Dynamik & Kinematik von Punktmassen (Kugeln)

Game Physics

Sommersemester 2015

Günther Greiner, Matteo Collaianni, Ben Keinert, Universität Erlangen-Nürnberg

Kinematik vs Dynamik

- **Kinematik**:

  Lehre der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum,
  - beschrieben durch die Größen **Position**, **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung**,
  - ohne die Ursachen der Bewegung (Kräfte) zu betrachten.

- **Dynamik**:

  Beschreibung der Bewegung von Körpern unter Berücksichtigung der Ursachen
  - Ursachen: Kräfte, Trägheit

Welche „Körper“?

- Punktmassen, definiert durch die Größen
  - Position $\vec{\boldsymbol{x}} = [x, y, z]$
  - Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = [v_x, v_y, v_z] = \dot{\vec{\boldsymbol{x}}}$
  - Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}} = [a_x, a_y, a_z] = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \ddot{\vec{\boldsymbol{x}}}$
  - Masse m

- Kugeln (idealisiert – keine Rotation)
  - Position (des Mittelpunktes)
  - Geschwindigkeit, Beschleunigung
  - Radius r
  - Masse $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$

LEHRSTUHL GRAPHISCHE DATENVERARBEITUNG

Kinematik & Dynamik von Punktmassen

- Newtonsche Mechanik : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

- Wirkt auf die Punktmasse die Kraft $\vec{F}$, so erfährt sie eine Beschleunigung $\vec{a} = \vec{F}/m$

- Wichtige Kräfte
  - Gravitationskraft zweier (Punkt-)Massen $$\vec{F}_1 = const \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\|\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1\|_2^2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1}{\|\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1\|_2}$$
  - Elektrostatische Anziehung/ Abstoßung zweier Ladungen $$\vec{F}_1 = -const \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1\|_2^2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1}{\|\vec{\boldsymbol{x}}_2 - \vec{\boldsymbol{x}}_1\|_2}$$
  - Schwerefeld der Erde $$\vec{F} = [0,0,-m \cdot g]^T \,, \quad \left(g \approx 9.81\, {}^{m}/_{s^2} \right)$$

Bestimmung der Bahn eines Teilchens/einer Kugel

- Kein Kontakt mit Umgebung bzw. anderen Teilchen:
  → freie Bewegung

- Falls Kontakt entsteht

  – Kollisionserkennung (collision detection):

  – Kollisionsbehandlung (collision response)

Freie Bewegung von Massepunkten/Kugeln

- Kraft bekannt → Beschleunigung bekannt (Newton)
- Beschleunigung = 2.-te Ableitung
  → „integrieren" genauer:
  Differentialgleichung lösen

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}, \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \vec{F}/m, \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

- i.A. mit numerischen Verf. lösen, z.B. Euler

$$\vec{x}(t_{i+1}) = \vec{x}(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \cdot \vec{v}(t_i)$$

$$\vec{v}(t_{i+1}) = \vec{v}(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \cdot \vec{a}(t_i) = \vec{v}(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \cdot \vec{F}(t_i)/m$$

- Spezialfall: Kraft konstant, dann exakt integrierbar: $\vec{a} = \vec{F}/m$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{a}, \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_o + (t - t_0) \cdot \vec{v}_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2} \cdot \vec{a}$$

→ die Bahnen sind Parabeln !!

Interaktion bei Kontakt

- Bewegung von Objekten wird wesentlich beeinflusst von Kontakten
  - Interaktionen mit der (statischen) Umgebung
  - Interaktion mit anderen (bewegten) Objekten
- Dies erfordert zwei Schritte
  - Kollisionserkennung
  - Kollisionsbehandlung
- Im folgenden werden starre Objekte betrachten, d.h. Objekte, die sich nicht verformen – hauptsächlich Kugeln

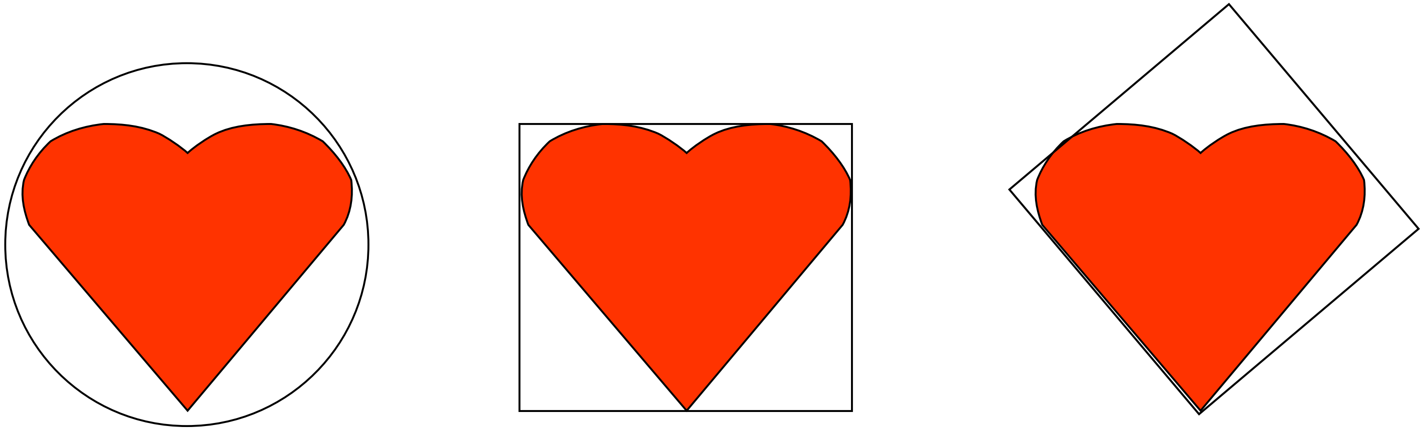
Kollisionserkennung - Allgemeines

- Gibt es n Objekte müssen (theoretisch) in jedem Zeitschritt n^2 Tests auf Kollision durchgeführt werden
  → erfordert effiziente Verfahren

- Effizienzsteigerung durch **bounding volumes** mit einfacher Geometrie
  - potentielle Kandidaten für Kollisionen
    - schneller Test der Bounding Volumes
    - ggf auch Bounding Volume Hierarchien
  - Nur Objekte deren bounding volumes kollidieren können kollidieren diese Kandidatenpaare genauer untersuchen

Kollisionserkennung - Allgemeines

- Typen von Bounding Volumes



bounding sphere

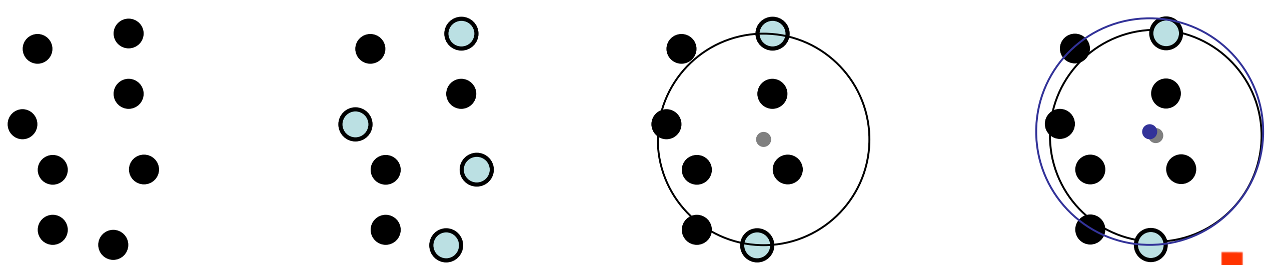
axis-aligned bounding box **AABB**

oriented bounding box **OBB**

- zwei Objekte können sich nur überschneiden, wenn sich auch deren Bounding Volumes überschneiden

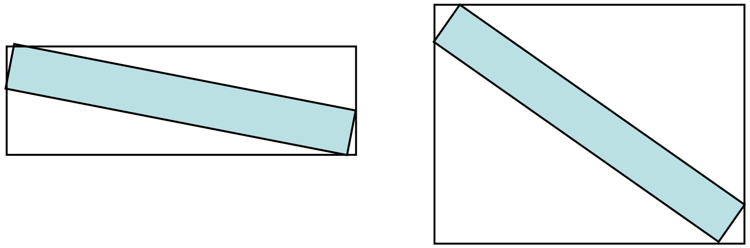
Kollisionserkennung - Allgemeines

- **bounding spheres**
  Bestimmung einer (nicht optimalen) bounding sphere
  [*Anm: der Algorithmus von Welzl liefert die optimale*]
  – Bestimme x_{min}, $P_{x,min}$, x_{max}, $P_{x,max}$
    y_{min}, $P_{y,min}$, y_{max}, $P_{y,max}$
    z_{min}, $P_{z,min}$, z_{max}, $P_{z,max}$
  – Initiale Kugel : Mittelpunkt $(P_{o,min} + P_{o,max})/2$
    Radius $||P_{o,min} - P_{o,max}||/2$
  – Sukzessives Anpassen der initialen Kugel (für jeden äußeren Punkt)



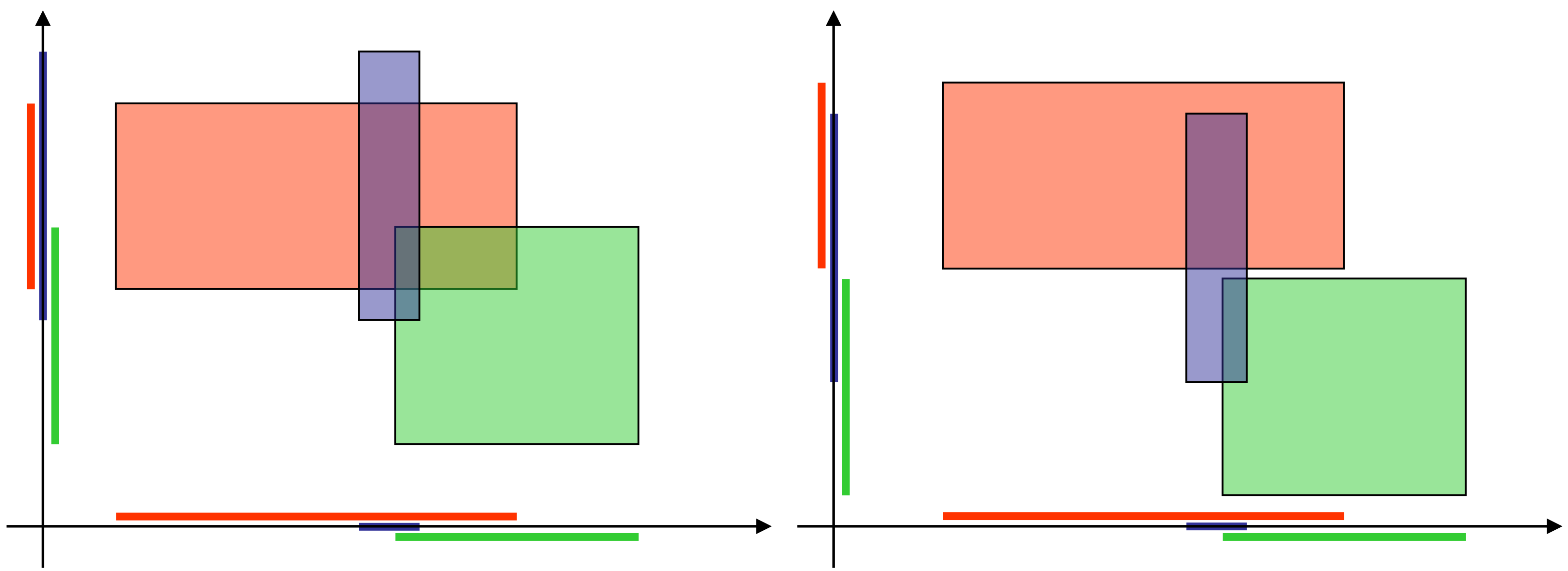
Kollisionserkennung - Allgemeines

- **axis aligned bounding box (AABB)**
  - kompakte Darstellung: $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, z_{min}, z_{max}$,
  - einfache Überschneidungstests (s.u.)
  - einfach zu bestimmen
    - $x_{min} = \min\{x$-Wert aller Eckpunkte$\}$
      $x_{max} = \max\{x$-Wert aller Eckpunkte$\}$
    - …
  - muss bei Rotation angepasst werden
  - oftmals viel größer als Objekt



Kollisionserkennung - Allgemeines

- Überschneidungstest für AABBs
  - Reduktion auf 1D-Probleme:
    - Sowohl die x-, die y-, **und** die z-Intervalle müssen sich überschneiden



  - Schnitt-Test für <u>alle</u> 1D-Intervalle $[a_i, b_i]$:
    $\bigcap [a_i, b_i] = \emptyset$; genau dann wenn $\max\{a_i\} > \min\{b_i\}$

Kollisionserkennung - Allgemeines

- Überschneidungstest für AABBs
  - n Objekte: Welche überschneiden sich? (Brute force: n^2 Tests)
  - Besseres Verfahren: Reduktion auf 1D-Probleme (wie oben):
    - Sowohl die x-, die y-, **und** die z-Intervalle müssen sich überschneiden

- Test für 1D-Intervalle $I_i = [a_i, b_i] \quad (1 \leq i \leq n)$:
  - Ordne die Menge $M = \{a_i\} \cup \{b_i\} = \{(m_1, index, typ), (m_2, index, typ), \ \ldots\}$
  - Verwalte Intervall Liste L
    - Initialisiere $L = [\,]$;
      for $j = 1 \,..\, 2n$ do
          if typ(m_j) = b // m_j ist eine Endpunkt
              remove I_{index} from L;
          else   // m_j ist eine Anfangspunkt
              I_{index} schneidet <u>jedes</u> Intervall $I \in L$;
              add I_{index} to L;
          end if
      end do;

Kollisionserkennung - Allgemeines

- Überschneidungstest für zwei Kugeln:
- Mittelpunkte $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ und Radien r_1 , r_2

  Schnitt genau dann wenn $\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|^2 \leq (r_1 + r_2)^2$
- Nun betrachten wir n Kugeln:

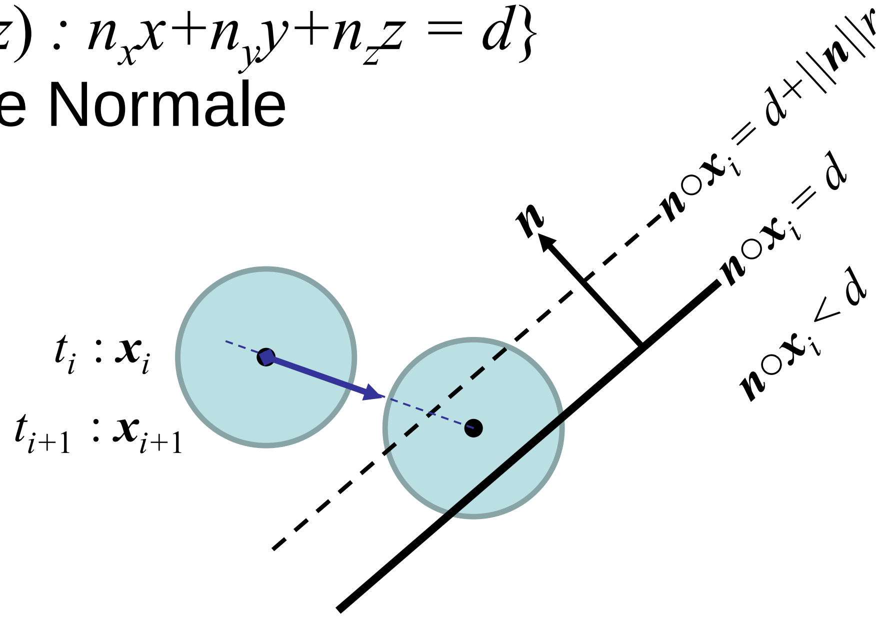
  Welche überschneiden sich? Brute force: n^2 Tests.
- Besser: Packe die Kugeln in AABBs und berechne die <u>potentiellen Kandidaten</u> wie oben erläutert.
  - Abmessung der AABB: $[\, x_i - r_i \,, x_i + r_i \,]\times[\, y_i - r_i \,, y_i + r_i \,]\times[\, z_i - r_i \,, z_i + r_i \,]$

Kollisionserkennung - Allgemeines

- (**object**) **oriented bounding box** (**OBB** oder **OOBB**)
  - passt sich besser dem Objekt an
  - bei rotierenden Objekten: einfach mit rotieren
  - aufwändigere Bestimmung (s.u.)
  - aufwändigere Tests (wird nicht behandelt, aber machbar)
- Bestimmung OBBs
  - Eckpunkte seien $\boldsymbol{V}_i$
  - bestimme Schwerpunkt (Mittelpunkt) aller Punkte
  - Balanciere die Punkte und bestimme Kovarianzmatrix $\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{W}_i^T$
  - bestimme Eigenvektoren von $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}$ symmetrisch → …)
  - Eigenvektor $\boldsymbol{a}$ zu größtem Eigenwert ist „Hauptrichtung“
  - verwende (normierte) Eigenvektoren $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ als Richtung der OBB
  - Box so anpassen, dass alle Punkte enthalten sind
    → neuer Mittelpunkt, Kantenlängen α,β,γ

Kollisionserkennung – für Kugeln:

- Kugel mit Mittelpunkt $\boldsymbol{x}$ und Radius r trifft auf Ebene
- Bewegte Kugel vom Radius r trifft im Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$ auf die (ebene) Wand $\{(x,y,z) : n_x x+n_y y+n_z z = d\}$
  $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ ist die äußere Normale



- Position zum Zeitpunkt $t_i : \boldsymbol{x}_i$
  es gelte $\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_i > d+r\|\boldsymbol{n}\|$

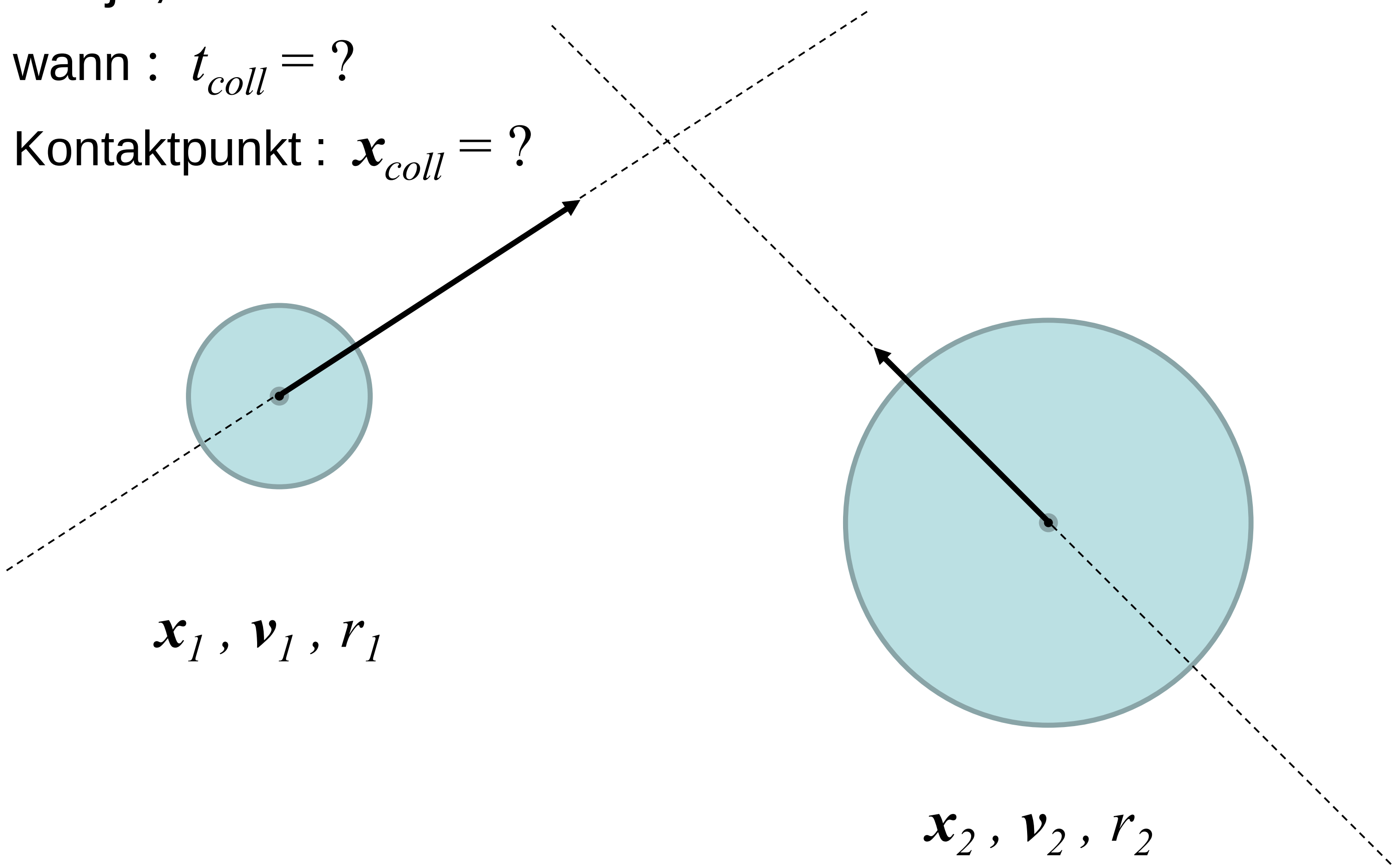
- Position zum Zeitpunkt $t_{i+1} : \boldsymbol{x}_{i+1}$
  – falls $\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_{i+1} > d+r\|\boldsymbol{n}\|$
    keine Kollision
  – falls $\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_{i+1} \le d+r\|\boldsymbol{n}\|$

  dann Kollision; Zeitpunkt der Kollision (lineare Interpolation)

$$t_{coll} = \frac{d+r\|\boldsymbol{n}\|-\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_{i+1}}{\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_{i+1}}\cdot t_i+\frac{\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_i-d-r\|\boldsymbol{n}\|}{\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{n}\circ\boldsymbol{x}_{i+1}}\cdot t_{i+1}$$

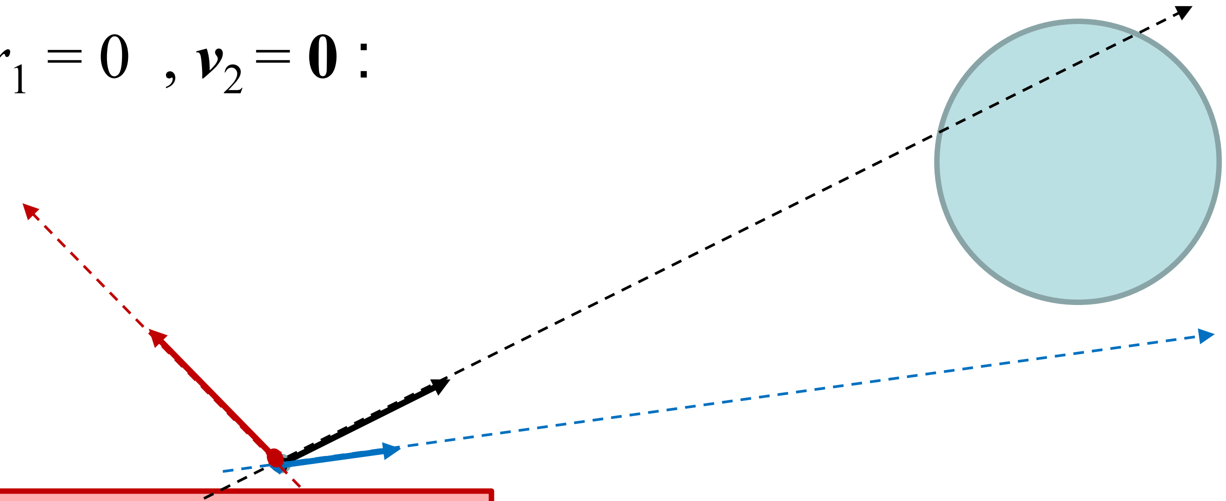
Kollisionserkennung – für Kugeln:

- Problem: Treffen sich die beiden Kugeln? Wenn ja,
  - wann : $t_{coll} = ?$
  - Kontaktpunkt : $\boldsymbol{x}_{coll} = ?$



Kollisionserkennung – für Kugeln:

- Einfacher Fall: $r_1 = 0 \;\; , \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$:



- kein Treffer wenn $(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \circ \boldsymbol{v}_1 < 0$
- kein Treffer wenn $(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \circ (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) - \dfrac{[(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \circ \boldsymbol{v}_1]^2}{\boldsymbol{v}_1 \circ \boldsymbol{v}_1} > r_2^2$
- sonst kleinere Lösung der quadratischen Gleichung

$||\boldsymbol{x}_1 + t\,\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{x}_2||^2 = r^2$. Man erhält:

$$t_{coll} = \frac{\boldsymbol{v}_1 \circ (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) - \sqrt{\left[\boldsymbol{v}_1 \circ (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\right]^2 - \boldsymbol{v}_1{}^2 \cdot [(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 - r^2]}}{\boldsymbol{v}_1{}^2}$$

$$\boldsymbol{x}_{coll} = \boldsymbol{x}_1 + t_{coll} \cdot \boldsymbol{v}_1$$

Kollisionserkennung – für Kugeln:

- Allgemeiner Fall kann auf den speziellen Fall zurück geführt werden:

- Betrachte das Problem
  - Kugel 1 : $\boldsymbol{x}_1 , \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \;\; 0$
  - Kugel 2: $\boldsymbol{x}_2 , \boldsymbol{0} \;\; , r_1 + r_2$

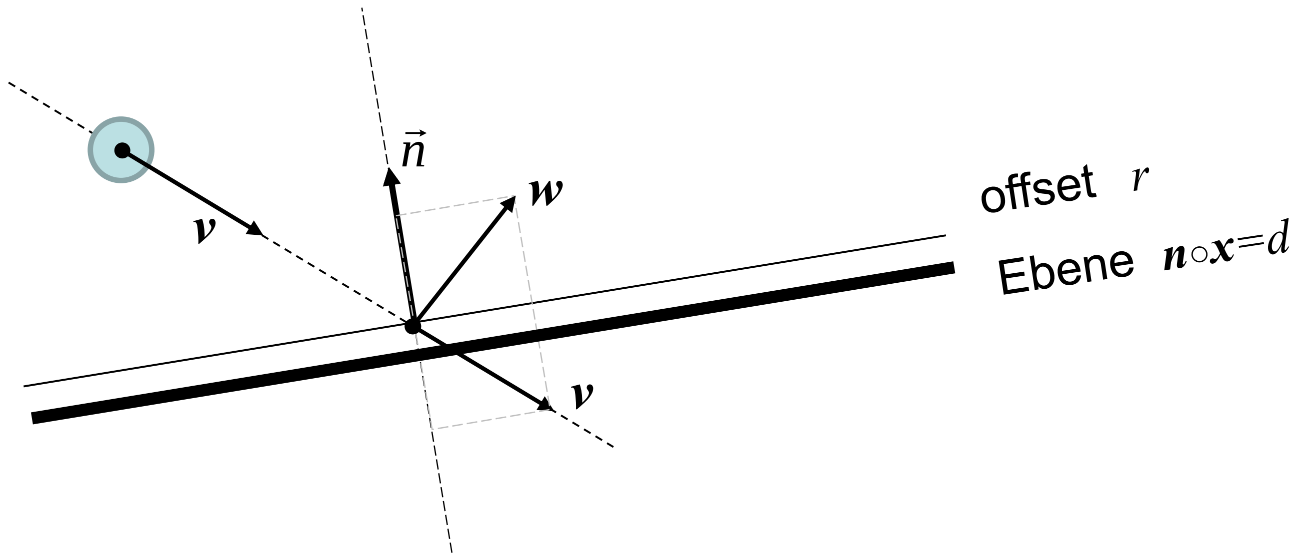
  falls Kollision, dann t_{coll} und $\boldsymbol{x}_{coll}$ bestimmen.

- Für das ursprüngliche Problem erhält man

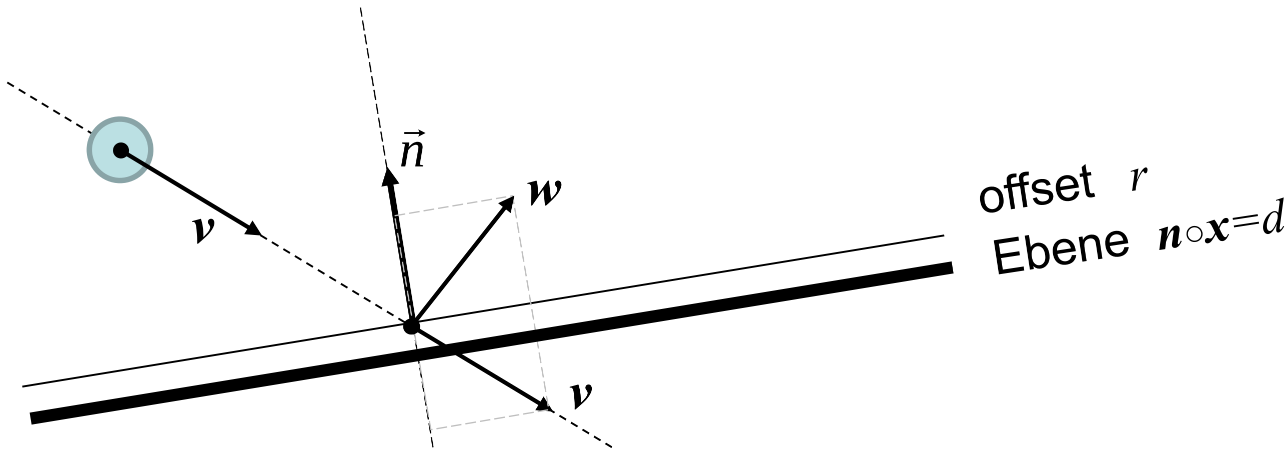
$$
\begin{aligned}
t_{coll} &= t_{coll} \\
[\boldsymbol{x}_1]_{coll} &= \boldsymbol{x}_{coll} - t_{coll} \cdot \boldsymbol{v}_2 \\
[\boldsymbol{x}_2]_{coll} &= \boldsymbol{x}_2 + t_{coll} \cdot \boldsymbol{v}_2 \\
\boldsymbol{x}_{coll} &= \tfrac{r_2}{r_1+r_2} \cdot [\boldsymbol{x}_1]_{coll} + \tfrac{r_1}{r_1+r_2} \cdot [\boldsymbol{x}_2]_{coll}
\end{aligned}
$$

Kollisionsbehandlung: Kugel trifft Ebene

- Elastischer Rückstoß: Spiegelung der Geschwindigkeit:
- vorher $\boldsymbol{v}$, nachher $\boldsymbol{w}$: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - 2\left[\boldsymbol{v} \circ \vec{n}\right] \cdot \vec{n}$ (dabei $\left\|\vec{n}\right\| = 1!$)



Kollisionsbehandlung: Kugel trifft Ebene

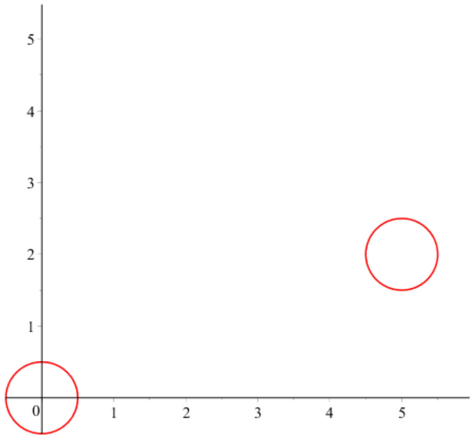


- Andere Sichtweise: Zerlege Geschwindigkeit in normalen und tangentialen Anteil: $\boldsymbol{v}_{normal} = \dfrac{\boldsymbol{v} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{n}} \cdot \vec{n}\,, \quad \boldsymbol{v}_{tang} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{normal}$
- Dann $\quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{tang} + \boldsymbol{v}_{normal}\,, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_{tang} - \boldsymbol{v}_{normal}\ .$
- Modifikation: mit Dämpfung α und Reibung μ :

$$\boldsymbol{w} = (1-\mu)\boldsymbol{v}_{tang} - (1-\alpha)\boldsymbol{v}_{normal} \quad (0 \le \alpha, \mu \le 1)$$

Kollisionsbehandlung: Kollision zweier Kugel

- Zwei Kugeln mit Masse m_1 bzw. m_2 und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_1$ bzw. $\boldsymbol{v}_2$ kollidieren.
  Welche Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}_1$ bzw. $\boldsymbol{w}_2$ haben sie nach der Kollision?



- **Impulserhaltung** $$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{w}_1 + m_2\boldsymbol{w}_2$$

- **Energieerhaltung** $$\tfrac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1\boldsymbol{w}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\boldsymbol{w}_2^{\,2}$$

- Im 1D Fall (skalare Geschwindigkeit) sind dies zwei Gleichungen für die beiden Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}_1$ und $\boldsymbol{w}_2$ nach der Kollision

LGDV
LEHRSTUHL GRAPHISCHE DATENVERARBEITUNG

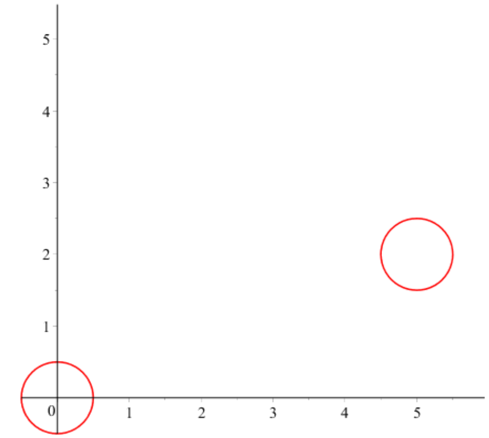
Kollisionsbehandlung: Kollision zweier Kugel

- Impulserhaltung

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{w}_1 + m_2\boldsymbol{w}_2$$

- Energieerhaltung

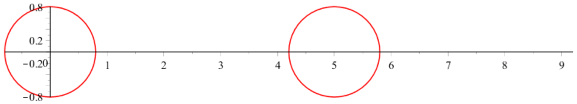
$$\tfrac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1{}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2{}^2 = \tfrac{1}{2}m_1\boldsymbol{w}_1{}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\boldsymbol{w}_2{}^2$$



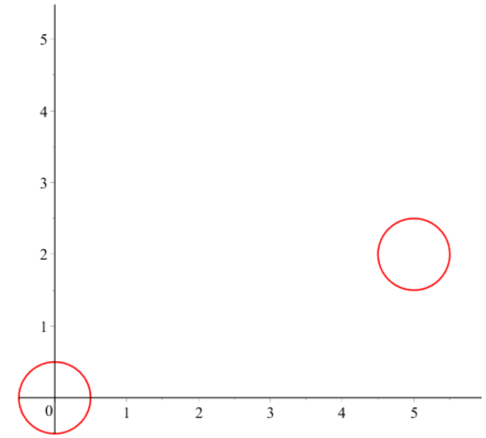
- Lösung im 1D Fall: (triviale Lösung: $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2$)

$$\boxed{\boldsymbol{w}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot\boldsymbol{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\cdot\boldsymbol{v}_2\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\cdot\boldsymbol{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\cdot\boldsymbol{v}_2}$$

- Spezialfall $m_1 = m_2$: $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_1$



Kollisionsbehandlung: Kollision zweier Kugel



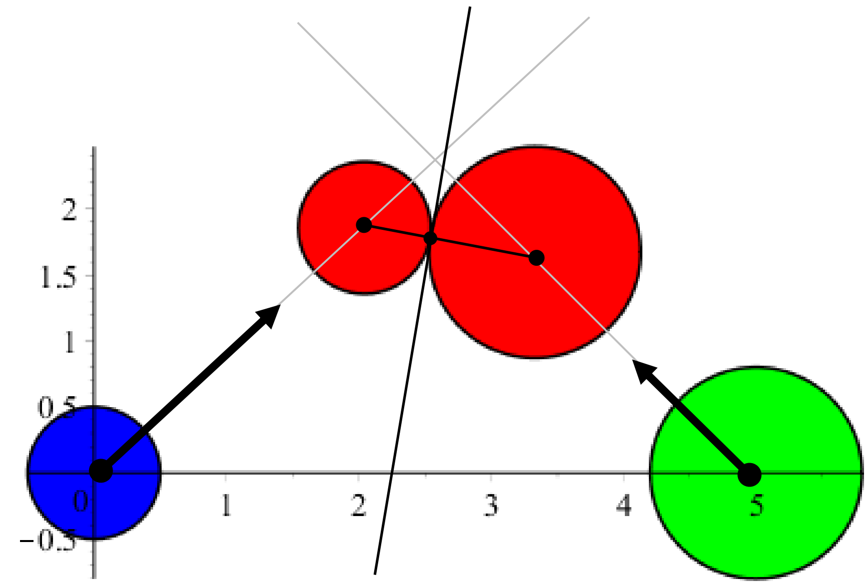
- Nun zum 2D bzw. 3D-Fall (sh oben)

$$[\boldsymbol{x}_1]_{coll} = \boldsymbol{x}_{coll} - t_{coll} \cdot \boldsymbol{v}_2$$

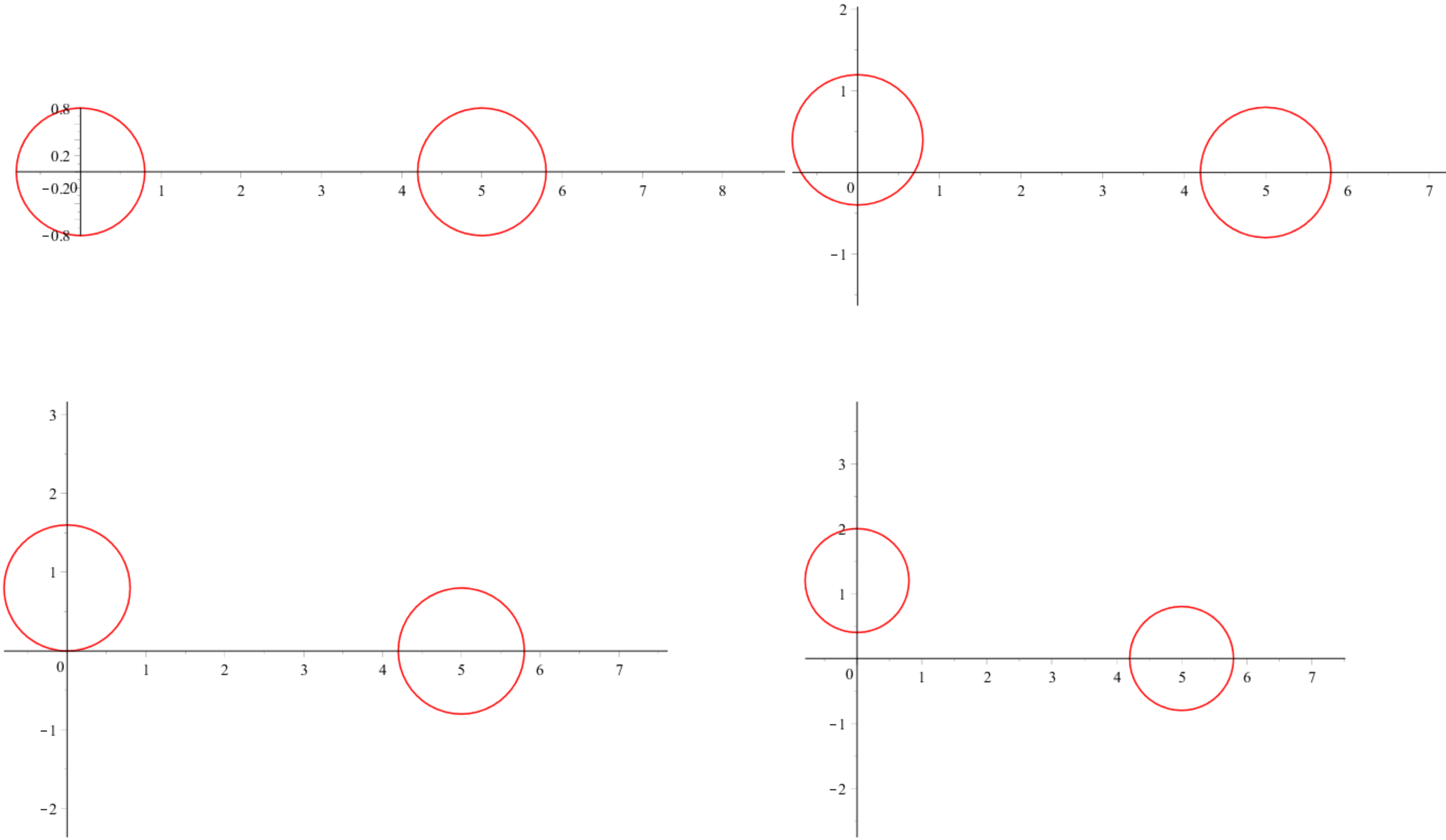
$$[\boldsymbol{x}_2]_{coll} = \boldsymbol{x}_2 + t_{coll} \cdot \boldsymbol{v}_2$$

$$\boldsymbol{x}_{coll} = \frac{r_2}{r_1+r_2} \cdot [\boldsymbol{x}_1]_{coll} + \frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot [\boldsymbol{x}_2]_{coll}$$

- Bestimme zum Zeitpunkt der Kollision die **Kollisions-Ebene**:
  - Normale: $\vec{n} = [\boldsymbol{x}_1]_{coll} - [\boldsymbol{x}_2]_{coll}$
  - Zerlege $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ in tangential und normalen Anteil
  - Transformiere $[\boldsymbol{v}_1]_{nor}$ und $[\boldsymbol{v}_2]_{nor}$ gemäß den 1D-Regeln (s.o.) → $[\boldsymbol{w}_1]_{nor}$ und $[\boldsymbol{w}_2]_{nor}$
  - $\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= [\boldsymbol{v}_1]_{tang} + [\boldsymbol{w}_1]_{nor} \\ \boldsymbol{w}_2 &= [\boldsymbol{v}_2]_{tang} + [\boldsymbol{w}_2]_{nor} \end{aligned}}$ und



Elastischer Stoß zweier Kugeln - Beispiele



Elastischer Stoß zweier Kugeln - Beispiele