Champ et Potentiel Electrostatiques

Exercice 1.

Calculer, en utilisant le théorème de Gauss, le champ et le potentiel créés, à une distance *r* de son centre, par une sphère de rayon *R*, uniformément chargée dans les deux cas suivants :

1) La charge électrique est répartie uniformément avec une densité volumique ρ_0.

2) Elle est répartie uniformément avec une densité surfacique σ_0 .

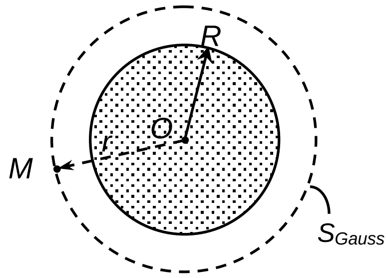
Représenter, dans chaque cas, les variations du champ et du potentiel en fonction de *r*.

Exercice 1.

1) Sphère chargée en volume $\rho_0 = cste$

a) Symétries : symétrie sphérique $\Rightarrow \ \vec{E}(M) = E(r)\ \vec{e}_r$

b) Calcul de $\vec{E}(M)$,



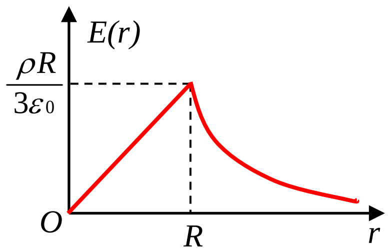
Th. de Gauss : $\Phi_{\vec{E}/S_{Gauss}} = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Surface de Gauss : sphère S(*O,r*) ; *OM = r* ; $\vec{ds} = ds\,\vec{e}_r$

$$\oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\vec{ds} = \oiint_{S_{Gauss}} E(r)ds = E(r)\oiint_{S_{Gauss}} ds = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Deux cas à distinguer :

- $\underline{r \le R}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho_0\, d\tau = \rho_0 \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho_0 \dfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}}(M) = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_r$
- $\underline{r \ge R}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho_0 d\tau = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho_0 \dfrac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \vec{E}_{ext}(M) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{e}_r$
- Continuité de $\vec{E}(M)$ en $r = R$: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{r \to R^-} \ \Rightarrow \ \vec{E}_{\text{int}}(R) \to \dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_r \\ \underline{r \to R^+} \ \Rightarrow \ \vec{E}_{ext}(R) \to \dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_r \end{array} \right\}$



a) Calcul du potentiel : On utilise la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$

Sym. sphér. : *E et V* ne dépendent que de r $\Rightarrow \ E_r(r) = -\dfrac{dV(r)}{dr} \ \Rightarrow V(r) = -\int E_r(r)dr$

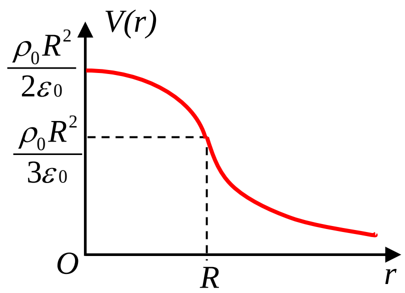
- $\underline{r \le R} \ \Rightarrow \ V(r) = -\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$
- $\underline{r \ge R} \ \Rightarrow \ V(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + C_2 \ \ \to \ V(\infty) = 0 \ \ \Rightarrow \ C_2 = 0 \Rightarrow \ V(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

La constante C_1 est déduite de la condition de continuité du potentiel en $r = R$:

$$V_{\text{int}}(R) = V_{ext}(R) \ \ \Rightarrow \ \ -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R} \ \ \Rightarrow \ C_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

d'où les expressions du champ et du potentiel créés en tout point de l'espace :

$$\begin{cases} \underline{r \le R} \ \Rightarrow E_{\text{int}}(r) = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \ ; \ V_{\text{int}}(r) = -\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2 + \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \\ \underline{r \ge R} \ \Rightarrow E_{ext}(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \ ; \ V_{ext}(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} \end{cases}$$



2) <u>Sphère chargée en surface</u> $\sigma_0 = cste$

a) Symétries : symétrie sphérique $\Rightarrow \ \vec{E}(M) = E(r)\ \vec{e}_r$

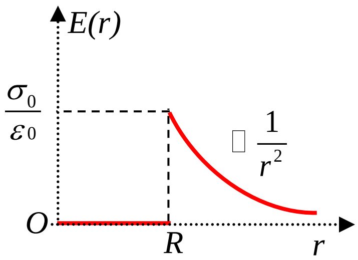
b) Calcul de $\vec{E}(M)$,

<u>Th. de Gauss :</u> $\Phi_{\vec{E}/S_{Gauss}} = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

<u>Deux cas à distinguer :</u>

- $\underline{r < R}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E_{\text{int}}(r) = 0$
- $\underline{r > R}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \oiint_S \sigma_0 ds = \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} \sin d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma_0 4\pi R^2 \Rightarrow E_{ext}(r) = \dfrac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r^2}$
- $\begin{Bmatrix} \underline{r \to R^-} \ \Rightarrow \ E_{\text{int}}(R) \to 0 \\ \underline{r \to R^+} \ \Rightarrow \ E_{ext}(R) \to \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \end{Bmatrix}$

  discontinuité de $\vec{E}(M)$ *en* $r = R$ (traversée d'une surface chargée



c) Calcul du potentiel :

Sym. sphér. : $\Rightarrow \ E_r(r) = -\dfrac{dV(r)}{dr} \ \Rightarrow V(r) = -\int E_r(r)dr$

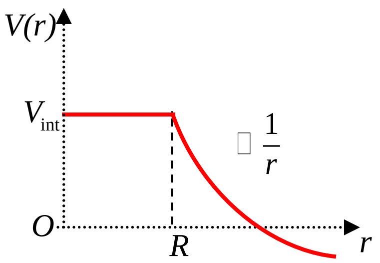
- $\underline{r < R} \ \Rightarrow \ V_{\text{int}}(r) = C_1$
- $\underline{r > R} \ \Rightarrow \ V_{ext}(r) = \dfrac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2 \ \rightarrow \ V(\infty) = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = 0 \Rightarrow \ V_{ext}(r) = \dfrac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r}$

Continuité du potentiel en $r = R$:

$$V_{\text{int}}(R) = V_{ext}(R) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0} \Rightarrow V_{\text{int}}(r) = \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}$$

d'où les expressions du champ et du potentiel créés en tout point de l'espace :

$$\begin{cases} \underline{r < R} \ \Rightarrow E_{\text{int}}(r) = 0 \ ; \ V_{\text{int}}(r) = \dfrac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0} \\ \underline{r > R} \ \Rightarrow E_{ext}(r) = \dfrac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r^2} \ ; \ V_{ext}(r) = \dfrac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r} \end{cases}$$



Exercice 2.

Un fil infini, chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$, est placé sur l'axe ($z'z$).

Un cylindre infini, d'axe ($z'z$), de rayon R, est chargé uniformément en surface avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

1) Etudier les symétries et les invariances de la distribution de charges et en déduire la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M situé à la distance r de l'axe z'z.

   Préciser les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M).

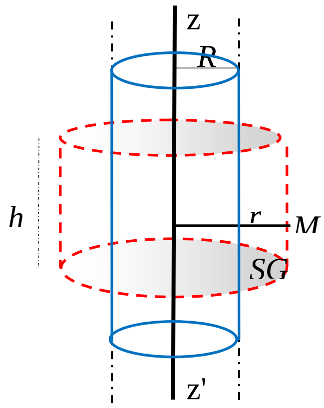
2) En utilisant le théorème de Gauss déterminer le module de $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

   Le champ est-il défini en tout point M ?

3) Pour $\lambda > 0$ et $\sigma = -\dfrac{\lambda}{2\pi R}$ Tracez $E(r)$ en fonction de r, la distance de M à l'axe z'z.

4) En prenant comme référence du potentiel $V(R) = V_0$, calculez le potentiel V(r) en tout point M de l'espace.

Exercice 2.



1) **Symétries et invariances :** Symétrie cylindrique

   $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(\rho, \varphi, z)\ \vec{e}_\rho$

   Invariance par translation et par rotation / zz'

   $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_\rho(\rho)\ \vec{e}_\rho$; on pose $\rho = r$

2) **Calcul de $\vec{E}(M)$:**

Th. de Gauss : $\Phi_{(\vec{E}/S_G)} = \iiint\limits_{S_{cyl}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Surface de Gauss (SG) :
surface du cylindre d'axe zz' de rayon r et de hauteur h passant par le point M.

$$\Phi_{(\vec{E}/S_{cyl})} = \underbrace{\iint\limits_{base1} \vec{E}\cdot\vec{ds}}_{=0} + \underbrace{\iint\limits_{base2} \vec{E}\cdot\vec{ds}}_{=0} + \iint\limits_{Slat} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \iint\limits_{Slat} \vec{E}\cdot\vec{ds} = E(r)\iint\limits_{Slat} ds = E(r)\cdot 2\pi rh \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$

2 cas à distinguer:

- $\underline{r < R}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \lambda h \quad \Rightarrow \quad E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

- $\underline{r > R}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \lambda h + \sigma 2\pi Rh \quad \Rightarrow \quad E(r) = \dfrac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}$

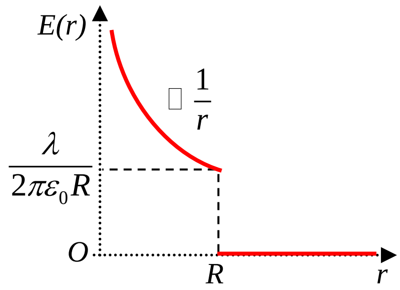
- $$\begin{cases} \underline{r \to 0} \Rightarrow E(r) \to \infty \\ \underline{r \to R^-} \Rightarrow E(r) \to \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \\ \underline{r \to R^+} \Rightarrow E(r) \to \dfrac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

E(M) est défini partout sauf sur le fil chargé (r = 0) où $E(r)$ diverge et à la traversée de la surface chargée (r = R) où $E(r)$ subit une discontinuité finie égale à $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

3) Pour $\lambda > 0$ et $\sigma = -\dfrac{\lambda}{2\pi R}$

$$\begin{cases} \underline{r < R} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\ \underline{r > R} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \dfrac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0 \end{cases}$$

E(r) en fonction de r,



4) Expression du potentiel : On utilise la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$

Sym. cylindrique. : E et V ne dépendent que de r $\Rightarrow$ $E_r(r) = -\dfrac{dV(r)}{dr}$

$$\Rightarrow V(r) = -\int E_r(r)dr \qquad \begin{cases} \underline{r < R} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C_1 \\ \underline{r > R} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \dfrac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0 \rightarrow V(r) = C_2 \end{cases}$$

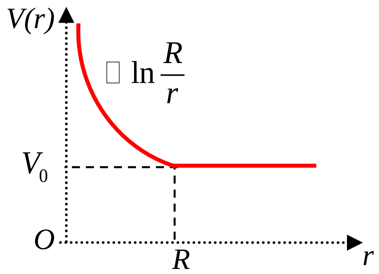
Calcul des constantes C_1 et C_2

- $V(R) = V_0 = C_2$
- La constante C_1 est déduite de la condition de continuité du potentiel en $r = R$:

$$V_{\text{int}}(R) = V_{ext}(R) \Rightarrow -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C_1 = V_0 \Rightarrow C_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + V_0 \quad \Rightarrow V(r) = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

d'où les expressions du champ et du potentiel créés en tout point de l'espace :

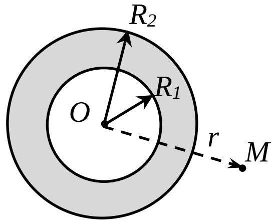
$$\begin{cases} \underline{r \leq R} \quad \Rightarrow E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \rightarrow \quad V(r) = V_0 + \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R}{r} \\ \underline{r \geq R} \quad \Rightarrow E(r) = \dfrac{\lambda + 2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0 \quad \rightarrow \quad V(r) = V_0 \end{cases}$$



* * * *

Exercice 1.

Une distribution volumique de charges est répartie uniformément ($\rho_0 > 0$) entre deux sphères concentriques de centre *O* et de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$). On repère la position d'un point *M* de l'espace par sa distance *r* au centre O des deux sphères.



1. **1)** Etudier les symétries et les invariances de la distribution de charges et en déduire la direction et les variables dont dépend le champ créé en M.
2. **2)** En utilisant le théorème de Gauss, calculer $\vec{E}(M)$ en tout point *M* de l'espace.
3. **3)** En déduire le potentiel *V(M)* en tout point M. On prendra *V = 0* à l'infini.
4. **4)** On place une charge ponctuelle $q_0 < 0$ à l'intérieur des deux sphères au centre O.

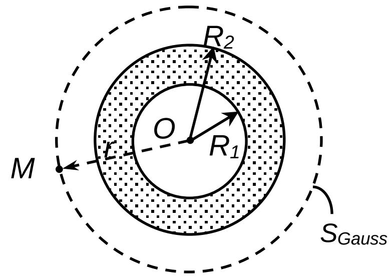
   Déterminer q_0 de telle sorte que le champ soit nul à l'extérieur des sphères $(r > R_2)$.

Exercice 1.

1) **Symétries :** symétrie sphérique $\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(r)\ \vec{e}_r$

2) **Calcul de** $\vec{E}(M)$, $\rho_0 = cste$

Th. de Gauss : $\Phi_{\vec{E}/S_{Gauss}} = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \dfrac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$



Surface de Gauss : sphère S*(O,r)* ; *OM = r* ; $\overrightarrow{ds} = ds\,\vec{e}_r$

$$\oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \oiint_{S_{Gauss}} E(r)ds = E(r)\oiint_{S_{Gauss}} ds = E\left(r\right)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

3 cas à distinguer :

- $\underline{r < R_1}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$
- $\underline{R_1 < r < R_2}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho d\tau = \rho\int_0^{\pi}\sin d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{R_1}^{r} r^2dr = \rho\dfrac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)$

  $$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - R_1^3}{r^2}\cdot\vec{e}_r$$

- $\underline{r > R_2}$ $\quad \sum Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho d\tau = \rho\int_0^{\pi}\sin d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{R_1}^{R_2} r^2dr = \rho\dfrac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)$

  $$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\cdot\vec{e}_r$$

- Continuité de $\vec{E}\left(M\right) en$ r $= R_1$ et r $= R_2 \Rightarrow \begin{cases} \underline{r \to R_1} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}\left(M\right) \to \vec{0} \\ \underline{r \to R_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}\left(M\right) \to \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2}\cdot\vec{e}_r \end{cases}$

3) **Calcul du potentiel :** On utilise la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$

Sym. sphér. : *E et V* ne dépendent que de r $\Rightarrow \quad E_r(r) = -\dfrac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int E_r(r)dr$

- $\underline{r < R_1}$; $\vec{E}(M) = \vec{0} \Rightarrow V(r) = C_1$

- $\underline{R_1 < r < R_2}$; $V(r) = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\int r dr - \int \dfrac{R_1^3}{r^2} dr\right] \Rightarrow V(r) = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{R_1^3}{r}\right] + C_2$
- $\underline{r > R_2}$; $E(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \Rightarrow V(r) = \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + C_3$

Calcul des constantes d'intégration

$\rightarrow$ $V(\infty) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow pour\ \underline{r > R_2}$; $V(r) = \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

$\rightarrow$ Continuité de V(r) pour $r = R_2$: $\Rightarrow -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\dfrac{R_2^{\ 2}}{2} + \dfrac{R_1^3}{R_2}) + C_2 = \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_2} \Rightarrow C_2 = \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$

$\rightarrow$ Continuité de V(r) pour $r = R_1$: $\Rightarrow C_1 = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\dfrac{R_1^{\ 2}}{2} + \dfrac{R_1^3}{R_1}) + \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow C_1 = \dfrac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}$

d'où les expressions du champ et du potentiel créés en tout point M de l'espace :

$$\begin{cases} \underline{r < R_1} \quad E(r) = 0 \ ; \ V(r) = \dfrac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \\ \underline{R_1 > r > R_2} \quad E(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r + \dfrac{R_1^3}{r^2}\right] \ ; \ V(r) = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{R_1^3}{r}\right] + \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} \\ \underline{r > R_2} \quad E(r) = \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} \ ; \ V(r) = \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0} \end{cases}$$

4) Calcul du champ dans le cas où on place une charge ponctuelle $q_0 < 0$ à l'intérieur des deux sphères au centre O.

<u>Symétries :</u> symétrie sphérique $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = E(r)\ \vec{e}_r$

<u>Th. de Gauss :</u> $\Phi_{\vec{E}/S_{Gauss}} = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{\sum Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

<u>3 cas à distinguer</u> :

- $\underline{r < R_1}$ $\quad \sum Q_{int} = q_0 \quad \Rightarrow E(r) = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- $\underline{R_1 < r < R_2}$ $\quad \sum Q_{int} = q_0 + \rho\dfrac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3) \Rightarrow E(r) = \left(\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{r^3 - R_1^3}{r^2}\right)$
- $\underline{r > R_2}$ $\quad \sum Q_{int} = q_0 + \rho\dfrac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) \Rightarrow E(r) = \left(\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\right)$
- Continuité de $\vec{E}(M)\, en$ $\mathrm{r} = R_1$ et $\mathrm{r} = R_2 \Rightarrow$ $\begin{cases} \underline{r \to R_1} \quad \Rightarrow \quad E(r) \to \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \underline{r \to R_2} \quad \Rightarrow \quad E(r) \to \left(\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2}\right) \end{cases}$

Déterminer q_0 de telle sorte que le champ soit nul à l'extérieur des sphères $(r > R_2)$.

$$(r > R_2) \Rightarrow E(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = -\rho\frac{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}{3}$$