Calcul de $\sum i^2$ et Variance d'une loi uniforme discrète

On a $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ d'ou

$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

.

.

.

$4^3-3^3=3.3^2+3.3+1$

$3^3-2^3=3.2^2+3.2+1$

$2^3-1^3=3.1^2+3.1+1$

D'où la somme de tous ses termes est :

$$(n+1)^3-1^3=3.\sum_{i=1}^{i=n} i^2 + 3.\sum_{i=1}^{i=n} i + \sum_{i=1}^{i=n} 1$$

$(n+1)^3-1=\ 3.\sum i^2\ +3.[n.(n+1)/2]+n$

D'où $\sum i^2 =\ (n+1)^3-1-3.[n.(n+1)/2]-n$ et en développant et factorisant, on trouve :

$$\textbf{Et donc}\quad \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

don c on aura pour une variable aléatoire discrète uniforme tel que

- Loi uniforme
  - $X=\{1,2,\cdots,n\}$: $P(X=i)=\dfrac{1}{n}$

la variance :

V(X)=E(X2)-E2(X)

On a vu que $E(X)=(n+1)/2$

$E(X^2)=\sum i^2P(X=i)=\sum i^2.(1/n)=(1/n).\sum i^2=(n+1)(2n+1)/6$

d'où $V(X)=(n+1)(2n+1)/6\ -\ (n+1)^2/2^2\ =(n^2-1)/12$

$$V(X)=(n^2-1)/12$$