Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3

Pr. H. EL AMRI

Table des matières

1 ESPACES VECTORIELS **5**
1.1 Définitions 5
1.2 Sous espace vectoriel 6
1.3 Systèmes de vecteurs 6
1.3.1 Systèmes libres 7
1.3.2 Systèmes générateurs 7
1.3.3 Base d'un espace vectoriel 8

2 APPLICATIONS LINÉAIRES **9**
2.0.1 Définitions 9
2.0.2 L'espace L(E,F) 10
2.0.3 $E' =$ Dual de $E = L(E, \mathbb{R})$ 10
2.0.4 Noyau et Image d'une application linéaire 12
2.0.5 Image de parties de E 12
2.0.6 Cas où E est de dimension finie 13

3 MATRICES **15**
3.1 Introduction 15
3.2 Propriétés : Égalité, Somme, Multiplication par un scalaire 17
3.2.1 Matrice Transposée 18
3.2.2 Matrice ligne 19
3.2.3 Matrice colonne 19
3.2.4 Matrice carrée 19
3.2.5 Matrice diagonale 19
3.2.6 Matrice triangulaire 20
3.2.7 Matrice symétrique 20
3.3 Produit de matrices 20
3.3.1 Base de $M^{m,n}$ 21
3.4 Changement de base 21
3.5 Application aux applications linéaires 22

4 DÉTERMINANTS **23**
4.1 Permutations 23
4.2 Applications et formes multilinéaires alternées 23
4.2.1 Applications symétriques 23
4.2.2 Applications antisymétriques 23

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS

1.1 Définitions

Dans le cours le corps $\mathbb{K}$ considéré sera toujours $\mathbb{R}$ et dans certains cas qu'on précisera $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 (Groupe commutatif)**.** *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et vérifiant :*

1. $\forall x, y \in E$ *on* $x + y \in E$
2. $\forall x, y \in E$ *on* $x + y = y + x$
3. $\exists 0_E \in E$ *tel que* $\forall x \in E$ *on a* $x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*
4. $\forall x \in E$, $\exists x' \in E$ *tel que* $x + x' = x' + x = 0_E$. *On note* $x' = -x$

L'ensemble $(E, +)$ vérifiant les quatre axiomes ci dessus est appelé ***groupe commutatif ou groupe abélien****.*

Définition 1.1.2. *On appelle loi de composition externe sur E toute application de $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ qui au couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ associe un élément de E noté $\lambda.x$ ou plus simplement λx.*

Définition 1.1.3. *Le triplet $(E, +, .)$, c'est à dire l'ensemble E muni de la loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, est dit* ***espace vectoriel*** *si :*

1. $(E, +)$ *est un groupe abélien (donc vérifie les quatre axiomes de la définition (1.1.1).*
2. $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
3. $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4. $\forall x \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
5. $\forall x \in E$: $\quad 1x = x$.

Les éléments de E sont appelés des ***vecteurs*** *et ceux du corps $\mathbb{K}$ sont appelés des* ***scalaires****.*

Exercice 1.1.4. *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que $\forall x \in E$*

1. $x + x = 2x$
2. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
3. $(-1)x = -x$

Exemple 1.1.5.

1. *L'ensemble $(\mathbb{R}, +, .)$ muni de l'addition et de la multiplication naturelles est un espace vectoriel sur lui même.*
2. $(\mathbb{C}, +, .)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, +, .)$ muni de la loi de composition interne définie par :*
   $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

et de la loi de composition externe définie par :
$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

4. *L'ensemble des fonctions* $F(A, \mathbb{R})$ *d'un sous-ensemble* A *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *: Si* $f, g \in F(A, \mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on définit* $f + g$ *et* λf *pour tout* $x \in A$ *par :*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad et \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

5. *L'ensemble des fonctions continues* $C(]a, b[, \mathbb{R})$ *d'un intervalle* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
6. *L'ensemble des fonctions dérivables* $D(]a, b[, \mathbb{R})$ *d'un intervalle* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
7. *L'ensemble des fonctions infiniment dérivables* $D^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ *d'un intervalle* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
8. *On peut évidemment considérer dans les exemples précédents des intervalles fermés à gauche ou à droite.*
9. *L'ensemble des fonctions polynômes sur* $\mathbb{R}$.
10. *L'ensemble polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné* n *sur* $\mathbb{R}$
11. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.*
12. *L'espace* E *des applications continues de* $\mathbb{R}$ *dans lui même muni de la loi composition interne* $(fog)(x) = f(g(x))$ *et de la loi de composition externe* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ *n'est pas un espace vectoriel (Pourquoi ?)*

1.2 Sous espace vectoriel

Définition 1.2.1. *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$*. Soit* $F \subset E$ *non vide.* F *est un sous espace vectoriel de* E *si*

1. $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \quad \lambda u \in F$.

Théorème 1.2.2. *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$*. Soit* $F \subset E$ *non vide.* F *est un sous espace vectoriel de* E *si et seulement si*

$$\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a }, \quad u + \lambda v \in F$$

Théorème 1.2.3. *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$*. L'intersection de deux sous espace vectoriels de* E *est un sous espace vectoriel de* E.

Démonstration. Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. Comme $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, alors $F = F_1 \cap F_2$ est non vide.
Soit $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $u + \lambda v \in F_1$ et $u + \lambda v \in F_2$ donc $u + \lambda v \in F$ ■

Exercice 1.2.4. *Que peut on dire de la réunion de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel ? Donner un contre exemple.*

1.3 Systèmes de vecteurs

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle système de vecteurs toute famille de la forme $(v_1, v_2, ..., v_n)$ où $v_1, v_2, ..., v_n \in E$ et n entier quelconque.

1.3.1 Systèmes libres

Définition 1.3.1. *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de E est dit libre si*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}; \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E\right) \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}})$$

*Un système qui n'est pas libre est dit **système lié**.*

Remarque 1.3.2. *Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de E est lié s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ **NON TOUS NULS** tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$*

Exemple 1.3.3.

1. *Un système qui contient le vecteur nul est lié (c'est à dire n'est pas libre)*
2. *Un système qui contient deux fois le même vecteur est lié.*
3. *Un système qui contient un sous-système lié est lié.*
4. *Un système qui est contenu dans un sous-système libre est libre.*
5. *Dans $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynÃťmes de degré inférieur ou égal à n le système $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est libre.*
6. *Soit P_i un polynÃťme de la forme $X^i + a_{i-1}X^{i-1} + ... + a_0$, Dans $\mathbb{P}_n$ le système $(P_0, P_2, ..., P_n)$ est libre.*
7. *Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le système $(1, e^x, ..., e^{nx})$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1.3.2 Systèmes générateurs

Définition 1.3.4. *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de E est dit générateur si pour tout $x \in E$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Exemple 1.3.5. *Dans $\mathbb{R}^n$ tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ peu s'écrire sous la forme*

$$x = (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., x_n)$$

et encore

$$x = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, ..., 1)$$

et si on pose

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, ..., 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \\ ... \\ e_n = (0, 0, ..., 1) \end{cases}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

qui veut dire que le système $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est un système générateur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1.3.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 1.3.6. *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$. *Un système* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *de* E *est une base de* E *s'il est libre et générateur de* E. n *est alors appelé la dimension de* E, $dim E = n$.

Exemple 1.3.7.

1. *Dans l'exemple 1.3.5 le système* $(e_1, e_2, ..., e_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$.
   En effet, on a vu qu'il est générateur. Montrons qu'il est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. *et supposons que*
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0).$$
   Donc $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (0, 0, ..., 0)$ *et donc tous les* λ_i *sont nuls. CQFD.*
2. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $y'' + 4y = 0$ *est un espace vectoriel. Sa base est* (y_1, y_2) *où* $y_1(x) = sin(2x)$ *et* $y_2(x) = cos(2x)$.

Chapitre 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

2.0.1 Définitions

Définition 2.0.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K. Une application de E dans F est dite est dite application linéaire si elle vérifie :*

$$\forall x, y \in E \ , \ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2.1}$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in K \ , \ f(\lambda x) = \lambda f(x) \tag{2.2}$$

Exemple 2.0.2. *1. Pour tout réel a l'application*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & ax \end{array} \right. \tag{2.3}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans lui même.

2. L'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

3. L'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3) \end{array} \right. \tag{2.5}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & \int_0^1 u(t)dt \end{array} \right. \tag{2.6}$$

est une application linéaire de $C([0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

5. Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & u(\frac{1}{2}) \end{array} \right. \tag{2.7}$$

est une application linéaire de $C([0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

6. *Soit $C^1([0,1])$ l'espace des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & C^1([0,1]) & \longrightarrow & C([0,1]) \\ & u & \longrightarrow & u' \end{array} \right. \tag{2.8}$$

   est une application linéaire de $C^1([0,1])$ dans $C([0,1]$..

Définition 2.0.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*

1. *f est dite **isomorphisme** si f est une bijection de E dans F,*
2. *f est dite **endomorphisme** si $E = F$,*
3. *f est dite **automorphisme** si f est une bijection de E dans lui même (ie $E = F$).*

2.0.2 L'espace L(E,F)

Définition 2.0.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K. On note par $L(E,F)$ l'espace de toutes les applications linéaires de E dans F.*
Lorsque $E = F$ on le note $L(E)$

Opérations sur les applications linéaires

Définition 2.0.5. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.*

1. *On définit la somme (**la loi de composition interne**) de f et g par :*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ , \ \forall x \in E$$

2. *On définit le produit de f par un scalaire (**la loi de composition externe**) :*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \ , \ \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda \in K$$

Théorème 2.0.6. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. L'espace $L(E,F)$ des applications linéaires de E dans F muni des lois définies ci dessus est un espace vectoriel sur K.*

2.0.3 $E' =$ Dual de $E = L(E, \mathbb{R})$

Définition 2.0.7. *Soit E un espace vectoriel sur un corps K. On appelle dual de E l'espace $L(E, \mathbb{R})$.*
*Les éléments de E' sont appelés des **formes linéaires** sur E.*

Théorème 2.0.8. *L'application composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un même corps K. Soit

$$f : E \longrightarrow F \ , \ g : F \longrightarrow G$$

deux applications linéaires.
Alors

$$gof(x+y) = g\left(f(x+y)\right) = g\left(f(x) + f(y)\right) = g(f(x)) + g(f(y)) = gof(x) + gof(y)$$

et

$$gof(\lambda x) = g\left(f(\lambda x)\right) = g\left(\lambda f(x)\right) = \lambda g\left(f(x)\right) = \lambda gof(x)$$

Théorème 2.0.9. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors*

1. $f(0_E) = 0_F \quad , \quad f(-x) = -f(x)$.
2. *Si A est un sous espace vectoriel de E alors*
$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$
est un sous espace vectoriel de F.
3. *Si B est un sous espace vectoriel de F alors*
$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y), y \in B\}$$
est un sous espace vectoriel de E.

Démonstration.

1. $x + 0_E = x$ donc $f(x + 0_E) = f(x)$ comme f est linéaire alors $f(x) + f(0_E) = f(x)$, c'est à dire $f(0_E) = f(x) - f(x) = 0_F$ De même on a : $x + (-x) = 0_E$ donc $f(x) + f(-x) = f(0_E) = 0_F$ D'où $f(-x) = -f(x)$.
2. On montre $f(A)$ est stable pour les deux lois : Soit $y_1, y_2 \in f(A)$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ on doit montrer que
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(A)$$
Comme $y_1 \in f(A)$ alors $\exists x_1 \in A$ tel que $f(x_1) = y_1$
Comme $y_2 \in f(A)$ alors $\exists x_2 \in A$ tel que $f(x_2) = y_2$
Comme A est un sous espace vectoriel de E alors :
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$$
Et donc
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in f(A)$$
On applique la linéarité de f et on obtient
$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in f(A)$$
c'est à dire
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(A) \ \textbf{CQFD}$$
3. On montre que $f^{-1}(B)$ est stable pour les deux lois : Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, on doit montrer que
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$$
Comme $x_1 \in f^{-1}(B)$ alors $f(x_1) \in B$
Comme $x_2 \in f^{-1}(B)$ alors $f(x_2) \in B$
Comme B est un sous espace vectoriel de F alors :
$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in B$$
Comme f est linéaire ceci s'écrit :
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in B$$
c'est à dire que
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$$

■

2.0.4 Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 2.0.10. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Soit f une application linéaire de E dans F $(f \in L(E,F))$.*

1. *$f^{-1}(0_F)$ est un sous espace vectoriel de E. On l'appelle* ***noyau*** *de l'application linéaire f, et on le note $Kerf$.*
2. *$f(E)$ est un sous espace vectoriel de F. On l'appelle* ***image*** *de l'application linéaire f, et on le note Imf.*

Théorème 2.0.11. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Soit f une application linéaire de E dans F $(f \in L(E,F))$.*

1. *f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$*
2. *f est surjective si et seulement si $Imf = F$*

Démonstration.

1. $(\Rightarrow)$: Supposons f injective.
   Soit $x \in Kerf$, alors $f(x) = 0$ et donc $f(x) = f(0)$ et comme f est injective alors $x = 0$, c'est à dire $Kerf = \{0\}$
   $(\Leftarrow)$: Supposons $Kerf = \{0_E\}$.
   Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ alors comme f est linéaire, $f(x-y) = 0$, et donc $x - y \in Kerf$, et comme $Kerf = \{0\}$ alors $x - y = 0$ c'est à dire $x = y$ et donc f est injective.
2. C'est la définition de la surjectivité.

$\blacksquare$

Théorème 2.0.12. *Si f est un isomorphisme d'un espace vectoriel E sur un espace vectoriel F alors, f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*

2.0.5 Image de parties de E

Théorème 2.0.13. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Soit f une application linéaire de E dans F $(f \in L(E,F))$.*

1. *Si $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est un système générateur de E alors $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ est un système générateur de $f(E)$.*
2. *L'image d'un système lié de E est un système lié de F.*

Démonstration.

1. Soit $w \in f(E)$, alors $\exists v \in E$ tel que $f(v) = w$. Comme $(v_1, v_2, ..., v_n)$ engendre E alors $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ tels que :
   $$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$
   Et comme f est linéaire alors
   $$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$
   c'est à dire
   $$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$
   et donc le système $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ engendre $f(E)$.

2. Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ un système lié de E. Alors $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ non tous nuls tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = 0$$

et les λ_i non tous nuls. C'est à dire que le système $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ est lié.

■

2.0.6 Cas où E est de dimension finie

Théorème 2.0.14. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Supposons que E est de dimension finie ($dimE = n$).*
Soit $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une base de E.
Alors pour tout système $(b_1, b_2, ..., b_n)$ de F il existe une application linéaire ***unique*** *f telle que*

$$\forall i = 1, ..., n \text{ , on a : } f(a_i) = b_i$$

Démonstration.
■

Théorème 2.0.15 (et définition)**.** *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Supposons que E est de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F.*

1. *$f(E)$ est de dimension finie et $dimf(E) \leq dimE$*
2. *La dimension de $f(E)$ est le rang de l'application linéaire f, il est noté $rg(f)$, de plus :*

$$dimE = dimKerf + rg(f)$$

Corollaire 2.0.16. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps K. On note $n = dimE$ et $p = dimF$.*
Soit f une application linéaire de E dans F. Alors on a :

1. *$rg(f) = n$ si et seulement si f est injective.*
2. *$rg(f) = p$ si et seulement si f est surjective.*

Corollaire 2.0.17. *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie sur un corps K. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :*

1. *f est bijective (ie f isomorphisme de E sur F)*
2. *f est injective ($Kerf = \{0\}$)*
3. *f est surjective ($f(E) = F$)*

Chapitre 3

MATRICES

3.1 Introduction

Soient m, n deux entiers naturels strictement positifs. On note $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, f_2, ..., f_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Il est clair que

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0..., 0) \in \mathbb{R}^n \\ e_2 = (0, 1, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n \\ . \\ . \\ e_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0..., 0) \in \mathbb{R}^n \\ . \\ . \\ . \\ e_n = (0, 0, 0, ..., 1) \in \mathbb{R}^n \end{array}\right. \tag{3.1}$$

et que

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = (1, 0, 0..., 0) \in \mathbb{R}^m \\ f_2 = (0, 1, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m \\ . \\ . \\ f_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0..., 0) \in \mathbb{R}^m \\ . \\ . \\ . \\ f_m = (0, 0, 0, ..., 1) \in \mathbb{R}^m \end{array}\right. \tag{3.2}$$

On considère une application linéaire définie par :

$$\left\{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}\right. \tag{3.3}$$

On cherche une écriture de y en fonction de x. Comme $f(e_i) \in \mathbb{R}^m$ pour tout $i = 1, ..., n$ alors

$$\left\{\begin{array}{l} f(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + ... + a_{m1} f_m \\ f(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + ... + a_{m2} f_m \\ . \\ . \\ f(e_i) = a_{1i} f_1 + a_{2i} f_2 + ... + a_{mi} f_m \\ . \\ . \\ f(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + ... + a_{mn} f_m \end{array}\right. \tag{3.4}$$

C'est à dire pour tout $i = 1, ..., n$ on a :

$$f(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + ... + a_{mi}f_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}f_j$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$, posons $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ...x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

Donc

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_if(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}f_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_ia_{ji}f_j$$

On peut permuter les sommations :

$$y = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_ia_{ji}f_j$$

Et comme f_j ne dépend pas de l'indice i on peut le sortir de la sommation interne :

$$y = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \right) f_j$$

C'est à dire que y s'écrit dans la base de $\mathbb{R}^m$ sous la forme

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_jf_j$$

avec pour tout $j = 1, ..., m$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ . \\ . \\ y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \\ . \\ . \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ y_i \\ . \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Définition 3.1.1. *Soit $I = \{1, 2, ..., m\}$ et $J = \{1, 2, ..., n\}$ deux ensembles d'indices. On appelle matrice de type (m, n) (m lignes et n colonnes) sur un ensemble $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ toute application A de $I \times J$ dans K :*

$$\begin{cases} A: & I \times J & \longrightarrow & K \\ & (i, j) & \longrightarrow & A(i, j) = a_{ij} = a_i^j \end{cases} \tag{3.7}$$

On note une matrice de type (m,n) sous la forme d'un tableau ayant m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.2 Propriétés : Égalité, Somme, Multiplication par un scalaire

1. Deux matrices A et B de même type (m,n) sont égales si
$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, ..., m; \forall j = 1, ..., n.$$
2. Soient A et B deux matrices de même type (m,n). On définit la somme $A+B$ par
$$(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j), i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$
C'est à dire si on pose $C = A + B$ alors
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n.$$
3. Soit A une matrice de type (m,n) et $\lambda \in K$ alors la matrice λA est définie par
$$(\lambda A)(i,j) = \lambda A(i,j) = \lambda a_{ij}$$
C'est à dire si on pose $P = \lambda A$ alors
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, i = 1, ...m; j = 1, ..., n$$

Définition 3.2.1. *On note $M^{m,n}(K)$ l'espace des matrices de types (m,n) sur K.*

Théorème 3.2.2. *L'espace des matrices $M^{m,n}(K)$ défini ci dessus est un espace vectoriel sur le corps K.*

1. Élément neutre : La matrice nulle
$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$
2. L'élément opposé d'une matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A$ dont les termes sont
$$(-A)(i,j) = -a_{ij}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Exercice 3.2.3. *Soit p, q et r trois entiers naturels strictement positifs. On considère les applications linéaires suivantes*

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{cases} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{cases} g: & \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \mathbb{R}^r \\ & y & \longrightarrow & z = g(y) \end{cases} \tag{3.9}$$

deux applications linéaires.

1. *Écrire la matrice A_f associée à l'application linéaire f,*
2. *Écrire la matrice A_g associée à l'application linéaire g,*
3. *Montrer que l'application*

$$\left\{ \begin{array}{llll} gof: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^r \\ & x & \longrightarrow & z = gof(x) \end{array} \right. \tag{3.10}$$

   est linéaire,
4. *Écrire la matrice A_{gof} associée à l'application linéaire gof.*
5. *On pose $A = A_f, B = A_g$ et $C = A_{gof}$.*

   Calculer c_{ij} en fonction des a_{ik} et b_{kj}
6. *définir le produit AB de deux matrices $A \in M^{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in M^{q,r}(\mathbb{R})$.*
7. *On suppose que $p = q = r$ Montrer que la matrice*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

   est l'élément neutre de cette multiplication.
8. *....*

3.2.1 Matrice Transposée

Définition 3.2.4. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,m}} \in M^{m,n}$ une matrice. On appelle la matrice transposée de A la matrice notée ${}^tA$ définie par : ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} \in M^{n,m}$ où*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Remarque 3.2.5. *La transposée de la transposée d'une matrice A est la matrice A :*

$${}^t({}^tA) = A$$

Exemple 3.2.6. 1. *La transposée de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice inverse de A est

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

2. La transposée de la matrice

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \end{bmatrix}$$

est la matrice

$$^tU = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

Théorème 3.2.7. *Les espaces $M^{m,n}$ et $M^{n,m}$ sont des espaces vectoriels isomorphes.*

En effet l'application

$$\begin{cases} L: & M^{m,n} & \longrightarrow & M^{n,m} \\ & A & \longrightarrow & ^tA \end{cases} \tag{3.11}$$

est un isomorphisme (c'est à dire application linéaire bijective).

3.2.2 Matrice ligne

On appelle matrice ligne toute matrice A de type $(1, n)$, c'est à dire $A \in M^{1,n}(K)$:

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

3.2.3 Matrice colonne

On appelle matrice colonne toute matrice A de type $(m, 1)$, c'est à dire $A \in M^{m,1}(K)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix}$$

3.2.4 Matrice carrée

On parle de matrice carrée lorsque $m = n$, c'est dire $A \in M^{n,n}(K)$.

3.2.5 Matrice diagonale

On appelle matrice diagonale toute matrice $A \in M^{n,n}(K)$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_{ii} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.2.6 Matrice triangulaire

On appelle matrice **triangulaire inférieure** toute matrice A telle que

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } i \leq j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & . & . \\ a_{i1} & . & . & a_{ii} & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice **triangulaire supérieure** toute matrice A telle que

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } j \leq i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . & .a_{3n} \\ 0 & 0 & . & a_{ii} & a_{i,i+1} & .a_{in} \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque 3.2.8. *Si une matrice est triangulaire supérieure alors sa matrice transposée est triangulaire inférieure, et réciproquement.*

3.2.7 Matrice symétrique

Une matrice carrée A est dite symétrique si $\forall i, j = 1, ..., n$ on

$$a_{ij} = a_{ji}$$

c'est à dire

$$^{t}A = A.$$

Une matrice A est dite antisymétrique si

$$^{t}A = -A.$$

3.3 Produit de matrices

Soient A une matrice de type (m, n) et B une matrice de même type (n, p). On définit le produit AB par $C = AB$ de type (m, p) avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ , } \forall i = 1, ..., m \text{ , } \forall j = 1, ..., p$$

Exercice 3.3.1. *Soient A et B deux matrices de type (n, n). Montrer que*

$$^{t}(A.B) = {^{t}B}.{^{t}A}$$

Exercice 3.3.2. *Soit $\theta \in [-\pi, \pi[$ et $A(\theta)$ la matrice définie par* $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

1. *Soient $\theta, \theta' \in [-\pi, \pi[$, calculer le produit $A_\theta.A_{\theta'}$*
2. *Calculer $(A_\theta)^p$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$*

3. Montrer que $\forall \theta \in [-\pi, \pi[$ la matrice A_θ est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 3.3.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M(a, b)$ la matrice définie par :*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On note $\mathfrak{M}$ l'espace de toutes les matrices de la forme $M(a, b)$.

$$\mathfrak{M} = \{M(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(\mathfrak{M}, +, .)$ est un corps commutatif.

3.3.1 Base de $M^{m,n}$

Soit E_{ij} la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément qui se trouve dans la j -ème colonne $(j = 1, ..., n)$ sur la i -ème ligne $(i = 1, ..., m)$:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(i,j)=(m,n)} a_{ij} E_{ij}$$

Théorème 3.3.4. *Le système $(E_{11}, ..., E_{ij}, ..., E_{mn})$ est une base de $M^{m,n}$. Et l'espace $M^{m,n}$ est un espace vectoriel de dimension mn.*

Exemple 3.3.5.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

C'est à dire que le système $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ est une base.

3.4 Changement de base

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique matrice carrée de type (n, n) telle que :

$$f(x) = Ax \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

La matrice A s'écrit

$$A = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$$

avec $f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix}$,..., $f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ . \\ . \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, ,..., $f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une nouvelle base $(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ f va s'écrire dans cette nouvelle base sous la forme

$$f(x) = A'x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où
$$A' = (f(e'_1), f(e'_2), ..., f(e'_n))$$
Chaque élément de la nouvelle base s'écrit dans l'ancienne base comme suit :
$$\begin{cases} e'_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n \\ e'_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n \\ . \\ . \\ e'_i = p_{1i}e_1 + p_{2i}e_2 + ... + p_{ni}e_n \\ . \\ . \\ e'_n = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + ... + p_{nn}e_n \end{cases} \tag{3.12}$$
On construit alors une nouvelle matrice P :
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & p_{1j} & . & . & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & p_{2j} & . & . & p_{2n} \\ . \\ . \\ p_{i1} & p_{i2} & . & . & p_{ij} & . & . & p_{in} \\ . \\ . \\ p_{n1} & p_{n2} & . & . & p_{nj} & . & . & p_{nn} \end{pmatrix}$$
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les composantes d'un élément x dans la base (e_i) et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_i \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$ les composantes du même vecteur dans la base (e'_i) alors
$$X = PX' \text{ ; } X' = P^{-1}X$$

Théorème 3.4.1. *$(e_i)_{i=1,n}$, $(e'_i)_{i=1,n}$, étant deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K, la matrice P qui a pour colonne j les coordonnées de e'_j dans la base $(e_i)_{i=1,n}$ est inversible ; on l'appelle la matrice de passage de la base $(e_i)_{i=1,n}$ à la base $(e'_i)_{i=1,n}$, de plus*
$$P = M\left(id_E, (e_i), (e'_i)\right) \text{ , } P^{-1} = M\left(id_E, (e'_i), (e_i)\right).$$

3.5 Application aux applications linéaires

Théorème 3.5.1. *Soient E et F deux espace vectoriels de dimensions finies sur un corps K.*
Soient $(e_i)_{i=1,n}$, $(e'_i)_{i=1,n}$, deux bases de E et P la matrice de passage de (e_i) à (e'_i),
Soient $(f_i)_{i=1,m}$, $(f'_i)_{i=1,m}$, deux bases de F et Q la matrice de passage de (f_i) à (f'_i),
Soit f une application linéaire de E dans F.
Soit A la matrice de $f : (E, (e_i)) \longrightarrow (F, (f_i))$,
Soit A' la matrice de $f : (E, (e'_i)) \longrightarrow (F, (f'_i))$
alors
$$A' = Q^{-1}AP.$$
Lorsque $E = F$ alors
$$A' = P^{-1}AP.$$

Chapitre 4

DÉTERMINANTS

4.1 Permutations

Définition 4.1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle permutation toute bijection de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ dans lui même*

Théorème 4.1.2. *L'ensemble des permutations définies sur $\{1, 2, ..., n\}$ muni de la loi o (composition fog) est un groupe. On le note S_n, et on l'appelle groupe symétrique de*

4.2 Applications et formes multilinéaires alternées

4.2.1 Applications symétriques

Soient E un espace vectoriel sur un corps K. Soit F un groupe.
Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} f : E \times E \times E \times ... \times E \to F \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \to f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Définition 4.2.1. *On dit que f est symétrique si pour toute bijection $p : \{1, 2, ..., n\}$ dans lui même, et pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E \times E \times E \times ... \times E \to F$ on a*

$$f(x_{p(1)}, x_{p(2)}, ..., x_{p(n)}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

4.2.2 Applications antisymétriques

Définition 4.2.2.
1. *On dit que f est antisymétrique relativement aux variables $(x_i,\ x_j)$ $(i \neq j)$ si pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E \times E \times E \times ... \times E \to F$ on a*

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, ..., x_{\tau(i)} ..., x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

   où τ est la bijection qui permute seulement i et j ($\tau(i) = j$ et $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ pour tout $k \neq i$ et $k \neq j$.

2. *On dit que f est antisymétrique si elle est antisymétrique par rapport à tous les couples (x_i, x_j) $i \neq j$.*

Soit p une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$, Posons

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

Ce produit est un nombre strictement positif.

$$V_n = (n-1)!(n-2)!...3!2!$$

On pose de même

$$p(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (p(j) - p(i))$$

Exemple 4.2.3. *La permutation (en deuxième ligne on a mis les images $p(i)$) :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_4 = 3!2! = 6.2 = 12$$
$$p(V_4) = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (p(j) - p(i))$$
$$p(V_4) = (p(2) - p(1))\,(p(3) - p(2))(p(3) - p(1))(p(4) - p(3))(p(4) - p(2))(p(4) - p(1))$$
$$= (3 - 2)(4 - 3)(4 - 2)(1 - 4)(1 - 3)(1 - 2) = -12$$

Exemple 4.2.4. *La permutation*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$p(V_4) = (p(2) - p(1))\,(p(3) - p(2))(p(3) - p(1))(p(4) - p(3))(p(4) - p(2))(p(4) - p(1))$$
$$= (-1)(2)(1)(1)(3)(2) = -12$$

Exemple 4.2.5. *La permutation*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$p(V_4) = (p(2) - p(1))\,(p(3) - p(2))(p(3) - p(1))(p(4) - p(3))(p(4) - p(2))(p(4) - p(1))$$
$$= (-1)(2)(3)(-1)(2)(1) = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 4.2.6. *Pour toute permutation de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ on a $p(V_n) = \varepsilon(p)V_n$ où $\varepsilon(p) = \pm 1$*
On appelle signature de la permutation p ce nombre $\varepsilon(p)$.
Si $\varepsilon(p) = 1$ on dit que la permutation est paire.
Si $\varepsilon(p) = -1$ on dit que la permutation est impaire.
On aura donc :

$$f(x_{p(1)}, x_{p(2)}, ..., x_{p(i)} ..., x_{p(n)}) = \varepsilon(p) f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & a \\ 2 & 3 & b & 4 & 1 \\ 1 & c & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & d & 4 \\ e & -5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = ... + .. - .. + \varepsilon abcde + ..$$

Calculer ε.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & a \\ b & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & c & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & d & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & e & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = ... + .. - .. + \varepsilon abcde + ..$$

Calculer ε.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -4 & 2 \\ b & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & c & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & d \\ 3 & -5 & 1 & e & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = ... + .. - .. + \varepsilon abcde + ..$$

Calculer ε.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -4 & 2 \\ b & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & c & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & d \\ 3 & -5 & 1 & 5 & e \end{pmatrix}$$

$$det(A) = ... + .. - .. + \varepsilon abcde + ..$$

Calculer ε.