

CI 7

STATIQUE DES SOLIDES

I. DEFINITION DE L'EQUILIBRE D'UN SYSTEME MATERIEL

Un système matériel (S) est en équilibre, c'est-à-dire immobile, par rapport à un repère R si, et seulement si les coordonnées de tout point de (S) sont invariantes dans le temps.

II. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

1. ACTIONS MECANIKES EXTERIEURES A UN SYSTEME MATERIEL

FRONTIERE D'ISOLEMENT

Soit S un système matériel quelconque. On appelle *extérieur* du système matériel S , le milieu extérieur au solide, c'est-à-dire tout ce qui se trouve à l'extérieur de la frontière d'isolement.

On le note \bar{S} . Si U représente le symbole de l'univers considéré comme un ensemble fini, on a les deux relations suivantes : $U = S + \bar{S}$.

ACTIONS MECANIKES EXTERIEURES A S

Ce sont les A.M. exercées par \bar{S} sur S . Ces actions sont modélisable par un torseur qui s'exprime toujours en un point donné noté :

$$\{\tau_{\bar{S}/S}\}_{pt} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\bar{S}/S} \\ \vec{M}_{pt, \bar{S}/S} \end{array} \right\}_{\Re}$$

Remarque : pour déterminer ce torseur, il faut souvent le décomposer en plusieurs torseur, puis procéder à une somme des A.M. de chaque élément de \bar{S} sur S .

Un 1^{er} principe peut s'appliquer aux A.M. :

Soient S , S_1 et S_2 trois systèmes matériels quelconques mais $\bar{S} = S_1 + S_2$:

$$\{\tau_{\bar{S}/S}\} = \{\tau_{S_1/S}\} + \{\tau_{S_2/S}\}$$

POUR ADDITIONNER DEUX ACTIONS MECANIKES, IL FAUT EXPRIMER LEUR TORSEURS EN UN MEME POINT : IL FAUT DONC SAVOIR EXPRIMER UN TORSEUR EN N'IMPORTE QUEL POINT DE L'ESPACE.

Si l'action de S_1 sur S est connue en A : $\{\tau_{S_1/S}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\bar{S}/S} \\ \vec{M}_{A, \bar{S}/S} \end{array} \right\}$, alors l'action de S_1 sur S en B s'écrit :

$$\{\tau_{S_1/S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S}/S} \\ \vec{M}_{B,\bar{S}/S} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{B,\bar{S}/S} = \vec{M}_{A,\bar{S}/S} + \vec{R}_{\bar{S}/S} \wedge \overrightarrow{AB}$$

2. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (P.F.S.)

ENONCE

Un système matériel S est en équilibre par rapport à un repère R si et seulement si les A.M. extérieures appliquées à S vérifient la relation suivante :

$$\{\tau_{\bar{S}/S}\} = \{0\}$$

EXPRESSION VECTORIELLE DU P.F.S.

On sait que $\{\tau_{S_1/S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S}/S} \\ \vec{M}_{A,\bar{S}/S} \end{Bmatrix}$ avec A un point quelconque.

On en déduit deux théorèmes :

Théorème de la résultante :

$$\vec{R}_{\bar{S}/S} = \vec{0}$$

Théorème du moment résultant en A :

$$\vec{M}_{A,\bar{S}/S} = \vec{0}$$

Remarque : nous verrons en Dynamique que ces deux théorèmes peuvent s'appliquer pour un système matériel en mouvement de translation rectiligne et uniforme.

EXPRESSION SCALAIRE DU P.F.S.

On peut également écrire $\{\tau_{S_1/S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S}/S} \\ \vec{M}_{A,\bar{S}/S} \end{Bmatrix}$ avec A un point quelconque. L'application du P.F.S.

nous permet d'écrire les 6 équations scalaires et ainsi de résoudre Analytiquement le problème :

$$\begin{cases} \vec{R}_{\bar{S}/S} \cdot \vec{x} = 0 \\ \vec{R}_{\bar{S}/S} \cdot \vec{y} = 0 \\ \vec{R}_{\bar{S}/S} \cdot \vec{z} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{M}_{A,\bar{S}/S} \cdot \vec{x} = 0 \\ \vec{M}_{A,\bar{S}/S} \cdot \vec{y} = 0 \\ \vec{M}_{A,\bar{S}/S} \cdot \vec{z} = 0 \end{cases}$$

3. PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES

Soient S_1 et S_2 deux systèmes matériels *en contact*.

L'action mécanique exercée par S_1 sur S_2 est égale à l'opposée de l'action mécanique de S_2 sur S_1 :

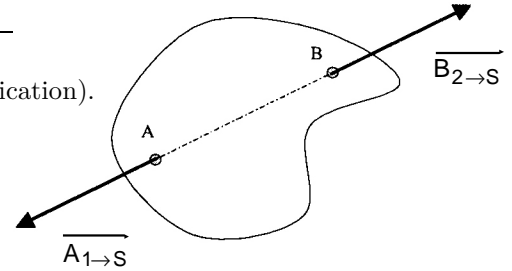
$$\{\tau_{S_2/S_1}\} = -\{\tau_{S_1/S_2}\}$$

4. ENSEMBLE SOUMIS A 2 FORCES

Si un système est en équilibre sous l'action de 2 glisseurs alors ces 2 glisseurs :

- sont opposés (même norme, même direction, sens contraire),

- et ont même droite d'action (passant par les points d'application).



III. CAS PARTICULIER DU PROBLEME PLAN

1. DEFINITION

On peut admettre qu'un mécanisme est « plan », si :

- la **géométrie des liaisons** d'un système matériel **présente un plan de symétrie**,
- les **AM extérieures** exercées sur ce système **sont symétriques par rapport à ce plan**, c'est à dire que :
 - les résultantes des AM extérieures sont parallèles au plan de symétrie,
 - les moments des AM extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

2. RESOLUTION ANALYTIQUE

Le PFS ne fournira qu'un maximum de 3 équations significatives, à savoir pour le théorème :

- de la résultante statique : 1 équation en projection sur x
1 équation en projection sur y
- du moment statique : 1 équation en projection sur z

NB : les seuls modèles de liaison que l'on trouvera avec l'hypothèse problème plan sont :

Nom	Représentation plane	Modélisation par les torseurs (écriture en colonne)	Modélisation par les torseurs (écriture en ligne)
Glissière de direction \vec{x}		La forme du torseur reste identique pour tout point A de l'espace. Mais attention, les valeurs des composantes ne sont pas forcément égales... $\{T_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{2 \rightarrow 1} & - \\ - & N_{A,2 \rightarrow 1} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} Y_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} \\ N_{A,2 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$
Pivot d'axe (O, \vec{z})		La forme du torseur reste identique pour tout point A de l'axe (O, \vec{z}) . Mais attention, les valeurs des composantes ne sont pas forcément égales... $\{T_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{2 \rightarrow 1} & - \\ Y_{2 \rightarrow 1} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
Ponctuelle de point de contact O et de normale \vec{y} (ou alors sphère-plan de point de contact O et de normale \vec{y})		$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_{\forall P \in (O, \vec{y})} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{2 \rightarrow 1} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_{\forall P \in (O, \vec{y})} = \begin{Bmatrix} Y_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

3. RESOLUTION GRAPHIQUE

HYPOTHESES

Pour pouvoir appliquer la méthode de résolution graphique :

- Il faut un problème plan (symétrie géométrique ainsi que symétrie au niveau des AM)
- Le système matériel isolé ne doit pas être soumis à plus de 3 actions mécaniques de support non parallèle modélisable par des glisseurs (forces).

BILAN DES ACTIONS MECANIKES

Chaque glisseur est défini par la connaissance de trois caractéristiques : son point d'application, sa direction et son intensité.

L'équilibre d'un système matériel se traduit par trois équations scalaires et ne permet donc de déterminer que 3 caractéristiques inconnues au plus.

Bilan des actions exercées sur le solide S			
Nom de l'action	Point d'application	Direction	Intensité
.....

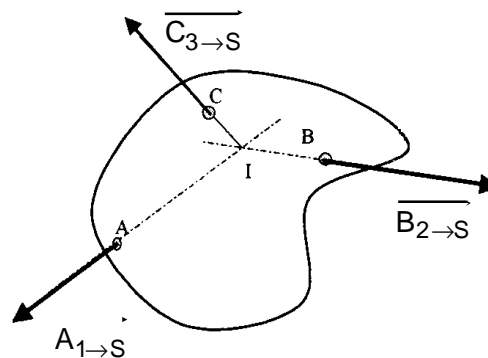
TRADUCTION GEOMETRIQUE DU THEOREME DE LA RESULTANTE

La somme des trois résultantes des forces est nulle :

Ces trois résultantes forment le dynamique des forces (encore appelé triangle des forces)

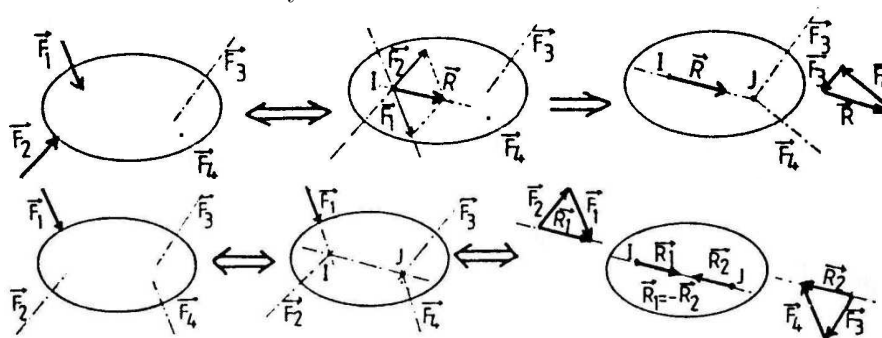
TRADUCTION GEOMETRIQUE DU THEOREME DU MOMENT RESULTANT EN A

Les trois supports se coupent en un même point.



SOLIDE SOUMIS A 4 FORCES

Il faut se ramener à un système soumis à 3 ou 2 forces



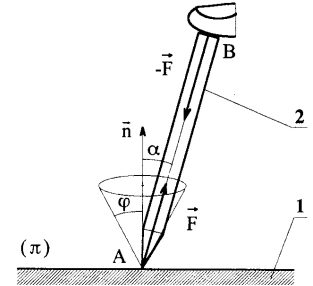
IV. NOTION D'ARC-BOUTEMENT.

Deux solides en contact sont dits arc-boutés l'un sur l'autre, sous l'effet d'actions mécaniques, si les deux solides restent immobiles l'un par rapport à l'autre, quelle que soit l'intensité de ces actions mécaniques.

Exemple d'un crayon contre une table

Un crayon 2 est appuyé contre le plan (π) d'une table 1 par le doigt d'une main. Si on néglige son poids, le crayon est en équilibre sous l'action de deux glisseurs opposés de droite d'action (AB).

Si l'inclinaison α de l'axe du crayon reste inférieure à l'angle d'adhérence limite φ , entre la mine et la table, alors la mine du crayon ne glissera pas sur la table, quelle que soit l'intensité F de l'action exercée par le doigt.



Exemple d'une échelle contre un mur

Une échelle 2, de centre de gravité G et de poids P , repose sur le sol 1 au point A et appuie contre le mur 3 au point B .

On suppose le contact en B sans frottement et en A avec frottement.

L'échelle est en équilibre sous l'action de trois glisseurs.

- en A : glisseur inconnu $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$,
- en B : glisseur de droite d'action normale au plan tangent $\vec{R}_{3 \rightarrow 2}$,
- en G : poids connu \vec{P} .

$\vec{R}_{3 \rightarrow 2}$ et \vec{P} étant concourants au point I , $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ a pour droite d'action (AI). Si l'inclinaison α de ce glisseur par rapport à la verticale reste inférieure à l'angle d'adhérence limite φ , l'échelle reste en équilibre quel que soit son poids.

