Fundamentals of Robotics

Jiangnan University

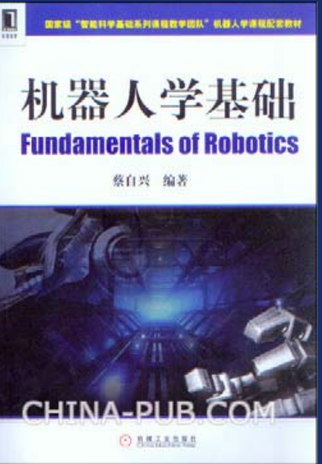
The School of Mechanical Engineering

The Department of Mechatronics (机电系)

Li Ting（李挺）

Li Ting's Research and Teaching Web： http://liting.51.net

TEL：13861838060 QQ：693667274



第三章

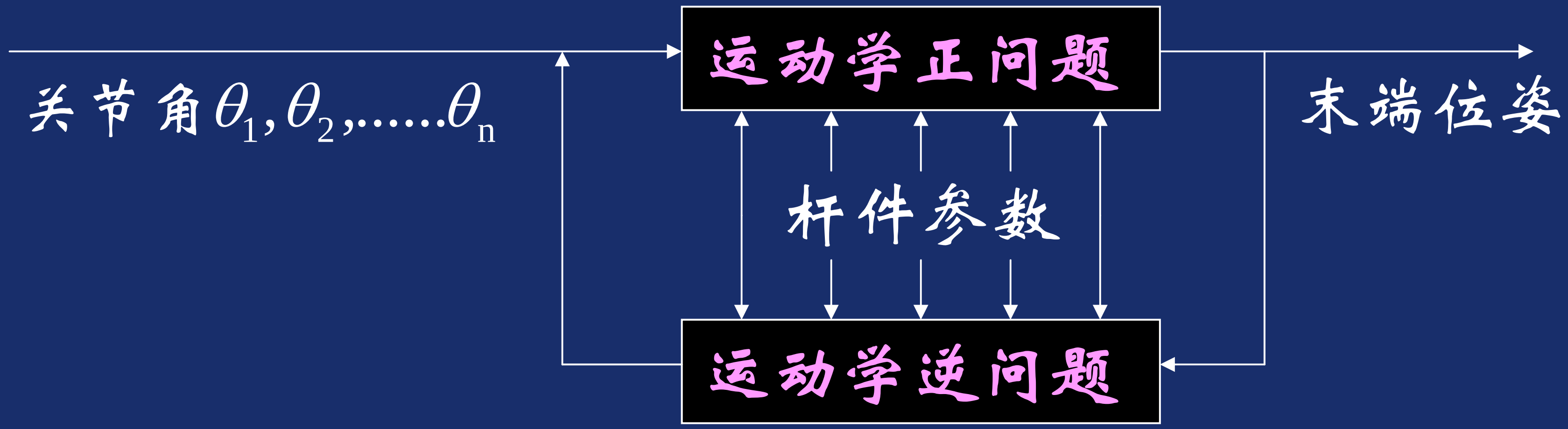
机器人运动学

(2010版本)

第三章 微分运动和速度

有一个构型已知的机器人，即它的所有连杆长度和关节角度都是已知的，那么计算机器人手的位姿就称为**正运动学分析**。

如果要将机器人的手放在一个期望的位姿，就必须知道机器人的每一个连杆的长度和关节的角度，才能将手定位在所期望的位姿，这就叫做**逆运动学分析**。



§3.1 机器人运动方程的表示

- A矩阵：一个描述连杆坐标系间相对平移和旋转的齐次变换。
- T矩阵：A矩阵的乘积。

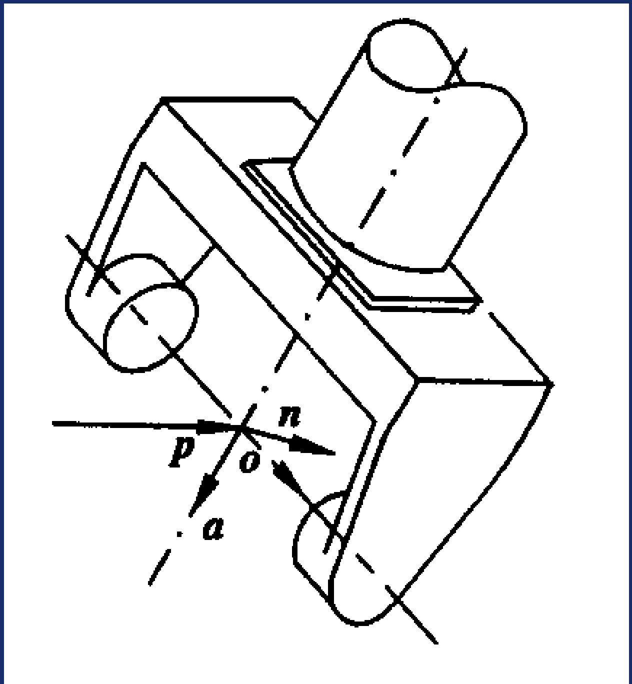
对于六连杆机械手，有下列T矩阵：

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \tag{3.1}$$

- 一个六连杆机械手可具有六个自由度，每个连杆含有一个自由度，并能在其运动范围内任意定位与定向。

§3.1 机器人运动方程的表示

§3.1.1 运动姿态和方向角



- 机械手的运动方向
  - 原点由矢量*p*表示。
  - 接近矢量*a*：*z*向矢量
  - 方向矢量*o*：*y*向矢量
  - 法线矢量*n*：它与矢量*o*和*a*一起构成一个右手矢量集合，并由矢量的交乘所规定：$n = o \times a$。

§3.1 机器人运动方程的表示

因此，变换T6具有下列元素。

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

六连杆机械手的T矩阵（T6）可由指定其16个元素的数值来决定。在这16个元素中，只有12个元素具有实际含义。

§ 3.1 机器人运动方程的表示

- 用旋转序列表示运动姿态
  - 机械手的运动姿态往往由一个绕轴 x，y 和 z 的旋转序列来规定。这种转角的序列，称为欧拉（Euler）角。
  - 欧拉角用一个绕 z 轴旋转 ϕ 角，再绕新的 y 轴旋转 θ 角，最后绕新 z 的轴旋转 ψ 角来描述任何可能的姿态，见图3.2。
  - 在任何旋转序列下，旋转次序是十分重要的。

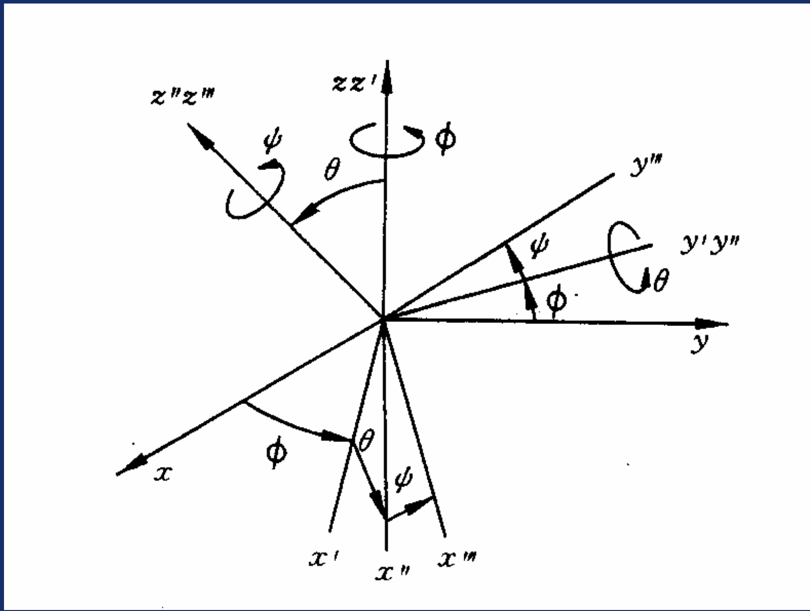
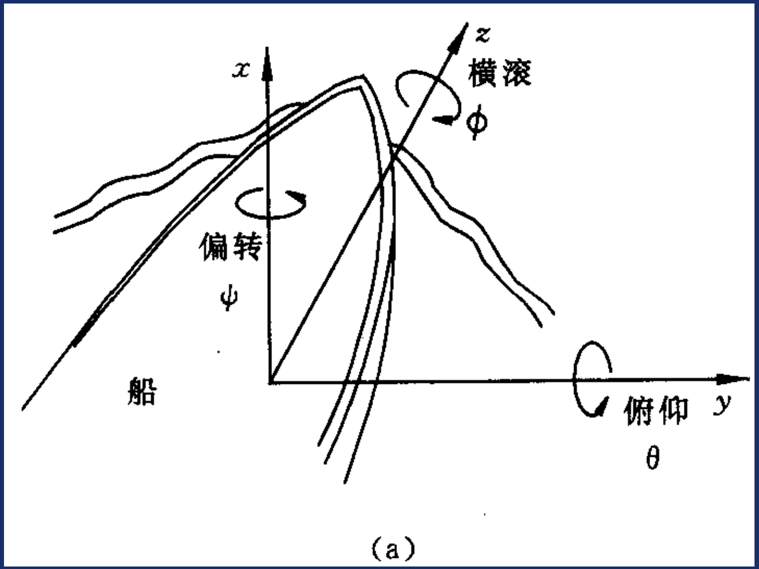


图3.2 欧拉角的定义

§3.1 机器人运动方程的表示

- 用横滚、俯仰和偏转角表示运动姿态

  另一种常用的旋转集合是横滚（roll）、俯仰（pitch）和偏转（yaw）。



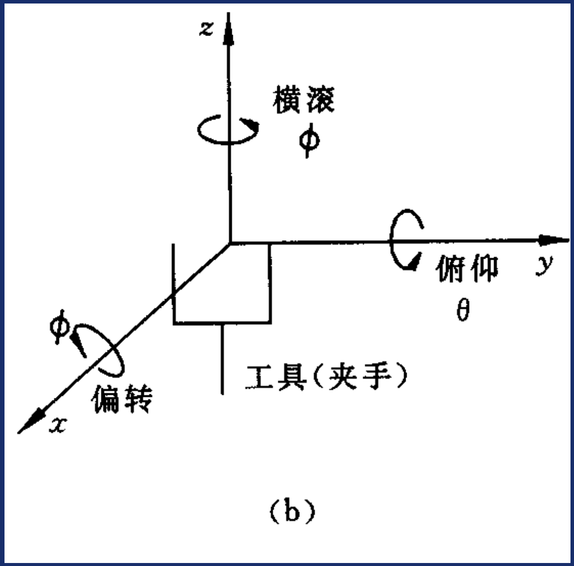


图3.3 用横滚、俯仰和偏转表示机械手运动姿态

§3.1 机器人运动方程的表示

对于旋转次序，规定：

$$RPY(\varphi,\theta,\psi)=Rot(z,\varphi)Rot(y,\theta)Rot(x,\psi)$$

式中，*RPY*表示横滚、俯仰和偏转三旋转的组合变换。也就是说，先绕 x 轴旋转角 ψ，再绕 y 轴旋转角 θ，最后绕 z 轴旋角 ϕ。

§3.1 机器人运动方程的表示

§3.1.2 运动位置和坐标

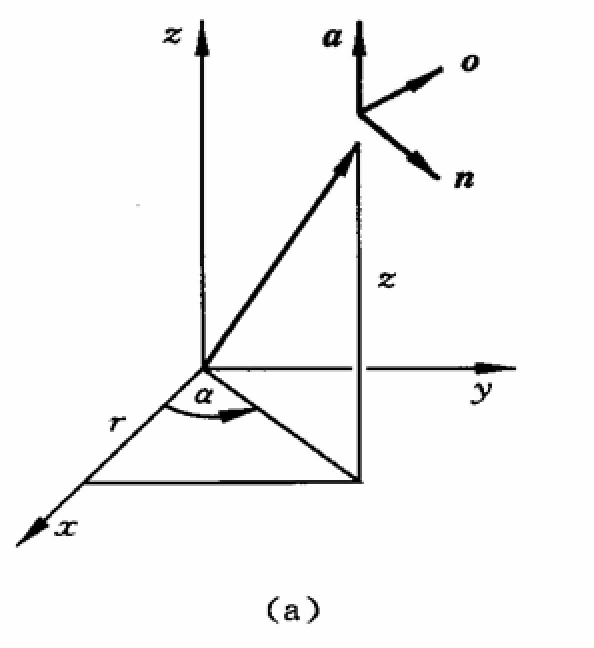
一旦机械手的运动姿态由某个姿态变换规定之后，它在基系中的位置就能够由左乘一个对应于矢量*p*的平移变换来确定：

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\text{某姿态变换}] \qquad (3.6)$$

§3.1 机器人运动方程的表示

- 用柱面坐标表示运动位置

 用柱面坐标来表示机械手手臂的位置，即表示其平移变换。如图3.4(a)所示，



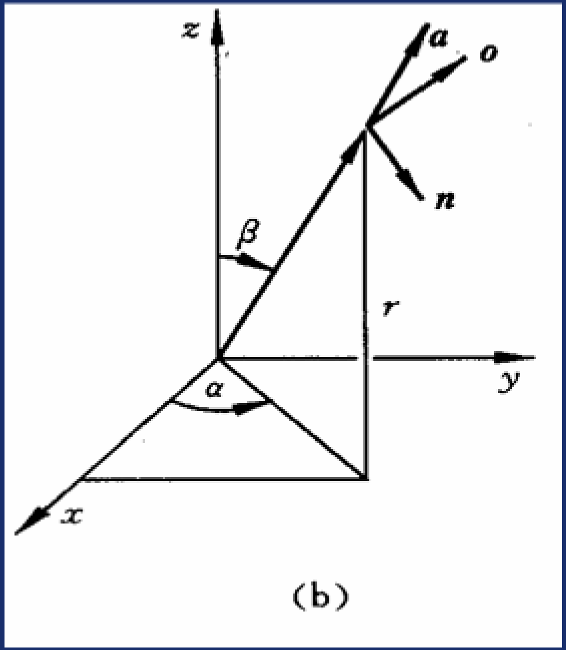


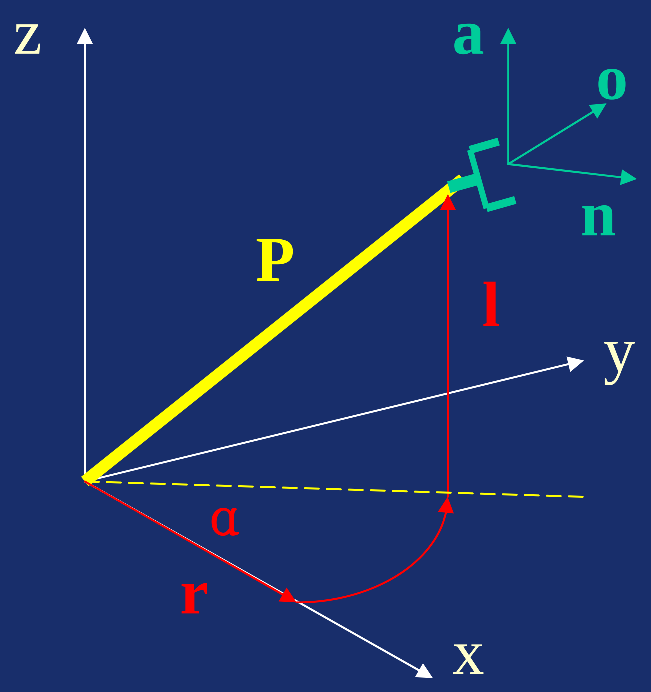
图3.4 用柱面坐标和球面坐标表示位置

§ 3.1 机器人运动方程的表示

$$^{R}T_{P}=T_{cyl}(r,\alpha,l)=Trans(0,0,l)Rot(z,\alpha)Trans(r,0,0)$$

$$^{R}T_{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&l\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\alpha&-S\alpha&0&0\\S\alpha&C\alpha&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&r\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$^{R}T_{P}=T_{cyl}=\begin{bmatrix}C\alpha&-S\alpha&0&rC\alpha\\S\alpha&C\alpha&0&rS\alpha\\0&0&1&l\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

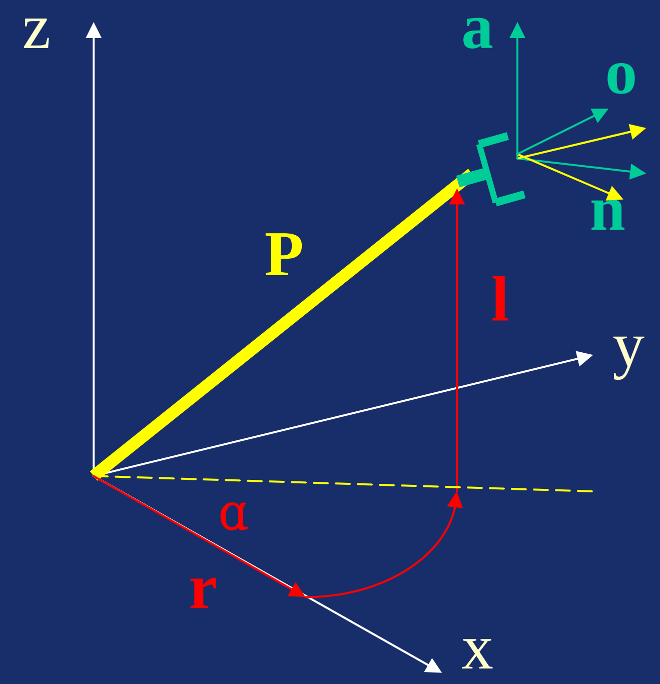


§ 3.1 机器人运动方程的表示

$$T_{cyl} \bullet Rot(z,-\alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(-\alpha) & -S(-\alpha) & 0 & 0 \\ S(-\alpha) & C(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



§3.1 机器人运动方程的表示

- 用球面坐标表示运动位置

用球面坐标表示手臂运动位置矢量的方法。这个方法对应于沿轴平移，再绕轴旋转角，最后绕轴旋转角，如图3.4(b)所示，即为：

$$Sph(\alpha,\beta,r)=Rot(z,\alpha)Rot(y,\beta)Trans(0,0,r)$$

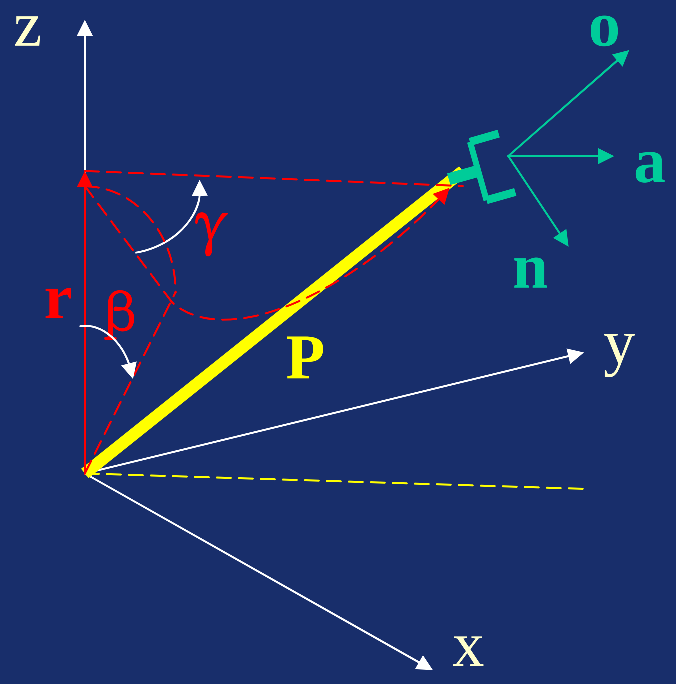
式中，*Sph* 表示球面坐标组合变换。

§ 3.1 机器人运动方程的表示

$$^{R}T_{P}=T_{sph}(r,\beta,\gamma)=Rot(z,\gamma)Rot(y,\beta)Trans(0,0,r)$$

$$=\begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{R}T_{P}=T_{sph}=\begin{bmatrix} C\beta\bullet C\gamma & -S\gamma & S\beta\bullet C\gamma & rS\beta\bullet C\gamma \\ C\beta\bullet S\gamma & C\gamma & S\beta\bullet S\gamma & rS\beta\bullet S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



§3.1 机器人运动方程的表示

§3.1.3 连杆变换矩阵及其乘积

- 广义连杆

  相邻坐标系间及其相应连杆可以用齐次变换矩阵来表示。要求出操作手所需要的变换矩阵，每个连杆都要用广义连杆来描述。在求得相应的广义变换矩阵之后，可对其加以修正，以适合每个具体的连杆。

§3.1 机器人运动方程的表示

机器人机械手是由一系列连接在一起的连杆（杆件）构成的。需要用两个参数来描述一个连杆，即公共法线距离a_i和垂直于a_i所在平面内两轴的夹角α_i；需要另外两个参数来表示相邻两杆的关系，即两连杆的相对位置d_i和两连杆法线的夹角θ_i，如图3.5所示。

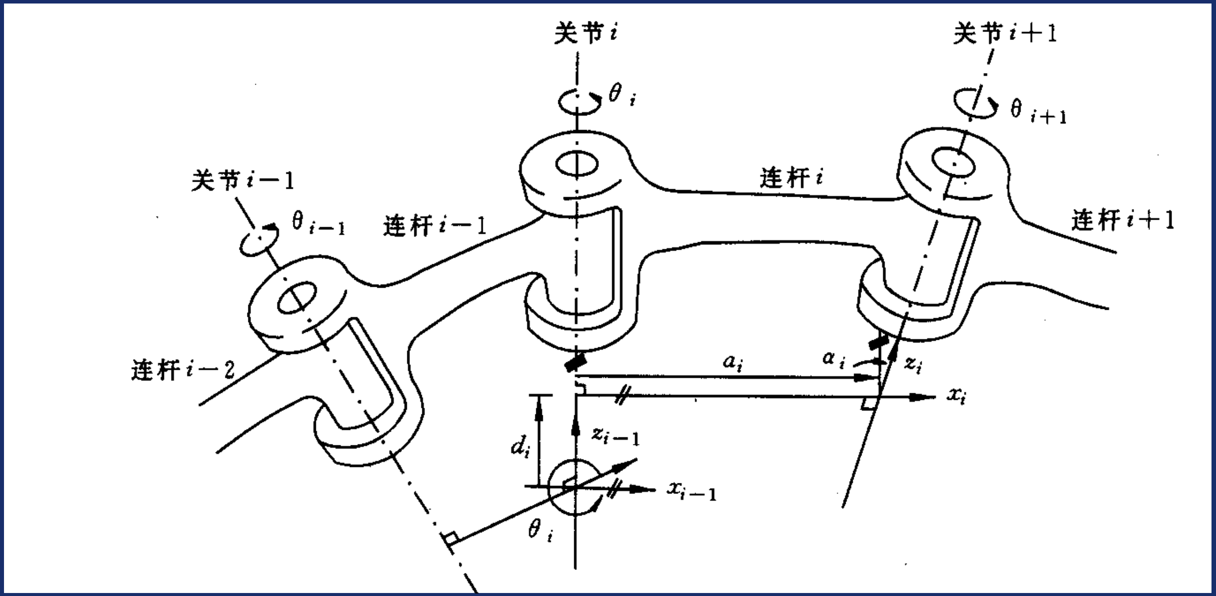


图3.5 转动关节连杆四参数示意图

机器人机械手上坐标系的配置取决于机械手连杆连接的类型。有两种连接——转动关节和棱柱联轴节。现在来考虑棱柱联轴节（平动关节）的情况。图3.6示出其特征参数θ, d和α。

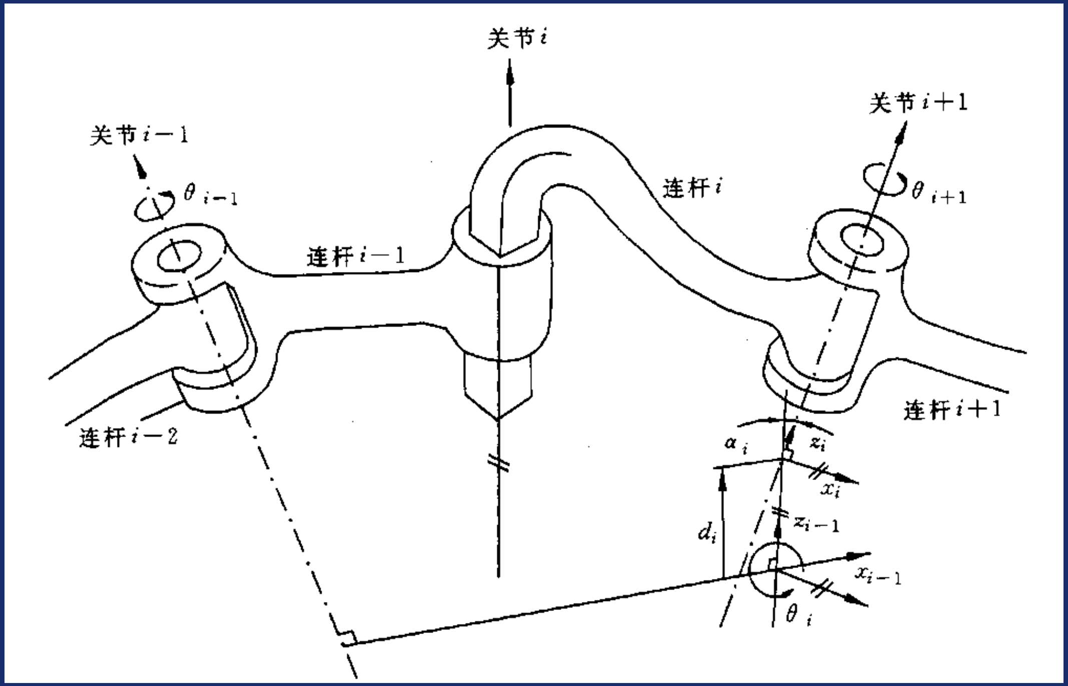


图3.6 棱柱关节的连杆的参数示意图

§3.1 机器人运动方程的表示

- 广义变换矩阵

按照下列顺序建立相邻两连杆$i-1$与i之间的相对关系。

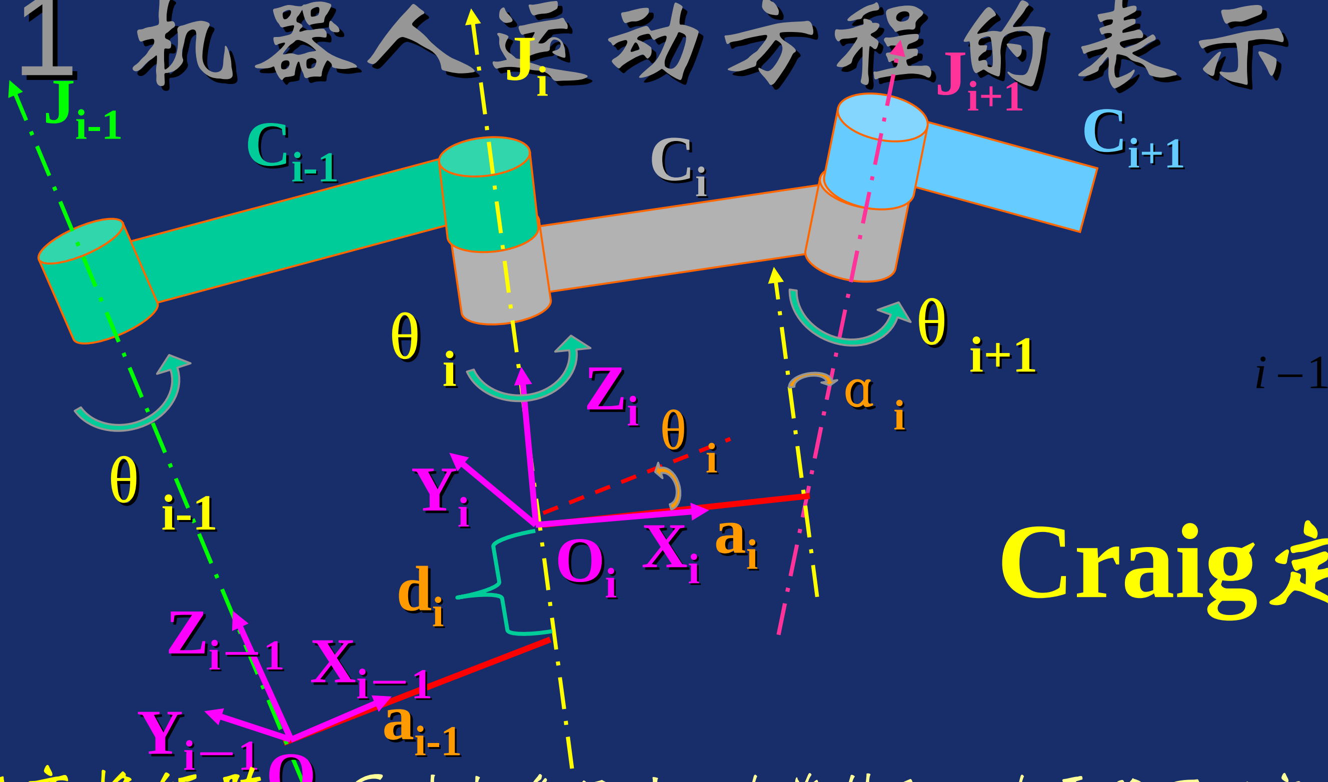
(1) 绕z_{i-1}轴旋转θ_i角，使x_{i-1}轴转到与x_i同一平面内。

(2) 沿z_{i-1}轴平移一距离d_i，把x_{i-1}移到与x_i同一直线上。

(3) 沿i轴平移一距离a_{i-1}，把连杆$i-1$的坐标系移到使其原点与连杆n的坐标系原点重合的地方。

(4) 绕x_{i-1}轴旋转α_{i-1}角，使z_{i-1}转到与z_i同一直线上。

§3.1 机器人运动方程的表示



$i-1$

Craig定义法

- 连杆变换矩阵：C_{i-1}坐标系经过两次旋转和两次平移可以变换到C_i坐标系
  - ✓ 第一次：沿X_{i-1}轴平移a_{i-1}，将O_{i-1}移动到O'_{i-1}。
  - ✓ 第二次：以X_{i-1}轴为转轴，旋转α_{i-1}角度，使新的$Z_{i-1}(Z'_{i-1})$轴与Z_i轴同向。
  - ✓ 第三次：沿Z_i轴平移d_i，使新的O'_{i-1}移动到O_i。
  - ✓ 第四次：以Z_i轴为转轴，旋转θ_i角度，使新的X_{i-1} (X'_{i-1})轴与X_i轴同向。

至此，坐标系$O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$与坐标系$O_iX_iY_iZ_i$已经完全重合。这种关系可以用连杆$C_{i-1}$到连杆$C_i$的4个齐次变换来描述。总的变换矩阵(D-H矩阵)为：

$$A_i = \mathrm{Trans}(a_{i-1},0,0)\mathrm{Rot}(x_{i-1},\alpha_{i-1})\mathrm{Trans}(0,0,d_i)\mathrm{Rot}(z_i,\theta_i)$$

§ 3.1 机器人运动方程的表示

$$A_i = \mathrm{Trans}(a_{i-1},0,0)\mathrm{Rot}(x_{i-1},\alpha_{i-1})\mathrm{Trans}(0,0,d_i)\mathrm{Rot}(z_i,\theta_i)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 3.1 机器人运动方程的表示

- 用A矩阵表示T矩阵

机械手的末端装置即为连杆6的坐标系，它与连杆 $i-1$ 坐标系的关系可由 ${}^{i-1}T_6$ 表示为：

$$ {}^{i-1}T_6 = A_i A_{i+1} \cdots A_6 \qquad (3.15) $$

可得连杆变换通式为：

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & \alpha_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.16) $$

§3.1 机器人运动方程的表示

如果机械手与参考坐标系的相对关系是由变换Z来表示的，而且机械手与其端部工具的关系由变换E表示，那么此工具端部对参考坐标系的位置和方向可由变换X表示如下：

可求得：
$$X = ZT_6E$$

$$T_6 = Z^{-1}XE^{-1} \qquad (3.17)$$

§3.2.1 欧拉变换解

- 基本隐式方程的解

令

$$Euler(\phi,\theta,\psi)=T \tag{3.23}$$

由式(3.4)和(3.23)得到：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + s\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

得到9个隐式方程，如下：

$$n_x = c\varphi c\theta c\psi - s\varphi s\psi$$

$$n_y = s\varphi c\theta c\psi + c\varphi s\psi$$

$$n_z = -s\theta c\psi$$

$$o_x = -c\varphi c\theta s\psi - s\varphi c\psi$$

$$o_y = -s\varphi c\theta s\psi + c\varphi c\psi$$

$$o_z = s\theta s\psi$$

$$a_x = c\varphi s\theta$$

$$a_y = s\varphi s\theta$$

$$a_z = c\theta$$

§3.2 机械手运动方程的求解

- 用双变量反正切函数确定角度

在求解时，总是采用双变量反正切函数atan2来确定角度。atan2提供二个自变量，即纵坐标和横坐标，见图3.8。当 $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$，由atan2反求角度时，同时检查$y$和$x$的符号来确定其所在象限。这一函数也能检验什么时候$x$或$y$为0，并反求出正确的角度。atan2的精确程度对其整个定义域都是一样的。

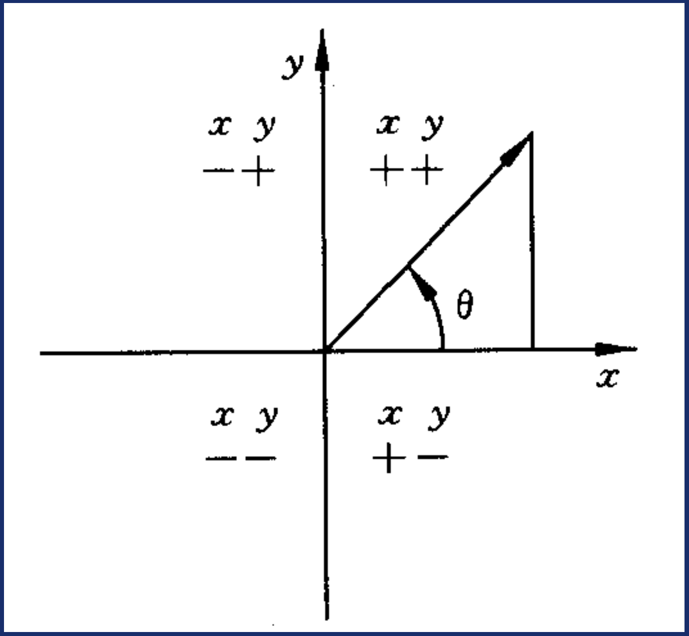


图3.8 反正切函数atan2

- 用显式方程求各角度

 要求得方程式的解，采用另一种通常能够导致显式解答的方法。用未知逆变换依次左乘已知方程，对于欧拉变换有：

$$Rot(z,\phi)^{-1}T = Rot(y,\theta)Rot(z,\psi) \tag{3.37}$$

$$Rot(y,\theta)^{-1}Rot(z,\phi)^{-1}T = Rot(z,\psi) \tag{3.38}$$

式(3.37)的左式为已知变换的函数，而右式各元素或者为0，或者为常数。

§3.2 机械手运动方程的求解

求解方程，整理之后确定其等价欧拉角：

$$
\begin{aligned}
&\phi = \operatorname{atan2}(a_y, a_x), \quad \phi = \phi + 180^\circ \\
&\theta = \operatorname{atan2}(c\phi a_x + s\phi a_y, a_z) \\
&\psi = \operatorname{atan2}(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y)
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

如果已知一个表示任意旋转的齐次变换，那么就能够确定其等价欧拉角。

- 直接从显式方程来求解用滚动、俯仰和偏转表示的变换方程。
- RPY变换各角如下：

$$
\begin{aligned}
\phi &= \operatorname{atan2}(n_y, n_x) \\
\phi &= \phi + 180^\circ \\
\theta &= \operatorname{atan2}(-n_z, c\phi n_x + s\phi n_y) \\
\psi &= \operatorname{atan2}(s\phi a_x - c\phi a_y, -s\phi o_x + c\phi o_y)
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

§3.2 机械手运动方程的求解

- 把求解滚、仰和偏变换方程的技术用于球面坐标表示的运动方程。
- 球面变换的解为：

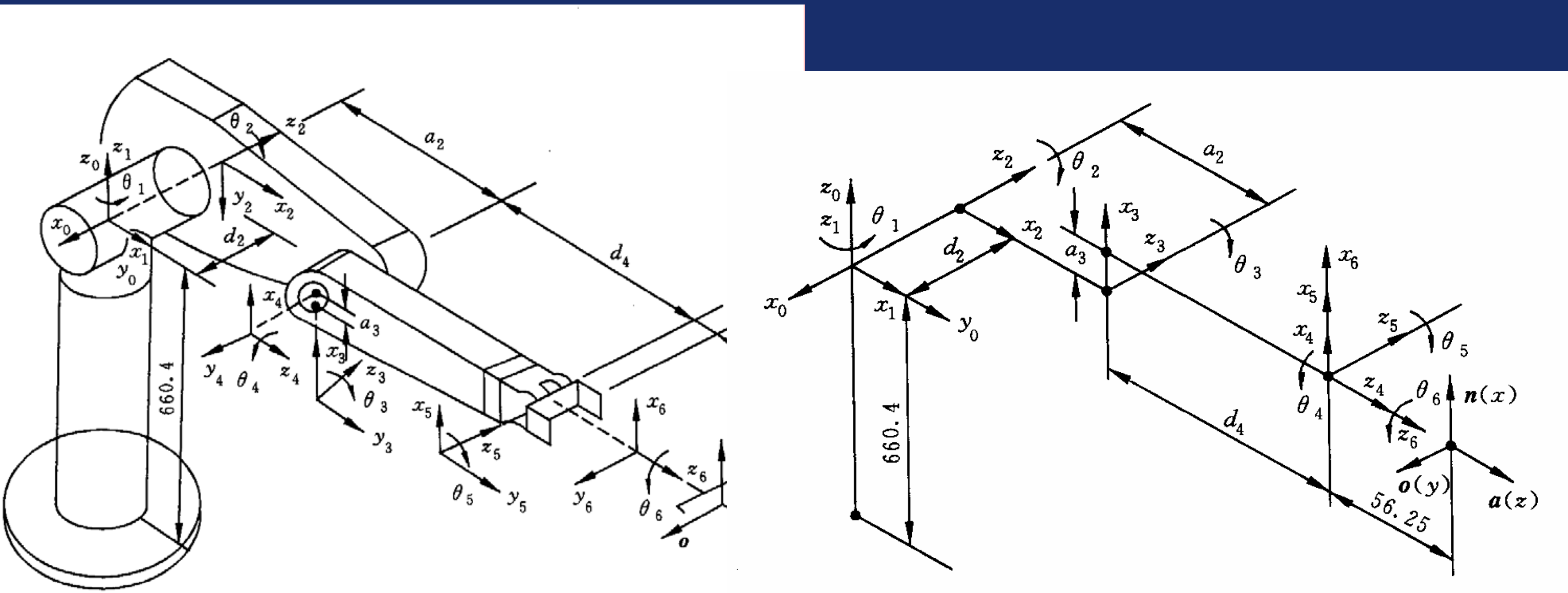
$$
\begin{aligned}
&\alpha = \operatorname{atan2}(p_y, p_x), \alpha = \alpha + 180^\circ \\
&\beta = \operatorname{atan2}(c\alpha p_x + s\alpha p_y, p_z) \\
&r = s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z
\end{aligned}
\qquad (3.58)
$$

§3.3 PUMA560机器人运动方程

§3.3.1 PUMA560运动分析

- PUMA 560是属于关节式机器人，6个关节都是转动关节。前3个关节确定手腕参考点的位置，后3个关节确定手腕的方位。
- 各连杆坐标系如图3.9所示。相应的连杆参数列于表3.1。

§3.3 PUMA560机器人运动方程



(*a*) 结构图　　　　(*b*) 坐标图

图3.9 PUMA 560机器人的连杆坐标系

§3.3 PUMA560机器人运动方程

表3.1 PUMA 560机器人的连杆参数

连杆 i	变量 θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	变量范围
1	$\theta_1(90°)$	0°	0	0	−160°～160°
2	$\theta_2(0°)$	−90°	0	d_2	−225°～45°
3	$\theta_3(-90°)$	0°	a_2	0	−45°～225°
4	$\theta_4(0°)$	−90°	a_3	d_4	−110°～170°
5	$\theta_5(0°)$	90°	0	0	−100°～100°
6	$\theta_6(0°)$	−90°	0	0	−266°～266°

§3.3 PUMA560机器人运动方程

- 据式(3.16)和表3.1所示连杆参数，可求得各连杆变换矩阵如下：

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{3}T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}T_{5}=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{5}T_{6}=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- 各连杆变换矩阵相乘，得PUMA 560的机械手变换矩阵：

$$
{}^{0}T_{6}={}^{0}T_{1}(\theta_1){}^{1}T_{2}(\theta_2){}^{2}T_{3}(\theta_3){}^{3}T_{4}(\theta_4){}^{4}T_{5}(\theta_5){}^{5}T_{6}(\theta_6) \qquad (3.59)
$$

即 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$ 为关节变量的函数。

§3.3 PUMA560机器人运动方程

于是，可求得机械手的变换矩阵：

$$n_x = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6);$$

$$n_y = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6);$$

$$n_z = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6;$$

$$o_x = c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6);$$

$$o_y = s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5c_6);$$

$$o_z = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6;$$

$$a_x = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5;$$

$$a_y = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5;$$

$$a_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5;$$

$$p_x = c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_2s_1;$$

$$p_y = s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_2c_1;$$

$$p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}。$$

$$ {}^0T_6 = {}^0T_1\,{}^1T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; $$

为了校验所得${}^0T_6$的正确性，计算$\theta_1 = 90°$，$\theta_2 = 0°$，$\theta_3 = -90°$，$\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0°$时手臂变换矩阵${}^0_6T$的值。

$$
{}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 + d_4 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};
$$

§3.3 PUMA560机器人运动方程

将PUMA 560的运动方程（3.64）写为：

$$
{}^{0}T_{6}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}={}^{0}T_{1}(\theta_{1})\,{}^{1}T_{2}(\theta_{2})\,{}^{2}T_{3}(\theta_{3})\,{}^{3}T_{4}(\theta_{4})\,{}^{4}T_{5}(\theta_{5})\,{}^{5}T_{6}(\theta_{6}) \qquad (3.65)
$$

若末端连杆的位姿已经给定，即**n,o,a**和**p**为已知，则求关节变量 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$ 的值称为运动反解。

§ 3.3 PUMA560机器人运动方程

1. 求取 θ 1

$$^0T_1^{-1}\,{}^0T_6 = {}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6$$

$$A_1^{-1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{111} & t_{112} & t_{113} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ t_{121} & t_{122} & t_{123} & \boxed{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y} \\ t_{131} & t_{132} & t_{133} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2A_3A_4A_5A_6 = \begin{bmatrix} m_{111} & m_{112} & m_{113} & a_2c\theta_2 + a_3c(\theta_2+\theta_3) - d_4s(\theta_2+\theta_3) \\ m_{121} & m_{122} & m_{123} & \boxed{d_2} \\ m_{131} & m_{132} & m_{133} & -a_2s\theta_2 - a_3s(\theta_2+\theta_3) - d_4c(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\boxed{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y = d_2}$$

令$p_x = \rho c\phi,\quad p_y = \rho s\phi,\quad \rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2},\quad \phi = \operatorname{a\,tan2}(p_y, p_x)$

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_2}{\rho},\quad \cos(\phi - \theta_1) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho}\right)^2}$$

$$\phi - \theta_1 = \operatorname{a\,tan2}\left(\frac{d_2}{\rho},\ \pm\sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho}\right)^2}\right),$$

θ_1有2组解

$$\theta_1 = \operatorname{a\,tan2}(p_y, p_x) - \operatorname{a\,tan2}\left(\frac{d_2}{\rho},\ \pm\sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho}\right)^2}\right)$$

$$= \operatorname{a\,tan2}(p_y, p_x) - \operatorname{a\,tan2}\left(d_2,\ \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}\right)$$

2. 求取θ$_3$

$$\begin{cases} c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = a_2 c\theta_2 + a_3 c(\theta_2+\theta_3) - d_4 s(\theta_2+\theta_3) \\ p_z = -a_2 s\theta_2 - a_3 s(\theta_2+\theta_3) - d_4 c(\theta_2+\theta_3) \\ -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y = d_2 \end{cases}$$

对上式取平方和，有：

$$-s\theta_3 d_4 + c\theta_3 a_3 = k$$

$$k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_2^2 - d_4^2}{2a_2}$$

$$\theta_3 = \mathrm{a}\tan 2(a_3, d_4) - \mathrm{a}\tan 2(k, \ \pm\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2})$$

θ_3有2组解

3. 求取θ2

$$ {}^{2}T_{3}^{-1}\,{}^{1}T_{2}^{-1}\,{}^{0}T_{1}^{-1}\,{}^{0}T_{6}={}^{3}T_{4}\,{}^{4}T_{5}\,{}^{5}T_{6} $$

$$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}T=\begin{bmatrix} c\theta_1c(\theta_2+\theta_3) & s\theta_1c(\theta_2+\theta_3) & -s(\theta_2+\theta_3) & -a_2c\theta_3 \\ -c\theta_1s(\theta_2+\theta_3) & -s\theta_1s(\theta_2+\theta_3) & -c(\theta_2+\theta_3) & a_2s\theta_3 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t_{311} & t_{312} & \boxed{c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)a_x+s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)a_y-s(\theta_2+\theta_3)a_z} & \boxed{\begin{matrix} c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)p_x+s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)p_y-s(\theta_2+\theta_3)p_z-a_2c\theta_3 \\ -c\theta_1s(\theta_2+\theta_3)p_x-s\theta_1s(\theta_2+\theta_3)p_y-c(\theta_2+\theta_3)p_z+a_2s\theta_3 \end{matrix}} \\ t_{321} & t_{322} & -c\theta_1s(\theta_2+\theta_3)a_x-s\theta_1s(\theta_2+\theta_3)a_y-c(\theta_2+\theta_3)a_z & \\ t_{331} & t_{332} & \boxed{-s\theta_1a_x+c\theta_1a_y} & -s\theta_1p_x+c\theta_1p_y-d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4A_5A_6=\begin{bmatrix} m_{111} & m_{112} & \boxed{-c\theta_4s\theta_5} & \boxed{\begin{matrix} a_3 \\ d_4 \end{matrix}} \\ m_{121} & m_{122} & c\theta_5 & \\ m_{131} & m_{132} & \boxed{s\theta_4s\theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)p_x+s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)p_y-s(\theta_2+\theta_3)p_z-a_2c\theta_3=a_3 \\ -c\theta_1s(\theta_2+\theta_3)p_x-s\theta_1s(\theta_2+\theta_3)p_y-c(\theta_2+\theta_3)p_z+a_2s\theta_3=d_4 \end{cases}$$

§3.3 PUMA560机器人运动方程

$$\begin{cases} s(\theta_2+\theta_3)=\dfrac{(-a_3-a_2c\theta_3)p_z+(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)(a_2s\theta_3-d_4)}{{p_z}^2+(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)^2} \\ c(\theta_2+\theta_3)=\dfrac{(-d_4-a_2s\theta_3)p_z-(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)(-a_2c\theta_3-a_3)}{{p_z}^2+(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)^2} \end{cases}$$

$$\theta_2+\theta_3=a\tan 2((-a_3-a_2c\theta_3)p_z+(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)(a_2s\theta_3-d_4),(-d_4-a_2s\theta_3)p_z-(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)(-a_2c\theta_3-a_3))$$

$$\theta_2=a\tan 2((-a_3-a_2c\theta_3)p_z+(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)(a_2s\theta_3-d_4),(-d_4-a_2s\theta_3)p_z-(c\theta_1p_x+s\theta_1p_y)(-a_2c\theta_3-a_3))-\theta_3$$

由于θ_1和 θ_3各有两组解，所以θ_2有4组解

4. 求取θ 4

$${}^2T_3^{-1}\,{}^1T_2^{-1}\,{}^0T_1^{-1}\,{}^0T_6={}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6$$

$$\begin{cases} c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)a_x+s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)a_y-s(\theta_2+\theta_3)a_z=-c\theta_4s\theta_5 \\ -s\theta_1a_x+c\theta_1a_y=s\theta_4s\theta_5 \end{cases}$$

当$s\theta_5\neq 0$时，

$$\begin{cases} \theta_{41}=a\tan 2(-s\theta_1a_x+c\theta_1a_y,\ \ -c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)a_x-s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)a_y+s(\theta_2+\theta_3)a_z) \\ \theta_{42}=\theta_{41}+\pi \end{cases}$$

θ_4有2组解

§3.3 PUMA560机器人运动方程

5. 求取 θ $_5$

$${}^3T_4^{-1}\,{}^2T_3^{-1}\,{}^1T_2^{-1}\,{}^0T_1^{-1}\,{}^0T_6={}^4T_5\,{}^5T_6$$

$$A_5A_6=\begin{bmatrix} c\theta_5c\theta_6 & -c\theta_5s\theta_6 & \boxed{-s\theta_5} & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_5s\theta_6 & -s\theta_5c\theta_6 & \boxed{c\theta_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} [c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)c\theta_4+s\theta_1s\theta_4]a_x+[s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)c\theta_4-c\theta_1s\theta_4]a_y-s(\theta_2+\theta_3)c\theta_4a_z=-s\theta_5 \\ -c\theta_1s(\theta_2+\theta_3)a_x-s\theta_1s(\theta_2+\theta_3)a_y-c(\theta_2+\theta_3)a_z=c\theta_5 \end{cases}$$

$$\theta_5=a\tan 2(s\theta_5,\ c\theta_5)$$

6. 求取 θ $_6$

$${}^4T_5^{-1}\,{}^3T_4^{-1}\,{}^2T_3^{-1}\,{}^1T_2^{-1}\,{}^0T_1^{-1}\,{}^0T_6={}^5T_6$$

$$A_6=\begin{bmatrix} \boxed{c\theta_6} & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-s\theta_6} & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -[c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)s\theta_4-s\theta_1c\theta_4]n_x-[s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)s\theta_4+c\theta_1c\theta_4]n_y+s(\theta_2+\theta_3)s\theta_4n_z=s\theta_6 \\ \{[c\theta_1c(\theta_2+\theta_3)c\theta_4+s\theta_1s\theta_4]c\theta_5-c\theta_1s(\theta_2+\theta_3)s\theta_5\}n_x+\{[s\theta_1c(\theta_2+\theta_3)c\theta_4-c\theta_1s\theta_4]c\theta_5 \\ -s\theta_1s(\theta_2+\theta_3)s\theta_5\}n_y-[s(\theta_2+\theta_3)c\theta_4c\theta_5+c(\theta_2+\theta_3)s\theta_5]n_z=c\theta_6 \end{cases}$$

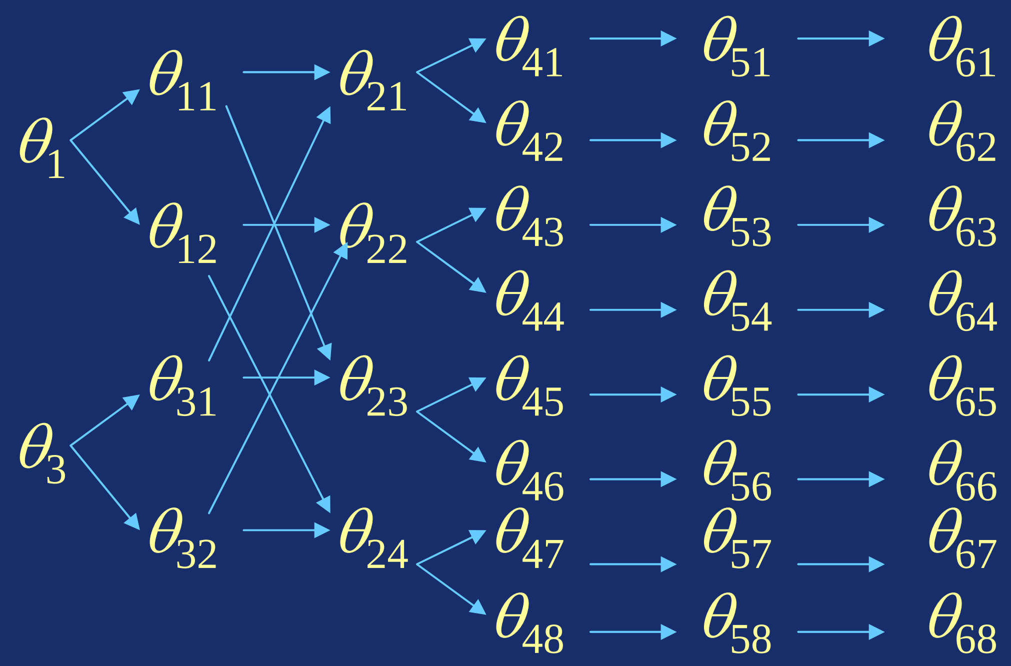
$$\theta_6=a\tan 2(s\theta_6,\ c\theta_6)$$

PUMA560机器人的逆向运动学共有8组解

- 求取步骤

$$\theta_1、\theta_3 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_4 \rightarrow \theta_5 \rightarrow \theta_6$$

- 解的取值



§3.4 小结

- 机器人运动方程的表示
  - 用变换矩阵表示机械手的运动方向
  - 用转角（即欧拉角）变换序列表示运动姿态
  - 用横滚、俯仰和偏转角表示运动姿态
- 机器人运动方程的求解
  - 欧拉变换解
  - 滚-仰-偏变换解
  - 球面变换解
- PUMA560机器人运动方程的表示和求解

第三章结束，

谢谢！