Relation d'équivalence, relation d'ordre

1 Relation d'équivalence

Exercice 1

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathscr{R}$ par :

$$z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000209]

Exercice 2

Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathscr{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000212]

2 Relation d'ordre

Exercice 3

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\prec$ par

$$X \prec Y \quad \text{ssi} \quad (X = Y \text{ ou } \forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Correction ▼ Vidéo ■ [000217]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Un dessin permettra d'avoir une bonne idée de ce qui se passe...

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z.
2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soient z, z', z'' des complexes quelconques.
   - Reflexivité : $z\mathscr{R}z$ car $|z| = |z|$.
   - Symétrie : $z\mathscr{R}z' \Rightarrow z'\mathscr{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
   - Transitivité : $z\mathscr{R}z'$ et $z'\mathscr{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathscr{R}z''$.

   En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité "$=$" est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathscr{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$:
$$\mathscr{C} = \left\{ |z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. — Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$ donc $x\mathscr{R}x$.
   — Symétrie : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x\mathscr{R}y$ alors $xe^y = ye^x$ donc $ye^x = xe^y$ donc $y\mathscr{R}x$.
   — Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Calculons xye^z :
$$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = yze^x.$$
   Donc $xye^z = yze^x$. Si $y \neq 0$ alors en divisant par y on vient de montrer que $xe^z = ze^x$ donc $x\mathscr{R}z$ et c'est fini. Pour le cas $y = 0$ alors $x = 0$ et $z = 0$ donc $x\mathscr{R}z$ également.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathscr{C}(x)$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$:
$$\mathscr{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathscr{R}x\}.$$
   Donc
$$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$
   Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$
   Alors
$$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$
   Autrement dit $\mathscr{C}(x)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui par f prennent la même valeur que $f(x)$; en raccourci :
$$\mathscr{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$
   Étudions maintenant la fonction f afin de déterminer le nombre d'antécédents : par un calcul de f' on montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus en $-\infty$ la limite de f est $-\infty$, $f(1) = \frac{1}{e}$, et la limite en $+\infty$ est 0.
   C'est le moment de dessiner le graphe de f ! !
   Pour $x > 0$ alors $f(x) \in]0, \frac{1}{e}]$ et alors $f(x)$ a deux antécédents. Pour $x \leqslant 0$ alors $f(x) \in]-\infty, 0]$ et alors $f(x)$ a un seul antécédent.
   Bilan : si $x > 0$ alors $\operatorname{Card} \mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 2$, si $x \leqslant 0$ alors $\operatorname{Card} \mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 1$.

Correction de l'exercice 3 ▲

— Reflexivité : pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$ on a $X \prec X$ car $X = X$.
— Anti-symétrie : pour $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec X$, alors par définition de $\prec$ on a
$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x.$$
Comme la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre alors $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ implique $x = y$. Donc
$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x = y,$$
ce qui implique que $X = Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).

— Transitivité : soit $X, Y, Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \prec Y$ et $Y \prec Z$. Si $X = Y$ ou $Y = Z$ alors il est clair que $X \prec Z$. Supposons que $X \neq Y$ et $Y \neq Z$ alors

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad y \leqslant z.$$

Donc on a

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z,$$

alors par transitivité de la relation $\leqslant$ on obtient :

$$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant z.$$

Donc $X \prec Z$.