

Devoir Probabilités

A Rendre le 19.01.2018

Exercice 1 : Soit (Ω, P) un espace de probabilité, et soient A et B deux évènements.

Montrer que si $P(A) = P(B) = 0,9$, alors, $P(A \cap B) \geq 0,8$.

Dans le cas général, montrer que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Exercice 2 : Avec quelle probabilité une famille de 3 enfants comporte-t-elle au moins un garçon ?

Exercice 3 : Un candidat d'un jeu télévisé américain est face à trois portes. Derrière l'une d'elles se trouve le prix, - une voiture -. Le candidat se place devant la porte de son choix. Le présentateur de l'émission, qui lui sait où se trouve la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes et indique au candidat que la voiture ne s'y trouve pas. Le candidat peut à son tour ouvrir une porte. S'il découvre la voiture, il la gagne.

Un candidat décide d'adopter l'une des trois stratégies suivantes :

- a) ouvrir la porte devant laquelle il s'est placé à l'issue de son premier choix,
- b) ouvrir l'autre porte,
- c) tirer à pile ou face et, s'il obtient pile, ouvrir la porte devant laquelle il s'est placé à l'issue de son premier choix, ouvrir l'autre porte s'il obtient face.

L'une de ces trois stratégies est-elle préférable aux autres ?

Exercice 4 : On équipe un local souterrain de 5 ampoules électriques. On suppose que les durées de vie de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes, et de même densité f donnée par :

$$f(x) = 200/x^2 \text{ si } x > 200$$

$$= 0 \text{ sinon.}$$

On contrôle l'état des ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) des ampoules sont-elles hors d'usage.

Exercice 5 : Un stock important comprend 40% de transistors de type A, 60% de type B. Exprimée en heures d'utilisation, la durée de vie d'un transistor de type A suit la loi exponentielle de paramètre $a=1$. La durée de vie d'un transistor de type B suit la loi exponentielle de paramètre $b=2$.

On prend au hasard un transistor dans le stock. On note D sa durée de vie.

- 1) Que vaut la probabilité $P(D \geq 2)$?
- 2) a) Quelle est la fonction de répartition de D ? Est-elle continue en tout point de ?
b) La loi de D est-elle à densité ? Si oui, quelle est cette densité ?
c) Calculer $E(D)$.
- 3) On constate que le transistor qu'on a tiré fonctionne toujours au bout de deux heures d'utilisation. Avec quelle probabilité est-il du type A ?
- 4) On tire au hasard dans le stock 5 transistors. Avec quelle probabilité 2 d'entre eux exactement sont-ils du type A ?

Exercice 6 : Le nombre de visiteurs potentiels de la Foire de Bordeaux est $v=100000$.

Les visiteurs viennent indépendamment les uns des autres et avec la probabilité p ($0 < p < 1$). On note Y le nombre de personnes qui visitent la foire.

a) Trouver la loi de Y . Quelle sont l'espérance, la variance de Y ?

b) Soit x le prix d'entrée ($x \geq 0$) et R la recette correspondante. Quelle est l'espérance de R ? En supposant p et x reliés par la relation $p = e^{-cx}$, où c est une constante positive, trouver le prix d'entrée qui maximise $E(R)$. Quelle est alors la valeur de $E(R)$?

c) Déterminer le nombre maximal n tel que, avec une probabilité supérieure ou égale à 0.8, il y aura au moins n visiteurs.