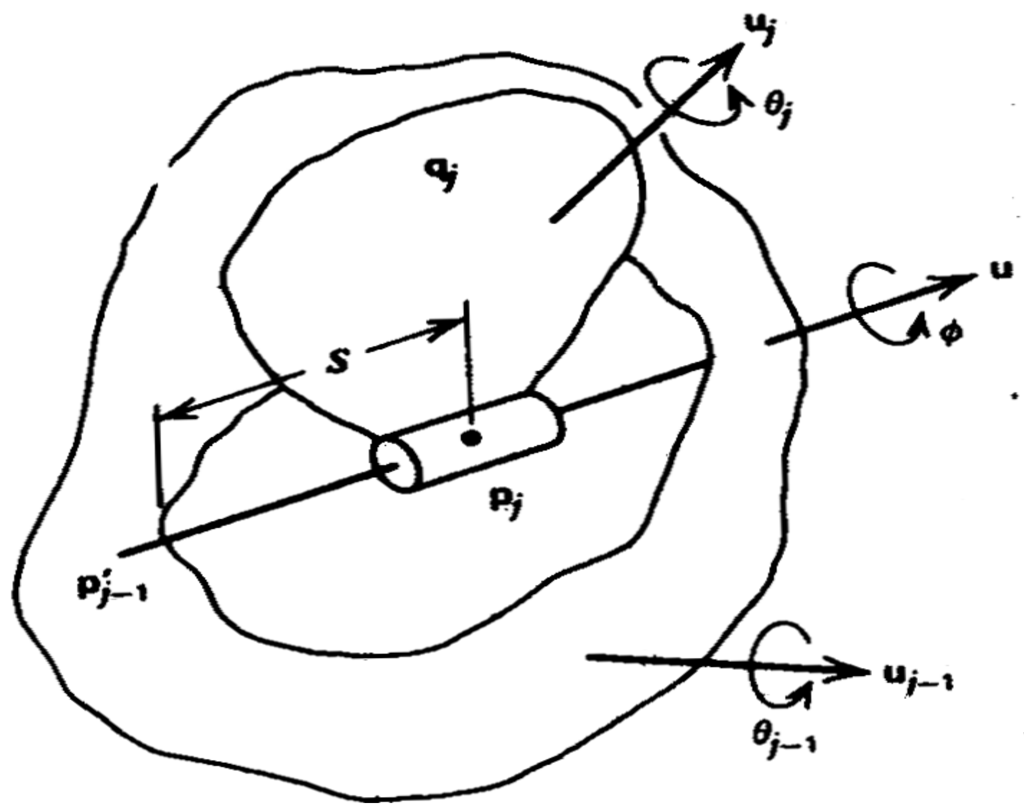
第四章　空间机构的运动分析

§ 4—1 空间相对运动

有两个既独立又相连接的刚体在运动副的限制和约束下作相对运动，为了描述刚体上某点的绝对运动。由图表示法，设运动链中j相对于前一个构件j-1而运动。

假设相对运动的轴线 $\vec{u}$ 上的参考点 $\vec{P}'_{j-1}$ 又随构件j-1一起运动。

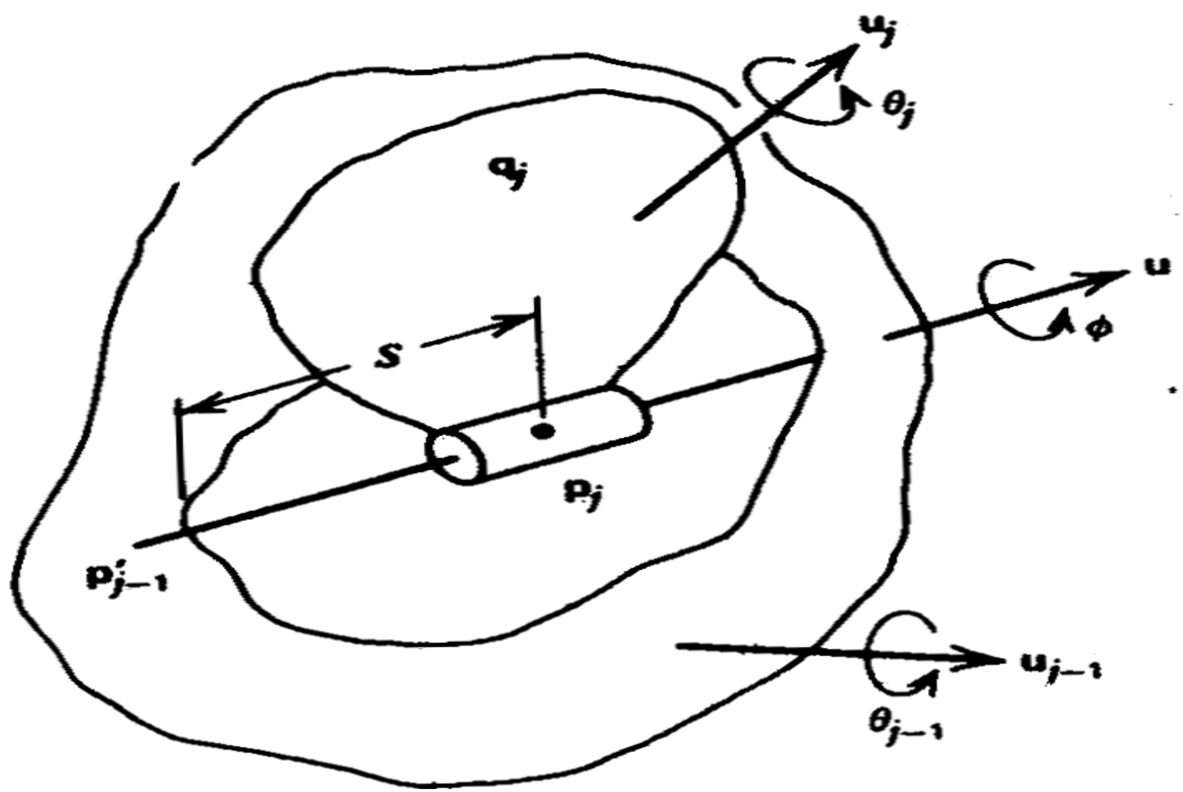
构件j-1的有限旋转轴为 $\vec{u}_{j-1}$，绝对角位移为 θ_{j-1}，j的绝对角位移 θ_j，其有限旋转轴为 $\vec{u}_j$



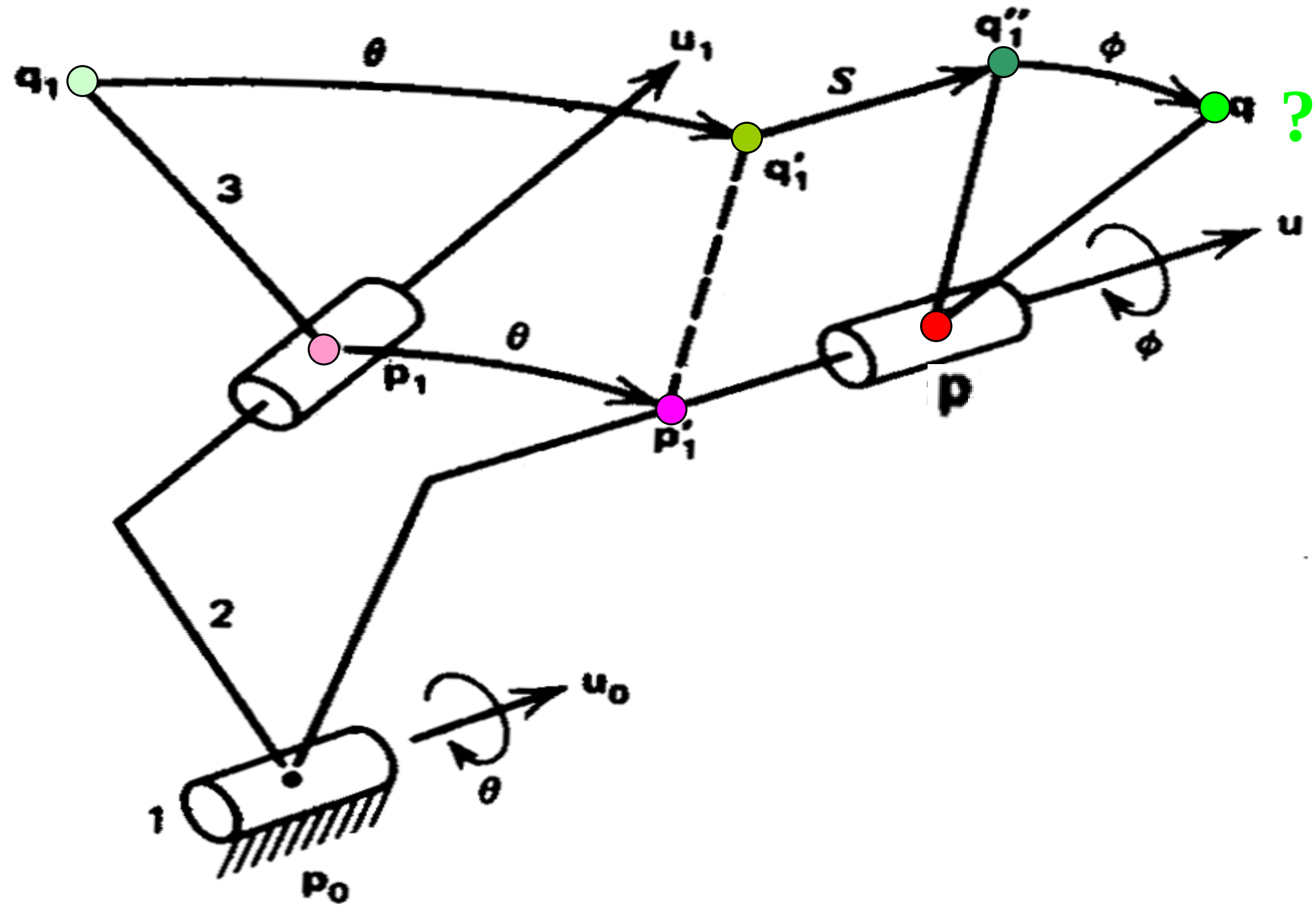
一、相对位移

构件j在某点 $\vec{q}_j$ 的绝对位移，如图可描述为j-1起初与 $\vec{q}_j$ 相重合的一点 $\vec{q}'_{j-1}$ 的位移加上 $\vec{q}_j$ 相对于构件j-1的相对位移，这个相对位移可用旋转矩阵和螺旋矩阵来描述。

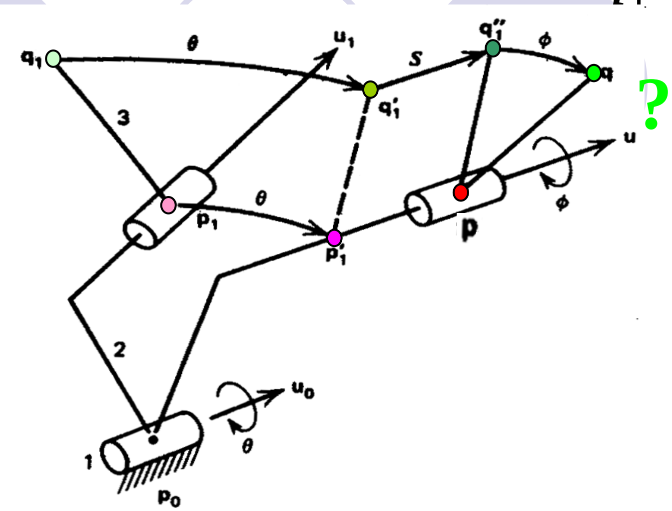
$\vec{q}'_{j-1}$ 的运动为构件j-1的绝对运动所确定，而j-1本身又可以对运动链中的构件j-2有相对运动。



考虑如图两杆组合体，构件2与机架组成转动副绕轴线 $\vec{u}_0$ 转动。构件3与构件2组成圆柱副，相对于构件2既能绕轴 $\vec{u}_1$ 转动又能沿轴线 $\vec{u}_1$ 移动。构件2绕固定轴线 $\vec{u}_0$ 转过θ角，构件3相对于2转过φ角并移过距离s，要求构件3上的一个点 $\vec{q}_1$（q点的原位置）的新位置 $\vec{q}$？



首先求构件3上的点$\vec{q}_1$随构件2绕固定轴线转动θ角到达的位置 $\vec{q}_1'$



$$\left(\vec{q}_1' - \vec{P}_0\right) = \left[R_{\theta,\ \vec{u}_0}\right]\left(\vec{q}_1 - \vec{P}_0\right)$$

即： $\left(\vec{q}_1'\right) = \left[R_{\theta,\vec{u}_0}\right]\left(\vec{q}_1 - \vec{P}_0\right) + \vec{P}_0$ **(4—1)**

同时构件3上的 $\vec{p}_1$ 点也随构件2绕固定轴转动到 $\vec{p}_1'$ 位置

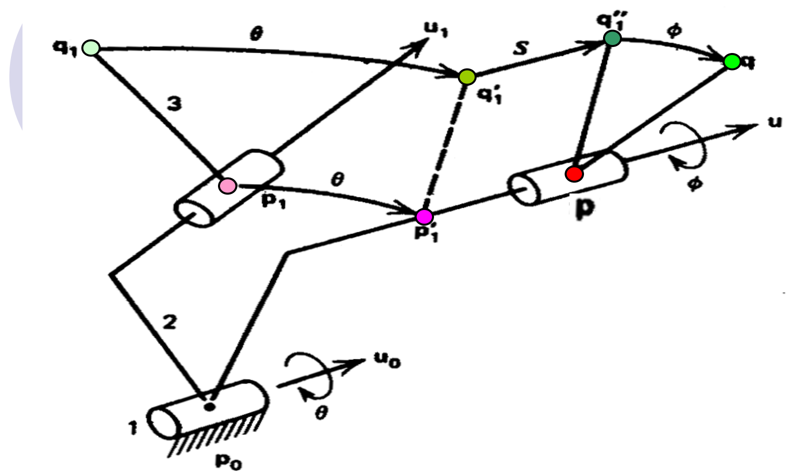
$$\left(\vec{P}_1'\right) = \left[R_{\theta,\vec{u}_0}\right]\left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\right) + \vec{P}_0 \qquad \textbf{(4—2)}$$

再求出构件3相对于构件2的相对运动，分三步计算:

1、求出相对旋转轴 $\vec{u}$ 的位置，设相对旋转轴初始位置为$\vec{u}_1$

则 ： $\left(\vec{u}\right) = \left[R_{\theta,\ \vec{u}_0}\right]\left(\vec{u}_1\right)$ **(4—3)**

2、决定杆3相对于2有相对位移后 $\vec{q}_1'$和$\vec{P}_1'$ 到达的新位置 $\vec{q}_1''$，$\vec{P}$



$$(\vec{q}_1'') = (\vec{q}_1') + s(\vec{u})$$

$$(\vec{P}) = (\vec{P}_1') + s(\vec{u}) \qquad \textbf{(4—4)}$$

3、杆3相对于杆2绕相对转动轴线 $\vec{u}$ 转过 ϕ 角，$\vec{q}_1''$的位置

即 $\vec{q}$ 的最终位置：

$$(\vec{q} - \vec{P}) = [R_{\phi\,,\,\vec{u}}](\vec{q}_1'' - \vec{P}) \qquad \textbf{(4—5)}$$

最后得：

$$(\vec{q}) = [R_{\phi\,,\,\vec{u}}](\vec{q}_1' + s\vec{u} - \vec{P}_1' - s\vec{u}) + \vec{P}_1' + s\vec{u}$$

$$= [R_{\phi\,,\,\vec{u}}](\vec{q}_1' - \vec{P}_1') + \vec{P}_1' + s\vec{u}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \vec{q} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[R_{\phi,\vec{u}}\right] & \overbrace{\vec{p}_1' + s\vec{u}}^{\vec{P}} - \left[R_{\phi,\vec{u}}\right]\vec{p}_1' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_1' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4－6)}$$

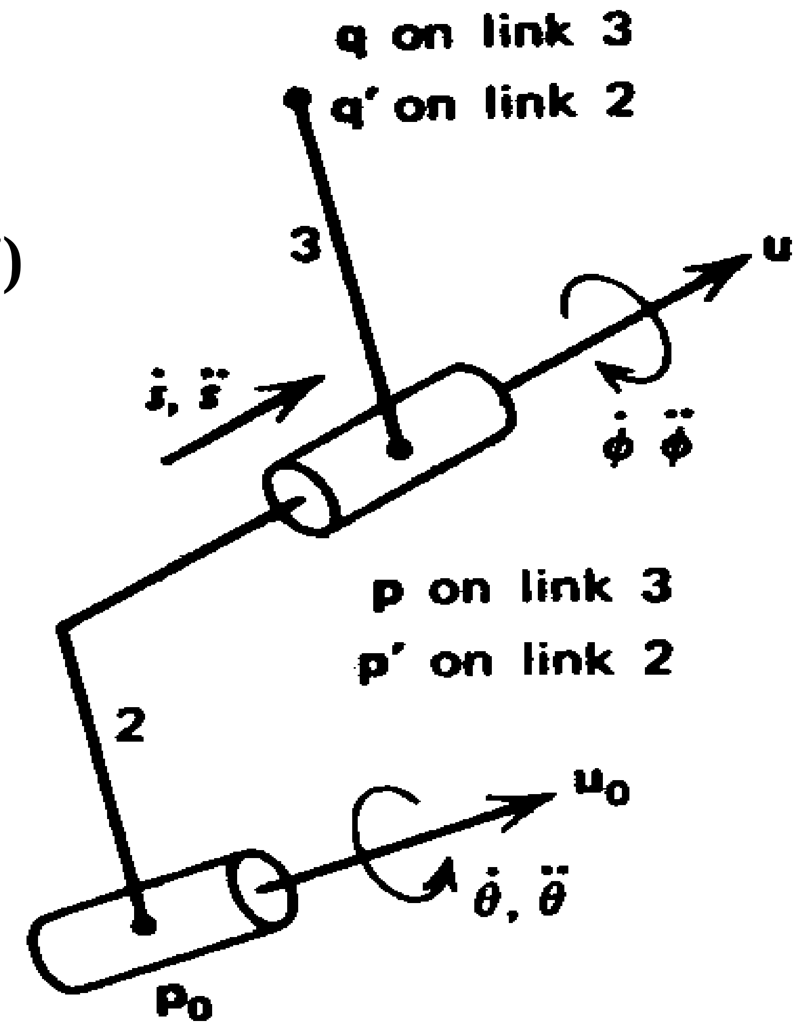
方程（**4—6**）的形式即为螺旋矩阵方程的形式，但要注意 $\vec{p}_1', \vec{q}_1'$ 必须通过 $\left[R_{\theta}, {}_{\vec{u}_0}\right]$, $\vec{p}_1, \vec{q}_1$和p_0 利用式（**4—1**）、**(4－2)**来计算。

二、仍讨论上图图示的情况，要求杆3上 $\vec{q}$ 点的速度

首先求出参考构件2上与构件3上q点相重合的 $\vec{q}'$ 点的速度。由图所示，若选 $\vec{p}_0$ 点为参考点，由式速度矩阵

$(\dot{\vec{q}}-\dot{\vec{p}})=[W](\vec{q}-\vec{p})$ ★ 则：

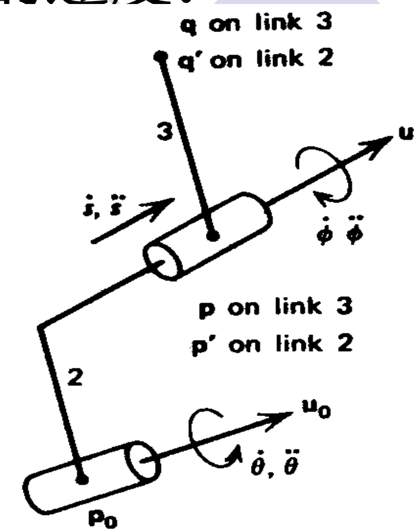
$$(\dot{\vec{q}}'-\dot{\vec{p}}_0)=\left[W_{\dot{\theta},\vec{u}_0}\right](\vec{q}-\vec{p}_0) \quad (4-7)$$



前面讲过矩阵中各元素可由下式写出：

$$[W]=\dot{\phi}\begin{bmatrix}0 & -u_z & u_y\\ u_z & 0 & -u_x\\ -u_y & u_x & 0\end{bmatrix}=\dot{\phi}[p_{\vec{u}}]$$

同时求出构件2上与构件3上 $\vec{p}$ 点相重合的 $\vec{p}'$ 点的速度：



$$\left(\dot{\vec{p}}' - \dot{\vec{p}}_0\right) = \left[W_{\dot{\theta},\vec{u}_0}\right]\left(\vec{p} - \vec{p}_0\right) \qquad \textbf{(4—8)}$$

构件3上的p点相对于构件2上的 $\vec{p}'$ 的相对速度：

$$\left(\dot{\vec{p}}_r\right) = \dot{s}\vec{u}$$

构件3上的q点相对于杆2的相对速度，也可用式★写出：

$$\left(\dot{\vec{q}}_r - \dot{\vec{p}}_r\right) = \left[W_{\phi,\vec{u}}\right]\left(\vec{q} - \vec{p}\right) \qquad \textbf{(4—9)}$$

$$\dot{\vec{q}}_r = \left[W_{\phi,\vec{u}_0}\right]\left(\vec{q} - \vec{p}\right) + \dot{s}\vec{u}$$

$\vec{u}$ 为相对旋转轴，$\dot{\phi}$相对角速度，$\vec{q}$点的绝对速度等于参考构件上与 $\vec{q}$ 瞬时重合的$\vec{q}'$ 点的速度（牵连速度）与 $\vec{q}$ 点相对于参考构件的相对速度之和，即：

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}' + \dot{\vec{q}}_r \qquad (4-10)$$

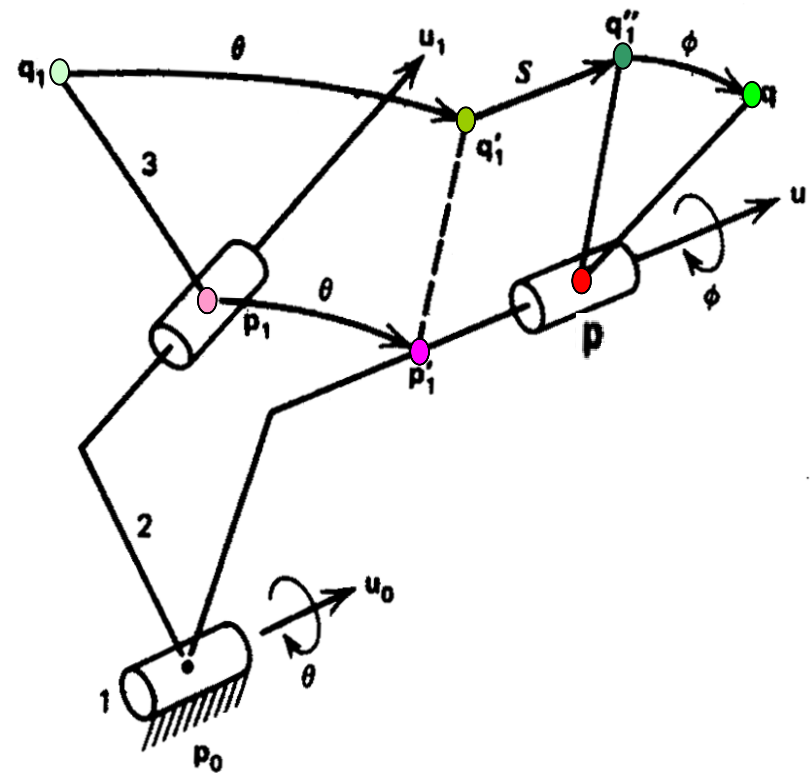
于是构件3上 $\vec{q}$ 点的绝对速度为：

$$(\dot{\vec{q}}) = \left\lfloor W_{\dot{\theta},\vec{u}_0} \right\rfloor (\vec{q} - p_0) + \dot{\vec{p}}_0 + \left\lfloor W_{\dot{\phi},\vec{u}} \right\rfloor (\vec{q} - \vec{p}) + \dot{s}(\vec{u}) \qquad (4-11)$$

若u_0为定轴，构件1是机架则 $\dot{\vec{p}}_0 = 0$

三、相对加速度

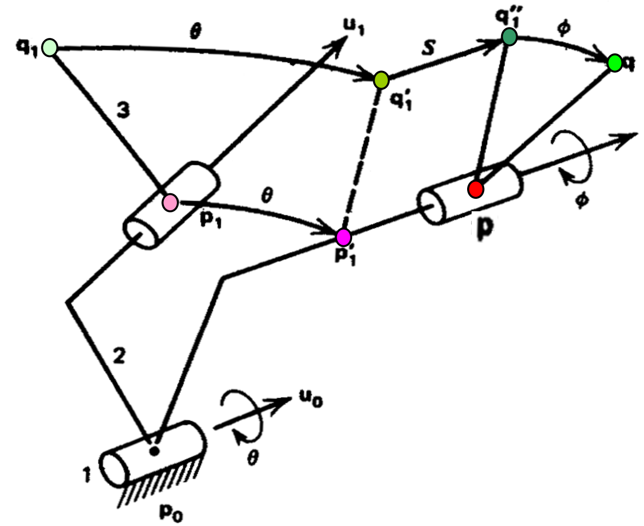
如图 要求杆3上q点的 $\ddot{\vec{q}}$



由理论理学q加速度等于参考构件上与q点瞬时重合的q’点的加速度(牵连加速度)与q点相对于参考构件的相对加速度，以及由于参考构件旋转而产生的哥氏加速度之和），即：

$$\ddot{\vec{q}} = \ddot{\vec{q}}' + \ddot{\vec{q}}_r + \ddot{\vec{q}}_k \qquad \textbf{(4—12)}$$

$$\left(\ddot{\vec{q}}' - \ddot{\vec{p}}_0\right) = [E]\left(\vec{q} - \vec{p}_0\right)$$



若构件1为机架 $\ddot{\vec{p}}_0 = 0$

$$\left(\ddot{\vec{q}}'\right) = \left\lfloor E_{\dot{\theta},\ddot{\theta},\vec{u}_0}\right\rfloor\left[\vec{q} - \vec{p}_0\right] \qquad \textbf{(4—13)}$$

只要注意转轴为 $\vec{u}_0$，角速度 $\dot{\theta}$ ，角加速度 $\ddot{\theta}$

同样可得： $\ddot{\vec{q}}_r = \left\lfloor E_{\dot{\phi},\ddot{\phi},\vec{u}}\right\rfloor\left(\vec{q} - \vec{p}\right) + \ddot{s}(\vec{u}) \qquad \textbf{(4—14)}$

$$\ddot{\vec{q}}_k = 2\dot{\vec{\theta}} \times \dot{\vec{q}}_r \qquad \textbf{(4—15)}$$

角速度矢量 $\dot{\vec{\theta}}$ 若用反对称矩阵表示，即为角速度矩阵 $\left\lfloor W_{\dot{\theta},\vec{u}_0}\right\rfloor$

又由4—9可得：

$$\dot{\vec{q}}_r = \left\lfloor W_{\dot{\phi},\vec{u}}\right\rfloor\left(\vec{q} - \vec{p}\right) + \dot{\vec{p}}_r = \left\lfloor W_{\dot{\phi},\vec{u}}\right\rfloor\left(\vec{q} - \vec{p}\right) + \dot{s}(\vec{u})$$

又由（4—15）可写成如下形式：

$$\ddot{\vec{q}}_k = 2[W_{\dot{\theta},\vec{u}_0}]([W_{\dot{\phi},\vec{u}}](\vec{q}-\vec{p})+\dot{s}(\vec{u})) \qquad \textbf{(4—16)}$$

将（4—13）、（4—14）及（4—16）代入式（4—12）即得

$\vec{q}$ 点的绝对加速度为：

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{q}} = {} & [E_{\dot{\theta},\ddot{\theta},\vec{u}_0}](\vec{q}-\vec{p}_0)+[E_{\dot{\phi},\ddot{\phi},\vec{u}}](\vec{q}-\vec{p}) \\ & + \ddot{s}(\vec{u}) + 2[W_{\dot{\theta},\vec{u}_0}]\dot{s}(\vec{u}) + 2[W_{\dot{\theta},\vec{u}_0}][W_{\dot{\phi},\vec{u}}](\vec{q}-\vec{p})\end{aligned}$$

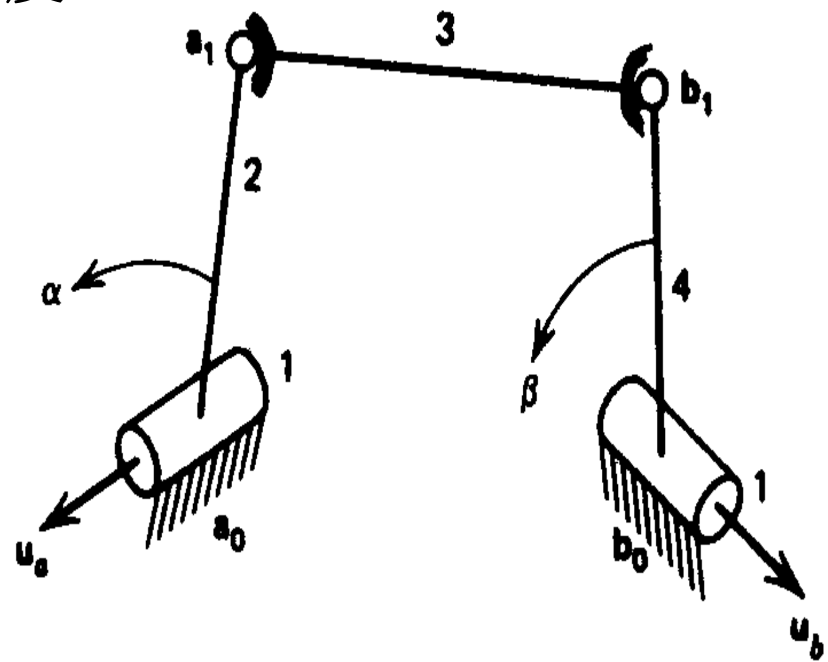
(4—17)

§ 4—2 按封闭形法作空间机构的运动分析

一、RSSR机构的运动分析

如图所示的RSSR机构，构件1为机架，构件2为主动件，构件3为连杆，且连杆有局部自由度。构件尺寸以及输入构件2的角位置α，角速度和角加速度为已知，

要求构件4的角位置*β*，角速度和角速度？



1、位移分析

位移约束方程是连杆3等长条件：

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^T\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\right)^T\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\right)$$

(4—18)

$\vec{a}$可根据给定的输入角α由下式得：

$$\left(\vec{a}\right)=\left\lfloor R_{\alpha}\ ,\ _{\vec{u}_a}\right\rfloor\left(\vec{a}_1-\vec{a}_0\right)+\left(\vec{a}_0\right) \qquad (4—19)$$

同理： $$\left(\vec{b}\right)=\left[R_{\beta,\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)+\left(\vec{b}_0\right) \qquad (4-20)$$

a_1，b_1是初始状态时两球副中心位置，为已知值，将(4-19)、(4-20)代入(4-18)，且旋转矩阵：

$$\left[R_{\beta,\vec{u}_b}\right]=-\left[p_u\right]\left[p_u\right]\cos\beta+[p_u]\sin\beta+[Q_u]$$

经整理得： $$E\cos\beta+F\sin\beta+G=0 \qquad (4-21)$$

$$E=\left(\vec{a}-\vec{b}_0\right)^T\left[I-Q_{\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)$$

$$F=\left(\vec{a}-\vec{b}_0\right)^T\left[p_{\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)$$

$$G=\left(\vec{a}-\vec{b}_0\right)^T\left[Q_{u_{\vec{b}}}\right]\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\right)^T\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}_0\right)^T\left(\vec{a}-\vec{b}_0\right)-\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)^T\left(b_1-\vec{b}_0\right)\right]$$

解三角方程（4—21）得两个可能值：

$$\left.\begin{aligned}\beta' &= 2arctg\left(\frac{-F+\sqrt{E^2+F^2-G^2}}{G-E}\right)\\ \beta'' &= 2arctg\left(\frac{-F-\sqrt{E^2+F^2-G^2}}{G-E}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4-22)$$

上式表明对于含有2个球面副的空间四杆机构，给定一个主动件位置，从动件有两个可能位置，即机构存在两个可能的封闭图形。需按照运动连续性选择。

求出β值后，由式（4—20）即可求出 $\vec{b}$

2、速度分析

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^T\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\right)^T\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\right)$$

对式（4—18）微分得速度约束方程：

$$\left(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}}\right)^T\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0 \qquad (4-23)$$

式中 $\dot{\vec{a}}$ 可由给定参数按下式计算：

$$\left(\dot{\vec{a}}\right)=\left[W_{\dot{\alpha},\vec{u}_a}\right]\left(\vec{a}-\vec{a}_0\right)=\dot{\alpha}\left[P_{\vec{u}_a}\right]\left(\vec{a}-\vec{a}_0\right) \qquad (4-24)$$

而 $\dot{\vec{b}}$ 与输出构件4的角速度 $\dot{\beta}$ 间有下述关系式：

$$\left(\dot{\vec{b}}\right)=\left[W_{\dot{\beta},\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)=\dot{\beta}\left[P_{\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right) \qquad (4-25)$$

把（4—24），（4—25）代入（4—23）得：

$$\dot{\beta}=\frac{(\dot{\vec{a}})^T\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^T\left[P_{\vec{u}_b}\right]\left((b-b_0)\right)} \qquad (4-26)$$

求出 $\dot{\beta}$ 后，可按式（4—25）求出 $\dot{\vec{b}}$ 点的速度

3、加速度分析

对速度约束方程（4—23）再微分一次，可得加速度约束方程：

$$\left(\dot{\boldsymbol{a}}-\dot{\boldsymbol{b}}\right)^T\left(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)+\left(\dot{\boldsymbol{a}}-\dot{\boldsymbol{b}}\right)^T\left(\dot{\boldsymbol{a}}-\dot{\boldsymbol{b}}\right)=0 \qquad \textbf{(4-27)}$$

$$\left(\ddot{\vec{a}}\right)=\left[E_{\dot{\alpha},\ddot{\alpha},u_{\vec{a}}}\right]\left(\vec{a}-\vec{a}_0\right)=\left[\ddot{\alpha}\left[P_{\vec{u}_a}\right]+\dot{\alpha}\left[\dot{P}_{\vec{u}_a}\right]+\dot{\alpha}^2\left[P_{\vec{u}_a}\right]\left[P_{\vec{u}_a}\right]\right]\left(\vec{a}-\vec{a}_0\right) \qquad \textbf{(4-28)}$$

$$\left(\dot{\vec{b}}\right)=\left[E_{\dot{\beta},\ddot{\beta},\vec{u}_b}\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)\right]=\left[\ddot{\beta}[P_{\vec{u}_b}]+\dot{\beta}[\dot{P}_{\vec{u}_b}]+\dot{\beta}^2[P_{\vec{u}_b}][P_{\vec{u}_b}]\right]\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right) \qquad \textbf{(4-29)}$$

（4—28）、（4—29）代入（4—27）整理得：

$$\ddot{\beta}=\frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^T\left[\ddot{\vec{a}}-\dot{\beta}^2\left[P_{\vec{u}_b}\right]\left[P_{\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)\right]-\dot{\beta}\left[P_{\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)+\left(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}}\right)^T\left(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}}\right)}{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^T\left[P_{\vec{u}_b}\right]\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)} \qquad \textbf{(4-30)}$$

在对机构进行位置分析时，要注意装配条件，即RSSR的装配条件为： $\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{F}^2-\boldsymbol{G}^2>0$ **(4—31)**

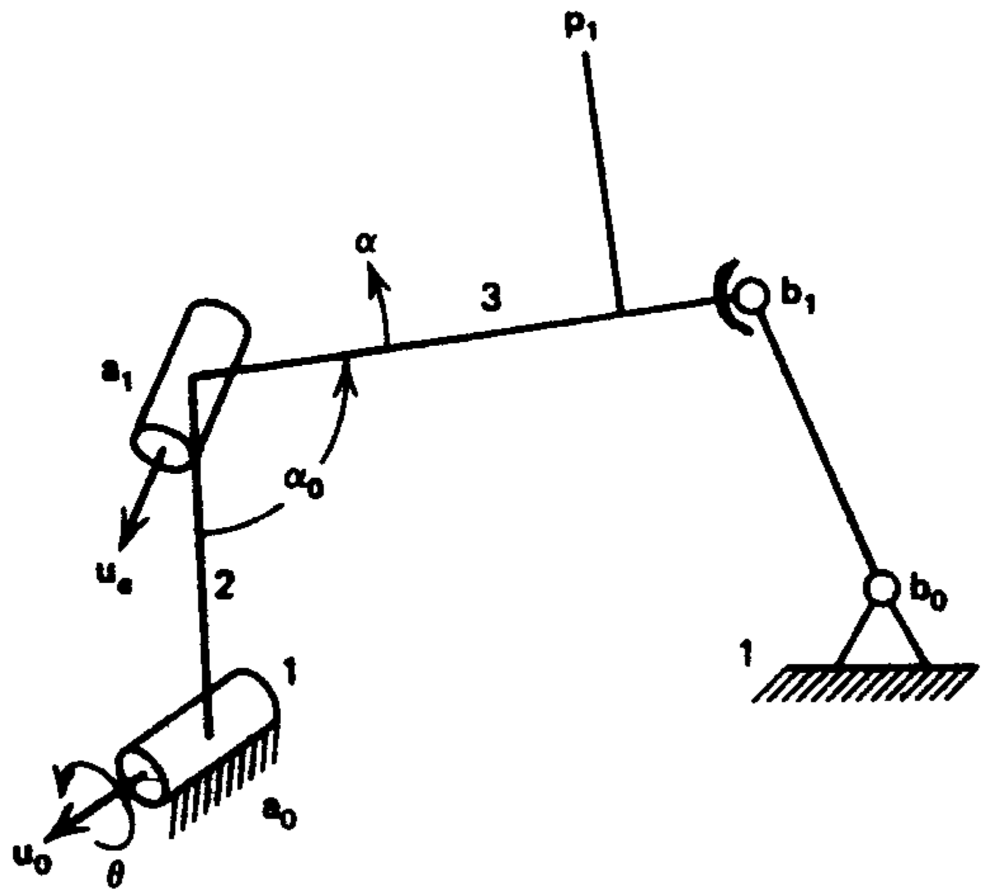
不满足机构不能装配，若输入件一整周转动都能满足(4-31)，则输入构件为曲柄，否则只能是摇杆。

§ 4—3 用约束方程的数值解法对空间机构进行运动分析

这是另一种运动分析办法，不用封闭形法求解约束方程式，而用数值迭代法。

一、RRSS机构

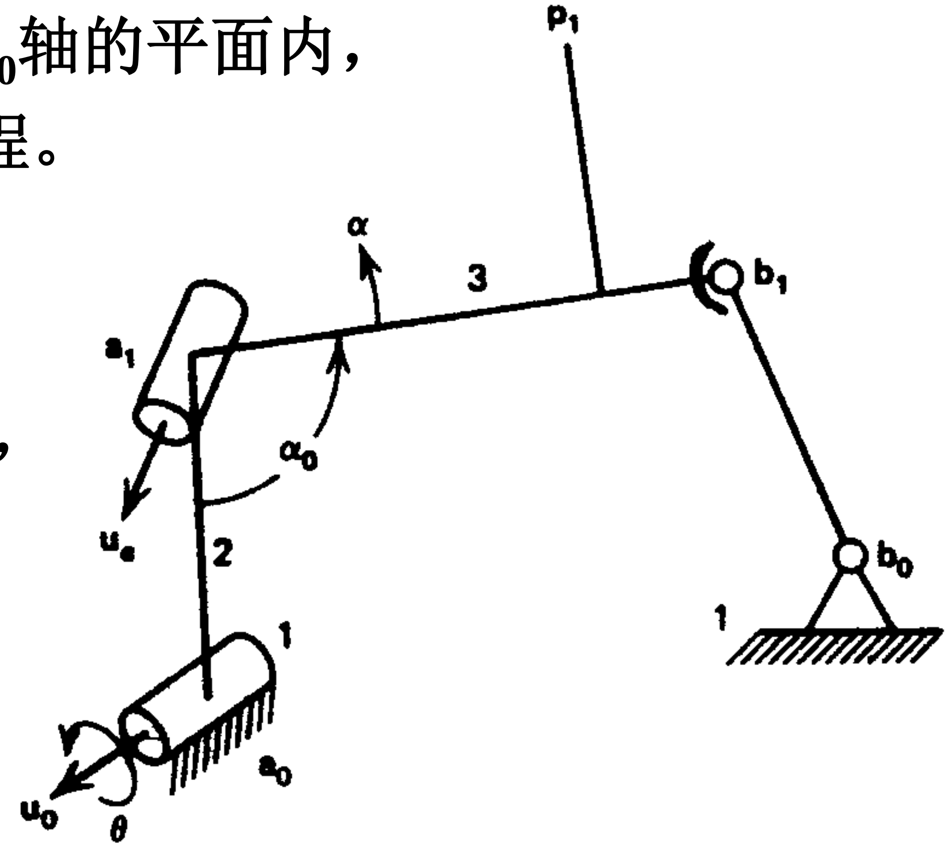
连杆3的位移用参考点 $\bar{p}$ 及杆3相对于有限转轴 $\bar{u}$ 的绝对角位移来描述，所以未知量为$\bar{p}$、$\bar{u}$和ϕ 七个量，对**R—R**构件位移约束方程写成不包含**R—R**构件转角θ形式。



∵ $\bar{a}$ 点的所有位置必须垂直$\boldsymbol{u_0}$轴的平面内，

所以第一个约束方程为平面方程。

$$(\vec{\boldsymbol{u}}_0)^T(\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{a}}_0)=0 \qquad \textbf{(4—42)}$$



$\bar{a}_0$ 点被限制在垂直$\boldsymbol{u_a}$轴的平面内，

第二个约束方程：

$$(\vec{\boldsymbol{u}}_a)^T(\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{a}}_0)=0 \qquad \textbf{(4—43)}$$

当**R—R**构件绕$\boldsymbol{u_0}$轴转动时,

$\boldsymbol{u_a}$和$\boldsymbol{u_0}$轴之间的交错角必须保持常值，得第三个约束方程

$$(\vec{\boldsymbol{u}}_0)^T(\vec{\boldsymbol{u}}_a)=(\vec{\boldsymbol{u}}_0)^T(\vec{\boldsymbol{u}}_{a1}) \qquad \textbf{(4—44)}$$

这为保证交错角为常值的必要条件，而不是充分条件。因为如果β是R—R构件u_a和u_0轴间夹角，则它的负值同样满足上式，为了清除这种可能，我们注意到u_a和u_0之距必须是常数，得第四个约束方程：

$$\left(\left(\vec{a}-\vec{a}_0\right)\times\vec{u}_a\right)^T\left(\vec{u}_0\right)=\left[\left(\vec{a}_1-\vec{a}_0\right)\times\left[u_{a1}\right]\right]^T\left(\vec{u}_0\right) \quad (4-45)$$

对S—S杆，由于构件4保持点$\vec{b}$和$\vec{b}_0$之间距离不变，

这就得第五个约束方程：

$$\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)^T\left(\vec{b}-\vec{b}_0\right)=\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)^T\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right) \quad (4-46)$$

另外，构件3的有限转动轴u的各个分量必须满足第六个约束方程：

$$(u)^T(\bar{u})=1 \quad (4-47)$$

以上六个约束方程中，$\vec{a}$ 点和 $\vec{b}$ 点的位置及 $\vec{u}_a$ 可用连杆上的*P*点及连杆的绝对转角*φ*来描述：

$$(\vec{a}) = [R_{\phi,\vec{u}}](\vec{a}_1 - \vec{p}_1) + (\vec{p})$$

$$(\vec{b}) = [R_{\phi,\vec{u}}](\vec{b}_1 - \vec{p}_1) + (\vec{p})$$

$$(\vec{u}_a) = [R_{\phi,\vec{u}}]\vec{u}_{a1}$$

这三个关系式代入(4-42)~(4-45)，可得出含有七个未知量的六个非线性方程式。可任意给定七个未知量中的一个，解出其余六个未知量，并利用前一个解的坐标值为迭代过程中的初始估算值。这样不仅能保证迅速收敛，而且有助于避免收敛到双重解。

一旦知道了机构新位置，便可继续进行速度和加速度分析。

2、速度分析

可通过对以上六式进行求导，即**R—R**杆速度约束方程为：

$$\left.\begin{aligned}
&(\vec{u}_0)^T(\dot{\vec{a}})=0\\
&(\dot{\vec{u}}_a)^T(\vec{a}-\vec{a}_0)+(\vec{u}_a)^T(\dot{\vec{a}})=0\\
&(\dot{\vec{u}}_a)^T(\vec{u}_0)=0\\
&\left((\dot{\vec{a}}\times\vec{u}_a)+(\vec{a}-\vec{a}_0)\times\dot{\vec{u}}_a\right)^T(\vec{u}_0)=0
\end{aligned}\right\}\qquad (4-48)$$

对**S—S**杆速度约束方程：

$$(\dot{\vec{b}})^T(\vec{b}-\vec{b}_0)=0 \qquad (4-49)$$

构件**3**的瞬时转轴 u'必须满足方向余弦方程：

$$(\vec{u}')^T(\vec{u}')=1$$

所有共有六个速度约束方程，也有七个未知量，

$\dot{p}_x$, $\dot{p}_y$, $\dot{p}_z$, ϕ , u'_x , u'_y , u'_z 假定一个求解出其余六个未知量

（4—48）、（4—49）中：

$$(\dot{\vec{a}}) = \left[W_{\dot{\phi},\vec{u}'}\right](\vec{a} - \vec{p}) + (\dot{\vec{p}})$$

$$(\dot{\vec{b}}) = \left[W_{\dot{\phi},\vec{u}'}\right](\vec{b} - \vec{p}) + (\dot{\vec{p}})$$

$$(\dot{\vec{u}}_a) = \left[W_{\dot{\phi},\vec{u}}\right]\vec{u}_a$$

3、加速度分析

同样对七个约束方程进行二次求导，进行求解，在此不再详解。

§ 4—4 用相对位姿矩阵进行机械手中直接位置问题分析

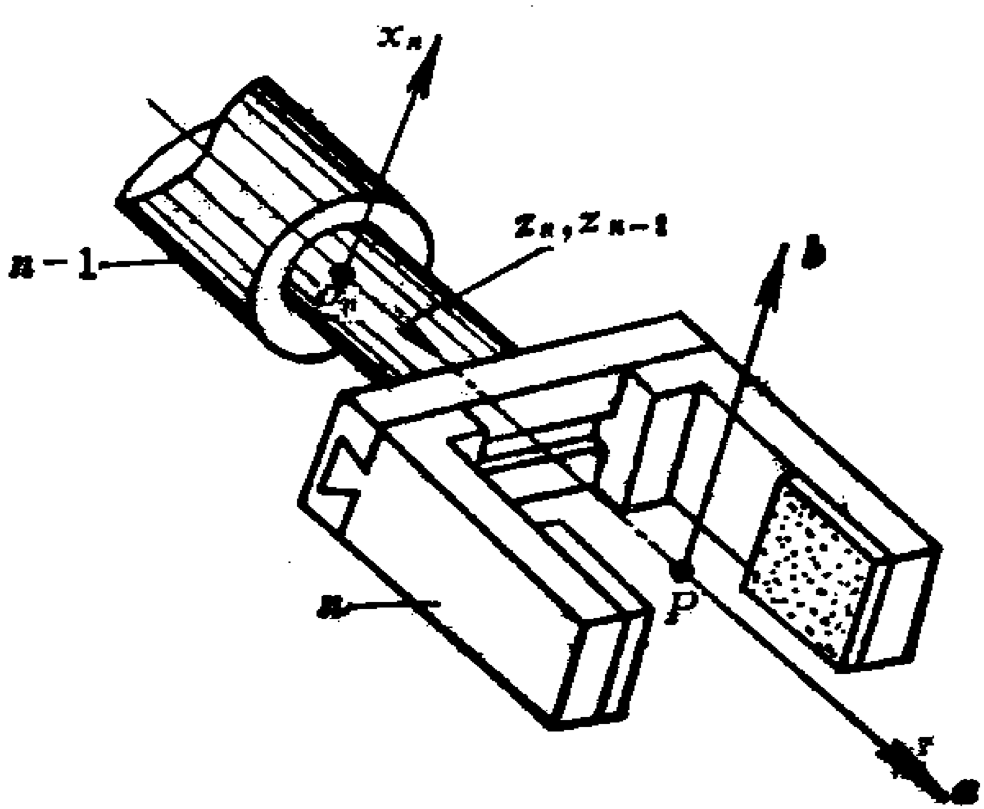
一、机器人手部位姿矩阵方程式

机器人各构件上均固结有相应的坐标系，该坐标系按以前所讲的**H—O**矩阵的原则规定取定。相邻两构件间的相对位姿矩阵 $\left[T_{ij}\right]$

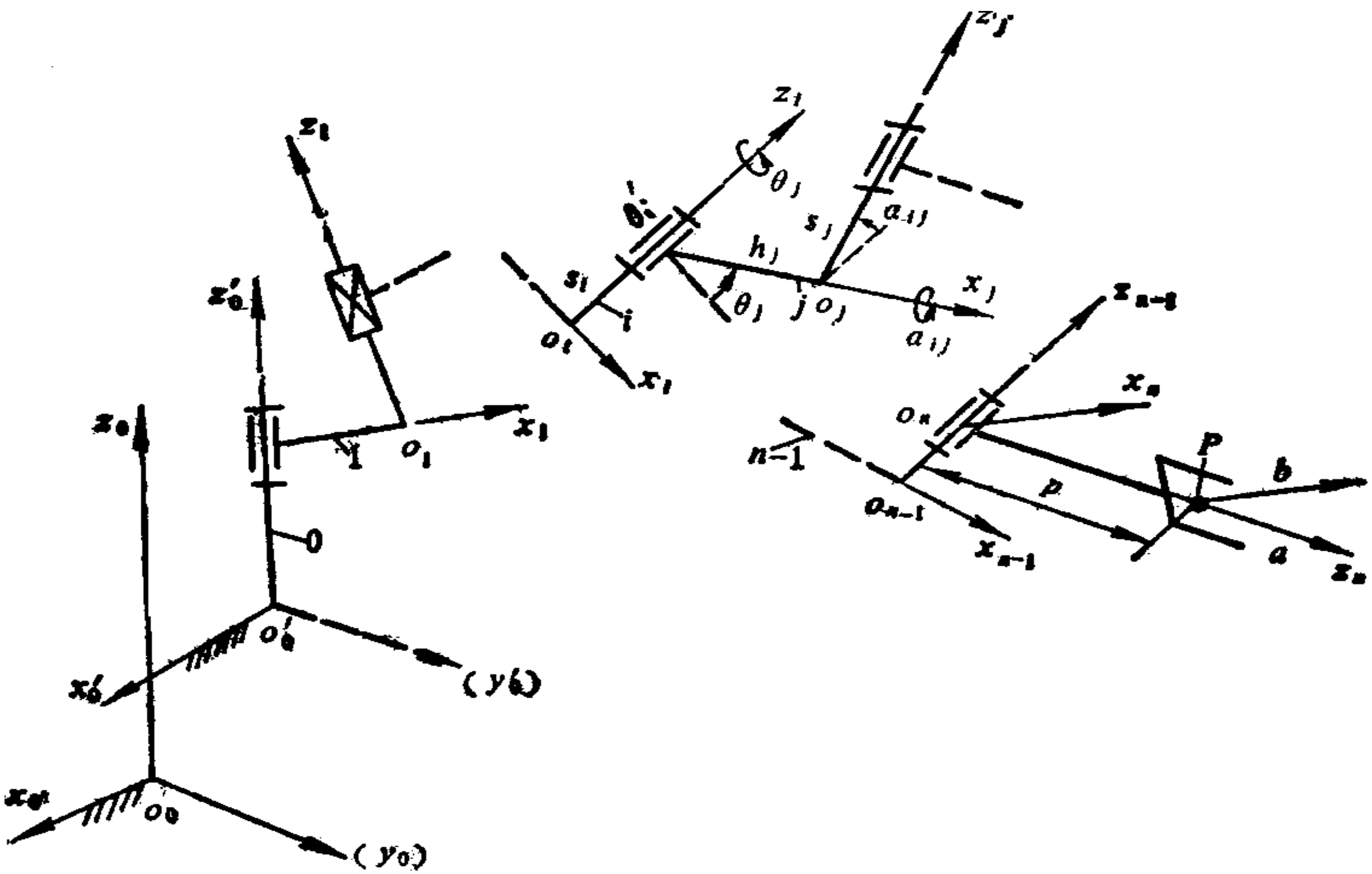
$$\boldsymbol{A}_j=\left[\boldsymbol{T}_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\cos\theta_j & -\sin\theta_j\cos\alpha_{ij} & \sin\theta_j\sin\alpha_{ij} & a_j\cos\theta_j\\ \sin\theta_j & \cos\theta_j\cos\alpha_{ij} & -\cos\theta_j\sin\alpha_{ij} & a_j\sin\theta_j\\ 0 & \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & s_i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

机器人中与转动副有关转角 θ_j 和与移动副有关的距离 s_j 为运动变量即运动参数，其它不随运动而变的常量参数为结构参数。

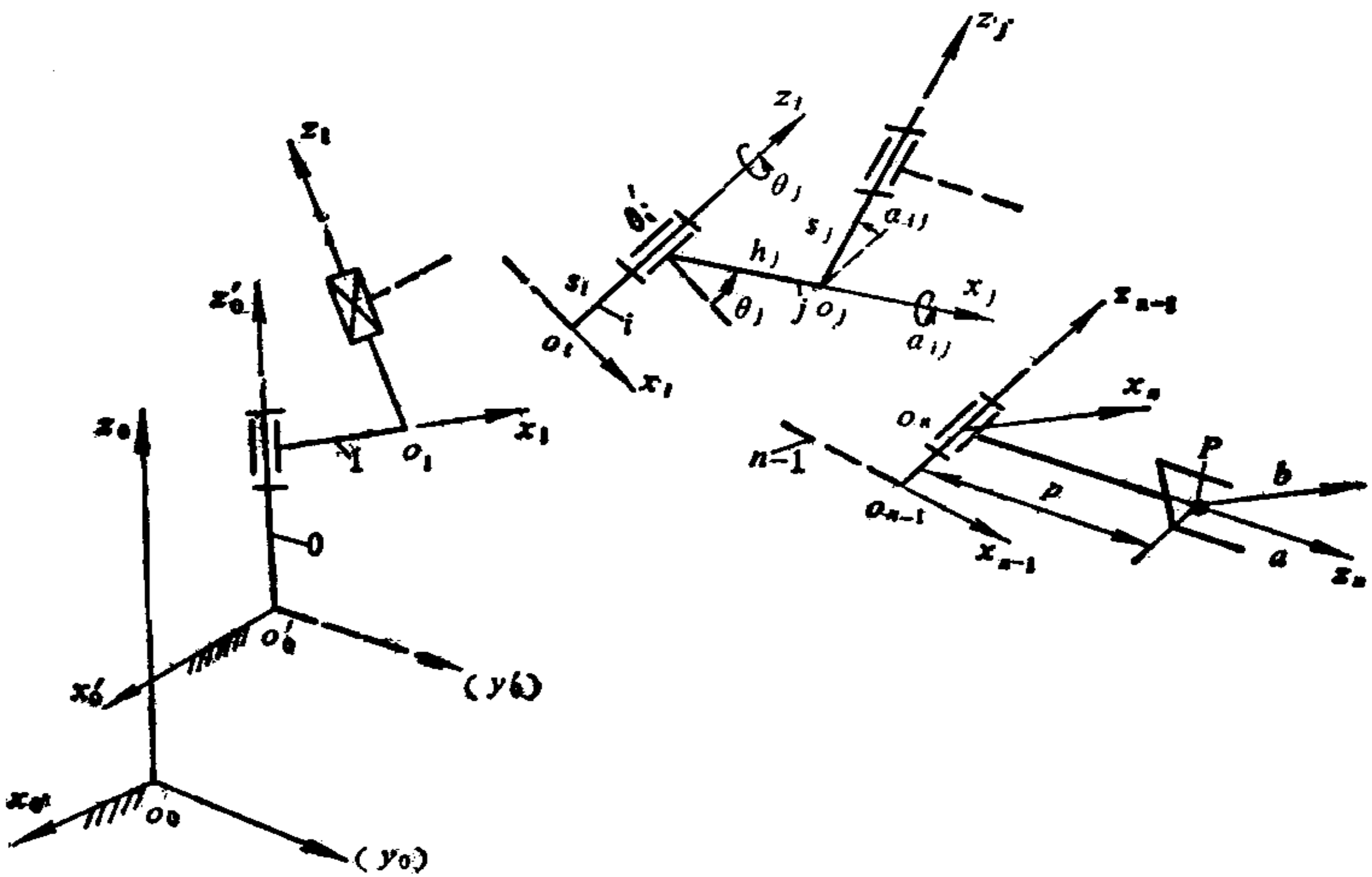
由于机械人各运动副变量都由各个伺服驱动器（例如伺服电机步进电机等）来实现。而无论转动或移动的驱动器均为一个自由度，所以在机器人中一般运动副只有转动副或移动副两种。



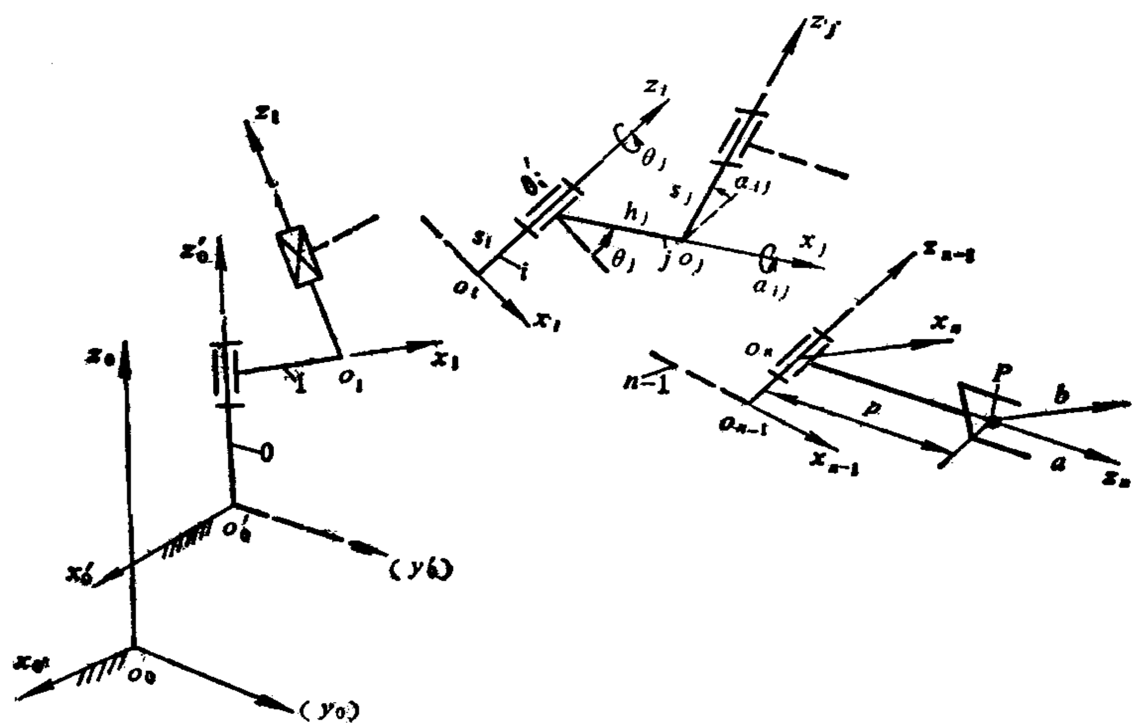
如图所示为一任意机械手简图，在各个构件上固结有相应的坐标系，在图中，图结在0构件（机架）上的坐标系，$O_0, x_0, y_0 z_0$为参考坐标系。x_0轴方位可任选。如与机架0相连的有另一指定参考坐标系O'_0, x'_0, y'_0, z'_0则x_0轴的方位不再任意选，而是取z_0与z'_0轴的公垂线一致，



在手部夹持器坐标系O_n, x_n, y_n, z_n中，z_n轴一般取得与夹持器的对称轴线$\bar{a}$一致，x_n轴应取垂直于z_{n-1}及z_n两轴，但是在z_n与z_{n-1}两轴相重合的情况下，可以将x_n轴取得与夹持器开口平面的法线$\bar{b}$相平行。



设坐标$\theta_n x_n y_n z_n$（与夹持器固结）中表达夹持器位置的形心P的坐标为$(0,0,p)^T$，描述两夹持器姿态的两正交向量$\bar{a},\bar{b}$的方向余弦$(0,0,1)^T$和$(1,0,0)^T$。当机械手在各驱动电机及驱动器作用下，各个运动副中的运动参量是已知的，待分析的问题是要直接确定末端手部所处的相应位置和姿态。此即为机器人直接位置问题。

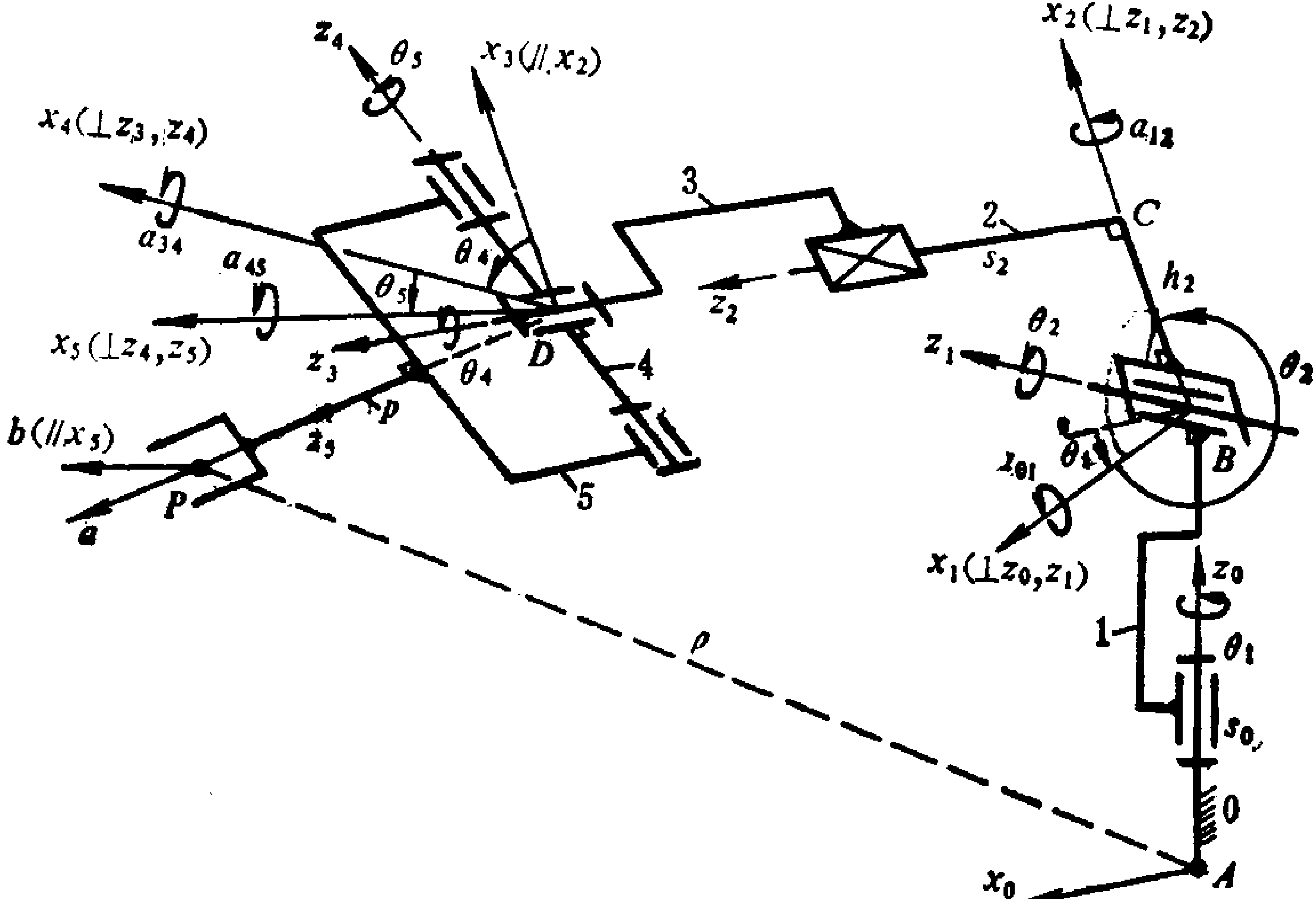


设在参考坐标系中表达夹持器位置的形心 P 的坐标为 $(0,0,p)^T$，而描述夹持器姿态的两正交向量$\bar{a},\bar{b}$的方向余弦为$(l,m,n)^T$和$(u,v,w)^T$，则根据$O_n x_n y_n z_n$系连续的坐标变换至$Ox_0 y_0 z_0$，可写出确定手部夹持器位置和姿态的位姿矩阵方程：

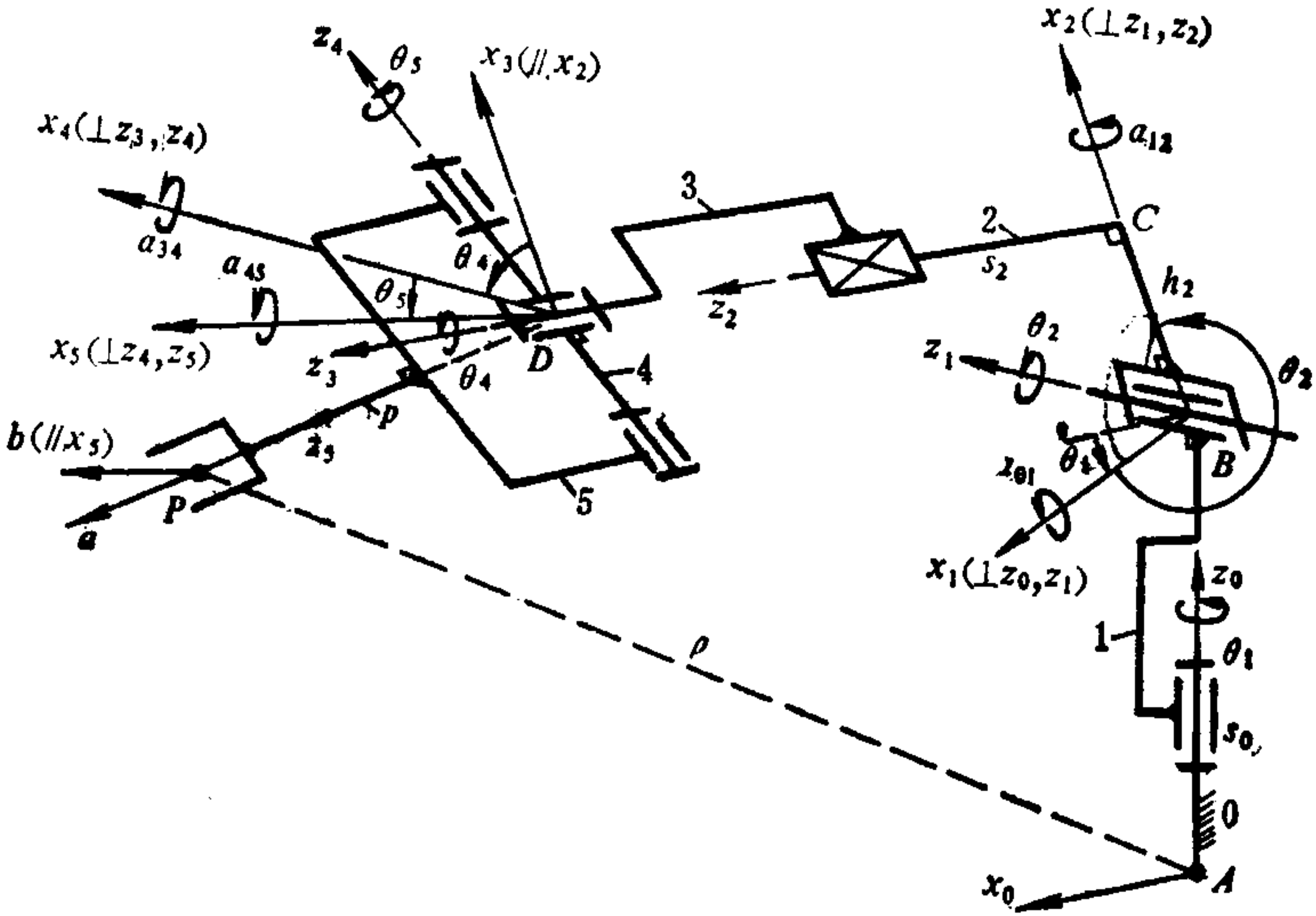
$$\begin{bmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T_{10}][T_{21}][T_{32}]\cdots\cdots[T_{n,n-1}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4—50)}$$

为了便于设计计算，在机械手中常有一些运动副的轴线是互相平行或垂直相交的，从而使结构参数中有某些a_j, s_j, θ_j为零，及$a_{ij}=0$或π。

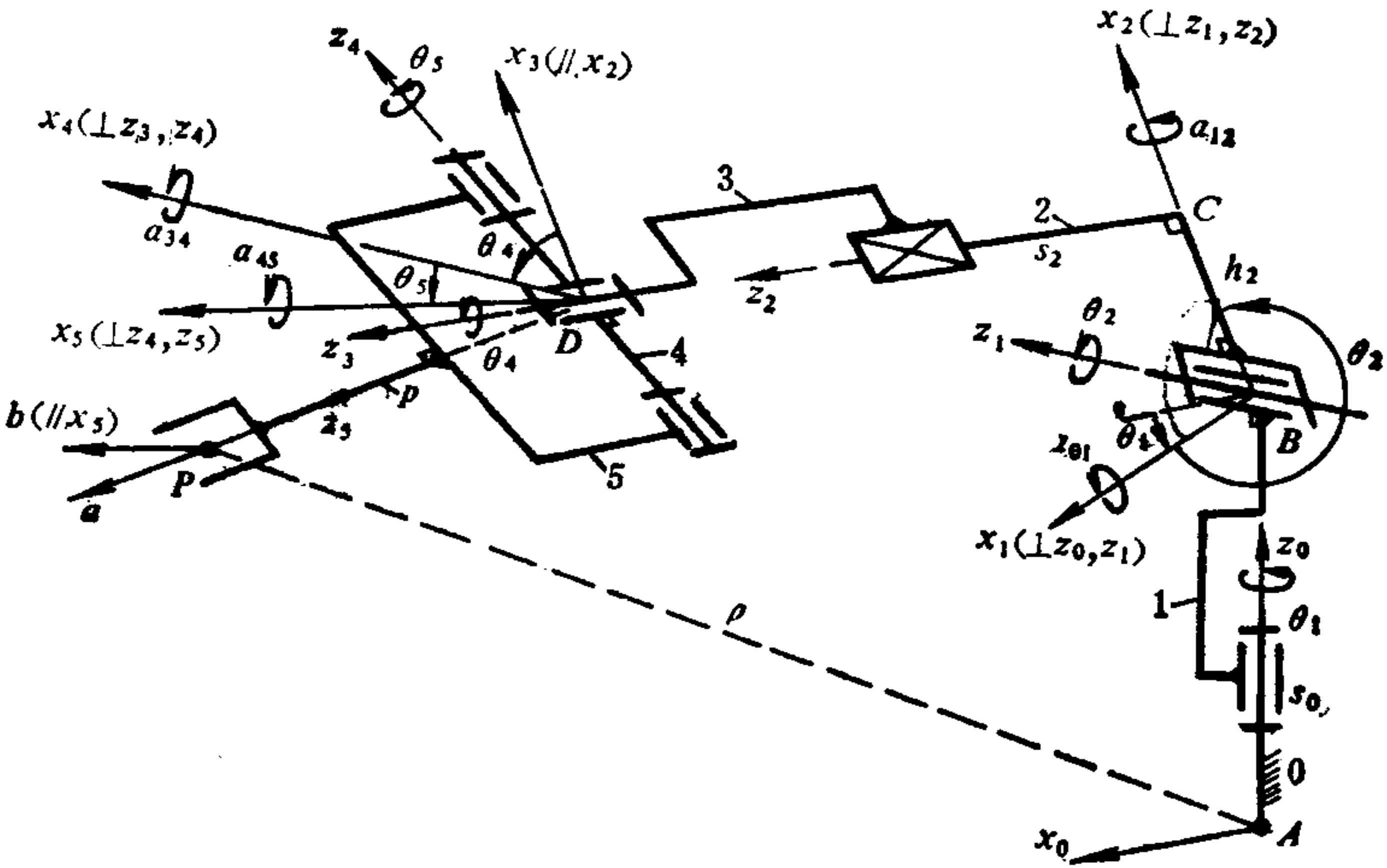
举例：1、RRPRR机械手，如图



由机架0经构件1、2、3、4到手部夹持器5，依次通过两个转动副R，一个移动副P和最后两个转动副R连接起来的。它具有五个自由度，夹持器姿态中所用向量$\bar{\boldsymbol{b}}$，令其平行于$\boldsymbol{x}_5$，坐标如图。



$l_{AB}=s_0$，$l_{BC}=h_2$，$l_{DP}=P$，$\alpha_{01}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=90^0$，$\alpha_{23}=\theta_3=0^0$，设给定各运动副中的运动参量$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_4$，$\theta_5$及$s_2(=l_{CD})$五个，要求确定手部夹持器在固定坐标系$Ax_0y_0z_0$中的位置和姿态，亦即确定 P 点的坐标$x$、$y$、$z$及向量$a$、$b$的方向余弦$l$、$m$、$n$和$u$、$v$、$w$。



利用上式：$\begin{bmatrix} x & l & u \\ y & m & v \\ z & n & w \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T_{10}][T_{21}][T_{32}][T_{43}][T_{54}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(4—51)**

相邻两构件位姿矩阵即坐标变换矩阵：

$$[T_{10}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_{12}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & h_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & h_2\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_{32}]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&s_2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad[T_{43}]=\begin{bmatrix}\cos\theta_4&0&\sin\theta_4&0\\\sin\theta_4&0&-\cos\theta_4&0\\\sin\theta_4&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[T_{54}]=\begin{bmatrix}\cos\theta_5&0&\sin\theta_5&0\\\sin\theta_5&0&-\cos\theta_5&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

将这些矩阵代入式（**4—51**）经过矩阵连乘运算，根据等式两边矩阵中对应元素相等，可得：

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \left[P(\sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_3 - \cos\theta_5 \sin\theta_2) + s_2 \sin\theta_2 + h_2 \cos\theta_2 \right] \cos\theta_1 \\
&\quad + P \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \\
y &= \left[P(\sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_2 - \cos\theta_5 \sin\theta_2) + s_2 \sin\theta_2 + h_2 \cos\theta_2 \right] \sin\theta_1 \\
&\quad - P \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \\
z &= P(\sin\theta_5 \cos\theta_4 \sin\theta_2 + \cos\theta_5 \cos\theta_2) - s_2 \cos\theta_2 + h_2 \sin\theta_2 + s_0
\end{aligned}
\right\} \quad \textbf{(4-52)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
l &= (\sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_2 - \cos\theta_5 \sin\theta_2) \cos\theta_2 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \\
m &= (\sin\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_2 - \cos\theta_5 \sin\theta_2) \sin\theta_1 - \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_1 \\
n &= \sin\theta_5 \cos\theta_4 \sin\theta_2 + \cos\theta_5 \cos\theta_2
\end{aligned}
\right\} \quad \textbf{(4-53)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= (\cos\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_2 + \sin\theta_5 \sin\theta_2) \cos\theta_1 + \cos\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \\
v &= (\cos\theta_5 \cos\theta_4 \cos\theta_2 + \sin\theta_5 \sin\theta_2) \sin\theta_1 - \cos\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_1 \\
w &= \cos\theta_5 \cos\theta_4 \sin\theta_2 - \sin\theta_5 \cos\theta_2
\end{aligned}
\right\} \quad \textbf{(4-54)}
$$

如果要进一步研究手腕位置变化范围或工作空间问题，可求从参考坐标系原点A到夹持器形心P的距离P：

$$P = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \textbf{(4—55)}$$

由于距离P为一多变量函数，故对工作空间研究按多变量函数存在极值的条件进行。这儿不再详解。即：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{P}^2)}{\partial\boldsymbol{\theta}^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\boldsymbol{P}^2)}{\partial\boldsymbol{\theta}_4} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\boldsymbol{P}^2)}{\partial\boldsymbol{\theta}_5} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\boldsymbol{P}^2)}{\partial\boldsymbol{s}_2} = 0$$