第二章　运动学中的向量法

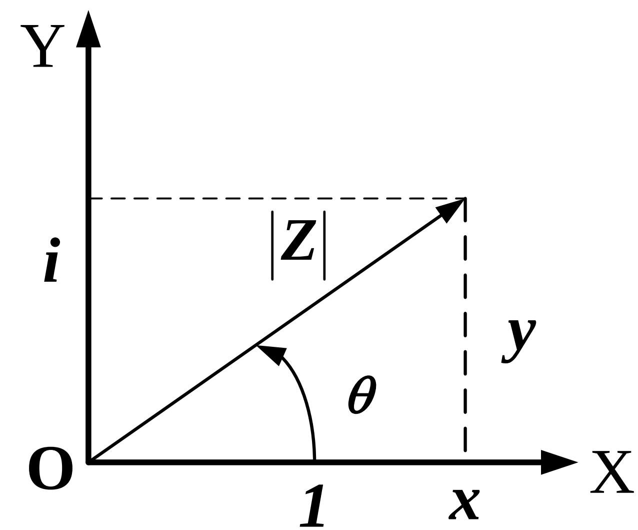
向量法是描述刚体运动的一种基本方法，可用直角坐标，也可用极坐标表示。

§ 2-1　复数矢量法(复极向量法)

一、复数

用两个实数*x*、*y*表示一个复数

$$z = x + iy$$



x、*y* 分别称为复数的实部和虚部，实部单位为“1”，略去不写，虚部单位“i”有求法规则：$i \cdot i = -1$

对实轴的对称点也对应一个复数：

$$\tilde{z} = x - iy$$

则称 $\tilde{z}$ 是**z**的共轭复数， $(z\tilde{z})^{1/2}$ 定义为复数**z**的模

记为：$|z|$

$$\therefore \ |z| = (z\tilde{z})^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

模等于**1**的复数称为单位复数：

$$\hat{z} = \cos\theta + i\sin\theta$$

θ称为幅角，由**Euler**公式：

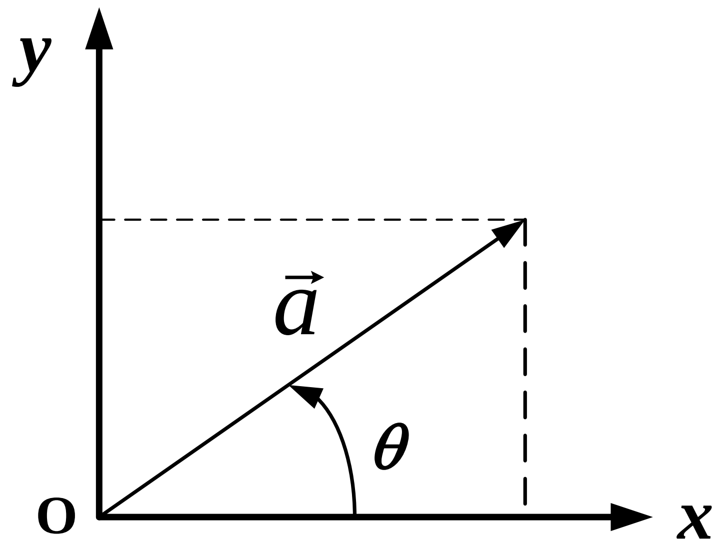
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\therefore \quad \vec{z} = |z|e^{i\theta}$$

二、复数矢量的表示

设在复平面上有一个单位矢量 $\hat{a}$，则该矢量可表示为：

$$\hat{a}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta} \qquad \textbf{(2-1)}$$



如图的自由矢量 $\vec{a}$ 的表示为：

$$\vec{a}=a\hat{a}=ae^{i\theta}=a(\cos\theta+i\sin\theta)=a_x+ia_y$$

于是矢量 $\vec{a}$ 的分量分别为：a_x 、a_y

1）向量$\vec{a}$与单位矢量 $e^{i\varphi}$相乘：

$$e^{i\varphi}(ae^{i\theta}) = ae^{i(\theta+\varphi)} \qquad \textbf{（2-2）}$$

表示向量$\vec{a}$逆时针转过一个φ 角。

2）向量$\vec{a}$ 与虚数单位***i***的乘积：

$$iae^{i\theta} = a(i\cos\theta - \sin\theta) = a\left[\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta+\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= ae^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \qquad \textbf{（2-3）}$$

相当于矢量 $\vec{a}$ 转过90^0。

同理：$i(iae^{i\theta}) = a(-\cos\theta - isim\theta) = a\left[\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right]$

$$= ae^{i(\theta+\pi)} = -ae^{i\theta} \qquad \textbf{（2-4）}$$

相当于矢量 $\vec{a}$ 转过**180**$^{\mathbf{0}}$。

3） $e^{-i\theta}$是单位矢量 $e^{i\theta}$的共轭矢量

$$e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

4）两个有用公式

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \textbf{（2-5）}$$

$$\sin\theta=-i\cdot\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \qquad \textbf{（2-6）}$$

$$\cos(\theta\pm\phi)=\cos\theta\cos\phi\mp\sin\theta\sin\phi \qquad \textbf{（2-7）}$$

$$\sin(\theta\pm\phi)=\sin\theta\cos\phi\pm\cos\theta\sin\phi \qquad \textbf{（2-8）}$$

5）复数矢量的微分

设矢量 $\vec{r} = re^{i\theta}$，表示某一点相对于固定参考系坐标原点的位置，则一阶导数：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(re^{i\theta})$$

$$= \dot{r}e^{i\theta} + r(e^{i\theta} i\dot{\theta}) = \underline{\boxed{\dot{r}}\, e^{i\theta} + \boxed{r\dot{\theta}}\, i\, e^{i\theta}} \qquad \textbf{（2-9）}$$

等式右边可看作二个复数矢量 $\dot{r}e^{i\theta}$ 、$r\dot{\theta}ie^{i\theta}$ 其中 $\dot{r}$ 、$r\dot{\theta}$ 分别为它们的矢量大小（模），$e^{i\theta}$、 $ie^{i\theta}$ 为单位方向矢。

二阶导数：$\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\theta}) = \ddot{r}e^{i\theta} + \dot{r}(e^{i\theta} \cdot i\dot{\theta}) + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})ie^{i\theta} + r\dot{\theta}(ie^{i\theta} i\dot{\theta})$

$$= \underline{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{i\theta} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})ie^{i\theta}} \qquad \textbf{（2-10）}$$

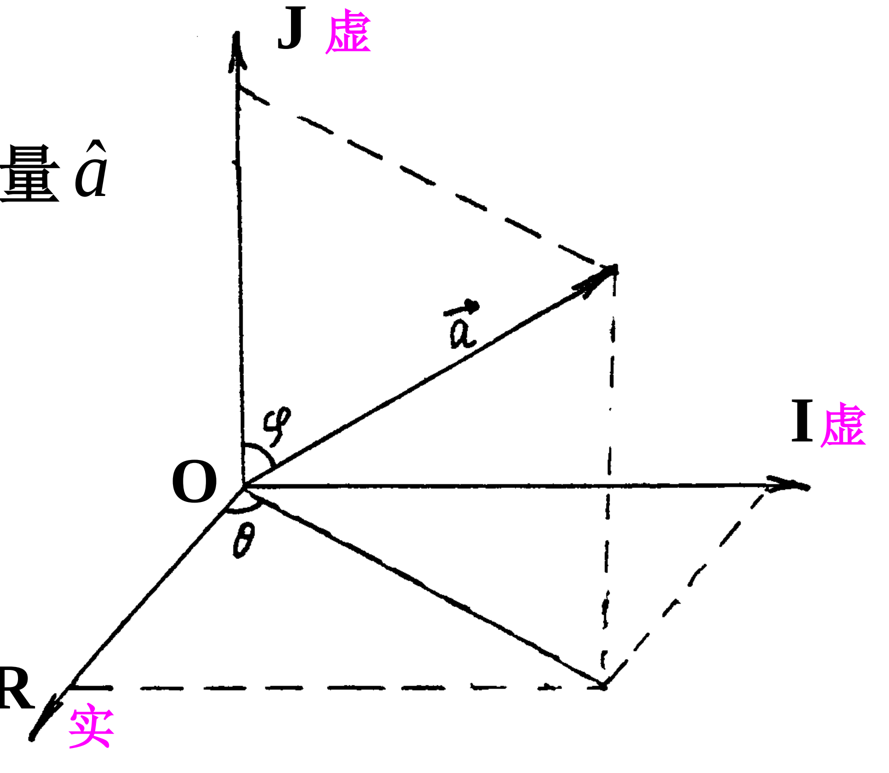
继续求导可求出高阶导数。

三、空间矢量的复数表示

取坐标系**O—RIJ**，矢量 $\vec{a}$ 如图，**R**为实轴，**I**、**J**为虚轴，则矢量 $\vec{a}$ 可写成：

$$\vec{a} = a(e^{i\theta}\sin\varphi + j\cos\varphi) \qquad (2\text{-}11)$$

式中**θ**为矢量 $\vec{a}$ 在复平面（**O—RI**平面）上的投影与实轴**R**间夹角，φ 为 $\vec{a}$ 与**J** 轴的夹角。



矢量 $\vec{a}$ 可看成长度a与单位向量 $\hat{a}$ 的乘积。由式**2—11**

则单位向量：

$$\hat{a} = e^{i\theta}\sin\varphi + j\cos\varphi \qquad (2\text{-}12)$$

$\vec{a} = a \cdot \hat{a}$，其一阶导数，二阶导数为:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{a}} &= \dot{a}\hat{a} + a\dot{\hat{a}} \\ \ddot{\vec{a}} &= \ddot{a}\hat{a} + 2\dot{a}\dot{\hat{a}} + a\ddot{\hat{a}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{（2-13）}$$

式中:

$$\dot{\hat{a}} = e^{i\theta}(i\dot{\theta}\sin\varphi + \cos\varphi\dot{\varphi}) - j\sin\varphi\dot{\varphi} \qquad \text{（2-14）}$$

$$\ddot{\hat{a}} = e^{i\theta}\sin\varphi(i\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2) + 2i\dot{\theta}e^{i\theta}\cos\varphi\dot{\varphi} + e^{i\theta}(\cos\varphi\ddot{\varphi} - \sin\varphi\dot{\varphi}^2) - j(\sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2) \qquad \text{（2-15）}$$

§2-2　利用复数向量进行机构的运动分析

机构的运动分析是在已知机构的结构和几何尺寸的条件下，在原动件的运动规律给定时，确定从动件任一运动变量的变化规律。

运动分析包括：位置分析，速度和加速度分析。其中位置分析方程通常是非线性的，只有简单的二级机构才能列出输出变量和输入变量的显函数表达式，而其他情况下，方程的求解就需要利用各种数值解法。

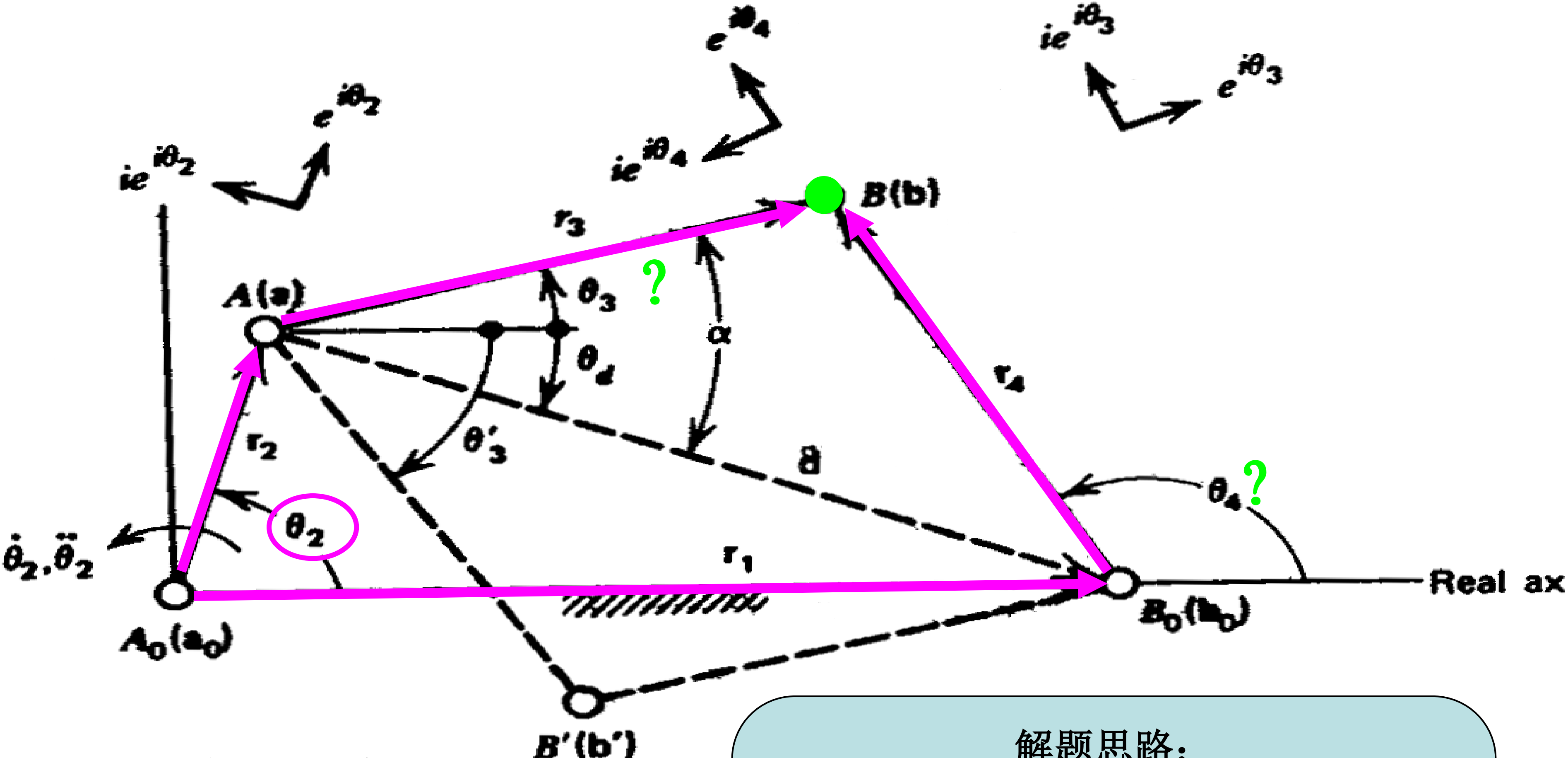
一、平面机构的运动分析

1、铰链四杆机构

建立封闭矢量方程，可有两种形式：

a、连续头尾相接的封闭链；

b、到达同一研究点的两个不同途径的两个分支。雷文（Raven）称为“独立位置方程”法，这一方法对解决输入和输出构件都绕各自固定点中心转动的问题特别有效。



（1）位置分析

如图铰链四杆机构，假

入角θ_2 已知，可列出独立位

$$\vec{r}_B = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e$$

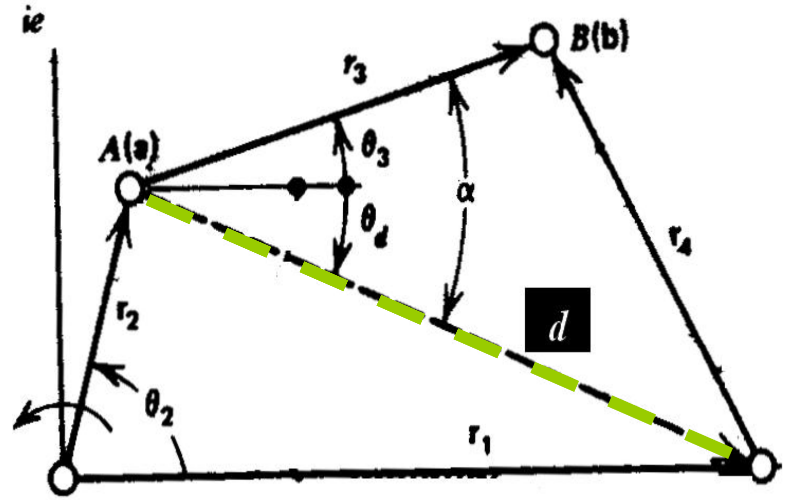
解题思路：

1）利用已知r_1、r_2和θ_2，求出对角线矢量d。

2）利用矢量d和r_4求出矢量r_3，解出θ_3和θ_4 。

位置分析的目的是求出 θ_3和 θ_4的值。

首先确定对角线***d*** 的长度：



$$r_2 e^{i\theta_2} + d e^{i\theta_d} = \vec{r}_1 \qquad \text{（2-17）}$$

将式（2—17）移项后，分别求上它们各自的共轭复数：

$$(de^{i\theta_d})(de^{-i\theta_d}) = (\vec{r}_1 - r_2 e^{i\theta_2})(\vec{r}_1 - r_2 e^{-i\theta_2})$$

$$\Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2 (e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_2})$$

或：

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta_2} \qquad \text{（2-18）}$$

将式（2—17）分解为实部和虚部，得：

$$r_2 \cos\theta_2 = r_1 - d\cos\theta_d$$

$$r_2 \sin\theta_2 = -d\sin\theta_d$$

由此解得：

$$\sin\theta_d = -\frac{r_2}{d}\sin\theta_2$$

$$\cos\theta_d = \frac{r_1 - r_2\cos\theta_2}{d}$$

所以： $$\tan\theta_d = \frac{-r_2\sin\theta_2}{r_1 - r_2\cos\theta_2} \qquad \textbf{（2-19）}$$

由式（2—17）计算$\theta_{\mathbf{d}}$，很容易判别$\theta_{\mathbf{d}}$的象限，当矢量$\vec{d}$可确定后，由于：

$$r_3 e^{i\theta_3} = d e^{i\theta_d} + r_4 e^{i\theta_4} \qquad \text{（2-20）}$$

消去θ_4

移项，两边分别乘以各自的共轭复数：

$$(r_3 e^{i\theta_3} - d e^{i\theta_d})(r_3 e^{-i\theta_3} - d e^{-i\theta_d}) = r_4 e^{i\theta_4} \cdot r_4 e^{-i\theta_4}$$

$$r_4^2 = r_3^2 + d^2 - 2 r_3 d e^{i(\theta_d - \theta_3)} \qquad \text{（2-21）}$$

取（2—21）实部得：

$$r_4^2 = r_3^2 + d^2 = 2 d r_3 \cos(\theta_d - \theta_3)$$

$$\cos(\theta_d - \theta_3) = \frac{r_3^2 + d^2 - r_4^2}{2 d r_3}$$

$(\theta_d - \theta_3)$ 有两个可能解，根据连续条件确定一个。

取（2—20）的虚部得：

$$r_3 \sin\theta_3 = d\sin\theta_d + r_4 \sin\theta_4$$

$$\therefore \quad \sin\theta_4 = \frac{r_3 \sin\theta_3 - d\sin\theta_d}{r_4} \qquad \text{（2-22）}$$

同样，θ_4有可能有2个解，根据连续条件加以确定。

（2）速度分析

由位置方程 $r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{ie_3} = \vec{r}_1 + r_4 e^{i\theta_4}$ 进行求导：

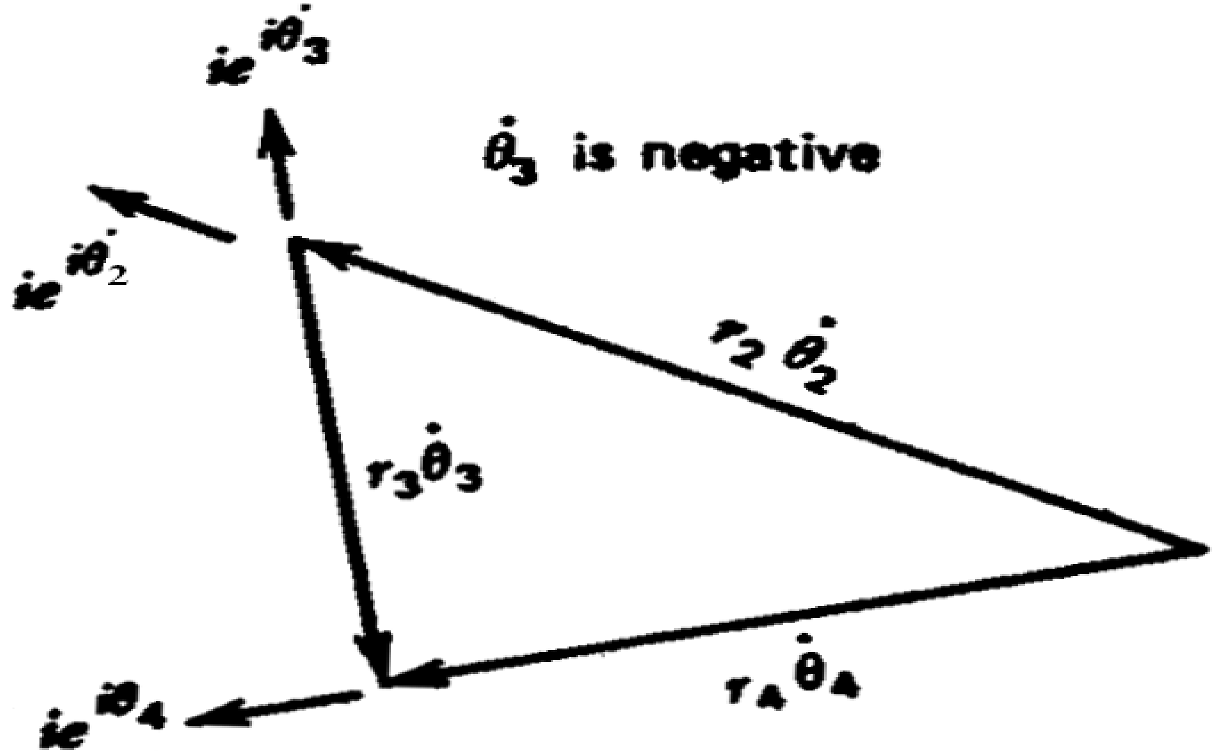
$$\boxed{\frac{d}{dt}(re^{i\theta}) = \dot{r}\, e^{i\theta} + r\dot{\theta}\, i\, e^{i\theta}}$$

由于铰链四杆机构中均为刚体，因此利用上式）矢量微分，将不包含径向分量项，由此得：

$$r_2\dot{\theta}_2 ie^{i\theta_2} + r_3\dot{\theta}_3 ie^{i\theta_3} = r_4\dot{\theta}_4 ie^{i\theta_4} \qquad \text{（2-23）}$$

$$r_2\dot{\theta}_2 ie^{i\theta_2} + r_3\dot{\theta}_3 ie^{i\theta_3} = r_4\dot{\theta}_4 ie^{i\theta_4}$$

该式由相对运动速度多边形图示说明为：



$ie^{i\theta_2}$ 、$ie^{i\theta_3}$ 、$ie^{i\theta_3}$ 分别表示 $r_2\dot{\theta}_2$ 、$r_3\dot{\theta}_3$ 、$r_a\dot{\theta}_4$ 的方向，它们是 $\vec{r}_2$ 、$\vec{r}_3$ 、$\vec{r}_4$ 的方向转过 $\frac{\pi}{2}$ 所得，$\dot{\theta}_2$ 是已知的。

$$r_2\dot{\theta}_2 i e^{i\theta_2} + r_3\dot{\theta}_3 i e^{i\theta_3} = r_4\dot{\theta}_4 i e^{i\theta_4}$$

将上述矢量方程分解为实部分量和虚部分量：

$$\begin{cases} -r_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - r_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 = -r_4\dot{\theta}_4\sin\theta_4 \\ r_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + r_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 = r_4\dot{\theta}_4\cos\theta_4 \end{cases}$$

未知量 $\dot{\theta}_3$ **、**$\dot{\theta}_4$ **左移：**

$$\begin{cases} \dot{\theta}_3(r_3\sin\theta_3) + \theta_4(r_4\sin\theta_4) = r_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_3(r_3\cos\theta_3) + \dot{\theta}_4(-r_4\cos\theta_4) = -r_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{cases} \quad \text{（2-24）}$$

最后，用Cramer（克莱姆）法则解（2—24）

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_3=\frac{\begin{vmatrix} r_2\dot{\boldsymbol{\theta}}_2\sin\boldsymbol{\theta}_2 & r_4\sin\boldsymbol{\theta}_4 \\ -r_2\dot{\boldsymbol{\theta}}_2\cos\boldsymbol{\theta}_2 & -r_4\cos\boldsymbol{\theta}_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3\sin\boldsymbol{\theta}_3 & r_4\sin\boldsymbol{\theta}_4 \\ r_3\cos\boldsymbol{\theta}_3 & -r_4\cos\boldsymbol{\theta}_4 \end{vmatrix}}$$

于是可得：

$$\dot{\theta}_3=\dot{\theta}_2\frac{r_2r_4\cos\theta_2\sin\theta_4-r_2r_4\sin\theta_2\cos\theta_4}{-r_3r_4\cos\theta_3\sin\theta_4+r_3r_4\sin\theta_3\cos\theta_4}$$

$$=\dot{\theta}_2\frac{r_2\sin(\theta_4-\theta_2)}{r_3\sin(\theta_3-\theta_4)} \qquad \textbf{(2-25)}$$

类似可求得：

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_4=\dot{\boldsymbol{\theta}}_2\frac{r_2\sin(\boldsymbol{\theta}_3-\boldsymbol{\theta}_2)}{r_4\sin(\boldsymbol{\theta}_3-\boldsymbol{\theta}_4)} \qquad \textbf{(2-26)}$$

（3）加速度分析

同样方法对（2—16）进行二次微分得：

$$r_2\ddot{\theta}_2(ie^{i\theta_2})+r_2\dot{\theta}_2^2(-e^{i\theta_2})+r_3\ddot{\theta}_3(ie^{i\theta_3})+r_3\dot{\theta}_3^2(-e^{i\theta_3})$$
$$=r_4\ddot{\theta}_4(ie^{i\theta_4})+r_4\dot{\theta}_4^2(-e^{i\theta_4}) \qquad \text{（2-27）}$$

将（2-27）分解为实数分量和虚数分量，便可得含有未知数 $\ddot{\theta}_3$和 $\ddot{\theta}_4$ 的两个方程：

$$\ddot{\theta}_3(-r_3\sin\theta_3)+\ddot{\theta}_4(r_4\sin\theta_4)=r_2\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+r_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2$$
$$+r_3\dot{\theta}_3^2\cos\theta_3-r_4\dot{\theta}_4^2\cos\theta_4=A$$

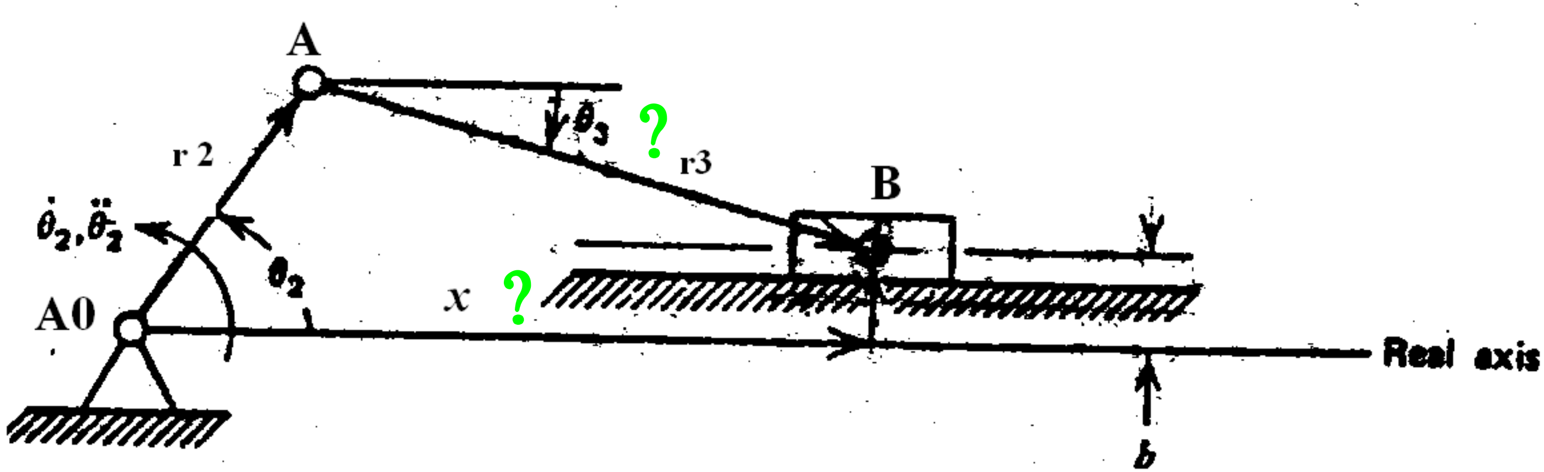
$$\ddot{\theta}_3(r_3\cos\theta_3)+\ddot{\theta}_4(-r_4\cos\theta_4)=-r_2\ddot{\theta}_2\cos\theta_2+r_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2$$
$$+r_3\dot{\theta}_3^2\sin\theta_3-r_4\dot{\theta}_4^2\sin\theta_4=B$$

由此得:

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\begin{vmatrix} A & r_4 \sin\theta_4 \\ B & -r_4 \cos\theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 \sin\theta_3 & r_4 \sin\theta_4 \\ r_3 \cos\theta_3 & -r_4 \cos\theta_4 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{r_3} \frac{A\cos\theta_4 + B\sin\theta_4}{\sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{-1}{r_4} \frac{A\cos\theta_3 + B\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

2、偏置曲柄滑块机构



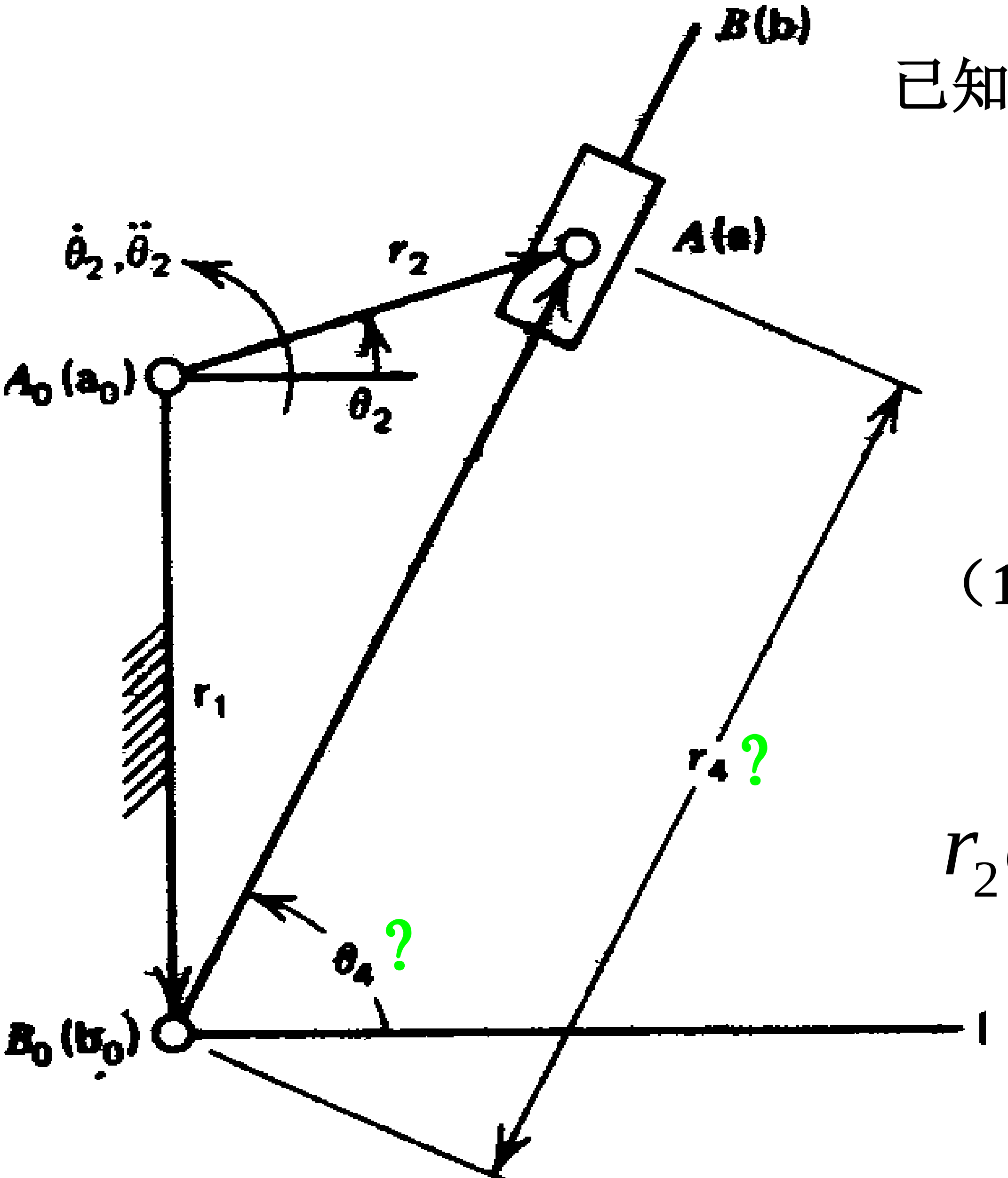
列出B点的独立位置方程，再由位置方程一次、二次微分得速度。加速度方程。通过分离实数分量和虚数分量的方法最终求出未知量：

$$\vec{r}_B = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = x + ib$$

$$\dot{\vec{r}}_B = r_2(\dot{\theta}_2 i e^{i\theta_2}) + r_3(\dot{\theta}_3 i e^{i\theta_3}) = \dot{x}$$

$$\ddot{\vec{r}}_B = (-r_2\dot{\theta}_2^2 e^{i\theta_2} + r_2\ddot{\theta}_2 i e^{i\theta_2}) + (-r_3\dot{\theta}_3^2 e^{i\theta_3} + r_3\ddot{\theta}_3 i e^{i\theta_3}) = \ddot{x}$$

3、摆动导杆机构



已知：构件1和构件2 长度为 $\boldsymbol{r_1}$、$\boldsymbol{r_2}$，构件2（曲柄）的角速度和角加速度为 $\dot{\theta}_2$、$\ddot{\theta}_2$，求不同位置的 $\boldsymbol{\theta_4}$、$\boldsymbol{\dot{\theta}_4}$、$\boldsymbol{\ddot{\theta}_4}$及$r_4$、$\dot{r}_4$、$\ddot{r}_4$

（1）位置分析

独立位置方程为：

$$r_2 e^{i\theta_2} = -ir_1 + r_4 e^{i\theta_4} \quad (2\text{-}27)$$

分成实数分量和虚数分量：

$$r_2 \cos\theta_2 = r_4 \cos\theta_4 \qquad \textbf{（2-28）}$$

$$r_2 \sin\theta_2 + r_1 = r_4 \sin\theta_4 \qquad \textbf{（2-29）}$$

两式相除得：

$$\theta_4 = \arctan\frac{r_2 \sin\theta_2 + r_1}{r_2 \cos\theta_2} \qquad \textbf{（2-30）}$$

代入（**2—28**）：

$$r_4 = \frac{r_2 \cos\theta_2}{\cos\theta_4}$$

（2）速度分析

对（2—27）求导杆的速度方程：

$$r_2 i\dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} = \dot{r}_4 e^{i\theta_4} + r_4\dot{\theta}_4 ie^{i\theta_4} \qquad \text{（2-31）}$$

两边乘以 $e^{-i\theta_4}$ 则：

$$r_{\mathbf{2}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{2}}e^{i(\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{\theta}_4)} = \dot{r}_{\mathbf{4}} + ir_{\mathbf{4}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{4}}$$

将上式分成实数分量和虚数分量得：

$$\dot{r}_4 = -r_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_4)$$

$$\dot{\theta}_4 = \frac{r_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_4)}{r_4}$$

（3）对位置方程二次微分得加速度方程：

$$r_2\ddot{\theta}_2 ie^{i\theta_2} - r_2\dot{\theta}_2^2 e^{i\theta_2} = (\ddot{r}_4 - r_4\dot{\theta}_4^2)e^{i\theta_4} + (2\dot{r}_4\dot{\theta}_4 + r_4\ddot{\theta}_4)ie^{i\theta_4}$$

（2-32）

两边同乘 $e^{-i\theta_4}$ **得：**

$$r_2\ddot{\theta}_2 ie^{i(\theta_2-\theta_4)} - r_2\dot{\theta}_2^2 e^{i(\theta_2-\theta_4)} = (\ddot{r}_4 - r_4\dot{\theta}_4^2) + (2\dot{r}_4\dot{\theta}_4 + r_4\ddot{\theta}_4)i$$

（2-33）

取虚数分量：

$$r_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_4) - r_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_4) = 2\dot{r}_4\dot{\theta}_4 + r_4\ddot{\theta}_4$$

（2-34）

因此：

$$\ddot{\theta}_4=\frac{1}{r_4}\left[r_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_4)-r_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_4)-2\dot{r}_4\dot{\theta}_4\right] \qquad (2\text{-}35)$$

取（2—23）实数分量：

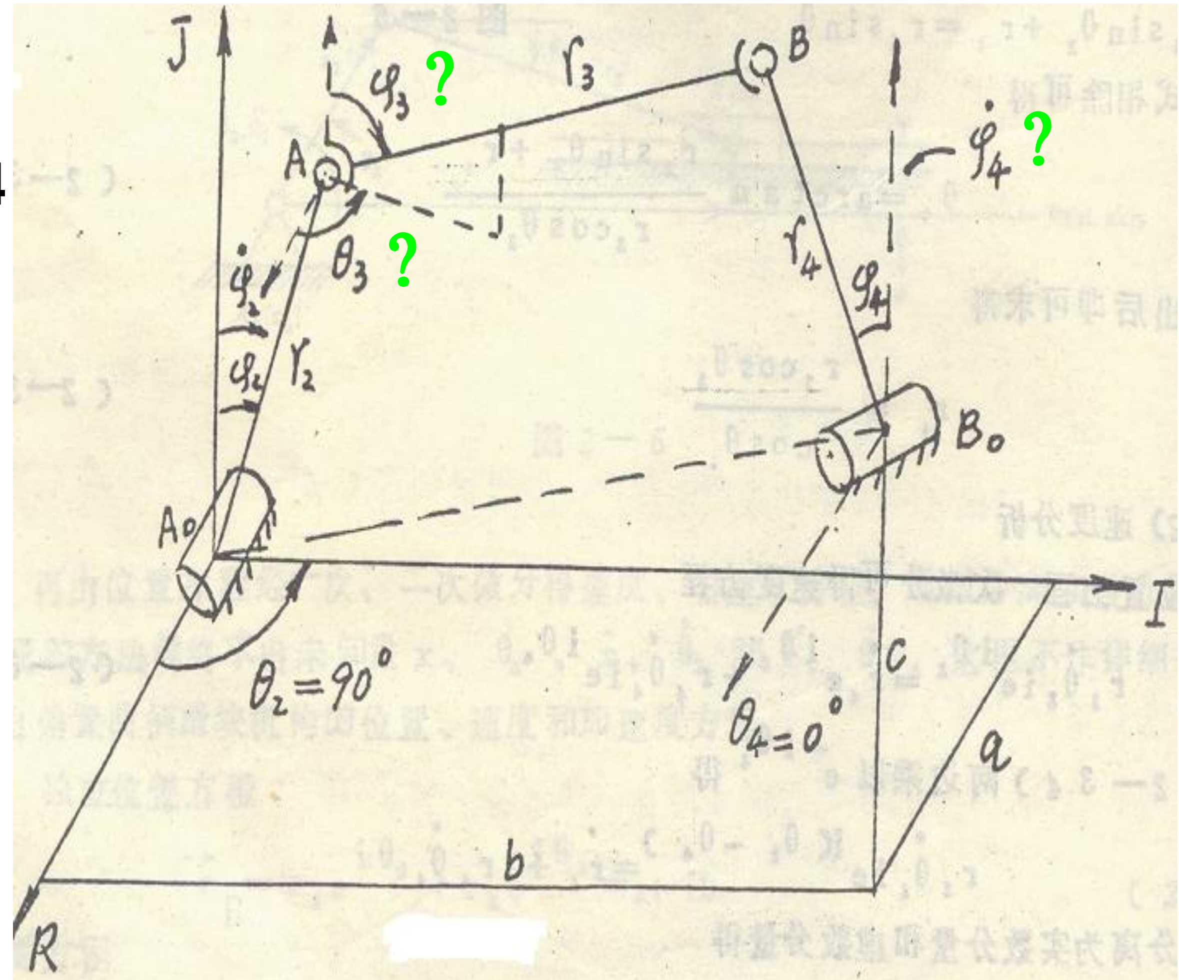
$$-r_2\ddot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_4)-r_2\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_2-\theta_4)=\ddot{r}_4-r_4\dot{\theta}_2^2$$

因此得：

$$\ddot{r}_4=-r_2\ddot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_4)-r_2\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_2-\theta_4)+r_4\dot{\theta}_4^2 \qquad (2\text{-}36)$$

二、空间机构的运动分析

如图所示RSSR机构，杆2在I—J平面旋转，杆4在平衡R—J平面旋转，已知：



$r_2 = 127mm$ ，$r_4 = 203mm$

$a = 102mm$，$b = 406mm$

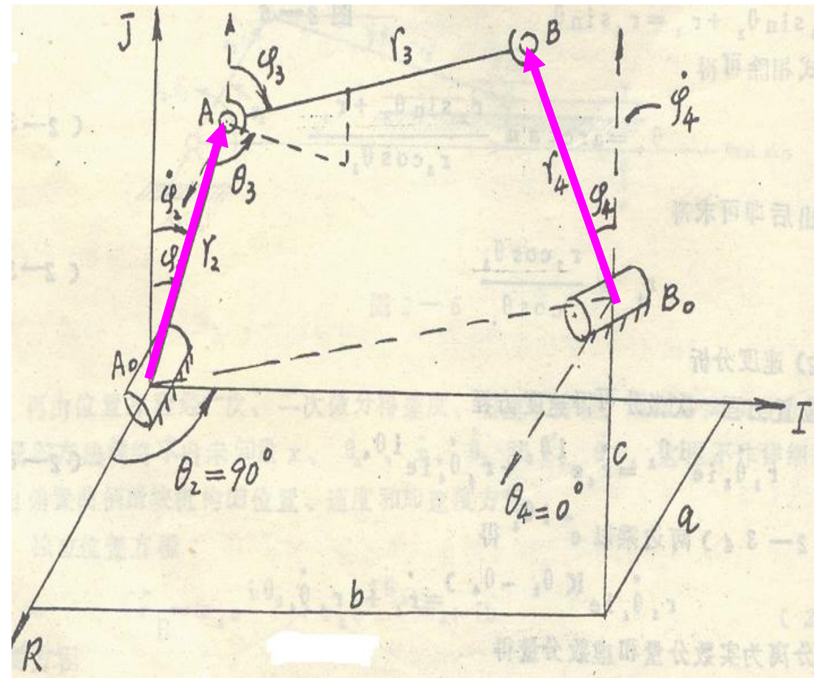
$c = 102mm$，$\dot{\varphi}_2 = 10\ {}^{1}\!/_{s}$

求当：$\varphi_2 = 30^\circ$ ，$\varphi_4 = 45^\circ$ 时杆3的位置角 θ_3 、φ_3 及$\dot{\varphi}_4$

由于杆2在I—J平面内运动，所以矢量$\vec{r}_2$ 在I—R平面内的投影与R轴夹角θ_2=90^0，又由于杆4在平行于R—J平面内旋转，因此向量r_4在I—R平面内的投影与R轴夹角θ_4=0。

矢量$\mathbf{A_0B_0}$可表达为：

$\overrightarrow{\mathbf{A_0B_0}} = a+i\,b+j\,c$



（1）位置分析

对B点可列两个独立位置方程：

$$\vec{r}_B = \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = a + ib + jc + \vec{r}_4$$

$$= r_2(e^{i\theta_2}\sin\varphi_2 + j\cos\varphi_2) + r_3(e^{i\theta_3}\sin\varphi_3 + j\cos\varphi_3)$$

$$= a + ib + jc + r_4(e^{i\theta_4}\sin\varphi_4 + j\cos\varphi_4) \qquad \text{（2-37）}$$

$\because \quad \theta_2 = 90^\circ$ ，$\theta_4 = 0^\circ$ 代入得：

$$r_2(e^{i90^\circ}\sin\varphi_2 + j\cos\varphi_2) + r_3(e^{i\theta_3}\sin\varphi_3 + j\cos\varphi_3)$$
$$= a + ib + jc + r_4(\sin\varphi_4 + j\cos\varphi_4)$$

展开：

$$r_2(i\sin\varphi_2 + j\cos\varphi_2) + r_3(\cos\theta_3\sin\varphi_3 + i\sin\theta_3\sin\varphi_3 + j\cos\varphi_3)$$
$$= a + ib + jc + r_4(\sin\varphi_4 + j\cos\varphi_4)$$

分别取***R***、***I***、***J***分量得：

$$r_3\cos\theta_3\sin\varphi_3 = a + r_4\sin\varphi_4 \qquad (1)$$

$$r_2\sin\varphi_2 + r_3\sin\theta_3\sin\varphi_3 = b \qquad (2)$$

$$r_2\cos\varphi_2 + r_3\cos\varphi_3 = c + r_4\cos\varphi_4 \qquad (3)$$

由（2）移项：

$$r_3\sin\theta_3\sin\varphi_3 = b - r_2\sin\varphi_2 \qquad (4)$$

$$\left.(4)\middle/(1)\right. \quad \Rightarrow \qquad \tan\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{3}} = \frac{b - r_{\mathbf{2}}\sin\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{2}}}{a + r_{\mathbf{4}}\sin\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{4}}}$$

$$\theta_3 = 54.36^\circ$$

由（3）式移项得：

$$r_3\cos\varphi_3 = c + r_4\cos\varphi_4 - r_2\cos\varphi_2 \qquad （5）$$

$$\left.(4)\middle/(5)\right. \quad \Rightarrow \qquad \sin\theta_3\tan\varphi_3 = \frac{b - r_2\sin\varphi_2}{c + r_4\cos\varphi_4 - r_2\cos\varphi_2}$$

$$\varphi_3 = ar\tan\left[\frac{b - r_2\sin\varphi_2}{(ctr_4\cos\varphi_4 - r_2\cos\varphi_2)\sin\theta_3}\right]$$

$$= 72.169^\circ$$

（2）速度分析

可对（2—37）式一次微分后，分别取R、I、J分量，也可直接（1）、（2）、（3）一次微分得速度分量。求导时各长度尺寸为常数，θ_2 、θ_4 角不变的。由此得：

$$r_3\cos\theta_3\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3 - r_3\sin\theta_3\dot{\theta}_3\sin\varphi_3 = r_4\cos\varphi_4\dot{\varphi}_4 \qquad (6)$$

$$r_2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2 + r_3\cos\theta_3\dot{\theta}_3\sin\varphi_3 + r_3\sin\theta_3\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3 = 0 \qquad (7)$$

$$r_2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2 + r_3\sin\varphi_3\dot{\varphi}_3 = r_4\sin\varphi_4\dot{\varphi}_4 \qquad (8)$$

由（6）式移项得：

$$r_3\cos\theta_3\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3 - r_4\cos\varphi_4\dot{\varphi}_4 = r_3\sin\theta_3\dot{\theta}_3\sin\varphi_3 \qquad (9)$$

由（7）式移项得：

$$-r_2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2 - r_3\sin\theta_3\cos\varphi_3\dot{\varphi}_3 = r_3\cos\theta_3\dot{\theta}_3\sin\varphi_3 \qquad (10)$$

$$(9)\Big/(10) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}_3\dot{\varphi}_3 = \frac{r_4\cos\varphi_4\cos\theta_3\varphi_4 - r_2\cos\varphi_2\sin\theta_3\varphi_2}{\cos\varphi_3}$$

（11）

（11）代入**（8）**得**:**

$$\mathrm{r}_2\dot{\varphi}_2(\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\varphi_2\sin\varphi_3\sin\theta_3)$$
$$= \mathrm{r}_4\dot{\varphi}_4(\sin\varphi_4\cos\varphi_3 - \cos\varphi_4\sin\varphi_3\cos\theta_3)$$

由此得**:**

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{\mathrm{r}_2\dot{\varphi}_2}{\mathrm{r}_4}\left(\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_3 - \cos\varphi_2\sin\varphi_3\sin\theta_3}{\sin\varphi_4\cos\varphi_3 - \cos\varphi_4\sin\varphi_3\cos\theta_3}\right)$$
$$= 19.60812 \quad 1/\mathrm{s}$$

（3）加速度分析 （略）

三、复数矢量法进行机构的综合

复数矢量法能够方便的应用于杆机构的综合，特别是平面机构的综合。如要综合一平面铰链四杆机构，而该机构在某一位置时各构件必须满足规定的角速度、角加速度，可用复数矢量法。

§2-3　利用直角坐标向量的机构运动分析

一、直角坐标向量标记法

空间任意一点A的位置在直角坐标系中可用向量 $\vec{a}$ 来表示，

直角坐标系 $o-xyz$ ，若x、y、z方向上的单位向量为：

$\hat{i}$，$\hat{j}$，$\hat{k}$，则我们可以将向量表示为：

$$\vec{a}=\hat{i}a_x+\hat{j}a_y+\hat{k}a_z$$

a_x，a_y， a_z 分别是向量 $\vec{a}$ 在三个方向上的分量。

1、两个向量的点积（标积）

两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$它们的点积：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \qquad (2\text{-}45)$$

式中θ为两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$间的夹角。由式（2-45）可知，就正交直角坐标系而言，x、y、z轴方向上的单位向量$\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$有下述关系

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

任何一个向量$\vec{a}$与一个单位向量，例如$\hat{i}$的点积：

$$\vec{a}\cdot\hat{i}=a\cos\theta=a_x$$

即为此向量在该单位方向上的分量，如果两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$垂直，则它们的点$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

2、向量的叉积（矢积）

$$\vec{a} \times \vec{b} = (ab\sin\theta)\hat{c} \qquad (2\text{-}46)$$

$\hat{c}$为垂直于$\vec{a}$，$\vec{b}$两矢量的单位矢量，方向由右手法则确定。

叉积也可用行列式展开后得到的向量分量来构成。

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \hat{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x) \qquad (2\text{-}47)$$

在两维情况下：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x) \qquad (2\text{-}48)$$

上式中单位向量k常常被省去。单位向量i、j、k间有下述关系：

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\quad \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$

如果$\vec{a}\times\vec{b}=0$，则$\vec{a}$和$\vec{b}$平行。

三个矢量的三重矢积：

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}-\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}$$

三个矢量的混积： $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)$$

3、向量的微分

若矢量$\vec{r}=r\cdot\hat{r}$，其中$\hat{r}$为$\vec{r}$的单位矢量，$\vec{r}$对时间t求导后得：

$$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\cdot\frac{d\hat{r}}{dt} \qquad (2-49)$$

式中$\dfrac{d\hat{r}}{dt}$表示矢量$\vec{r}$的方向变化率。

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\hat{r}|\Delta\theta}{\Delta t}=\dot{\vec{\theta}}\times\hat{r}$$

由于$\dfrac{d\hat{r}}{dt}$垂直于$\vec{r}$，所以可用叉积形式表示。式（2-49）可表示为：

$$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\left(\dot{\vec{\theta}}\times\hat{r}\right)=\dot{r}\hat{r}+\dot{\vec{\theta}}\times\vec{r} \qquad (2-50)$$

式（2−50）再对t求导可得:

$$\ddot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r}+\dot{\vec{\theta}}\times\vec{r}\right)=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}+\ddot{\vec{\theta}}\times\vec{r}+\dot{\vec{\theta}}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

式中:

$$\dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}=\dot{r}\left(\dot{\vec{\theta}}\times\hat{r}\right)=\dot{\vec{\theta}}\times\dot{r}\hat{r}$$

$$\dot{\vec{\theta}}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{\theta}}\times\left(\dot{r}\hat{r}+\dot{\vec{\theta}}\times\vec{r}\right)=\dot{\vec{\theta}}\times\dot{r}\hat{r}+\dot{\vec{\theta}}\times\left(\dot{\vec{\theta}}\times\vec{r}\right)$$

因此: $$\ddot{\vec{r}}=\ddot{r}\hat{r}+\ddot{\vec{\theta}}\times\vec{r}+\dot{\vec{\theta}}\times\left(\dot{\vec{\theta}}\times\vec{r}\right)+2\left(\dot{\vec{\theta}}\times\dot{r}\hat{r}\right)\qquad(2-51)$$

而:

$$\ddot{\vec{\theta}}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\theta}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\hat{u}\right)=\ddot{\theta}\hat{u}+\dot{\theta}\dot{\hat{u}}$$

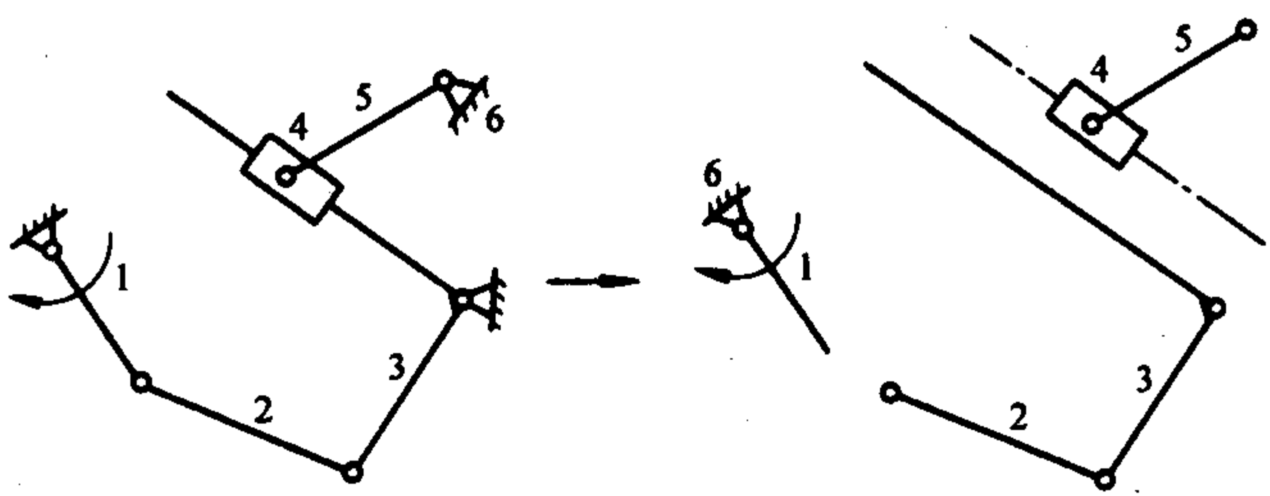
式中$\hat{u}$为角速度矢量$\dot{\vec{\theta}}$的单位矢量，表示$\dot{\vec{\theta}}$的瞬时方向。

二、杆组分类法（阿苏尔运动链）

1、杆组的定义

机构可以认为是由机架、主动件和从动件系统三部分组成。从动件系统的自由度为零。因此，从动件系统一定可以分解成一个或若干个不可再分解的自由度为零的运动链，这种运动链称为杆组。

机构是由一个或若干个自由度为零的运动链依次联接到机架和主动件上而形成的。

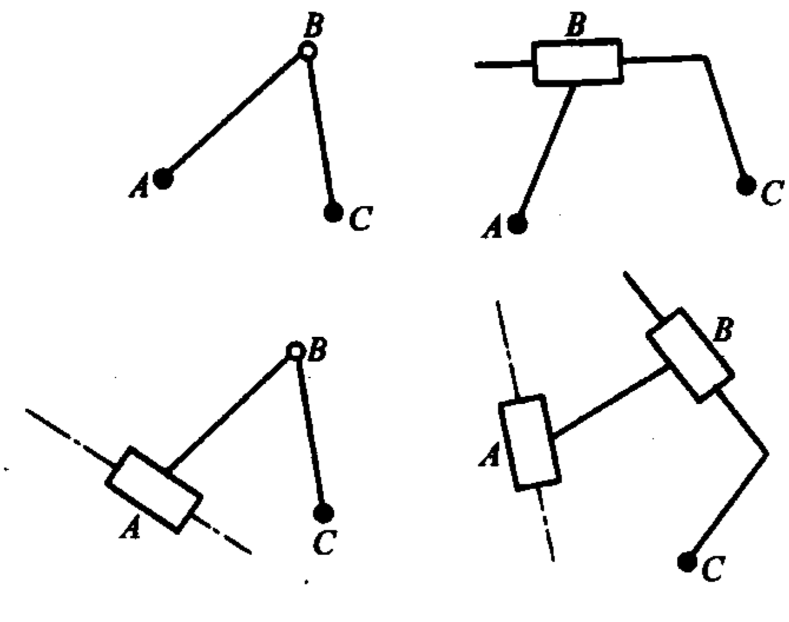


2、杆组的分类

杆组的构件数*n*与低副数*p*满足：

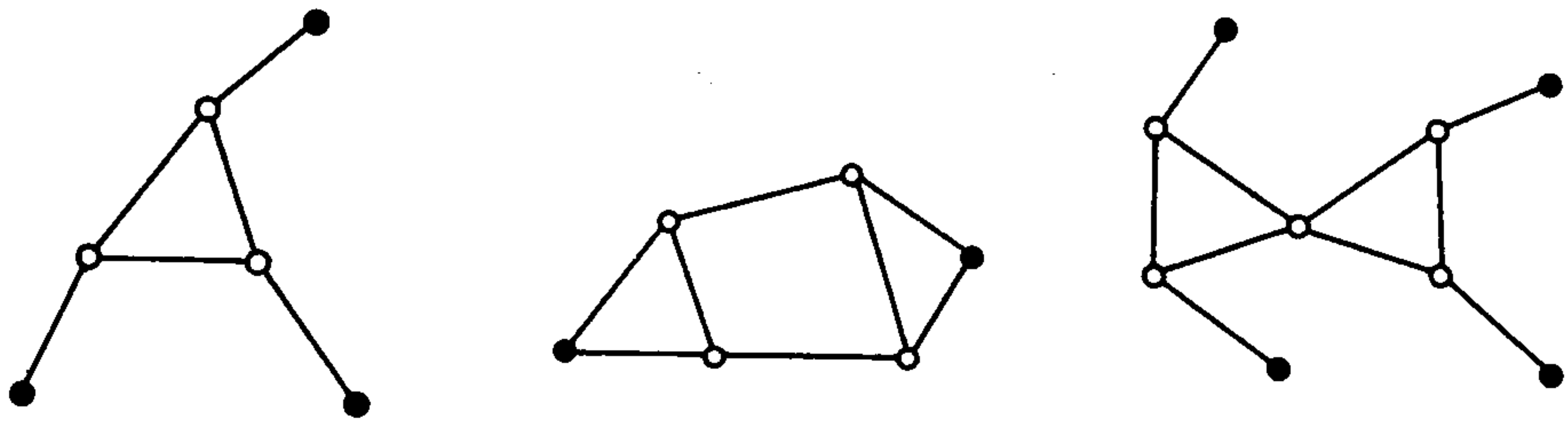
$$3n-2p=0$$

n	2	4	6	8	……
p	3	6	9	12	……



运动副A、C为杆组的外副，B为内副，外副若为转动副画为实心圆，三个运动副为移动副则失去杆组性质。

杆组按其包含的封闭形是几边形进行分级。



Ⅲ级杆组　　Ⅳ级杆组　　Ⅲ级杆组

$n=4$，$p=6$　　$n=6$，$p=9$

杆组运动确定性：外副若与运动已知的构件相联，则杆组中每一构件的运动都是确定的。

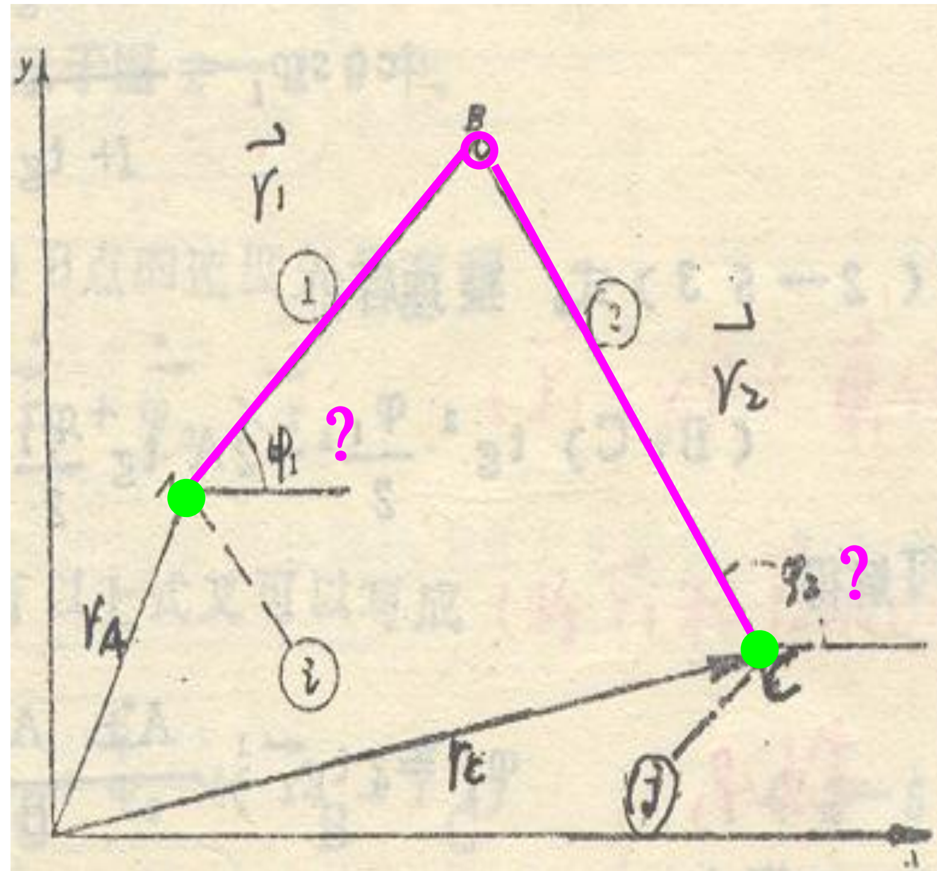
杆组静力确定性：如杆组上作用的外力系已知，则杆组的各运动副中的约束反力未知数可由杆组本身各构件的平衡方程式解出。

三、Ⅱ级机构的运动分析

平面连杆机构利用拆组分析的方法，可以分为Ⅱ级机构、Ⅲ级机构、Ⅳ级机构等。其中Ⅱ级机构有五种基本杆组：RRR、RRP、RPR、PRP、RPP。

1．RRRⅡ级组的分析

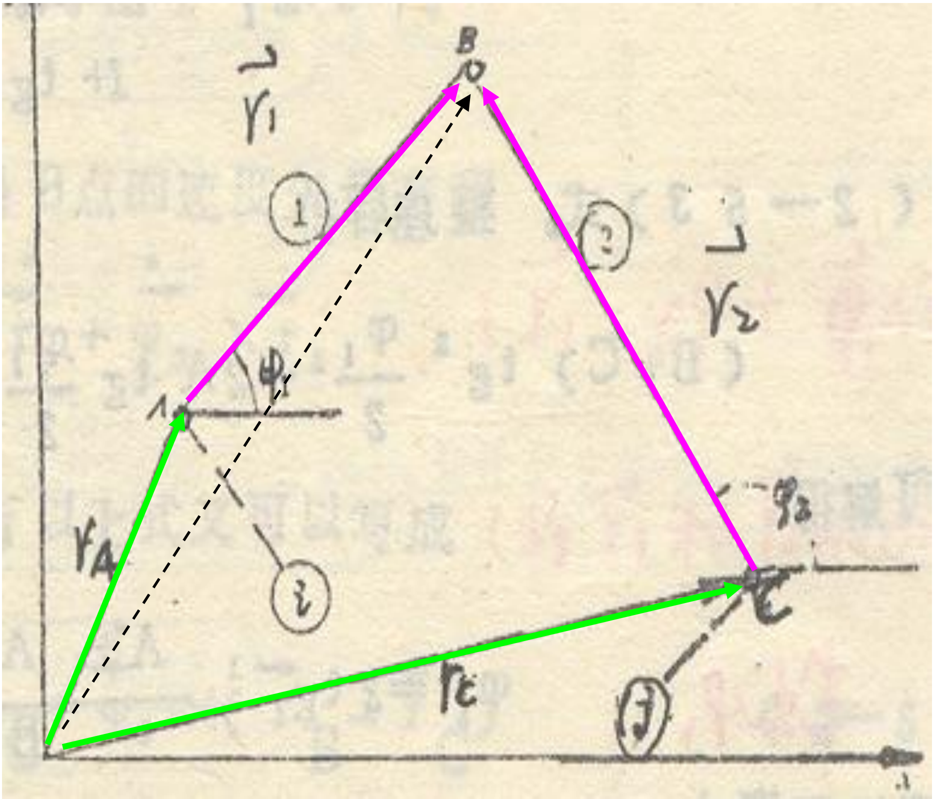
平面铰链四杆机构可以拆出如图所示的RRRⅡ级组，它是由三个转动副A、B、C和两个构件1、2组合而成。在研究机构运动时，往往把运动副看成一个点，运动副A、C即为外点，外点分别与其它杆组的构件i和j相连接，或其中之一与机架相铰接。



（1）位置分析

对构件 1、2 可用向量$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$表示。其长度r_1，r_2为已知，对该Ⅱ级组来说，只要 B 点确定以后，基本组的位置便可以全部确定。对 B 点写出独立位置方程：

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_1 = \vec{r}_C + \vec{r}_2 \quad (2\text{-}52)$$



其投影式为:

$$\left.\begin{aligned} x_B = x_A + r_1\cos\varphi_1 = x_C + r_2\cos\varphi_2 \\ y_B = y_A + r_1\sin\varphi_1 = y_C + r_2\sin\varphi_2 \end{aligned}\right\}$$

或写成

$$\left.\begin{aligned} r_2\cos\varphi_2 = r_1\cos\varphi_1 - \left(x_C - x_A\right) \\ r_2\sin\varphi_2 = r_1\sin\varphi_1 - \left(y_C - y_A\right) \end{aligned}\right\}$$

其中φ_1及φ_2分别为杆 1 及杆 2 的位置角，为了求解φ_1，可将上式中的两个方分别平方相加，然后整理改写成三角函数方程式:

$$A\sin\varphi_1 + B\cos\varphi_1 = C \tag{2-53}$$

式中

$$A = 2r_1(y_C - y_A)$$
$$B = 2r_1(x_C - x_A)$$
$$C = r_1^2 + (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 - r_2^2$$

由三角学知：

$$\sin\varphi_1 = \frac{2tg\frac{\varphi_1}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi_1}{2}} \qquad \cos\varphi_1 = \frac{1 - tg^2\frac{\varphi_1}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi_1}{2}}$$

代入（2-53）式。整理后得

$$(B + C)tg^2\frac{\varphi_1}{2} - 2Atg\frac{\varphi_1}{2} - (B - C) = 0$$

由此可解得

$$\varphi_1 == 2tg^{-1}\frac{A \pm A^2 + B^2 - C^2}{B + C} \qquad (2\text{-}54)$$

构件 2 的角位置φ_2，可以仿用上述方法，但为方便起见。

可先求出 B 点的坐标

$$x_B = x_A + r_1\cos\varphi_1$$

$$y_B = y_A + r_1\sin\varphi_1$$

则：

$$\varphi_2 = tg^{-1}\left(\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}\right) \qquad (2\text{-}55)$$

应该注意，转角φ_1和φ_2均选取自 x 轴逆时针量算为正。在计算φ_1和φ_2之前先要检查机构是否满足装配条件。

（2）速度分析

将式（2−52）对时间 t 求导，得 B 点的速度矢量方程

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\varphi}}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\varphi}}_2 \times \vec{r}_2$$

由于$\vec{r}_1 = \vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{r}_2 = \vec{r}_B - \vec{r}_C$所以上式又可以写成

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\varphi}}_1 \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{\varphi}}_2 \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_C\right) \qquad (2-58)$$

将式（2−58）分别投影在 x 和 y 轴上，整理后可写成

$$\left.\begin{aligned} -\left(y_B - y_A\right)\dot{\varphi}_1 + \left(y_B - y_C\right)\dot{\varphi}_2 = \dot{x}_C - \dot{x}_A \\ \left(x_B - x_A\right)\dot{\varphi}_1 - \left(x_B - x_C\right)\dot{\varphi}_2 = \dot{y}_C - \dot{y}_A \end{aligned}\right\} \qquad (2-59)$$

此式是建立在已知基本组处于任意位置及其外点速度的基础上的，它是$\dot{\varphi}_1$及$\dot{\varphi}_2$的线性方程组。用克莱姆法则解式（2−59），即得构件 1 和 2 的角速度：

$$\dot{\varphi}_1=\frac{(\dot{x}_C-\dot{x}_A)(x_B-x_C)+(\dot{y}_C-\dot{y}_A)(y_B-y_C)}{(y_B-y_C)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x_B-x_C)} \tag{2-60}$$

$$\dot{\varphi}_2=\frac{(\dot{x}_C-\dot{x}_A)(x_B-x_A)+(\dot{y}_C-\dot{y}_A)(y_B-y_A)}{(y_B-y_C)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x_B-x_C)} \tag{2-61}$$

B 点速度的 x，y 分量为

$$\begin{aligned}\dot{x}_B&=\dot{x}_A-\dot{\varphi}_1(y_B-y_A)\\ \dot{y}_B&=\dot{y}_A+\dot{\varphi}_1(x_B-x_A)\end{aligned} \tag{2-62}$$

（3）加速度分析

将（2-58）式对时间 t 求导，得内点 B 的加速度矢量方程式

$$
\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_B &= \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{\varphi}}_1 \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) + \dot{\vec{\varphi}}_1 \times \left[\dot{\vec{\varphi}}_1 \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)\right] \\
&= \ddot{\vec{r}}_C + \ddot{\vec{\varphi}}_2 \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_C\right) + \dot{\vec{\varphi}}_2 \times \left[\dot{\vec{\varphi}}_2 \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_C\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2-63}
$$

经投影后整理可得$\ddot{\varphi}_1$及$\ddot{\varphi}_2$的线性方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
-\left(y_B - y_A\right)\ddot{\varphi}_1 + \left(y_B - y_C\right)\ddot{\varphi}_2 = C_1 \\
\left(x_B - x_A\right)\ddot{\varphi}_1 + \left(x_B - x_C\right)\ddot{\varphi}_2 = C_2
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-64}
$$

式中

$$
C_1 = \ddot{x}_C - \ddot{x}_A + \left(x_B - x_A\right)\ddot{\varphi}_1^2 - \left(x_B - x_C\right)\ddot{\varphi}_2^2
$$

$$
C_2 = \ddot{y}_C - \ddot{y}_A + \left(y_B - y_A\right)\ddot{\varphi}_1^2 - \left(y_B - y_C\right)\ddot{\varphi}_2^2
$$

克莱姆法则解（2-64）式，得构件 1、2 的角加速度

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 &= \frac{C_1(x_B - x_C) + C_2(y_B - y_C)}{(y_B - y_C)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x_B - x)} \\
\ddot{\varphi}_2 &= \frac{C_2(x_B - x_A) + C_2(y_B - y_A)}{(y_B - y_C)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x_B - x_C)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}65)$$

由式（2-63）的投影式可求得点 B 的加速度分量

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_B &= \ddot{x}_A - (x_B - x_A)\dot{\varphi}_1^2 - (y_B - y_A)\ddot{\varphi}_2 \\
\ddot{y}_B &= \ddot{y}_A - (y_B - y_A)\dot{\varphi}_1^2 + (x_B - x_A)\ddot{\varphi}_2
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}66)$$

§2-5　其他方法简介

1、杆长逼近法

解决用直角坐标向量法分析基本杆组迭代次数多、费时的问题。

2、矢量单纯形法

平面机构简图都可以看作是封闭多边形，而多边形总可以分解成若干个单纯形–三角形，若对各种三角形编成子程序，就可适应各种平面机构的求解。

3、约束法

机构是由若干个点组成的点系，这些点受到一定的约束从而沿着一定的轨迹运动。可以将各类约束方程编成通用子程序调用。

4、单矢法

把机构简图分解成最小的单元—矢量，并将其编成子程序，对多干多环路机构很方便。