Pr. LAKHSSASSI
MRAD

UIC

ANALYSE2
CC 1

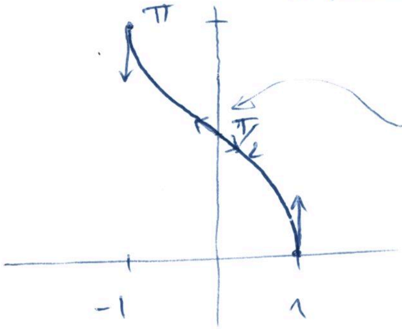
14 Avril 2017
CPI 1

CORRIGÉ

Questions de cours 4 points

a) 1pt $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

$x \longmapsto \arccos(x)$

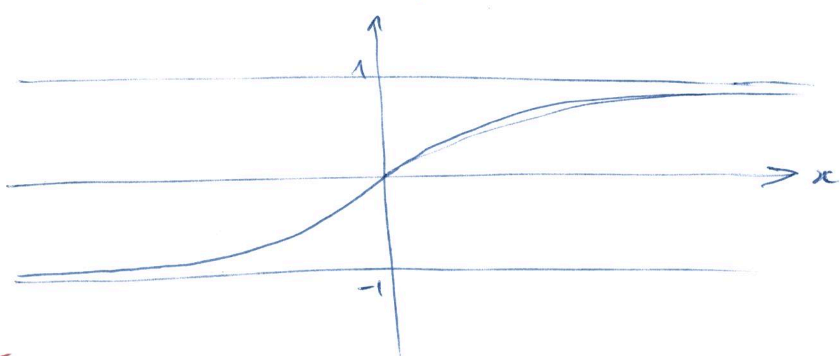


Rq: $\operatorname{Arccos}'(0) = \dfrac{1}{\cos'(\arccos(0))} = \dfrac{1}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -1$

b) 1pt $th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$

$x \longmapsto th(x)$

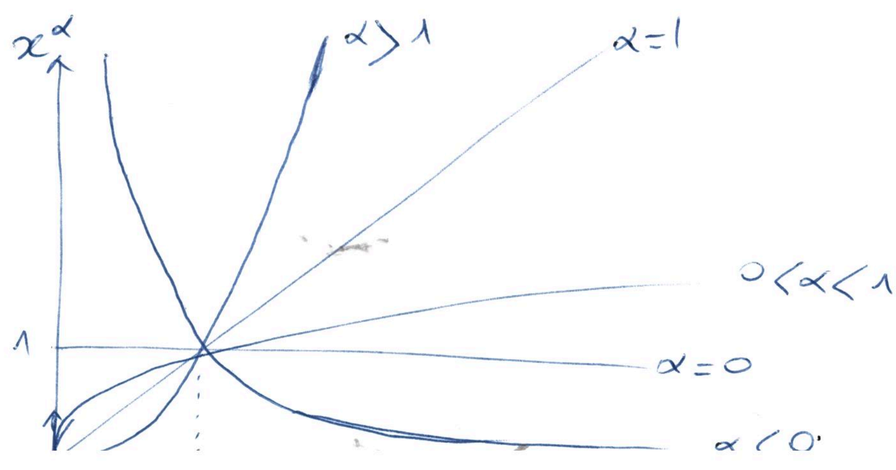
$th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



c) 1pt

$x^\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^\alpha$



d) 1pt f est d° en a ssi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et $\in \mathbb{R}$.

Exercice 1 : 5 points

$$f(x) = \arctan(\ln(x))$$

a) 1pt $x \in D_f \iff x \in D_{\ln}$ et $\ln x \in D_{\arctan} = \mathbb{R}$

$\iff x \in D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$

d'où $\boxed{D_f = \mathbb{R}_+^*}$

b) 1,5pts * $\ln$ est C° sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\arctan$ est C° sur $\mathbb{R}$

d'où $\underline{f \text{ est } C^{\circ} \text{ sur } D_f = \mathbb{R}_+^*}$ (1)

* f est la composition de deux fonctions strictement $\nearrow$

donc elle est $st \nearrow$. (A ajouter au cours sur les fonctions)

ou

$\ln$ est d° sur D_f, à valeurs dans $\mathbb{R}$
et $\arctan$ est d° sur $\mathbb{R} = \ln(D_f)$ d'où f est d° sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \ln'(x) \cdot \arctan'(\ln(x)) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + \ln^2(x)} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d'où $\underline{f \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } D_f = \mathbb{R}_+^*}$ (2)

* de (1) et (2), on déduit que $\boxed{f \text{ est une bijection sur } D_f}$

c) 1,5 pts

$g = f^{-1}$. $\quad g(\pi/4) = f^{-1}(\pi/4) = x_0 \iff f(x_0) = \pi/4$

$\iff \arctan(\ln(x_0)) = \pi/4$

arctan est bijective d'où $\iff \ln(x_0) = \tan(\pi/4) = 1$

ln bijective, d'où $\iff x_0 = e^1 = e$

d'où $\boxed{g(\pi/4) = f^{-1}(\pi/4) = e}$

et $\boxed{g'(\pi/4)} = \dfrac{1}{f'(g(\pi/4))} = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{1}{\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1+\ln^2(e)}} = \dfrac{1}{\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}} = \boxed{2e}$

ou

$\iff \ln x_0 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \underline{x_0 = e^{\tan \pi/4}}$

$\iff \underline{x_0 = e^1 = e}$

$g(x) = f^{-1}(x) = e^{\tan x}$

$\Rightarrow g'(x) = (1+\tan^2 x)e^{\tan x}$

$\Rightarrow g'(\pi/4) = 2e$

d) 1 pt

<u>Tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en $x_0 = \pi/4$:</u>

$(\Delta) : y = f^{-1}(\pi/4) + (x - \pi/4)\cdot(f^{-1})'(\pi/4)$

$= e + (x - \pi/4)\cdot 2e$

$$\boxed{(\Delta) : y = 2e\,x + e\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

---

ou

c) $f = \arctan(\ln u) \Rightarrow f^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$

$= u \circ v$ $\qquad = \exp(\tan)$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \exp\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = e^1 = e$

Exercice 2 : 4,5 points

a) 1,5 pts $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$x \in D_f \iff x \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

d'où $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$

① arctan est d° sur $D_f = \mathbb{R}^*$ car d° sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est d° sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$

② d'où aussi $x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est d° sur $\mathbb{R}^*$.

de ① et ②, $\boxed{f \text{ est d° sur } D_f = \mathbb{R}^*}$

(pas d'étude de dérivabilité en 0 car $0 \notin D_f$)

et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{f'(x)} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \boxed{= 0}$

b) 1,5 pts $g(x) = \begin{cases} x.\ln(x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / (x > 0 \text{ et } x \in D_{\ln}) \text{ ou } x = 0\}$
$= \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$

$\boxed{D_g = \mathbb{R}^+}$

* $x > 0$:

ln est d° sur $\mathbb{R}_+^*$
id aussi sur $\mathbb{R}$
donc $\boxed{g \text{ d° sur } \mathbb{R}_+^*}$ par $\times$ de f°s d°.

* en 0^+ :

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \neq 0}} \frac{x.\ln x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$\boxed{\text{d'où } g \text{ n'est pas d° en } 0}$

Cl : $\boxed{g \text{ est d° seulement sur } \mathbb{R}_+^*}$

c) 1, 1pt3

$h(x) = |x| \cdot \sqrt{x^2 - x^3}$: $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x^3 \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x^2(1-x) \geq 0\}$

$= \ ]-\infty, 1]$

$\boxed{D_h =]-\infty, 1]}$

$\forall x \in D_h, \quad h(x) = |x| \cdot \sqrt{x^2(1-x)} = |x|^2 \sqrt{1-x} = x^2 \cdot \sqrt{1-x}$

* $k : x \longmapsto 1-x$ est d° sur $D_h \setminus \{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
car polynôme

$\sqrt{\ }$ est d° sur $\mathbb{R}_+^* = k(D_h \setminus \{1\})$

d'où h est d° sur $D_h \setminus \{1\} =]-\infty, 1[$

* en 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 \sqrt{1-x} - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{-\sqrt{1-x}} = -\infty$$

d'où h n'est pas d° en 1

Cl : $\boxed{\text{h est } d^{\circ} \text{ seulement sur }]-\infty, 1[}$

et $\forall x \in]-\infty, 1[$, $\boxed{h'(x) =} \left(x^2 \sqrt{1-x}\right)' = 2x\sqrt{1-x} + x^2 \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$$= 2x\sqrt{1-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{4x(1-x) - x^2}{2\sqrt{1-x}} \boxed{= \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}}}$$

L

Exercice 3 : 3,5 points

a) 1,5 pts

$f(x) = \tan(\arccos(x))$, on a $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$x \in D_f \iff x \in D_{\arccos} = [-1,1]$ et $\arccos(x) \in D_{\tan}$

$\iff x \in [-1,1]$ et $\arccos(x) \in D_{\tan}$

or $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) \in [0,\pi]$ et $[0,\pi] \cap D_{\tan} = [0,\pi] \setminus \{\pi/2\}$

d'où $x \in D_f \iff \arccos(x) \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \in [-1,1]$

$\iff x \in [-1,1]$ et $x \neq 0$ d'où $\boxed{D_f = [-1,0[\cup]0,1]}$

b) 2pts

$\forall x \in [-1,0[\cup]0,1]$, $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)}$

$\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \pm\sqrt{1-x^2}$

or $\arccos x \in [0,\pi]$, donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$

d'où $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ et on a $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$

d'où $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Exercice 4 : 3 points

0,5 Soit la fonction ln, soit $x > -1$, d'où $x+1 > 0$

0,25 On considère l'intervalle $[1, x+1]$ ou $[x+1, 1]$ avec $x > -1$

$\downarrow$ si $x+1 > 1 \iff \boxed{x > 0}$

$\downarrow$ si $x+1 < 1 \iff \boxed{-1 < x < 0}$

Sts : * si $x > 0$, $[a,b] := [1, x+1]$

ln est d° sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d° sur $[1, x+1]$ d'où :

0,5 $\begin{cases} \ln \text{ est } \mathcal{C}^\circ \text{ sur } [1, x+1] \\ \text{et } d^\circ \text{ sur }]1, x+1[\end{cases}$

0,5 et sur $]1, x+1[$, $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ est encadrée strictement par $\frac{1}{x+1}$ et 1,

d'où par l'$\boxed{\text{IAF}}$:

0,5 $$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1) - \ln 1}{x+1-1} < 1$$

0,5 0,25 d'où $\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1$ d'où $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ (car $x>0$) 0,25

0,25 d'où $\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x}$

0,5 * si $-1 < x < 0$: $[a,b] := [x+1, 1]$, $x+1 > 0$

$\Rightarrow$ ln est d° sur $]x+1, 1[$, $\mathcal{C}^\circ$ sur $[x+1, 1]$

et sur $]1+x, 1[$, $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ est encadrée strictement par 1 et $\frac{1}{x+1}$:

$$1 < \frac{\ln(1) - \ln(x+1)}{1-(x+1)} < \frac{1}{x+1} \Rightarrow 1 < \frac{\ln(x+1)}{x} < \frac{1}{x+1}$$

$x < 0 \Rightarrow$ $$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall -1 < x < 0, \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x}$$

BONUS

0,5 * pour $x = 0$, cette inégalité est évidente : $\left(\frac{x}{x+1}\right)(0) = 0 = (x)(0) = \ln(0+1)$

(c'est une égalité)

(on) par le $\boxed{\text{TAF}}$;

exple : si $x > 0$,

0,5 $\left\{ \begin{array}{l} \ln \ d^{\circ} \text{ sur }]1, x+1[\\ \mathcal{C}^{\circ} \text{ sur } [1, x+1] \end{array} \right.$

0,5 $\Rightarrow \exists c \in]1, x+1[\ / \ \underset{\overset{\shortparallel}{1/c}}{\ln'(c)} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{1+x-1} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

0,5 $1 < c < x+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < 1$

0,5 $\Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1 \quad \Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x}$

(on) $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0, x]$ si $x \in]-1, 0[$ et sur $[0, x]$ si $x > 0$

(on) $f(t) = x \ln t$ sur $[1+x, 1]$ si $-1 < x < 0$
et sur $[1, 1+x]$ si $x > 0$ } FoFANA G3

(on)

$f(t) = \ln t$ sur $\left[\dfrac{x}{1+x}, x\right]$ . . . . marche aussi !

$\longrightarrow$ ABOUL FARAH G1

(on) $f(t) = \ln t$, sur $[x+1, (x+1)^2]$!! | Rhayt Chadi G2

pas mal : $\forall x > -1$,

$x + 1 > 0$