Chapitre 1 : l'intérêt simple

1°) Définition et formules

a) Le prêt d'un capital constitue un service dont la rémunération est l'intérêt. L'intérêt est donc le loyer de l'argent ; c'est le prix payé par l'emprunteur au prêteur pour utiliser un capital pendant une durée donnée. Un prêt est ainsi un placement pour le prêteur.

b) Le taux d'intérêt ou taux de placement est l'intérêt produit ou rapporté en un an par un capital de 100 unités monétaire.

c) Formules de base : le montant de l'intérêt simple est proportionnel au capital placé ou prêté, au taux et à la durée de placement ou de prêt.

Si on désigne par :

I : le montant de l'intérêt.

C : le capital placé ou emprunté.

T : le taux d'intérêt.

N : la durée de placement ou du prêt.

On aura:

$$I = \frac{CNT}{100} quand.la.durée.est.en.année$$

$$I = \frac{CNT}{200} quand.la.durée.est.en.semestre$$

$$I = \frac{CNT}{400} quand.la.durée.est.en.trimestre$$

$$I = \frac{CNT}{1200} quand.la.durée.est.en.mois$$

$$I = \frac{CNT}{36000} quand.la.durée.est.en.jours$$

2°) Remarques

a) Des cinq formules on voit que l'année commerciale est égale à 360 jours, soit 12 mois de l'année, 1 mois commercial est égal à 30 jours.

b) Dans le décompte d'une durée entre deux dates de la forme j/m/N et j'/m'/N', on compte le nombre exacte de jours de chaque mois, la date initiale (jour du dépôt) exclue et la date finale (jour du retrait) incluse.

c) Dans le décompte d'une durée entre deux dates de la forme j/m/N et j/m'/N', on compte le nombre de mois.

3°) Exemples

a) Calculer l’intérêt produit par un capital de 25.000 dirhams placé à 2,95 % du 13 janvier 2008 au 28 mai de la même année.

b) Calculer l’intérêt produit par un capital de 25.000 dirhams placé à 2,95 % du 13 janvier 2008 au 13 mai de la même année.

5°) Valeur actuelle et valeur acquise

- La valeur acquise d'un capital est ce même capital augmenté de l'intérêt qu'il a produit pendant une durée N.
- La valeur actuelle d'une valeur acquise est le capital qui, augmenté de l'intérêt qu'il a produit pendant une durée N, sera égal à la dite valeur acquise.

6°) Taux moyen de placement

Soient C_1, $C_2 \ldots C_k$ k capitaux placés respectivement aux taux T_1, $T_2 \ldots T_k$ pendant les durées respectives suivantes N_1, $N_2 \ldots N_k$. L'intérêt globale produit par ces capitaux est:

$$I = \frac{C_1 T_1 N_1 + C_2 T_2 N_2 + \ldots + C_k T_k N_k}{36.000} \quad (1)$$

Le taux moyen de ces k placements est un taux unique Tm, qui appliqué à l'ensemble des capitaux générerai le même intérêt global:

$$I = \frac{C_1 T_m N_1 + C_2 T_m N_2 + ... + C_k T_m N_k}{36.000} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} C_i T_i N_i}{\sum_{i=1}^{i=k} C_i N_i}$$

Chapitre 2 : L'escompte commerciale

1°) Définitions

- Un effet de commerce est un instrument de crédit et non pas un moyen de paiement. Il représente une dette à payer.
- Deux éléments caractérisent la dette:
  - ❖ La date d'échéance: jour convenu entre les deux parties pour le paiement de la dette.
  - ❖ La valeur nominale: le montant de la dette.
- La durée de l'effet est le nombre de jours ou de mois séparant la date d'émission de l'effet et sa date d'échéance.
- La négociation d'un effet est l'opération de vente de cet effet à une date avant l'échéance. On dit que l'effet est escompté.
- L'escompte commerciale d'un effet consiste à payer au bénéficiaire de l'effet, la valeur escomptée de l'effet contre sa valeur nominal avant l'échéance.
- La différence entre la valeur nominal et la valeur escompté s'appelle l'escompte.

2°) Formule de l'escompte

L'escompte est l'intérêt retenu par la banque (escompteur) sur la valeur nominale de l'effet qui s'écoule depuis le jour de la négociation (exclu) jusqu'au jour de l'échéance (inclus).

Si on désigne par :

E : le montant de l'escompte.

Vn : la valeur nominal.

T : le taux d'escompte.

N : la durée d'escompte.

Ve: la valeur escomptée ou valeur actuelle de l'effet.

On aura:

$$E = \frac{V_n TN}{36.000}$$

$$V_e = V_n - E$$

3°) L'agio

L'agio est l'intérêt total prélevé et il comprend l'escompte, les commissions et la TVA.

Remarques:

- La durée réel de l'escompte est souvent majorée d'un, deux ou trois jours appelés nombre de jour ou jours de banque.
- La TVA est appliquée sur l'escompte et sur certaines commissions.

4°) La valeur nette d’escompte

C’est la somme réellement remise au propriétaire de l’effet.

Valeur nette = Valeur nominale - Agio

5°) Le taux réel d'escompte

La TVA et les divers commissions augmentent le montant prélevé par la banque et par voie de conséquence le taux le supporté par le bénéficiaire de l'effet. Ce taux majoré est appelé taux réel d'escompte T_r :

$$T_r = \frac{Agio.36000}{V_n N}$$

6°) Équivalence de deux effets

Définition:

Deux effets sont équivalents si escomptés au même taux ils ont la même valeur actuelle à une certaine date.

Cette date est la date d'équivalence, à intérêt simple cette date est unique.

Si on désigne par :

V_1 et V_2: la valeur nominale du premier et second effet.

T : le taux d'escompte.

N_1 et N_2 : le temps qui sépare la date d'équivalence de l'échéance du premier et du second effet.

$$\begin{cases} V_1 - \dfrac{V_1 N_1 T}{36000} = V_2 - \dfrac{V_2 N_2 T}{36000} \\ \text{N2 – N1 = Nombre de jours séparent les deux échéances} \end{cases}$$

But de l’opération

Le but est de remplacer un effet par un deuxième dont l’échéance peut être antérieure ou ultérieure à celle du premier.

C’est le cas par exemple de l’entreprise qui,pour des problèmes de trésorerie, sait qu’elle ne pourra pas honoré son engagement le jour de l’échéance convenu. D’où c’est plus pratique de remplacer le premier effet par un second dont la valeur nominale est supérieure à celle du premier que de tomber dans un impayé.

Le jour de remplacement tient lieu de date d’équivalence.

7°) Échéance commune (équivalence de plusieurs effets)

Définition

L'échéance commune consiste à poser l'équivalence d'un effet avec un groupe d'effets.

Équation d'équivalence

Soient k effets de valeur nominale $V_1, V_2 \dots V_k$ et ayant respectivement à courir N_1, $N_2 \dots N_k$. Soit un effet de valeur nominale V et ayant N jours à courir.

À la date d'équivalence, l'équation d'équivalence s'écrit:

$$V - \frac{VTN}{36000} = \sum_{i=1}^{i=k} V_i - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{V_i N_i T}{36000}$$

Applications

Les deux applications les plus courantes de l'échéance commune sont:

- Le remplacement de plusieurs effets par un seul.
- L'achat à crédit

a) Remplacement de plusieurs effets par un seul.

5 effets de 7800 dh, 15000 dh, 8950 dh, 12000 dh et 13000 dh ont aujourd’hui à courir respectivement 53, 24, 67, 44 et 61 jours. Quel est au taux de 6 % la valeur nominale de l’effet de remplacement payable dans 60 jours.

V	N	VN	VNT
7800	53	413400	2480400
15000	24	360000	2160000
8950	67	599650	3597900
12000	44	528000	3168000
13000	61	793000	4758000
56750			16164300

On trouvera 56870 dh.

b) L’achat à crédit

Les calculs portent le plus souvent sur la valeur des mensualités à payer ou sur le taux de crédit. L’équation d’équivalence s’écrit le jour de l’achat.

Exemple:

Pour l’achat d’un matériel de montant égal à 120000 Dh, on propose les modalités de paiement suivantes :

25% comptant, le reste en 12 mensualités constantes, la première venant à échéance un mois après l’achat. Le taux étant de 13%.

- ❖Calculer la valeur de ces mensualités.
- ❖Calculer la valeur actuelle de la cinquième mensualité.

8°) Échéance moyenne

Définition

L'échéance moyenne est le cas particulier de l'échéance commune ou la valeur de l'effet unique est égale à la somme de valeurs nominales des effets à remplacer. L'équation d'équivalence devient:

$$N = \frac{\sum V_i N_i}{\sum V_i}$$

Remarque

L'échéance moyenne est indépendante du taux et de la date d'équivalence. On peut choisir donc la date d'échéance du premier effet comme date d'équivalence.

Exercice:

Quelle est l'échéance moyenne de trois effets de 1500, 1700 et 2000 dh, dont les échéances respectives sont le 22 mai, le 13 juin et le 12 mai?

Chapitre 3 : Les intérêts composés

1°) Définitions

Un capital est placé à intérêts composés lorsque à la fin de la première période, l'intérêt simple de cette période est ajouté au capital pour produire à son tour un intérêt au cours de la deuxième période et ainsi de suite.

La capitalisation des intérêts et leur transformation en capital au début de chaque période de calcul engendre des intérêts composés. La période de capitalisation peut être exprimée en années, en semestre, en trimestre ou en mois.

La capitalisation est dite respectivement annuelle, semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

2°) Formules des intérêts composés.

2-1) Le temps de placement est un nombre entier de placement

Désignons par:

C_0: Le capital initialement placé.

i: Le taux correspondant à la période.

n: Le nombre de période.

C_n: La valeur acquise par C_0 à la fin de la $n^{ème}$ période.

Période	Capital en début de période	Intérêt perçu	Capital en fin de période
1	C_0	$C_0\, i$	$C_0 + C_0\, i = C_0(1 + i) = C_1$
2	$C_0(1 + i)$	$C_0(1 + i)i$	$C_0(1 + i) + C_0(1 + i)i = C_0(1 + i)^2 = C_2$
3	$C_0(1 + i)^2$	$C_0(1 + i)^2 i$	$C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)^2 i = C_0(1 + i)^3 = C_3$
………	………	………	………
n	$C_0(1 + i)^{n-1}$	$C_0(1 + i)^{n-1} i$	$C_0(1 + i)^{n-1} + C_0(1 + i)^{n-1} i = C_0(1 + i)^n = C_n$

2-1-1) La valeur acquise

La valeur acquise par un capital C_0 placé à intérêts composés au taux i pendant n périodes est égale à:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Remarque: Il faut veiller à ce que dans la formule, le taux et la durée aient la même unité

2-1-2) La valeur actuelle

La valeur actuelle représente le capital C_0 qu'il faut placé aujourd'hui à intérêts composés au taux i pendant une durée n pour obtenir un capital C_n à l'échéance.

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

2-1-3) La capitalisation et l'actualisation

a) La capitalisation consiste à rechercher la valeur acquise d'un capital après n périodes.

b) L'actualisation est l'opération qui consiste à rechercher la valeur actuelle d'un capital qui ne sera disponible qu'après n périodes.

2-2) Le temps de placement n’est pas un nombre entier

En générale le temps de placement n’est pas forcément entier. En effet, un client place son argent à une date donnée pour le retirer quelques années et quelques mois après.

Exemple: on peut se demander qu’elle serait la valeur acquise par un capital 4 et 7mois après.

Pour ce genre de situations deux solutions sont proposées.

2-2-1) La solution rationnelle

Elle consiste, tout simplement, à appliqué l'intérêt simple pour les courtes durées et l'intérêt composée pour durées à moyen ou à long terme.

Pour un capital C_0 placé pendant une durée $\left(n+\frac{p}{q}\right)$ au taux i sa valeur acquise $C_{n+p/q}$ sera donnée par:

$$C_{n+p/q} = C_0(1+i)^n\left(1+\left(i\,p/q\right)\right)$$

2-2-2) La solution commerciale

Elle consiste à généraliser la formule des intérêts composées du paragraphe (2-1-1) de la façon suivante:

$$C_{n+p/q} = C_{\mathbf{0}}(1 + i)^{(n+p/q)}$$

Remarque: La solution commerciale est toujours inférieur à la solution rationnelle.

3°) Taux proportionnels et taux équivalents

3-1) Les taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels lorsque leur rapport est égale au rapport des périodes respectives sur lesquelles ils sont définis.

Soient i_n le taux d'intérêt défini sur la période n et i_p le taux proportionnel pour une période k fois plus petite ($n = k . p$), alors:

$$I_n = k\, i_p$$

3-2) Les taux équivalents

Deux taux sont équivalents lorsque à intérêts composés, un même capital produit la même valeur acquise sur une même durée de placement.

Soient i_n le taux d'intérêt défini sur la période n et i_p le taux proportionnel pour une période k fois plus petite (n=k.p), on aura, en prenant n comme période de référence, alors:

$C_0(1 + i_n) = C_0(1 + i_p)^k$

soit :

$$\begin{cases} i_n = (1 + i_p)^k - 1 \\ I_p = (1 + i_n)^{(1/k)} - 1 \end{cases}$$

4°) Équivalence de deux effets à intérêts composés.

Définition:

Deux effets sont équivalents si escomptés au même taux ils ont la même valeur actuelle à une certaine date. A intérêts composés la date d'équivalence est quelconque (unique pour l'intérêt simple).

Si on désigne par :

V_1 et V_2: la valeur nominale du premier et second effet.

i : le taux d'escompte.

n_1 et n_2 : le temps qui sépare la date d'équivalence de l'échéance du premier et du second effet.

$$V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}$$

Multiplions les deux membres de notre formule par $(1+i)^p$

$$V_1(1+i)^{p-n_1} = V_2(1+i)^{p-n_2}$$

Ce qui veut dire que la date d'équivalence est quelconque.

5°) Équivalence de plusieurs effets

Définition

L'échéance commune consiste à poser l'équivalence d'un effet avec un groupe d'effets.

Équation d'équivalence

Soient k effets de valeur nominale $V_1, V_2 \ldots . V_k$ et ayant respectivement à courir n_1, $n_2 \ldots .. n_k$. Soit un effet de valeur nominale V et ayant n jours à courir.

À la date d'équivalence, l'équation d'équivalence s'écrit:

$$V(1+i)^{-n} = \sum_{j=1}^{j=k} V_j (1+i)^{-n_j}$$

6°) Échéance moyenne

Définition

L'échéance moyenne est le cas particulier de l'échéance commune ou la valeur de l'effet unique est égale à la somme de valeurs nominales des effets à remplacer. L'équation d'équivalence devient:

$$\begin{cases} V(1+i)^{-n} = \sum_{j=1}^{j=k} V_j (1+i)^{-n_j} \\ V = \sum_{j=1}^{j=k} V_j \end{cases}$$

On trouve:

$$n = -\frac{Ln\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{i=k} V_j (1+i)^{-n_j}}{\sum_{i=1}^{i=k} V_j}\right)}{Ln(1+i)}$$

Chapitre 4 : Les annuités

1°) Valeur acquise d'une suite d'annuités constante

1-1) Définition

On appelle annuités des versements effectués de façon périodique. La période peut être l'année, le semestre, le trimestre ou le mois. On parle alors d'annuités, de semestrialités, de trimestrialités et de mensualités.

Ce type de versement permettent de:

a)Constituer un capital à la fin d'une période déterminée.

b)Rembourser un emprunt.

c)Rentabiliser un investissement.

1-2) Valeur acquise d'une suite d'annuités constante de fin de période.

1-2-1) Valeur acquise au moment du dernier versement

C'est la somme des valeurs acquises par chaque annuité au moment du dernier versement. Soient:

a: La valeur de l'annuité constante.

n: Le nombre de versement.

i: Le taux d'intérêt.

V_n: Valeur acquise au moment du dernier versement.

Dressons un tableau montrant la valeur acquise par chaque annuité au moment du dernier versement.

Période	Versement	Valeur acquise au moment du dernier versement
1	a	$a\ (1+i)^{n-1}$
2	a	$a\ (1+i)^{n-2}$
3	a	$a\ (1+i)^{n-3}$
……	……	……
n-2	a	$a\ (1+i)^{2}$
n-1	a	$a\ (1+i)$
n	a	a

D'où la somme des n valeurs acquises V_n:

$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$

Aussi:

$V_n = a[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$

Ce qui donne, en utilisant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison (1+i) et de premier terme 1:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2°) Valeur actuelle ou valeur à l'origine d'une suite d'annuités constantes

C'est le cas par exemple, d'une dette de valeur V_0 qu'on veut éteindre par versement de n annuités constantes de montant chacune égale à a.

Pour cela, on suppose d'abord que V_0 a été accordé une période avant le premier versement:

A la date n, c'est-à-dire lors du versement de la dernière annuité, on a:

$$\begin{cases} V_n = a\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \\ V_n = V_0(1+i)^n \end{cases}$$

On obtient donc:

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Chapitre 5: Amortissement des emprunts indivis

1°) Définitions

- Un emprunt est un contrat par lequel une ou plusieurs personnes met à la disposition d'une (voir plusieurs) personne une somme que celle-ci s'engage à rembourser selon les clauses du contrat.
- Lorsque le prêteur est unique, l'emprunt est indivis. C'est le cas, par exemple, de prêts aux particuliers accordés par les organismes de crédit ou banques.
- L'amortissement est la fraction du capital remboursé au titre d'une annuité. L'amortissement est donc l'annuité diminuée des intérêts.

2°) Tableau d'amortissement

C'est un tableau composé de six colonnes:

- La première comprend le rang de l'annuité.
- La deuxième comprend le capital dû en début de période (CDDP).
- La troisième comprend les intérêts donnés par application du taux d'intérêt sur le capital restant dû.
- La quatrième donne l'amortissement de la période.
- La cinquième donne l'annuité à verser à la fin de chaque période
- La sixième comprend le capital dû en fin de période (CDFP).

Période	CDDP C_{p-1}	Intérêt de la période $I_p = C_p \,.\, i$	Amortissement de la période m_p	Annuité a_p	CDFP C_p
1	C	C . i	m_1	$a_1 = C \,.\, i + m_1$	$C_1 = C - m_1$
2	C_1	$C_1 \,.\, i$	m_2	$a_2 = C_1 \,.\, i + m_2$	$C_2 = C_1 - m_2$
…	…	…	…	…	…
p	C_{p-1}	$C_{p-1} \,.\, i$	m_p	$a_p = C_{p-1} \,.\, i + m_p$	$C_p = C_{p-1} - m_p$
…	…	…	…	…	…
n	C_{n-1}	$C_{n-1} \,.\, i$	m_n	$a_n = C_{n-1} \,.\, i + m_n$	$C_n = C_{n-1} - m_n = 0$
Total			C		

3°) Amortissement par annuités constantes

Dans ce cas nous avons:

$$a_1=a_2=a_3=\ldots\ldots a_p=a_{p+1}=\ldots\ldots a_n$$

3-1) Relation entre les amortissements

D'après le tableau d'amortissement, nous avons:

$$\begin{cases} a_p=C_{p-1}\,.\,i+m_p \\ a_{p+1}=C_p\,.\,i+m_{p+1} \quad \text{avec } a_p=a_{p+1} \end{cases}$$

d'où $C_{p-1}\,.\,i+m_p=C_p\,.\,i+m_{p+1}$ or $C_p=C_{p-1}-m_p$

d'où $C_{p-1}\,.\,i+m_p=C_{p-1}\,.\,i-m_p\,.\,i+m_{p+1}$

Après simplification par $C_{p-1}\,.\,i$, on obtient

$$m_{p+1}=m_p\,(1+i) \qquad (1)$$

Ce qui signifie que les amortissements sont en progressions géométrique de raison (1+i). Ce qui nous permet d'écrire l'expression de l'amortissement de la $p^{ème}$ période m_p en fonction de m_1. on trouve d'après les propriétés des suites géométriques:

$$m_{p+1}=m_1 (1+i)^p \qquad (2)$$

3-2) Relation entre capital emprunté et amortissement

La somme des amortissements est égale au capital emprunté, soit

$C = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + \ldots + m_1(1+i)^{n-1}$

Soit:

$$C = m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (3) \qquad \text{ou} \qquad m_1 = C \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad (4)$$

3-3) Calcul du capital restant dû après paiement de la $p^{ème}$ annuité

Le capital restant dû après paiement de la 1er annuité est $C_1 = C - m_1$

Le capital restant dû après paiement de la 2er annuité est $C_2 = C - m_1 - m_2$

Le capital restant dû après paiement de la 3er annuité est $C_3 = C - m_1 - m_2 - m_3$

De façon générale le capital restant dû après paiement de la $p^{ème}$ annuité est

$C_p = C-(m_1+m_2+m_3+\ldots+m_p) = C-(m_1+ m_1(1+i)+ m_1(1+i)^2+\ldots+m_1 (1+i)^{p-1})$ soit

$$C_p = C - m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

D’où en utilisant successivement les formules (3) et (4) on obtient respectivement:

$$C_p = m_1 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{i} \quad (5)$$

$$C_p = C \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1} \quad (6)$$

3-4) Dette amortie (remboursée) après paiement de la $p^{ème}$ annuité. D_p

C'est évidemment la somme des p premiers amortissements, soit:

$D_p = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_p$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et la formule (4) on trouve:

$$D_p = m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i} = C \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} \quad (7)$$

4°) Amortissement constant

Dans ce cas le tableau d'amortissement est beaucoup plus simple. On a:

$m_1=m_2=m_3=\ldots=m_n=m$; or $C= m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n$ d'où

$$C = n \times m \quad soit \quad m = \frac{C}{n}$$

De plus on obtient une relation entre les annuités de la façon suivante:

$a_p = C_{p-1} \,.\, i + m$ et $a_{p+1} = C_p \,.\, i + m$ d'où

$a_{p+1} - a_p = C_p \,.\, i - C_{p-1} \,.\, i$ or $C_p = C_{p-1} - m$ d'où

$a_{p+1} - a_p = C_{p-1} \,.\, i - m.i - C_{p-1} \,.\, i = -m.i$ soit

$$a_{p+1} - a_p = -m.i$$

Donc les annuités sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme $C x i + (C/n) = C(i + 1/n)$ et de raison $(-mi)$

Exemple:

Un emprunt de 1.000.000 dh, amortissable en 5 échéances annuelles. Taux 10 %. Amortissement constant.

Tableau d'amortissement

Échéance	CDDP	Intérêt	Amortissement	Annuité	CDFP
1	1.000.000	100.000	200.000	300.000	800.000
2	800.000	80.000	200.000	280.000	600.000
3	600.000	60.000	200.000	260.000	400.000
4	400.000	40.000	200.000	240.000	200.000
5	200.000	20.000	200.000	220.000	0
			1.000.000		

1°) Principe

Dans le cas où le nominal de la dette est très élevé, les emprunteurs se voient obligés de s'adresser à un grand nombre de prêteurs.

Le nominal C de l'emprunt est alors divisé en N titres d'égale valeur nominale V appelées obligations.

On a ainsi :

$$C = N \cdot V$$

1-1) Caractéristiques d'une obligation

L'obligation est définie par:

- Une valeur nominale V supérieur ou égale à 100 dirhams.
- Un prix d'émission E qui est le prix payé par le prêteur pour souscrire (=acheter) une obligation. Ce prix E est inférieur ou égal à V. si E=V, l'émission est dite « au pair ».
- Un prix de remboursement R supérieur au égal à la valeur nominal V. si R=V le remboursement ou amortissement est dit « au pair ». (R-V) représente la prime de remboursement de l'obligation.
- Un taux nominal d'intérêt, servant à calculer le montant du coupon à partir de la valeur nominal V.
- Le coupon est l'intérêt produit par une obligation à la fin de chaque période. Sa valeur est constante durant toute la durée de l'emprunt et est égale au produit de la valeur nominal par le taux d'intérêt nominal.
- Le nombre d'annuités n.
- Date de jouissance: point de départ pour le calcul des intérêts.

1-2) Amortissement

L'emprunt obligataire peut être remboursé:

- Par annuités constantes. L'annuité est composée des coupons versés aux obligations encore vivantes et du remboursement d'un certain nombre d'obligations. A la fin de chaque période un tirage au sort est effectué pour déterminer les obligations à amortir.
- Par amortissements constants, le nombre d'obligation à amortir à la fin de chaque période étant toujours le même.
- « in fine » ou amortissement unique. Dans ce cas, la totalité des obligations est amorties à la fin de l'emprunt, cependant les obligataires perçoivent un intérêt, à la fin de chaque année, et pendant toute la durée de l'emprunt.

2°) Emprunt à annuités constante

Établissant le tableau d'amortissement à partir d'un exemple.

Un emprunt obligataire est émis. Les modalités de cet emprunt sont les suivantes:

- Nombre d'obligation: N=10.000
- Valeur nominale: V=1.000 dh
- Taux d'intérêt nominal: t=12 %
- Valeur d'émission: E=960 dh
- Valeur de rachat: R=1250 dh
- Durée de l'emprunt: n = 8 ans

Remarque:

Le tableau d'amortissement est basé sur la dette initiale à rembourser qu'il importe de ne pas confondre avec le montant du capital initialement emprunté.

Le montant emprunté	Le nominal de l'emprunt	La valeur réelle de l'emprunt
9.600.000	10.000.000	10.250.000

2-1) Le coupon d'intérêt

Calcul du coupon d'intérêt par obligation:

$$c = V \times t = 1000 \times 0{,}12 = 120$$

Tant qu'une obligation n'est pas remboursée, elle produit un intérêt annuel de 120 dh à l'obligataire (prêteur).

2-2) Le taux d'intérêt réel

Le taux d'intérêt réel compare le coupon d'intérêt au prix de remboursement:

$$i = \frac{c}{R}$$

Ce taux permet de pratiquer des calculs permettant de remplir un tableau d'amortissement d'emprunts obligations par annuités constantes.

2-3) Calcul de l'annuité

Elle est donné par la formule

$$a = \frac{NRi}{1-\left(1+i\right)^{-8}}$$

$$On\,trouve\; a = 2.309.039,08$$

2-4) Calcul des amortissements

Pour la i^ème^ période, désignons par A_k *la valeur de l'amortissement et par* I_k *celle de l'intérêt. On a:*

$$\begin{cases} A_k = a - I_k \\ A_k = A_{k-1}\,(1+i) \end{cases}$$

$A_1=$	1109039,08
$A_2=$	1215506,83
$A_3=$	1332195,49
$A_4=$	1460086,25
$A_5=$	1600254,53
$A_6=$	1753878,97
$A_7=$	1922251,35
$A_8=$	2106787,48

2-5) Calcul du nombre d'obligation a amortir O_i

Il s'agit de diviser le montant de l'amortissement par celui de la valeur de rachat de l'obligation. On obtient:

	Ai	Oi = Ai/R
A1=	1109039,08	887,231264
A2=	1215506,83	972,405465
A3=	1332195,49	1065,75639
A4=	1460086,25	1168,069
A5=	1600254,53	1280,20363
A6=	1753878,97	1403,10318
A7=	1922251,35	1537,80108
A8=	2106787,48	1685,42998
		9999,99999

Cependant un nombre d'obligation ne peut être que entier.

Il faut donc arrondir toutes les valeurs trouvées à l'entier le plus proche. Trois situations peuvent se produire après cette opération:

- On obtient le nombre exacte d'obligations.
- On obtient le nombre total d'obligations à une obligation près par défaut ou par excès.

Dans ce dernier cas on porte la correction au niveau de la première ou dernière ligne du tableau d'amortissement en ajoutant ou en retranchant une obligation

Dans notre cas on obtient:

Oi = Ai/R	Oi
887,231264	887
972,405465	972
1065,75639	1066
1168,069	1168
1280,20363	1280
1403,10318	1403
1537,80108	1538
1685,42998	1686
9999,99999	10000

A partir de ces nouvelles valeurs on recalcule la valeur des amortissements:

Oi	Ai
887	1108750
972	1215000
1066	1332500
1168	1460000
1280	1600000
1403	1753750
1538	1922500
1686	2107500
10000	12500000

Ce qui va se répercuter sur la valeur des annuités.

Remarques:

a) L'amortissement des nombres d'obligations amorties fait que les annuités ne sont plus rigoureusement constantes;mais légèrement constantes.

b) Pour la même raison les nombres d'obligations ne sont plus en progression géométrique.

tableau d'amortissement.xls

Période	Obligations vivantes $V_k = V_{k-1} - O_{k-1}$	CDDP $V_k * R$	coupons d'intérêts $c_k = V_k * 120$	Obligations amorties O_k	Amortissement $A_k = O_k \times R$	Annuités $a_k = A_k + c_k$
1	10000	12500000	1200000	887	1108750	2308750
2	9113	11391250	1093560	972	1215000	2308560
3	8141	10176250	976920	1066	1332500	2309420
4	7075	8843750	849000	1168	1460000	2309000
5	5907	7383750	708840	1280	1600000	2308840
6	4627	5783750	555240	1403	1753750	2308990
7	3224	4030000	386880	1538	1922500	2309380
8	1686	2107500	202320	1686	2107500	2309820
			5972760	10000	12500000	18472760