# Mathématiques appliquées à la gestion II

Yassir El-Azizi *Ing*, *Ph D*

## IV.Ecriture matricielle d’un système d’équations linéaires(Suite)

## V. Inversion de Matrice

## VI. Exemple de calcul Matrice 3x3

## IV. *Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires*

**Exemple 1.** Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

**Exemple 2.** Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 3x-y+z=1 \\ x+2y+3z=13 \\ x-z=2 \end{cases}$ s'écrit matriciellement

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

**Exemple 3.** Le système d'équations linéaires $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ou encore $AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

**Ecriture générale d'un système de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues.**
Soient $x_1, \ldots, x_n$, $n$ nombres réels. Un système à $n$ équations linéaires d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$ admet l'écriture générale suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases},$$

où les nombres $a_{i,j}$ et les nombres $b_k$ sont des nombres réels.

Ce système s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ou encore $AX=B$ où

$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Chercher les $n$ nombres inconnus $x_1, \ldots, x_n$ équivaut alors à chercher le vecteur colonne $X$.

Il existe une situation concernant la matrice $A$ dans laquelle on peut « résoudre » une bonne fois pour toutes le système. C'est la situation où la matrice $A$ est inversible :

**Théorème 10.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Soient $A$ une matrice cérrée de format $n$ et $B$ un vecteur colonne de format $n$.
Soit $X$ un vecteur colonne de format $n$.
Si la matrice carrée $A$ est inversible, alors le système $AX = B$ admet un vecteur colonne solution et un seul à savoir le vecteur colonne $X_0 = A^{-1}B$.
On dit dans ce cas que le système est un **système de Cramer**.

**Démonstration.** Soiant $A$ une matrice carrée inversible de format $n$ et $B$ un vecteur colonne de format $n$. Soit $X$ un vecteur colonne de format $n$.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_nX + A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Réciproquement, si $X = A^{-1}B$, alors $AX = AA^{-1}B = I_nB = B$.

Finalement, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

**Exemple.** Considérons le système $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+3y+5z=3 \\ 3x+4y+z=0 \end{cases}$ d'inconnues les nombres réels $x$, $y$ et $z$. Cec système s'écrit matriciellement $AX=B$ où $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si la matrice $A$ est inversible, ce système admet un unique vecteur colonne solution à savoir $X_0=A^{-1}B$.

La calculatrice fournit $A^{-1}=\begin{pmatrix} 17/15 & 1/3 & -8/15 \\ -14/15 & -1/3 & 11/15 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. En particulier $A$ est inversible car dans le cas contraire, la calculatrice affiche un message d'erreur. On calcule alors :

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} 17/15 & 1/3 & -8/15 \\ -14/15 & -1/3 & 11/15 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+3y+5z=3 \\ 3x+4y+z=0 \end{cases}$ admet un unique triplet de réels solution à savoir le triplet $(x,y,z)=(1,-1,1)$.

On donne la procédure pour obtenir l'inverse de $A$ avec une calculatrice.

| TI 83 + | CASIO GRAPH 35 + |
|---|---|
| **1)** Rentrer la matrice $A$<br>On tape $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Matrice}}$ puis EDIT puis ▶ 1 :[A].<br>On définit le format : 3×3 puis ENTER.<br>On remplit la matrice : 1,1= 2 puis ENTER puis 1,2= 1 puis ENTER …<br>puis $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Quit}}$ | **1)** Rentrer la matrice $A$<br>Appuyer sur $\boxed{\text{F1}}$ (▶ MAT) pour afficher l'éditeur de matrices.<br>Mettre MAT A en surbrillance. Définir le format de la matrice $A$ en choisissant F3 (DIM). Préciser le nombre de lignes et de colonnes (3 $\boxed{\text{EXE}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$).<br>Remplir la matrice (en ligne) 2 $\boxed{\text{EXE}}$ 1 $\boxed{\text{EXE}}$ -1 $\boxed{\text{EXE}}$ 1 $\boxed{\text{EXE}}$ … |
| **2)** On calcule l'inverse de $A$.<br>Pour cela, on récupère la matrice $A$ avec $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Matrice}}$ puis NAME puis ▶ 1 :[A] puis ENTER. On obtient [A] à l'écran.<br>L'inverse de $A$ est obtenu en appuyant sur $\boxed{x^{-1}}$ puis ENTER.<br>Si on veut les résultats sous forme fractionnaire, on intercale $\boxed{x^{-1}}$ puis $\boxed{\text{Math}}$ puis MATH 1 :Frac ENTER puis ENTER. | **2)** On calcule l'inverse de $A$.<br>Utiliser la séquence suivante :<br>$\boxed{\text{OPTION}}$ $\boxed{\text{F2}}$ (MAT) $\boxed{\text{F1}}$ (Mat)<br>$\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X},\theta,\text{T}}$ (A) $\boxed{)}$ ($x^{-1}$) $\boxed{\text{EXE}}$<br>Si la matrice n'est pas inversible, la calculatrice renvoie un message d'erreur. |

## V. Inversion de Matrice (exemple de calcul Matrice 3x3)

**Exemple :**

$$(S)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $n = m = 3$ $A$ est alors une matrice carrée d'ordre 3.
- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18$ : $\det A \neq 0$ et $A$ est alors une matrice inversible ($r = 3$).
- Le système $(S)$ est alors un système linéaire de Cramer.

### Résolution par l'inversion de la matrice du système

- On propose de résoudre un système linéaire $(S)$ de $n$ équations à $n$ inconnues, écrit sous sa forme matricielle $A.X = b$.

## V. Inversion de Matrice (exemple de calcul Matrice 3x3)

### *Etapes de la résolution :*

- On vérifie si le système $(S)$ est de Cramer :
  - Si $\det A = 0$ alors le système $(S)$ n'est pas de Cramer.
  - Si $\det A \neq 0$ alors le système $(S)$ est de Cramer, et on passe à sa résolution.
- Un vecteur $X$ est solution du système $(S)$ ssi $A.X = b$ ssi $X = A^{-1}b$ car $A$ est inversible.
  - On calcule $A^{-1}$ : $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^tC(A))$$
  - $X = A^{-1}b$ est alors l'unique solution du système $(S)$.

La Matrice inverse de A est donnée par la formule de Laplace.
Où ${}^tC(A)$ est la transposée de la Comatrice de A.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n$ et $\Delta_{ij}$ le cofacteur de l'élément $a_{ij}$ .

**Définition : Comatrice / Matrice Adjointe**

On appelle **comatrice** (ou **matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre $n$ , notée $\text{com}(A)$ (ou $\text{adj}(A)$ ) définie par :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \dots & \Delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix},$$

où $\Delta_{ij}$ est le cofacteur de l'élément $a_{ij}$ de $A$ défini à partir du mineur $|M_{ij}|$ par la relation : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

**Définition : Matrice Inverse**

On appelle **matrice inverse** de la matrice carrée $A$ d'ordre $n$ , la matrice, si elle existe, notée $A^{-1}$ telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , obtenue par la relation suivante :

$$A^{-1} = \frac{{}^t\text{com}(A)}{|A|} \quad (|A| \neq 0) ,$$

où ${}^t\text{com}(A)$ est la transposée de la comatrice de $A$ .

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n$ et $\Delta_{ij}$ le cofacteur de l'élément $a_{ij}$ .

**Définition : Comatrice / Matrice Adjointe**

On appelle **comatrice** (ou **matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre $n$ , notée $\mathrm{com}(A)$ (ou $\mathrm{adj}(A)$ ) définie par :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \dots & \Delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix},$$

où $\Delta_{ij}$ est le cofacteur de l'élément $a_{ij}$ de $A$ défini à partir du mineur $|M_{ij}|$ par la relation : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

**Définition : Matrice Inverse**

On appelle **matrice inverse** de la matrice carrée $A$ d'ordre $n$ , la matrice, si elle existe, notée $A^{-1}$ telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , obtenue par la relation suivante :

$$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|} \quad (|A| \neq 0) \;,$$

où ${}^t\mathrm{com}(A)$ est la transposée de la comatrice de $A$ .

Exemple

Calcul de la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} ; \ |A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 ; \ \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} ; \ |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = +6$$

$$\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ;$$

d'où $B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La valeur d'un déterminant $|A|$ d'ordre $n$ est donnée par un développement suivant :

une ligne $i$ : $|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \dots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

ou

une colonne $j$ : $|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \dots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

On appelle **mineur** $|M_{ij}|$ de l'élément $a_{ij}$ du déterminant d'ordre $n$ , le déterminant d'ordre $(n-1)$ obtenu en supprimant la ième ligne et la jème colonne de $|A|$ .

*Exemple*

- $n = 2 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$|M_{11}| = a_{22}, |M_{12}| = a_{21}, \dots$

- $n = 3 \quad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$

On appelle **cofacteur** $\Delta_{ij}$ de l'élément $a_{ij}$ , le mineur $|M_{ij}|$ affecté du signe $+$ ou $-$ suivant la relation : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

*Exemple*

- $n = 2 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\ |M_{11}| = +a_{22}$

- $n = 3 \quad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\ |M_{12}| = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$

## Propriétés du Déterminant
## Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 1**

Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant $|A|$ sont nuls alors $|A| = 0$ .

**Propriété : Propriété 2**

Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant $|A|$ sont proportionnelles (ou identiques) alors $|A| = 0$ .

*Exemple*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0$$ (la 3ème colonne est proportionnelle à la 1ère)

$$\begin{aligned} |A| &= \left[(1)(6)(-6) + (9)(8)(-3) + (4)(1)(2) - (2)(6)(-3) - (1)(8)(1) - (4)(9)(-6)\right] \\ &= [-36 - 216 + 8 + 36 - 8 + 216] \\ &= 0 \end{aligned}$$

# Propriétés du Déterminant
# Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 3**

Si l'on permute les lignes et les colonnes d'un déterminant, la valeur reste inchangée : $|{}^tA| = |A|$ .

*Exemple*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

d'où

$$|{}^tA| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 9 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$ déterminant de la matrice transposée de $A$ .

$$\begin{aligned} |A| &= [(1)(6)(5) + (9)(-2)(-3) + (4)(1)(-3)- \\ &\quad (-3)(6)(-3) - (4)(9)(5) - (1)(-2)(1)] \\ &= [30 + 54 - 12 - 54 - 180 + 2] \\ &= -160 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= [(1)(6)(5) + (4)(1)(-3) + (9)(-2)(-3)- \\ &\quad (-3)(6)(-3) - (9)(4)(5) - (1)(-2)(1)] \\ &= [30 - 12 + 54 - 54 - 180 + 2] \\ &= -160 \end{aligned}$$

Ainsi, $|A| = |{}^tA|$ .

## Propriétés du Déterminant
## Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 4**

Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, **le signe du déterminant est changé.**

*Exemple*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$ (permutation des colonnes 1 et 2)

$$|C| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$ (permutation des lignes 1 et 3)

$|A| = -160$ (calcul de la propriété 3)

$$\begin{aligned} |B| &= [(9)(4)(5) + (1)(-2)(1) + (6)(-3)(-3)- \\ &\quad (1)(4)(-3) - (6)(1)(5) - (9)(-3)(-2)] \end{aligned}$$

Donc, $|B| = [180 - 2 + 54 + 12 - 30 - 54] = 160$

Ainsi, $|B| = -|A|$ .

Aussi,
$$\begin{aligned} |C| &= [(-3)(6)(-3) + (1)(-2)(1) + (4)(9)(5)- \\ &\quad (1)(6)(5) - (9)(-2)(-3) - (4)(1)(-3)] \\ &= [54 - 2 + 180 - 30 - 54 + 12] \\ &= 160 \end{aligned}$$ ;

donc, $|C| = -|A|$ .

# Propriétés du Déterminant
# Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 5**

Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire $k$ , **le déterminant est multiplié par** $k$ .

*Exemple*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 6 \\ -3 & 1 & -15 \end{vmatrix}$$ (la 3ème colonne est multipliée par (- 3) )

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$ la 2ème ligne est multipliée par (2))

$|A| = -160$ (calcul de la propriété 3)

$$|D| = [(1)(6)(-15) + (9)(6)(-3) + (4)(1)(9) - (9)(6)(-3) - (4)(9)(-15) - (1)(1)(6)]$$

Donc, $|D| = [-90 - 162 + 36 + 162 + 540 - 6] = 480$

Ainsi, $|D| = -3|A|$ .

Aussi,
$$\begin{aligned} |E| &= [(1)(12)(5) + (9)(-4)(-3) + (8)(1)(-3) - (-3)(12)(-3) - (8)(9)(5) - (-1)(-4)(1)] \\ &= [60 + 108 - 24 - 108 - 360 + 4] \\ &= 320 \end{aligned}$$ ;

donc, $|E| = 2|A|$ .

# Propriétés du Déterminant
# Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 6**

Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant peut se représenter par la somme de deux ou plusieurs nombres, **le déterminant peut s'exprimer en fonction de la somme de deux ou plusieurs déterminants.**

*Exemple*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -5+2 \\ 4 & 6 & -2+0 \\ -3 & 1 & 8-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|F| &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\
&= [(1)(6)(8) + (9)(-2)(-3) + (4)(1)(-5) - \\
&\quad (-3)(6)(-5) - (4)(9)(8) - (1)(-2)(1)] \\
&= [48 + 54 - 20 - 90 - 288 + 2] \\
&= -294 \\
|G| &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= [(1)(6)(-3) + (9)(0)(-3) + (4)(1)(2) - \\
&\quad (2)(6)(-3) - (1)(0)(1) - (4)(9)(-3) \\
&= [-18 + 8 + 36 + 108] \\
&= +134
\end{aligned}$$

Sachant que $|A| = -160$ , nous avons bien : $|A| = |F| + |G| = -160$ .

## Propriétés du Déterminant
## Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 8**

Si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées d'ordre $n$ , alors :

$$|AB| = |A||B| = |B||A|$$

Cas particuliers : $B = A^{-1}$

$$|AB| = \left|AA^{-1}\right| = |I| \quad \Leftrightarrow \quad |A|\left|A^{-1}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

***Exemple***

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Calculons le produit : $AB$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 23 & -19 \\ 2 & 2 & -6 \\ 0 & 47 & 29 \end{pmatrix}$$

D'où

$$|AB| = \begin{vmatrix} -12 & 23 & -19 \\ 2 & 2 & -6 \\ 0 & 47 & 29 \end{vmatrix}$$

D'où

$$|AB| = \begin{vmatrix} -12 & 23 & -19 \\ 2 & 2 & -6 \\ 0 & 47 & 29 \end{vmatrix}$$

$$= [(-12)(2)(29) + (23)(-6)(0) + (2)(47)(-19) - (0)(2)(-19) - (2)(23)(29) - (-6)(47)(-12)]$$

$$= [-696 - 1786 + 1334 + 3384]$$

$$= -7200$$

Or, $|A| = -160$ et $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ ;

$$\begin{aligned} |B| &= [(3)(5)(7) + (-4)(0)(2) + (-1)(6)(2) - (2)(5)(2) - (-1)(-4)(7) - (6)(0)(3)] \\ &= [105 - 12 - 20 - 28] \\ &= 45 \end{aligned}$$

D'où $|AB| = |A||B| = (-160)(45) = -7200$

## Propriétés du Déterminant
## Règles de Sarrus

**Propriété : Propriété 7**

Si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute $k$ fois les éléments correspondants d'une autre ligne (ou colonne), **la valeur du déterminant reste inchangée**.

(Cette propriété est utilisée pour faire apparaître des zéros sur une ligne (ou colonne))

*Exemple*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= -16 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -16(-2+12) \\ &= -160 \end{aligned}$$

On a ajouté à la 2ème colonne, 3 fois la 3ème colonne pour faire **apparaître deux zéros**.

Calcul de la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = +6$$

$$\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ;$$

d'où $B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Exemple :**

⇨ Le système $(S)$ est donné par : $(S)\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 &= 6 \\ 2x_1+x_2+3x_3 &= 6 \\ 3x_1+2x_2+x_3 &= -12 \end{cases}$

- L'écriture matricielle du système $(S)$ est : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } b=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

- le système $(S)$ est de Cramer :

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=18 : \quad \det A \neq 0 \qquad A \text{ est alors une matrice inversible}$$

- Le vecteur $X$ est solution du système $(S)$ ssi $A.X=b$ ssi $X=A^{-1}b$.
  - Calcul de $A^{-1}$ : $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}({}^tC(A))$

➢ $C(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t(C(A)) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

➢ $A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/18 & 1/18 & 7/18 \\ 7/18 & -5/18 & 1/18 \\ 1/18 & 7/18 & -5/18 \end{bmatrix}$

➥ $X = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

➥ $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est alors l'unique solution du système $(S)$

## Résolution par la méthode de Cramer

- On propose de résoudre un système linéaire $(S)$ de $n$ équations à $n$ inconnues, écrit sous sa forme matricielle $A.X = b$.

### *Etapes de la résolution :*

- On calcule le déterminant de la matrice $A$ : $\det A$
  - Si $\det A = 0$ alors le système $(S)$ n'est pas de Cramer.
  - Si $\det A \neq 0$ alors le système $(S)$ est de Cramer, et on passe à sa résolution.

- On calcule les déterminants, dits de Cramer $D_{x_i}$, $1 \leq i \leq n$, où $D_{x_i}$ est le déterminant de la matrice $A$ où l'on a remplacé la colonne $i$ par le vecteur $b$ :

$$D_{x_i} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ 1 \leq i \leq n$$

- On calcule le vecteur solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ : $\quad x_i = \dfrac{D_{x_i}}{\det A}, \ 1 \leq i \leq n$

- $X = \begin{pmatrix} \dfrac{D_{x_1}}{\det A} \\ \vdots \\ \dfrac{D_{x_n}}{\det A} \end{pmatrix}$ est alors l'unique solution du système $(S)$.

**Exemple :**

- Le système $(S)$ est donné par : $(S)\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 = 6 \\ 2x_1+x_2+3x_3 = 6 \\ 3x_1+2x_2+x_3 = -12 \end{cases}$

- L'écriture matricielle du système $(S)$ est : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

- le système $(S)$ est de Cramer :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 : \quad \det A \neq 0 \qquad A \text{ est alors une matrice inversible}$$

- Calcul des déterminants de Cramer $D_{x_1}$, $D_{x_2}$ et $D_{x_3}$ :

$$\rightarrow D_{x_1} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -12 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 + 2L_1)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -108$$

$$\rightarrow D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - 3L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -30 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -30 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - 3L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & -30 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -30 \end{vmatrix} = 108$$

- Calcul du vecteur solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ : $\qquad (x_i = D_{x_i} / \det A, \ \ 1 \le i \le 3)$

$$\rightarrow x_1 = \frac{D_{x_1}}{\det A} = -\frac{108}{18} = -6 \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{\det A} = 0 \qquad x_3 = \frac{D_{x_3}}{\det A} = \frac{108}{18} = 6$$

- $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est alors l'unique solution su système $(S)$.

Exemple 2

Résolution du système :

$$\begin{cases} x + 3y + 4z &= 50 \\ 3x + 5y - 4z &= 2 \\ 4x + 7y - 2z &= 31 \end{cases}$$

Exemple 2

**Résolution du système :**

$$\begin{cases} x+3y+4z = 50 \\ 3x+5y-4z = 2 \\ 4x+7y-2z = 31 \end{cases}$$

La matrice $A$ du système étant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$,

calculons $A^{-1}$ par la formule $A^{-1} = \dfrac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|}$, sachant que $|A| = -8$ et

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -18 & 5 \\ -32 & 16 & -4 \end{pmatrix} \text{ où } \Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}{-8}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -24 \\ -40 \\ -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$