Université Internationale de Casablanca

Cours de Mathématiques Appliquées à la Gestion

Chapitre: Fonction à une variable réelle

M. TIDLI

Youssef.tidli@gmail.com

A.U: 2015/2016

2. Domaine de définition

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \quad x \text{ admet une image} \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \setminus \quad f(x) \text{ est définie « on peut la calculer »} \}$$

Exemples

1. Fonctions polynômiales :

$$f(x)=a_n x^n+\dots+a_1 x+a_0$$

fonction polynômiale (ou polynôme) de degré n

$$D_f=\mathrm{IR}$$

Fonctions polynômiales

Exemples :

- $f(x)=3x^2+x-5$
- $f(x)=7x^3-x^2+x+15$
- $f(x)=7x^5-x^4+x^2-24$

Pour toutes ces fonctions :

$$D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$$

Exemples

2. Fonctions rationnelles :

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

P(x) et Q(x) sont deux polynômes

$$D_f=\left\{x\in IR \backslash \quad Q(x)\neq 0\right\}$$

Fonctions rationnelles

Exemple :

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$$

Car $x^2+1\neq 0$, ainsi :

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=IR-\{\pm 1\}$$

$$\boxed{D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[}$$

Exemples

3. Fonctions racines (n$^{\text{èmes}}$) :

$$\boxed{f(x)=\sqrt[n]{u(x)}}$$; **n** est un entier naturel non nul

n = 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; ……….

A retenir :

- Si n est pair : $\boxed{D_f=\{x\in IR \setminus \quad u(x)\geq 0\}}$
- Si n est impair : $\boxed{D_f=D_u}$

Fonctions racines ($n^{\text{èmes}}$)

Exemples :

- « racine carrée » : $\boxed{f(x)=\sqrt{2x+1}}$

On doit avoir :

$$2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1/2 \Rightarrow D_f=[-1/2;+\infty[$$

- « racine cubique » : $\boxed{f(x)=\sqrt[3]{2x+1}}$

$u(x)=2x+1$ définie quelque soit x donc

$$D_f=D_u=IR=]-\infty;+\infty[$$

Exemples

4. Fonctions puissances :

$\boxed{f(x)=u(x)^{\alpha}}$ est α un nombre rationnel

$$\alpha=m/n$$

m et n sont deux entiers naturels non nuls

On écrit : $f(x)=u(x)^{m/n}=(u(x)^{m})^{1/n}$

$$\boxed{\Rightarrow f(x)=\sqrt[n]{u(x)^{m}}}$$

Fonctions puissances

Exemples :

1. $\boxed{f(x)=(2x+1)^{4/5}}$ ici $\alpha=4/5$

On a : $f(x)=\sqrt[5]{(2x+1)^4}$; racine impaire,

on regarde alors le domaine de définition de $(2x+1)^4$:

$(2x+1)^4$ est une fonction polynômiale définie sur IR donc : $D_f=IR$

Fonctions puissances

Exemples :

2. $\boxed{f(x)=(2x+1)^{-3/4}}$

On a : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$; racine paire,

on doit avoir : $(2x+1)^3 \geq 0$ et $(2x+1)^3 \neq 0$

$$(2x+1)^3>0 \Leftrightarrow 2x+1>0 \Leftrightarrow x>-1/2$$

$$\boxed{D_f=]-1/2;+\infty[}$$

Exemples

5. Fonctions logarithmiques :

$\boxed{f(x)=\ln(u(x))}$; $\ln$ désigne le logarithme népérien

$$\boxed{D_f=\{x\in IR \backslash \quad u(x)>0\}}$$

Exemple : $f(x)=\ln(1-x^2)$

$$D_f=\{x\in IR\backslash 1-x^2>0\};$$

or $1-x^2=(1-x)(1+x)$, tableau des signes

Fonctions logarithmiques

Exemple : $f(x) = \ln(1 - x^2)$

x		-1		1	
1-x	+		+	0	-
1+x	-	0	+		+
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Ainsi : $\boxed{D_f =]-1;+1[}$

Exemple 2 : $f(x)=\ln((2x+7)(x-5))$

$$D_f=\left\{x\in IR\backslash \quad (2x+7)(x-5)>0\right\}$$

Tableau des signes :

x		-7/2		5	
2x+7	-	0	+		+
x-5	-		-	0	+
Produit	+	0	-	0	+

Donc :

$$D_f=]-\infty;-7/2[\cup]5;+\infty[$$

Exemples

6. Fonctions exponentielles :

$$\boxed{f(x)=e^{u(x)}} \;;\; \text{alors} \quad \boxed{D_f = D_u}$$

« l'exponentielle est toujours définie »

Exemples :

- $f(x)=e^{x^2+x+2} \Rightarrow D_f = IR$;
- $f(x)=e^{\sqrt{x}} \Rightarrow D_f = IR^+$;
- $f(x)=e^{1/(x-2)} \Rightarrow D_f = IR - \{2\}$

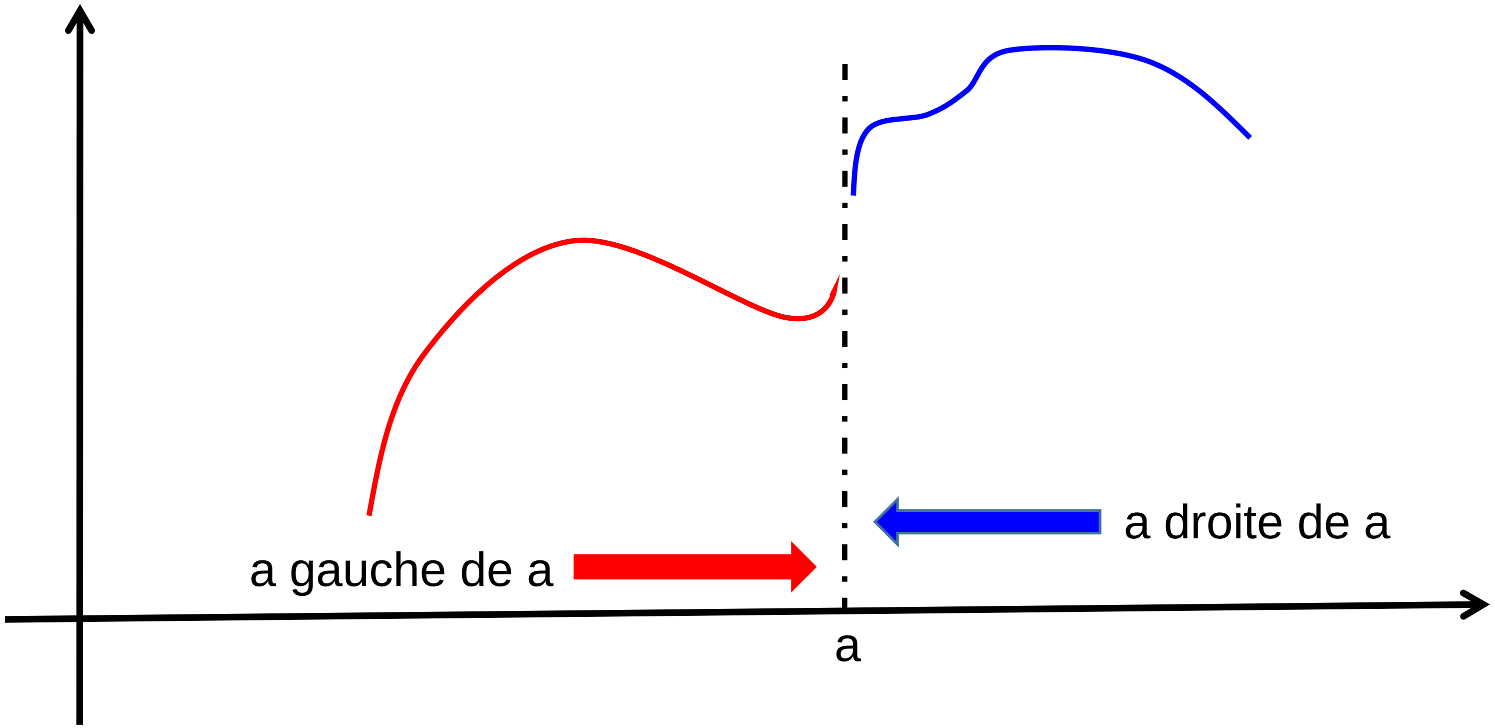
3. Continuité

$$I \subset IR \xrightarrow{\quad f \quad} IR$$

$$x \longmapsto f(x)$$

f est une fonction définie sur un intervalle I de IR

a) Continuité en un point a :



3. Continuité

a) Continuité en un point a :

Définition : f est continue au point a lorsque :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

limite à droite = limite à gauche = image de a

Exemples

1. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x};\text{si} \quad x\in[0;1] \\ \sqrt{2-x};\text{si} \quad x\in]1;2]\end{cases}$; continuité en **1**

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{2-x}=\sqrt{1}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}=\sqrt{1}=1$

et $f(1)=\sqrt{1}=1$; **f** est donc continue au point **1**

2. $f(x)=\begin{cases} x+1 ; \text{si} \quad x\in[0;1[\\ 2-x ; \text{si} \quad x\in]1;2] \\ f(1)=3/2 \end{cases}$; continuité en **1**

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2-x = 2-1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 1+1 = 2$

et $f(1)=3/2$;

f est donc **discontinue** au point **1**

b) Continuité sur un intervalle :

Définition :

f est continue sur l'intervalle $I=[a;b]$ lorsque f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a;b[$, continue à gauche de b et continue à droite de a.

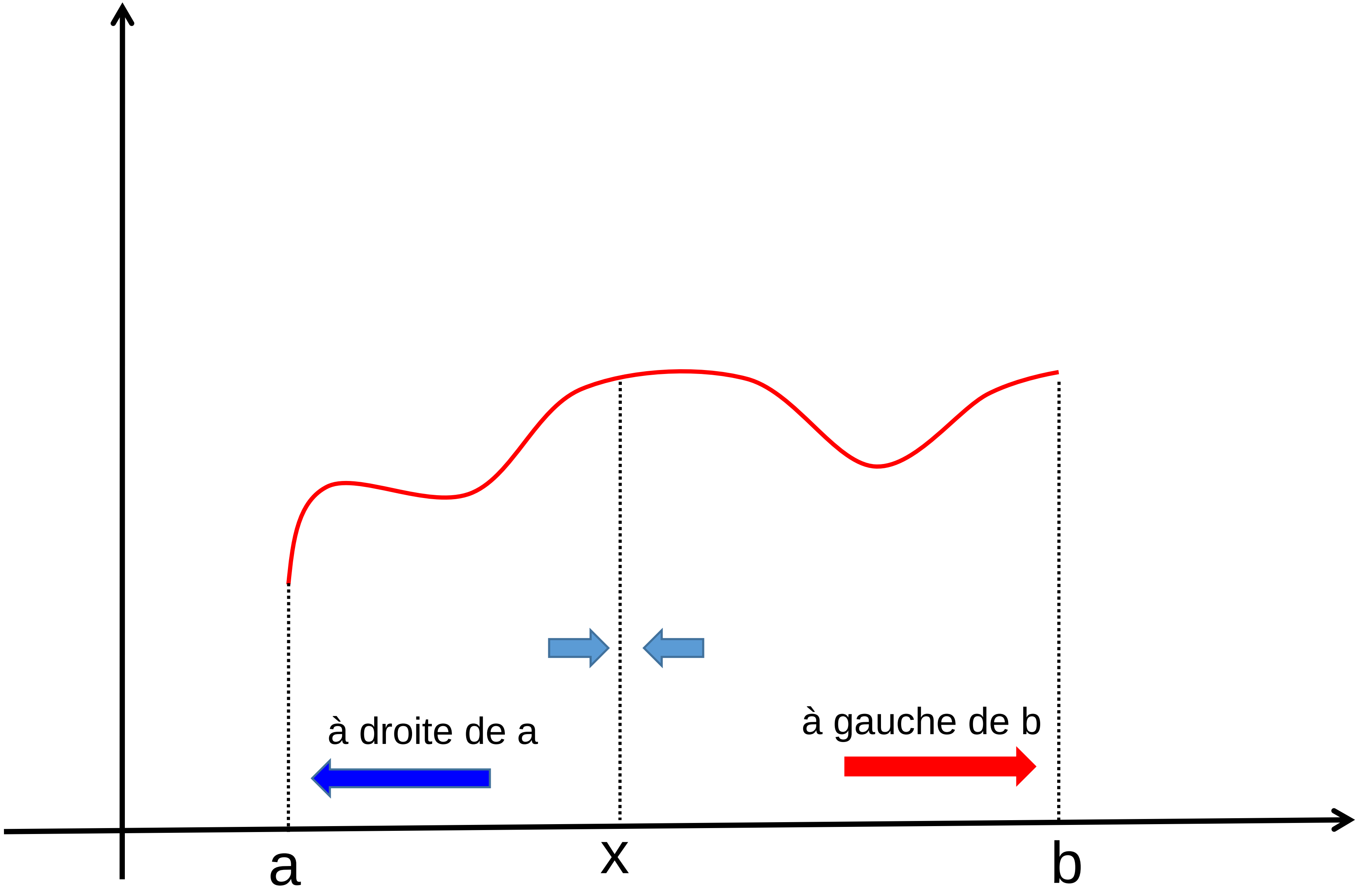
- f est continue à gauche de b lorsque :

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

- f est continue à droite de a lorsque :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Continuité sur un intervalle [a ; b]



Exemples

1. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x};\text{si} \quad x\in[0;1] \\ \sqrt{2-x};\text{si} \quad x\in]1;2]\end{cases}$$;

f est continue sur l'intervalle [0 ; 2] car :

- **f** est continue en tout point de l'intervalle]0 ; 2[(en particulier au point **1**),
- **f** est continue a droite de **0** et à gauche de **2**.

Exemples

2. $$f(x)=\begin{cases} x+1 ; \text{si} \quad x\in[0;1[\\ 2-x ; \text{si} \quad x\in]1;2] \\ f(1)=3/2 \end{cases} ;$$

f n'est pas continue sur l'intervalle [0 ; 2] car elle discontinue au point **1**

Propriétés des fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :

- $f+g$ est continue sur I
- αf est continue sur I ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- $f \times g$ est continue sur I
- f/g est continue sur I ($g \neq 0$ sur I)

Conséquences

- Les fonctions polynômiales sont continues sur IR

- Les fonctions rationnelles ; racines $n^{\text{èmes}}$; puissances ; logarithmiques et exponentielles sont continues sur leurs domaines de définition

bijection et bijection réciproque

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] & J \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

f est une fonction bijective de **I** vers **J**. Si f est continue sur l' intervalle I alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle J (car les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$)

Remarque

f est continue sur l' intervalle I

$\Leftrightarrow$

sa courbe C_f est continue

« ne présente aucune coupure »

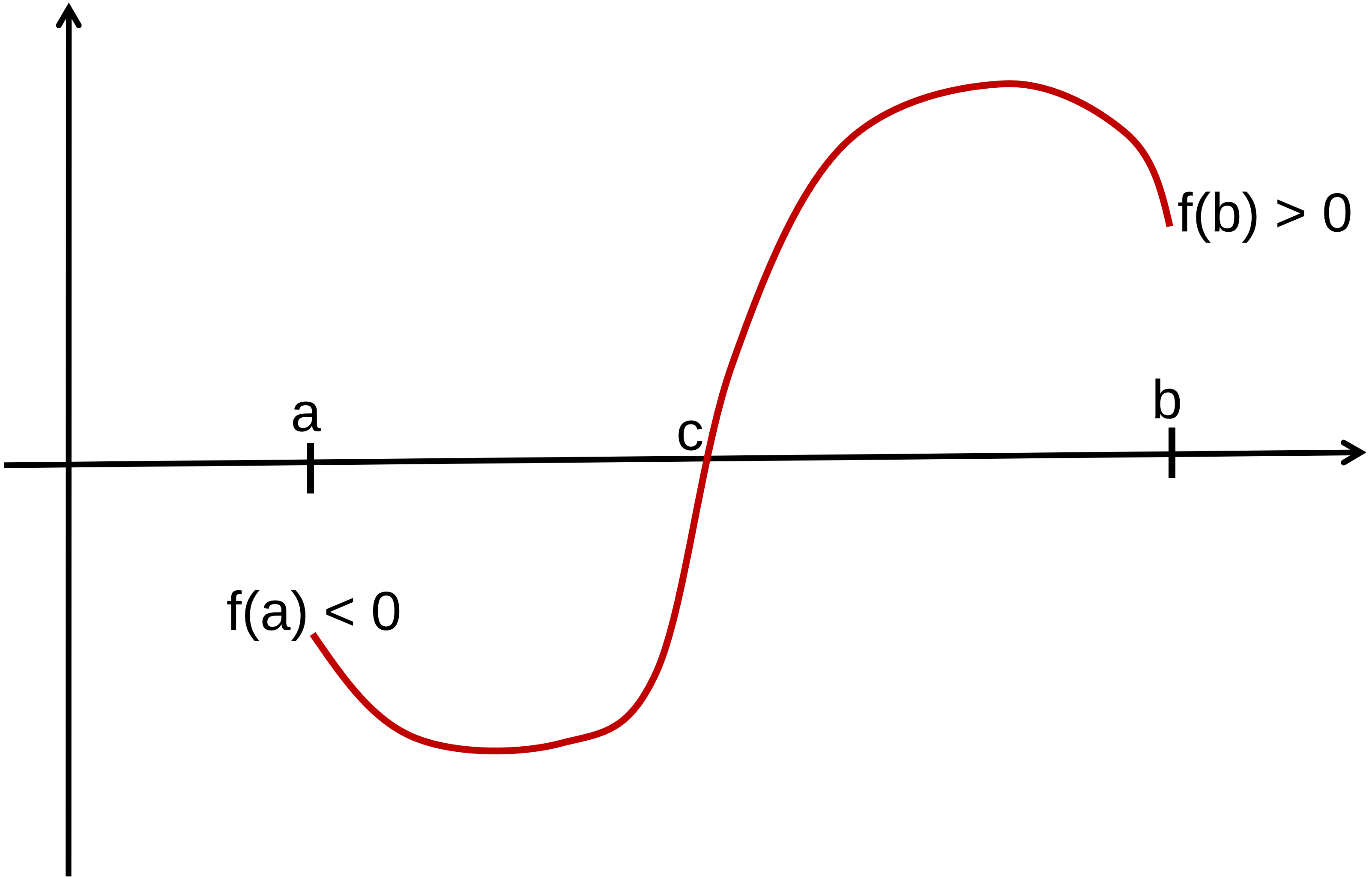
Théorème des Valeurs Intermédiaires « T.V.I »

T.V.I : Si **f** est continue sur l'intervalle [a; b]

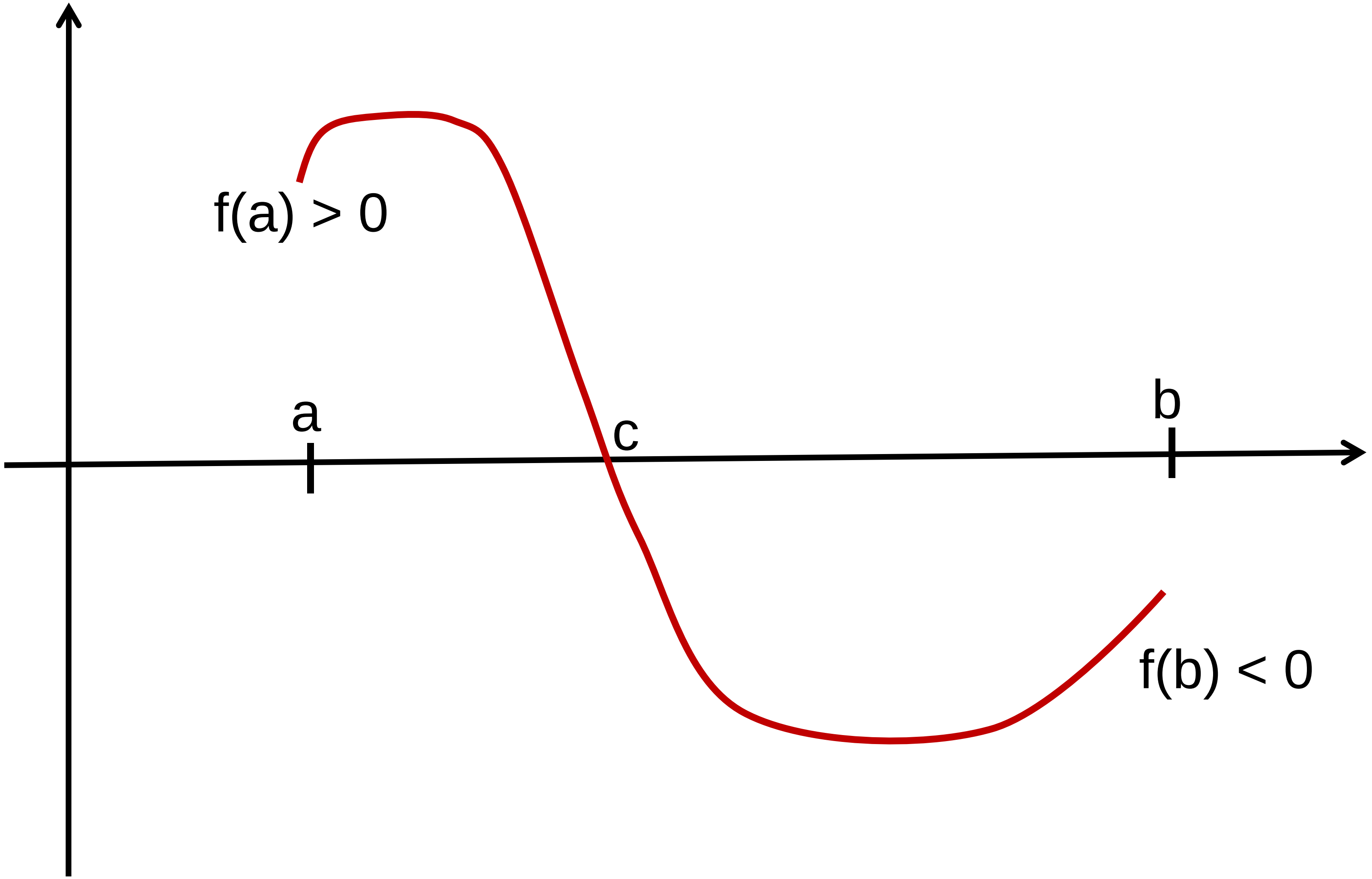
et $f(a)\times f(b)<0$ alors **f** s'annule sur]a ; b[;

C'est-à-dire : $\exists c\in]a;b[$ tel que : $f(c)=0$

Interprétation géométrique



Ou



Exemple

Montrer que la fonction $f(x)=x^3+x-3$

s'annule (au moins une fois) sur [0 ; 2]

➢ La fonction f est une fonction polynomiale donc définie et continue sur IR, en particulier sur l'intervalle [0 ; 2]. De plus :

$$f(0)=-3<0 \text{ et } f(2)=7>0$$

Donc d'après le T.V.I : $\exists c \in]0;2[$

tel que $f(c)=0$

4. Dérivabilité

$$\begin{array}{rcl} I \subset IR & \xrightarrow{\;f\;} & IR \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

f est une fonction définie sur un intervalle I

Définition

On dit que la fonction **f** est dérivable en $\mathbf{x_0}$ si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$ existe.

Cette limite « quand elle existe » est appelée :

dérivée de **f** au point $\mathbf{x_0}$ et on la note $\mathbf{f'(x_0)}$

Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

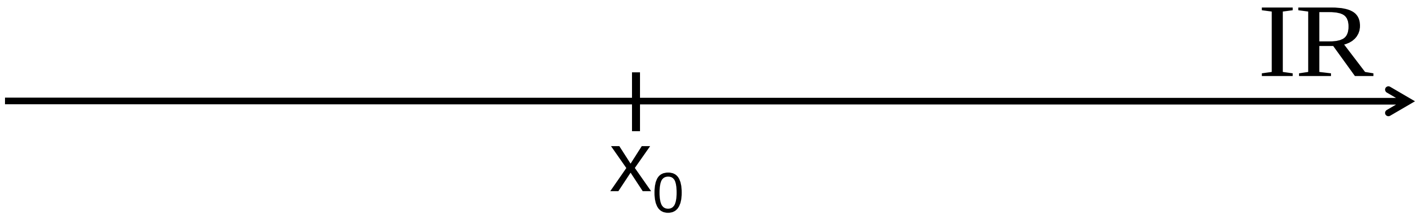
A retenir :

toutes les formules de dérivation qu'on utilise sont une conséquence directe de cette définition.

Exemples

1. Pourquoi la dérivée d'une constante est égale à 0 ?

On pose : $f(x)=C$, soit $x_0 \in IR$



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0$$

Ainsi : $\forall x_0 \in IR, \ f'(x_0) = 0$

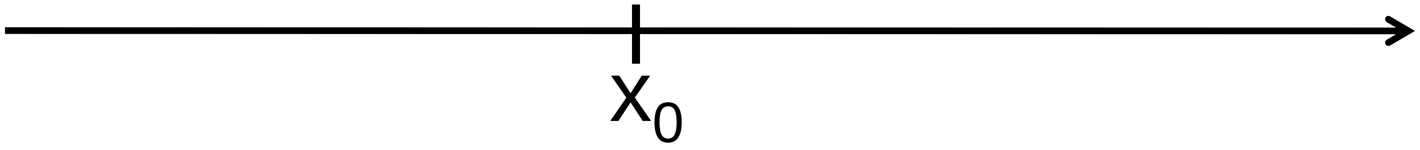
Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in IR, \quad f'(x) = 0$$

Exemples

2. Pourquoi : $\boxed{(ax^2+bx+c)'=2ax+b}$

On pose : $f(x)=ax^2+bx+c$, soit $x_0 \in IR$



$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Donc :

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(ax^2+bx+c)-(ax_0^2+bx_0+c)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x^2-x_0^2)+b(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} a(x+x_0)+b=a(x_0+x_0)+b$$

$$=2ax_0+b$$

Ainsi :

$$\forall x_0 \in IR, \quad f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in IR, \quad f'(x) = 2ax + b$$

finalement :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b}$$

Exemples

3. Pourquoi : $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$, soit $x_0 \in IR^*$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{xx_0(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{xx_0}$$

$$= -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

finalement :

$$\forall x_0 \in IR^*, \quad f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in IR^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

- Les formules qui suivront sont aussi conséquence directe de la définition précédente :

b) **Mémento du petit dériveur**

fonction	fonction dérivée
$ax+b$	a
x^{α} $(\alpha \in \mathbb{Q})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
$\ln x$	$1/x$

fonction	fonction dérivée
e^x	e^x
Sin x	Cos x
Cos x	-Sin x
tanx	$1+\tan^2 x$

Plus général : ***(u** désigne une fonction)*

fonction	fonction dérivée
$au+b$	au'
u^{α} $(\alpha \in Q)$	$\alpha u' \times u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$u'/2\sqrt{u}$
$\ln u$	u'/u

fonction	fonction dérivée
e^{u}	$u' \times e^{u}$
Sin u	$u' \times$ Cos u
Cos u	$-u' \times$ Sin u
tanu	$(1+\tan^2 u) \times u'$

Sans oublier, lorsque la fonction se présente sous forme de « blocs », qu'on a :

fonction	fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u'v+uv'$
u/v	$(u'v-uv')/v^2$
$u \circ v$	$(u' \circ v) \times v'$

Exercice

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$
2. $f(x) = \ln(x^2+x-3)$
3. $f(x) = \sqrt{x}\,e^{\mathrm{Sin}x}$
4. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3}$
5. $f(x) = (x^2+1)^{2/15}$

c) Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction **f** est dérivable sur l'intervalle [a ; b] si elle est dérivable en tout point de [a ; b]

Exemples

1. $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$ définie et continue sur $\boxed{[0;+\infty[}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ définie pour $x\in]0;+\infty[$

Donc la fonction f n'est pas dérivable sur $[0;+\infty[$ car f n'est pas dérivable en 0, mais dérivable seulement sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Exemples

2. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ éfinie et continue IR

Question :

f est-elle dérivable sur l'intervalle [0 ; 2] ?

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}=(x-1)^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$$

C'est-à-dire : $$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

donc f n'est pas dérivable en x = 1, et par conséquent f n'est pas dérivable sur l'intervalle [0 ; 2]

Remarques

1. f est dérivable en x_0 $\Longrightarrow$ f est continue en x_0

2. f est dérivable sur [a ; b] $\Longrightarrow$ f est continue sur [a ; b]

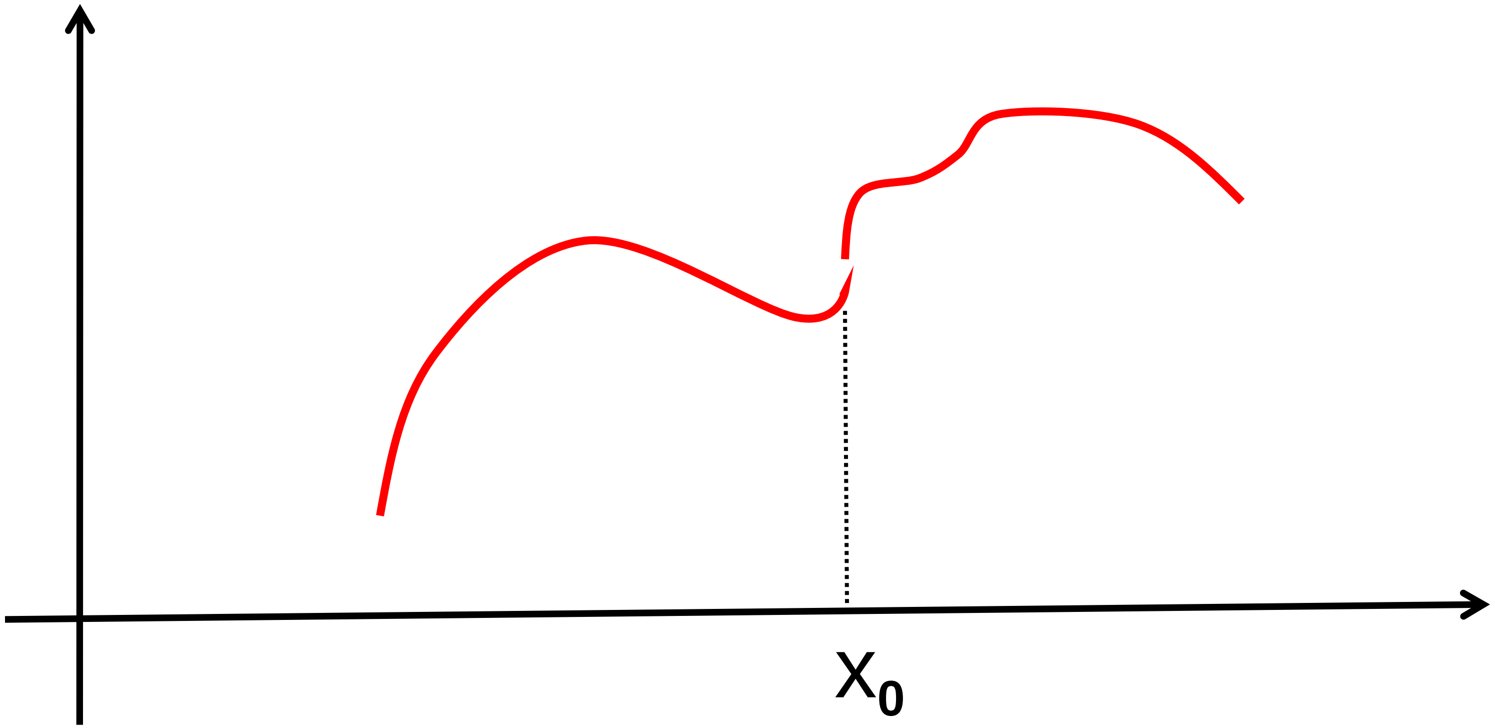
Donc « contraposée »

3. f est discontinue en x_0 $\Longrightarrow$ f n'est pas dérivable en x_0

4. f est discontinue sur [a ; b] $\Longrightarrow$ f n'est pas dérivable sur [a ; b]

Contraposée : $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \text{non } q \Rightarrow \text{non } p$

*la fonction **f** n'est pas dérivable en x_0 car elle est discontinue en x_0*



Exercice « Corrigé »

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

2. $f(x) = \ln(x^2+x-3) \Rightarrow f'x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

3. $f(x) = \sqrt{x}e^{Sinx}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{Sinx} + \sqrt{x}Cosxe^{Sinx}$$

Exercice « Corrigé »

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3} = (x+1)^{3/5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(x+1)^2}}$$

5. $f(x) = (x^2+1)^{2/15}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{15\sqrt[15]{(x^2+1)^{13}}}$$

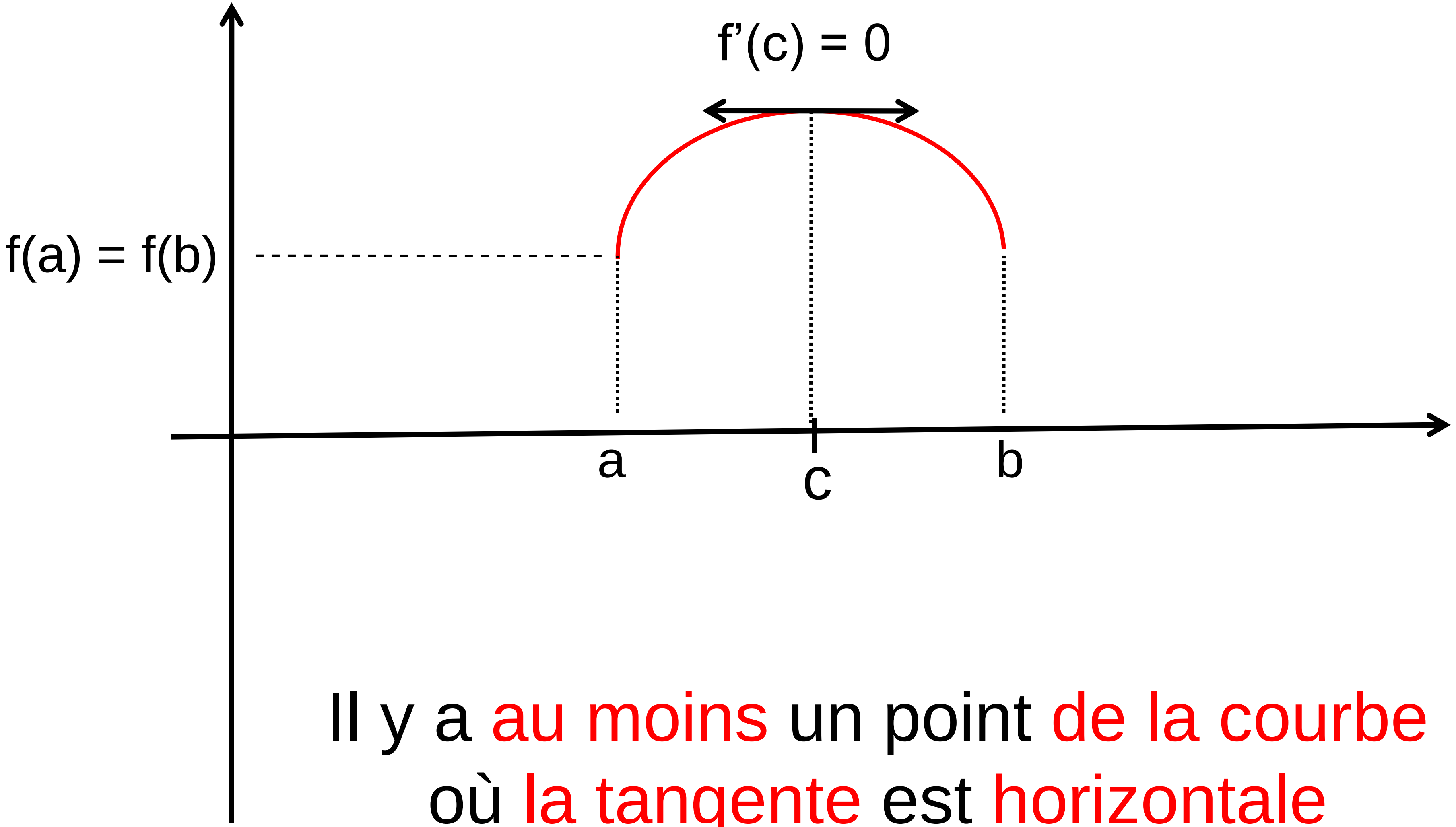
Théorème de Rolle

Théorème :

Si **f** est une fonction continue sur l'intervalle [a ; b] ; dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[et : $f(a)=f(b)$ alors :

$\exists c \in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$

Interprétation géométrique



Il y a au moins un point de la courbe
où la tangente est horizontale

Remarque

Les hypothèses du Théorème de Rolle :

a) f est continue sur $[a\,;\,b]$
b) f est dérivable sur $]a\,;\,b[$
c) $f(a) = f(b)$

sont nécessaires.

Exemple

Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction :

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

sur l'intervalle [0 ; 2] ?

Réponse

a) $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ la racine cubique « racine impaire » est définie sur IR, donc

D_f = IR

- f est la somme d'une fonction constante

«1» et d'une fonction racine « $-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ »
donc continue sur son domaine de définition IR,
en particulier f est continue sur l'intervalle [0 ; 2]

Réponse

b) $$f(0)=1-\sqrt[3]{(0-1)^2}=1-\sqrt[3]{1}=0$$

$$f(2)=1-\sqrt[3]{(2-1)^2}=1-\sqrt[3]{1}=0$$

ainsi $f(0) = f(2)$

Réponse

c) Dérivabilité de f sur l'intervalle]0 ; 2[

$$f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}=1-(x-1)^{2/3}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

- f n'est pas dérivable en x = 1 « f'(1) n'est pas définie », donc f n'est pas dérivable sur l'intervalle]0 ; 2[

Conclusion

On ne peut pas appliquer le Théorème de

Rolle à la fonction $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

sur l'intervalle [0 ; 2] car l'hypothèse de dérivabilité n'est pas vérifiée !!!

Voir Exercice 5, Série de TD

Théorème des accroissements finis « T.A.F »

Théorème : Si **f** est une fonction :

a) continue sur [a ; b]
b) dérivable sur]a ; b[

alors : $\exists c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

$2^{ème}$ version « T.A.F »

Théorème : Si **f** est une fonction :

a) continue sur [a ; b]
b) dérivable sur]a ; b[

alors : $\exists c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$3^{ème}$ version « T.A.F »
… premier développement limité

Théorème : Si **f** est une fonction :

a) continue sur [a ; b]
b) dérivable sur]a ; b[

alors : $\exists c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$

Remarque : Pourquoi on dit : accroissements finis ?

Comme $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

« 1ère version »

Si la dérivée première « f’ » est une fonction

bornée : $|f'(x)|\leq M$ sur l’intervalle considéré,

alors on a : $|f(b)-f(a)|\leq M(b-a)$

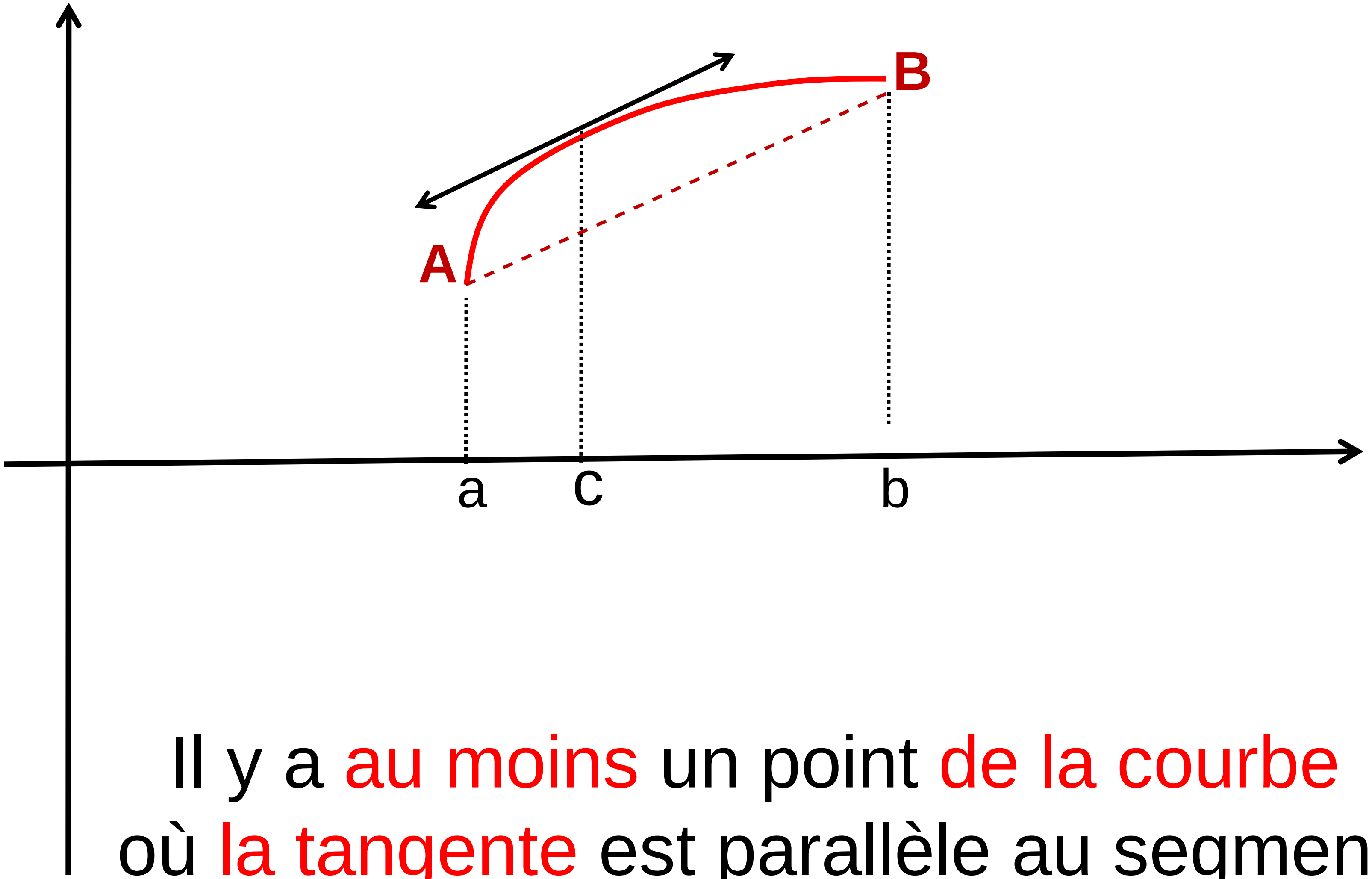
Ainsi, si l’ordre de grandeur de f’ est fixé, les accroissements de la fonction f « f(b)-f(a) » sont bornés « finis »

Interprétation géométrique

$\exists c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Veut dire : Il y a au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle au segment AB

Interprétation géométrique



Il y a au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle au segment AB

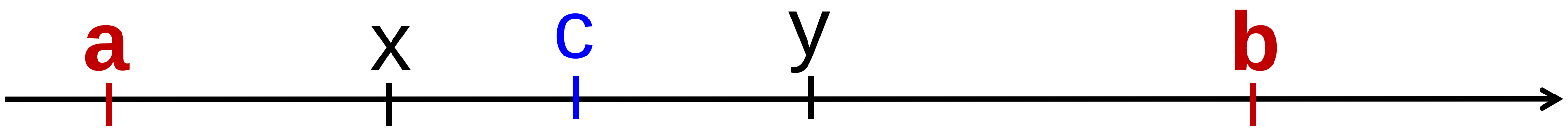
Conséquences

f est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle [a ; b] :

- Si $f'(x)=0$ ($\forall x \in [a;b]$) alors f est constante
- Si $f'(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a;b]$) alors f est croissante
- Si $f'(x) \leq 0$ ($\forall x \in [a;b]$) alors f est décroissante

… sur l'intervalle [a ; b]

Preuve



Soient x et y deux nombres quelconques de l'intervalle [a ; b] tels que : $x \leq y$

- Si $f'(x)=0$ ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)=(y-x)\times 0=0$$

$\Rightarrow f(y)=f(x)$: f est donc constante sur l'intervalle [a ; b]

Preuve

- Si $f'(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y) - f(x) = (y - x) f'(c) \geq 0$$

$$y - x \geq 0 \qquad f'(c) \geq 0 \quad \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

f est donc croissante sur l'intervalle [a ; b]

Preuve

- Si $f'(x) \leq 0$ ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)\leq 0$$

$$y-x\geq 0 \qquad f'(c)\leq 0 \quad \Rightarrow f(y)\leq f(x)$$

f est donc décroissante sur l'intervalle [a ; b]

5. Calcul de limites

« Règle de l'HOSPITAL »

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

Problème : lorsque $x \to 0$:

$\sin x \to 0$ et $x \to 0$

La forme indéterminée

$$\frac{0}{0} = ?$$

Exemples :

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{5x}{x} = 5$$

La forme indéterminée

Nous avons une forme indéterminée lorsqu'on ne peut pas prévoir le résultat d'avance.

Les formes indéterminées :

$$\frac{0}{0}=? \; ; \; \frac{\infty}{\infty}=? \; ; \; \infty-\infty=? \; ; \; 0\times\infty=?$$

La forme indéterminée

$$\frac{0}{0}=?$$

Pour la forme indéterminée $\frac{0}{0}=?$, on peut

utiliser la Règle de l'Hospital :

R-H : Si $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$

alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemples

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sin}x}{x} = ?$$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sin}x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Cos}x}{1} = \operatorname{Cos}0 = 1$$

Exemples

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = ?$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1/1 = 1$$

Exemples

3. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = ?$$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = \frac{e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Remarque

La règle de l'Hospital est un outil puissant pour le calcul des limites. Elle peut être utilisée plusieurs fois de suite.

Exemples

4. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

Règle de l'Hospital « 1ère fois »:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Règle de l'Hospital « 2ème fois »:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemples

5. $$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x - x - x^3}{x^4} = ?$$

Règle de l’Hospital « 1ère fois »:

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\mathrm{Cos}x - 1 - 3x^2}{4x^3}$$

Règle de l’Hospital « 2ème fois »:

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{-\mathrm{Sin}x - 6x}{12x^2}$$

Exemples

Règle de l'Hospital « 3ème fois »:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\mathrm{Cos}x - 6}{24x} = \frac{-7}{0^+} = -\infty$$