惯性张量的物理意义

上海海运学院　　洪国雄

摘要　惯性张量是较难理解的概念．本文用较清晰的物理思路详细讨论了惯性张量的物理意义，并对惯性积作较深入的分析．同时讨论了惯性张量与转动惯量的区别和联系．

在力学中，惯性张量的物理意义对初学者往往感到不容易理解，在一般教材中对惯性张量物理意义的讨论又较简单，因此在教学中如何阐明它的物理意义是值得探讨的问题．

下面我们首先简略地回顾惯性张量的引入，就整体的角度说明它的物理意义，并讨论惯性张量与转动惯量的区别和联系，在这基础上我们再较深入地分析惯性张量各分量的物理意义．

一、　惯性张量的引入

我们知道，在刚体定轴转动时，刚体在转动轴上的动量矩和动能分别为

$$L=J\omega\ ,\quad E_K=\frac{1}{2}\ (J\omega^2)$$

与质点运动相比较，我们把 J 称为转动惯量，它表示刚体定轴转动惯性的大小．

在刚体定点转动时，刚体的动量矩为

$$\boldsymbol{L}=\sum m_i\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\tag{1}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum m_i(y_i^2+z_i^2) & -\sum m_ix_iy_i & -\sum m_ix_iz_i\\ -\sum m_ix_iy_i & \sum m_i(z_i^2+x_i^2) & -\sum m_iy_iz_i\\ -\sum m_ix_iz_i & -\sum m_iy_iz_i & \sum m_i(x_i^2+y_i^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}\tag{2}$$

简写成

$$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}\tag{3}$$

而刚体定点转动的动能为

$$E_K=(1/2)\sum m_i(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)=(1/2)\sum m_i\boldsymbol{v}_i\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)$$

$$=(1/2)\boldsymbol{\omega}\cdot\sum(m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i)=(1/2)\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}=(1/2)\boldsymbol{\omega}\cdot I\boldsymbol{\omega}\tag{4}$$

由(3)、(4)式与定轴转动的情况比较，可见 I 相当于惯性的物理量，它是由九个分量构成的张量，称它为惯性张量．因此从整体的角度来看，I 表示刚体定点转动惯性的量值．

以上我们是从动量矩引入惯性张量，这样比有的教材用转动惯量 $J=\int r^2\mathrm{d}m$ 引入惯性张量显得较自然，容易理解．从动量矩来讨论惯性张量，也是深入理解惯性张量物理意义的基础．

二、　惯性张量与转动惯量的区别和联系

在讨论惯性张量各分量的物理意义之前，我们先简单地讨论一下惯性张量与转动惯量的区别和联系．

I 与 J 虽然都是表示刚体转动惯性的大小，但它们之间有一定的差别．首先，转动惯量 J 是指定轴转动时的惯性大小；而惯性张量 I 是指定点转动时的惯性大小．其次，对 J，当转轴取定后，它是一个常数；而对 I，当刚体转动的定点取定时，由于通过该点可以建立许多坐标系，所以 I 的分量还与所取坐标系有关．I 在某点取定的坐标系上各分量的大小是一定的，但在同一点的不同坐标系上各分量相应的值就不同了，它们满足张量的变换关系．可以证明，在有的坐标系中 I 的表示较简单，只有对角元素，这时的坐标轴称为惯性主轴．另外，J 是一常数，动量矩的方向与角速度的方向一致；而 I 是二阶张量，动量矩的方向一般与角速度的方向不一致．

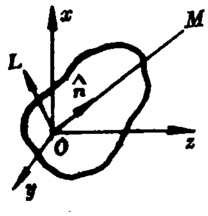

图 1

由于定点转动包括了瞬时定轴转动，因此 I 与 J 有一定内在联系，应该可以由惯性张量来求得转动惯量．如图 1 所示，若刚体对 O 点的惯性张量为 I，某一瞬时它绕 OM 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，设 OM 轴的单位矢量为 $\hat{\boldsymbol{n}}=(\alpha,\beta,\gamma)$，则 $\boldsymbol{L}$ 在 OM 轴上的分量

$$L_{OM}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot I\boldsymbol{\omega}=(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot I\hat{\boldsymbol{n}})\omega_{OM}\tag{5}$$

这就是定轴转动时 L_{OM} 与 ω_{OM} 的关系，所以刚体对 OM 轴的转动惯量为

$$J=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot I\,\hat{\boldsymbol{n}}=(\alpha\,\beta\,\gamma)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \qquad (6)$$

可见若已知 I 及 $\hat{\boldsymbol{n}}$，就可以由(6)式求得对 OM 轴的转动惯量. 可以证明，

$$J=\sum r_i^2\,\Delta m_i=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot I\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

三、 惯性张量各分量的物理意义

先讨论惯性张量的对角元素. 设刚体定轴转动的轴为坐标系的 x 轴，它的方向 $\hat{\boldsymbol{n}}=(1,0,0)$，由(6)式求得刚体对 x 轴的转动惯量为

$$J_x=(1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=I_{xx}=\sum m_i\,(y_i^2+z_i^2)$$

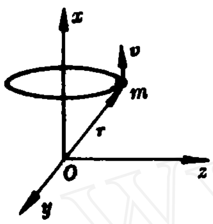

图 2

同理可求得

$$J_y=I_{yy}=\sum m_i\,(z_i^2+x_i^2)$$

$$J_z=I_{zz}=\sum m_i\,(x_i^2+y_i^2)$$

可见 I 的对角元素是反映了刚体对坐标轴的转动惯量.

对 I 的非对角元素(这些元素称为惯性积)，它的意义是什么呢?

为简单起见，我们由一特例来讨论. 考虑特殊的刚体——质点的定点转动，如图 2 所示，设质点 m 在垂直于 x 轴平面上绕 x 轴以 ω_x 转动. 首先考虑 m 对定点 O 的动量矩. 由于质点的速度 $\boldsymbol{v}=\omega_x\hat{\boldsymbol{i}}\times\boldsymbol{r}$，即

$$v_x=0\ ;\ v_y=-\omega_x z\quad ;\quad v_z=\omega_x y$$

其中 v_y 对 O 点的动量矩为 $m\boldsymbol{r}\times v_y\hat{\boldsymbol{j}}$，其分量为

$$L_{yx}=mv_y z\quad ;\ L_{yy}=0\quad ;\ L_{yz}=mv_y x \qquad (7)$$

(其中 L_{yx} 表示 v_y 对 x 轴的动量矩，其余意义相似)而 v_z 对 O 点的动量矩为 $m\boldsymbol{r}\times v_z\hat{\boldsymbol{k}}$，其分量为

$$L_{zx}=mv_z y\quad ;\ L_{zy}=-mv_z x\quad ;\ L_{zz}=0 \qquad (8)$$

由(7)、(8)式求得质点 m 对 O 点的动量矩的三个分量，并用角速度 ω_x 表示为

$$\begin{cases} L_x=mv_y z+mv_z y=m\,(z^2+y^2)\,\omega_x \\ L_y=-mv_z x=-mxy\omega_x \\ L_z=mv_y x=-mxz\omega_x \end{cases} \qquad (9)$$

可见这时 m 质点除了有 x 轴方向的动量矩外，它还有 L_y, L_z. 当 L_y, L_z 用 ω_x 表示时出现了惯性积这一物理量.

现在讨论惯性积的物理意义. 以 L_y 为例，由于 $L_y=-mv_z x$ (这里负号表示 v_z 在 y 轴引起的动量矩沿 y 的负方向，这也说明了为什么惯性积出现负号)，而要由 L_y 找出它的转动惯性，应把它化成角速度的表示式.

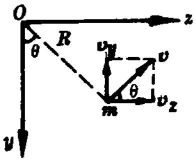

图 3

如用 ω_y 来表示 L_y，那么由图 2 可见 $v_z=-x\omega_y$，有

$$L_y=-mv_z x=mx^2\omega_y \qquad (10)$$

按定轴转动来看，L_y、ω_y 都是同一方向上的分量，所以 mx^2 显然表示质点绕 y 轴的转动惯量. 但如用 ω_x 来表示 L_y，情况又如何呢? 设图 3 是表示质点 m 的运动在 yOz 平面上的投影，可见 $v_z=v\cos\theta=vy/R$，而 $v=R\omega_x$，所以 $v_z=y\omega_x$，得

$$L_y=-mv_z x=-myx\omega_x \qquad (11)$$

对(11)式，如不考虑式中 L 与 ω 的下标，那么 myx 可以看成是转动惯性的大小. 但在定轴转动中，L 与 ω 应是相同的分量(下标)，它的“系数”才是转动惯量(如(10)式). 而(11)式中 L_y 是用 ω_x 来表示的，因此 myx 不能称它为转动惯量，另给它起个名称，称为惯性积. 这就是引入惯性积的原因(如 L_i 都用对应分量 ω_i 表示，就不会出现惯性积的问题). 由上面分析，对惯性积 myx 这物理量可以这样理解: 当用 ω_x 来表示 L_y 时 $(x\neq 0)$，它对 y 轴表现的惯性大小用惯性积 myx 来表示. 其它惯性积的意义也可类似地进行讨论.

从(2)式可见，惯性积具有对称性. 如(2)式中第一个方程中 myx 是与 ω_y 相乘，而第二个方程中 myx 是与 ω_x 相乘，因此对 myx 惯性积可以有二种看法: 当它与 ω_x 相乘时，myx 表示刚体绕 y 轴的动量矩用 ω_x 表示时对应的惯性大小; 当它与 ω_y 相乘时，myx 表示刚体绕 x 轴的动量矩用 ω_y 表示时对应的惯性大小. 因此 myx 称为对 x 轴和 y 轴的惯性积.

总之，我们可以这样说，当 L_i 用 ω_j $(i\neq j, i,j=x,y,z)$ 表示时，它的“惯性项”称为惯性积; 当 L_i 用 ω_i 表示时，它的“惯性项”称为转动惯量. 由于刚体定点转动时，它对每一坐标轴以及坐标轴间都表现出一定惯性，所以定点转动时刚体惯性要用九个分量(独立的是 6 个)组成，它才完整地反映刚体定点转动时整体的惯性.

通过上述分析，可以看到抓住动量矩这个物理量，对惯性张量就会有较深入的理解.

参考文献

[1] 胡慧玲、林纯镇、吴惟敏编，“理论力学基础教程”，高等教育出版社，1986.

[2] 西北工业大学主编，“理论力学”，陕西科学技术出版社，1984.