2024年春季离散数学(A)II期中考试

一、选择题（每题2分，共20分）

1、以下叙述错误的是（　B　）。
A、无向图中一个顶点与某条边的关联次数为0、1、2之一
B、无向图中如果某个顶点上有环，则该顶点属于自身的邻域
C、有向图中两条边存在公共端点，这两条边不一定相邻
D、零图与空图的区别在于零图必然有顶点，而空图没有顶点

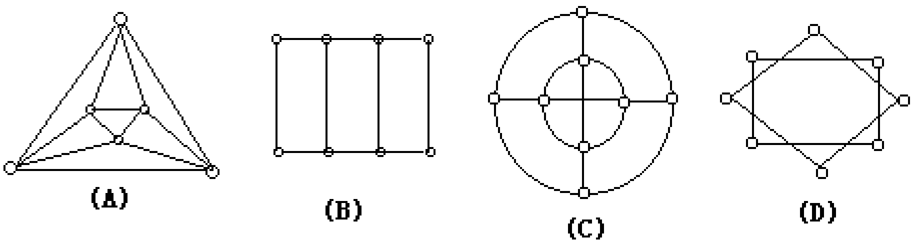
2、关于补图，以下叙述正确的是（　D　）。
A、如果一个无向图是n阶竞赛图的基图，那么它的补图是空图
B、当n确定为某个正整数时，所有n阶无向图中至少有一个是自补图
C、一个无向树的补图一定也是无向树
D、如果一个无向图是非连通图，那么它的补图一定是连通图

3、以下可简单图化的是（　B　）。
A、(3, 2, 1, 1)　　B、(3, 2, 1, 1, 1)　　C、(4, 3, 2, 1, 0)　　D、(4, 3, 3, 1, 1, 0)

4、关于图的矩阵表示，以下叙述错误的是（　B　）。
A、任意无向图均可以用关联矩阵表示
B、任意有向图均可以用关联矩阵表示
C、任意有向图均可以用邻接矩阵表示
D、任意有向图的可达矩阵均可以由其邻接矩阵计算得到

5、关于回路，以下叙述错误的是（　A　）。
A、欧拉回路是初级回路　　B、哈密顿回路是初级回路
C、余树中可能有初级回路　　D、平面图中可能有初级回路

6、下面（　A　）可一笔画出。



7、一棵无向树T中5度、4度、3度、2度的分支点各1个，其余顶点均为树叶，则T中有（　C　）片树叶。
A、6;　　B、7;　　C、8;　　D、9

8、一个简单二部图是平面图，则该图每个面的次数最少为（　D　）。
A、1　　B、2　　C、3　　D、4

9、以下叙述错误的是（　C　）。

A、极大平面图一定是连通图

B、极小非平面图一定是连通图

C、两个平面嵌入如果同构，它们的对偶图也一定同构

D、n 阶(n≥3)m 条边的简单平面图 G 满足 m=3n−6，则 G 一定是极大平面图

10、在平凡图上加一条新边得到的图一定不是（　C　）。

A、欧拉图　　B、哈密顿图　　C、无向树　　D、平面图

二、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1、在 n 阶图 G 中，若存在从顶点 v_i 到自身的__简单回路__，则一定存在从 v_i 到自身长度小于等于 n 的圈。

2、设 G 为 n(n≥4)阶无向简单图，$\delta(G) \geq 3$，则 G 中存在长度大于或等于__4__的圈。

3、n 阶 m 条边的无向连通图中，圈秩为__$m-n+1$__，割集秩为__$n-1$__。

4、设 G 是连通平面图，其顶点数为 8，边数为 12，则其面数为__6__。

三、综合题（每题 10 分，共 70 分）

1、若 n(n≥2)阶连通图 G 恰有 $n-1$ 条边，则图 G 中至少有两个顶点度数为 1。

证明：

n 阶连通图 G 有生成树，而生成树的边数为 $n-1$，因此图 G 为树。

设 T 有 x 片树叶，由握手定理和 $m=n-1$ 可知：

$$2(n-1)=\sum d(v_i) \geq x+2(n-x)$$

求解可得 x≥2，即至少有两个顶点度数为 1.

2、分别画出满足如下要求的图：

(1) 既是半欧拉图与半哈密顿图，又是树；

(2) 是欧拉图也是哈密顿图，但不是平面图；

(3) 是欧拉图也是哈密顿图，还是极大平面图。

(4) $k < \lambda < \delta$；

(5) $k = \lambda = \delta$。

解：答案不唯一。

3、某工厂生产由 6 种颜色的纱织成的双色布。已知在一批双色布中，每种颜色至少与其他 3 种颜色相搭配，请证明：可以从这批双色布中挑出 3 种，它们由 6 种不同颜色的纱织成。

解：

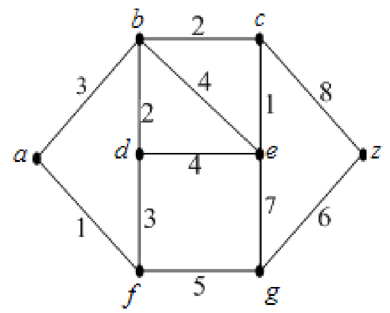
做无向简单图 $G=<V,E>$，$V=\{v|v$ 为 6 种颜色之一$\}$，$E=\{(u,v)|u,v\in V,u\neq v$ 且在这批布中有 u 与 v 搭配的双色布$\}$.

由已知条件可知，$\forall u,v\in V$，有

$$d(u)+d(u)\geq 3+3=6=|V|$$

由定理 15.7 的推论可知，G 为哈密顿图.设 $C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_6}v_{i_1}$是 G 中的一条哈密顿回路.任何两个顶点若在 C 中相邻，则在这批布中有这两个顶点代表的颜色搭配成的双色布.于是，在这批布中有 v_{i_1}与 v_{i_2}，v_{i_3}与 v_{i_4}，v_{i_5}与 v_{i_6}搭配成的 3 种双色布，它们使用了全部 6 种颜色.

4、带权图如下图所示，用 Dijkstra 算法求从 a 点到其余各点的最短路径和距离，并给出求解步骤。



解：

步骤	a	b	c	d	e	f	g	z
1	(a,0)**	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,+∞)
2	(a,0)*	(a,3)	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,+∞)	(a,1)**	(a,+∞)	(a,+∞)
3	(a,0)*	(a,3)**	(a,+∞)	(f,4)	(a,+∞)	(a,1)*	(f,6)	(a,+∞)
4	(a,0)*	(a,3)*	(b,5)	(f,4)**	(b,7)	(a,1)*	(f,6)	(a,+∞)
5	(a,0)*	(a,3)*	(b,5)**	(f,4)*	(b,7)	(a,1)*	(f,6)	(a,+∞)
6	(a,0)*	(a,3)*	(b,5)*	(f,4)*	(c,6)**	(a,1)*	(f,6)	(c,13)
7	(a,0)*	(a,3)*	(b,5)*	(f,4)*	(c,6)*	(a,1)*	(f,6)**	(c,13)
8	(a,0)*	(a,3)*	(b,5)*	(f,4)*	(c,6)*	(a,1)*	(f,6)*	(g,12)**

到 b：3　　ab　　到 e：6　　abce

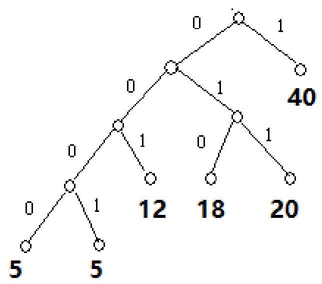
到 c：5　　abc　　到 f：1　　af

到 d：4　　afd　　到 g：6　　afg

到 z：12　　afgz

5、设在通信中字母 A、B、C、D、E、F 出现的频率依次为 40%、20%、18%、12%、5%、5%，请用 Huffman 算法求出传输这些字母的最佳前缀码。

解：将频率乘上 100 为权，利用 Huffman 算法构造最优 2 叉树，如下图所示：



最优前缀码 A:1，B:011，C:010，D:001，E:0001，F:0000

6、设连通的简单平面图 G 有 10 个顶点，24 条边。

(1) 求 G 的面数；

(2) 证明 G 为极大平面图；

(3) 画出一个这样的极大平面图。

解：

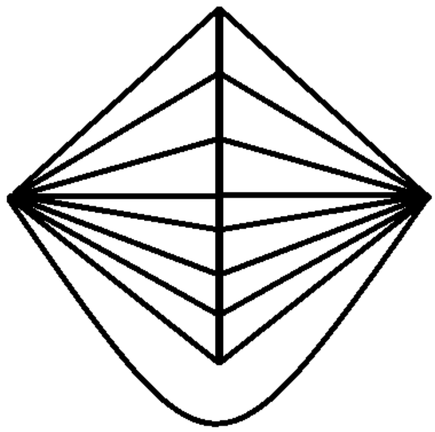
(1) 根据欧拉公式 n-m+r=2 可得 $r = 2+m-n=16$

(2) 根据面的次数之和等于边数的 2 倍可得

$$\sum_{i=1}^{16} deg(R_i) = 2m = 48$$

又由于简单平面图每个面的次数最少为 3，所以每个面的次数正好为 3。根据极大平面图的充分条件可得图 G 为极大平面图。

(3)答案不唯一。



7、设 G 为简单平面图，证明 G 的最小度$\delta(G)\le 5$。

证明：

若阶数 $n\le 6$，结论显然成立。

若阶数 $n\ge 7$ 时，用反证法。

假设$\delta(G)\ge 6$，由握手定理可知：

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 6n$$

因而 $m\ge 3n$，这与简单平面图 $m\le 3n-6$ 的性质矛盾。

所以，假设不成立，即 G 的最小度$\delta(G)\le 5$。