

PCI, ANALYSE S1

Développements limités

26 décembre 2013

Table des matières

1	Développements limités.	2
1.1	Formule de Taylor-Young.	2
1.1.1	Théorème de Rolle.	2
1.1.2	Formule des accroissements finis	2
1.1.3	Formules de Taylor	3
1.2	Développement limité d'une fonction au voisinage de 0.	5
1.2.1	Présentation	5
1.2.2	Propriétés des développements limités	5
1.2.3	Quelques développements limités de référence	6
1.2.4	Techniques de détermination de développements limités	7
1.3	Autres Développements limités.	9
1.3.1	Développement limité au voisinage de x_0	9
1.3.2	Développement asymptotique d'une fonction au voisinage de l'infini.	10

Chapitre 1

Développements limités.

L'objet de ce chapitre est d'étudier les approximations d'une fonction au voisinage d'un point x_0 par une fonction polynôme.

1.1 Formule de Taylor-Young.

1.1.1 Théorème de Rolle.

Théorème 1.1.1 (de Rolle). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Une autre formulation de la conclusion est la suivante :

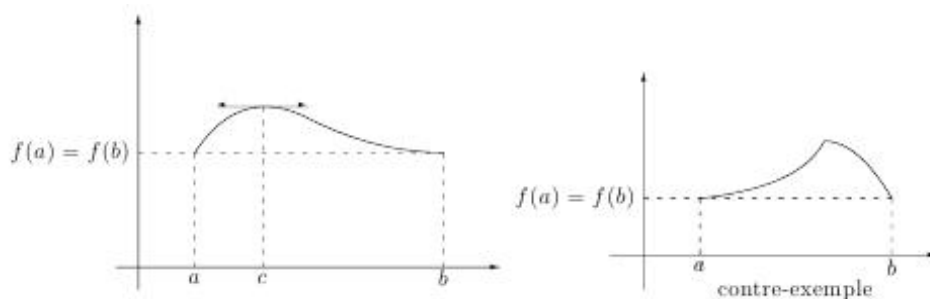
"Il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f'(a + \theta(b - a)) = 0$ ".

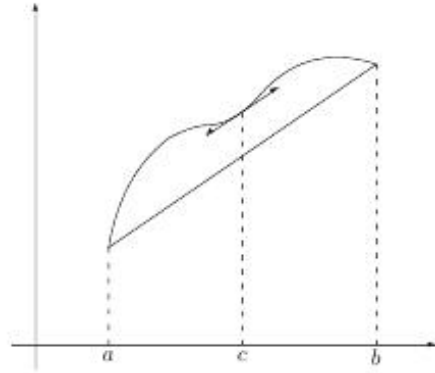
Cette formulation évite de mettre comme hypothèse que $a < b$. La conclusion est donc l'existence d'un c entre a et b qui annule la dérivée.

1.1.2 Formule des accroissements finis

Théorème 1.1.2 (des accroissements finis). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c entre a et b tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

En posant $h = b - a$ donc $b = a + h$, on peut écrire la conclusion sous la forme : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$. La formule de Taylor-Lagrange généralisera ce résultat.





1.1.3 Formules de Taylor

Formule de Taylor-Lagrange : avec reste intégrable

Théorème 1.1.3. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I et soient a et b deux nombres de I on a :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Démonstration. On prouve le résultat par récurrence sur n avec une intégration par parties le terme complémentaire. ■

Corollaire 1.1.1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I et soient a et b deux nombres de I . Si $|f^{(n+1)}|$ est majorée par M sur le segment $[a, b]$ on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Lagrange : avec reste de lagrange

Théorème 1.1.4. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I et soient a et b deux nombres de I . Alors il existe c entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Une autre formulation de cette formule est la suivante, en posant $b = a + h$: il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

En utilisant le symbole de somme, on peut écrire

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

La partie régulière de cette formule de Taylor est formée de tous les termes qui rentrent dans la somme, et le reste (ici de Lagrange) est le dernier terme.

C'est très souvent au voisinage de 0 qu'on écrit des formules de Taylor. Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^{n+1} au voisinage de 0, pour tout x dans ce voisinage, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n dans un intervalle I contenant a ; elle vérifie les hypothèses du théorème de Taylor-Lagrange et on peut écrire, pour tout h tel que $a + h \in I$, (attention, la partie régulière s'arrête au $(n-1)$ ème terme) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h)$$

En remarquant que $\lim_{h \rightarrow 0}(a + \theta h) = a$, et en utilisant l'hypothèse de continuité de la dérivée n ème de f , si on pose $\varepsilon(h) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a + \theta h) - f^{(n)}(a))$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et le reste de la formule de Taylor peut s'écrire $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h)$: on a ainsi allongé d'un terme la partie régulière de la formule de Taylor et écrit le reste sous une nouvelle forme, la forme de Young.

On a donc :

Théorème 1.1.5 (Taylor-Young). *Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I et $a \in I$. Pour tout h tel que $a + h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Avec le symbole \sum , on peut écrire : $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + h^n\varepsilon(h)$.

Au voisinage de 0 (situation la plus fréquente), pour une fonction régulière, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Nous avons ainsi obtenu une approximation polynômiale de f (la partie régulière de la formule de Taylor), c'est-à-dire, nous le verrons bientôt, un développement limité de f au voisinage de 0 ; c'est cette démarche que l'on va prolonger dans ce qui va suivre.

Un exemple.

Appliquons ce qui précède à la fonction $f : x \mapsto e^x$, pour laquelle toutes les dérivées sont égales à f , et en particulier $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k .

On peut alors écrire $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

1.2 Développement limité d'une fonction au voisinage de 0.

1.2.1 Présentation

Définition 1.2.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 si l'on peut écrire pour tout x :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ est un polynôme de degré $\leq n$; c'est la partie régulière du développement limité.

La détermination d'un développement limité à l'ordre n d'une fonction f au voisinage de 0 permet donc d'en donner une approximation polynomiale de degré $\leq n$.

Remarquons que pour tout polynôme $A(x)$ de degré $\leq n$, on peut poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - A(x)}{x^n}$ et on a $f(x) = A(x) + x^n\varepsilon(x)$. Mais c'est seulement si $\varepsilon(x)$ tend vers 0 que $A(x)$ est la partie régulière d'un développement limité de f au voisinage de 0.

Un exemple.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. (Remarquons qu'elle est bien définie au voisinage de 0, elle est définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ qui contient 0).

Partons de l'identité "bien connue" : $1 - x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$.

On en déduit que $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

En posant $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n + x^n\varepsilon(x)$.

Nous avons trouvé (pour tout n) un développement limité à l'ordre n de cette fonction f au voisinage de 0.

1.2.2 Propriétés des développements limités

Proposition 1.2.1 (Troncature). Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On suppose que f admet un $dl_0(n)$. Alors pour tout $n' < n$, f admet aussi un $dl_0(n')$ et on obtient la partie régulière du $dl_0(n')$ en "tronquant" celle du $dl_0(n)$, c'est-à-dire en n'en gardant que les termes de degré $\leq n'$.

Preuve. Supposons que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. On peut écrire, puisque $n' < n$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n'}x^{n'} + a_{n'+1}x^{n'+1} + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n'}x^{n'} + x^{n'} \left(a_{n'+1}x + \cdots + a_nx^{n-n'} + x^{n-n'}\varepsilon(x) \right) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n'}x^{n'} + x^{n'}\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(x) = a_{n'+1}x + \cdots + a_nx^{n-n'} + x^{n-n'}\varepsilon(x)$ et clairement $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$. ■

Proposition 1.2.2 (unicité du d.l.). *Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.*

La partie régulière d'un développement limité ne dépend donc pas de la manière dont on l'obtient. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est de classe \mathcal{C}^n pour tout n , on pourrait donc obtenir son $\text{dl}_0(n)$ grâce à la formule de Taylor-Young, et on obtiendrait

$$\frac{1}{1-x} = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

En comparant avec ce qu'on a obtenu par un calcul direct :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

on est sûr que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f^{(3)}(0) = 3!$, \dots , $f^{(n)}(0) = n!$.

(On peut montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ mais on a obtenu la valeur de ces fonctions en 0 sans avoir besoin de faire ces calculs.)

Proposition 1.2.3 (parité). *Soit f une fonction définie au voisinage de 0, et admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière $A(x)$.*

Alors, si f est une fonction paire, $A(x)$ est un polynôme pair (dont les termes non nuls sont tous de degré pair).

Si f est une fonction impaire, $A(x)$ est un polynôme impair (dont les termes non nuls sont tous de degré impair).

Preuve. On a $f(x) = A(x) + x^n\varepsilon(x)$ donc $f(-x) = A(-x) + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$ donne un $\text{dl}_0(n)$ de la fonction $x \mapsto f(-x)$, puisque clairement, si $\varepsilon^n \varepsilon(-x)$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0$.

Donc si f est paire, on obtient ainsi deux expressions de son unique $\text{dl}_0(n)$, et en identifiant, on a $A(x) = A(-x)$, $A(x)$ est pair.

Si f est impaire, on obtient aussi une deuxième expression du $\text{dl}_0(n)$ de f :

$f(x) = -A(-x) - x^n \varepsilon'(x)$ d'où par identification $A(x) = -A(-x)$ et A est impaire. ■

1.2.3 Quelques développements limités de référence

Voici quelques $\text{dl}_0(n)$ à connaître. On les démontre par exemple grâce à la formule de Taylor-Young. Dans toutes ces formules ε est une fonction à chaque fois différente, mais toujours telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^n \varepsilon(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

1.2.4 Techniques de détermination de développements limités

Pour déterminer un développement limité d'une fonction qui n'est pas dans la courte liste ci-dessus, on utilise les règles de calcul usuelles et moins usuelles qu'on va décrire ci-dessous. Il faut garder à l'esprit dès le départ d'un calcul l'ordre du d.l. que l'on cherche, et travailler sur des d.l. suffisamment poussés pour ne pas faire d'erreur. Mais on ne doit pas non plus utiliser des d.l. à des ordres trop élevés, car si on peut toujours tronquer un d.l., rien ne sert de faire des calculs trop compliqués.

Dans tout ce qui suit, les fonctions ε , ε_i sont des fonctions qui tendent vers 0 en 0.

Changement de variable linéaire

On peut toujours appliquer le développement limité connu d'une fonction f au voisinage de 0 à la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$.

Exemple :

Calculer un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{1-2x}$.

On écrit $f_1(x) = (1-2x)^{\frac{1}{3}} = (1+u)^{\frac{1}{3}}$ avec $u = -2x$. On applique la formule du développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}u^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}u^3 + u^3 \varepsilon(u) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-2x) + \frac{1(-2)}{3 \times 3 \times 2}(-2x)^2 + \frac{1(-2)(-5)}{3 \times 3 \times 3 \times 6}(-2x)^3 + x^3(-8\varepsilon(-2x)) \\ f_1(x) &= 1 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{81}x^3 + x^3 \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

Linéarité des développements limités.

On peut additionner, multiplier par une constante des développements limités sans difficulté.

Exemple :

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f_2 : x \mapsto 3\sqrt[3]{1-2x} + e^x$:

On récupère le résultat qu'on vient d'obtenir, puisque $f_2 = 3f_1 + \exp$, on a

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 3\left(1 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{81}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)\right) + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= (3+1) + (-2+1)x + \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{40}{27} + \frac{1}{6}\right)x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \\ f_2(x) &= 4 - x - \frac{5}{6}x^2 - \frac{71}{54}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

Multiplication de deux développements limités

On peut multiplier deux développements limités au même ordre, il suffit de tronquer en cours de calcul et ne garder que les termes de degré \leq à l'ordre souhaité.

Exemple : Déterminer le $dl_0(3)$ de $f_3 : x \mapsto e^x\sqrt{1+x}$.

On écrit simplement $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + x^3\varepsilon'(x)$ donc

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon'(x)\right) \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)x^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

Quotient de développements limités

Si on connaît un développement limité de f et un développement limité de g , on peut obtenir un développement limité de $\frac{f}{g}$ en faisant une *division selon les puissances croissantes*. Il faut que

$g(0) \neq 0$ (pour que $\frac{f}{g}$ soit définie au voisinage de 0.)

Exemple :

Déterminer le développement limité à l'ordre 6 de $\tan x$ (au voisinage de 0).

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ (nous verrons que le terme en

x^6 ne sert à rien).

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \hline - \left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 \right) \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \\ \hline - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 \right) \\ \hline \frac{2}{15}x^5 \end{array} & \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\ \hline x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \end{array} \\
 \hline & \begin{array}{c} \frac{1}{120} - \frac{1}{24} = \frac{1-5}{120} = -\frac{4}{120} = -\frac{1}{30} \\ \\ -\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{-1+5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \end{array}
 \end{array}$$

On peut donc conclure que $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)$.

Composition de développements limités

Si f admet un d.l.₀ et u est une fonction qui admet un d.l. et qui tend vers 0, on peut composer les développements limités.

Exemple :

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f définie par $f(x) = \ln \cos x$.

On écrit $f(x) = \ln(1+u)$ avec $u = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\varepsilon_1(x)$.

Puisque $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + u^2\varepsilon_2(u)$, (les termes suivants ne feraient apparaître que des puissances

de x d'ordre ≥ 6), on calcule $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_3(x)$ et $-\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{8}x^4 + x^4\varepsilon_4(x)$.

On en déduit que

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + x^5\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

Intégrations des développements limités

Voir TD

1.3 Autres Développements limités.

1.3.1 Développement limité au voisinage de x_0

Pour traiter un développement limité au voisinage de x_0 , il suffit de se ramener en 0 en posant $x = x_0 + h$, car lorsque x est au voisinage de x_0 , alors h est au voisinage de 0.

Exemple :

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction \cos au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.

On écrit

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos h - \sin \frac{\pi}{3} \sin h \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h^2}{2} + h^3 \varepsilon_1(h)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(h - \frac{h^3}{6} + h^3 \varepsilon_2(h)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} h - \frac{1}{4} h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 + h^3 \varepsilon(h)\end{aligned}$$

On peut écrire ce développement limité de la fonction \cos au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ sous la forme

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \varepsilon'(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \varepsilon'(x) = 0$ (avec $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x - \frac{\pi}{3})$).

Application à un calcul de limite.

Soit à calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$.

On écrit un développement limité (à l'ordre 2) du numérateur et du dénominateur de la fonction

$f : x \mapsto \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$:

$\sin 3x = \sin 3\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \sin(\pi + 3h) = -\sin 3h = -3h + h^2 \varepsilon_3(h)$ et on a vu que

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} h - \frac{1}{4} h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 + h^3 \varepsilon(h) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} h - \frac{1}{4} h^2 + h^2 \varepsilon_4(h)$ (en tronquant),
donc on a $1 - 2 \cos x = 1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = 1 - \left(1 - \sqrt{3} h - \frac{1}{2} h^2\right) + h^2 \varepsilon_5(h) = \sqrt{3} h + \frac{1}{2} h^2 + h^2 \varepsilon_6(h)$

On a donc $f(x) = f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{-3h + h^2 \varepsilon_3(h)}{\sqrt{3} h + \frac{1}{2} h^2 + h^2 \varepsilon_6(h)} = \frac{-3 + h \varepsilon_3(h)}{\sqrt{3} + \frac{1}{2} h + h \varepsilon_6(h)}$.

c'est à dire : $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = -\sqrt{3}$

On remarque qu'en fait, un d.l. à l'ordre 1 aurait suffi pour résoudre ce problème.

1.3.2 Développement asymptotique d'une fonction au voisinage de l'infini.

Lorsqu'on est au voisinage de l'infini, on ne parle plus de développement limité, mais de développement asymptotique. La méthode pour déterminer un développement asymptotique est analogue à celle utilisée pour le d.l. _{x_0} : on se ramène en 0 en posant $h = \frac{1}{x}$ et donc $x = \frac{1}{h}$. Pour $x \rightarrow \pm\infty$, on a $h \rightarrow 0$.

Ces développements asymptotiques sont utiles pour déterminer le comportement d'une fonction au voisinage de l'infini, déterminer d'éventuelles asymptotes horizontales ou obliques, et déterminer la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote.

Étudions un exemple :

Déterminer le comportement à l'infini de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+x^2}$.

On pose $x = \frac{1}{h}$, et on a donc

$$f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = e^h \sqrt{1 + \frac{1}{h^2}} = e^h \frac{\sqrt{h^2 + 1}}{\sqrt{h^2}} = \frac{1}{|h|} e^h \sqrt{1 + h^2}$$

On connaît le développement limité (à l'ordre 2, cela suffit, en général) au voisinage de 0 de la fonction exp et on sait déterminer celui de $h \mapsto \sqrt{1+h^2}$.

$$\begin{aligned} e^h &= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) \\ \sqrt{1+h^2} &= 1 + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_2(h) \quad \text{donc} \\ f(x) &= \frac{1}{|h|} \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_1(h)\right) \left(1 + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_2(h)\right) \\ &= \frac{1}{|h|} \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_3(h)\right) = \frac{1}{|h|} (1 + h + h^2 + h^2\varepsilon_3(h)) \end{aligned}$$

Pour $x \rightarrow +\infty$, on a $h > 0$, donc

$$f(x) = \frac{1}{h} + 1 + h + h\varepsilon_3(h) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f , et la courbe de f est au-dessus de son asymptote (en tout cas pour x assez grand pour que $|\varepsilon(x)| < 1$, ce qui permet d'être sûr que $\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) > 0$.)

De même, pour $x \rightarrow -\infty$, on a $h < 0$ donc

$$f(x) = -\frac{1}{h} - 1 - h - h\varepsilon_3(h) = -x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon'(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon'(x) = 0.$$

La droite d'équation $y = -x - 1$ est donc asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, et la courbe de f est au-dessus de cette asymptote (car $-\frac{1}{x} > 0$) pour les x négatifs tels que $|x|$ est suffisamment grand pour que $|\varepsilon'(x)| < 1$, ce qui assure que $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon'(x) > 0$.

Aspect de la courbe de f , et de ses asymptotes obliques :

