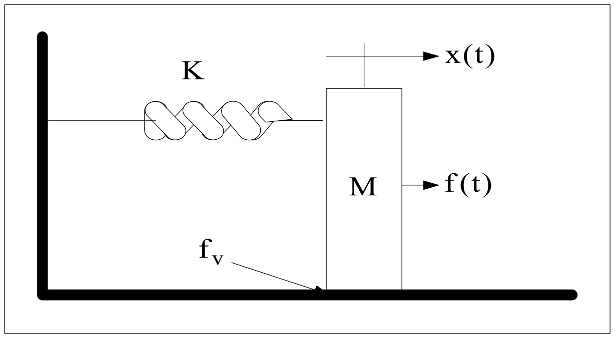
Problème 4.14

Un système est représenté par le schéma suivant :



où : M=1 kg, K = 5 N/m, f_v = 1 N.s/m, et f(t) = u(t) N – (Échelon unitaire).
Déterminer l'expression de x(t).

Solution

1) Calcul de la transformée de Laplace de x(t)

L'équation qui décrit la dynamique du système est :

$$\left[Ms^2 + f_v s + K\right]X(s) = F(s)$$

En tenant compte des valeurs des paramètres on a :

$$\left[s^2 + s + 5\right]X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 5)}$$

2) Calcul de x(t)

Les pôles (racines du dénominateur) de X(s) sont :

$s_1 = 0$, $s_2 = -0{,}5 + j2{,}18$ et $s_3 = -0{,}5 - j2{,}18$.

Décomposons X(s) en fractions partielles

$$X(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 0{,}5 - j2{,}18} + \frac{K_2^*}{s + 0{,}5 + j2{,}18}$$

Calcul de K_1 et K_2

$$K_1 = sX(s)\Big|_{s=s_1=0} = \left.\frac{1}{s^2 + s + 5}\right|_{s=0} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$K_2 = (s + 0{,}5 - j2{,}18)X(s)\Big|_{s=s_2} = \left.\frac{1}{s(s + 0{,}5 + j2{,}18)}\right|_{s=s_2=-0{,}5+j2{,}18} = -0{,}1 + j0{,}023 = 0{,}102\angle 167{,}082^o$$

On sait que :

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{K_1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{K_2}{s+0,5-j2,18} + \frac{K_2^*}{s+0,5+j2,18}\right] = K_1 + 2|K_2|\cos(2,18t + \angle K_2)$$

En tenant compte des valeurs de K_1 et K_2 :

$$x(t) = 0,2 + 0,204e^{-0,5t}\cos(2,18t + 167,082^o)$$

Problème 4.20

On donne les systèmes du deuxième ordre suivants:

$$T_1(s) = \frac{32}{s^2 + 3s + 16}$$

$$T_2(s) = \frac{0{,}04}{s^2 + 0{,}02s + 0{,}04}$$

Déterminer $\omega_n, K, \zeta, T_s, T_p, Tr$ et $\%OS$ de chaque système.

Solution

La forme générale de la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre est donnée par :

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pour déterminer ω_n, K, ζ on identifie la fonction de transfert du système avec G(s). Par exemple pour le système 1 l'identification de T_1(s) avec G(s) donne :

$$\omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{16} = 4 \text{rad}/\text{s}$$

$$K\omega_n^2 = 16 \Rightarrow K = \frac{32}{\omega_n^2} = \frac{32}{16} = 2$$

$$2\zeta\omega_n = 3 \Rightarrow \zeta = \frac{3}{2\omega_n} = \frac{3}{2x4} = \frac{3}{8} = 0{,}375\,.$$

Pour déterminer T_s, T_p, Tr et $\%OS$ on utilise les formules suivantes :

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_r = \frac{1{,}76\zeta^3 - 0{,}417\zeta^2 + 1{,}039\zeta + 1}{\omega_n}$$

$$\%OS = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Pour le système 1 on a:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0{,}375x4} = \frac{1}{0{,}375} = 2{,}67s$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{1-0{,}375^2}} = 0{,}847s$$

$$T_r = \frac{1{,}76\zeta^3 - 0{,}417\zeta^2 + 1{,}039\zeta + 1}{\omega_n} = \frac{1{,}76(0{,}375^3) - 0{,}417(0{,}375^2) + 1{,}039(0{,}375) + 1}{4} = 0{,}355\text{s}$$

$$\%OS = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\frac{0{,}375\text{x}\pi}{\sqrt{1-0{,}375^2}}} \approx 28\%.$$

Pour le système 2 on trouve les valeurs suivantes:

$\omega_n = 0{,}2\text{rad/s}$, K=1 $\zeta = 0{,}05$, Ts = 400s, Tp = 15,73s, Tr = 5,25s et %OS = 85,44%.

Problème 4.29

Déterminer les fonctions de transfert des systèmes dont les réponses indicielles (correspondent à une entrée échelon unitaire) sont données par les figures suivantes :

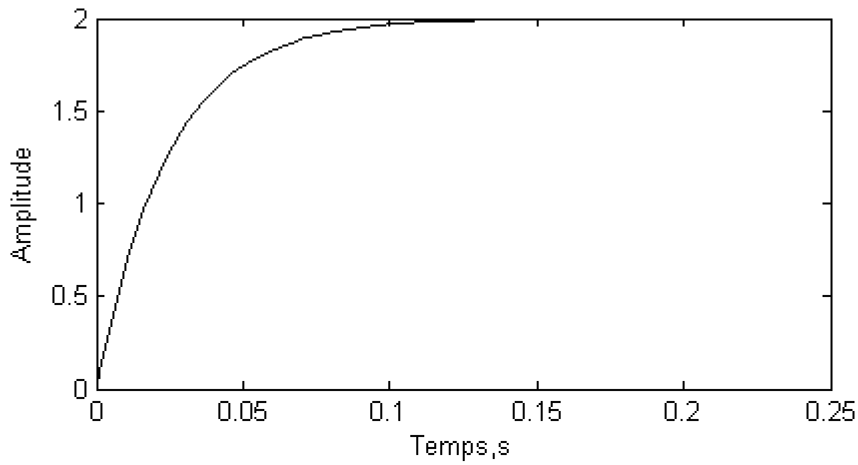


Figure 1 : Réponse indicielle du système 1

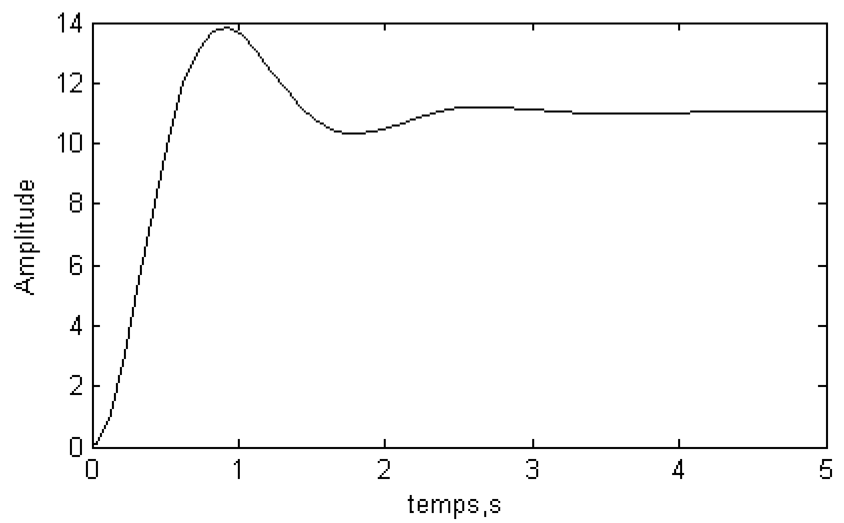


Figure 2 : Réponse indicielle du système 2

Solution

Le système 1 est un système de premier ordre dont la fonction de transfert a la forme générale suivante :

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Le gain statique K est défini par :

$$K = \frac{y_{per}}{A}$$

La valeur de la sortie du système en régime permanent y_{per} est indiquée sur la figure 3. L'amplitude du signal d'entrée A = 1 (Échelon unitaire). Donc,

$$K = \frac{2}{1} = 2$$

La constante de temps τ du système est le temps qui correspond à $0{,}63y_{per}$. À partir de la figure 3 on trouve : τ = 0,024s. Donc,

$$G(s) = \frac{2}{0{,}024s + 1}$$

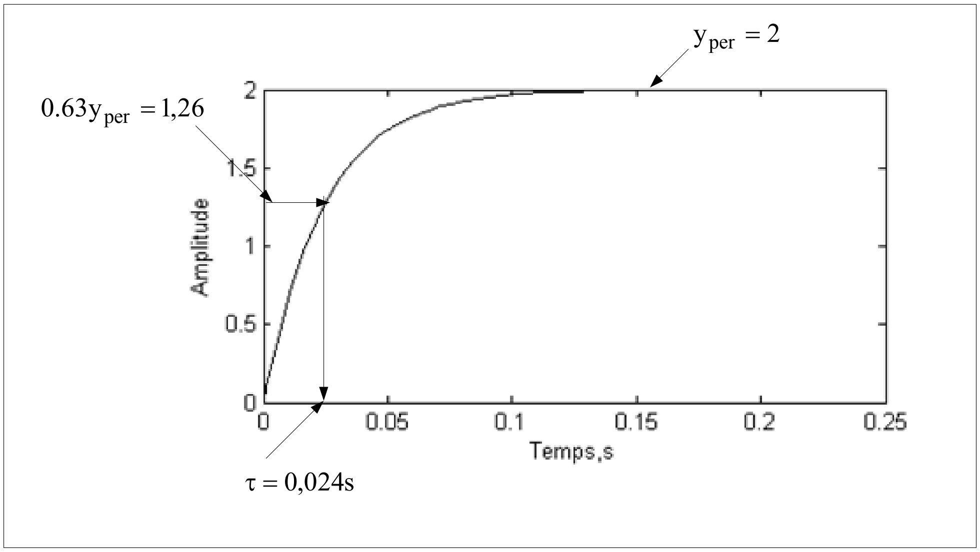


Figure 3 : Analyse de la réponse indicielle du système 1

Le système 2 est un système du deuxième ordre dont la fonction de transfert a la forme générale suivante :

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Le facteur d'amortissement du système ζ est:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$

Le pourcentage de dépassement est :

$$\%OS = 100\frac{y_{max} - y_{per}}{y_{per}}$$

La valeur de l'amplitude maximale y_{max} et de la valeur de la réponse en régime permanent y_{per} sont indiquées sur la figure 4. On trouve :

$$\%OS = 100\frac{13,8-11}{11} = 25,45\% .$$

D'où :

$$\zeta = \frac{-\ln(25,45/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(25,45/100)}} \approx 0,4$$

Pour déterminer la fréquence naturelle ω_n on peut utiliser la relation suivante:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

La valeur du temps de crête T_p est déterminée sur la figure 4. On trouve T_p = 0,9s.
D'où :

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0,9\sqrt{1-0,4^2}} \approx 3,81 \mathrm{rad/s}$$

Le gain statique est :

$$K = \frac{y_{per}}{A} = \frac{11}{1} = 11$$

Donc,

$$G(s) = \frac{11 x 3,81^2}{s^2 + 2x0,4x3,81s + 3,81^2} = \frac{159,677}{s^2 + 3,05s + 14,51}$$

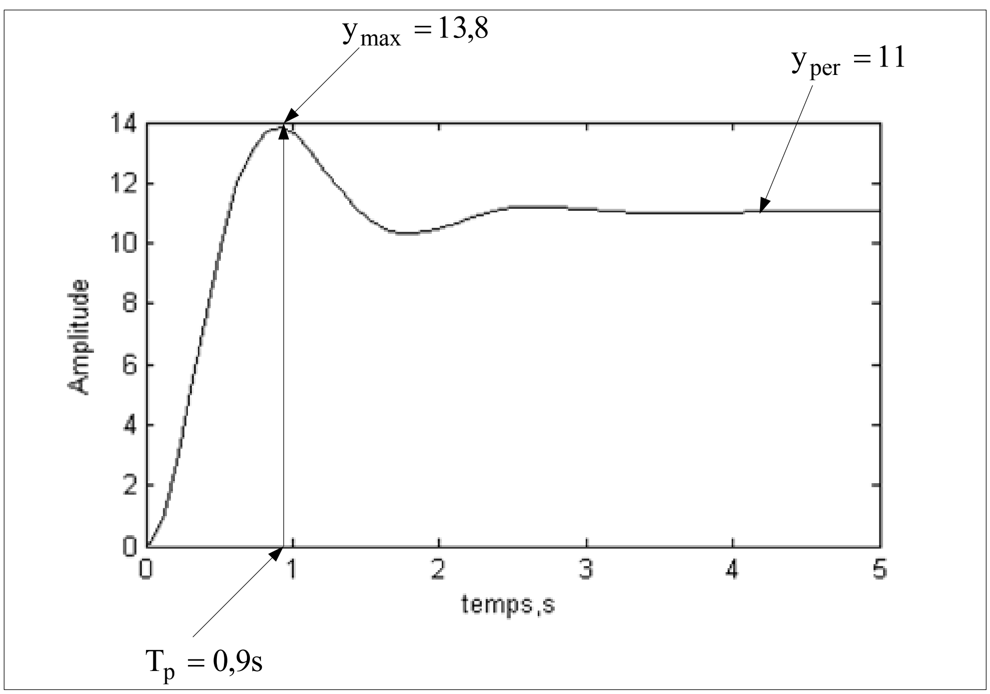


Figure 4 : Analyse de la réponse indicielle du système 2

Problème 4.30
On donne les transformées de Laplace des réponses indicielles du système 1 et système 2 suivantes :

$$C_1(s) = \frac{s+3}{s(s+2)(s^2+3s+10)}$$

$$C_2(s) = \frac{s+2{,}01}{s(s+2)(s^2+5s+20)}$$

On demande si les fonctions de transfert (FT) de ces systèmes peuvent être approximées par une FT du deuxième ordre. Si oui quelle est la FT correspondante?

Solution

1 Analyse du système 1

Les pôles de $C_1(s)$ sont :

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = -2, \qquad s_3 = -1{,}5 + j2{,}784 \text{ et } s_4 = -1{,}5 - j2{,}784$$

Les zéros de $C_1(s)$ sont :

$$z_1 = -3$$

Le pôle s_2 (-2) est le plus proche du zéro z_1(-3). Vérifions la possibilité de simplifier les termes (s+3) et (s+2) de $C_1(s)$. Pour cela déterminons d'abord la réponse $c_1(t)$.
Décomposons $C_1(s)$ en fractions partielles :

$$C_1(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+1{,}5+j2{,}784} + \frac{K_3^*}{s+1{,}5-j2{,}784}$$

On trouve les valeurs suivantes des K_i

$$K_1 = 0{,}15$$
$$K_2 = -0{,}0625$$
$$K_3 = -0{,}437 + j0.046 = 0.063\angle 133{,}551^o$$

On trouve :

$$c_1(t) = 0{,}15 - 0{,}0625e^{-2t} + 0{,}126e^{-1{,}5t}\cos(2{,}784t + 133{,}551^o)$$

Vérifions la condition suivante :

$$K_{\min} / K_{P_Z} \geq 10$$

où :

K_{P_Z} - L'amplitude (en valeur absolue) de la composante générée par le pôle le plus proche de zéro, P_Z.

$K_{\min}$ - L'amplitude (en valeur absolue) de la plus petite (en valeur absolue de l'amplitude) composante, générée par un certain pôle de la FT du système.

Dans ce cas $P_Z = s_2 = -2$, $K_{\min} = 0{,}126$ et $K_{P_Z} = 0{,}0625$. D'où :

$$K_{\min} / K_{P_Z} = \frac{0,126}{0,0625} = 2,016 < 10$$

Donc, la FT du système ne peut pas être approximée par une FT du deuxième ordre.

2 Analyse du système 2

Procédant de la même manière que pour le système 1, on peut démontrer que la réponse temporelle du système 2 est :

$$c_2(t) = 10^{-3}\left[50,25 - 357.10^{-3} e^{-2t} + 60,23 e^{-2,5t} [\cos(3,71t - 145,874^o)]\right]$$

Pour ce système on trouve :

$$K_{\min} / K_{P_Z} = \frac{60,23.10^{-3}}{357.10^{-6}} = 168,711 > 10$$

Donc, la réponse temporelle du système peut être approximée par :

$$C_2(s) \approx \frac{1}{s(s^2 + 5s + 20)}$$

La fonction de transfert correspondante est :

$$\mathrm{G}_2(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{C}_2(\mathrm{s})}{\mathrm{E}(\mathrm{s})}$$

Dans ce cas l'entrée du système est un échelon unitaire.
Donc,

$$\mathrm{E}(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

D'où :

$$G_2(s) \approx \frac{1}{(s^2 + 5s + 20)}$$