{ij}(E, B)$ sono elementi di una matrice simmetrica facilmente calcolabili dal momento che le φ sono note; pure le $u_\ell'^{ext}(a)$ e $u_\ell^{ext}(a)$ sono note per cui dall'ultima equazione si possono calcolare i coefficienti c_j e riscrivere in maniera più compatta:

$$\sum_j C_{ij}(E, B) c_j = \frac{\hbar^2}{2\mu a} \varphi_i(a) \frac{u_\ell^{ext}}{R_\ell(E, B)} \quad (\text{VI.8})$$

Possiamo da questa ricavare un'espressione per R_ℓ partendo dalla (VI.3):

$$\begin{aligned} u_\ell^{int}(a) &= \sum_j \varphi_j(a) \sum_i \left[C(E, B) \right]_{ij}^{-1} \varphi_i(a) \frac{\hbar^2}{2\mu a} \frac{u_\ell^{ext}(a)}{R_\ell(E, B)} \\ u_\ell^{int}(a) &= \frac{\hbar^2}{2\mu a} \frac{u_\ell^{ext}(a)}{R_\ell(E, B)} \sum_{i,j=1}^N \varphi_j(a) \left[C(E, B) \right]_{ij}^{-1} \varphi_i(a) \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

Usando la continuità:

$$R_\ell(E, B) = \frac{\hbar^2}{2\mu a} \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(a) \left[C(E, B) \right]_{ij}^{-1} \varphi_j(a) \quad (\text{VI.10})$$

Ricordiamo che il potenziale che viene usato non è quello di un singolo nucleone, ma quello di uno o due cluster e questo lo distingue da un metodo *ab-initio*.

1.1 Proprietà della RM

Supponiamo che N sia finito e le φ siano ortonormali. Per $E = 0$, poiché la matrice $[C]_{ij}$ è diagonalizzabile, avremo autovettori $\bar{v}_{n\ell}$ (che prendiamo ortonormali) e autovalori $E_{n\ell}$ per cui $C(0, B)\bar{v}_{n\ell} = E_{n\ell}\bar{v}_{n\ell}$. Possiamo allora fare una decomposizione spettrale del tipo $C_{ij}(0, B) = \sum_n E_{n\ell} \bar{v}_{n\ell,i} \bar{v}_{n\ell,j}^T$, da cui sfruttando l'ortonormalità delle φ si ha:

$$C_{ij}(E, B) = \langle \varphi_i | H_\ell + \mathcal{L}(B) - E | \varphi_j \rangle = C_{ij}(0, B) - E \delta_{ij} = \sum_{n=1}^N (E_{n\ell} - E) \bar{v}_{n\ell,i} \bar{v}_{n\ell,j}^T$$

Sostituendo nella (VI.10):

$$R_\ell(E, B) = \frac{\hbar^2}{2\mu a} \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(r) \sum_{n=1}^N \frac{\bar{v}_{n\ell,i} \bar{v}_{n\ell,j}^T}{E_{n\ell} - E} \varphi_j$$

Per rendere l'espressione più compatta⁴ definiamo la *reduced width* $\gamma_{n\ell} = \sqrt{\hbar^2/2\mu a} \phi_{n\ell}(a)$ dove abbiamo definito⁵ le funzioni d'onda $\phi_{n\ell}(r) = \sum_i \bar{v}_{n\ell,i} \varphi_i(r)$:

$$R_\ell(E, B) = \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_{n\ell}^2}{E_{n\ell} - E} \quad (\text{VI.11})$$

1.2 Sfasamento e RM

Per trovare una relazione tra la matrice di sfasamento U_ℓ in (VI.2) e la matrice R_ℓ eguagliamo⁶ l'espressione (VI.2) con la definizione (VI.7) per $u_\ell^{ext}(a)$:

$$\begin{aligned} C_\ell \left[I_\ell(ka) - U_\ell O_\ell(ka) \right] &= u_\ell^{ext} = R_\ell(E, B) [a u_\ell^{ext'}(a) - B u_\ell^{ext}] \\ U_\ell &= \frac{I_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} \frac{1 + B R_\ell - R_\ell \overbrace{ka I'_\ell(ka)/I_\ell(ka)}^{L_\ell^*}}{1 + B R_\ell - R_\ell \overbrace{ka O'_\ell(ka)/O_\ell(ka)}^{L_\ell}} \end{aligned}$$

dove abbiamo definito le quantità L_ℓ e L_ℓ^* . Ricordando l'espressione per I_ℓ e O_ℓ possiamo definire un'angolo di sfasamento Φ_ℓ che caratterizza il contributo coulombiano secondo:

$$\begin{aligned} \frac{I_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} &= \frac{(1 - i F_\ell/G_\ell)^2}{1 + (F_\ell/G_\ell)^2} = \left(\frac{1 - i F_\ell/G_\ell}{\sqrt{1 + (F_\ell/G_\ell)^2}} \right)^2 \equiv e^{i2\Phi_\ell} \\ \tan \Phi_\ell &= -F_\ell/G_\ell \Big|_{ka} \end{aligned}$$

Per cui otteniamo un'espressione di U_ℓ che è indipendente da B ⁷ (come atteso):

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{1 - L_\ell^* R_\ell(E)}{1 - L_\ell R_\ell(E)}$$

Questa relazione può essere usata anche per determinare l'accuratezza del metodo numerico. Possiamo ancora però lavorare con tale espressione per raggiungere una forma più compatta e che evidensi maggiormente la relazione con lo sfasamento δ_ℓ . Scriviamo $L_\ell = S_\ell + i P_\ell$, dove

⁴Questa è l'espressione che solitamente si trova per R , dove si evidenzia il fatto che è una funzione *meromorfa*.

⁵Se N è finito, allora $\phi_{n\ell}$ sono l'approssimazione variazionale delle autofunzioni dell'operatore $H + \mathcal{L}$ in a e l'espressione per R diviene un'approssimazione.

⁶Adottiamo la notazione per cui l'apice ' indica la derivata rispetto all'argomento della funzione:

$$\begin{aligned} f'(r) &= df/dr \\ g'(kr) &= dg/d(kr) \end{aligned}$$

⁷Non è evidente, ma è possibile dimostrarlo; non siamo interessati al conto, la dimostrazione è riportata in Complementi 5-CRM: *indipendenza dal parametro B* .

abbiamo definito S_ℓ shift factor e P_ℓ penetration factor, e dal momento che vale il Wronskiano $G_\ell F'_\ell - F_\ell G'_\ell = 1$ abbiamo:

$$P_\ell = \frac{ka}{F_\ell^2(ka) + G_\ell^2(ka)}$$

$$S_\ell = P_\ell [F'_\ell(ka)F_\ell(ka) + G'_\ell(ka)G_\ell(ka)]$$

Troviamo allora:

$$e^{2i\delta_\ell} = U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{(1 - S_\ell R_\ell + i P_\ell R_\ell)^2}{(1 - S_\ell R_\ell)^2 + (P_\ell R_\ell)^2}$$

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\frac{R_\ell P_\ell}{1 - S_\ell R_\ell} \right) \quad (\text{VI.12})$$

1.2.1 RM e risonanza

Consideriamo un processo di scattering $A_1 + A_2 \rightarrow A + \gamma$ e supponiamo che esista una risonanza in E_R (che avevamo visto manifestarsi in un salto di $\pi/2$ nello sfasamento). Dal momento che compare anche l'interazione coulombiana non sarà δ a saltare di $\pi/2$, ma $\delta_\ell - \Phi_\ell = \pi/2$ e questo implica per la risonanza $P_\ell R_\ell / (1 - S_\ell R_\ell) \rightarrow \infty$, ovvero $S_\ell(E_R) R_\ell(E_R) = 1$ (è un modo per definire E_R perché è una condizione univoca). Espandiamo in serie di Taylor il prodotto $S_\ell(E) R_\ell(E)$:

$$S_\ell(E) R_\ell(E) \simeq \overbrace{S_\ell(E_R) R_\ell(E_R)}^{=1} + (E - E_R) \frac{d}{dE} (S_\ell(E) R_\ell(E)) \Big|_{E=E_R}$$

Sostituiamo in U_ℓ :

$$U_\ell \simeq e^{2i\Phi_\ell} \frac{(E_R - E) + i P_\ell(E) R_\ell(E) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)}{(E_R - E) - i P_\ell(E) R_\ell(E) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)}$$

Definendo l'ampiezza della risonanza come $\Gamma(E) \equiv 2P_\ell(E) R_\ell(E) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)$ si arriva a:

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{E - E_R + i \Gamma/2}{E - E_R - i \Gamma/2} \quad (\text{VI.13})$$

Qualche nota formale Notiamo che l'espressione per U_ℓ in (VI.13) ha una forma che ricorda una lorentziana (come ci aspettavamo).

Poiché $E \sim E_R$ e la matrice R non ha particolari discontinuità in E ($R(E) \sim R(E_R)$ ⁸) si usa una forma approssimata per $\Gamma(E)$:

$$\frac{\Gamma(E)}{\Gamma(E_R)} \simeq \frac{P_\ell(E)}{P_\ell(E_R)}$$

Per cui definendo $\gamma^2 \equiv R_\ell(E_R) / (S_\ell R_\ell)'(E_R)$ si ha $\Gamma(E) \simeq 2\gamma^2 P_\ell(E)$.

⁸Non vale per P_ℓ che invece dipende fortemente dall'energia.

Risonanza e autovalori Un altro modo per vedere la risonanza è considerare $E \sim E_{\bar{n}\ell}$ con \bar{n} fissato; infatti per tale energia R diverge, per cui trascuriamo nella (VI.11) tutti i termini con $n \neq \bar{n}$ ⁹:

$$R_\ell(E) \simeq \frac{\gamma_{n\ell}^2}{E_{\bar{n}\ell} - E}$$

Avremo allora per l'angolo di sfasamento in (VI.12):

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\frac{P_\ell \gamma_{n\ell}^2}{E_{n\ell} - E - \gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E)} \right)$$

Poiché vale anche (VI.13) si ha $\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\Gamma(E)/2(E_R - E) \right)$, da cui:

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &\simeq 2\gamma_{n\ell}^2 P_\ell(E) \\ E_R &\simeq E_{n\ell} - \gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E) \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

Dunque, l'energia del polo di R non corrisponde a quella di risonanza, ma questa è *shiftata* di un certo fattore $\gamma_{n\ell}^2 S_\ell(E)$ ¹⁰.

1.3 Applicazioni

Studiamo lo scattering $A_1 + A_2$. La scelta delle $\varphi(r)$ è fondamentale per l'efficienza del metodo; in letteratura troviamo quelle per cui si ha la miglior convergenza:

$$-\varphi_k(r) = \sin \left[\frac{\pi r}{a} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{VI.15})$$

$$-\varphi_k(r) = r^{\ell+1} \exp \left(-\frac{r^2}{b_k^2} \right) \quad \text{con } b_k = b_1 x_0^{k-1} \quad (\text{VI.16})$$

$$-\varphi_k(r) = (-1)^{N+k} \left(\frac{r}{ax_k} \right)^n \sqrt{ax_k(1-x_k)} \frac{P_N(2r/a - 1)}{r - ax_k} \quad \text{con } x_k : P_N(2x_k - 1) = 0 \quad (\text{VI.17})$$

Per tutte a corrisponde al solito *channel radius*, mentre b_1 e x_0 nelle (VI.16) sono parametri da determinare. Le ultime, (VI.17), sono dette funzioni di Lagrange, i P_N sono i polinomi di Legendre e gli x_k i loro zeri; l'esponente n viene spesso preso $n \sim 1$.

Passiamo adesso alla trattazione di 2 esempi di scattering:

1. $p + {}^{12}\text{C}$: dati $V_N + V_C$ e φ_i si ricava δ_ℓ e si cerca la risonanza a $E_R = 0.42$ MeV e una larghezza (risonanza stretta) $\Gamma = 37$ keV come *test*.
2. $\alpha + \alpha$: procendendo come per il caso precedente si cerca $E_R = (11.35 \pm 0.15)$ MeV e una larghezza (risonanza larga) $\Gamma \simeq 3.5$ MeV.
[NON RIPORTATO]

Esempio $p + {}^{12}\text{C}$ Riportiamo i risultati per lo sfasamento in Figura VI.2 e per la funzione d'onda ridotta di onda S in Figura VI.3. In generale si osserva che le funzioni di Lagrange hanno convergenza più veloce e un miglior accordo tra regione esterna e interna per u_0 . In Figura VI.4 è invece riportato il *matching* dei parametri che permette di stimare la bontà della convergenza. Le funzioni seno sono le prime a essere state studiate, ma come mostrano i risultati le gaussiane e quelle di Lagrange sono migliori.

Una piccola osservazione Notiamo la differenza con un metodo *ab-initio*: non abbiamo fatto uno studio su 13 nucleoni, ma abbiamo lavorato solo con 2 oggetti p e ${}^{12}\text{C}$.

⁹Per semplicità da adesso in poi dal momento che non ci sarà ambiguità $\bar{n} \rightarrow n$

¹⁰Da cui deriva appunto il nome *shift factor*. Per quanto riguarda il *penetration factor* esso dà informazioni sulla penetrazione della barriera coulombiana.

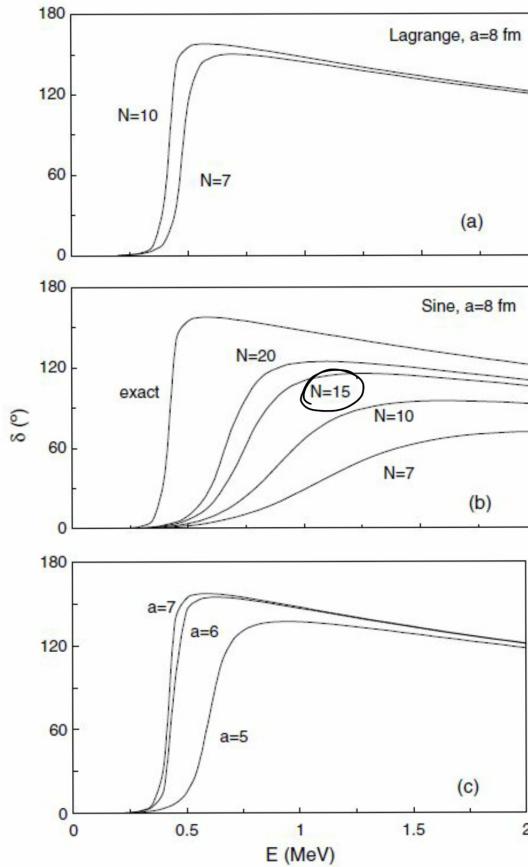


Figura VI.2: Risultati per lo sfasamento di $p + {}^{12}\text{C}$: (a) funzioni di Lagrange con $a = 8 \text{ fm}$, notiamo che già per $N = 10$ si ha quasi la convergenza; (b) funzioni Gaussiane e Lagrange con $a = 8 \text{ fm}$, la convergenza è più lenta (non basta $N = 20$); (c) convergenza delle funzioni seno in funzione di a , il risultato esatto è $a = 7$.

2 Phenomenological RM

Riprendiamo l'espressione che avevamo trovato per δ nel caso di risonanza:

$$\delta_\ell = \Phi_\ell + \tan^{-1} \left(\frac{\Gamma_R/2}{E_R - E} \right)$$

con $\Gamma_R \equiv 2\gamma^2 P_\ell(E_R)$. Se quindi abbiamo dati sperimentali di Γ_R ed E_R avremo un certo γ_{obs}^2 , per cui possiamo ricavare l'andamento in funzione dell'energia di δ_ℓ e u^{int} e di conseguenza dal formalismo sviluppato finora anche $\sigma(E)$ e $S(E)$ per ogni energia. In sintesi è questo il metodo *phRM*.

Un metodo semplice Dobbiamo fare attenzione perché $E_{n\ell}$ e $\gamma_{n\ell}$ (come abbiamo già visto) non corrispondono a E_R e γ_{obs} . Per ricavare la relazione tra queste quantità come in (VI.14) non possiamo seguire gli stessi passaggi fatti in precedenza (altrimenti $\gamma_{n\ell} \sim \gamma_{obs}$), ma il risultato sarà simile. Consideriamo per semplicità un solo polo per $R(E)$ in E_1 e sviluppiamo S_ℓ intorno a questo valore:

$$S_\ell(E) = S_\ell(E_1) + (E - E_1)S'_\ell(E_1)$$

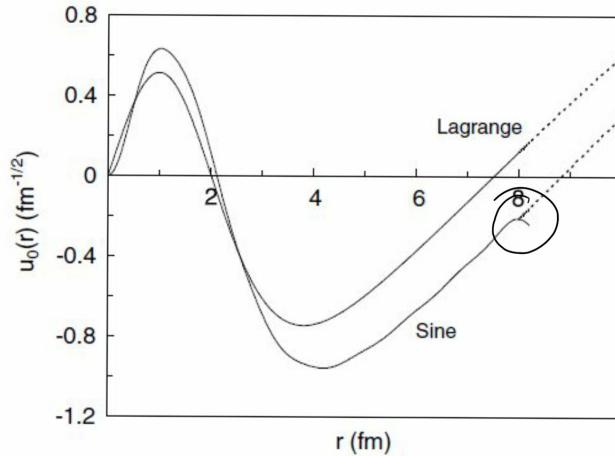


Figura VI.3: Funzioni d'onda ridotte calcolate per $\ell = 0$, $N = 15$ e $a = 8$ fm con le funzioni di Lagrange e con quelle seno. Notiamo che quest'ultime portano a funzioni "sporche" nella zona di raccordo con l'esterno.

$^{12}\text{C} + \text{p } l = 0$ phase shifts (in degrees) and matching parameters (4.15) for different bases ($a = 8$ fm).							
E (MeV)	Exact	Phase shift			Matching parameter		
		$N = 7$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 7$	$N = 10$	$N = 15$
<i>Lagrange</i>							
0.5	154.66	112.90	154.94	154.59	5.96	0.65	0.01
1.0	147.48	144.22	147.55	147.48	3.68	0.28	0.00
1.5	133.30	311.02	133.35	133.30	1.67	0.20	0.00
2.0	121.18	299.30	121.23	121.18	1.21	0.16	0.00
<i>Gaussian</i>							
0.5	154.66	179.36	154.53	154.53	5.61	0.02	0.01
1.0	147.48	146.52	147.47	147.47	0.04	0.01	0.01
1.5	133.30	130.28	133.29	133.29	1.06	0.00	0.01
2.0	121.18	112.15	121.18	121.18	1.55	0.01	0.01
<i>Sine</i>							
0.5	154.66	2.03	3.74	6.68	0.12	0.66	1.54
1.0	147.48	28.90	66.57	109.98	1.30	4.66	29.35
1.5	133.30	63.84	94.53	113.28	11.46	6.97	3.53
2.0	121.18	71.76	92.24	105.34	5.73	3.14	2.38

Figura VI.4: Matching dei parametri per $a = 8$.

Allora per δ_ℓ si avrà¹¹:

$$\begin{aligned}
\delta &\simeq \Phi + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_1^2 P(E)}{E_1 - E - \gamma_1^2 S(E_1) - \gamma_1^2 (E - E_1) S'(E_1)} \right) = \\
&= \Phi + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_1^2 P(E)}{E_1 - \gamma_1^2 S(E_1) + \gamma_1^2 E_1 S'(E_1) - E (1 + \gamma_1^2 S'(E_1))} \right) = \\
&= \Phi + \tan^{-1} \left(\underbrace{\frac{\gamma_1^2}{1 + \gamma_1^2 S'(E_1)} P(E)}_{\gamma_{obs}^2} \underbrace{\frac{1}{E_1 - \gamma_1^2 S(E_1)/(1 + \gamma_1^2 S'(E_1)) - E}}_{E_R} \right) = \\
&= \Phi + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{obs}^2 P(E_R)}{E_R - E} \right)
\end{aligned}$$

¹¹Si omette il pedice ℓ .

Da cui si ottiene¹²:

$$\gamma_{1\ell}^2 \simeq \frac{\gamma_{obs}^2}{1 - \gamma_{obs}^2 S'_\ell(E_R)} \quad (\text{VI.18})$$

$$E_{1\ell} \simeq E_R + \gamma_{1\ell}^2 S_\ell(E_R) \quad (\text{VI.19})$$

Da queste si ottiene $R_\ell(E)$ e quindi $\sigma(E)$ o $S(E)$.

Il caso di $p + {}^{12}\text{C}$ In letteratura si definiscono spesso queste quantità:

$$\gamma_W \equiv \frac{3\hbar^2}{2\mu a^2}$$

$$\theta_{obs}^2 \equiv \frac{\gamma_{obs}^2}{\gamma_W^2}$$

$$\theta_1^2 \equiv \frac{\gamma_1^2}{\gamma_W^2}$$

Quando $\theta^2 \sim 1$ i nuclei che collidono conservano la loro struttura nella risonanza. Riportiamo in Figura VI.5 i risultati per tale reazione di scattering in funzione di a , dal momento che P_ℓ ne dipende e quindi di conseguenza anche Γ_R . In Figura VI.6 invece è riportato l'andamento ottenuto per il fattore astrofisico. Anche se il calcolo sembra riprodurre bene i dati, si è considerato il ${}^{12}\text{C}$ puntiforme, ma osserviamo che questa è un'approssimazione dal momento che nel risultato $\theta \neq 1$.

	$a = 4 \text{ fm}$	$a = 5 \text{ fm}$	$a = 6 \text{ fm}$	$a = 7 \text{ fm}$
${}^{12}\text{C} + p (J^\pi = 1/2^+, l = 0, E_R = 0.42 \text{ MeV}, \Gamma_R = 32 \text{ keV})$				
γ_{obs}^2	1.089	0.592	0.353	0.227
θ_{obs}^2	0.258	0.220	0.189	0.165
γ_1^2	3.083	1.157	0.569	0.323
E_1	-2.152	-0.614	-0.110	-0.113
${}^{12}\text{C} + \alpha (J^\pi = 1^-, l = 1, E_R = 2.42 \text{ MeV}, \Gamma_R = 420 \text{ keV})$				
γ_{obs}^2		0.574	0.277	0.165
θ_{obs}^2		0.6920	0.481	0.389
γ_1^2		1.172	0.374	0.191
E_1		0.491	1.921	2.219

Figura VI.5: Risultati per lo scattering $p + {}^{12}\text{C}$.

È possibile rendersi conto di questa approssimazione perché l'andamento di $S(E)$ (e quindi

¹²Abbiamo linearizzato $S(E_1)$ sviluppando intorno a E_R in

$$\gamma_{obs}^2 \simeq \frac{\gamma_{1\ell}^2}{1 + \gamma_{1\ell}^2 S'_\ell(E_{1\ell})}$$

$$E_R \simeq E_{1\ell} - \gamma_{obs}^2 S_\ell(E_{1\ell})$$

Abbiamo rimesso il pedice.

anche della sezione d'urto) dev'essere riscalato rispetto a quello dei dati; si introduce allora un termine di correzione \mathcal{S} (*overall factor*) detto **fattore spettroscopico**¹³ che moltiplica il fattore astrofisico. Nel caso particolare da noi studiato per ottenere accordo¹⁴ $\mathcal{S} = 0.45$ (come in Figura VI.6).

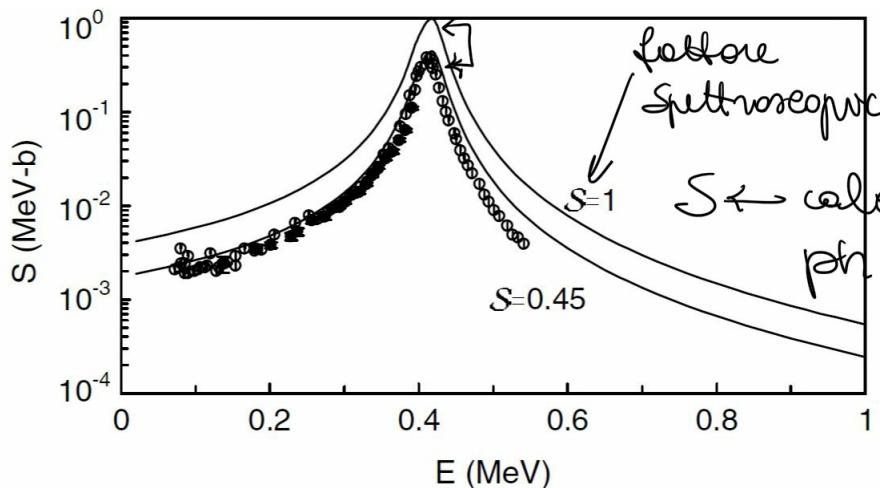


Figura VI.6: Andamento del fattore astrofisico ricavato con il metodo *phRM*. La curva continua in alto è l'andamento calcolato senza correzione, mentre quella che “fitta” i dati corrisponde a un fattore spettroscopico pari a 0.45.

¹³Tecnicamente per ottenere un'espressione di questo parametro avrei bisogno di un metodo *ab-initio*, ma se lo avessi non ci sarebbe motivo di usare il metodo RM.

¹⁴Per decidere l'accordo si cerca di fare un *matching* per il picco della risonanza.

Conclusioni Concludiamo così la trattazione dei metodi di studio di reazioni. I metodi ab-initio sono certamente indipendenti dai dati, ma molto dispendiosi e complicati; il metodo RM invece permette il calcolo anche nel caso di molti nucleoni, ma dipende fortemente dai dati a disposizione (in un certo senso è un fit).

Capitolo VII

Tecniche sperimentali di misura

In questo capitolo vengono presentati alcuni degli esperimenti condotti per misure dirette di reazioni nucleari di interesse astrofisico, quali LUNA ed ERNA, e tre differenti tecniche di misura indiretta. Il capitolo copre le lezioni 14/04/2021, 15/04/2021, 19/04/2021 e 21/04/2021.

Tecniche di misura Abbiamo visto che la sezione d’urto “precipita” vari ordini di grandezza per energie sempre più piccole, quindi vi saranno pochissimi eventi; non solo a quelle energie l’ordine di grandezza del segnale è circa lo stesso di quello del fondo, per cui si deve trovare una soluzione che permetta di migliorare la misura. Esistono principalmente due strategie:

1. Metodi diretti di misura con l’uso di qualche “trucco”.
2. Metodi indiretti di misura.

1 Metodi diretti

Innanzitutto per risolvere il problema del numero di eventi si utilizzano acceleratori ad altissima luminosità (fasci molto densi). Per quanto riguarda il *background*, si cerca di schermalo il più possibile: i Laboratori Nazionali del Gran Sasso (LNGS)¹ sono usati per esperimenti con pochi eventi, come quelli di fisica nucleare (LUNA), sui neutrini (esperimento GERDA col decadimento $0\nu\beta\beta$ ² o lo stesso Borexino) e sulla *dark matter* (XENON1T o DARKSIDE).

Raggi cosmici Particelle cariche (muoni per esempio) ad alta energia molto penetranti. Per schermare questo tipo di fondo esistono principalmente due tipi di tecniche:

- *active shielding*: si circonda il rivelatore con uno secondario sensibile ai raggi cosmici e si studiano gli eventi in anticoincidenza.
- *passive shielding*: si posiziona il rivelatore in un mezzo schermante (come un blocco o il sottosuolo), tuttavia l’interazione tra mezzo e raggi (o prodotti) può portare a un aumento del fondo.

L’unità di misura dello schermaggio è *l’acqua equivalente*; al Gran Sasso per esempio vi sono 1400 m di roccia che corrispondono a 3800 m di acqua equivalente e questo comporta una riduzione per muoni dell’ordine di 10^6 , per neutroni di 10^3 e per raggi γ di 10.

In Figura VII.1 riportiamo lo spettro dei raggi γ in grigio sulla superficie e in nero nei laboratori

¹Link al sito: <https://www.lngs.infn.it/it/astrofisica-nucleare>

²Si tratta di un decadimento $\beta\beta$ nel quale non dovrebbe comparire il neutrino; se così fosse allora $\nu = \bar{\nu}$ (*particelle di Majorana*).

del Gran Sasso. Fino a circa 3 MeV si ha un certo flusso di fotoni dovuto per una “piccola” parte ai raggi cosmici (schermati) e per il contributo maggiore agli elementi radioattivi presenti nelle rocce; per energie superiori a 2.6 MeV invece abbiamo principalmente raggi cosmici, che vengono appunto ben schermati (fatta eccezione per alcuni picchi di reazioni note e quindi semplici da contare).

Ci chiediamo adesso se sia possibile migliorare lo schermaggio. La soluzione più semplice sembrerebbe quella di aggiungere un ulteriore schermo, per esempio circondando il rivelatore di piombo, ed effettivamente questo si fa, come mostrato in Figura VII.1 (b). Tuttavia, il mezzo dev’essere “ripulito” da qualsiasi impurità radioattiva e spesso quel che si fa è aspettare un tempo sufficiente affinché divenga inerte³.

Un nemico nel sottosuolo Abbiamo visto che porsi nel sottosuolo permette lo schermaggio dai raggi γ , tuttavia si presenta un’altra difficoltà: il radon ^{222}Rn . Questo è radioattivo e si trova in stato gassoso, intrappolato nel sottosuolo circola nella zona sperimentale. Per risolvere tale problema tipicamente si installa il rivelatore in un contenitore in cui si genera un flusso d’aria continuo.

1.1 LUNA

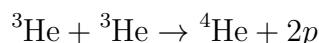
Discutiamo in questa sezione il *Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics* detto LUNA.

Un po’ di storia I lavori per l’esperimento LUNA iniziarono nel 1990 insieme a quelli al Gran Sasso ed è tuttora operativo.

1. LUNA I⁴ dal 1994 al 2003.
2. LUNA II dal 2000 al 2020.
3. LUNA MV in progettazione.

1.1.1 LUNA I

La prima reazione Nell’esperimento LUNA I si studiò per prima la reazione⁵:



dove un ^3He cosisteva in un fascio con una corrente pari a $300 \mu\text{A}$ e l’altro in una targhetta gassosa posta nella camera di interazione a una pressione⁶ di 0.5 mbar . Un *beam dump*, anch’esso collocato nella camera di interazione, bloccava il fascio e permetteva, tramite la misura della variazione di temperatura, di stimare la *beam current* con una precisione del 3%⁷.

Fu scelta questa reazione non solo perché presente nella *ppI*, ma anche perché negli anni ’90 era particolarmente discussa la questione dei neutrini solari e Fowler aveva supposto che la sezione

³Un piccolo aneddoto a tal riguardo: nel Gennaio del 2016 in Sardegna fu ritrovata sul fondo del mare una nave romana che conteneva 30 lingotti di piombo; non avevano alcun valore artistico o economico, ma per i fisici furono “oro” dal momento che la concentrazione di isotopi radioattivi al suo interno dopo 2000 anni era effimera e per questa ragione furono portati nei LNGS, dove tuttora si trovano.

⁴Fu impiegato un acceleratore “*home made*”, progetto di laurea di uno studente, che cosisteva di un Van de Graaff a 50 kV. Il fascio aveva uno *spread* $< 20 \text{ eV}$ (molto piccolo) che permetteva un’accurata determinazione dell’energia delle particelle incidenti e inoltre il voltaggio era noto meglio di 1 parte su 10^{-4} .

⁵Reazione *ppI*, guarda Figura V.1.

⁶Da una versione a quella successiva si è migliorato anche questo settaggio.

⁷Per ottenere questa precisione era stato posto nella camera anche un calorimetro che tenesse conto dell’effetto di ionizzazione dovuto al passaggio del fascio attraverso il gas.

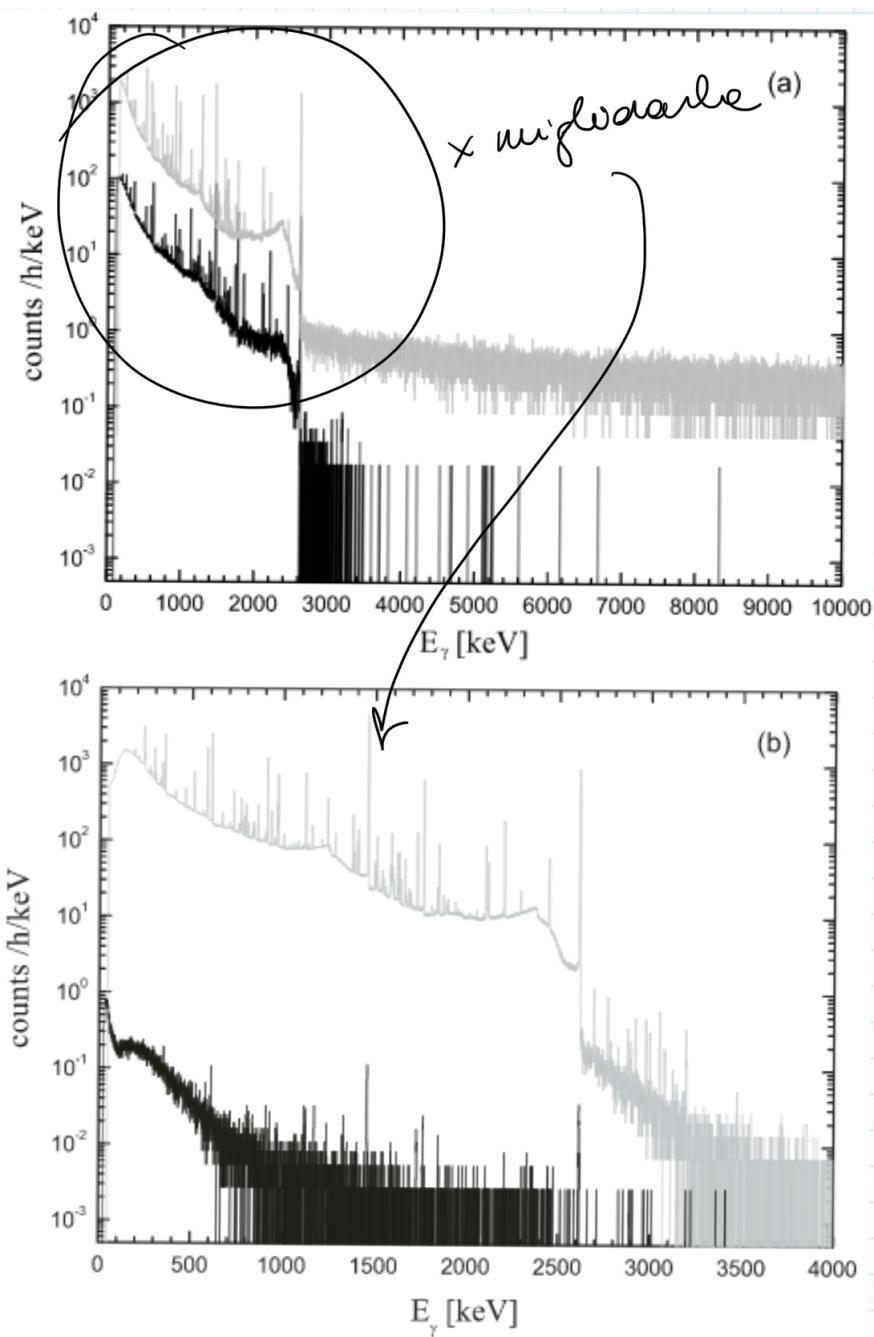


Figura VII.1: Spettro dei raggi γ sulla superficie in grigio e nei laboratori in nero: il grafico (a) riporta i dati senza altro schermaggio, il grafico (b) invece mostra i dati con uno schermo aggiuntivo.

d’urto di tale reazione fosse sottostimata a causa di una risonanza non osservata⁸. Prima di LUNA non si avevano acquisizioni per energie inferiori ai 26 keV e il picco di Gamow di tale reazione è 21 ± 5 keV; con LUNA I si raggiunsero 16.5 keV misurando⁹ una sezione d’urto pari a $20 \text{ fb} = 2 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2$. Il rivelatore (composto da quattro $\Delta E - E$ particle detector¹⁰) permetteva di identificare evento per evento una regione in cui l’evento stesso si collocava, al

⁸Guarda la sezione 3.2.5-*Risonanza e neutrini solari* per l’ipotesi di Fowler.

⁹Si avevano 2 eventi al mese.

¹⁰La configurazione dei rivelatori $\Delta E - E$ consiste in due mezzi di diverso spessore posti in successione: ΔE si riferisce all’energia persa dal fascio nell’attraversamento del mezzo più sottile, mentre E a quella scambiata con il mezzo più spesso, che “frena” il fascio.

fine di poter stimare il contributo dell'*induced background*¹¹: nel fascio era presente infatti una contaminazione di deuterio di circa $d/{}^3\text{He} \sim 1 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-6}$ e questa “sporcava” la misura a causa della reazione ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$ ¹². In Figura VII.2 riportiamo i risultati della presa dati: si possono facilmente distinguere 2 regioni differenti.

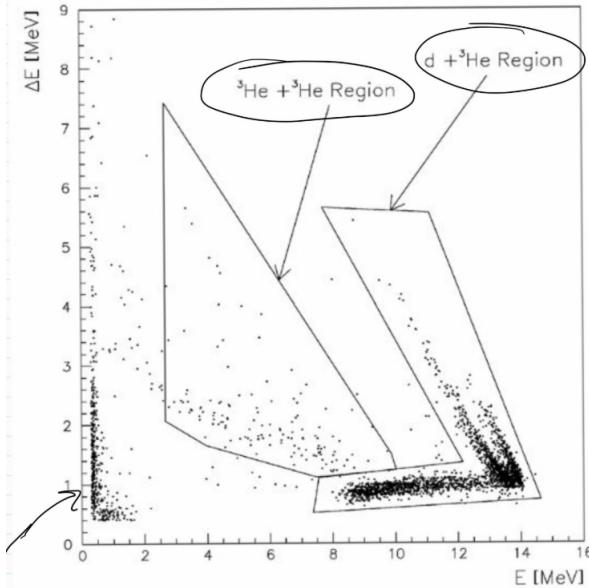


Figura VII.2: Dati dell'esperimento. Si riescono a identificare 2 regioni, una di interesse e l'altra di rumore. Si osserva anche una zona particolarmente popolata nelle basse energie lungo le ascisse che è dovuta al rumore elettronico indotto dal fascio.

Si osserva anche la presenza di un certo *noise* sulle ascisse, che tuttavia non preoccupa dal momento che la regione di interesse è molto meno popolata.

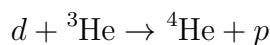
Per energie inferiori ai 20.7 keV le 2 regioni si sovrapponevano e non era più possibile distinguere tra fondo e misura di interesse, allora furono installati 2 rivelatori di protoni in successione e in coincidenza, dal momento che la reazione ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$ produce un solo protone e non due. Per avere un'idea di quanto fu ridotto il fondo si guardi la Figura VII.3.

Si ottenne così i risultati per la sezione d'urto e il fattore astrofisico di Figura VII.4. Notiamo che per basse energie il fattore astrofisico tende a crescere; ciò è dovuto non a una risonanza sotto soglia, ma dai risultati del fit sembrerebbe legato all'elettroscreening¹³:

$$\frac{\sigma_{lab}(E)}{\sigma_{bare}(E)} \sim \exp\left(\frac{\pi\eta U_e}{E}\right)$$

Fu confutata così l'ipotesi di Fowler e non solo, si potè valutare anche l'effetto dell'elettroscreening.

Il problema dello screening L'effetto di elettroscreening dato dal modello $U_e = 220$ eV non era compatibile con quello misurato $U_e \simeq (294 \pm 47)$ eV. Si iniziò quindi a studiare tale fenomeno. Fu scelta la reazione (precedentemente non di interesse):



arrivando a energie inferiori a 4.2 keV, come mostrato in Figura VII.5. Nonostante l'accordo qualitativo, si ottenne così $U_e^{exp} \simeq (132 \pm 9)$ eV, non compatibile con $U_e^{th} \equiv U_{ad} = 65$ eV.

¹¹Ovvero il fondo indotto dalla misura stessa.

¹²La cui sezione d'urto è 10^6 volte maggiore di quella della reazione di interesse.

¹³Riguarda la sezione 3.3 - *Elettroscreening*.

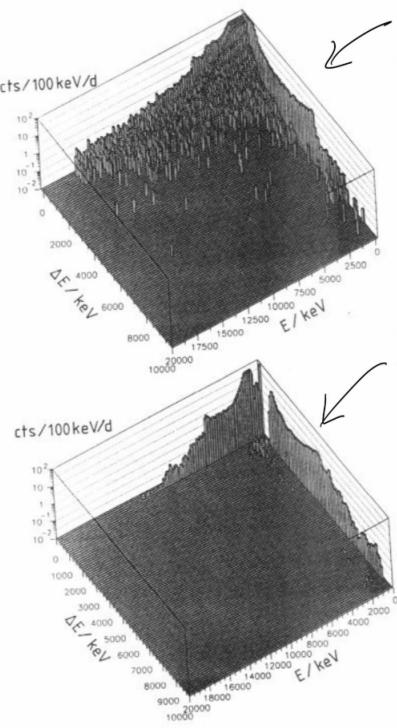


Figura VII.3: Riduzione del fondo, sul piano $x - y$ vi è la matrice $\Delta E - E$, mentre sull'asse z sono riportati i conteggi: in alto risultati con *running time* di 16 giorni per un solo rivelatore a terra (presenza anche di raggi cosmici), in basso 2 rivelatori in coincidenza nel sottosuolo con *running time* di 61 giorni.

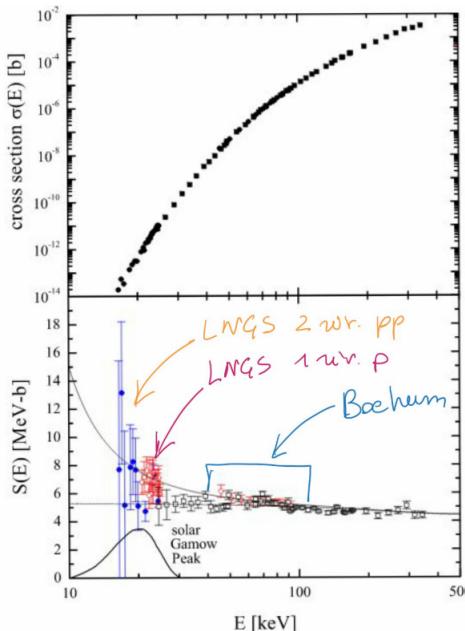


Figura VII.4: Risultati degli esperimenti. In alto la sezione d'urto; in basso il fattore astrofisico: i cerchi blu pieni sono i risultati al Gran Sasso con rivelatori di protoni in coincidenza, i cerchi rossi vuoti per energie comprese tra 20 e 25 keV sono i dati LUNA I con un solo rivelatore di protoni, mentre per energie tra 45 e 92 keV (soglia in cui il segnale è maggiore del *background*) sono i dati raccolti con lo stesso rivelatore ma a Bochum in Germania a terra. La “risalita” del fattore astrofisico è dovuta all'elettroscreening.

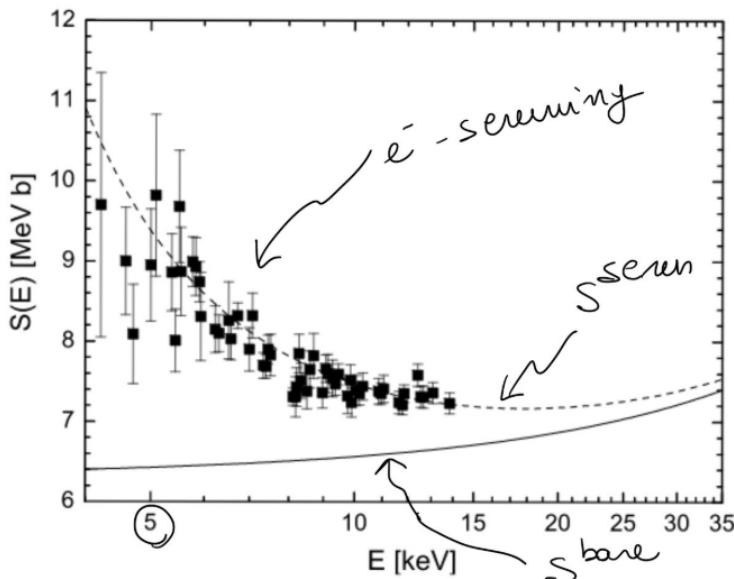
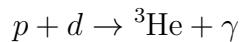


Figura VII.5: Dati di LUNA I per il fattore astrofisico: la linea continua rappresenta il modello senza schermo elettronico, la linea tratteggiata quello che ne tiene conto.

L'ultima reazione studiata in questo campo è:



intorno al picco di Gamow. Questa reazione fa parte della catena pp ¹⁴, ma è l'unico canale aperto per cui non influisce sul conto dei neutrini solari. I *range* di energie di interesse per questa reazione:

- 1 – 2 keV → *d-burning* di proto-stelle.
- $\simeq 9$ keV → *d-burning* del Sole.
- $\simeq 100$ keV → *pd* della BBN.

LUNA I si concentrò sulle energie inferiori ai 100 keV e dovette ovviamente cambiare *set-up* dal momento che l'interazione era differente (elettromagnetica): rivelatore ad alta efficienza (prendere più eventi possibile) e a largo angolo solido (ampio campo di osservazione). Fu impiegato il BGO($\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$) come scintillatore, dotato di un'efficienza di circa 70% e una risoluzione in $E \sim 8\%$.

1.1.2 LUNA II

Nel 2000 LUNA II fu impiegato per lo studio della *pd* della BBN (100 keV). Fu utilizzato un acceleratore commerciale a *high current* (Cockcroft-Walton): 1 mA per H^+ e 500 μA per He^+ con un voltaggio pari a 400 kV, rimanendo stabile anche per 40 giorni di operatività. Furono costruite 2 linee di prese dati:

I targhetta gassosa

¹⁴Importante nelle proto-stelle: quando si raggiungono temperature $T \sim 10^6$ K il poco deuterio presente (dovuto all'arricchimento di popolazioni precedenti) può reagire $p + d$, innescando un *d-burning* prima della catena pp . Questo comporta un rallentamento della contrazione e quindi un aumento della vita media della proto-stella: le sue caratteristiche (luminosità, temperatura,...) rimangono infatti “congelate” fin quando dura il *d-burning* e ciò avrà conseguenze su tali quantità all’innesto del *H-buring* successivo.

II targhetta solida

Le reazioni studiate da LUNA II furono:

1. ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, studio della BBN e della pp .
2. ${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}$, studio biciclo CN-NO¹⁵.
3. ${}^{25}\text{Mg}(p, \gamma){}^{26}\text{Al}$, studio di altri cicli stellari.
4. pd , studio della BBN.

Ricordiamo la Figura IV.11, dove compaiono in rosso per basse energie i dati di LUNA I (Casella 2002) e per energie maggiori quelli di LUNA II.

Lo studio della $\text{he}\alpha$ Discutiamo adesso la reazione ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Prima di LUNA erano stati sviluppati 2 metodi di misura:

1. *Prompt γ method* che si basa principalmente sulla misura dei fotoni prodotti. Da questo si era ottenuto:

$$S(0) = (0.507 \pm 0.016) \text{ keVb}$$

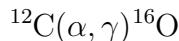
2. *Activation method* che sfrutta la cattura elettronica¹⁶ del ${}^7\text{Be}$, per cui studiando la radioattività si può risalire al numero di ${}^7\text{Be}$. Con questo metodo si ottenne invece:

$$S(0) = (0.572 \pm 0.026) \text{ keVb}$$

Queste due misure erano quindi in disaccordo, per cui LUNA II utilizzò contemporaneamente entrambi: fu impiegata una targhetta gassosa di ${}^3\text{He}$ e un *HPGe (High Purity Germanium) detector*, che permetteva di raccogliere i fotoni emessi vicino alla *interaction chamber*; successivamente raccolsero anche il ${}^7\text{Be}$ per studiare la radioattività¹⁷. Come risultato, riportato in Figura VII.6, si ebbe l'assenza di discrepanza e un valore¹⁸ $S(0) = (0.567 \pm 0.022) \text{ keVb}$ in accordo con quello del metodo 2., perciò si suppose che nell'esperimento con il metodo 1. non furono raccolti tutti i fotoni.

1.1.3 LUNA MV

L'ultima frontiera per LUNA è una macchina acceleratrice con un voltaggio di 3.5 MV detta appunto LUNA MV, ma per tale scopo le dimensioni non sono conformi allo spazio disponibile nei LNGS per cui verrà costruita da un'altra parte e questo lascia a disposizione LUNA II per possibili misurazioni future. L'obiettivo di LUNA MV sarà lo studio di reazioni di difficile misura e importanti per la verifica del modello; per esempio il cosiddetto *holy grail* dell'astrofisica¹⁹:



Determinare la sezione d'urto di questa reazione permetterebbe di stimare le abbondanze di ${}^{12}\text{C}$ e ${}^{16}\text{O}$, difficili da misurare.

¹⁵Guarda la sezione

¹⁶ ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$ con un tempo di dimezzamento pari a $\tau_{\frac{1}{2}} \sim 53 \text{ d}$.

¹⁷Per schermare i fotoni del fondo dovuti alla radiazione naturale (la cui energia $E_\gamma \sim Q \sim 1.586 \text{ MeV}$ value della reazione) rivestirono il rivelatore del piombo ritrovato nella nave romana.

¹⁸In realtà questo valore deriva sia dalle misure sia da un'estrapolazione; infatti 4 eV di errore deriva dal modello teorico scelto.

¹⁹Guarda sezione 3 - *The Holy Grail*.

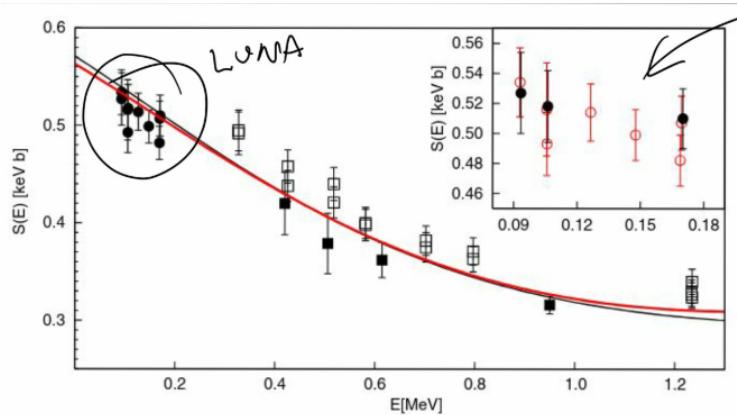


Figura VII.6: Risultati di LUNA II. I quadratini pieni sono i dati vecchi, quelli vuoti sono i dati nuovi e i cerchi sono i dati di LUNA. Quelli nel riguardo in alto a sinistra sono in nero i dati con il metodo 2. e in rosso quelli con il metodo 1. (per LUNA non hanno discrepanza).

ATOMKI Anomaly Per quanto riguarda la ricerca di nuova fisica acceleratori di maggiore potenza permetterebbero lo studio dell'anomalia di ATOMKI, per la prima volta osservata con la reazione



Non fecero *particles identification*, ovvero non misurarono direttamente gli elettroni e i positroni prodotti. L'anomalia che osservarono fu un picco nella sezione d'urto per un angolo $\theta_{ee} \sim 120^\circ$; si è quindi pensato alla possibilità che venisse prodotta una particella massiva sconosciuta²⁰ (materia oscura) ${}^8\text{Be}^* \rightarrow {}^8\text{Be} + X$ e $X \rightarrow e^+ + e^-$ con $M_X \sim 17$ MeV, da cui il nome di particella X17. Ci fu molta discussione al riguardo, anche perché il *background* non era stato calcolato bene e non si era considerata la velocità di decadimento del ${}^8\text{Be}$ in 2α .

ATOMKI si spinse più avanti²¹ studiando:



Oltre al canale $\rightarrow {}^4\text{He} + \gamma^*$ si potrebbe avere $\rightarrow {}^4\text{He} + X$; osservarono la stessa anomalia. Questa reazione si può studiare con un metodo *ab-initio* che ha confermato l'assenza di questo picco.

LUNA MV potrebbe mettere fine a questa discussione poiché riuscirà a raggiungere i 17 MeV per le reazioni $p + {}^3\text{H}$ e $p + {}^7\text{Li}$. Per quanto riguarda quest'ultima, sta per essere studiata al *Laboratory of Paul Scherrer Institute* (LPSI) in Svizzera, dove cercano anche di misurare il decadimento non standard del μ .

1.2 ERNA

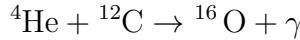
Un altro esperimento che discuteremo è *European Recoil separator for Nuclear Astrophysics* o ERNA, situato a Caserta in Campania, che utilizza appunto il metodo del *recoil* (adottato anche in altri esperimenti).

²⁰Tipicamente le particelle della coppia hanno un angolo molto “piccolo”.

²¹Anche nell'esperimento DAMA ai LNGS dicono di aver osservato fluttuazioni di materia oscura, tuttavia solo loro riescono a ossevarle.

1.2.1 Recoil mass separator

Studiamo la reazione poco probabile $a + b \rightarrow c + \gamma$ con a ioni accelerati e b targhetta, per esempio:



Oltre alla radiazione che viene raccolta da un rilevatore, dal momento che la reazione è “rara”, avremo un fascio uscente di a e c ; per separare il reagente dal prodotto si utilizza una macchina *recoil mass separator* che sfrutta la differenza di massa tra a e c per deviare la traiettoria del fascio di a attraverso campi magnetici, facendo sì che solo il fascio di c raggiunga il rivelatore. Quest’ultimo è messo in coincidenza con il rivelatore di fotoni.

1.2.2 Cinematica Inversa

Poniamoci nel sistema del centro di massa²², dove vediamo a e b scontrarsi e γ e c “scatterare” con un certo angolo θ_{CM} :

Stato Iniziale	Stato Finale
$(E'_a, p'_a, 0, 0) + (E'_b, -p'_b, 0, 0)$	$(E'_c, -p'_c \cos \theta_{CM}, -p'_c \sin \theta_{CM}, 0) + (E'_\gamma, E'_\gamma \cos \theta_{CM}, E'_\gamma \sin \theta_{CM}, 0)$

Dalla conservazione del quadrimpulso:

$$\begin{aligned} m_a + m_b + \underbrace{\frac{p'^2}{2\mu_{ab}}}_{T_{rel}} &= m_c + \frac{E'^2_\gamma}{2m_c} + E'_\gamma \\ -p'_c \cos \theta_{CM} + E'_\gamma \cos \theta_{CM} &= 0 \\ -p'_c \sin \theta_{CM} + E'_\gamma \sin \theta_{CM} &= 0 \end{aligned}$$

per cui $E'_\gamma = p'_c$ e $E'_\gamma = \overbrace{m_a + m_b - m_c}^{\Delta M} + T_{rel}$.

Nel sistema del laboratorio:

Stato Iniziale	Stato Finale
$(E_a, p_a, 0, 0) + (m_b, 0, 0, 0)$	$(E_c, p_c \cos \theta_c, p_c \sin \theta_c, 0) + (E_\gamma, E_\gamma \cos \theta_\gamma, E_\gamma \sin \theta_\gamma, 0)$

da cui $p_{CM} = p_a$ ed $E_{CM} = m_b + E_a$; trasformando con Lorentz ($\beta = p_{CM}/E_{CM}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$) si ottiene:

$$p_{c,y} = p'_{c,y} \Rightarrow \tan \theta_c = -\frac{p'_c \sin \theta_{CM}}{\gamma[\beta E'_c + p'_c \cos \theta_{CM}]}$$

Ci chiediamo allora quale sia l’angolo massimo di scattering per c : $\sin \theta_{CM} = 1$ per cui $\theta_{CM} = \pi/2$.

$$\tan \theta_c|_{\max} = \frac{p'_c}{\gamma \beta E'_c} = \frac{E'_\gamma}{\beta E_c} \simeq \frac{E_\gamma}{p_c}$$

dove abbiamo trascurato il segno e usato le trasformazioni di Lorentz nel secondo passaggio. Abbiamo allora che la traiettoria di c sta dentro un cono di ampiezza massima $\theta_{c,\max} \sim \tan^{-1} E_\gamma/p_c$ e per convergere il fascio bisogna massimizzare p_c ; questo scala come p_{CM} che è maggiore per $m_a > m_b$.

Dunque, nello studio di ${}^4\text{He} + {}^{12}\text{C}$ si usa il carbonio come proiettile e non l’elio. Questa configurazione viene detta **cinematica inversa** e migliora la separazione nella macchina di *recoil*. Riportiamo uno schema dell’apparato sperimentale in Figura VII.7.

L’unico difetto del metodo sta nel fatto che minore è l’energia incidente maggiore dev’essere il raggio della struttura.

²²Mettiamo $c = 1$ e indichiamo le quantità riferite al sistema del centro di massa con l’apostrofo ‘.

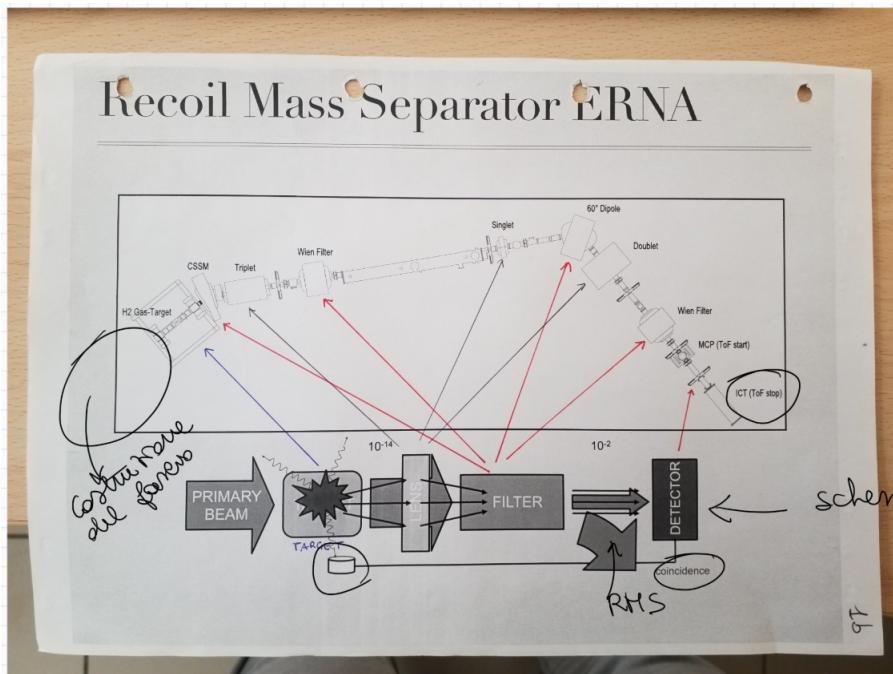
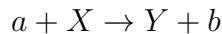


Figura VII.7: Schema dell'apparato sperimentale di ERNA: sono presenti lenti focalizzanti all'uscita di ogni filtro. In questo caso a curvare sono le *c* mentre le *a* vanno a dritto.

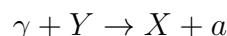
2 Metodi indiretti

Passiamo ora a illustrare 3 metodi di misura indiretti²³: *Coulomb dissociation method* (CD), *Trojan Horse method* (TH) e *Asymptotic Normalization Coefficients method* (ANC)

2.1 Coulomb Dissociation method



dove spesso $b \equiv \gamma$. Invece di studiare questa ci concentreremo sulla fotodisintegrazione:



Dallo studio della sezione d'urto²⁴, detta S la matrice di scattering:

$$\sigma_{aX} = \frac{\pi}{k_1^2} \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_X + 1)} \sum_{\ell} (2\ell + 1) |S_{if}|^2$$

$$\sigma_{\gamma Y} = \frac{\pi}{k_2^2} \frac{1}{2(2S_Y + 1)} \sum_{\ell} (2\ell + 1) |S_{fi}|^2$$

con $k_1 \equiv \sqrt{2\mu_{aX} E_{CM}}$, $k_2 \equiv E_{\gamma} = Q + E_{CM}$ ²⁵ e $S_{if} = (S_{fi})^*$, per cui $|S_{if}| = |S_{fi}|$. Da questo otteniamo il **principio del bilancio dettagliato**:

$$\frac{\sigma_{aX}}{\sigma_{\gamma Y}} = \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{2(2S_Y + 1)}{(2S_a + 1)(2S_X + 1)}$$

che deriva dall'invarianza per inversione temporale dell'interazione elettromagnetica. Dunque se misuriamo $\sigma_{\gamma Y}$ abbiamo una stima di σ_{aX} . Sperimentalmente viene fatto interagire Y con una targhetta pesante Tg (tipo piombo) così che la reazione $Y\gamma$ sia dovuta a un fotone virtuale γ^* . Schema in Figura VII.8.

²³Per approfondire Tribble, R.E. et al., Rep.Prog.Phys., 2014, vol.77, DOI: [10.1088/0034-4885/77/10/106901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/10/106901).

²⁴Ricordarsi che il fotone ha solo 2 polarizzazioni possibili.

²⁵Abbiamo trascurato il rinculo del nucleo Y .

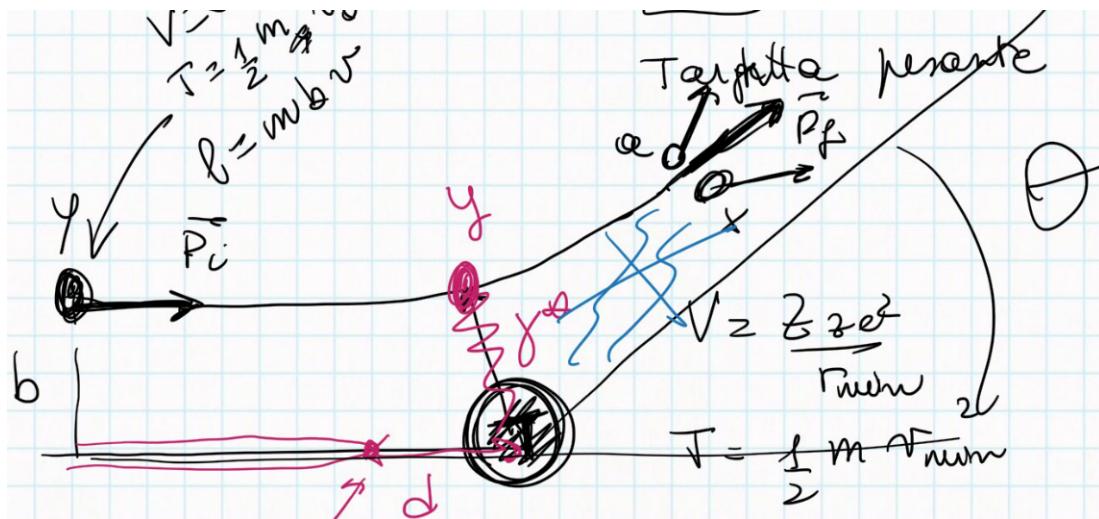


Figura VII.8: Schema dello scattering con targhetta pesante. Notazione: d distanza minima se il parametro di impatto è nullo, b parametro di impatto, θ angolo di scattering.

Se il parametro di impatto è nullo, $b = 0$, si ha nel punto di minima distanza: $V = Zze^2/d$ e $T = 0$. Dalla conservazione dell'energia, con v_0 velocità iniziale:

$$d = 2 \frac{zZe^2}{mv_0^2}$$

In generale: $V = Zze^2/r_{\min}$, $T = mv_{\min}/2$ e $\ell = mr_{\min}v_{\min}$. Se supponiamo di avere scattering elastico allora $\Delta p \equiv |p_i - p_f| = 2p \sin(\theta/2) = 2mv_0 \sin(\theta/2)$. Dalla relazione tra variazione di impulso e forza si ha $\Delta p = \int F dt = zZe^2 \int \cos \beta dt / r^2$, dove β è l'angolo formato dalla bisettrice dell'angolo $\pi - \theta$ e il vettore distanza tra Y e Tg : se Y arriva da $-\infty$ a $t = 0$ si ha $\beta(0) = -(\pi - \theta)/2$, mentre a $t = \infty \beta(\infty) = (\pi - \theta)/2$.

Per trovare la relazione funzionale tra β e t scriviamo la conservazione del momento angolare²⁶:

$$mv_0 b = mr^2 \dot{\beta}$$

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\beta}{v_0 b}$$

Dunque:

$$2mv_0 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{v_0 b} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \beta d\beta$$

$$b = \frac{d}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

dove abbiamo usato l'espressione di d trovata in precedenza.

A questo punto come al solito facciamo alcune approssimazioni:

1. Trascuriamo l'interazione nucleare (altrimenti non avrei γ virtuale), per cui $b \gg 1$ e di conseguenza $\theta \ll 1$.
2. Facciamo l'approssimazione *one-photon-exchange*, quindi abbiamo lo scattering con un solo fotone e trascuriamo l'interazione (*photon exchange*) tra i prodotti a e X con il nucleo pesante (*post-acceleration effects*).

²⁶ \vec{v} in coordinate polari: $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\beta} \hat{\beta}$

Grazie a queste due approssimazioni la velocità relativa tra i prodotti è piccola quindi possiamo lavorare a energie maggiori, migliorando la rivelazione, e non abbiamo grandi difficoltà con la barriera di Coulomb.

$$Y + Tg \rightarrow Tg + a + X \Rightarrow \gamma^* + Y \rightarrow a + X$$

Dalla misura della prima abbiamo la seconda. Non svolgiamo il calcolo, ma riportiamo il risultato solo per i multipoli elettrici:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{d\sigma_{E\lambda}^\gamma}{dE} \frac{dn_{E\lambda}}{dE}$$

dove l'ultima derivata è la densità di γ^* nello spazio delle fasi e dipende solamente dalla cinematica, non da Y (quindi possiamo calcolarla). Per quanto riguarda la derivata²⁷ della sezione d'urto in funzione dell'energia:

$$\frac{d\sigma_{E\lambda}^\gamma}{dE} \sim \frac{(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} E_\gamma^{2\lambda-1} \frac{d}{dE} (B(E\lambda))^*$$

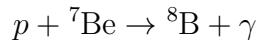
dove B è la *reduction transition probability* definita come:

$$B(E\lambda, J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \left\langle J_f \mid \underbrace{Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) r^\lambda \rho(\vec{r})}_{E\lambda} \right\rangle \right|^2$$

L'elemento di matrice di multipolo si può calcolare tramite le stime di Weisskopf²⁸.

Da $d^2\sigma/d\Omega dE_\gamma$ si ottiene $\sigma_{E\lambda}^\gamma$ e da questa σ_{cattura} . Conta in particolare $E1$, ma verificare che il contributo dei termini superiori $\lambda > 1$ (per esempio $M1$ ed $E2$) è “piccolo” non è semplice, c’è molta teoria; inoltre, dev’essere trovato un buon bilancio tra θ e b per rispettare l’approssimazione 1. e al contempo non rendere troppo difficoltosa la misura di θ ²⁹, mentre per mantenere l’approssimazione 2. bisogna aumentare l’energia.

Un esempio Prendiamo la reazione:



Questa è una reazione studiata molto e con varie tecniche, per cui è un ottimo campione per testare un metodo.

Procedendo come abbiamo studiato³⁰:



Si sono fatti vari esperimenti a energie differenti³¹:

- 47 AMeV e 52 AMeV, esperimento RIKEN in Giappone. Questa misura era affetta significativamente dal background dovuto ai fotoni di interazione tra prodotti e targhetta (*multi-photon-exchange*).
- 83 AMeV, esperimento MSU in America. I rivelatori usati in questa misurazione erano a bassa efficienza.

²⁷Osserviamo che il fattore moltiplicativo ricorda quello del rate in equazione (2.2) vista per il decadimento γ , dove però avevamo $\lambda = J$.

²⁸Vedi 2.2 - *Trattazione quantistica*.

²⁹ $\theta \rightarrow 0$ non è facile da misurare.

³⁰Il piombo dev’essere nel fondamentale.

³¹L’unità di misura AMeV indica *tot* MeV per nucleone.

- 254 AMeV, esperimento GSI in Germania. È il migliore tra i tre.

Nel caso dell'ultimo esperimento (quello su cui ci concentriamo) fu fatta un'analisi in multipoli (fino a $E2$). In Figura VII.9 riportiamo i risultati ottenuti, mentre in Figura VII.10 sono riportati i risultati anche degli altri esperimenti. Notiamo da quest'ultimo grafico che non vi è accordo, ma ciò è dovuto alle difficoltà spiegate precedentemente (tuttora vi è discussione).

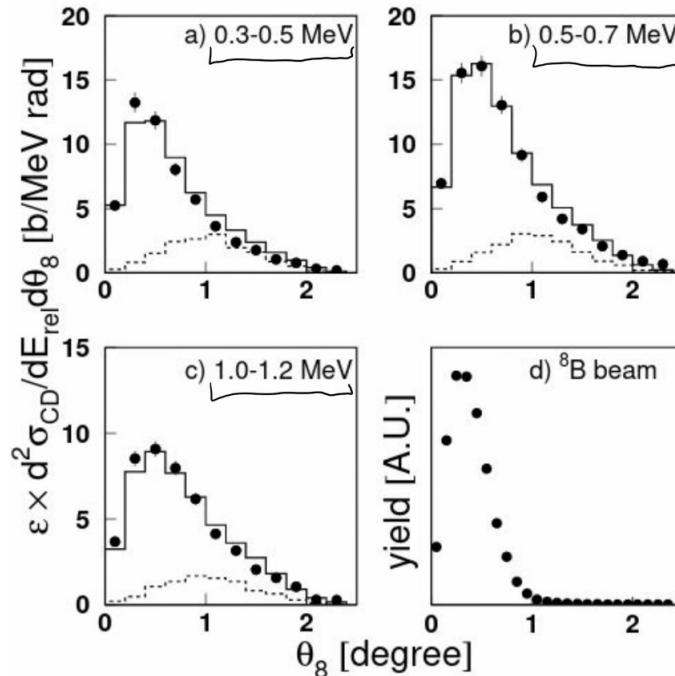


Figura VII.9: Risultati dell'esperimento GSI. Il pannello in basso a destra è il fascio di ${}^8\text{B}$ che non ci interessa. Negli altri pannelli abbiamo 3 intervalli di energia nel sistema del centro di massa: i punti rappresentano i dati sperimentali, mentre gli histogrammi in linea continua sono simulazioni con il contributo $E1 + M1$ e quelli in linea tratteggiata sono simulazioni con il contributo solo di $E2$.

Con questo metodo però non si riescono a vedere le risonanze.

Un'ultima osservazione Si può avere $E1$ e $M1$ contemporaneamente, perché lo stato di scattering può avvenire con onde pari o dispari che portano allo stesso J , per esempio si potrebbe avere³² $E1$ in onda S (pari) e $M1$ in onda P (dispari), ma sperimentalmente è impossibile distinguere; per cui se abbiamo un processo $\gamma + X \rightarrow X^* \rightarrow a + b$ ($\pi^a = \pi^b = 1$) ciò che si vede sono $\sum_\ell (2\ell + 1)$ onde, con ℓ momento relativo tra i prodotti, quindi non si può distinguere ℓ .

³²Ricordarsi che:

$$E \rightarrow \pi = (-1)^L$$

$$M \rightarrow \pi = (-1)^{L+1}$$

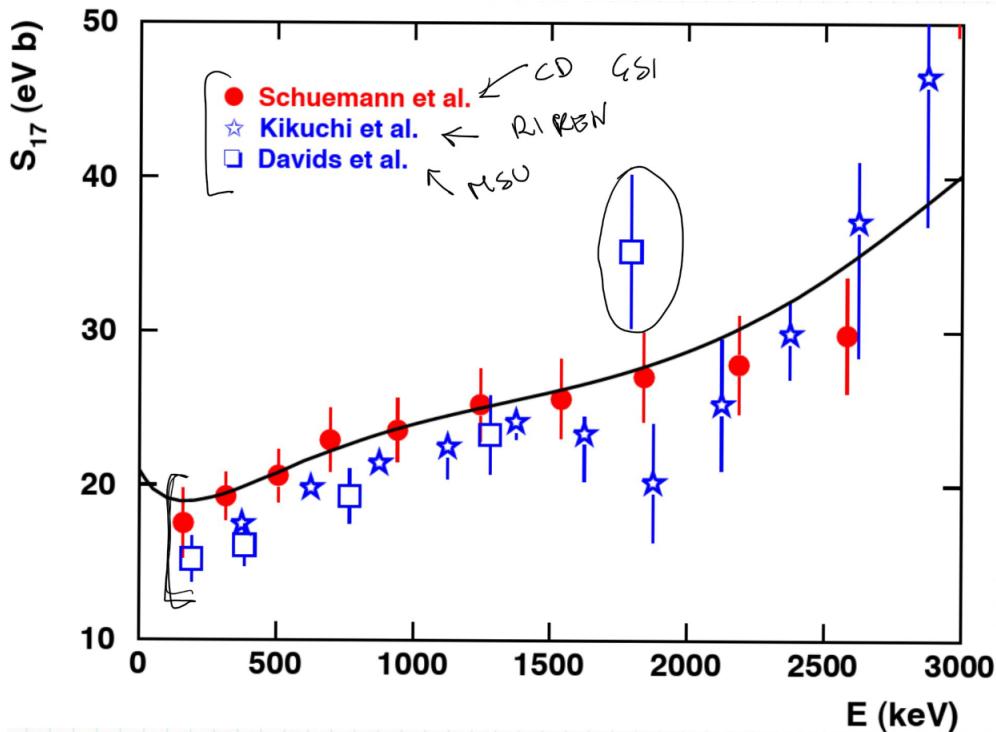
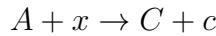


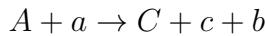
Figura VII.10: Risultati dei vari esperimenti a confronto.

2.2 Trojan Horse method

Consideriamo la reazione³³:



L'idea del metodo consiste, come il nome suggerisce, nell'uso di un "cavalo di Troia" per far superare la barriera Coulombiana a x : si prende un nucleo a a cluster tale $a = x + b$ dove b è uno spettatore (per rimanere nella metafora fa la parte degli dèi). Avremo allora:



La velocità di x è quindi limitata dal moto di Fermi all'interno del nucleo a , $\vec{v}_x = \vec{v}_a + \vec{v}_{\text{fermi}}$, e questo permette di avere alte velocità per a senza però uscire dal range di energie di interesse astrofisico, dato che la velocità di x di interazione è limitata. Questo vale se il nucleo b si comporta da spettatore, per cui nello studio che faremo ci metteremo nella regione quasi-free. Questo metodo è stato sviluppato a Catania e anche se coinvolge un processo a 3 corpi in realtà la reazione di interesse è a 2, dal momento che uno di questi è solo uno spettatore. Vediamone gli aspetti principali.

Primi passi Dobbiamo sviluppare una teoria che leghi la sezione d'urto a 3 corpi con quella a 2 corpi. Procediamo per *step*:

I. Lavoriamo in *Distorted Wave Born Approximation*³⁴ (DWBA)

$$\begin{aligned} \psi^+(Aa) &\equiv \chi_{Aa}^+ \phi_A \phi_a \\ \psi^-(Bb) &\equiv \chi_{Bb}^- \psi_{Cc}^- \phi_b \end{aligned}$$

³³Cambiamo notazione.

³⁴In parole povere è come la *Plane Wave Born Approximation* ma si tiene conto di Coulomb.

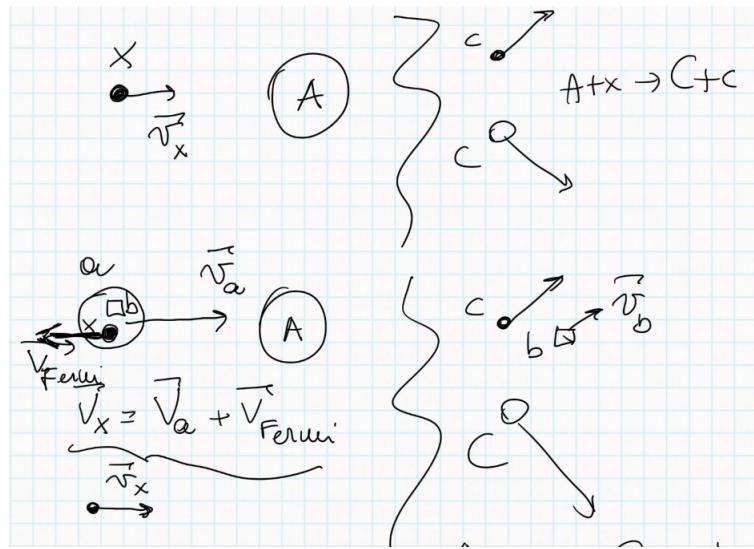


Figura VII.11: Schema della reazione senza THM in alto e con THM in basso.

dove $B \equiv C + c$, ϕ sono le funzioni d'onda dei vari nuclei, χ è l'onda distorta e $\psi_{Cc}^- \equiv \chi_{Cc}^- \phi_C \phi_c$. Avremo allora che l'elemento di matrice di transizione sarà dato da:

$$T_{fi} = \langle \chi_{Bb}^- \psi_{Cc}^- \phi_b | V_{xb} | \chi_{Aa}^+ \phi_A \phi_a \rangle$$

V è un operatore interno di a .

- II. Poiché ψ_{Cc}^- non è semplice, facciamo la *surface approximation*, ovvero approssimiamo la funzione d'onda con il suo andamento asintotico fuori da $R \sim R_{xA}$, detto per questo *cutoff radius*; questo ci permette di legare l'elemento di matrice T_{fi} con la *S-Matrix* della reazione a 2 corpi (e quindi allo sfasamento).
- III. Osserviamo che usare la PWBA rispetto alla DWBA influisce solo su un fattore moltiplicativo di normalizzazione dei dati. Avremo quindi un $S_{TH}(E)$ da riscalare;

$$\frac{d^3\sigma}{dE_cd\Omega_cd\Omega_C} = K_F \frac{v_{Cc}}{v_{Ax}} \left| W(\vec{P}_{bx}) \right|^2 \frac{d\sigma^{TH}}{d\Omega_{Ax}}$$

dove K_F è un fattore cinematico, le velocità sono quelle relative e W è la *momentum amplitude*, ovvero la distribuzione dei momenti di x in a ; l'ultimo termine è quello di interesse.

Il metodo dipende quindi fortemente dalla scelta di a e in Figura VII.12 abbiamo riportato alcune configurazioni. Tra questi i migliori sono d e ${}^6\text{Li}$.

TH nucleus	$x-s$ cluster structure	Orbital angular momentum	Binding energy (MeV)
${}^2\text{H}$	p-n	0	2.225
${}^3\text{H}$	d-n	0	6.257
${}^3\text{He}$	d-p	0	5.493
${}^6\text{Li}$	d- α	0	1.474
${}^9\text{Be}$	${}^5\text{He}-\alpha$	0	2.464
${}^{16}\text{O}$	${}^{12}\text{C}-\alpha$	0	7.162
${}^{20}\text{Ne}$	${}^{16}\text{O}-\alpha$	0	4.730

Figura VII.12: Varie possibilità per il nucleo a cluster a .

I criteri per determinare un buon “cavallo” sono:

- (i) un’energia di legame B “piccola” nel sistema $x - b$.
- (ii) una struttura semplice.
- (iii) un “buon” Q -valore per la reazione $A + a \rightarrow C + c + b$.
- (iv) una *momentum amplitude* nota.
- (v) una struttura tale da minimizzare i processi non-quasi-free, ovvero in cui b non è spettatore.

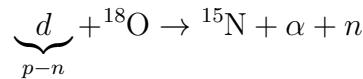
Nel dettaglio Discutiamo adesso i singoli *step* del metodo.

Step I. Scegliamo un opportuno “cavallo” (come studiato precedentemente).

Step II. Settiamo l’energia del fascio e le condizioni iniziali in modo tale che:

- (a) la velocità sia tale da superare la barriera coulombiana, ma rimanga limitata da quella di Fermi.
- (b) la cinematica rimanga quasi-free.

Per quanto riguarda quest’ultimo punto prendiamo a esempio:



Questo è il processo che vorremmo, tuttavia se il neutrone non è spettatore potremmo avere gli stessi prodotti, ma con una reazione differente, come riportato in Figura VII.13. Questi processi “sporcano” la misura, quindi è necessario trova-

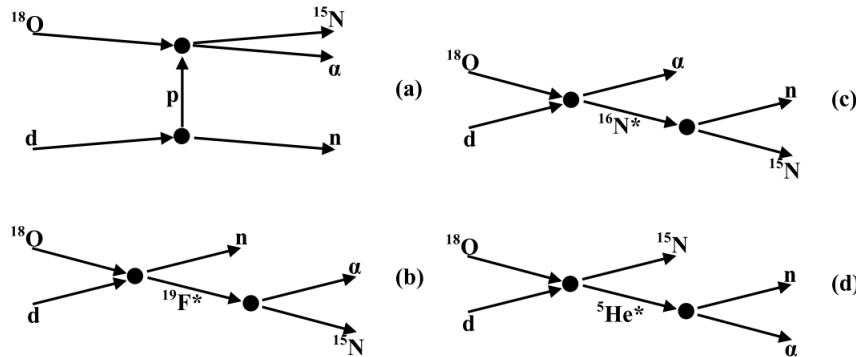


Figura VII.13: Possibili processi di reazione di $d + {}^{18}\text{O}$. Solo nel caso (a) il neutrone è spettatore.

re un modo per riconoscerli; notiamo che ognuno passa per un *compound nucleus* (${}^{19}\text{F}^*$, ${}^{16}\text{N}^*$, ${}^5\text{He}^*$) per cui sono facilmente individuabili attraverso gli *energy correlation spectra* da un picco di risonanza che non compare nella reazione cercata. Ne riportiamo un esempio in Figura VII.14 (a sinistra). Individuate le energie di risonanza si mettono dei tagli così si “ripulisce” il fascio.

Step III. Dobbiamo conoscere $|W(\vec{P}_{bx})|^2$ e per far questo ci sono 2 strade:

- viene calcolato (caso di nuclei leggeri);
- oppure si sviluppa prima una teoria di scattering e poi si misura.

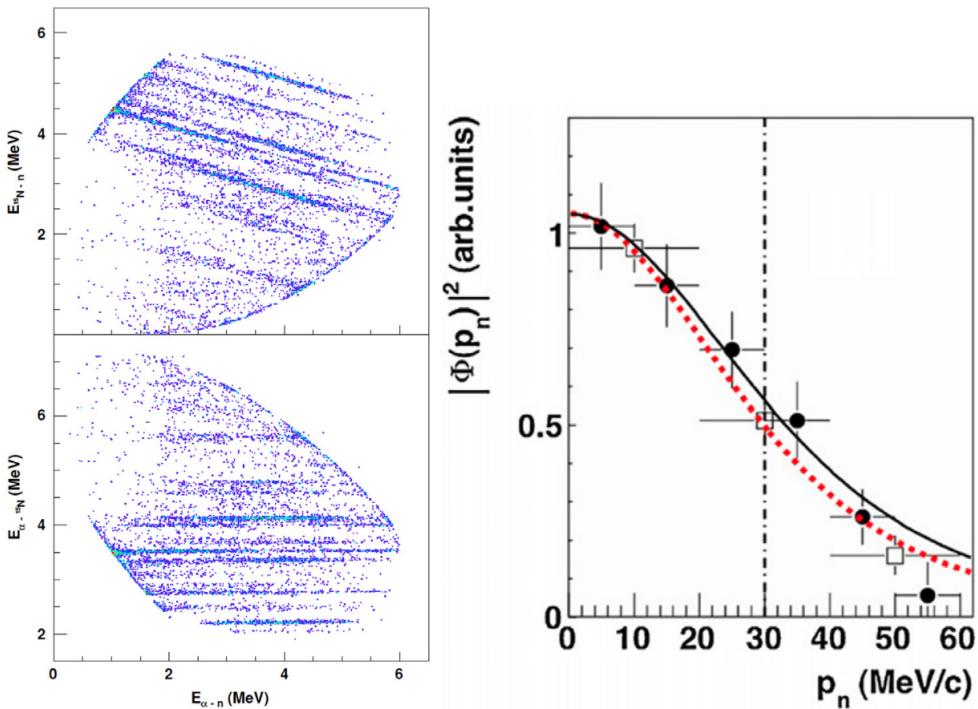
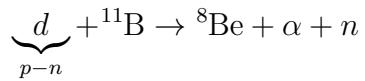


Figura VII.14: A sinistra *energy correlation spectra*: energia relativa tra α e ¹⁵N contro quella tra α e n . Nel riquadro in basso i fasci orizzontali corrispondono agli stati eccitati del ¹⁹F*. A destra distribuzione dei momenti, con $\Phi \equiv W$: i pallini sono i dati sperimentali, in rosso tratteggiata è la teoria in PWBA, mentre in nero continua è un fit con parametri liberi.

Nel secondo caso si può ottenere la misura facendo uno scattering in un certo range di energie. Prendiamo come esempio la reazione:



I risultati sono riportati in Figura VII.14 (a destra).

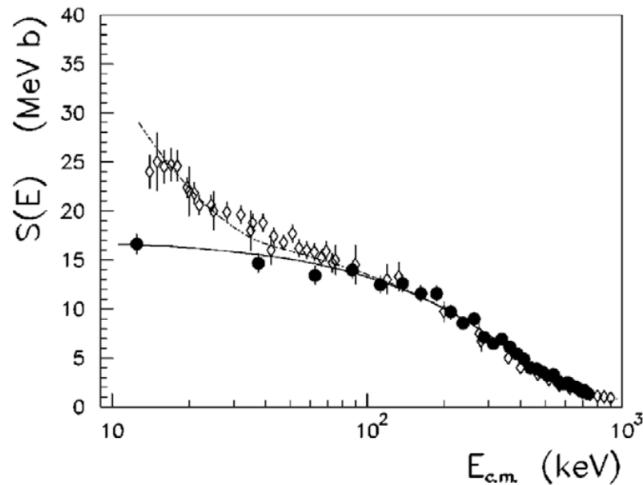
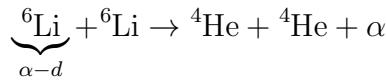


Figura VII.15: Fattore astrofisico per ⁶Li + ⁶Li: i puntini neri sono ottenuti con THM, i punti vuoti sono i dati sperimentali, la linea continua nera è un fit. Il *gap* a basse energie è dovuto all'elettroscreening, non considerato dalla teoria del THM.

Fattore astrofisico Effettivamente ciò che si misura è $\frac{d^3\sigma}{dE_c d\Omega_c d\Omega_C}$, da questa si stima $\frac{d\sigma^{TH}}{d\Omega_{Ax}}$ e infine si ottiene $S(E)$ da normalizzare. Per normalizzare spesso quello che si fa è calcolare il fattore astrofisico anche per range in cui si riescono a fare misure dirette (anche se non è di interesse) e poi si *matchano* i dati con la teoria.

La prima reazione così studiata³⁵ fu:



e si ottennero i risultati in Figura VII.15: il fattore astrofisico è stato normalizzato con i dati raccolti nel range di energie tra 600 keV e 1 MeV. Osserviamo che il THM fornisce una misura della sezione d'urto senza il contributo dell'elettroscreening, σ_{bare} , che può essere comunque stimato, per cui $U_e^{th} = 186$ eV $\ll U_e = (340 \pm 51)$ eV. Si fa allora un fit sviluppando³⁶ il fattore astrofisico in 0: $S(E) \simeq S(0) + S_1 E + S_2 E^2 + S_3 E^3$. I risultati sono riportati nella tabella in Figura VII.16 per differenti valori del *cutoff radius* R .

Coefficients	$R = 3.69$ (fm)	$R = 4.00$ (fm)	$R = 4.31$ (fm)
$S(0)$ (MeV b)	15.2 ± 0.5	16.1 ± 0.5	16.9 ± 0.5
S_1 (b)	-33.25	-36.975	-39.950
S_2 (MeV $^{-1}$ b)	19.984	23.588	26.067
$S(0)$ (MeV b)	14.8 ± 0.5	15.6 ± 0.5	16.6 ± 0.5
S_1 (b)	-27.9	-30.9	-35.8
S_2 (MeV $^{-1}$ b)	3.7	4.9	13.3
S_3 (MeV $^{-1}$ b)	14.0	16.1	11.0

Figura VII.16: Valori dei parametri del fit per differenti raggi di *cutoff*.

Si ha così un fattore astrofisico compreso tra 14.8 MeV b e 16.8 MeV b e questo dimostrò che il metodo funzionava, dando una stima per $S(E)$ e il suo errore.

³⁵Fu scelto il litio perché per questo W è facile da calcolare e anche da misurare.

³⁶Seguiamo la notazione della tabella per cui:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv S'(0) \\ S_2 &\equiv \frac{1}{2}S''(0) \\ S_3 &\equiv \frac{1}{6}S'''(0) \end{aligned}$$

2.3 Asymptotic Normalization Coefficients method

Introduzione Consideriamo anche questa volta un nucleo fortemente a cluster³⁷ $B \equiv A + a$. L'equazione di Schrödinger ridotta per $A + a$ sarà:

$$u_L'' + \left(-\frac{2\mu}{\hbar^2}V + \frac{2\mu}{\hbar^2}E - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) u_L = 0$$

Prendiamo uno stato legato $E < 0$ e definiamo $k \in \mathbb{C}$ tale $E \equiv \hbar^2 k^2 / 2\mu$, da cui $k = i\sqrt{2\mu|E|/\hbar^2} \equiv ik_I$ con $k_I \in \mathbb{R}$. Il potenziale sarà quello coulombiano più quello dovuto all'interazione nucleare $V = V_{nucl} + Z_1 Z_2 e^2 / r$; definiamo allora il parametro:

$$\eta \equiv \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \frac{\mu}{\hbar k} = -i \frac{Z_1 Z_2 e^2 \mu}{\hbar^2 k_I} \equiv i\eta_I$$

A questo punto ci mettiamo a grande distanza ($V_{nucl} \simeq 0$ per $r > R_N$) e studiamo le soluzioni dell'equazione di Schrödinger, ovvero le funzioni di Coulomb *in-going* e *out-going*: $u_L^\pm(\eta, kr)$. In realtà, siccome siamo interessati solo alla soluzione asintotica prendiamo la *in-going* perché vogliamo un andamento che sia $e^{ikr} = e^{-k_I r}$, dunque abbiamo solo $u_L^+(\eta, kr)$; questa però non è ben definita per $1 + L + i\eta = 0$, allora per correggere si usa la funzione di Whittaker:

$$W_{-i\eta, L+1/2}(-2i\rho) = e^{-\pi\eta/2} e^{-iL\pi/2} u_L^+(\eta, \rho)$$

con $\rho \equiv kr$. Si può mostrare che per $r \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$):

$$W_{-i\eta, L+1/2}(-2i\rho) \xrightarrow{\text{Onda distorta}} \underbrace{e^{i\rho - i\eta \ln 2\rho}}_{\text{Onda distorta}} e^{-\eta\pi/2} = e^{-k_I r + \eta_I \ln 2k_I r} e^{i\eta_I \pi/2}$$

Dunque la nostra soluzione $u_L(r)$ asintoticamente sarà proporzionale a $W_{\eta_I, L+1/2}(2k_I r)$ e il fattore di proporzionalità C_L viene appunto detto **Coefficiente Asintotico di Normalizzazione** (ANC).

Nel metodo Prendiamo la reazione:



in modo che sia perferita³⁸, $E_{CM} \sim 0$: i nuclei b e c si "avvicinano poco" oppure entrano in interazione per breve tempo.

Sappiamo ormai che la sezione d'urto dipenderà dall'elemento di matrice:

$$\begin{aligned} M &= \langle \psi_a | \hat{\Theta}_\gamma | \psi_{bc}^{scatt} \rangle = \\ &= \langle \psi_a(\vec{\xi}_b, \vec{\xi}_c, \vec{r}) | \hat{\Theta}_\gamma(\vec{r}) | \psi_b(\vec{\xi}_b) \psi_c(\vec{\xi}_c) \underbrace{\phi_{k_i}^+(\vec{r})}_{\text{onda distorta}} \rangle = \\ &= \langle I_{bc}^a(\vec{r}) | \Theta_\gamma(\vec{r}) | \phi_{k_i}^+(\vec{r}) \rangle \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'operatore dipenda esclusivamente dalla distanza relativa \vec{r} e quindi abbiamo integrato sulle coordinate interne, definendo:

$$I_{bc}^a(\vec{r}) = \langle \psi_b(\vec{\xi}_b) \psi_c(\vec{\xi}_c) | \psi_a(\vec{\xi}_b, \vec{\xi}_c, \vec{r}) \rangle = \sum_{\ell, m, S, S_z} i^\ell \langle J_b M_b, J_c M_c | SS_z \rangle \langle SS_z, \ell m | J_a M_a \rangle Y_{\ell m}(\hat{r}) I_{bc, \ell s}^a(r)$$

³⁷La notazione è stata cambiata

³⁸Per quanto riguarda la notazione: con $\vec{\xi}_i$ indichiamo la posizione del nucleo i rispetto all'origine (coordinate interne), con \vec{r} invece indichiamo la distanza relativa tra il nucleo b e il nucleo c .

Questo ci permette di scrivere l'andamento asintotico della ψ_a come una certa funzione di *overlap*³⁹ $I_{bc,\ell s}^a(r)$; allora ci aspettiamo che asintoticamente ($r \gg R_N$) avremo (usando gli ANC per la ridotta):

$$I_{bc,\ell s}^a(r) \rightarrow \frac{C_{\ell s}}{r} W_{-i\eta,\ell+1/2}(2kr)$$

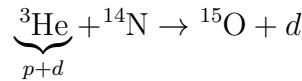
Dunque se conosco gli ANC allora conosco anche I e di conseguenza M .

Come trovare ANC Esistono principalmente 2 modi:

- calcolarli dalla teoria (non molto affidabili);
- oppure prenderli da altri esperimenti, dove si ha lo stesso vertice ($b + c \longleftrightarrow a$) e valgono le condizioni di reazione periferica.

Nel secondo caso si scelgono spesso reazioni di *transfer* $b(X, Y)a$, con $X = Y + c$ cluster⁴⁰ (per cui il vertice è lo stesso).

Per fare un esempio prendiamo:

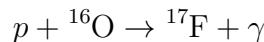


Sperimentalmente si misura $d\sigma^{transf}/d\Omega$ e questa è legata ai coefficienti di normalizzazione secondo:

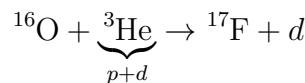
$$\frac{d\sigma^{transf}}{d\Omega} \propto \sum_{J_x J_a} (C_{cY}^X)^2 (C_{bc}^a)^2 \sigma_{\text{DWBA}}$$

Se conosciamo σ_{DWBA} e C_{cY}^X otteniamo il valore cercato C_{bc}^a ; σ_{DWBA} si calcola facilmente, per quanto riguarda C_{cY}^X si prende da un'altra reazione oppure si calcola (nel caso per esempio di $C_{pd}^3\text{He}$ è calcolabile).

Test case Consideriamo la reazione:



per cui sono stati acquisiti dati diretti. Dobbiamo allora trovare il ANC di ${}^{17}\text{F} \longleftrightarrow {}^{16}\text{O} + p$ e a tale scopo prendiamo la reazione:



con un fascio di ${}^3\text{He}$ a 29.75 MeV (reazione periferica). Si misura $d\sigma^{transf}/d\Omega$, si calcola⁴¹ σ_{DWBA} e $C_{pd}^3\text{He}$.

I risultati sono riportati in Figura VII.17 a sinistra per la distribuzione angolare della reazione di *transfer* e a destra per il fattore astrofisico da questa ottenuto; osserviamo che c'è sia uno stato fondamentale che un primo eccitato. Questo dimostra che il metodo funziona.

³⁹Porta infatti l'informazione dell'*overlap* tra la funzione d'onda di scattering bc e quella di a .

⁴⁰Cambio di notazione.

⁴¹In realtà si tiene conto di un potenziale nucleare (spesso Wood-Saxon) a parametri liberi, così da poter valutare se la condizione di soluzione asintotica è ben soddisfatta: questa infatti, se asintotica, deve rimanere la stessa al variare dei parametri del potenziale.

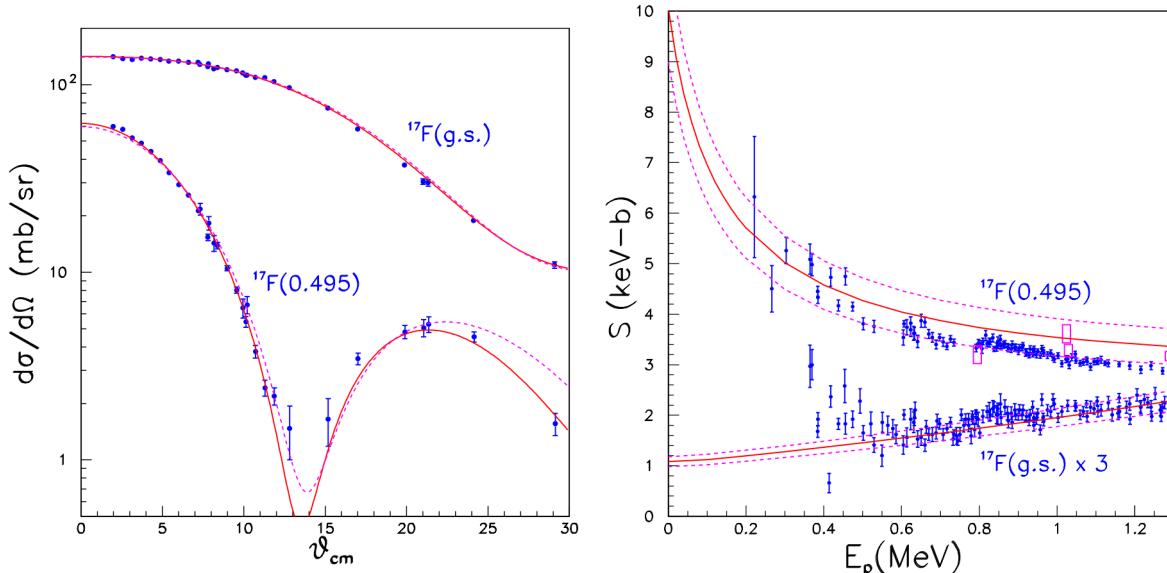
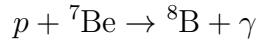


Figura VII.17: A sinistra distribuzione angolare per la reazione $^{16}\text{O}(^3\text{He}, d)^{17}\text{F}$: le curve sono un fit in DWBA con parametri differenti; g.s. sta per *ground-state*. A destra andamento del fattore astrofisico per $^{16}\text{O}(p, \gamma)^{17}\text{F}$: i puntini sono i dati delle misure dirette, mentre la curva rossa è ottenuta dagli ANC del grafico a sinistra.

Il suo utilizzo Il ANC *method* fu usato per misurare la reazione:



Ci sono varie opzioni per la reazione di *transfer* da scegliere:

- $^7\text{Be}(^3\text{He}, d)^8\text{B}$
- $^7\text{Be}(^{10}\text{B}, ^9\text{Be})^8\text{B}$
- $^7\text{Be}(^{14}\text{N}, ^{13}\text{C})^8\text{B}$

Per l'ultima è riportato il grafico della distribuzione angolare in Figura VII.18 a sinistra. Si ottenne così un fattore astrofisico $S_{17}^{ANC}(0) = (18.0 \pm 1.9)$ eVb compatibile con quello della misura diretta $S_{17}^{direct}(0) = (20.8 \pm 0.7 \pm 1.4)$ eVb, dati in Figura VII.18 a destra. Notiamo che mentre per il CD *method* in Figura VII.10 non si osservava nessuna risonanza qui invece compare.

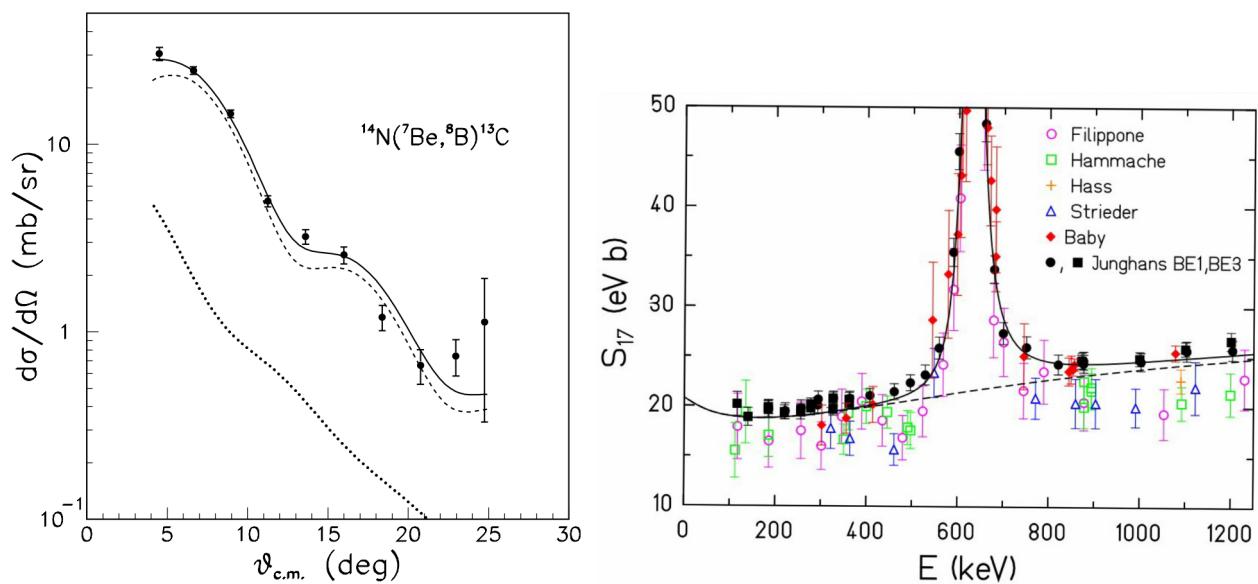


Figura VII.18: A sinistra distribuzione angolare della reazione $^{14}\text{N}(^{7}\text{Be}, ^{8}\text{B})^{13}\text{C}$: le linee rappresentano i fit in DWBA. A destra fattore astrofisico in funzione dell'energia ottenuto sia da misure dirette che con metodi indiretti.

Capitolo VIII

Le ultime reazioni

In questo capitolo sono presentate alcune reazioni di nucleosintesi stellare quali la 3α , il biciclo CNNO con la reazione dell'azoto, l’“*Holy Grail* dell’astrofisica” e infine la reazione dell’ossigeno in neon, focalizzandosi sui diversi contributi alla sezione d’urto dei vari processi. Il capitolo copre le lezioni 21/04/2021, 22/04/2021, 26/04/2021 e 28/04/2021.

1 La 3α

Abbiamo studiato¹ che sia la catena pp sia la BBN terminano con la produzione di particelle α . Come avevamo già trattato nella sezione 2.1-*La nucleosintesi primordiale*, andare oltre sembra impossibile dal momento che non esistono nuclei legati per $A = 5$ e quelli per $A = 8$ decadono molto velocemente (*mass gap*); tuttavia, le osservazioni mostrano che il ^{12}C è il IV elemento più abbondante nell’universo.

La soluzione arrivò da Salpeter & Öpik: l’idea si basava sull’ipotesi che il carbonio si formasse in 2 *step*.

1) $\alpha + \alpha \rightarrow {}^8\text{Be}.$

Questo in realtà è instabile perché lo stato 0^+ è sopra la soglia di $\alpha + \alpha$, $Q = 92$ keV e $\tau_{dec} \sim 10^{-16}$ s. Se abbiamo 2α con energia cinetica $T \sim Q$ allora $v = \sqrt{4Q/m_\alpha} \sim 10^{-2} c \simeq 3 \cdot 10^6$ m/s; possiamo trovare un ordine di grandezza del tempo di transito prendendo la distanza di interazione $d \sim 3$ fm, per cui $t \sim d/v \sim 10^{-21}$ s $\ll \tau_{dec}$. Dunque, abbiamo una “piccolissima” concentrazione di ${}^8\text{Be}$ che sappiamo essere $N({}^8\text{Be})/N(\alpha) \simeq 5 \cdot 10^{-10}$. Può avvenire allora il secondo *step*.

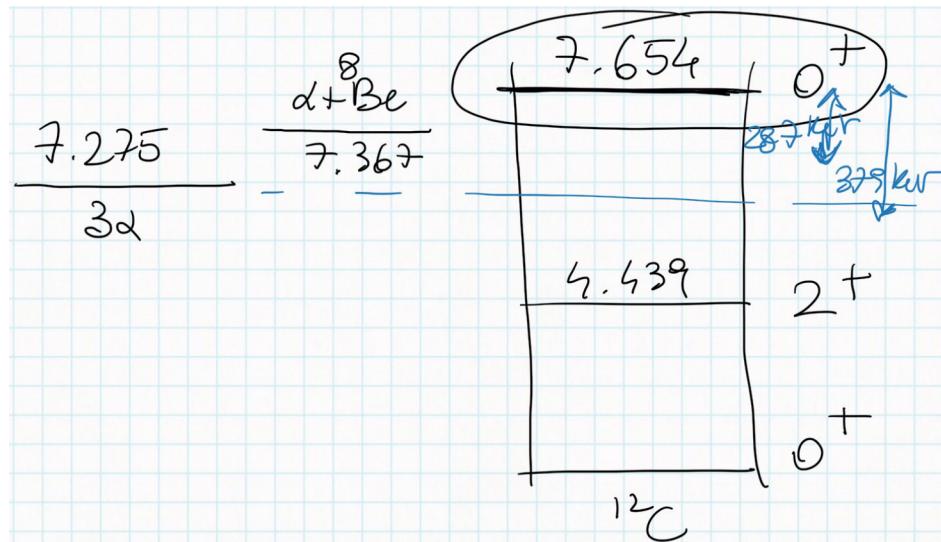
2) ${}^8\text{Be} + \alpha \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma.$

Si tratta di una cattura diretta, ma il fattore astrofisico sarebbe troppo piccolo per spiegare l’abbondanza di carbonio. Ecco che intervenne Hoyle: egli suppose che esistesse una risonanza per questo processo. A quel tempo quella di Hoyle fu una predizione perché non c’era modo di vederla; ormai è stata osservata e confermata: $J^\pi = 0^+$ e $\Gamma_{tot} = (8.9 \pm 1.08)$ eV (risonanza stretta), dove con Γ_{tot} abbiamo indicato la larghezza del processo totale² $\Gamma_{tot} = \Gamma_\alpha + \Gamma_{rad} \equiv \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma + \Gamma_{e^+e^-}$.

Per avere $0^+ \rightarrow 0^+$ non può esserci decadimento γ perché per questo è vietata la transizione, mentre si può ottenere con produzione di coppia e^+e^- ; tuttavia, è più probabile una transizione a 2 *step*: $0^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ ($E2+E2$). In questo caso $\Gamma_\gamma = (3.6 \pm 0.5)$ meV $\ll \Gamma_\alpha$ ($E2$ è “piccolo”).

¹Riguarda i capitoli IV-*Big Bang Nucleosynthesis* e V-*La catena protone-protone*.

²Abbiamo considerato anche il processo di decadimento Γ_α .

Figura VIII.1: Livelli energetici per la risonanza di Hoyle della 3α .

Dalla Breit-Wigner:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi}{\mu kT} \right)^{3/2} \hbar^2 \left(g \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_\alpha}{\Gamma_{tot}} \right) e^{-E_R/kT} \simeq \left(\frac{2\pi}{\mu kT} \right)^{3/2} \hbar^2 \Gamma_\gamma e^{-E_R/kT}$$

dove abbiamo calcolato³ g per 0^+ e fatto l'approssimazione $\Gamma_{tot} \simeq \Gamma_\alpha$. Avremo allora per il rate:

$$r_{3\alpha} = N_{^8Be} N_\alpha \langle \sigma v \rangle$$

³

$g = \frac{2J+1}{2(2S_\alpha + 1)} = 1 \quad \text{per } 0^+$

2 Biciclo CN-NO

Nelle stelle di II generazione (come il Sole) l'abbondanza di carbonio è tale che i protoni possono reagire in elio con un processo diverso dalla catena pp .

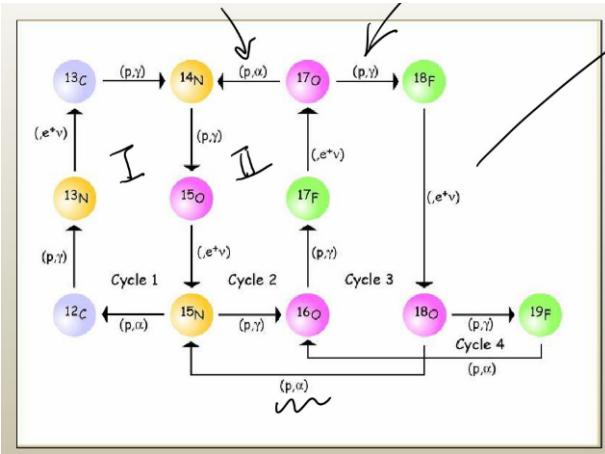


Figura VIII.2: Schema completo del biciclo CN-NO

2.1 Ciclo CNO

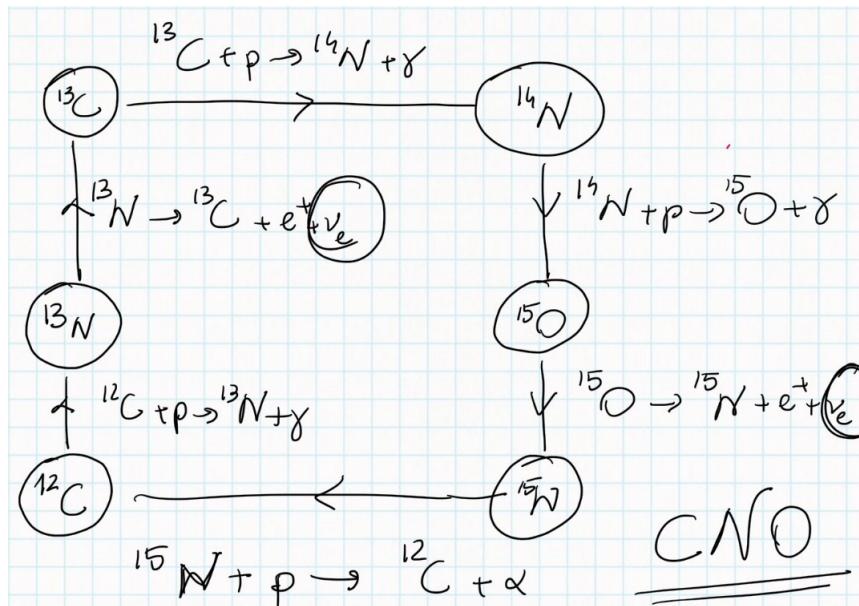


Figura VIII.3: Schema del ciclo CNO.



Come suggerisce il nome, non si tratta di una catena ma di un ciclo: si parte da $4p$ e si producono $\alpha + 2e^+ + 2\nu_e$ con $Q = 26.7$ MeV, ristabilendo le condizioni per far ripartire il network di reazioni (i cosiddetti *seed*, ovvero ^{12}C e ^{13}N , non si esauriscono).

Vediamo in Figura VIII.4 che in base alla temperatura interna della stella il ciclo è più o meno dominante rispetto alla catena pp . Anche questa volta, per studiare questo network di reazioni si osservano i neutrini (ν_O e ν_N), i cui flussi comparivano nella Figura V.2 (quando abbiamo

studiato quelli della pp), e le rispettive reazioni hanno tempi di decadimento pari a $\tau_O \sim 2$ m e $\tau_N \sim 10$ m.

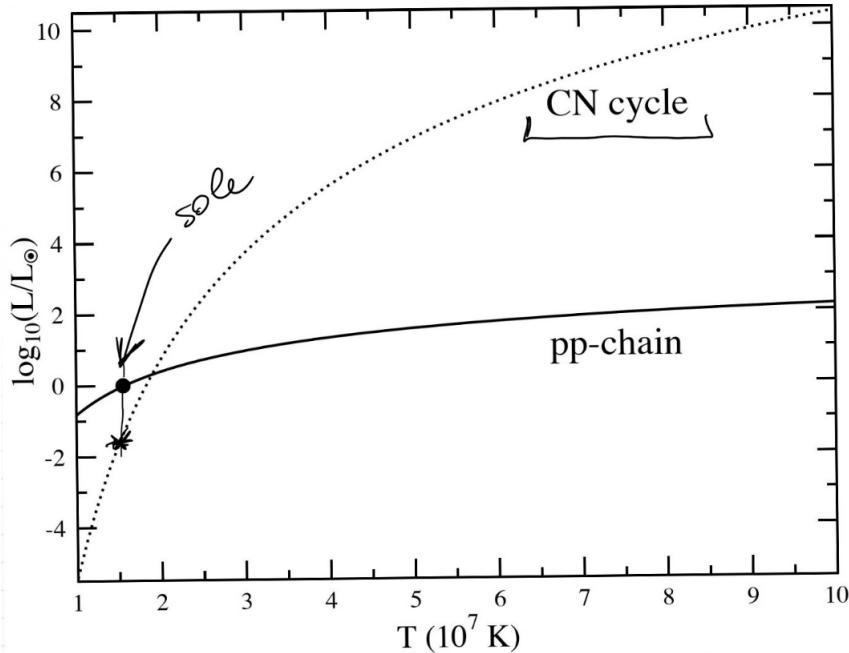


Figura VIII.4: Contributo della catena pp e del ciclo CNO alla luminosità al variare della temperatura interna della stella. Il punto indica la posizione del Sole.

Un po' di notazione Abbiamo 2 tipi di processi con rate:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \rightarrow \dots & & r_{12} = \frac{n_1 n_2}{1 + \delta_{12}} \langle \sigma v \rangle_{12} \\ 1 \rightarrow \dots & & r_1 = -\lambda_1 n_1 \end{aligned}$$

dove $\lambda \equiv 1/\tau$ è la costante di decadimento. Definiamo i fattori combinatoriali:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \leftarrow \text{numero di coppie distinte} & r_{ij} &= C_{ij} n_i n_j \langle \sigma v \rangle_{ij} \\ C_{ijk} &= \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ diversi} \\ 1/2! & \forall i = j, j = k, i = k \\ 1/3! & i = j = k \end{cases} & r_{ijk} &= C_{ijk} n_i n_j n_k \langle \sigma v \rangle_{ijk} \end{aligned}$$

Usiamo la notazione: $N_i(j)$ è il numero di specie i prodotta dal decadimento j ; $N_i(jk)$ è il numero di specie i prodotta dal processo $j + k$; Se la specie è consumata sarà negativo. Avremo quindi che in generale la variazione di densità nel tempo sarà data da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \sum_j N_i(j) r_j + \sum_{jk} N_i(jk) r_{jk} + \sum_{jkl} N_i(jkl) r_{jkl} = \\ &= \sum_j N_i(j) \lambda_j n_j + \sum_{jk} N_i(jk) C_{jk} n_j n_k \langle \sigma v \rangle_{jk} + \sum_{jkl} N_i(jkl) C_{jkl} n_j n_k n_l \langle \sigma v \rangle_{jkl} \end{aligned}$$

Spesso questa relazione viene riscritta con la *fractional nuclear abundance* Y_i , ovvero il numero di nuclei i sul numero di nuclei totali, per cui⁴ $\sum_i Y_i A_i = 1$:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = \sum_j N_i(j) \lambda_j Y_j + \rho N_u \sum_{jk} N_i(jk) C_{jk} Y_j Y_k \langle \sigma v \rangle_{jk} + (\rho N_u)^2 \sum_{jkl} N_i(jkl) C_{jkl} Y_j Y_k Y_l \langle \sigma v \rangle_{jkl}$$

⁴Se abbiamo una singola specie $Y = 1/A$ e $n = \rho/A m_u = Y \rho/m_u$, per cui ricordandosi che il valore del numero d'Avogadro $N_u = 1/m_u$ si ha $n = \rho N_u Y$; generalizzando a più specie $n_i = \rho N_u Y_i$.

Studio del network Vediamo le reazioni che abbiamo:

1. 3 reazioni (p, γ) per $X = {}^{12}\text{C}, {}^{13}\text{C}, {}^{14}\text{N}$, per le quali chiameremo $\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_{p,X}$.
2. 2 decadimenti β^+ per $X = {}^{14}\text{N}, {}^{15}\text{O}$, per le quali definiamo λ_X .
3. 1 reazione (p, α) per ${}^{15}\text{N}$ e quindi $\langle \sigma v \rangle$.

Riportiamo in Figura VIII.5 la variazione nel tempo delle *fractional nuclear abundance* per ogni specie; dalla fisica nucleare abbiamo ogni $\langle \sigma v \rangle$ e λ e queste equazioni vengono risolte numericamente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_p}{\partial t} &= -\rho N_u \left[Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}} + Y_p Y_{^{13}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{13}\text{C}}} \right. \\ &\quad \left. + Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{14}\text{N}}} + Y_p Y_{^{15}\text{O}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{15}\text{O}}} \right] \\ \frac{\partial Y_{^{12}\text{C}}}{\partial t} &= \rho N_u \left[-Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}} + Y_p Y_{^{13}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{13}\text{C}}} \right] \\ \frac{\partial Y_{^{13}\text{C}}}{\partial t} &= -\lambda_{^{13}\text{N}} Y_{^{13}\text{N}} + \rho N_u Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}} \\ \frac{\partial Y_{^{14}\text{N}}}{\partial t} &= +\lambda_{^{13}\text{N}} Y_{^{13}\text{N}} - \rho N_u Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}} \\ \frac{\partial Y_{^{15}\text{O}}}{\partial t} &= \rho N_u \left[Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}} - Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{14}\text{N}}} \right] \\ \frac{\partial Y_{^{15}\text{N}}}{\partial t} &= -\lambda_{^{15}\text{O}} Y_{^{15}\text{O}} + Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{14}\text{N}}} \\ \frac{\partial Y_\alpha}{\partial t} &= +\rho N_u Y_p Y_{^{15}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{15}\text{N}}} \end{aligned}$$

Figura VIII.5: Evoluzione nel tempo per ogni specie.

Ci possiamo chiedere però quale tra queste sia la reazione più lenta. Abbiamo 2 processi deboli (${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C}$ $\tau \sim 10$ min e ${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{16}\text{N}$ $\tau \sim 2$ min), ma nessuno dei due ha barriera coulombiana, quindi non sono i più lenti. La barriera è presente invece nei processi: $p + {}^{12}\text{C}$, $p + {}^{13}\text{C}$, $p + {}^{14}\text{N}$ e $p + {}^{15}\text{N}$; avendo l'azoto $Z = 7$ maggiore di quello del carbonio $Z = 6$, la barriera è più intensa per le reazioni con N e tra queste dal momento che $p + {}^{15}\text{N}$ è un'interazione forte la più lenta è $p + {}^{14}\text{N}$. Anche se sembra poco intuitivo i processi deboli raggiungono velocemente l'equilibrio (*steady state*), $\partial_t Y = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_{^{14}\text{N}} Y_{^{13}\text{N}} &= \rho N_u Y_p Y_{^{12}\text{C}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}} \\ \lambda_{^{15}\text{O}} Y_{^{15}\text{O}} &= \rho N_u Y_p Y_{^{14}\text{N}} \langle \sigma v \rangle_{p^{^{14}\text{N}}} \end{aligned}$$

Sostituendo in Figura VIII.5 e imponendo l'equilibrio di tutte le specie si ottiene:

$$\frac{Y_{^{14}\text{N}}}{Y_{^{12}\text{C}}} = \frac{\langle \sigma v \rangle_{p^{^{12}\text{C}}}}{\langle \sigma v \rangle_{p^{^{14}\text{N}}}} \approx \frac{1.26 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3/\text{mol s}}{1.3 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^3/\text{mol s}} \sim 100$$

Si intuisce quindi che al termine del ciclo anche se i *seeds* sono ancora presenti, non hanno le stesse abbondanze iniziali, ma la maggior parte del carbonio⁵ viene processato e contribuisce

⁵Vale anche per l'ossigeno.

ad aumentare l'abbondanza di azoto. Lo studio della reazione più lenta $^{14}\text{N}(\text{p},\gamma)^{15}\text{O}$ diviene allora fondamentale per la stima delle abbondanze e dell'evoluzione stellare.

2.2 Ciclo NO

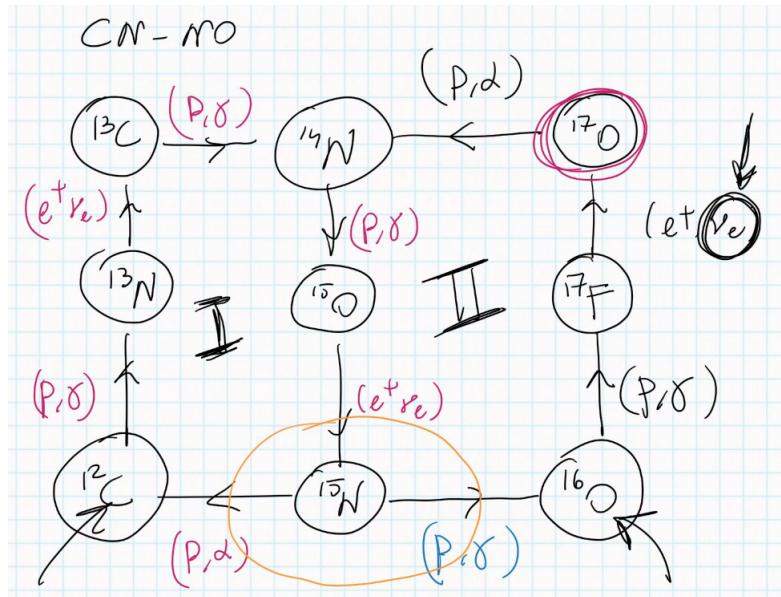
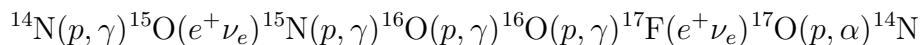


Figura VIII.6: schema del biciclo CN-NO.



È presente in realtà un secondo ciclo (da cui il nome biciclo) che coinvolge l'azoto e l'ossigeno (*seed*); si può infatti avere, invece che $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$, la reazione $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$. Il rapporto tra i rate delle due reazioni è dato da⁶:

$$\frac{r_{p\alpha}}{r_{p\gamma}} \simeq \frac{\langle \sigma v \rangle_{p\alpha}}{\langle \sigma v \rangle_{p\gamma}} \sim \frac{S_{p\alpha}(0)}{S_{p\gamma}(0)} \simeq \frac{65 \text{ MeV b}}{64 \text{ keV b}} \sim 1000$$

Dunque, il secondo ciclo si accende ogni 1000 volte che si è completato il primo⁷. Particolarmente importante per il rilevamento di questo network è il decadimento β^+ del ^{17}F (neutrini ν_F come si vede in Figura V.2).

Lo studio del biciclo CN-NO permette di determinare le abbondanze degli elementi C,N, O.

Non solo due cicli Come si può notare in Figura VIII.2 sono presenti altri due cicli che si attivano con la reazione $^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}$, ma questi riguardano stelle massicce le cui temperature interne superano le barriere di potenziale delle reazioni.

⁶Cambiamo notazione dal momento che i reagenti sono gli stessi per le due reazioni; in questo caso vengono indicati i prodotti.

⁷Si può notare infatti che l'interazione della reazione che porta al primo ciclo è forte, mentre l'altra è elettromagnetica.

2.3 La reazione più lenta

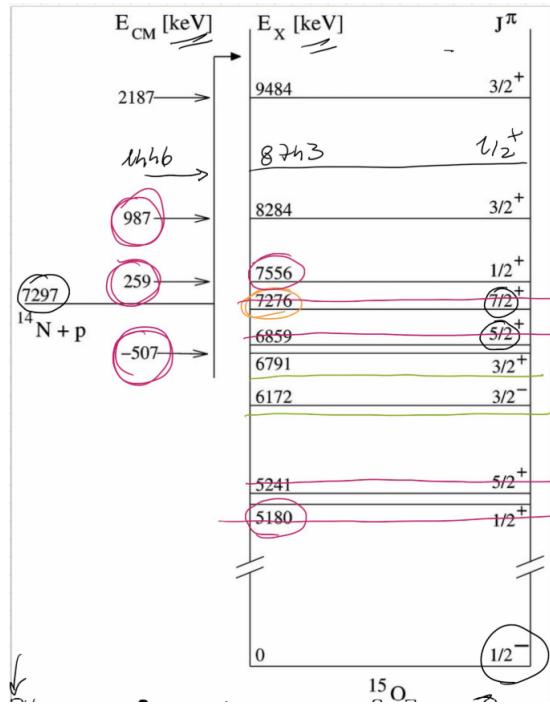


Figura VIII.7: Schema dei livelli energetici della reazione $^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma)^{15}\text{O}$: 7297 keV è il Q -valore. I livelli sottolineati e cerchiati corrispondono alle risonanze, i livelli barrati sono risonanze trascurabili.

Nel Sole (e in tutte le stelle di massa maggiore), come già detto, la reazione $^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma)^{15}\text{O}$ è particolarmente importante sia per l'evoluzione che per la stima delle abbondanze dei *seeds*. Riportiamo i livelli energetici del ^{15}O in Figura VIII.7. L'energia di Gamow sta nel *range* $30 \div 110$ keV, per cui la risonanza $1/2^+$ a 5180 keV (lontana) non ci preoccupa; anche le risonanze con $J^\pi > 5/2$ data la multipolarità elevata non danno fastidio, mentre non possiamo trascurare la risonanza per $1/2^+$ (soprasoglia) e $3/2^\pm$ (risonanza sottosoglia) e la cattura diretta sul *ground state* $1/2^-$. Sono state studiate in particolare modo dall'esperimento LUNA⁸.

- **Cattura diretta.** Riportiamo in Figura VIII.8 il fit eseguito con il metodo della *R-MATRIX*⁹. Osserviamo 3 risonanze, a 259 keV, a 987 keV e a 1446 keV (non di interesse), e una risonanza sottosoglia (a -507 keV); la multipolarità si distingue invece dalla distribuzione angolare. Si stima un fattore astrofisico:

$$S(0) = (0.27 \pm 0.05) \text{ keV b}$$

- **Cattura $E_R = 6.17 \text{ MeV}$.** Il fattore astrofisico dello stato eccitato $3/2^-$ è riportato in Figura VIII.9 (fit con *R-MATRIX*). Si vedono le stesse 3 risonanze soprasoglia, ma non quella sottosoglia. Estrapolando dai dati:

$$S_{6.17}(0) = (0.13 \pm 0.06) \text{ keV b}$$

Il multipolo coinvolto è $M1$ e $E2$.

⁸Guarda Approfondimenti 6 - Multipolarità di $^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma)^{15}\text{O}$.

⁹Vedi il capitolo VI - *R-MATRIX*.

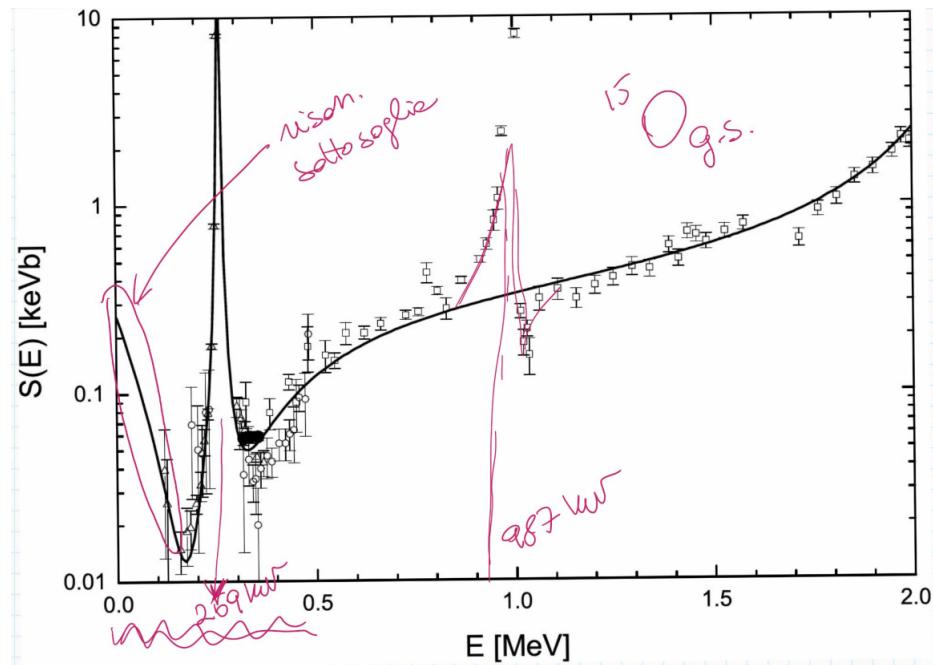


Figura VIII.8: Fattore astrofisico per la cattura diretta sul fondamentale: la linea nera corrisponde al fit ottenuto con il metodo *R-MATRIX*.

- **Cattura** $E_R = 6.79 \text{ MeV}$. I risultati per lo stato eccitato risonante $3/2^+$ sono riportati in Figura VIII.10. Il valore del fattore astrofisico così ottenuto è:

$$S_{6.79}(0) = (1.18 \pm 0.05) \text{ keV b}$$

Il multipolo coinvolto è $E1$.

Questo è il termine che dà il contributo maggiore al fattore astrofisico totale (misura di LUNA II):

$$S_{tot}(0) = (1.66 \pm 0.12) \text{ keV b}$$

Un po' di storia Nel tempo si sono susseguiti diversi studi di questa reazione per stimarne il fattore astrofisico.

- 1988 - pochi dati che non permettevano di confermare o confutare la presenza della risonanza. Figura VIII.11 a sinistra.
- 1998 - studio¹⁰ per cui si riesce a ottenere un fit, ma le incertezze sono “enormi”; ottennero:

$$S(0) = \begin{pmatrix} 3.5 & +1.0 \\ & -2.0 \end{pmatrix} \text{ keV b}$$

Figura VIII.11 a destra.

- 2001 - viene introdotto il metodo *R-MATRIX* e si effettua un’analisi su dati precedenti, ottenendo così:

$$S(0) = (1.77 \pm 0.20) \text{ keV b}$$

Figura VIII.12.

- Infine come abbiamo già visto LUNA II

¹⁰L’articolo di riferimento è Adelberger et al., Rev. Mod. Phys., 1998, vol.70, DOI: [10.1103/RevModPhys.70.1265](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.1265).

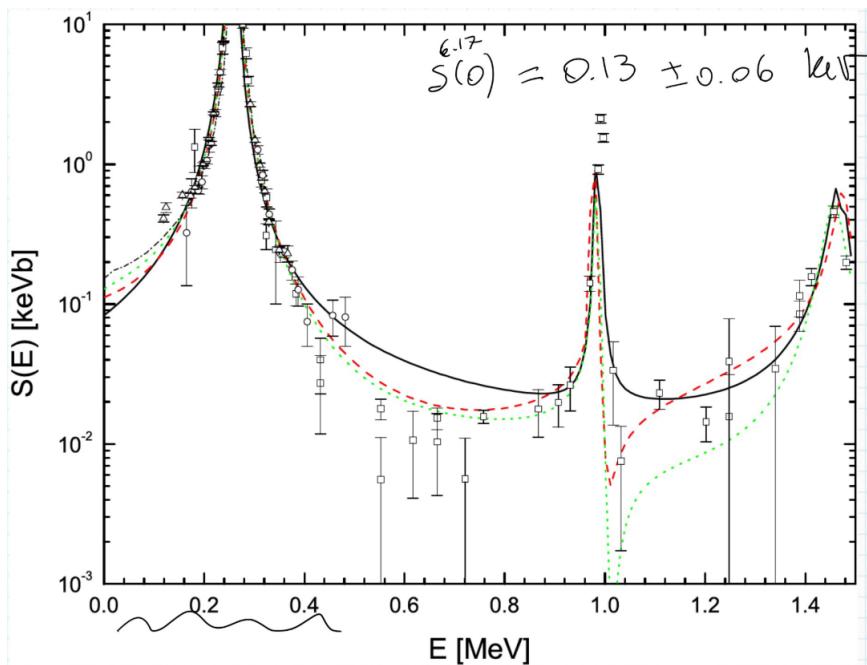
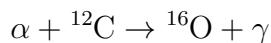


Figura VIII.9: Fattore astrofisico per la cattura sullo stato risonante $E_R = 6.17$ MeV: la linea nera corrisponde al fit ottenuto con il metodo *R-MATRIX*.

3 The Holy Grail

La misura della reazione di distruzione del carbonio:



è di importanza tale da essere stata definita nel 1983 da William Fowler nella sua *Nobel Prize lecture* “*The Holy Grail of Nuclear Astrophysics*”. Se infatti la 3α produce carbonio, questa reazione lo distrugge in favore dell’ossigeno¹¹, dunque lo studio della combinazione dei due processi diviene fondamentale per la stima delle abbondanze di questi elementi, peraltro tra i più presenti nell’universo. Nella nostra galassia, per esempio¹²:

74%	H
24%	${}^4\text{He}$
0.85%	${}^{16}\text{O}$
0.39%	${}^{12}\text{C}$
...	

È una reazione fondamentale anche per l’innesto del C-*burning* e quindi influenza l’evoluzione¹³ delle *low e high mass stars*. Non solo, questa reazione determina anche l’abbondanza di carbonio e ossigeno nelle popolazioni stellari successive.

¹¹La 3α è conosciuta con un’incertezza del 10%, ma questo non vale per la $\alpha {}^{12}\text{C}$ (circa il 20%).

¹²Stime spettroscopiche.

¹³Infatti, durante H-*burning* in *shell* il nucleo di He è inerte e collassa, fin quando non si raggiungono le temperature per l’innesto del He-*burning* tramite la 3α ; i residui di questo processo sono appunto il carbonio e l’ossigeno che deriva da ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$. Conoscere l’abbondanza di questi elementi determina l’evoluzione successiva.

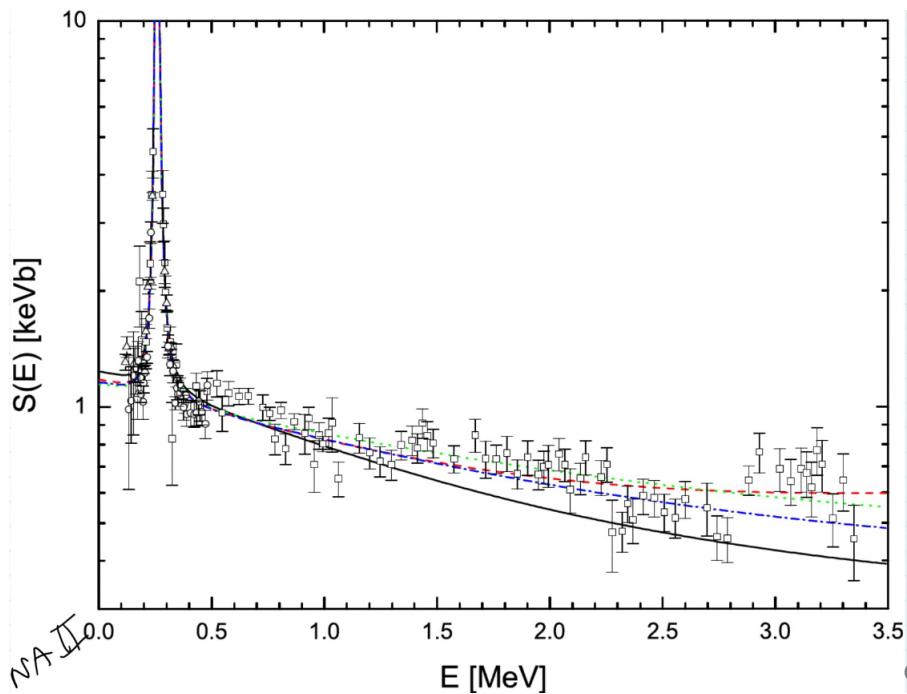


Figura VIII.10: Fattore astrofisico per la cattura sullo stato risonante $E_R = 6.79$ MeV: la linea nera corrisponde al fit ottenuto con il metodo *R-MATRIX*.

3.1 Studio della reazione

Studiamo¹⁴ adesso la combinazione di questa reazione con la 3α . Usando la stessa notazione di Figura VIII.5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_{^{12}\text{C}}}{\partial t} &= \frac{1}{3!} Y_\alpha^3 \rho^2 N_u^2 \langle \sigma v \rangle_{^{3\alpha}} - Y_\alpha Y_{^{12}\text{C}} \rho N_u \langle \sigma v \rangle_{^{12}\text{C}} \\ \frac{\partial Y_{^{16}\text{O}}}{\partial t} &= Y_\alpha Y_{^{12}\text{C}} \rho N_u \langle \sigma v \rangle_{^{12}\text{C}} - Y_\alpha Y_{^{16}\text{O}} \rho N_u \langle \sigma v \rangle_{^{16}\text{O}}\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto anche della reazione di distruzione¹⁵ dell'ossigeno:



con $\langle \sigma v \rangle_{^{16}\text{O}} \ll \langle \sigma v \rangle_{^{12}\text{C}}$.

Vediamo come viene modificata l'evoluzione stellare che modellizziamo dividendo:

a) $M \leq 8M_\odot$ stars¹⁶.

Terminato He-*burning*, non riescono a innescare il carbonio e il nucleo di C-O comincia a contrarre; gli strati esterni si espandono e raffreddano e la stella entra nella fase di AGB. La quantità $\langle \sigma v \rangle_{^{12}\text{C}}$ determina il tempo dell'He-*burning*, l'inizio dell'AGB e le abbondanze di carbonio e ossigeno della Nana Bianca che si formerà (e quindi della possibile SN IA che potrebbe esserci).

b) $M \geq 8M_\odot$ stars¹⁷.

Per queste il He-*burning* dura circa 10^6 y e dunque la 3α e la $\alpha + {}^{12}\text{C}$ divengono essenziali per la produzione di energia (e da qui la loro importanza). Negli stati finali (alte temperature e densità) la $\alpha + {}^{12}\text{C}$ non è l'unica reazione che “consuma” α ; vi sono 3 processi:

¹⁴Facciamo riferimento all'articolo R.J., de Boer et al., Rev. Mod. Phys., 2017, vol.89, n.3, DOI:[10.1103/RevModPhys.89.035007](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.035007).

¹⁵La studieremo successivamente.

¹⁶Sono quelle che fanno il ramo di AGB e terminano in Nane Bianche.

¹⁷Queste evolvono fino a raggiungere *Core-collapse Supernovæ*.

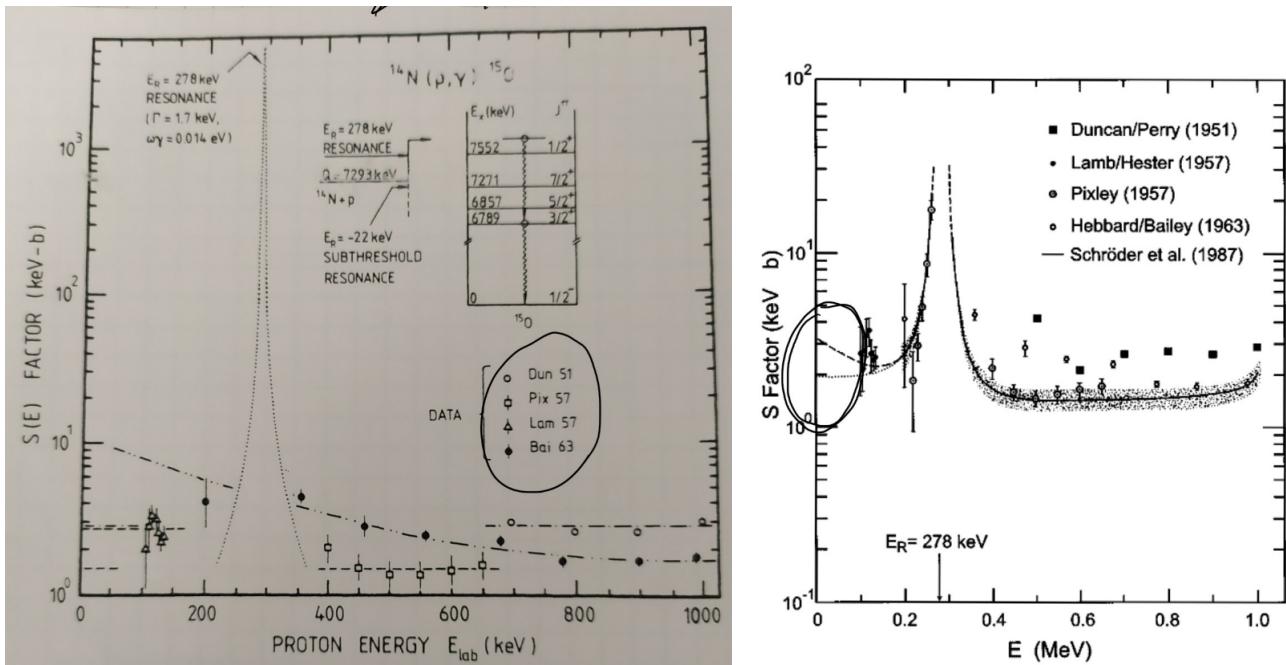


Figura VIII.11: A sinistra risultati del 1988. A destra risultati del 1998: la linea a puntini non tiene conto della risonanza sottosoglia, quella a tratti sì.

- \$\alpha + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma\$
- \$\alpha + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma\$
- \$\alpha + {}^{22}\text{Ne} \rightarrow {}^{25}\text{Mg} + n\$

Questa è una delle principali sorgenti¹⁸ di neutroni (che tipicamente non sono presenti nelle stelle) ed è quindi essenziale per le catture neutroniche successive che permettono di superare il picco del ferro (processo *s*¹⁹).

In realtà, negli ultimi processi la \$\alpha + {}^{16}\text{O}\$ non si attiva per cui prima ci sono altri *burning* (C,O,Ne,Si).

Risonanza dell'ossigeno In Figura VIII.13 riportiamo i livelli dell'ossigeno e alcune reazioni di produzione, tra cui \$\alpha + {}^{12}\text{C}\$. Osserviamo che i dati si fermano a circa 2 MeV mentre l'energia di Gamow è di circa 300 keV, quindi è necessaria la teoria per l'estrapolazione dei risultati. Studiamo le catture che possiamo avere:

- i. Cattura diretta, quindi su uno dei 5 stati legati e di conseguenza non risonante. \$S = 0\$ per cui \$J_i = \ell_i\$ e \$\pi_i = (-)^\ell\$; per l'ossigeno abbiamo \$J^\pi = 0^+, 3^-, 2^+, 1^-\$. Ricordiamo che \$\ell = 0\$ non è possibile dal momento che la transizione \$0^+ \rightarrow 0^+\$ non è permessa dal decadimento \$\gamma\$.

- \$\ell = 1 \ 1^- \rightarrow 0^+\$ (g.s.) con un *E1*.
- \$\ell = 2 \ 2^+ \rightarrow 0^+\$ (g.s.) con un *E2*.

Ricordiamo che per \$\ell \neq 0\$ il termine di barriera centrifuga si fa sentire e sopprime in parte la cattura diretta. Per *E1*, inoltre, abbiamo anche un altro problema: per \$q \rightarrow 0\$

$$E\lambda \rightarrow Z_{eff}^{(\lambda)} r_\alpha^\lambda \text{C} Y_{\lambda\mu} (\hat{r}_\alpha \text{C})$$

¹⁸Su come avere una certa abbondanza di ²²Ne non è banale discutere.

¹⁹L'incertezza di questi processi dipende quindi dalla \$\alpha + {}^{12}\text{C}\$.

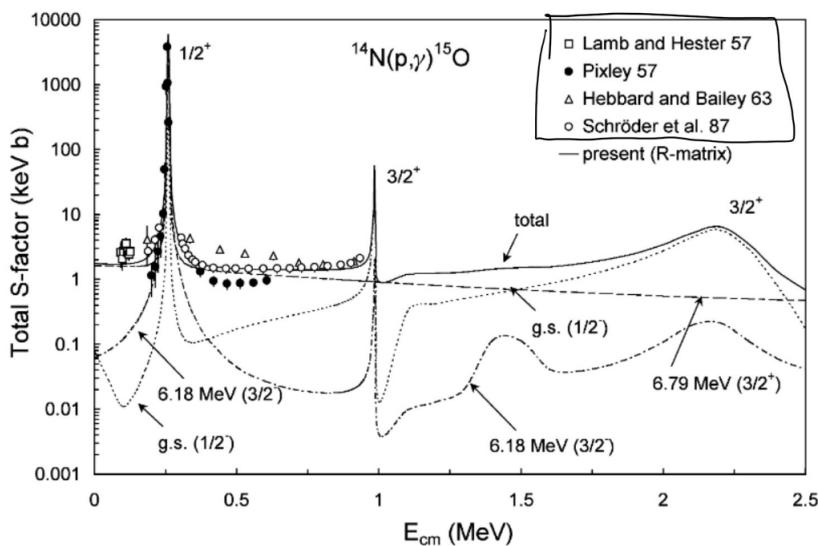


Figura VIII.12: Risultati del 2001.

$$Z_{eff}^{(\lambda)} \equiv Z_\alpha \left(\frac{m_C}{m_\alpha + m_C} \right)^\lambda + Z_C \left(\frac{-m_\alpha}{m_\alpha + m_C} \right)^\lambda$$

dove abbiamo definito la carica efficace $Z_{eff}^{(\lambda)}$ (ma non approfondiamo il significato di tale definizione). Allora valutiamo la carica efficacie per $E1$:

$$Z_{eff}^{(1)} = 2 \frac{m_C}{m_\alpha + m_C} - 6 \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_C} \stackrel{C \sim 3\alpha}{\simeq} 2 \frac{3m_\alpha}{4m_\alpha} - 6 \frac{m_\alpha}{4m_\alpha} = 0$$

Il termine $E1$ è quindi soppresso. Una spiegazione più elegante di questo fatto è data dal fatto che essendo Z_{eff} molto piccola i nuclei coinvolti saranno tutti circa a isospin nullo: ${}^4\text{He} = nnpp$ $T_z = 0$ e $T = 0, 1, 2$, dove però $T = 0$ sarà dominante; ugualmente per ${}^{12}\text{C}_6$ e ${}^{16}\text{O}_8$. $E1$ si porta dietro nella corrente la dipendenza dall'isospin secondo il termine in τ_z (isovettoriale) allora dal momento che $T_i = 0 \rightarrow 0 = T_f$ è soppressa lo è anche $E1$. In sintesi, $E1 \sim E2$ sono paragonabili²⁰ e questo comporta che la cattura diretta sia fortemente soppressa.

- ii. Cattura risonante soprasoglia, per $E_X = 9.59$ MeV $J^\pi = 1^-$ e $E_X = 9.84$ MeV $J^\pi = 2^+$. Quest'ultima è stretta e non ci interessa; 1^- ha invece larghezza $\Gamma = 2.4$ MeV (molto larga). Il contributo sarà $E1$ perché la transizione è $1^- \rightarrow 0^+$ e non abbiamo il problema della soppressione.
- iii. Cattura risonante sottosoglia, per $E_X = 7.12$ MeV $J^\pi = 1^-$ ($E_R \simeq -45$ keV) e $E_X = 6.92$ MeV $J^\pi = 2^+$ ($E_R \simeq -245$ keV). Queste sono responsabili della risalita del fattore astrofisico in Figura VIII.13 per $E \rightarrow 0$. Abbiamo quindi $E1$ da $1^- \rightarrow 0^+$ ed $E2$ da $2^+ \rightarrow 0^+$ con lo stesso ordine di grandezza ($E1 \sim E2$).

Teoria ed esperimenti Nel 1937 Wheeler fece per la prima volta i conti per questa reazione e propose un *cluster model*²¹: si considerano i nuclei come *cluster* di particelle α (che sono particolarmente legate, $B_\alpha = 28$ MeV), per cui ${}^{12}\text{C} = 3\alpha$ e ${}^{16}\text{O} = 4\alpha$; l'approssimazione è buona se rimaniamo a basse energie (come quelle di interesse astrofisico). L'unica difficoltà del modello è che richiede un potenziale di interazione effettivo $V_{\alpha\alpha}$ e con questo si ha però problemi a riprodurre le risonanze. Il metodo quindi sarebbe anche valido con un ottimo potere

²⁰Questo avviene anche per altre reazioni.

²¹Modello ripreso di recente.

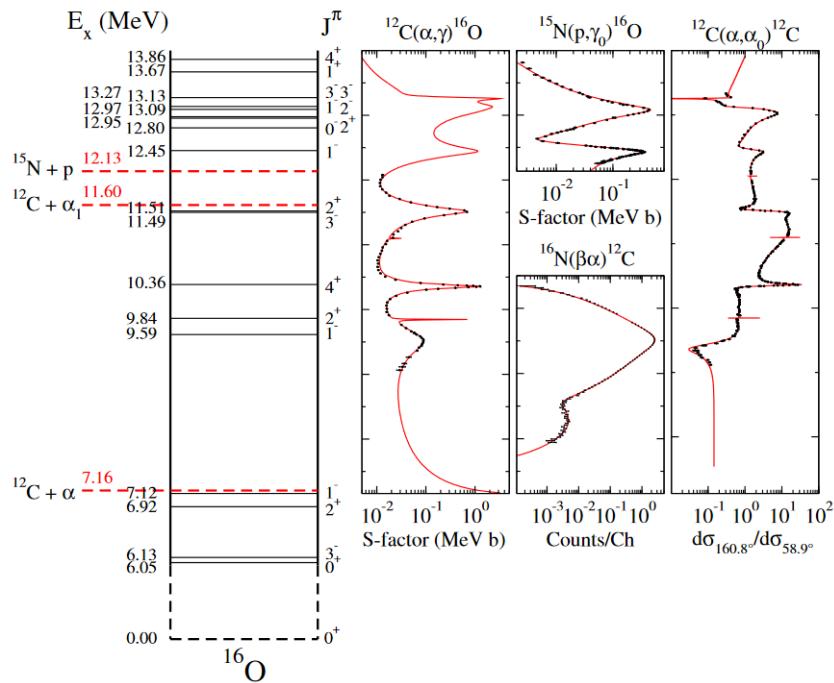


Figura VIII.13: Livelli energetici dell’ossigeno (a sinistra) e fattore astrofisico (a destra) per le reazioni $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$ e $^{12}\text{C}(\alpha, \alpha)^{12}\text{C}$ (scattering elastico). Sotto i 7.12 MeV abbiamo stati legati, che non ci interessano perché sottosoglia; per lo stato 1^- abbiamo una risonanza larga. I punti sono i dati sperimentali mentre la curva in rosso è un fit “teorico-fenomenologico”.

predittivo, tuttavia l’accuratezza richiesta dall’astrofisica non è ancora stata raggiunta.

Anche metodi *ab-initio* non sono congeniali, dal momento che la teoria per $A = 16$ non è affatto semplice. A oggi, la scelta più frequente è il metodo della *Phenomenological R-MATRIX*, che però non dà informazioni sulla funzione d’onda. Si ha quindi in *input* i dati sperimentali e in *output* la stima del fattore astrofisico, di cui riportiamo i risultati in Figura VIII.14. Notiamo che per $E_{\text{Gamow}} \simeq 300 keV non ci sono dati e che se i dati per $E1$ sono approssimativamente in accordo tra le varie acquisizioni non si può certo dire lo stesso dei dati per $E2$, per i quali spesso c’è discrepanza anche tra il fit e l’andamento degli stessi. Si ritiene che ciò derivi da una raccolta dati “sporcata” da un *overall factor* di normalizzazione, che si può correggere con misure a risonanza larga.$

Come appunto detto, per l’energia di Gamow non ci sono dati per cui è chiaro come il metodo *phRM* sia essenziale in questo studio. Nella Figura VIII.15 riportiamo l’andamento del valore del fattore astrofisico nel tempo al variare del metodo e dell’anno dei vari esperimenti e analisi. La stima più recente dà:

$$S(300 \text{ keV}) = (140 \pm 21) \text{ keV b}$$

L’incertezza è del 20% circa (dovuta per esempio a inconsistenze tra set di dati sperimentali) e dev’essere ridotta al 10%.

L’obiettivo di LUNA MV e di altri esperimenti come ERNA²² e all’estero DRAGON è proprio la misura di questa reazione.

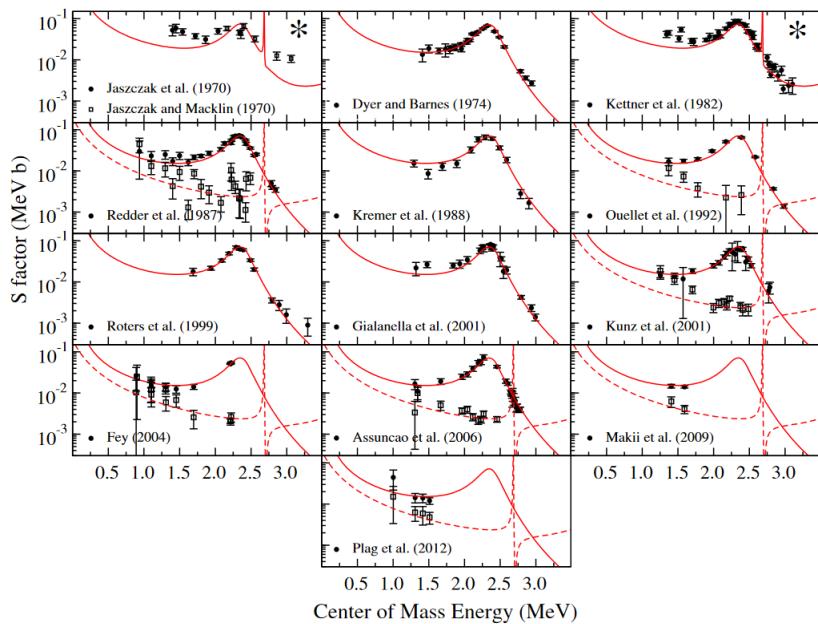


Figura VIII.14: Risultati per l'analisi con *phRM* di dati acquisiti in diversi esperimenti dal 1970 al 2012. La linea rossa è il fit ottenuto con *phRM*: a eccezione dei pannelli con l'asterisco dove è stato misurato $E1 + E2$, la linea continua sta per $E1$, mentre quella a tratti per $E2$.

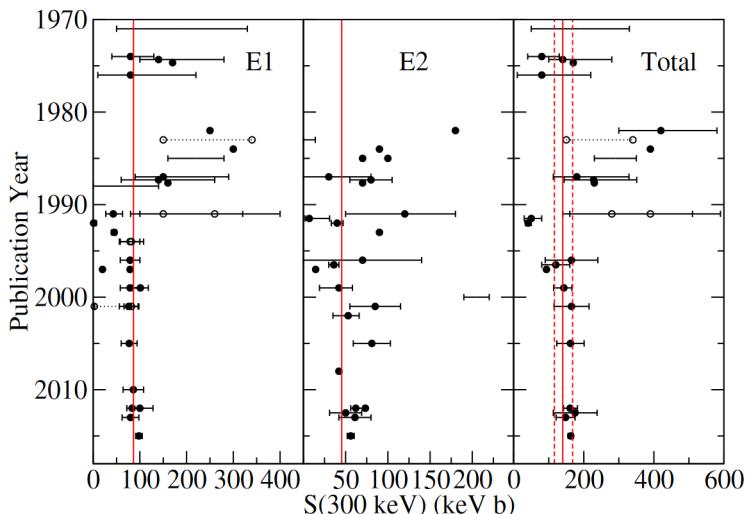


Figura VIII.15: Andamento del valore del fattore astrofisico al picco di Gamow nel tempo al variare della pubblicazione su tale studio: la linea rossa rappresenta il valore ottenuto con *phRM*.

3.2 La reazione dell'ossigeno

Come anticipato, in questa sezione torniamo sulla reazione $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$. Se questa fosse “veloce” allora dopo la $\alpha - ^{12}\text{C}$ l’ossigeno prodotto verrebbe subito distrutto, ma non è ciò che si osserva, per cui la reazione dev’essere “lenta”. Riportiamo in Figura VIII.16 i livelli delle reazioni successive all’He-burning.

Concentriamoci sui livelli energetici del neon²³ (Figura VIII.17). Il picco di Gamow si trova intorno al 2^- per cui si ha una risonanza, insieme a quella del 4^+ (il 2^+ è troppo lontano).

²²ERNA vuole ottenere la misura con il *recoil separation method*. Le misure indicate con il nome Galianella et al. in Figura VIII.14 sono state ottenute con ERNA.

²³Il fondamentale è 0^+ perché $A = 2Z$.

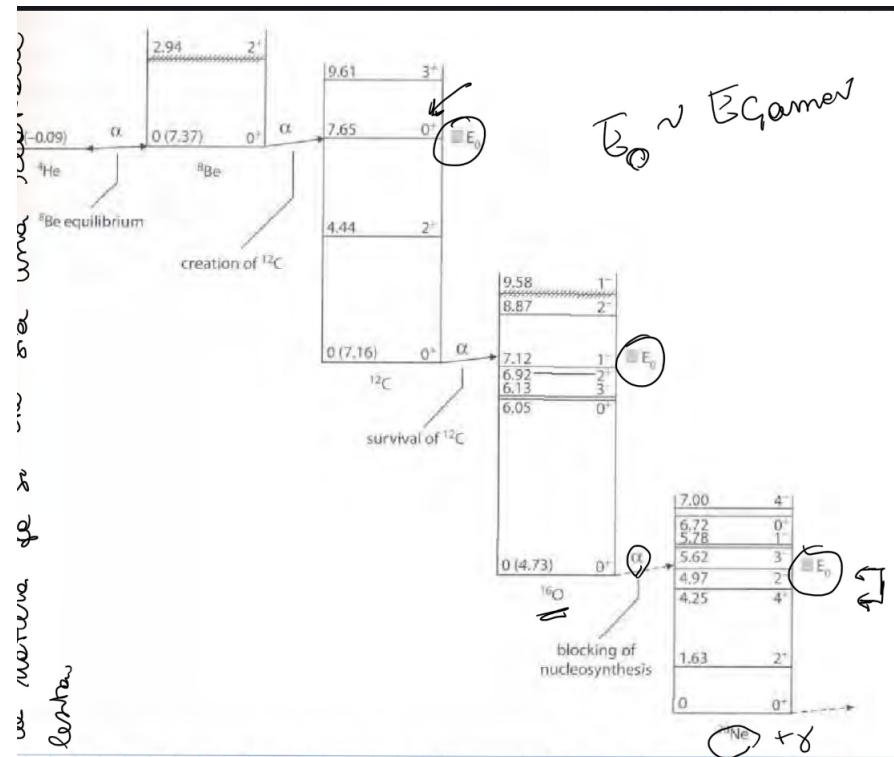
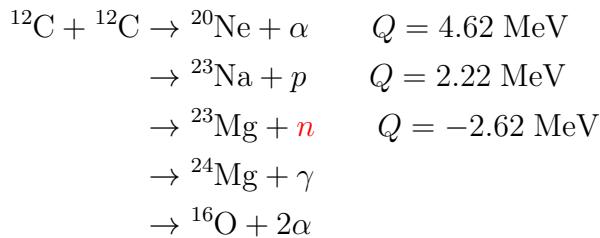
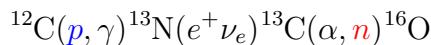


Figura VIII.16: Schema dei livelli delle reazioni dell'He-*burning*.

Abbiamo allora cattura diretta su 0^+ : $\ell = 0$ è proibito, per cui si ha $\ell = 1 J^\pi = 1^- \rightarrow 0^+$ e $\ell = 2 J^\pi = 2^+ \rightarrow 0^+$ e per le ragioni già discusse $E1 \sim E2$. La cattura diretta ha però un contributo minore rispetto alle risonanze sottosoglia con $E_R = 4.97$ MeV per 2^- e con $E_R = 4.25$ MeV per 4^+ ; tuttavia, per avere una transizione $0^+ \rightarrow 2^-$ devo prendere $M2$ (“piccolissimo”) e per $0^+ \rightarrow 4^+$ $E4$ (anche questo soppresso). Possiamo allora capire come mai $\langle \sigma v \rangle_{\alpha O} \ll \langle \sigma v \rangle_{\alpha C}$: le “ceneri” dell’He-*burning* sono appunto C e O²⁴, perché pochissimo ossigeno viene distrutto. Se la stella è sufficientemente massiccia si innesca il C-*burning*:



Le ultime²⁵ 3 hanno Q valore negativo, mentre la seconda ha un’intensa barriera di potenziale. Se, invece, la massa non è sufficiente la stella converte il carbonio in ossigeno e così facendo porta i protoni in neutroni e consuma un nucleo α per ogni nucleo di ossigeno:

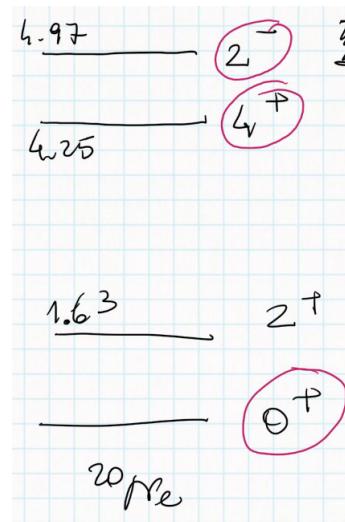


Anche se la $\alpha^{16}\text{O}$ è, come abbiamo visto, soppressa può avvenire; allora:

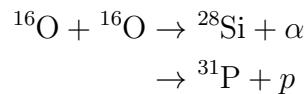


²⁴E in abbondanze nettamente inferiori anche altri elementi.

²⁵Abbiamo evidenziato che una delle reazioni è una sorgente di neutroni, processo importante nelle fasi terminali della stella.

Figura VIII.17: Livelli energetici in MeV del ^{20}Ne .

Ovviamente questo non sarà il canale principale perché appunto la α -radioattività di ^{16}O . Per stelle veramente massicce si potrà innescare anche l' $\text{O}-\text{burnig}$ (intensa barriera coulombiana):



Seguono poi altre reazioni fino al Fe, oltre cui non si può più fondere; tuttavia, la presenza di molti neutroni permette di superare il picco del ferro e produrre gli elementi successivi.

Capitolo IX

Approfondimenti

In questo capitolo ho raccolto alcuni argomenti che ho personalmente approfondito o testi e articoli che ho usato durante la preparazione dell'esame

1 Modelli e decadimenti

Una trattazione che riprende quella adottata in questi appunti riguardo ai modelli nucleari e i decadimenti β e γ si trova in Krane, K., S., “*Introductory Nuclear Physics*”, USA, John Wiley & Sons, 1988.

1.1 Decadimento ε

Nel calcolo del Q -value in 1.1-*Q-value* per la cattura ε compare a sottrarre l'energia di legame dell'elettrone catturato nell' n -esimo shell B_n , dove n raccoglie tutti i numeri quantici che identificano tale particella. La ragione della presenza di questo termine è ben spiegata in (Krane, 1988), per cui ne riportiamo un piccolo riassunto: subito dopo la cattura il nucleo prodotto si trova in uno stato eccitato, per cui se l'elettrone occupava lo shell (interno) k (identificato da $n = k, L, \dots$) il “vuoto” da esso lasciato verrà subito “riempito” da un elettrone di shell superiore; nel diseggitarsi l'elettrone emette un fotone di energia pari all'energia di legame B_n , che viene quindi persa.

2 Regola d'oro di Fermi

Nei calcoli del rate molto spesso dall'espressione λ si passa a quella differenziata $d\lambda$. Si tratta di una questione puramente formale e si rimanda alla lettura del paragrafo **Commenti sulla regola di Fermi** della sezione 20.2 *Transizioni nel continuo e rate di un processo* delle dispense del professor G. Paffuti, *Note di Meccanica Quantistica, anno accademico: 2017-2018*.

Tuttavia, per avere un'idea¹ della giustificazione, si consideri l'espressione in 1.2-*Teoria di Fermi*:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 \frac{p^2 dp 4\pi}{h^3} \frac{q^2 dq 4\pi}{h^3} \frac{1}{dE_f} \sim p^2 q^2 dp$$

dove abbiamo fissato l'impulso p dell'elettrone per cui $dE_f = dq$. Sarebbe quindi più corretto indicare $\lambda \rightarrow \lambda_p$ poiché è definito per quel particolare valore dell'energia dell'elettrone. Il rate totale sarà invece dato dalla somma su tutti gli impulsi possibili dell'elettrone finale; dal

¹Questa è una spiegazione sicuramente non rigorosa e particolarmente lacunosa, si consiglia la lettura del testo.

momento che l'impulso è una variabile continua si ha $\lambda_p \rightarrow d\lambda$. In altre parole, nella scrittura del rate si sottintende l'integrazione su p per poi esplicitarla al momento opportuno.

3 Sul numero di neutrini

Come spiegato in 1.2.1 -*La massa del neutrino*, quando $T_e \rightarrow Q$ il neutrino non è più relativistico per cui $T_\nu \sim q^2/2m_\nu$ e $dq/dE_\nu = m_\nu/q$. Abbiamo allora che:

$$N(p) \propto p^2 \sqrt{Q - \sqrt{p^2 + m_e^2} + m_e}$$

$$N(T_e) \propto \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e} \sqrt{Q - T_e} (T_e + m_e)$$

Si nota che quando $T_e \rightarrow Q$ $dN/dp \rightarrow 0$ se $m_\nu = 0$ e $dN/dp \rightarrow \infty$ se $m_\nu \neq 0$, come si osserva in Figura III.7; dalla pendenza è quindi possibile studiare il limite per la massa del neutrino.

4 Dettagli sul calcolo del decadimento γ

Nello sviluppo dell'onda piana in armoniche vettoriali in 2.2.1 -*First order perturbation theory* si ottiene l'espressione:

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_\ell(kx) \sum_J \langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^{M=\lambda}$$

4.1 Clebsch-Gordan

Poiché $\ell = J, J \pm 1$, i coefficienti di Clebsch-Gordan diversi da zero sono²:

$$\begin{aligned} \langle J 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \langle J+1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J}{2J+3}} \\ \langle J-1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}} \end{aligned}$$

4.2 Proprietà della Bessel

A questo punto si utilizza la proprietà della Bessel:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge j \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^\lambda &= ik \left[\underbrace{\left(\frac{d}{d(kx)} - \frac{J}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J+1,1}^\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left(\frac{d}{d(kx)} - \frac{J+1}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J-1,1}^\lambda \right] \end{aligned}$$

²Si ottengono calcolando $\langle \ell 0, 11 | J1 \rangle$ e poi usando le loro proprietà per passare a $\lambda = -1$.

4.3 Proprietà armonica vettoriale

Deriviamo la proprietà³:

$$(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = (-)^{\lambda+1} \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* &= \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0}^* \widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* = \\ &= (-)^\lambda \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0} \widehat{\varepsilon}_{\vec{k}, -\lambda} = \\ &= (-)^{\lambda+1} \underbrace{\langle J0, 1 - \lambda | J - \lambda \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}} \mathcal{Y}_{J0} \widehat{\varepsilon}_{\vec{k}, -\lambda} \end{aligned}$$

Nel caso $|\lambda| = 1$ allora $(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$.

5 CRM: indipendenza dal parametro B

Nel discutere il metodo della *Calculable R MATRIX* (sezione 1-*Calculable RM*) siamo arrivati all'espressione:

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell^* R_\ell(E, B)}{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell R_\ell(E, B)}$$

Si può dimostrare⁴ che U_ℓ non dipende da B .

Consideriamo una matrice invertibile \mathbf{V} di dimensione $N \times N$ e due vettori di dimensione N \mathbf{u} e \mathbf{v} ; possiamo sempre costruire una matrice quadrata \mathbf{W} definita come:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

Notiamo che data l'espressione di \mathbf{W} si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{-1} &= \mathbf{V}^{-1} - \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}} \\ \mathbf{W}^{-1}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}} \Rightarrow (\mathbf{v}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{u})^{-1} = 1 + (\mathbf{v}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{u})^{-1} \end{aligned}$$

Osserviamo che se le matrici $\mathbf{V} \equiv C(E, B)$ e $\mathbf{W} \equiv C(E, 0)$ e i vettori⁵ $\mathbf{u} \equiv |\varphi\rangle$ e $\mathbf{v} \equiv |\varphi\rangle$ allora possiamo scrivere:

$$C(E, 0) = C(E, B) + \frac{\hbar^2}{2\mu a} B |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1} (\langle\varphi|C(E, 0)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1} = B + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1} (\langle\varphi|C(E, B)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1}$$

Usando l'espressione⁶ di R_ℓ in (VI.10) si ottiene:

$$\frac{1}{R_\ell(E, 0)} = B + \frac{1}{R_\ell(E, B)}$$

dalla quale si ha l'indipendenza di U_ℓ cercata.

³Ricordarsi che $\widehat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* = (-)^\lambda \widehat{\varepsilon}_{\vec{k}, -\lambda}$ e che $\langle \ell m, SS_z | JM \rangle = (-)^{\ell+S-J} \langle \ell - m, S - S_z | J - M \rangle$

⁴Seguiamo la dimostrazione dell'articolo Descouvemont, P. & Baye, D., Rep. Prog. Phys., 2010, vol.3, DOI: 10.1088/0034-4885/73/3/036301, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1001.0678>.

⁵Dove abbiamo preso $|\varphi\rangle \rightarrow \varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_N(a)) = \sum_k |\varphi_k\rangle$; dunque $\langle\varphi_k|\varphi\rangle = \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle = 1$.

⁶Notare che $\langle\varphi|\mathbf{A}|\varphi\rangle = \sum_{ij} \varphi_j A_{ij} \varphi_i$.

6 Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$

Per l'analisi dei multipoli e altri approfondimenti sulla misura del fattore astrofisico della $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ (trattata nella sezione 2.3-*La reazione più lenta*) consultare gli articoli Runkle, R.C., et al., Phys. Rev. Lett., 2005, vol.94,[DOI:10.1103/PhysRevLett.94.082503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.082503) e Formicola, A., et al., Phys. Lett. B, 2004, vol.591,[DOI:10.1016/j.physletb.2004.03.092](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.03.092).

Indice analitico

abbondanza frazionale in massa, 85
acoustic peaks, 45
acqua equivalente, 104
active shielding, 104
Ammasso della Vergine, 43
ampiezza del momento di multipolo, 32
analisi spettrale, 43
anticommutatore, 35
armoniche sferiche, 35, 57
vettoriali, 35
articolo *alpha, beta, gamma*, 45
Asymptotic Normalization Coefficients method, 122
ATOMKI Anomaly, 111
bande rotazionali, 19, 40, 41
barion density ρ_B , 47
barion fraction of critical mass density $\Omega_B h^2$, 47
BGO, 109
Big Bang, 44, 46
Big Bang Nucleosynthesis, 45, 64, 66, 109
binding energy, 1
buca di Wood-Saxon, 11
candela campione, 45
carica efficace, 137
carta di Segré, 4
Catena protone-protone *pp*, 64, 65, 67, 109, 126, 128
 pp, 65
 pep, 65
 dp, 65
 hep, 65
 ppI, 65, 105
 ppII, 66
 ppIII, 66
cattura termica, 57
channel radius, 93, 98
Ciclo CN-NO, 67, 128
cinematica inversa, 112

classical turning point, 83
cluster model, 137
Coefficiente Asintotico di Normalizzazione, 122
coefficiente di Coulomb, 94
coeffienti di Clebsch-Gordan, 36, 42
combinazione isoscalare, 58
combinazione vettoriale, 58
compound nucleus, 77, 82, 119
corrente di convezione, 58
corrente di magnetizzazione, 37
Cosmic Microwave Background CMB, 44, 64
costante cosmologica Λ , 52
costante di accoppiamento debole g , 23, 88
costante di Fermi, 27
costante di Fermi G_F , 23, 88
costante di Hubble H , 44
costante di Stefan-Boltzmann σ , 43
 α -costante di struttura fine, 33, 39
Coulomb dissociation method, 113
cutoff radius, 118, 121
decadimento
 Gamow-Teller, 45
decadimento β , 92
decadimento di
 Fermi, 29
 Gamow-Teller, 29, 92
densità critica ρ_c , 45
densità di corrente nucleare, 34
deutone, 1
diagramma Hertzsprung-Russell, 43
dipolo
 elettrico, 32
 magnetico, 32
Distorted Wave Born Approximation, 117
distribuzione di Fermi-Dirac, 87
effetto Doppler, 44
effetto tunnel, 72, 80

elemento di matrice ridotta, 38
 elettroscreening, 83–85, 87, 88, 107, 108,
 120, 121
 debole, 85
 forte, 85
energy correlation spectra, 119
entropy factor η , 47
 fattore astrofisico $S(E)$, 53, 72, 75, 81, 82,
 92
 efficace S_{eff} , 76, 77
 fattore di forma, 25
 fattore di penetrazione di Gamow, 72
 fattore spettroscopico, 102
 fattori combinatoriali, 129
 figura
 oblunga, 18
 prolati, 18
 first order perturbation theory, 34
 fonone, 17
 formula di Breit-Wigner, 78, 80
 formula semi-empirica di massa, 2
 termine di Coulomb, 3
 termine di superficie, 3
 termine di volume, 3
 termine simmetrico, 3
 fotodisintegrazione, 113
 fractional abundance, 85
fractional nuclear abundance, 129
Freeze-out, 46, 52
ft-value, 26
 funzione di Whittaker, 122
 funzione di Fermi, 25
 funzione meromorfa, 96
 j funzioni di Bessel, 36
 funzioni di Coulomb, 90, 91, 94, 122
 irregolare, 90
 regolare, 90
 funzioni di Lagrange, 98
 galassia di Andromeda, 43
 gas del mezzo interstellare, 43
 gauge di Coulomb, 34
 grafico di Fermi-Kuree, 26
 Gruppo Locale, 43
 hamiltoniana di interazione, 34
Holy Grail dell'astrofisica, 110
HPGe detector, 110
 incidente al Super-Kamiokande, 68
 integrale di Fermi, 26

integrale di Fermi $f(E_0)$, 89
 Laboratori Nazionali del Gran Sasso, 104
 legge di Hubble, 45
Li-problem, 55
Li-problem, 51
Li-puzzle, 55
Li-puzzle, 51
 linee di Smith, 14
 livello di valenza, 79, 80
 long wavelength approximation, 37, 38
low-metallicity stars, 51
 luminosità, 43
 LUNA
 LUNA II, 133
 lunghezza d'onda di De Broglie λ_{DB} , 71
 a_s lunghezza di scattering, 60
 Lyman α , 49
 magnetone nucleare μ_N , 1
main sequence, 43
 J_{ij}^{MEC} meson-exchange current, 61, 92
 metallicità, 64
 Metodo *ab-initio*, 63, 88, 111, 138
 metodo *ab-initio*, 93, 95, 98, 103
 metodo *R-MATRIX*, 93, 103, 132
 Calculable, 93
 Phenomenological, 93, 99, 138
 scelta delle funzioni d'onda, 98
 Misura di ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$
activation method, 110
prompt γ method, 110
 modelli nucleari
a goccia, 16
a shell, 8, 78
 modello cosmologico standard ΛCDM , 52
multi-photon-exchange, 115
 nucleo
 isotono, 7
 isotopo, 7
 numeri magici, 7
 numero di Avogadro, 84
one-photon-exchange approximation, 114
 operatore di Bloch, 94
 operatore di creazione, 35
 operatore di dipolo elettrico, 38
 operatore di distruzione, 35
 operatore di Gamow-Teller, 92
 operatore di momento magnetico, 37
 operatore di salita, 59

oscillazione di sapore dei neutrini, 68
parametro di *redshift z*, 44
parsec, 43
PArthENoPE, 54
particella di Majorana, 104
particella X17, 111
passive shielding, 104
penetration factor, 97
picco di Gamow, 73, 74, 83
polinomi di Legendre, 98
polinomio di Legendre, 32
popolazione II, 51
potenziali *realistici*
 AV18, 92
 CD-Bonn, 92
Principio Cosmologico, 44
principio del bilancio dettagliato, 113
processo risonante, 77, 80
processo *s*, 136
pseudo-ortogonalità *np*, 66
quasi-stellar object, 49

R-Matrix, 95
radiation density N_ν, 52
reaction-rate r, 71, 76
reazione periferica, 122
recoil mass separator, 112
redshift, 49
reduced width, 96
reduction transition probability, 115
regola d'oro di Fermi, 23, 88
risonanza, 80
 larga, 81
 sotto soglia, 82, 83
 stretta, 81, 83
risonanza nucleare, 71

scintillatore, 69
Sgr A*, 43
shift factor, 97, 98
stime di Weisskopf, 34, 37, 40, 41, 115
surface approximation, 118
sviluppo in onde parziali, 57

teorema di Wigner-Eckart, 57
teorema di Wigner-Eckart, 38
termini di multipolo, 38
 elettrico, 36, 38
 magnetico, 36, 38

The Holy grail of Nuclear Astrophysics, 134
Trojan Horse method, 117

valle di stabilità, 4
velocità peculiare, 45
Via Lattea, 43

Esperimenti
 ATOMKI, 111
 Borexino, 69, 104
 DAMA, 111
 DARKSIDE, 104
 DRAGON, 138
 ERNA, 111, 138
 esperimento con acqua, 67
 esperimento di Davis, 66
 GALLEX, 66
 GSI, 116
 Katrín, 28
 LUNA, 54, 77, 83, 105, 132
 LUNA I, 105
 LUNA II, 109
 LUNA MV, 110, 138
 MSU, 115
 Ptolemy, 28
 RIKEN, 115
 Sudbury Neutrino Observatory, 68
 Super-Kamiokande, 68
 XENON1T, 104

Articoli
 Bethe, 89
 Charity, 78
 de Boer, 135
 Descouvemont & Baye, 93, 144
 Formicola et al., 145
 Runkle et al., 145
 Salpeter, 83
 Tribble et al., 113

Background
 induced, 107
 radon, 105
 raggi cosmici, 104

Complementi
 Evoluzione protostellare, 109
 l'ipotesi di Fowler, 83, 105, 107
 la teoria di Debye-Hückel, 86
 Metodo delle Armoniche Ipersferiche, 63
 Piombo romano nei LNGS, 105, 110
 Valori solari, 64