

Appunti del corso
Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico

Bernardo Vettori

A.A. 2020/2021

Introduzione

In queste dispense sono raccolti gli appunti delle lezioni del corso di Reazioni Nucleari di Interesse Astrofisico A.A. 2020/2021 tenute dalla professoressa L.E. Marcucci. Non è quindi presente la parte di descrizione del deutone e dello scattering di 2 nucleoni tenuta invece dal professor A. Kievsky. Le immagini che compaiono sono state prese dagli appunti digitali del corso e l'ordine degli argomenti trattati corrisponde a quello adottato nel corso. Ogni capitolo infatti è organizzato con una piccola introduzione che ne descrive sinteticamente il contenuto e che indica le lezioni corrispondenti.

Per quanto riguarda la notazione, non vi è una scelta univoca, ma spesso viene ripresa quella degli articoli discussi a lezione; tuttavia le note a piè di pagina dovrebbero garantire la corretta comprensione della scelta adottata.

L'ultimo capitolo *Approfondimenti* raccoglie alcuni argomenti che ho personalmente approfondito durante lo studio, per cui non fanno parte del programma del corso.

Questo lavoro è totalmente personale e non ha alcuna validità in relazione all'esame dal momento che non è né stato controllato né approvato dalla docente. Per qualsiasi tipo di errore o imprecisione (anche solo grammaticale) mi farebbe piacere esserne informato, così da poter correggere prontamente.

Indice

Introduzione	ii
Indice	iii
I Big Bang Nucleosynthesis	1
1 Introduzione alla teoria	3
2 Network di reazioni	5
2.1 La nucleosintesi primordiale	6
3 La BBN e i neutrini	10
4 La BBN oggi	10
5 La prima reazione	13
5.1 Cinematica	13
5.2 Funzioni d'onda	14
6 Il problema dei neutrini solari	19
7 Elementi di analisi	22
7.1 Fattore Astrofisico	22
II Approfondimenti	25
1 Modelli e decadimenti	25
1.1 Decadimento ε	25
2 Regola d'oro di Fermi	25
3 Sul numero di neutrini	26
4 Dettagli sul calcolo del decadimento γ	26
4.1 Clebsch-Gordan	26
4.2 Proprietà della Bessel	26
4.3 Proprietà armonica vettoriale	26
5 Effetto tunnel	27
6 CRM: indipendenza dal parametro B	27
7 Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$	28
Indice analitico	29

Capitolo I

Big Bang Nucleosynthesis

In questo capitolo trattiamo le basi della teoria della *Big Bang Nucleosynthesis* e le reazioni nucleari da essa previste, con particolare attenzione allo studio *ab-initio* della reazione $p + n$. Il capitolo copre le lezioni 11/03/2021, 15/03/2021, 17/03/2021 e 18/03/2021.

Astronomical Observations Prima di passare allo studio delle reazioni nucleari che interessano la nucleosintesi primordiale e stellare, si riportano alcune evidenze di carattere astronomico.

- La Via Lattea è una galassia a spirale di diametro ca. 30 kpc¹ e spessore 1 kpc. È composta da $2 \cdot 10^{11}$ stelle, polveri e gas. Il Sole è situato a circa 8.5 kpc dal centro galattico, che consiste in un buco nero supermassiccio² chiamato Sgr A*. La nostra Galassia insieme alla galassia di Andromeda e una ventina di altre galassie nane forma il Gruppo Locale; questo è legato (gravitazionalmente) ad altri gruppi con cui forma il Superammasso della Vergine per un totale di quasi 10^{10} galassie che occupano circa il 5% dell'Universo.

Le masse in gioco sono:

$$M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad \rho_{\odot} \sim \rho_{\text{H}_2\text{O}} \quad M_{MW} > 2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$$

come abbiamo detto, non sono presenti solo stelle nella Via Lattea, ma anche mezzo e materia oscura. Per quanto riguarda il gas, questo ha una densità che varia da 10^9 atomi/m³ vicino al sistema solare fino a circa 10^5 altrove e contiene principalmente H ed He con tracce di molecole.

- Dall'analisi spettrale si ottengono informazioni sulla temperatura e la composizione chimica.
- La luminosità: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{sup}^4$ dove $\sigma \equiv 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann; per cui:

$$\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

Da questa relazione è possibile costruire un diagramma temperatura-luminosità detto diagramma Hertzsprung-Russell in Figura I.1. In questo grafico si osserva che le stelle in *main sequence* si collocano quasi su una retta. Le linee parallele di colore grigio corrispondono a le linee di isoraggio.

¹Le misure sono riportate in *parsec*; ricordiamo che:

$$1 \text{ pc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.3 \text{ ly}$$

²Se non fosse per il mezzo interstellare avrebbe una luminosità apparente pari a quella del Sole.

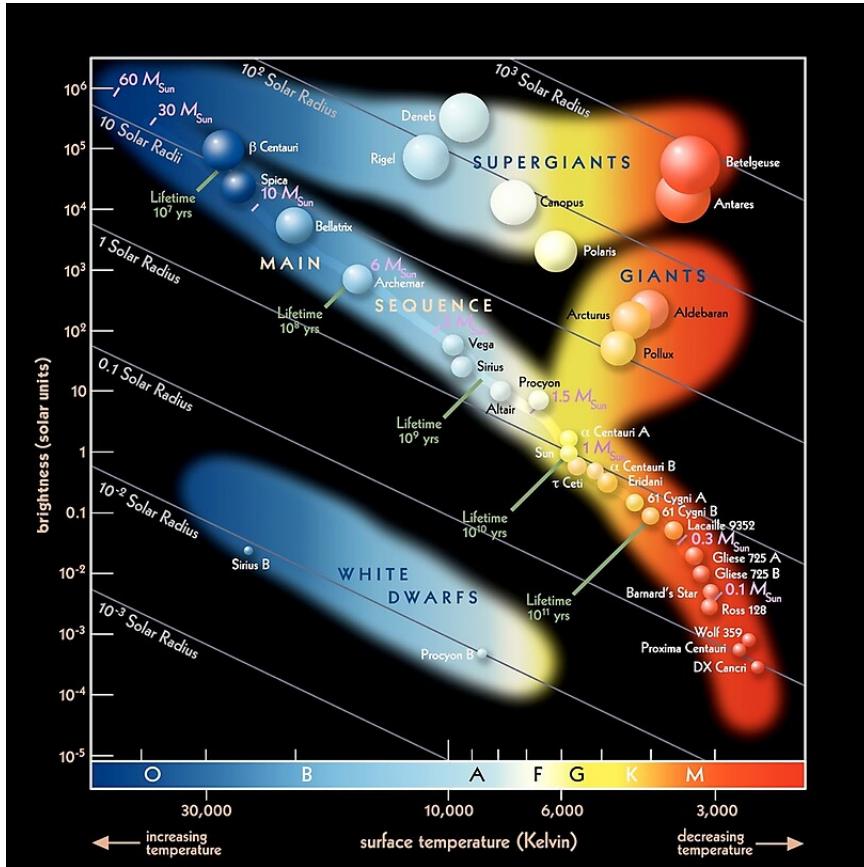


Figura I.1: Diagramma di Hertzsprung-Russell

- Nel 1930 Hubble si rende conto che le galassie sono uniformemente distribuite nel cielo³ e che si stanno allontanando. L'evidenza di tale fenomeno di deriva si evince dall'effetto Doppler sulle righe spettrali di queste galassie, ovvero uno spostamento verso "il rosso" (lunghezze d'onda maggiori); si definisce allora il parametro di *redshift*:

$$z \equiv \frac{\lambda(v) - \lambda(0)}{\lambda(0)} \simeq \frac{v}{c}$$

con $v \ll c$. Le osservazioni mostrano una proporzionalità diretta tra z e la distanza d dell'oggetto secondo una costante detta costante di Hubble H . Sul valore di questa costante c'è tensione, riportiamo quello ottenuto dalla misura tramite la scala delle distanze: $H = 72 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \simeq 2.3 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Ipotizzando che il rate di espansione dell'universo non cambi nel tempo, H^{-1} dà una stima dell'età $t \sim 12 \cdot 10^9 \text{ y}$.

- Nasce la teoria del *Big Bang*. Secondo questa teoria, materia e radiazione erano inizialmente accoppiate fino a un tempo in cui la materia barionica ha ricombinato (universo neutro) e si è disaccoppiata. Da quel momento in poi la radiazione non ha più interagito con la materia⁴ e infatti si osserva un fondo di radiazione cosmica detto *Cosmic Microwave Background* (CMB), ancora oggi molto studiato. La teoria prevedeva⁵ una $\lambda \simeq 7.5 \text{ cm}$ (da cui il nome *microwave*), che per un corpo nero corrisponde a $T \simeq 2.7 \text{ K}$, e fu osservato nel 1965 da Penzias e Wilson.

³Da questo nascerà il Principio Cosmologico per cui l'Universo viene assunto uniforme e isotropo (su "grandi" scale).

⁴Si parla di scale cosmologiche. Inoltre il numero di fotoni interagenti dalla nascita dell'universo a oggi è trascurabile rispetto a quello del CMB.

⁵Questi valori dipendono fortemente dal modello.

- Per misurare H_0 (dove il pedice indica che la costante è misurata per il tempo attuale) si utilizzano principalmente 2 metodi: l'osservazione dell'espansione dell'Universo dagli spettri delle galassie lontane oppure lo studio statistico delle disomogeneità nel CMB. Nel primo caso, è necessario selezionare galassie per cui la velocità peculiare⁶ è trascurabile rispetto a quella di espansione e misurarne le distanze⁷; si ha così dalla legge di Hubble una misura di H_0 indipendente dal modello cosmologico.
- Nel metodo del CMB, invece, si osserva appunto lo spettro della radiazione di fondo: dal momento che questa era accoppiata alla materia (barionica) le fluttuazioni in temperatura ($\sim 10^{-5}$) rispecchiano quelle in densità dei barioni; all'epoca della ricombinazione queste oscillazioni si sono "congelate" ed è quindi possibile studiare il collasso delle strutture primordiali, Figura I.2. In particolare, l'altezza e la distanza dei cosiddetti *acoustic peaks* (i massimi locali della curva) permettono di vincolare alcuni parametri cosmologici tra cui $\Omega_{bary} = \rho_{bary}/\rho_c$, dove $\rho_c \equiv 3H_0^2/8\pi G$ la densità critica⁸ e quindi stimare H_0 (misura fortemente *model dependent*). Come mostrato dal grafico in Figura I.3 vi è tensione tra le due misure e ancora oggi si sta cercando una risposta.

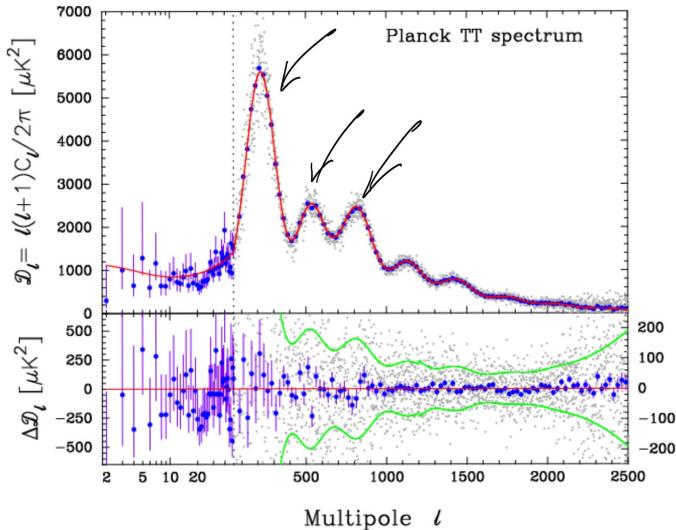


Figura I.2: Analisi spettrale della sovradensità nel CMB. Si possono osservare i picchi di cui parlavamo.

1 Introduzione alla teoria

Il *Big Bang model* comporta necessariamente la formulazione di una teoria sulla nucleosintesi primordiale, detta ***Big Bang Nucleosynthesis Theory (BBN)***. Questa fu trattata per la prima volta in un articolo del 1940 degli autori Gamow, Adler e Bethe⁹.

Il problema di Y_P Prima di passare allo studio delle reazioni di interesse, mostriamo come alcuni risultati confermano la necessità di una nucleosintesi primordiale.

⁶Si tratta della velocità di avvicinamento dovuta alle interazioni gravitazionali tra galassie.

⁷Poiché la scala è dell'ordine delle centinaia di Mpc è necessario costruire appunto una scala delle distanze attraverso quelle che vengono chiamate *candele campione*, oggetti con poca astrofisica, ben identificabili.

⁸La densità critica è la densità che avrebbe l'universo se fosse piatto. La definizione deriva dall'equazione di Friedmann.

⁹Un aneddoto divertente: Gamow (che è lo stesso Gamow del decadimento di Gamow-Teller) insistette per avere la partecipazione anche di Bethe, per poter mettere nell'articolo i nomi "Adler, Bethe, Gamow" che ricordavano α, β, γ, nome con cui ormai viene ricordato l'articolo.

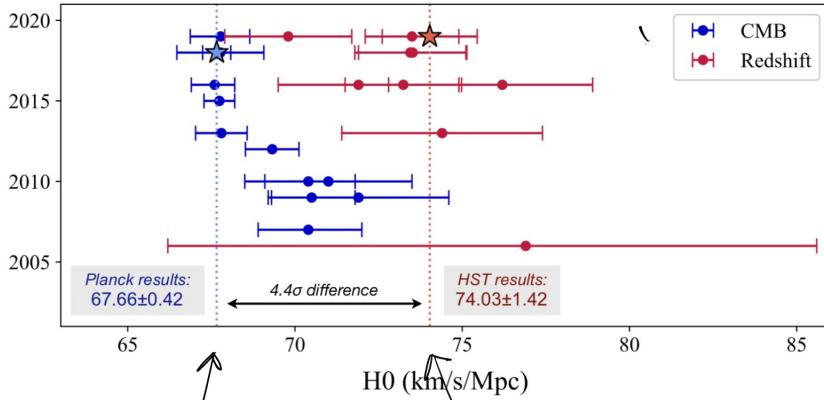


Figura I.3: Tensione per le misure di H_0 . Si osserva che nel tempo i valori si sono allontanati.

Se assumiamo che $M_{MW} \sim 10^{11} M_\odot$ in stelle e $L_{MW} \sim 2 \cdot 10^{10} L_\odot$ allora l'energia totale liberata in un tempo H_0^{-1} sarà $E_{tot} \simeq L_{MW}/H_0 \sim 2.4 \cdot 10^{54}$ J; escludendo la nucleosintesi primordiale l'unica reazione possibile è $4p \rightarrow {}^4\text{He}$, allora $E_{{}^4\text{He}} = 28 \text{ MeV} = 4.5 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Se tutta la massa stellare bruciasse allora si libererebbe un'energia pari a $E_{burn} \equiv E_{{}^4\text{He}} \cdot M_{MW}/4m_p \sim 1.3 \cdot 10^{56} \text{ J}$, da cui otteniamo $E_{tot}/E_{burn} \sim 2\%$ che corrisponde alla percentuale in massa di ${}^4\text{He}$ "primordiale" Y_P . Tuttavia, sperimentalmente si osserva che $Y_P \simeq 25\%$, dunque le reazioni nucleari nei core stellari non sono sufficienti per spiegare questa abbondanza ed è necessario introdurre un altro meccanismo (la nucleosintesi primordiale, appunto).

A grandi linee Proviamo a correggere il risultato precedente con argomentazioni qualitative. Ovviamente per la nostra trattazione non siamo interessati al *Big Bang*, ma fisseremo come origine dei tempi l'"attimo prima" che protoni e neutroni si formino:

- a $t = 0$ s abbiamo quindi una sfera molto densa e molto calda $T > 10^{13} \text{ K}$.
- a $t \sim 0.01$ s domina ancora la radiazione e non riescono a formarsi protoni e neutroni perché $T \sim 10^{13} \text{ K}$ quindi $E = kT \sim 1 \text{ GeV}$, quindi anche se ci fossero p e n verrebbero fotodisintegriti.
- a $t \sim 0.1$ s la temperatura scende a $T \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ K}$ per cui $E \simeq 3 \text{ MeV}$ e si formano finalmente protoni e neutroni.

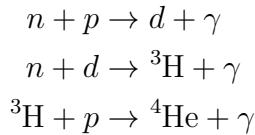
A questo punto è fondamentale ricordare che la massa del neutrone è maggiore di quella del protone $\Delta m = 1.3 \text{ MeV}$ per cui avremo al momento del *Freeze-out* dall'equazione di Saha:

$$\frac{N_n}{N_p} \propto \exp\left(-\frac{\Delta m}{kT}\right) \simeq 0.22 \simeq \frac{1}{5}$$

per cui per 1000 protoni abbiamo 220 neutroni circa. Ancora non si può formare il deutone.

- a $t \sim 180$ s la temperatura raggiunge $T \sim 10^9 \text{ K}$ a cui corrisponde $E \sim 0.09 \text{ MeV}$ e quindi si possono formare i nuclei. Tuttavia, è necessario ricordare che il neutrone decade con una legge del tipo $N_n(t) = N_n^0 \exp(-t/\tau_n)$ con $\tau_n \sim 886 \text{ s}$; nell'esempio da noi fatto ($N_n^0 = 220$) avremo $N_n \simeq 180$ e $N_p = N_p^0 + (N_n^0 - N_n) = 1040$.

Allora possiamo ipotizzare che qualitativamente¹⁰ avremo queste relazioni:



Ci chiediamo quanto valga Y_P ¹¹:

$$\begin{aligned} Y_P &= \frac{N_{\text{He}} m_{\text{He}}}{N_{\text{He}} m_{\text{He}} + N_{p,\text{rimasto}} m_p} \leftarrow \text{Mass fraction} \\ &= \frac{4N_{\text{He}}}{N_{p,\text{rimasto}} + 4N_{\text{He}}} \\ &= \frac{4 \frac{N_n}{2}}{(N_p - N_n) + 4 \frac{N_n}{2}} = \\ &\simeq 0.29 \end{aligned}$$

che si avvicina molto al 25% cercato.

Le basi della BBN Innanzitutto elenchiamo gli “ingredienti” essenziali della teoria:

- Un network di reazioni.
- Il numero di neutroni e protoni di partenza, che sarà determinato, come abbiamo accennato, dalla vita media del neutrone, misura sulla quale tuttora è presente una certa incertezza (fornitaci dal PDG¹²).
- Il rapporto tra barioni e fotoni detto ***entropy factor*** η ¹³. Questo parametro ci dice se è favorita la ricombinazione (η grande) o la fotodisintegrazione della materia.
- Il fattore η è legato alla ***barion density*** secondo $\rho_B = 6.8 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3} \cdot \eta$. Spesso però al posto di questa si tende a lavorare con la ***barion fraction of critical mass density***, definita¹⁴ come $\Omega_B h^2 = 3.6 \cdot 10^7 \cdot \eta$.

Come “output” da questi avremo le abbondanze degli elementi primordiali (ovvero H, He e metalli leggeri). Passiamo allora alla trattazione di questi “input”.

2 Network di reazioni

In Figura I.4 riportiamo le reazioni coinvolte nella nucleosintesi primordiale; nel seguito con i numeri puntati tra parentesi (per esempio (1.), (2.)) faremo riferimento alle reazione riportate in questa figura.

¹⁰In realtà esiste un *full network* di relazioni.

¹¹Si usa $m_{{}^3\text{He}} \simeq 4m_p$ e $m_n \sim m_p$.

¹²PDG = Particle Data Group.

¹³È definito come rapporto tra la densità barionica e quella dei fotoni n_b/n_γ .

¹⁴Dove h è un parametro adimensionale per la costante di Hubble, definito come $h = H_0/100[\text{km/s Mpc}]$.

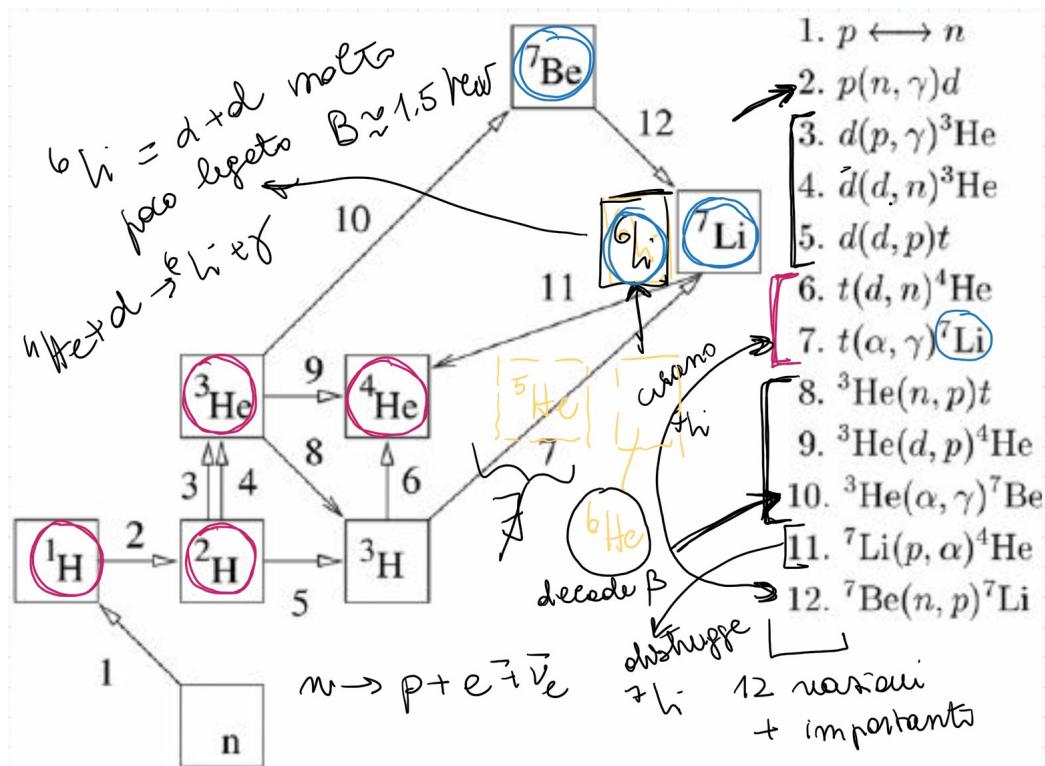


Figura I.4: Sono riportate le 12 reazioni più importanti. Gli elementi segnati in rosa sono i primordiali più abbondanti.

Criteri qualitativi di reazione Prima di procedere ricordiamo alcune regole qualitative per capire quale tra i vari rami di una reazione è favorito rispetto agli altri:

- I. $\sigma_{\text{forte}} \gg \sigma_{\text{EM}} \gg \sigma_{\text{debole}}$. Per riconoscere a quale tipo di interazione appartiene la reazione è sufficiente osservare i prodotti: se compaiono neutrini l'interazione è debole, se invece il numero di protoni e neutroni è conservato abbiamo interazione forte e se si ha anche produzione di un fotone allora si ha interazione elettromagnetica.
- II. L'abbondanza dei reagenti è discriminante.
- III. La barriera Coulombiana da superare per avere la reazione è un fattore che influisce fortemente sulla probabilità di reazione.

2.1 La nucleosintesi primordiale

La prima reazione che abbiamo è il decadimento del neutrone¹⁵ (1.); successivamente segue una cattura radiativa p - n (2.) e a questo punto abbiamo 3 possibili reazioni di distruzione del deuterio: secondo il I criterio la (4.) e la (5.) dovrebbero contare maggiormente rispetto alla (3.), ma poiché l'abbondanza di p è superiore a quella di d le probabilità delle tre reazioni sono dello stesso ordine¹⁶. Queste reazioni non sono sufficienti a consumare tutto il deuterio, che potrà interagire con il trizio t secondo la (6.); il trizio non è un elemento primordiale perché decade¹⁷, ma essendo un decadimento debole è molto probabile che interagisca nuovamente con α (7.) dando ^7Li ¹⁸. Per quanto riguarda ^3He , invece, questo è stabile e ha varie reazioni di

¹⁵Si tratta dell'unica reazione di interazione debole.

¹⁶Si capisce allora come mai non si ha $d(d, \gamma)^4\text{He}$ (poca abbondanza e interazione EM).

¹⁷A titolo informativo: $t \rightarrow ^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$.

¹⁸Vedremo che la presenza di questo ^7Li sarà una questione delicata da trattare.

distruzione¹⁹, tra cui la più importante se ancora vi sono neutroni è la (8.), alla quale segue (nonostante la poca abbondanza di deuterio) la (9.) e quando si raggiunge un certo numero di ^3He e α si ha anche la (10.); ora il berillio che si è formato da questo viene distrutto praticamente tutto in ^7Li (12.).

Fermiamoci un attimo: come mai non troviamo reazioni per ^5He , ^6He e ^6Li ? Allora il ^5He non è uno stato legato, ma ^6He sì, tuttavia questo decade β molto velocemente (è poco legato) in ^6Li . Quest'ultimo si ottiene anche da $\alpha + d$ con l'emissione di un fotone e il motivo per cui la sua abbondanza non è significativa è dovuto al fatto che è poco legato, per cui si rompe facilmente. Abbiamo ancora un problema da risolvere, ovvero che la carta dei nuclei presenta un *gap* per $A = 8$: il ^8B e il ^8Li decadono β e il ^8Be decade α . Dunque, la BBN si ferma qui²⁰ con p , ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li (poco) e ^7Be (pochissimo).

Confronto con le osservazioni A questo punto per studiare la BBN è necessario prendere i valori delle varie sezioni d'urto delle reazioni coinvolte e vederne l'evoluzione temporale, come mostrato in Figura I.5, dove è riportata la *mass fraction* dei principali elementi predetta dal modello²¹. Dunque, dalle misure di queste quantità è possibile stimare la bontà della teoria.

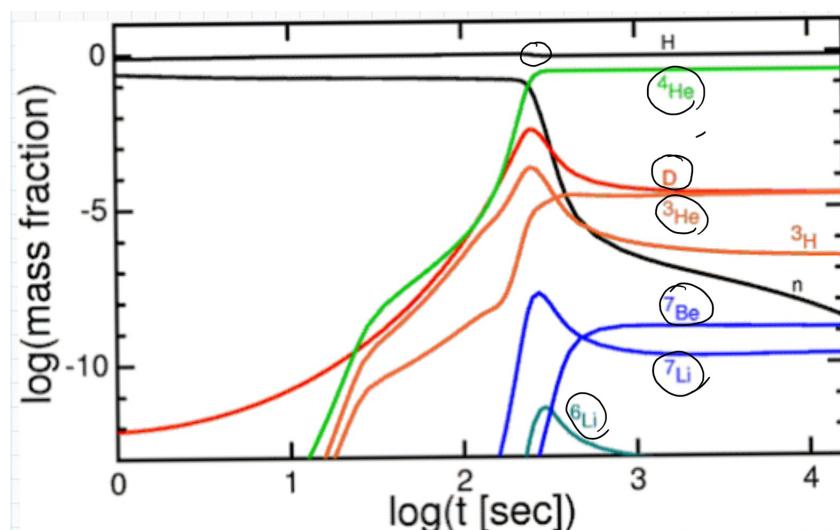


Figura I.5: Andamento nel tempo della *mass fraction*, ovvero dell'abbondanza di un elemento sull'abbondanza di H. L'abbondanza di H ha un leggero scalino e quello segna l'inizio della BBN; si vede che n decade; il ^3H è indicato, ma decade; vi è un errore per l'andamento del ^6Li , dovrebbe essere più alto.

Riportiamo allora le osservazioni in Figura I.6. Da queste misure è possibile stimare $\Omega_B h^2$ e alla fine degli anni '90 si ebbe la prima evidenza che la densità di materia dell'Universo fosse differente da quella attesa (a causa dell'assenza nel conto del contributo dovuto alla materia oscura).

¹⁹Esisterebbe anche $^3\text{He}(n, \gamma)^4\text{He}$, ma la (8.) (data l'abbondanza e la natura dell'interazione) è molto più importante.

²⁰In realtà esistono reazioni per saltare da $A = 5$ ad $A = 7$, ma sono comunque trascurabili rispetto a tutti gli altri processi.

²¹Una piccola nota sul berillio: non è facile da misurare, quindi spesso quello che si misura è il rapporto d/H o $^3\text{He}/\text{H}$.

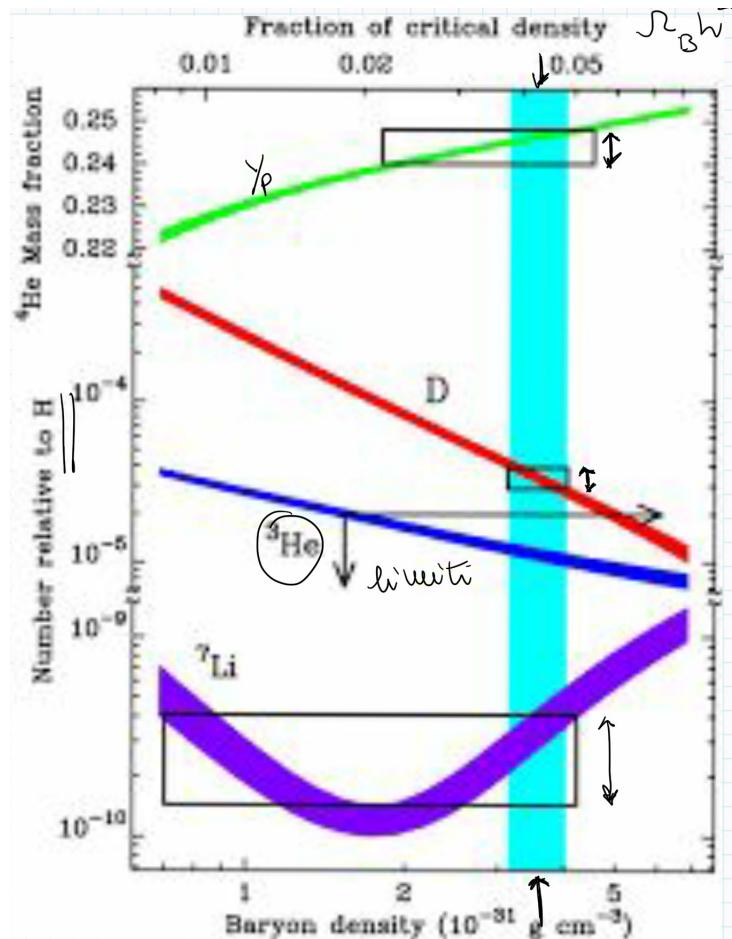


Figura I.6: Le bande degli andamenti sono dovute alle incertezze. Coi rettangoli si riportano le misure. Il range di interesse è indicato dalla striscia celeste. Per il trizio ci sono solo limiti superiori e inferiori.

Misura delle abbondanze primordiali Partiamo dalla misura per ${}^4\text{He}$. I primi problemi sorgono dal fatto che le stelle ne hanno aumentato la concentrazione, dunque si fanno misure del rapporto ${}^4\text{He}/\text{H}$ in regioni in cui è avvenuta poca o quasi nulla evoluzione stellare, ovvero galassie *metal-poor*. Riportiamo in Figura I.7 un esempio. A oggi si ha un valore di circa $Y_p \sim 0.25$.

La misura del deuterio è anche più problematica: esso infatti è “fragile”, per cui vanno evitate le stelle e gli oggetti densi, anzi si fanno osservazioni nel mezzo interstellare.

Il 1973 il satellite Copernico riuscì a dare dei limiti (superiori e inferiori), ma non a raccogliere dei veri e propri dati. Successivamente, nel 1998, Tytler e Burles ebbero un’idea, ovvero quella di misurare d/H nelle *hydrogen clouds* ad alto *redshift* ($z > 3$, oggetti molto vecchi): si osservano le linee di assorbimento della Ly α in *quasi-stellar object* con metallicità $Z \sim 10^{-2} \div 10^{-3} Z_\odot$ (per cui ci aspettiamo che l’abbondanza sia quella primordiale). A oggi il valore più accurato riporta $d/\text{H} = (2.527 \pm 0.030) \cdot 10^{-5}$; questa accuratezza deriva dal fatto che l’abbondanza di deuterio è particolarmente sensibile alla densità di barioni.

Per quanto riguarda ${}^3\text{He}$, anche questo è molto fragile e non dev’essere cercato nel mezzo interstellare, tuttavia la misura è complicata.

Il ${}^7\text{Li}$, invece, viene ricercato nelle atmosfere stellari di stelle di popolazione II, ovvero *low-metallicity stars* (che si possono osservare nell’alone della nostra galassia). In Figura I.8 riportiamo i dati sperimentali per il rapporto ${}^7\text{Li}/\text{H}$: notiamo dei dati (sulla destra) molto “diffusi” che però non sono di interesse poiché si riferiscono a metallicità alte; per quanto riguarda gli altri dati (sulla sinistra) vi è tuttora ancora discussione riguardo il valore di Fe/H oltre il quale

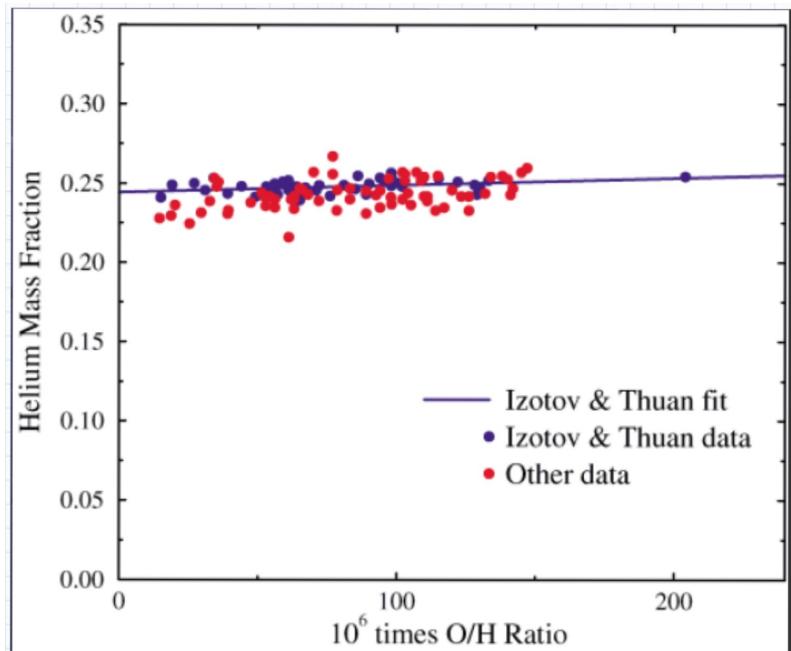


Figura I.7: Risultati sperimentali per stelle con metallicità differente.

fermarsi per il fit. Negli ultimi tempi queste misure sono diventate più accurate e hanno portato a un valore stimato di $\Omega_B h^2$ diverso da quello ottenuto dal $(^4\text{He}, d)$, dando vita a quello che oggi viene definito Li-*problem* (o *puzzle*) della BBN.

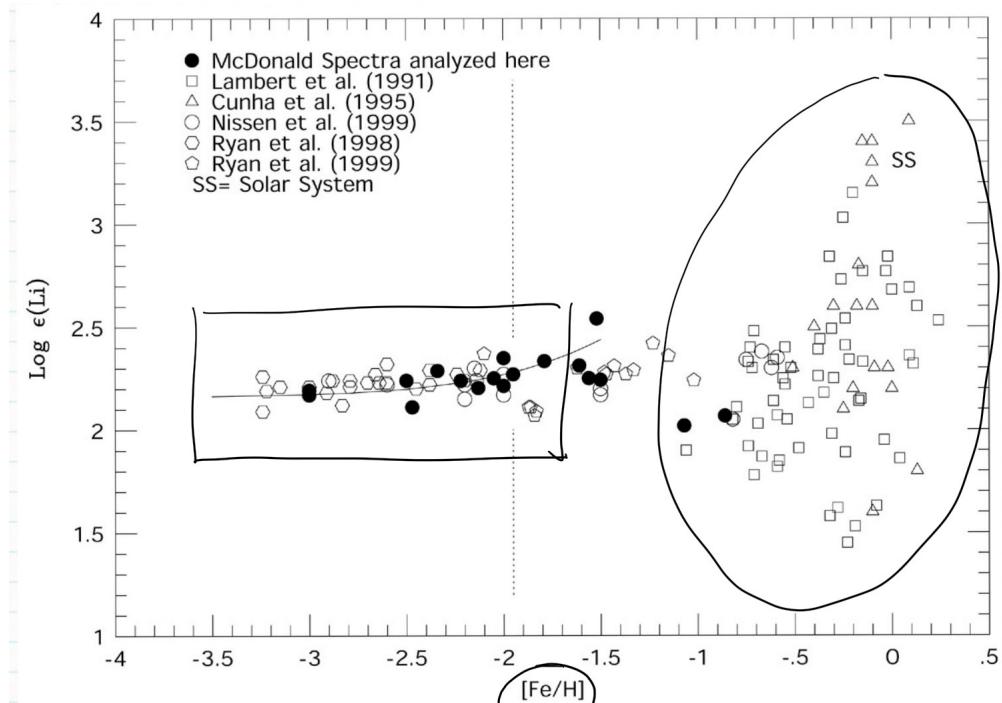


Figura I.8: *Split Plateau* per il Li. Con $\varepsilon(\text{Li})$ si indica la *mass fraction* del litio.

3 La BBN e i neutrini

Alla fine degli anni '90 la teoria della BBN era ormai supportata dall'accordo con evidenze sperimentali nell'abbondanza di 3 degli elementi più presenti nell'universo, acquisendo così un potere predittivo. Fu quindi impiegata per stimare il valore atteso per il numero di neutrini cosmici o per meglio dire la *radiation density* N_ν (l'osservabile che effettivamente si misura). All'interno del modello un aumento delle specie di neutrini comporterebbe un aumento nella densità di energia dell'universo, ovvero una crescita del rate di espansione e di conseguenza un anticipo del *Freeze-out*: $H^2 \propto N_\nu T^4$, dunque se N_ν è maggiore allora T è minore. Se riprendiamo l'esempio che avevamo fatto nel paragrafo “**A grandi linee**” a pg. 4 per il numero di neutroni al *Freeze-out* si ha in questo caso:

$$N_n = N_0 e^{-t/\tau} = 220 e^{-100/886} \simeq 196$$

Abbiamo quindi un maggior numero di neutroni e questo comporta una densità di ${}^4\text{He}$ più alta. Riportiamo in Figura I.9 l'andamento della *mass fraction* per l'elio al variare della N_ν .

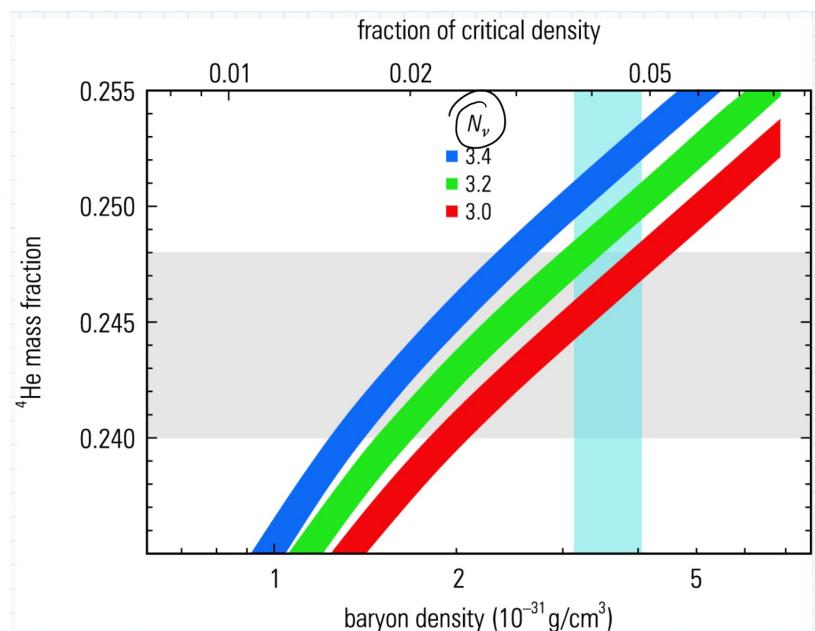


Figura I.9: La banda grigia rappresenta i dati sperimentali. Data la densità dei barioni si evince che gli andamenti per $N_\nu = 3.4$ e 3.2 vadano esclusi.

4 La BBN oggi

La teoria della BBN oggi si basa sul modello cosmologico standard ΛCDM^{22} .

Di recente $\Omega_B h^2$ è stato misurato dal CMB ed è quindi possibile fare delle stime sulle abbondanze: il d/H , per esempio, che è particolarmente sensibile al valore di Ω_B e a N_ν^{23} e per il

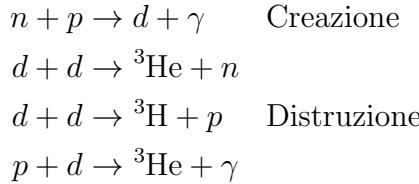
²²L'acronimo:

Λ sta per la costante cosmologica.

CDM sta per *Cold Dark Matter*.

²³Da qui in poi chiameremo N_ν con N_{eff} .

quale abbiamo una serie di reazioni che lo creano e lo distruggono²⁴:



Quello che si misura effettivamente è il **fattore astrofisico**²⁵ $S(E)$, che ha le dimensioni di una sezione d'urto per un'energia; si riportano i risultati sperimentali per l'ultima reazione di distruzione in Figura I.10.

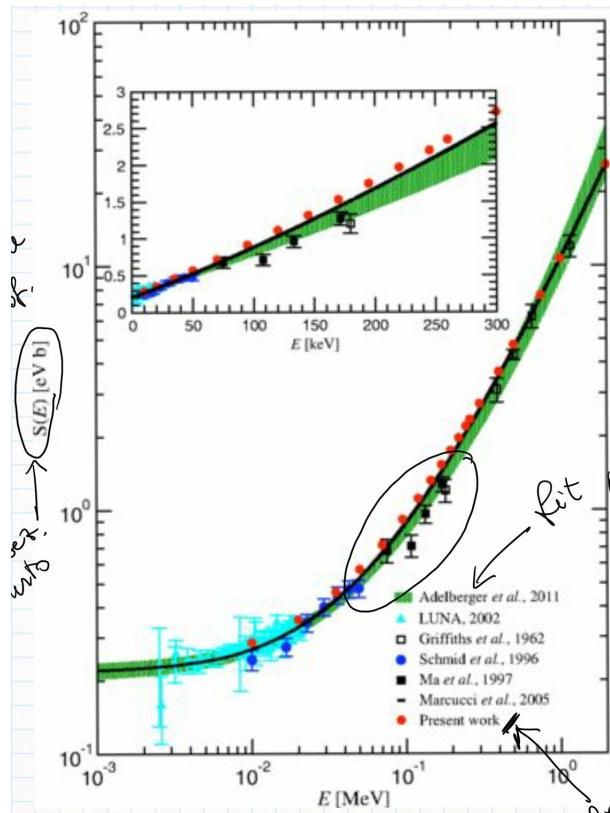


Figura I.10: La parte cerchiata è il range di interesse per la BBN. La banda verde corrisponde a un fit polinomiale, i punti rossi ad alcuni calcoli teorici e i punti neri ai dati (che rimangono sotto a tutto).

Recentemente in Italia si sono fatte altre prese dati grazie all'esperimento LUNA²⁶, che ha raggiunto un'incertezza del 3%. Riportiamo i risultati in Figura I.11. Rispetto al precedente, il rate di presa dati era molto maggiore e le misure molto più accurate, grazie un codice numerico detto *PArthenope*²⁷, che ritorna le funzioni di *likelihood* riportate in Figura I.12²⁸.

Dato $\Omega_B h^2$ da Planck, è possibile predire $d/\text{H}_{\text{BBN}} = (2.52 \pm 0.03 \pm 0.06) \cdot 10^{-5}$ da confrontare con il valore Ω_B più probabile ottenuto attraverso l'algoritmo. Riportiamo in Figura I.13 i risultati di LUNA, che hanno mostrato come non ci sia *nuova fisica* in questo campo: vi è un forte accordo tra il modello standard ΛCDM e la teoria della BBN.

²⁴Fino al 2020 l'ultima era la più incerta.

²⁵Si veda la sezione 7.1 - *Fattore Astrofisico* per la definizione

²⁶che discuteremo ampiamente nella sezione ??-??.

²⁷Per info: <http://parthenope.na.infn.it>.

²⁸La differenza tra il calcolo delle linee segnate come *Marcucci* è dovuta alle funzioni d'onda di scattering; si osserva che le misure del 2016 sono più accurate, tuttavia non se ne conosce il motivo.

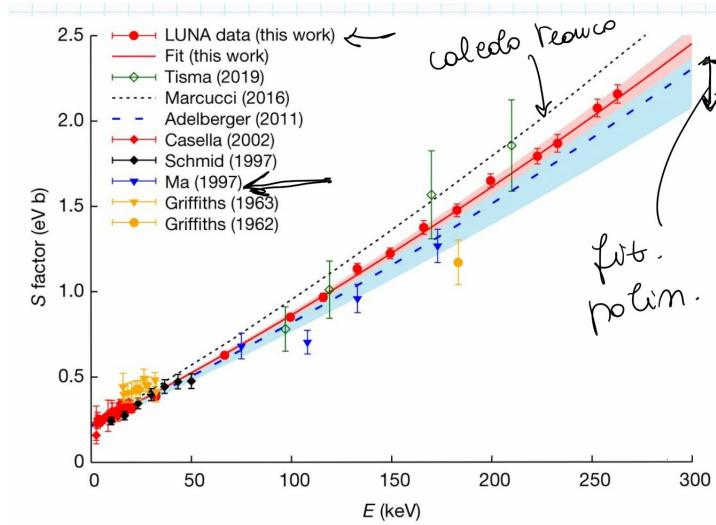


Figura I.11: I dati blu sono quelli che nella figura precedente erano segnati in nero. Quelli rossi sono i nuovi dati, la banda celeste corrisponde al fit polinomiale e la linea tratteggiata è l’andamento teorico. I dati di Casella 2002 (basse energie) sono quelli di LUNA I, mentre i dati in rosso circolari sono quelli di LUNA II (vedi ?? -??).

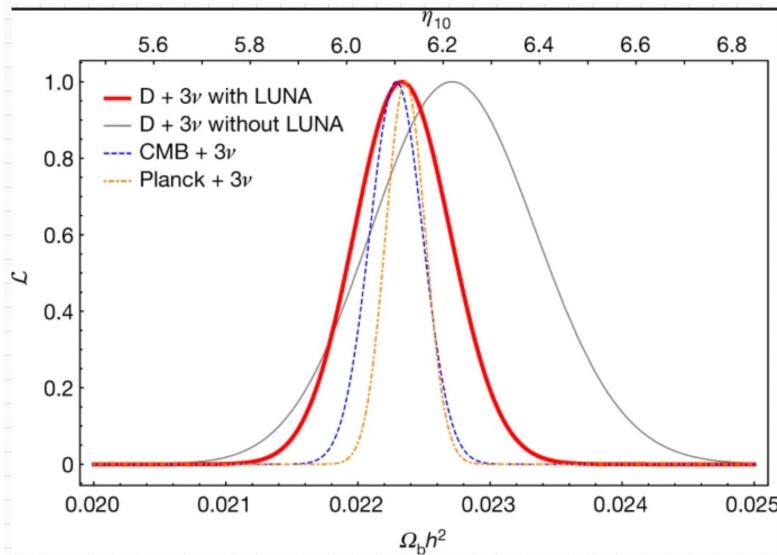


Figura I.12: Risultati per i vari esperimenti ottenuti tramite *PArthENoPE*.

Rimane ancora in sospeso il Li-*problem*, ma le ipotesi più recenti sostengono che probabilmente sia dovuto a un errore nella misurazione dell’abbondanza primordiale del litio.

	$\Omega_b h^2$	δ (%)	N_{eff}
D + 3ν (without LUNA data)	0.02271 ± 0.00062	2.73	3.045
D + 3ν (with new LUNA data)	0.02233 ± 0.00036	1.61	3.045
CMB + 3ν	0.02230 ± 0.00021^a	0.94	3.045
Planck + 3ν	0.02236 ± 0.00015	0.67	3.045
(D + CMB)	0.02224 ± 0.00022	0.99	2.95 ± 0.22
(D + Y_p)	0.0221 ± 0.0006	2.71	$2.86^{+0.28}_{-0.27}$

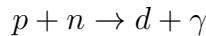
The first two lines show the results obtained from the likelihood analyses performed in this study, without and with the new D(p, γ) ${}^3\text{He}$ S factor obtained at LUNA and with N_{eff} fixed to its standard value^{23,24} of 3.045. The third and fourth lines show results obtained, respectively, using CMB data alone¹² (CMB + 3ν) and CMB data combined with the theoretical dependence of primordial ${}^4\text{He}$ on baryon density⁷ (Planck + 3ν). The last two lines correspond to cases in which both $\Omega_b h^2$ and N_{eff} are left as free parameters and the likelihood functions are constrained by either the deuterium abundance and a prior distribution on $\Omega_b h^2$, (D + CMB) case, or the observed and predicted abundances of both deuterium and helium, (D + Y_p) case (in both cases the predicted deuterium abundance takes into account our new LUNA results; see [Methods](#) for details).

^aQuoted in Fields et al.¹² as 0.022298 ± 0.000214 .

Figura I.13: Risultati di LUNA. Nei casi delle ultime due righe è stata rilasciato il numero di neutrini, precedentemente fissato dall'abbondanza di elio.

5 La prima reazione

Dopo il decadimento del neutrone, la prima reazione che avviene (secondo la Figura I.4) è:



Tra le reazioni del network questa è la più “semplice”, ovvero $A = 2$.

5.1 Cinematica

Studiamo allora la sezione d’urto di questa reazione:

$$d\sigma \stackrel{\text{Reg. d'Oro}}{=} \frac{\text{Rate di transizione}}{\text{Flusso incidente}} = \frac{\lambda}{v_{\text{rel}}}$$

Concentriamoci sulla probabilità di transizione $W_{i \rightarrow f}$, mettendoci nel sistema del centro di massa²⁹.

$$W_{i \rightarrow f} = |V_{i \rightarrow f}|^2 dn \quad \text{con } dn = \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_d}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_d + \vec{q}) \Rightarrow \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$$

dove $V_{i \rightarrow f}$ è l’elemento di matrice di transizione, T è il tempo di interazione e dn è l’elemento infinitesimo di spazio delle fasi (in cui abbiamo risolto per la δ). Dalla teoria perturbativa al primo ordine³⁰:

$$\begin{aligned} V_{i \rightarrow f} &= -i \int_0^T \langle f | V(t) | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t} dt \quad \text{dove } V(t) = -e \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}) \\ \langle f | V(t) | i \rangle &= -e \int d^3 x \langle \gamma | \vec{A}(\vec{x}) | 0 \rangle \cdot \langle d(\vec{P}_d, \sigma_d) | \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle = \\ &= -e \int \frac{\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda)}{\sqrt{2q}} \cdot \underbrace{\underbrace{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \langle d | \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle d^3 x}_{\text{Definiamo questo } \vec{J}^+(\vec{q})}} = \\ &= -\frac{e}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \end{aligned}$$

²⁹Usiamo la solita convenzione $c = \hbar = 1$, la notazione \vec{q} per l’impulso del fotone e \vec{P}_d per quello del deuterio e assumiamo volumi unitari.

³⁰Dove T è un tempo molto maggiore rispetto a quelli di evoluzione del sistema.

dove³¹ abbiamo assunto $\omega = E = q$. Per cui sostituendo:

$$\begin{aligned} V_{i \rightarrow f} &= \frac{ie}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \int_0^T dt e^{i(E_f - E_i)t} = \\ &= \frac{ie}{\sqrt{2q}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \frac{2 \sin(T(E_f - E_i)/2)}{(E_f - E_i)} e^{i(E_f - E_i)T/2} \\ \frac{|V_{f \rightarrow i}|^2}{T} &= \frac{e^2}{2q} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 2\pi \delta(E_f - E_i) \end{aligned}$$

La δ rappresenta la conservazione dell'energia³².

Possiamo allora scrivere la sezione d'urto differenziale:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^2}{2} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 q dq \frac{d\Omega_{\hat{q}}}{(2\pi)^2} \delta(E_f - E_i) \frac{1}{v_{rel}} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{8\pi^2} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 q dq \delta(E_p + E_n - m_d - \frac{q^2}{2m_d} - q) \frac{1}{v_{rel}} \end{aligned}$$

Poiché vogliamo che la sezione d'urto sia mediata su tutte le polarizzazioni sommiamo su tutte quelle finali $\sum_{\lambda=\pm 1, \sigma_d=\pm 1,0}$ e mediamo su quelle iniziali $\frac{1}{4} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}}$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{8\pi v_{rel}} \sum_{\lambda=\pm 1, s_d=\pm 1,0} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}} \int q dq |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 \frac{\delta(q - \bar{q})}{1 + \frac{\bar{q}}{m_d}} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{8\pi v_{rel}} \sum_{\lambda=\pm 1, s_d=\pm 1,0} \sum_{s_n, s_p=\pm \frac{1}{2}} |\hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q})|^2 \frac{\bar{q}}{1 + \frac{\bar{q}}{m_d}} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà della δ ³³, per cui $\bar{q} = m_d \left(-1 + \sqrt{1 + 2\Delta E/m_d} \right)$ con $\Delta E = E_p + E_n - m_d \stackrel{\text{CM}}{=} m_n + m_p - m_d + T_{rel}$. Notiamo che questa espressione è simile a quella del decadimento γ , infatti questo formalismo³⁴ vale per ogni decadimento del tipo $a + b \rightarrow c + \gamma$. Notiamo che $\sigma \propto 1/v_{rel} \sim 1/\sqrt{T_{rel}}$ ed è quindi l'energia cinetica relativa che fa da discriminante per far avvenire la reazione; questo andamento si ritrova in generale a basse energie per $n + a$.

5.2 Funzioni d'onda

Finora abbiamo trattato solo la cinematica della reazione, per continuare è necessario sviluppare le funzioni d'onda³⁵.

$$\begin{aligned} &\left| \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}^+(\vec{q}) \right|^2 = \\ &= \left| \langle d | \int d^3x e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}(\vec{x}) | pn \rangle \right|^2 \equiv \\ &\equiv \left| \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \langle \psi_{1s_d} | \vec{J}_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(p) \rangle \right|^2 \\ \vec{J}_\lambda(\vec{q}) &\equiv \int d^3x e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \vec{J}(\vec{x}) \end{aligned}$$

³¹Si è fatto uso di un abuso di notazione esplicitando l'integrale racchiuso dal braket. Spesso faremo questo abuso per esplicitare su quale variabile integriamo.

³²La funzione $\sin^2(xT)/x^2 \rightarrow \pi T \delta(x)$ per $T \rightarrow \infty$; dunque $T \gg \hbar/(E_f - E_i)$ come avevamo assunto.
³³

$$\delta(f(q)) = \sum_{i=0}^N \frac{\delta(q - \bar{q}_i)}{|f'(\bar{q}_i)|}$$

con \bar{q}_i zeri della funzione f .

³⁴Ovvero potremo sempre scrivere $d\sigma/d\Omega_{\hat{q}} \propto 1/(8\pi v_{rel}) \sum \sum | \dots |^2 \bar{q}/(1 + \bar{q}/m_c)$.

³⁵Da qui in poi, ovviamente, i risultati trovati non varranno per ogni $a + b \rightarrow c + \gamma$.

per $\psi_{s_p s_n}(\vec{p})$ ci aspetteremo dei multipoli come avevamo visto nel decadimento γ . Per $\hat{\varepsilon}$ consideriamo polarizzazione circolare:

$$\hat{\varepsilon}(\lambda) = \mp \frac{\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y}{\sqrt{2}} \quad \text{con } \vec{q}/\hat{z}$$

Dato che il momento \vec{J} per gli stati iniziali non è ben definito non possiamo usare immediatamente l'espansione in multipoli, per cui prima sviluppiamo le funzioni d'onda in onde parziali³⁶:

$$\begin{aligned} \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) &= 4\pi \sum_{S, S_z} \left\langle \frac{1}{2} s_n, \frac{1}{2} s_p | S S_z \right\rangle \sum_{L, L_z, \Lambda, \Lambda_z} \left\langle SS_z, LL_z | \Lambda \Lambda_z \right\rangle i^L \mathcal{Y}_{LL_z}^*(\hat{p}) \psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)} \\ \left\langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \right\rangle &= 4\pi (\dots) \left\langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)} \right\rangle \end{aligned}$$

$\psi_{np}^{(LS\Lambda\Lambda_z)}$ ha Λ ben definito, quindi è un'ottima candidata per l'espansione in multipoli. Poiché le energie sono basse³⁷, possiamo allora considerare solo 1S_0 ($S = L = \Lambda = 0$), ovvero le onde sferiche:

$$\begin{aligned} \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) &= 4\pi \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}_{\text{Arm. sfer.}} \psi_{np}({}^1S_0) \\ \left\langle \psi_{1s_d} | J_\lambda(\vec{q}) | \psi_{s_p s_n}(\vec{p}) \right\rangle &\equiv \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) \\ j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) &\equiv \left\langle \psi_{1s_d} | \int d^3x e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, \lambda) \cdot \vec{J}(\vec{x}) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle = \\ &= -\sqrt{2\pi} \sum_{\Lambda' \geq 1} (-i)^{\Lambda'} \sqrt{2\Lambda' + 1} \left\langle \psi_{1s_d} | E_{\Lambda'-\lambda}(q) + \lambda M_{\Lambda'-\lambda}(q) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle \end{aligned}$$

dove abbiamo prima definito $j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q})$ e poi sviluppato in multipoli come nel decadimento γ ³⁸ (chiamando Λ' l'ordine del multipolo per distinguerlo da Λ). La parità³⁹ dei singoli termini è data da $\pi(E\Lambda) = (-1)^\Lambda$ e $\pi(M\Lambda) = (-1)^{\Lambda+1}$, per cui, poiché deve valere $\vec{\Lambda} + \vec{J}_i = \vec{J}_f$, per $J_f = 1$, $J_i = 0$ e $\pi_i = \pi_f = +$ allora $\Lambda = 1$ e solo $M1$ sarà rilevata ai fini del calcolo al primo ordine:

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) &\simeq \sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_n \frac{1}{2} s_p | 00 \right\rangle \left\langle \psi_{1s_d} | -\sqrt{2\pi}(-i)\sqrt{3}(\lambda M_{1-\lambda}(q)) | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle \\ j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q}) &\simeq i\sqrt{6\pi}\lambda \left\langle \psi_{1s_d} | M_{1-\lambda} | \psi_{np}({}^1S_0) \right\rangle = \\ &= i\sqrt{6\pi}\lambda \underbrace{\frac{\langle 00, 1 - \lambda | 1s_d \rangle}{\sqrt{3}}}_{\text{Dal teo. di W-E}} \underbrace{\langle \psi_{1s_d} || M_1 || \psi_{np}({}^1S_0) \rangle}_{\text{El. di matrice ridotta}} = \\ &= i\sqrt{2\pi}\lambda \delta_{-\lambda s_d} |M_1(q)| \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di Wigner-Eckart. Il segno di λ non è importante in questa trattazione perché siamo interessati alla somma su tutte le polarizzazioni (per cui $\sum_{\lambda=\pm 1}$):

$$\sum_{s_n s_p, \lambda s_d} |\sqrt{4\pi} \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle j_{\lambda s_d}^{1S_0}(\vec{q})|^2 = 4\pi \underbrace{\sum_{s_n s_p} \left| \left\langle \frac{1}{2} s_p \frac{1}{2} s_n | 00 \right\rangle \right|^2}_{=1} \sum_{\lambda s_d} 2\pi \delta_{\lambda s_d} |M_1|^2 = 16\pi^2 |M_1|^2$$

³⁶Per non confondere J corrente con J momento denoteremo quest'ultimo con la lettera Λ .

³⁷Stiamo considerando una cattura termica con neutroni, appunto, termici.

³⁸Guarda ?? - ??.

³⁹Qui con J si indica il momento angolare totale e con Λ quello del fotone e quindi l'ordine di multipolo.

dove abbiamo usato $\sum_{\lambda s_d} \delta_{\lambda s_d} = \delta_{11} + \delta_{-1-1} = 2$. Dobbiamo calcolare $M_1(q)$, ma dal momento che questo non dipende da λ possiamo stimarlo per qualsiasi valore di λ (per esempio $\lambda = -1$):

$$\begin{aligned} j_{\lambda, -\lambda}^{1S_0} &= i\sqrt{2\pi}\lambda M_1(q) \\ M_1(q) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} &\propto \frac{1}{v_{rel}} \frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}/m_d} |j_{-11}^{1S_0}(\vec{q})|^2 \\ \sigma_{tot} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega_{\hat{q}}} d\Omega_{\hat{q}} \propto \frac{4\pi}{v_{rel}} \frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}/m_d} |j_{-11}^{1S_0}(\vec{q})|^2 \end{aligned}$$

Abbiamo così isolato la parte nucleare e il problema si riduce al calcolo di $j_{-11}^{1S_0}$:

$$j_{-11}^{1S_0} = \int d^3r_1 d^3r_2 \psi_{11}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \hat{\varepsilon}^*(\vec{q}, -1) \cdot \vec{J}_{-1} \psi^{1S_0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

A questo punto abbiamo bisogno della funzione d'onda del deutone, di quella di scattering np , del potenziale nucleare e di un metodo numerico che risolva l'equazione di Schrödinger sia per lo stato legato che per quello di scattering. Questo non è però sufficiente, è necessario anche un modello per la corrente elettrromagnetica⁴⁰ e ne avevamo uno:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\lambda, i} &= \frac{1}{2m} \underbrace{\varepsilon_i \left\{ \vec{p}_i, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \right\}}_{\text{corrente di convezione}} - \frac{i}{2m} \mu_i \vec{q} \times \vec{\sigma}_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \\ \varepsilon_i &\simeq \frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i}) \\ \mu_i &\simeq \frac{1}{2}(1 + \tau_{z,i})\mu_p + \frac{1}{2}(1 - \tau_{z,i})\mu_n = \frac{1}{2}(\mu_S + \mu_V \tau_{z,i}) \end{aligned}$$

dove ε_i e μ_i sono proiettori e $\mu_S = \mu_p + \mu_n = 0.88 \mu_N$ e $\mu_V = \mu_p - \mu_n = 4.706 \mu_N$ sono rispettivamente la combinazione isoscalare e quella vettoriale. In generale, l'integrale scritto precedentemente per $j_{-11}^{1S_0}$ viene risolto numericamente in $d^3r_{rel} d^3r_{CM}$, ma dal momento che siamo interessati alla soluzione analitica e ci troviamo nel caso di basse energie (cattura di neutroni termici, quindi $\vec{p}_i \sim 0$, corrente di convezione trascurabile) possiamo studiare solo l'onda s ⁴¹:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u(r)}{r} \chi_{11} \zeta_{00} \right]}_{\text{deutone fermo}} e^{-i\vec{p}_d \cdot \vec{R}} \\ \psi^{1S_0} &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{u_S(r)}{r} \chi_{00} \zeta_{10} \right]}_{\text{moto}} e^{-i\vec{p}_{CM} \cdot \vec{R}} \end{aligned}$$

⁴⁰Attenzione: in $J_{\lambda, i}$ l'indice i indica l' i -esimo nucleone e non ha niente a che vedere con il momento angolare totale iniziale. Si invita il lettore da qui in poi a cercare di capire dal contesto il significato delle notazioni.

⁴¹Abbiamo indicato con χ la funzione di *spin* e con ζ quella di *isospin*:

$$\begin{aligned} \zeta_{00} &= \frac{|np\rangle - |pn\rangle}{\sqrt{2}} & \chi_{11} &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ \zeta_{10} &= \frac{|np\rangle + |pn\rangle}{\sqrt{2}} & \chi_{00} &= \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La corrente sarà quindi data da:

$$\vec{J}_i \simeq -\frac{i}{2m} \mu_i \vec{q} \times \vec{\sigma}_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i}$$

Notiamo che $\zeta_{00}^+ \mu_S \zeta_{10} = 0$ perché le due funzioni sono ortogonali fra loro, dunque sopravvive solo il pezzo con μ_V nella corrente:

$$\vec{J}_{\lambda=-1} = -\frac{i}{4m} \mu_V \left[(\vec{q} \times \vec{\sigma}_1)_{\lambda=-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} \tau_{z,1} + (\vec{q} \times \vec{\sigma}_2)_{\lambda=-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} \tau_{z,2} \right]$$

Studiamo adesso la componente del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} (\vec{q} \times \vec{\sigma}_i)_{\lambda=-1} &= \hat{\varepsilon}_{\lambda=-1}^* \cdot \vec{q} \times \vec{\sigma}_i = \\ &= -(\hat{\varepsilon}_{\lambda=+1} \times \vec{q}) \cdot \vec{\sigma}_i = \\ &= -\left(-\frac{\hat{e}_x + i\hat{e}_y}{\sqrt{2}} \times q\hat{e}_z\right) \cdot \vec{\sigma}_i = \\ &= i\frac{q}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \cdot (\sigma_{x,i} \hat{e}_x + \sigma_{y,i} \hat{e}_y) = \\ &= i\frac{q}{\sqrt{2}} \sigma_{+,i} = \\ &= i\sqrt{2}q s_{+,i} \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $\sigma_x + i\sigma_y = \sigma_+ = 2s_+$ operatore di salita⁴²; per la corrente avremo allora:

$$\vec{J}_{\lambda=-1} = \frac{q\sqrt{2}}{4m} \mu_V \left[e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} s_{+,1} \tau_{z,1} + e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} s_{+,2} \tau_{z,2} \right]$$

Nel calcolo di j^{1S_0} abbiamo:

$$\begin{aligned} j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) &= \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V \sqrt{2}q}{4m} \right) e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM}) \cdot \vec{R}} \left[\chi_{11}^+ \zeta_{00}^+ s_{+,1} \tau_{z,1} \chi_{00} \zeta_{10} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} \right. \\ &\quad \left. + \chi_{11}^+ \zeta_{00}^+ s_{+,2} \tau_{z,2} \chi_{00} \zeta_{10} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{00}^+ \tau_{z,1} \zeta_{10} &= \frac{-1 - 1}{2} = -1 & \chi_{11}^+ s_{+,1} \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \zeta_{00}^+ \tau_{z,2} \zeta_{10} &= \frac{1 + 1}{2} = 1 & \chi_{11}^+ s_{+,2} \chi_{00} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$j_{-11}^{1S_0}(\vec{q}) = \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V \sqrt{2}q}{4m} \right) e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM}) \cdot \vec{R}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} + e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_2})$$

dove $u(r)$ è la funzione ridotta del deutone e $u_S(r)$ è quella della funzione di scattering. Cambiamo variabili⁴³ per cui $\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}/2$ e $\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r}/2$:

$$j_{11}^{1S_0}(\vec{q}) = \int d^3 R d^3 r \frac{1}{4\pi} \frac{u(r)}{r} \frac{u_S(r)}{r} \left(\frac{\mu_V q}{4m} \right) \underbrace{e^{i(\vec{p}_d - \vec{p}_{CM} + \vec{q}) \cdot \vec{R}}}_{\delta \text{ per } \vec{p}_d - \vec{p}_{CM} + \vec{q}} \left[e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/2} + e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/2} \right]$$

⁴²Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} s_+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle & \tau_z |p\rangle &= |p\rangle \\ s_+ |\uparrow\rangle &= 0 & \tau_z |n\rangle &= -|n\rangle \end{aligned}$$

⁴³ $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ e $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

L'ultimo termine tra parentesi è simmetrico rispetto a parità $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ e dal momento che la funzione del deutone si annulla per grandi raggi allora $\langle \vec{q} \cdot \vec{r} \rangle \sim 0$ e quindi $\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}/2) \sim 1$.

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha}{v_{rel}} \frac{\mu_V^2 q^3}{4m^2} \left| \int_0^{+\infty} dr u(r) u_S(r) \right|^2$$

Riassunto

1. Studio della cinetica: è generale e porta all'elemento di matrice ridotta e alla corrente.
2. Modello di corrente nucleare.
3. Approssimazioni per risoluzione analitica⁴⁴.

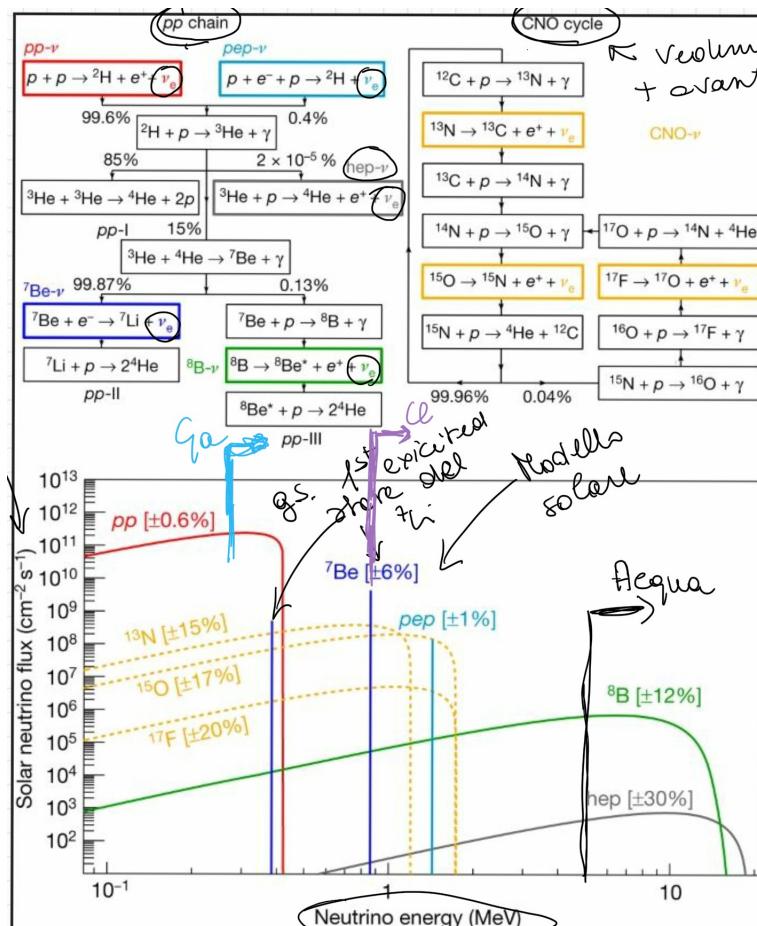


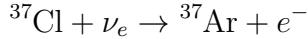
Figura I.14: I due processi di produzione dell'elio nel Sole: la catena *pp* e il biciclo CN-NO⁴⁶. Sotto sono riportati risultati teorici per il vari flussi di neutrini in funzione della loro energia in base alla reazione che li ha prodotti: i rossi, i verdi e i grigi sono uno spettro continuo e il massimo dipende dal fatto che il neutrino è uno di tre corpi; i blu e il turchese sono righe. Ogni flusso ha ovviamente una certa incertezza teorica. La linea viola indica la soglia per l'esperimento di Davis, quella celeste per l'esperimento con il gallio e quella nera per esperimenti con l'acqua. I neutrini del CN-NO hanno tutti uno spettro continuo e sono indicati in giallo.

⁴⁴Le elencheremo successivamente

⁵Si veda la sezione ?? -??.

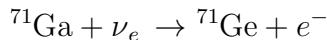
6 Il problema dei neutrini solari

Come anticipato precedentemente, i neutrini sono i miglior candidati per la verifica sperimentale della nucleosintesi; il primo esperimento di verifica fu fatto da Richard Davis nel 1960 e gli valse il premio Nobel: egli ebbe l'idea di studiare in una miniera del Sud Dakota (detta *Homestake*) la reazione



poiché attraverso analisi chimica è possibile contare Ar estratto ed essendo nel sottosuolo l'effetto dei raggi cosmici è attenuato; tuttavia, è necessario avere Cl purissimo. L'esperimento funzionò, i neutrini furono osservati, ma dal momento che la reazione ha una certa energia di soglia ($E_{th} \sim 1$ MeV) gli unici neutrini visibili furono quelli della *pep*, del ^8B e della *hep* che come mostrato in Figura I.14 sono i meno numerosi. Il problema principale, però, fu il fatto che il numero di neutrini osservati era circa la metà di quelli previsti.

Inizialmente si imputò questa discrepanza alla natura dell'esperimento per cui ne seguirono altri con reazioni differenti, uno di questi fu GALLEX tra il 1991 il 1997 al Gransasso:



in questo caso l'energia di soglia è $E_{th} \simeq 233.2$ keV (la linea celeste in Figura I.14), quindi vedo molti più neutrini. Il ^{71}Ge si estraе attraverso la molecola di germano $^{71}\text{GeH}_4$ e dato che il tempo di dimezzamento del ^{71}Ge è di circa 11.43 giorni i neutrini vengono contati dal numero di decadimenti che si osservano. Nonostante i cambiamenti fatti all'apparato sperimentale, ottennero lo stesso risultato. Furono condotti allora esperimenti con rivelatori Čherenkov ad acqua:



Il vantaggio della luce Čherenkov è che è direzionale quindi era possibile determinare con precisione se i neutrini venissero dal Sole; lo svantaggio è che oltre ad avere bisogno di molta acqua purissima gli eventi sono pochi, perché l'elettrone per emettere deve superare una certa soglia e questo impone che il neutrino abbia energia alta (la soglia nera in Figura I.14), per cui si osservano solo quelli del ^8B e della *hep*. Inoltre, ogni tipo di neutrino può fare tale scattering: i ν_τ e i ν_μ per esempio possono scambiare solo un bosone che sia neutro, quindi, Z^0 , mentre i ν_e oltre a Z^0 dato che $\nu_e \rightarrow e^-$ o $e^- \rightarrow \nu_e$ possono mediare l'interazione anche tramite i bosoni W^\pm . In generale non c'è modo di distinguere un processo dall'altro, ma dal momento che $m_W \ll m_Z$ questa interazione è molto più probabile (quindi ν_e in maggior numero). Passiamo ora alla descrizione⁴⁷ di 3 esperimenti di questo tipo:

- **Super-Kamiokande (SK):** dal nome della miniera Kamioka in Giappone nella quale è situato è il successore del precedente Kamiokande. Contiene una cisterna di 50,000 tonnellate di acqua costellata di fotomoltiplicatori (maggiormente sensibili ai ν_e) che ne coprono l'intera superficie (circa 11,200).

Potendo acquisire risultati sia di giorno che di notte, SK osservò una differenza nel numero di neutrini nei due momenti del giorno, in particolare $\#\nu_{notte} < \#\nu_{diurno}$. Per la prima volta però si riesce a dare una spiegazione di queste fluttuazioni: assumendo, infatti, che $m_\nu \neq 0$ si può dimostrare che lo stato di neutrino di interazione debole (quindi di un certo *sapore*) può essere descritto come sovrapposizione di due stati di massa differente , ovvero:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= \alpha' |\nu_1\rangle + \beta' |\nu_2\rangle \end{aligned}$$

⁴⁷Le immagini e i dati sono raccolti nelle slide *Neutrino_flux_exp.pdf*.

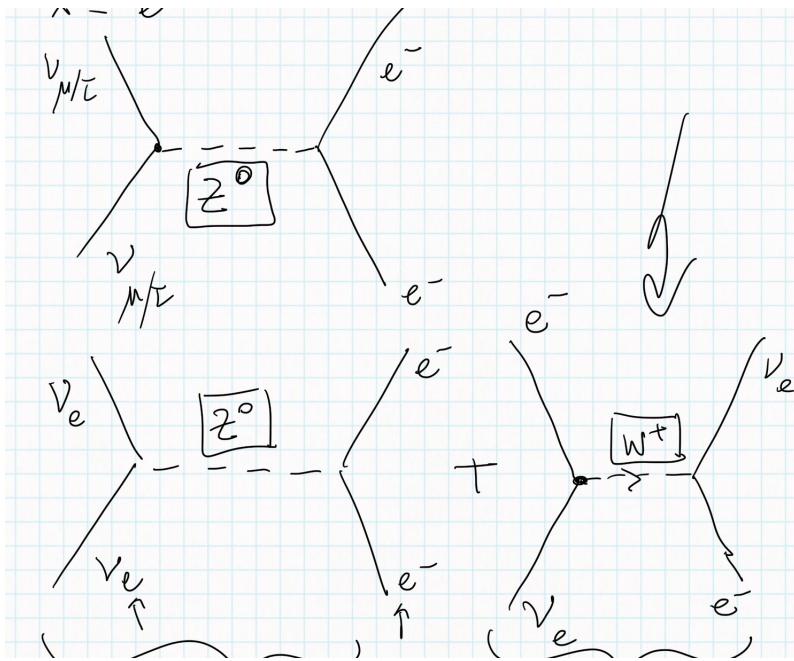


Figura I.15: Rappresentazione schematica dell'interazione nello scattering.

Lo stato del neutrino di interazione quindi oscilla $|\nu_e\rangle \simeq k|\nu_\mu\rangle$ con una probabilità che dipende dalla distanza percorsa prima dell'osservazione e questo spiega la discrepanza con il numero di neutrini previsti dalla teoria. Tuttavia, SK non poté verificarlo perché nel 2001 durante la manutenzione per la quale viene svuotata la cisterna non si accorsero che un fotomoltiplicatore si era leggermente incrinato e al successivo riempimento, quando il livello era circa a metà, questo fotomoltiplicatore si è rotto; il vuoto al suo interno ha risucchiato l'acqua producendo un'onda d'urto che ha innescato una reazione a catena e ha causando la rottura di 500 fotomoltiplicatori.

Dopo l'incidente i giapponesi iniziarono repentinamente le riparazioni, ma ormai era stato già avviato un altro esperimento in Canada per la verifica della teoria.

- **Sudbury Neutrino Observatory (SNO):** esperimento con rivelatore Čerenkov situato nella miniera Creighton in Canada, sfruttò l'acqua pesante ${}^2\text{H}_2\text{O}$ invece della semplice $ce\text{H}_2\text{O}$, questo perché oltre allo scattering elastico era possibile anche la reazione⁴⁸ $\nu_e + {}^2\text{H} \rightarrow p + e^- + p$; questa può avvenire solo con ν_e e si distingue da quella dello scattering dalla luce Čerenkov prodotta. Si noti, però, che è anche possibile: $\nu + {}^2\text{H} \rightarrow \nu + p + n$ ovvero scattering elastico. Per tenerne traccia, furono messe delle impurità di ${}^{35}\text{Cl}$ così che ${}^{35}\text{Cl} + n \rightarrow {}^{36}\text{Cl} + \gamma$, identificabile quindi dai fotoni prodotti. Fu allora possibile contare sia il numero di neutrini elettronici che quello di neutrini generici e si ottenne l'evidenza di accordo con il valore predetto dalla teoria: non era quindi il modello solare a dover essere rivisto, ma quello standard.
- **Borexino:** in ultima battuta diamo uno sguardo anche al contributo italiano nell'ambito di tale ricerca. In quel periodo infatti al Gransasso era stato sistemato un esperimento che si componeva di uno scintillatore in una camera circondata da fotomoltiplicatori. Il vantaggio era quello di avere una soglia per la reazione molto bassa e questo permise a Borexino di verificare che nel Sole erano presenti anche le reazioni pp , ${}^7\text{Be}$ e pep , come mostrato in Figura I.16.

Una piccola nota dolente: Borexino sarebbe stato capace di verificare l'oscillazione dei

⁴⁸Si tratta di una *pep* “al contrario”

neutrini prima dell'esperimento canadese, tuttavia la burocrazia italiana ha ritardato enormemente l'arrivo dei fondi.

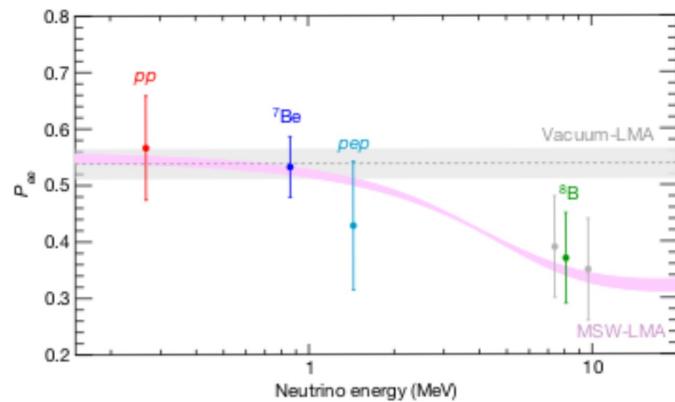


Figura I.16: Probabilità di sopravvivenza del neutrino in funzione della sua energia. I punti sono i risultati ottenuti da Borexino, in rosa la predizione teorica e in grigio il modello con parametri di oscillazione dati dai risultati di SNO.

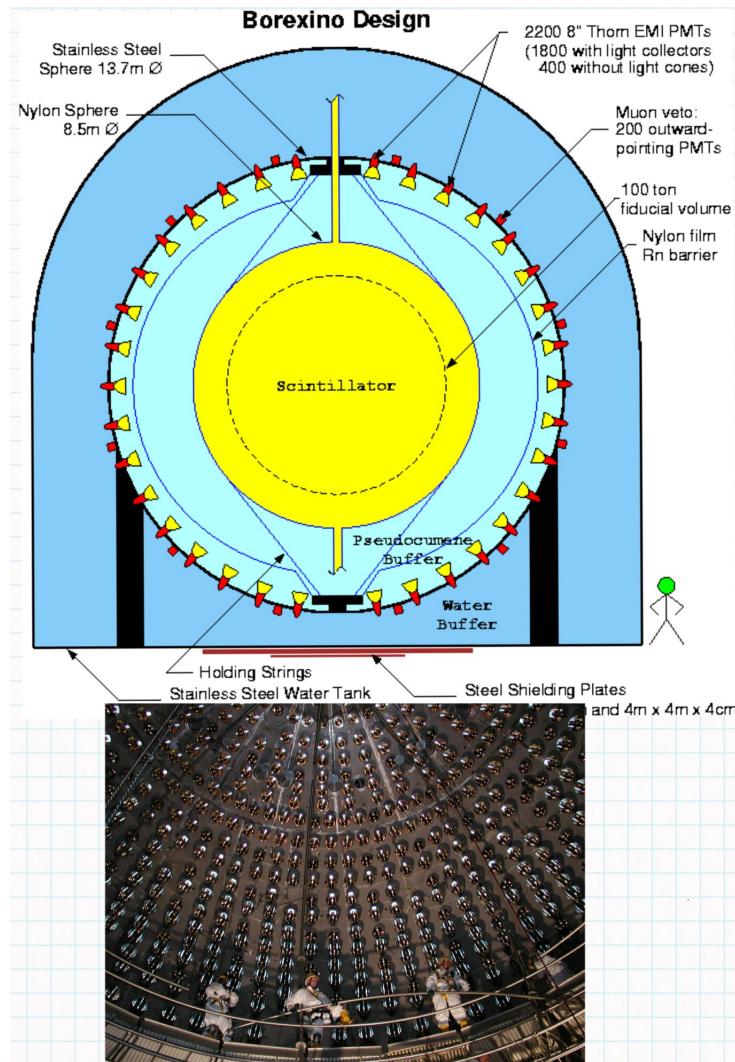


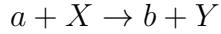
Figura I.17: Schema e foto dell'esperimento Borexino.

7 Elementi di analisi

Introduciamo adesso alcuni elementi essenziali per l'analisi nucleare, che utilizzeremo successivamente nello studio della catena pp .

7.1 Fattore Astrofisico

Consideriamo una generica reazione con particelle (proiettili) che incidono su nuclei (bersagli):



Dall'analisi dimensionale abbiamo per la sezione d'urto:

$$\sigma[L^2] = \frac{\#\text{reazioni/nucleo X/unità di tempo}}{\underbrace{\#\text{proiettili}/L^2/\text{unità di tempo}}_{\text{flusso particelle incidenti}}}$$

Cerchiamo di costruire l'espressione per il *reaction-rate* r : se N_a è la densità numerica dei proiettili, \vec{v} la loro velocità di volo e N_X la densità numerica dei bersagli allora si ha $r = N_a N_X \sigma v$; in generale però potremmo avere $a = X$ e non potendo distinguere tra i due con l'espressione precedente si otterebbe il doppio del *rate* effettivo, per cui:

$$r = \frac{N_a N_X}{1 + \delta_{aX}} \langle \sigma(\vec{v}) v \rangle$$

dove abbiamo mediato sulla distribuzione in velocità, che nel caso stellare è una Maxwelliana $\phi(v)$, poiché in generale non tutti i proiettili avranno velocità \vec{v} . Procedendo con il calcolo:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\vec{v}) v \rangle &= \int_0^\infty \sigma v \phi(v) dv = \\ &= \int_0^\infty \sigma v 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) v^2 dv = \quad \text{sostituendo } E = \frac{1}{2}\mu v^2 \\ &= 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{\mu^2} 2E \sigma(E) e^{-E/kT} dE = \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sigma(E) e^{-E/kT} dE \end{aligned}$$

La dipendenza di σ da E dipende principalmente da tre fattori:

1. La probabilità di attraversamento della barriera Coulombiana.
2. La probabilità di avere un'interazione.
3. La prossimità a una risonanza nucleare.

Tutti e tre infatti dipendono dall'energia. Studiamo prima le reazioni non-risonanti: per il contributo 2. dalla meccanica quantistica sappiamo che la probabilità di interazione è proporzionale a⁴⁹ $\pi\lambda_{DB}^2 \sim p^{-2} \sim E^{-1}$; per il contributo 1. l'espressione è un po' più complessa, ma nel Sole ho tutte particelle cariche quindi:

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \simeq 1.44 \frac{Z_1 Z_2}{r[\text{fm}]} [\text{MeV}] \underset{\text{per } pp}{\sim} 1.44 \text{ MeV}$$

⁴⁹ $\pi\lambda_{DB}^2$ non è altro che la sezione d'urto.

L'energia di agitazione termica media $\langle E \rangle \sim kT \sim 9 \cdot 10^{-8} T[\text{K}] [\text{keV}]$ per la temperatura interna del Sole ($T \sim 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$) è dell'ordine del keV, quindi trascurabile rispetto alla barriera. Valutiamo allora la probabilità di attraversamento per effetto tunnel⁵⁰:

$$\begin{aligned} P &\sim \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) = \\ &= \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}\right) = \\ &= \exp\left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}\right) \end{aligned}$$

detto **fattore di penetrazione di Gamow**. Per quanto riguarda i vari contributi nucleari possiamo raccoglierli tutti in un fattore $S(E)$ che chiamiamo **fattore astrofisico**; abbiamo allora:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \exp\left(-\sqrt{2\mu\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar\sqrt{E}}\right) S(E)$$

A titolo di esempio riportiamo l'andamento di $\sigma(E)$ per la reazione $^{12}\text{C} + p \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$ in Figura I.18. Si osserva una risonanza per circa 0.5 MeV e la drastica pendenza della sezione d'urto sotto 0.3 MeV (dovuta al fattore di Gamow); in rosso è segnato il range di energie di interesse astrofisico.

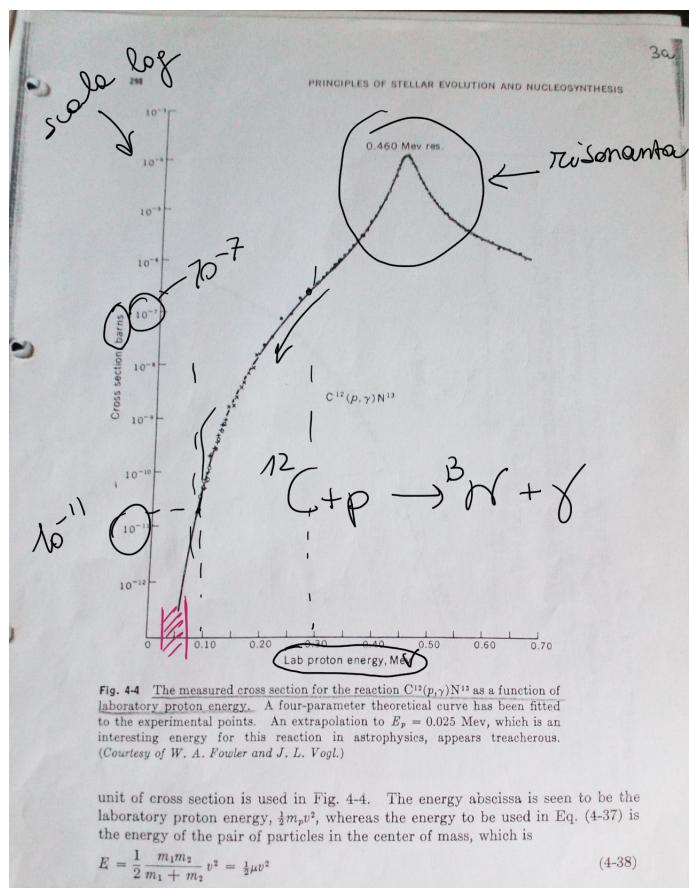


Figura I.18: Leggere la didascalia. In rosso il range di energie di interesse astrofisico.

Dall'espressione per la sezione d'urto possiamo invertire così da ottenere l'andamento del fattore

⁵⁰Per il calcolo guarda Approfondimenti 5-Effetto tunnel.

astrofisico $S(E) = E\sigma(E) \exp(\dots)$ come mostrato in Figura I.19. Si nota che in questo caso l'andamento per basse energie è più “dolce”.

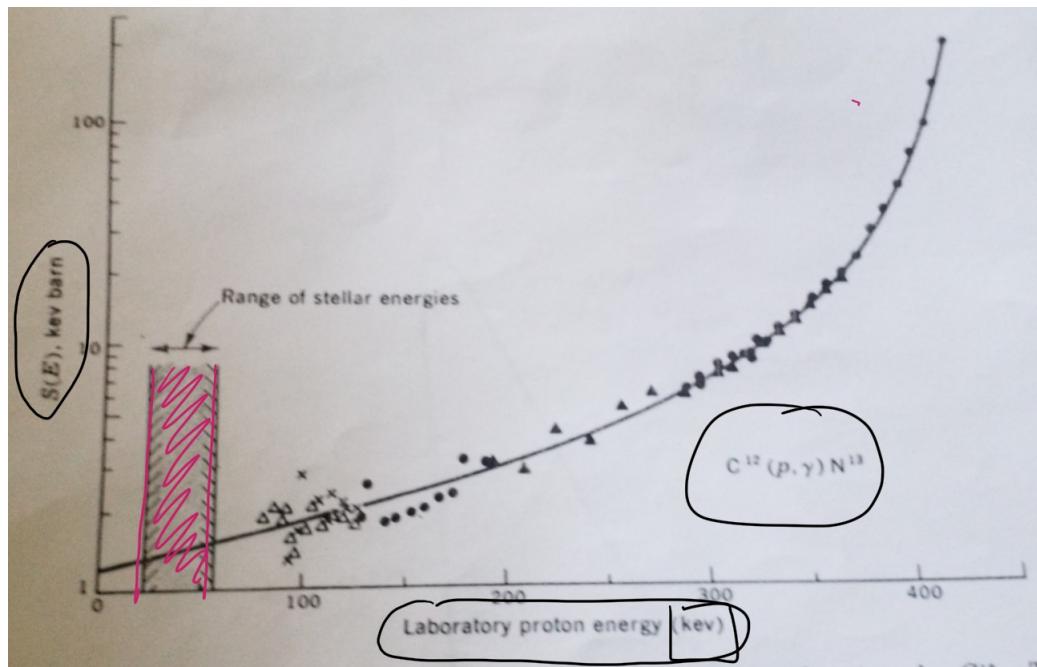


Figura I.19: Andamento del fattore astrofisico per la reazione precedente.

Capitolo II

Approfondimenti

In questo capitolo ho raccolto alcuni argomenti che ho personalmente approfondito o testi e articoli che ho usato durante la preparazione dell'esame

1 Modelli e decadimenti

Una trattazione che riprende quella adottata in questi appunti riguardo ai modelli nucleari e i decadimenti β e γ si trova in Krane, K., S., “*Introductory Nuclear Physics*”, USA, John Wiley & Sons, 1988.

1.1 Decadimento ε

Nel calcolo del Q -value in ??-?? per la cattura ε compare a sottrarre l'energia di legame dell'elettrone catturato nell' n -esimo shell B_n , dove n raccoglie tutti i numeri quantici che identificano tale particella. La ragione della presenza di questo termine è ben spiegata in (Krane, 1988), per cui ne riportiamo un piccolo riassunto: subito dopo la cattura il nucleo prodotto si trova in uno stato eccitato, per cui se l'elettrone occupava lo shell (interno) k (identificato da $n = k, L, \dots$) il “vuoto” da esso lasciato verrà subito “riempito” da un elettrone di shell superiore; nel disegnarsi l'elettrone emette un fotone di energia pari all'energia di legame B_n , che viene quindi persa.

2 Regola d'oro di Fermi

Nei calcoli del rate molto spesso dall'espressione λ si passa a quella differenziata $d\lambda$. Si tratta di una questione puramente formale e si rimanda alla lettura del paragrafo **Commenti sulla regola di Fermi** della sezione 20.2 *Transizioni nel continuo e rate di un processo* delle dispense del professor G. Paffuti, *Note di Meccanica Quantistica, anno accademico: 2017-2018*.

Tuttavia, per avere un'idea¹ della giustificazione, si consideri l'espressione in ??-??:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 \left| \int \phi_f^* O_X \phi_i d\Omega \right|^2 \frac{p^2 dp 4\pi}{h^3} \frac{q^2 dq 4\pi}{h^3} \frac{1}{dE_f} \sim p^2 q^2 dp$$

dove abbiamo fissato l'impulso p dell'elettrone per cui $dE_f = dq$. Sarebbe quindi più corretto indicare $\lambda \rightarrow \lambda_p$ poiché è definito per quel particolare valore dell'energia dell'elettrone. Il rate totale sarà invece dato dalla somma su tutti gli impulsi possibili dell'elettrone finale; dal momento che l'impulso è una variabile continua si ha $\lambda_p \rightarrow d\lambda$. In altre parole, nella scrittura del rate si sottintende l'integrazione su p per poi esplicitarla al momento opportuno.

¹Questa è una spiegazione sicuramente non rigorosa e particolarmente lacunosa, si consiglia la lettura del testo.

3 Sul numero di neutrini

Come spiegato in ??-??, quando $T_e \rightarrow Q$ il neutrino non è più relativistico per cui $T_\nu \sim q^2/2m_\nu$ e $dq/dE_\nu = m_\nu/q$. Abbiamo allora che:

$$N(p) \propto p^2 \sqrt{Q - \sqrt{p^2 + m_e^2} + m_e}$$

$$N(T_e) \propto \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e} \sqrt{Q - T_e} (T_e + m_e)$$

Si nota che quando $T_e \rightarrow Q$ $dN/dp \rightarrow 0$ se $m_\nu = 0$ e $dN/dp \rightarrow \infty$ se $m_\nu \neq 0$, come si osserva in Figura ??; dalla pendenza è quindi possibile studiare il limite per la massa del neutrino.

4 Dettagli sul calcolo del decadimento γ

Nello sviluppo dell'onda piana in armoniche vettoriali in ??-?? si ottiene l'espressione:

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_\ell(kx) \sum_J \langle \ell 0, 1\lambda | J\lambda \rangle \vec{\mathcal{Y}}_{J\ell 1}^{M=\lambda}$$

4.1 Clebsch-Gordan

Poiché $\ell = J, J \pm 1$, i coefficienti di Clebsch-Gordan diversi da zero sono²:

$$\begin{aligned} \langle J 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \langle J+1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J}{2J+3}} \\ \langle J-1 0, 1\lambda | J\lambda \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}} \end{aligned}$$

4.2 Proprietà della Bessel

A questo punto si utilizza la proprietà della Bessel:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge j_J \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda &= ik \left[\underbrace{\left(\frac{d}{d(kx)} - \frac{J}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J+1,1}^\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left(\frac{d}{d(kx)} - \frac{J+1}{kx} \right) j_J(kx)}_{j_{J-1}(kx)} \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \vec{\mathcal{Y}}_{J,J-1,1}^\lambda \right] \end{aligned}$$

4.3 Proprietà armonica vettoriale

Deriviamo la proprietà³:

$$(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = (-)^{\lambda+1} \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$$

²Si ottengono calcolando $\langle \ell 0, 11 | J1 \rangle$ e poi usando le loro proprietà per passare a $\lambda = -1$.

³Ricordarsi che $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}^* = (-)^\lambda \hat{\varepsilon}_{\vec{k},-\lambda}$ e che $\langle \ell m, SS_z | JM \rangle = (-)^{\ell+S-J} \langle \ell - m, S - S_z | J - M \rangle$

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* &= \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0}^* \hat{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}^* = \\
&= (-)^\lambda \langle J0, 1\lambda | J\lambda \rangle \mathcal{Y}_{J0} \hat{\varepsilon}_{\vec{k},-\lambda} = \\
&= (-)^{\lambda+1} \underbrace{\langle J0, 1 - \lambda | J - \lambda \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}} \mathcal{Y}_{J0} \hat{\varepsilon}_{\vec{k},-\lambda}
\end{aligned}$$

Nel caso $|\lambda| = 1$ allora $(\vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^\lambda)^* = \vec{\mathcal{Y}}_{JJ1}^{-\lambda}$.

5 Effetto tunnel

Dimostriamo come ottenere l'espressione della probabilità di attraversamento per effetto tunnel nella sezione 7.1-*Fattore Astrofisico*.

$$\begin{aligned}
P &\sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_0^a \sqrt{2m(V-E)} \right\} = \\
&= -\frac{2}{\hbar} \int_0^1 \sqrt{2mE} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \sqrt{\frac{1}{\rho} - 1} d\rho = \\
&= -2\pi \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar}
\end{aligned}$$

dove $\rho \equiv rE/Z_1 Z_2 e^2$ e per risolvere abbiamo usato $\rho = \sin^2(\alpha)$.

6 CRM: indipendenza dal parametro B

Nel discutere il metodo della *Calculable R MATRIX* (sezione ??-??) siamo arrivati all'espressione:

$$U_\ell = e^{2i\Phi_\ell} \frac{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell^* R_\ell(E, B)}{1 + B R_\ell(E, B) - L_\ell R_\ell(E, B)}$$

Si può dimostrare⁴ che U_ℓ non dipende da B .

Consideriamo una matrice invertibile \mathbf{V} di dimensione $N \times N$ e due vettori di dimensione N \mathbf{u} e \mathbf{v} ; possiamo sempre costruire una matrice quadrata \mathbf{W} definita come:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

Notiamo che data l'espressione di \mathbf{W} si ha:

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} - \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{V}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{u}}$$

$$\mathbf{W}^{-1} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{u}} \Rightarrow (\mathbf{v}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{u})^{-1} = 1 + (\mathbf{v}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{u})^{-1}$$

Osserviamo che se le matrici $\mathbf{V} \equiv C(E, B)$ e $\mathbf{W} \equiv C(E, 0)$ e i vettori⁵ $\mathbf{u} \equiv |\varphi\rangle$ e $\mathbf{v} \equiv |\varphi\rangle$ allora possiamo scrivere:

$$C(E, 0) = C(E, B) + \frac{\hbar^2}{2\mu a} B |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

⁴Seguiamo la dimostrazione dell'articolo Descouvemont, P. & Baye, D., Rep. Prog. Phys., 2010, vol.3, DOI: 10.1088/0034-4885/73/3/036301, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1001.0678>.

⁵Dove abbiamo preso $|\varphi\rangle \rightarrow \varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_N(a)) = \sum_k |\varphi_k\rangle$; dunque $\langle\varphi_k|\varphi\rangle = \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle = 1$.

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1}(\langle\varphi|C(E, 0)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1} = B + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu a}\right)^{-1}(\langle\varphi|C(E, B)^{-1}|\varphi\rangle)^{-1}$$

Usando l'espressione⁶ di R_ℓ in (??) si ottiene:

$$\frac{1}{R_\ell(E, 0)} = B + \frac{1}{R_\ell(E, B)}$$

dalla quale si ha l'indipendenza di U_ℓ cercata.

7 Multipolarità di $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$

Per l'analisi dei multipoli e altri approfondimenti sulla misura del fattore astrofisico della $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ (trattata nella sezione ??-??) consultare gli articoli Runkle, R.C., et al., Phys. Rev. Lett., 2005, vol.94,DOI:[10.1103/PhysRevLett.94.082503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.082503) e Formicola, A., et al., Phys. Lett. B, 2004, vol.591,DOI:[10.1016/j.physletb.2004.03.092](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.03.092).

⁶Notare che $\langle\varphi|\mathbf{A}|\varphi\rangle = \sum_{ij} \varphi_j A_{ij} \varphi_i$.

Indice analitico

- acoustic peaks*, 3
- Ammasso della Vergine, 1
- analisi spettrale, 1
- armoniche sferiche, 15
- articolo *alpha, β, γ*, 3
- barion density* ρ_B , 5
- barion fraction of critical mass density* $\Omega_B h^2$, 5
- Big Bang*, 2, 4
- Big Bang Nucleosynthesis, 3
- candela campione, 3
- Catena protone-protone *pp*, 18
- cattura termica, 15
- Ciclo CN-NO, 18
- combinazione isoscalare, 16
- combinazione vettoriale, 16
- corrente di convezione, 16
- Cosmic Microwave Background CMB, 2
- costante cosmologica Λ , 10
- costante di Hubble H , 2
- costante di Stefan-Boltzmann σ , 1
- decadimento
 - Gamow-Teller, 3
 - densità critica ρ_c , 3
 - diagramma Hertzsprung-Russell, 1
- effetto Doppler, 2
- effetto tunnel, 23
- entropy factor* η , 5
- fattore astrofisico $S(E)$, 11, 23
- fattore di penetrazione di Gamow, 23
- Freeze-out*, 4, 10
- galassia di Andromeda, 1
- gas del mezzo interstellare, 1
- Gruppo Locale, 1
- incidente al Super-Kamiokande, 20
- legge di Hubble, 3
- Li-problem*, 12
- Li-problem*, 9
- Li-puzzle*, 12
- Li-puzzle*, 9
- low-metallicity stars*, 8
- luminosità, 1
- lunghezza d'onda di De Broglie λ_{DB} , 22
- Lymann α, 8
- main sequence*, 1
- modello cosmologico standard ΛCDM , 10
- operatore di salita, 17
- oscillazione di sapore dei neutrini, 20
- parametro di *redshift* z , 2
- parsec, 1
- PArthENoPE*, 11
- popolazione II, 8
- Principio Cosmologico, 2
- quasi-stellar object*, 8
- radiation density* N_ν , 10
- reaction-rate* r , 22
- redshift*, 8
- risonanza nucleare, 22
- scintillatore, 20
- Sgr A*, 1
- sviluppo in onde parziali, 15
- teorema di Wigner-Eckart, 15
- velocità peculiare, 3
- Via Lattea, 1

Esperimenti

- Borexino, 20
- esperimento con acqua, 19
- esperimento di Davis, 19
- GALLEX, 19
- LUNA, 11
- Sudbury Neutrino Observatory, 20

Super-Kamiokande, 19

Articoli

Descouvemont & Baye, 27

Formicola et al., 28

Runkle et al., 28