

---

# Chapitre XII

## POLITIQUE DE GESTION DES STOCKS DE TYPE

### « $q, s$ »

---

La gestion calendaire des stocks étudiée au [chapitre XI](#) se caractérise par la définition de commandes passées avec une périodicité  $T$  fixée, pour des quantités variables correspondant à la différence entre un niveau fixe  $S$  et celui, variable, d'un stock disponible ou d'une position de stock. La gestion des stocks par la quantité économique optimale se caractérise, au contraire, par une **quantité de commande** fixe  $q$ , et une périodicité variable des commandes (lorsqu'on est en avenir aléatoire), celles-ci étant déclenchées lorsque le stock devient inférieur à un seuil appelé **point de commande**  $s$ .

En théorie, cette technique de gestion des stocks est moins onéreuse que la précédente, du moins si l'on fait abstraction du coût de fonctionnement du système d'information qu'elle utilise. En effet, la méthode de la quantité économique de commande s'appuie sur un suivi en temps réel de l'évolution des stocks (inventaire permanent). Ce système d'information, également utilisable en gestion calendaire, est normalement plus onéreux que celui de l'inventaire périodique qui suffit pour la mise en place d'une gestion calendaire. Deux remarques doivent être faites cependant.

- L'évolution des systèmes d'information va nettement dans le sens d'une intégration des processus et celui d'un suivi en temps réel de l'activité de l'entreprise<sup>1</sup>, pour de multiples raisons parmi lesquelles la gestion des stocks ne joue pas un rôle prépondérant.
- L'approvisionnement de nombreuses références auprès d'un même fournisseur est peu compatible avec la politique d'approvisionnement de type «quantité économique de commande – point de commande», dans la mesure où elle se traduit par d'incessantes passations de commandes auprès d'un même fournisseur. Cette observation doit cependant être tempérée. Tout d'abord, l'existence de modèles plus sophistiqués que ceux présentés ici, permettant de limiter les commandes<sup>2</sup>. Ensuite, et surtout, les possibilités offertes par l'intégration virtuelle des systèmes d'information dans la chaîne logistique, en cas de partenariats forts, conduit à une baisse spectaculaire des

---

1. Sur ce point, voir la présentation faite des ERP au [chapitre XIV](#), § III, page 957.

2. Par exemple des modèles qui permettent le déclenchement d'une commande lorsque le niveau de stock d'un article se situe entre un seuil  $s_{i1}$  et un seuil  $s_{i2} > s_{i1}$ , ce qui fait que lorsqu'une commande doit être passée à un fournisseur en raison du franchissement d'un seuil  $s_{i1}$  d'une référence  $i$ , on examine si d'autres articles  $j$  approvisionnés chez ce même fournisseur ont un niveau de stock inférieur à  $s_{j2}$  auquel cas on les intègre à la commande.

coûts de passation de commande. Du reste, le calcul de ce coût devient alors fortement arbitraire en raison de la grande faiblesse des charges directes. L'augmentation de la fréquence des commandes conduit alors le fournisseur à adapter sa facturation de l'acheminement d'une commande (voir [page 663](#)), ce qui contrecarre la baisse tendancielle du coût de commande.

La philosophie de la gestion par la méthode de la quantité économique de commande est radicalement différente de celle de la gestion calendaire lorsqu'on se place en univers certain. Elle lui fait de larges emprunts lorsqu'on se situe en univers aléatoire. On examinera donc successivement le cas de l'univers certain ([section I](#)) et celui de l'univers aléatoire ([section II, page 829](#)). *Comme pour le chapitre précédent, les modèles proposés ont été implémentés dans un logiciel disponible sur le CD-Rom. Vous pouvez donc, par double clic sur les icônes de la version électronique de ce chapitre, accéder aux exemples réalisés à l'aide de ce logiciel et en traiter d'autres<sup>1</sup>.*

## SECTION I LA QUANTITÉ ÉCONOMIQUE DE COMMANDE EN UNIVERS CERTAIN

On présentera tout d'abord le modèle de base, qui fonde la philosophie de cette méthode de gestion de stock. Dans un second temps (§ [I-2, page 783](#)), on présentera les améliorations apportées à ce modèle de base, améliorations qui consistent à lever certaines hypothèses restrictives du modèle de base.

### I-1 Présentation du modèle de base

#### I-1.1 Exemple introductif

Le supermarché **SUPERLAMBDA** vend dans son rayon «articles de cuisine» une bouilloire électrique qu'il achète 30 dollars liduriens hors taxes. La vente  $D$  de ces bouilloires est estimée à 2400 unités / an. Cette demande peut raisonnablement être considérée comme stable au cours du temps (en particulier, elle ne subit pas de variations saisonnières). Le chef de rayon suit de près le niveau des stocks et est en mesure d'éviter toute rupture de stock en lançant à temps une commande de réapprovisionnement. Pour ce faire, il tient compte du caractère certain de la demande et de l'existence d'un délai d'obtention de 20 jours ouvrables (l'année comportant 48 semaines de 6 jours ouvrables, soit 288 jours ouvrables).

Le coût de passation d'une commande  $c_c$  est estimé à 300 dollars lidurien, coût qui intègre des frais administratifs (rédaction du bon de commande, écriture comptable, participation à la gestion des traites, réception des marchandises, contrôle...) et que l'on peut raisonnablement considérer comme indépendant du nombre d'unités commandées. Par ailleurs, la possession à longueur d'année d'une bouilloire électrique coûte à **SUPERLAMBDA**  $c_p = 30 \times 0,20 = 6$  dollars liduriens, coût correspondant à un coût d'opportunité (taux annuel de 20 %). Le problème posé consiste à rechercher la quantité économique de commande, c'est-à-dire la commande constante  $q$  à passer périodiquement, qui soit telle que le coût annuel moyen sur longue période soit minimal. Certains auteurs l'appellent encore « **série économique** » ou « **quantité de Wilson** » (bien que ce soit Harris (1913,

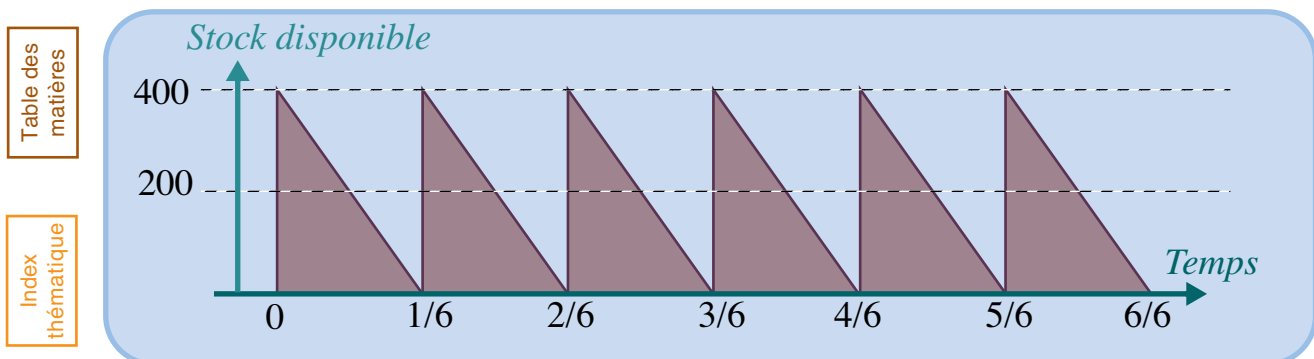
1. Voir avertissement de la note du bas de la [page 8](#).

[219]) et non Wilson, qui ait, le premier, établi la formule de définition de cette quantité  $q$ ).

Avant de chercher la valeur optimale de  $q$ , raisonnons sur une valeur quelconque de  $q$ , par exemple  $q = 400$ , pour calculer le coût annuel moyen sur longue période. Si la demande est uniforme, c'est-à-dire si le nombre de bouilloires électriques demandées chaque semaine de 5 jours ouvrables est le même (ce qui est une hypothèse assez forte!), la commande de 400 bouilloires sera écoulee en  $400 / 2400 = 1 / 6$  d'année, c'est-à-dire 2 mois, ce que l'on peut encore exprimer en disant que le nombre moyen de commandes par an (variable d'état qui dépend de la variable de commande  $q$ ) est  $I_c(q) = D / q = 2400 / 400 = 6$ . Le coût de passation d'une commande étant de 300 dollars liduriens, le coût de commande annuel sera donc  $300 \cdot I_c(q) = 300 \times 2400 / q = 1800$  dollars liduriens. Par ailleurs, pour minimiser le coût de possession du stock, le magasinier doit s'arranger pour passer les commandes de façon à ce que son stock soit nul au moment de la mise à disposition au rayon des bouilloires livrées (on verra au § I-1.7, page 779, que ceci est obtenu en passant une commande lorsque le niveau de stock descend en dessous de 167 bouilloires). Le stock varie donc entre 400 et 0 tout au long de l'année, ce qu'illustre la figure 193.

FIGURE 193

*Évolution du stock avec la politique  $q = 400$  et  $s = 167$*



Au cours de l'un quelconque des cycles de 2 mois, il est facile d'établir que le stock moyen est de  $400 / 2 = 200$ , parce que le rectangle BDEC, qui correspond à un niveau de stock de 200 durant toute la durée du cycle, a la même surface que le triangle ABC qui visualise l'évolution du stock réel (voir figure 194). Le stock moyen à longueur d'année  $I_p(q)$  étant le même que le stock moyen au cours d'un cycle, il s'ensuit que le coût annuel de possession est  $6 \times I_p(q) = 6 \times 400 / 2 = 1200$ . Le coût annuel moyen sur longue période  $C(q)$  est donc :

$$C(q = 400) = 6 \times \frac{400}{2} + 300 \times \frac{2400}{400} = 3000 \text{ \$/an}$$

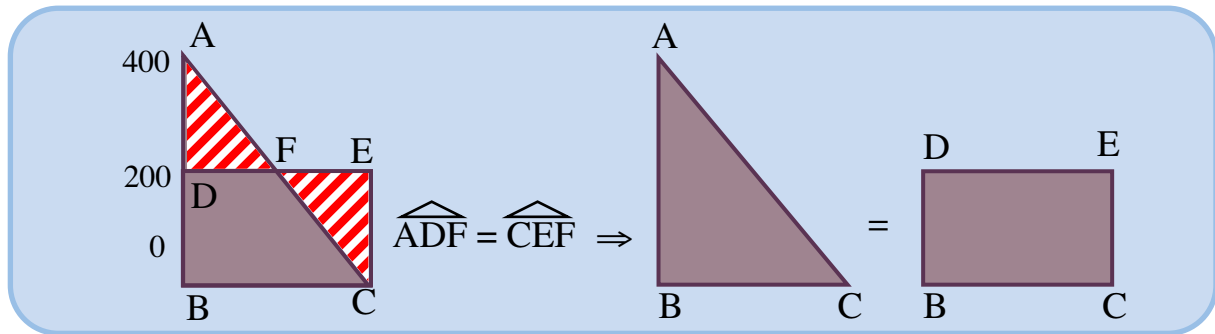
Nous verrons qu'il est possible, en choisissant une meilleure valeur pour  $q$ , d'abaisser ce coût moyen annuel.

### I-1.2 Modélisation

Les hypothèses que nous avons retenues implicitement, sont les suivantes :

- la demande est certaine et distribuée uniformément tout au long de l'année, le taux annuel de demande étant  $D$  ;

FIGURE 194  
Détermination du stock moyen possédé



- le délai de réapprovisionnement est certain; ces deux premières hypothèses impliquent qu'il n'y a pas besoin de constituer de stock de sécurité;
- on cherche à définir une commande périodique constante  $q$  qui minimise un coût de gestion, somme de 2 coûts qui varient en sens contraire en fonction de  $q$ : un coût de possession et un coût de commande; cette commande  $q$  est la seule variable de commande sur laquelle le gestionnaire désire agir (ou peut agir); pour l'article considéré, le coût de possession unitaire  $c_p$  et le coût de commande  $c_c$  sont fixés et indépendants de ceux relatifs à d'autres articles;.
- la livraison de  $q$  est instantanée, c'est-à-dire qu'elle ne s'étale pas dans le temps par le biais de livraisons partielles.

On peut généraliser la démarche suivie au § I-1.1 pour donner l'expression littérale du coût moyen annuel sur la longue période:

$$C(q) = c_p \cdot I_p(q) + c_c \cdot I_c(q) = c_p \cdot \frac{q}{2} + c_c \cdot \frac{D}{q} \quad \text{relation 219}$$

ce qui donne dans notre exemple:  $C(q) = 6 \times \frac{q}{2} + 300 \times \frac{2400}{q} = 3q + \frac{720000}{q}$ .

### I-1.3 Digression mathématique

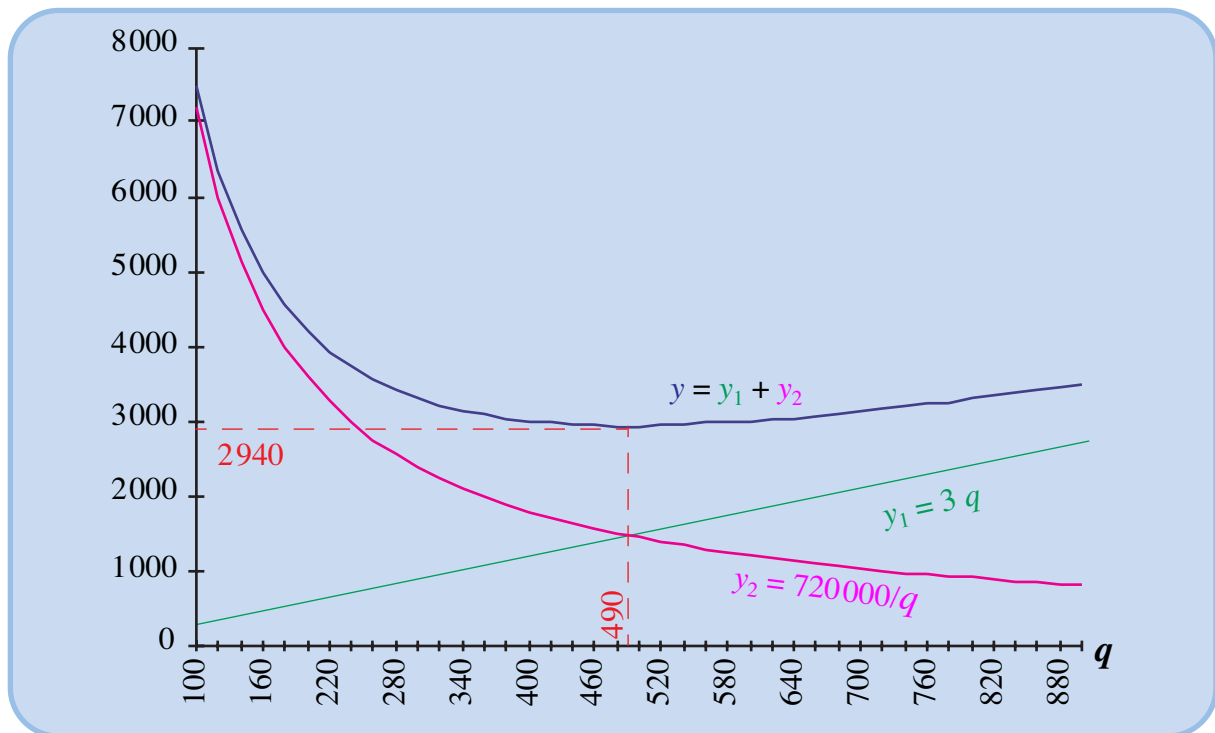
Sur le plan mathématique, la fonction étudiée peut s'écrire, en posant  $y = C(q)$ :  $y = A \cdot q + \frac{B}{q}$  avec  $A = \frac{c_p}{2}$  et  $B = c_c \cdot D$ ; elle se décompose en une somme de deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  ( $y = y_1 + y_2$ , avec  $y_1 = A \cdot q$  et  $y_2 = \frac{B}{q}$ ) où:

- $y_1$  est l'équation d'une droite, représentative du coût moyen annuel de possession,
- $y_2$ , l'équation d'une hyperbole, représentative du coût moyen annuel de passation de commandes.

La figure 195 illustre cette décomposition, les valeurs de A et de B étant celles de notre exemple numérique.

À l'optimum, on a:  $y' = \frac{dy}{dq} = A - \frac{B}{q^2} = 0 \Rightarrow A \cdot q^2 - B = 0$ . D'où la valeur optimale  $q^*$ :

FIGURE 195  
Décomposition de la fonction de coût  $C(q)$

Table des  
matières

$$q^* = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

relation 220

Pour s'assurer que cet optimum est un minimum, il convient d'examiner la valeur de la dérivée seconde au point  $q^*$  :  $\frac{d^2 y'}{dq^2} = (-2)(-Bq^{-3}) = 2B \cdot q^{-3}$  qui est nécessairement positif, puisque  $B$  et  $q$  le sont aussi. La valeur minimale de  $y$  est :

$$y^* = A \cdot q^* + \frac{B}{q^*} = A \sqrt{\frac{B}{A}} + B \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{BA^2}{A}} + \sqrt{\frac{AB^2}{B}} = \sqrt{BA} + \sqrt{AB} = 2\sqrt{AB} = 2Aq^*$$

d'où

Index  
thématique

$$C(q^*) = \sqrt{4 \cdot \frac{c_p}{2} \cdot c_c \cdot D} = c_p \cdot q^*$$

relation 221

On peut remarquer que, pour cette valeur optimale  $q^*$ , il y a égalité entre le coût moyen annuel de possession et le coût moyen annuel de commande puisque :

$Aq^* = A \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{AB}$  et que  $\frac{B}{q^*} = B / \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{AB}$ , ce qui implique donc que l'on ait  $c_c \cdot I_c(q^*) = c_p \cdot I_p(q^*)$ . Ajoutons enfin que la courbe de  $y$  n'est pas symétrique par rapport à  $q^*$ , ce qui est évident graphiquement.

### I-1.4 Combien commander ? Formule de la quantité économique de commande

L'application de la relation 220 permet d'obtenir la quantité économique de commande  $q^*$ , que l'on désignera également par  $q_w$ , l'indice  $w$  rappelant qu'il

s'agit de la formule classique attribuée à Wilson (bien que trouvée par Harris, comme cela a déjà été dit):  $q^* = \sqrt{\frac{c_c \cdot D}{c_p/2}}$  d'où:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c \cdot D}{c_p}} = q_W \text{ quantité de commande de Wilson} \quad \text{relation 222}$$

Dans notre exemple, il convient donc de commander:  $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{6}} = 489,9$ . On arrondira cette valeur à 490, puisqu'il ne saurait être question de commander une fraction de bouilloire (on reviendra sur ce point à la fin de ce paragraphe). Cette quantité optimale correspond à  $q^*/D = 490/2400 = 0,204$  année de consommation. D'une façon générale, cette durée  $\tau^*$  correspondant à la consommation de  $q^*$  est:

$$\tau^* = \frac{q^*}{D} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c \cdot D}{D^2 \cdot c_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{D \cdot c_p}}$$

Si, comme dans notre exemple, le coût de possession correspond à un coût d'opportunité, produit du coût unitaire d'acquisition  $c_u$ , par le taux  $i$  ( $c_p = i \cdot c_u$ ), on peut encore écrire:

$$\tau^* = \frac{q^*}{D} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{i \cdot c_u \cdot D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_u \cdot D}} \quad \text{relation 223}$$

L'intérêt de cette relation apparaît lorsque plusieurs articles ont le même coût de commande  $c_c$  (ce qui est habituellement le cas pour chaque « famille d'articles »), car il apparaît alors que le nombre de mois que représente la commande optimale est inversement proportionnel à la racine carrée de la valeur de la consommation annuelle, ce qu'illustre la [figure 196](#), avec:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{i}} = \sqrt{\frac{2 \times 300}{0,2}} = 54,77$$

Il est facile, à partir de ce schéma, de déterminer approximativement la quantité économique de Wilson connaissant la valeur de la consommation annuelle: si la valeur annuelle de la demande de bouilloires électriques est de  $2400 \times 30 = 72000$ , on lit graphiquement que l'on doit commander une fraction de la consommation annuelle approximativement égale à 0,2, ce qui conduit à une commande de  $0,2 \times 2400 = 480$  bouilloires électriques, valeur voisine de la solution exacte déjà obtenue.

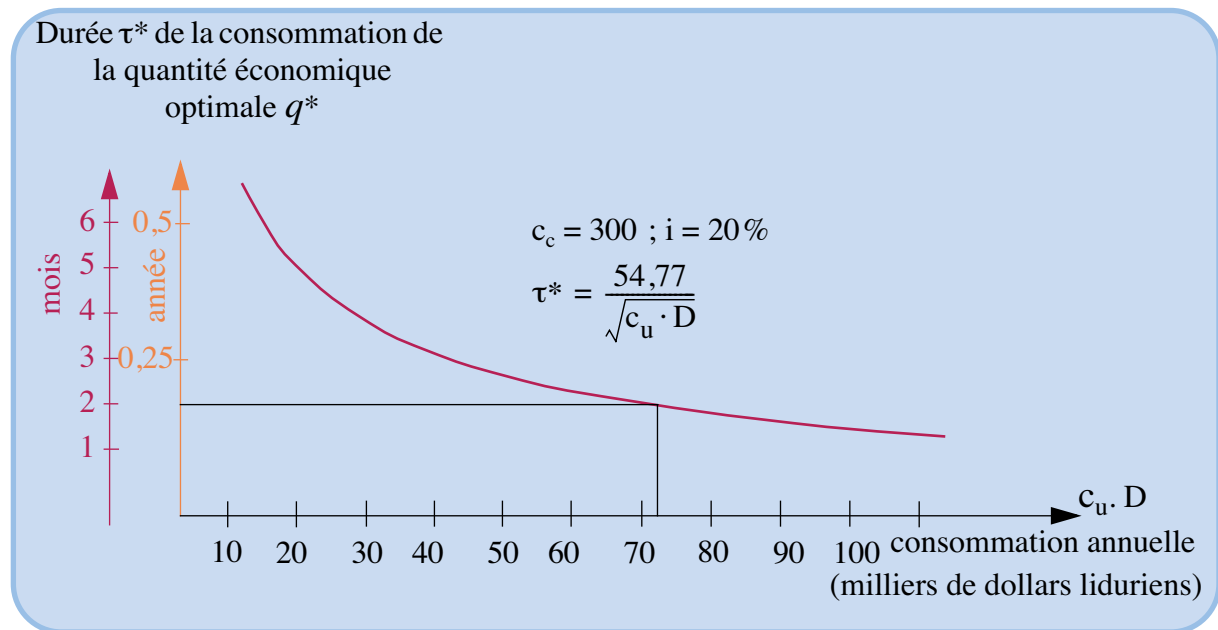
En application de la [relation 221](#) ( $C(q^*) = \sqrt{4 \cdot \frac{c_p}{2} \cdot c_c \cdot D} = c_p \cdot q^*$ ), on trouve la relation donnant le coût minimum:

$$C(q^*) = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot c_c \cdot D} = c_p \cdot q^* \quad \text{relation 224}$$

dont l'application donne:  $C(q^*) = 6 \times 490 = 2940$ . En réalité, cette valeur n'est pas tout à fait exacte, puisque nous avons pris la valeur arrondie de  $q^*$ , laquelle est

FIGURE 196

Relation entre la valeur de consommation annuelle et la durée de consommation de la quantité commandée



la seule à avoir un sens physiquement. Le coût minimal exact est, en reprenant la formule du coût  $C(q)$ .

$$C(q = 490) = 6 \times \frac{490}{2} + 300 \times \frac{2400}{490} = 1470 + 1469,39 = 2939,39$$

L'application directe de la formule a donc entraîné, dans ce cas particulier, une erreur d'environ 0,03 %, ce qui est tout à fait négligeable. On étudiera, d'une façon générale, au § I-1.6, page 778, l'impact sur le coût, du choix d'une valeur de  $q$  qui ne correspond pas à la valeur  $q^*$ . Auparavant, examinons l'adaptation de la formule de Wilson au cas d'une demande discrète.

### I-1.5 Adaptation de la formule de Wilson au cas d'une demande discrète

Jusqu'ici, la demande, de nature discrète, a été considérée comme continue (la solution numérique pouvant être arrondie sans inconvénient, la valeur obtenue étant suffisamment élevée). Si l'on tient à considérer la demande comme discrète, on démontre facilement<sup>1</sup> que la valeur optimale  $q^*$  est telle que :

$$q^*(q^* - 1) < \frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p} < q^*(q^* + 1) \quad \text{relation 225}$$

Si en outre la quantité commandée doit être un multiple d'un conditionnement de  $k$  unités, on montre alors<sup>2</sup> que  $q^*$  est un multiple de  $k$ , tel que :

$$q^*(q^* - k) \leq \frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p} \leq q^*(q^* + k) \quad \text{relation 226}$$

1. Voir, par exemple, Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 36.

2. Voir Naddor (1966, [313]), p. 51.



On notera que cette [relation 226](#) donne la [relation 225](#), en posant  $k = 1$  (et la [relation 222](#), en posant  $k = 0$ , pour se ramener au cas continu).

### I-1.6 Impact du choix d'une quantité de commande non optimale sur le coût moyen annuel

Pour comparer le coût moyen annuel  $C(q)$  correspondant à une quantité de commande  $q$  différente de  $q^*$ , avec le coût minimal  $C(q^*)$ , posons  $q = h \cdot q^*$ , avec  $h > 0$  et  $C(q) = k \cdot C(q^*)$ <sup>1</sup>.

On doit donc comparer:  $C(q) = c_p \cdot \frac{q}{2} + c_c \cdot \frac{D}{q} = c_p \cdot \frac{h \cdot q^*}{2} + c_c \cdot \frac{D}{h \cdot q^*}$ , avec le coût minimal (donné par la [relation 221](#), [page 775](#)):  $C(q^*) = c_p \cdot q^*$ . Posons  $k = \frac{C(q)}{C(q^*)} = \frac{c_p \cdot h \cdot q^*}{2 \cdot c_p \cdot q^*} + \frac{c_c \cdot D}{h \cdot c_p \cdot q^* \cdot q^*} = \frac{h}{2} + \frac{c_c \cdot D}{h \cdot c_p} \cdot \frac{c_p}{2 \cdot c_c \cdot D}$ , d'où:

$$k = \frac{h}{2} + \frac{1}{2h} \quad \text{relation 227}$$

Le coefficient  $k$  de variation du coût est donc une fonction du coefficient de variation des quantités  $h$ , de même type que la fonction  $C(q)$ :  $k = A \cdot h + B \cdot h^{-1}$ , avec  $A = B = 1/2$ . Il est donc facile d'établir le [tableau 219](#) calculant la répercussion d'une commande non optimale, sur le coût moyen annuel. Ce tableau montre qu'il est préférable de retenir une valeur de  $q$  supérieure à la valeur optimale, plutôt que l'inverse. Ceci ne saurait surprendre, compte tenu des remarques faites à la [page 775](#) sur la non symétrie de la courbe de la [figure 195](#), par rapport à  $q^*$ .

TABLEAU 219

Sensibilité du coût moyen annuel à l'erreur commise sur la quantité commandée

$h = \frac{q}{q^*}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$k = \frac{C(q)}{C(q^*)}$	1,250	1,133	1,064	1,025	1,006	1,005	1,017	1,035	1,057	1,083

L'intérêt de cette étude de sensibilité est de montrer que des erreurs relativement importantes dans la détermination des coûts ont une incidence nettement plus faible sur le coût de fonctionnement du système. Pour le vérifier, désignons par  $D \cdot k_D$ ,  $c_c \cdot k_c$  et  $c_p \cdot k_p$ , les valeurs erronées utilisées à la place de  $D$ ,  $c_c$  et  $c_p$ . En retenant pour  $k_D$ ,  $k_c$  et  $k_p$ , les valeurs 0,8 et 1,2, autrement dit, en supposant que les paramètres utilisés soient faux à  $\pm 20\%$ , on peut dresser le [tableau 220](#) qui combine toutes les valeurs possibles de  $k_D$ ,  $k_c$  et  $k_p$  pour en calculer l'impact sur la quantité commandée:

1. Ce raisonnement d'analyse de sensibilité a été appliqué au modèle de Wilson pour la première fois par Naddor (1966, [313]).



$$h = \frac{q}{q^*} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot k_D \cdot c_c \cdot k_c}{c_p \cdot k_p}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p \cdot k_p}}} = \sqrt{\frac{k_D \cdot k_c}{k_p}}$$

et celui sur le coût moyen annuel. Il s'avère donc que, si dans la détermination des paramètres, on se trompe au plus de  $\pm 20\%$ , l'erreur commise se traduit par un accroissement de coût de moins de 5%. Il semble donc préférable d'utiliser des données grossières plutôt que de gérer selon l'inspiration du moment !

TABLEAU 220

*Sensibilité de la quantité commandée et du coût moyen annuel aux erreurs commises sur les paramètres de la formule de Wilson*

$k_D$	0,8	0,8	0,8	0,8	1,2	1,2	1,2	1,2
$k_p$	0,8	0,8	1,2	1,2	0,8	0,8	1,2	1,2
$k_c$	0,8	1,2	0,8	1,2	0,8	1,2	0,8	1,2
$h = \frac{q}{q^*}$	0,894	1,095	0,730	0,894	1,095	1,342	0,894	1,095
$k = \frac{C(q)}{C(q^*)}$	1,006	1,004	1,050	1,006	1,004	1,043	1,006	1,004

Table des matières

Index thématique

### I-1.7 Quand commander? Détermination du point de commande

Le délai d'obtention est de 20 jours ouvrables, c'est-à-dire  $L = 20 / 288 \approx 0,069$  an. Pendant cette durée, la demande s'élève à  $2400 \times 20 / 288 = 166,67 \approx 167$  bouilloires. Si le chef de rayon passe commande de 490 bouilloires *avant* que le stock ait atteint le niveau de 167, une partie du stock restera inutilisée et entraînera un accroissement inutile du coût de possession. Mais si le chef de rayon passe commande *après* que le niveau de stock est descendu en dessous de 167 bouilloires, il y aura rupture de stock, ce que l'on s'interdit ici. Le point de commande optimal correspond donc à 167 bouilloires (voir [figure 197](#)).

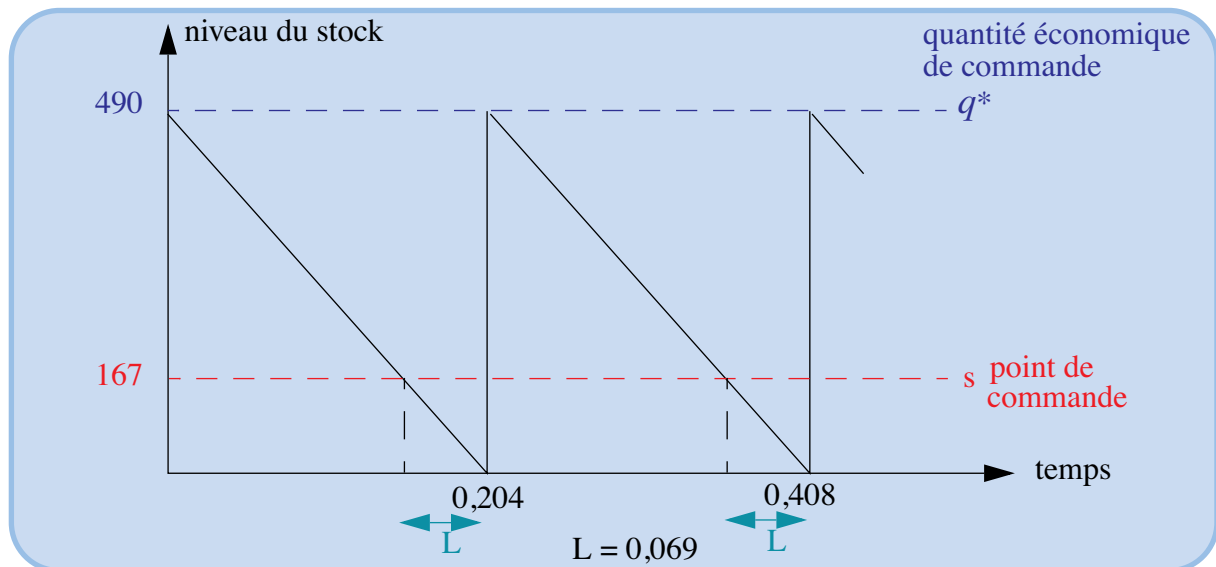
Si l'on généralise la démarche que l'on vient de suivre, le point de commande  $s$  est tel que,  $D$  étant la demande annuelle et  $L$ , le délai d'obtention exprimé en années :

$$s^* = D \cdot L \quad \text{Détermination du point de commande} \quad \text{relation 228}$$

La détermination de ce point de commande est indépendante de celle de la quantité économique de commande. Ceci est vrai en univers certain, mais ne l'est plus en univers aléatoire, comme nous le verrons au § II-1.1.3, page 834.

Dans l'exemple choisi, on a  $q > s$ , c'est-à-dire que la quantité livrée est supérieure à la consommation moyenne pendant le délai d'obtention. Or, rien ne garantit que l'on ait toujours  $q > s$ , puisque  $q$  et  $s$  sont définis indépendamment l'un de l'autre. S'il en est ainsi, le point de commande qui vient d'être calculé reste valable, à condition de ne pas travailler sur le stock physiquement détenu, mais sur la **position de stock**, c'est-à-dire le stock physiquement détenu auquel on ajoute

FIGURE 197  
Point de commande



les livraisons attendues et duquel on retranche les unités demandées et non enlevées ou réservées à la suite d'une rupture de stock. Mais on peut également préférer travailler sur le stock disponible, auquel cas il faut introduire la notion de **points de commande multiples**.

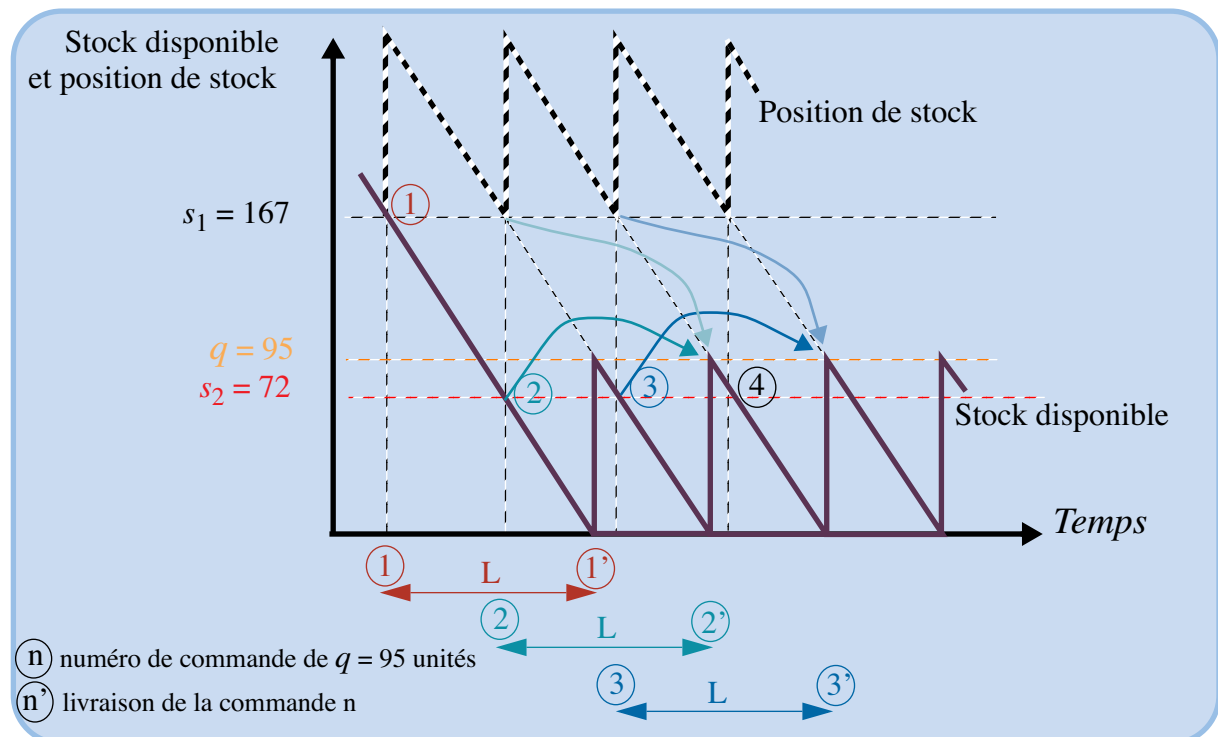
Supposons que, dans l'exemple précédent, il y ait une modification des coûts de possession et de commande qui ait conduit à la détermination d'une quantité économique de commande  $q = 95$ , avec toujours  $s = 167$ . On placera, pour éviter toute rupture de stock, un second point de commande  $s_2$  à un niveau  $s_2 = s - q = 167 - 95 = 72$ , qui permet 20 jours plus tard, c'est-à-dire après une demande de 167 bouilloires, de retrouver un stock nul. Ce second point de commande sera ensuite franchi périodiquement (voir [figure 198](#)). Si l'on ajoute au stock disponible correspondant au second point de commande (72), la livraison attendue (= 95) déclenchée par la précédente commande (effectuée initialement au premier point de commande et ensuite périodiquement au second point de commande), on obtient une position de stock dont le niveau est précisément celui du premier point de commande.

On peut systématiser la démarche que l'on vient de suivre en ajoutant au premier point de commande  $s$  un deuxième point de commande  $s_2 = s - q$ , l'adjonction d'un troisième point de commande pouvant être nécessaire :

- premier point de commande:  $s = DL$
- si  $s > q$ , alors second point de commande:  $s_2 = s - q$
- si  $s > 2q$ : troisième point de commande:  $s_3 = s - 2q$

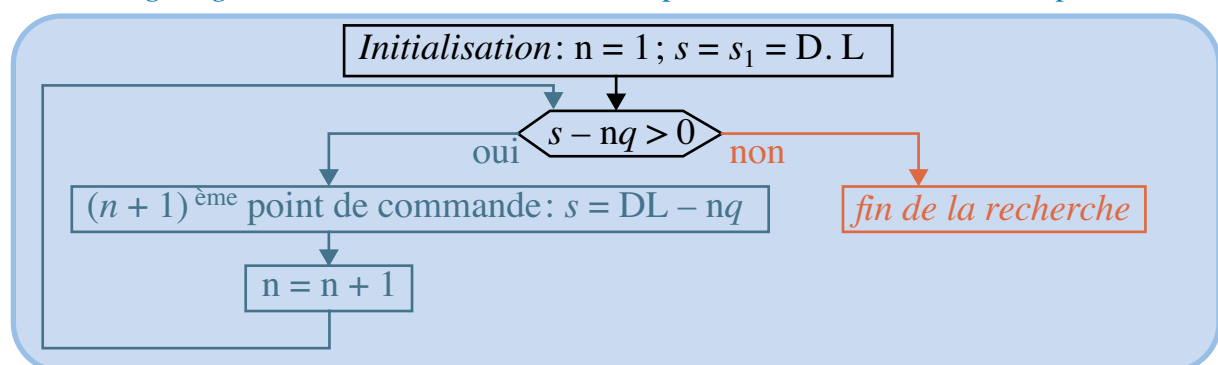
Le troisième point de commande s'impose si la consommation pendant le délai d'obtention ( $DL = s$ ) est supérieure à deux fois la livraison périodique ( $= q$ ), ce qui, dans notre dernier exemple, ne se produisait pas. Un raisonnement similaire à celui que l'on vient de tenir, conduit à définir ce troisième point de commande  $s_3$  au niveau  $s - 2q$ . D'une manière générale, pour éviter toute rupture de stock, le nombre de points de commande qu'il faut ajouter au point de commande initial est égal à la valeur entière tronquée du rapport  $DL / q$ . Le raisonnement récurrent de

FIGURE 198

*Points de commande multiples (cas de 2 points de commande)*

la recherche des points de commande multiples qui en résulte est décrit par l'organigramme de la figure 199. La relation 228 de la page 779 reste toujours **valable à condition de l'appliquer à la position de stock** et non au stock physiquement détenu; cette solution est sans doute la plus simple à utiliser.

FIGURE 199

*Organigramme de détermination des points de commande multiples*

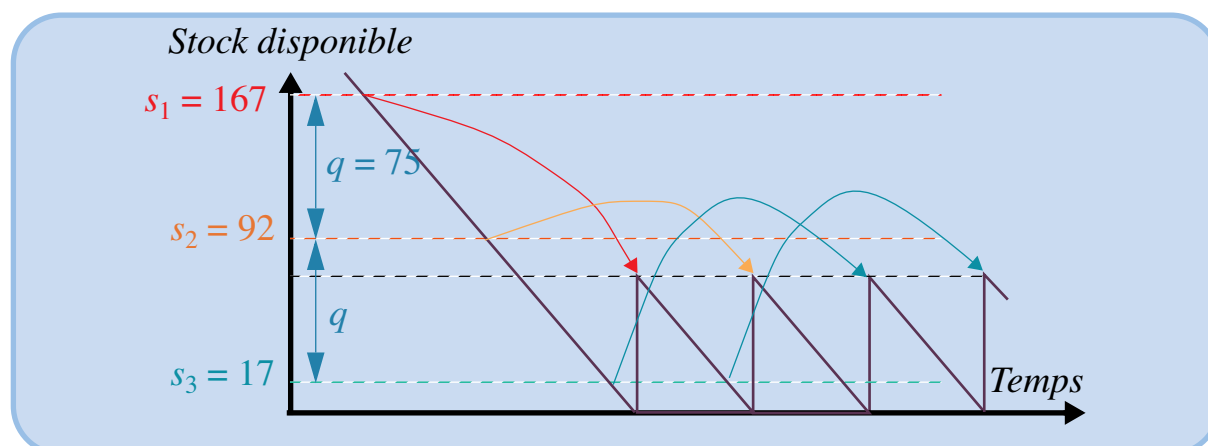
La figure 200 illustre l'évolution du niveau du stock disponible dans le cas de points de commande triple de l'exemple suivant:  $q = 75$  et  $s = 167$ .

### I-1.8 Analyse des conséquences de la politique optimale

Nous avons défini les valeurs optimales prises par les variables de commande ( $q = 490$ ,  $s = 167$ ). Les valeurs prises à l'optimum par les variables d'état n'ont pas été explicitées. Le stock moyen détenu  $I_p(q)$  est égal à  $490 / 2 = 245$  et le nombre moyen annuel de commandes  $I_c(q)$  est égal à  $2400 / 490 = 4,898$ .

Les valeurs prises par ces variables d'état donnent naissance à deux indicateurs «plus parlants» pour les gestionnaires. En passant 4,898 commandes par an, il

**FIGURE 200**  
*Points de commande multiples (cas de 3 points de commande)*



s'écoule une durée de  $1 / 4,898 = 0,20417$  année (= 58,8 jours ouvrables) entre deux commandes (ou deux livraisons). Par ailleurs, la politique retenue conduit à un stock moyen de 245 unités pour satisfaire une demande annuelle de 2400 unités. On pourra alors dire que ce stock moyen tourne  $2400 / 245 = 9,7959$  fois dans l'année, indicateur connu comme étant le **taux de rotation du stock**. Selon un raisonnement comptable simpliste, mais hélas fort répandu, un stock est d'autant mieux géré que la rotation de ce stock est rapide. Ce raisonnement ne prend en compte que le coût des immobilisations ( $c_p I_p(q)$ ) et délaisse totalement le coût de passation des commandes. On peut même ajouter, si les hypothèses du modèle de Wilson sont acceptables, que ce taux de rotation a une valeur optimale, ici 9,7959. Cette remarque n'implique pas que des efforts ne soient pas à entreprendre pour faire baisser les coûts de commande, ce qui induit mécaniquement une baisse des stocks<sup>1</sup>.

L'indicateur de coût moyen annuel de gestion s'élève (cf. [page 777](#)) à 2939,39 dollars liduriens. Il se décompose en un coût moyen annuel de commande de 1469,39 dollars, calculé sur la base d'un coût standard et que l'on doit retrouver d'une manière ou d'une autre en charge du compte de résultats<sup>2</sup>, et un coût de possession de 1470 dollars qui, pour partie au moins correspond à une charge supplétive (rémunération des capitaux immobilisés) et ne se retrouve donc pas intégralement comme charge du compte de résultat. Enfin, si l'on tient compte de la dépense d'acquisition des 2400 bouilloires électriques, pour un montant de  $2400 \times 30 = 72000$  dollars liduriens, l'indicateur de coût moyen annuel, achat inclus, s'élève à  $2939,39 + 72000 = 74939,39$  dollars liduriens.

Si l'on connaît la marge unitaire sur le coût d'achat que l'on supposera être  $c_r = 40 - 30 = 10$  dollars liduriens, la marge annuelle sur coût d'achat est  $c_r D$ , ce qui donne dans notre exemple  $2400 \times 10 = 24000$  dollars liduriens. Il faut y retrancher le coût moyen annuel de gestion pour obtenir une marge annuelle sur coût d'achat, de stockage et de commande, c'est-à-dire 2939,39 ce qui conduit à une marge moyenne annuelle de  $24000 - 2939,39 = 21060,61$  dollars liduriens / an, qui, comme on l'a déjà souligné ci-dessus, est grevée d'une charge supplétive.

1. Voir sur ce point la discussion de la [page 652](#).

2. Voir les problèmes posés par l'utilisation de coût standard aux [§ II-2.2.31b, page 659](#), et [§ II-2.1.2.1, page 643](#), du [chapitre X](#).

En définitive, les résultats associés à la politique retenue sont résumés dans le tableau 221.

TABLEAU 221  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers certain)



Politique optimale d'approvisionnement des Bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	490
Point de commande	167
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	4,90
Intervalle moyen entre 2 commandes	58,8 jours
Stock moyen détenu	245,00
Taux moyen annuel de rotation du stock	9,80
Conséquences financières	
Dépense moyenne d'acquisition	72 000,00
Coût moyen de commande	1 469,39
Coût moyen de possession	1 470,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 939,39
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	74 939,39
Marge nette	21 060,61

Table des matières

Index thématique

## I-2 Les améliorations du modèle en univers certain

Le modèle de base étudié au § I-1 manque singulièrement de réalisme à cause du caractère restrictif de la plupart de ses hypothèses (cf. § I-1.2, page 773). Celle qui a trait au caractère certain de la demande est sans doute l'une des plus restrictives mais nous n'examinerons qu'à la section II son remplacement par celle, plus réaliste, d'une demande aléatoire. En restant dans le cadre de l'univers certain, on examinera tout d'abord (§ I-2.1) les implications sur la détermination de la quantité économique de commande, de la pratique commerciale très répandue des prix d'achat variables. Dans un § I-2.2, page 799, nous aborderons le cas, classique en production, de l'approvisionnement continu, modifiant ainsi l'hypothèse de l'approvisionnement instantané implicitement retenu dans le calcul du stock moyen  $I_p(q)$ . Dans le § I-2.3, page 802, nous tiendrons compte de l'impact, sur le calcul de la quantité économique de commande, des relations de dépendance réciproque qu'entretiennent de très nombreux articles dans leurs approvisionnements.

### I-2.1 Prix d'achat variable

Deux cas de figure doivent être distingués :

- celui d'une modification d'un prix unitaire indépendant des quantités achetées (annonce d'une modification de tarif, ou campagne promotionnelle) qui a pour effet de permettre momentanément un approvisionnement à des conditions avantageuses, c'est pourquoi on parlera d'**augmentation tari-**

**faire** prévisionnelle (même s'il s'agit d'une **baisse momentanée de tarif**) (§ I-2.1.1) ;

- celui de coûts d'approvisionnement variables avec les quantités à livrer (§ I-2.1.2, page 787) ; ce cas de figure se rencontre en approvisionnement externe (achat) mais aussi en approvisionnement interne (économie d'échelle en production) ; cette classe de problèmes a déjà été abordée au **chapitre VIII, section II, page 562**, avec l'analyse du cas particulier de demandes certaines variant d'une période à une autre.

Dans un dernier paragraphe, on examinera la combinaison de ces deux cas de figure (§ I-2.1.3, page 796).

On supposera ici que le coût de possession se ramène au seul coût d'opportunité (ou est strictement proportionnel au coût d'achat). On a alors, en reprenant les notations déjà utilisées :  $c_p = i \cdot c_u$  ; le prix d'achat unitaire  $c_u$  sera indicé en fonction des différentes valeurs qu'il peut prendre.

### I-2.1.1 Cas de l'augmentation tarifaire

Ce cas est particulièrement fréquent, mais son analyse rigoureuse est délicate, aussi se contentera-t-on de présenter une solution approchée facilement opérationnelle<sup>1</sup>. Supposons, par exemple, que le fournisseur de bouilloires électriques de **SUPERLAMBDA** annonce une hausse tarifaire de 10 %, le prix passant alors de  $c_{u1} = 30$  dollars liduriens à  $c_{u2} = 33$  dollars. Les hypothèses de calcul du coût de possession que l'on vient de faire conduisent à un niveau  $i \cdot c_{u2} = 6,60$  dollars / unité / an, contre  $i \cdot c_{u1} = 6$  dollars / unité / an auparavant.

Il n'y a aucune raison pour que cette annonce, supposée faite avant le franchissement d'un point de commande<sup>2</sup>, coïncide avec le franchissement du point de commande, aussi deux cas de figure peuvent être rencontrés. On suppose tout d'abord que la livraison et le paiement peuvent être différés<sup>3</sup>, en conséquence de quoi, le stock résiduel juste avant la livraison  $R_v$  sera nul ( $R_v = 0$ ). Dans le cas contraire, la commande sera déclenchée le plus tard possible pour bénéficier du prix actuel, mais la livraison s'effectuera à un moment où le stock résiduel ne sera pas nul ( $R_v > 0$ ).

#### I-2.1.1.1 Cas de la livraison et du paiement susceptibles d'être différés ( $R_v = 0$ )

L'application de la **relation 222 de la page 776** donne une quantité de commande de 467 à passer à partir de la prochaine commande. Le coût de gestion moyen annuel avec le nouveau tarif se monte, en application de la **relation 224 de la page 776**, à :

$$\sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u2}} = \sqrt{2 \times 2400 \times 300 \times 6,6} = 3082,86$$

1. Cette approche est due à Naddor (1966, [313]), p. 97-102, mais on en présente, dans ce chapitre, une généralisation. Voir également et Silver, Pyke et Peterson (1998, [387]), p. 164-167 pour la prise en compte d'une inflation prévisionnelle dans le calcul de la formule de la quantité économique de commande.

2. Ce cas de figure sera abordé en univers aléatoire (page 884).

3. Naddor n'a étudié que ce premier cas de figure. Il le fait sans s'appuyer explicitement sur l'hypothèse d'une livraison et d'un paiement susceptibles d'être différés, mais celle-ci est indispensable, faute de quoi on aboutit, dans l'analyse des modèles proposés, à envisager successivement, lorsque le stock tombe à zéro, une livraison à l'ancien prix et une livraison au nouveau prix, alors qu'une seule de ces hypothèses ne saurait être fondée.



si on ajoute à ce coût de gestion des dépenses d'achat, on a alors :

$$M = \sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u_2}} + D \cdot c_{u_2} = 3082,86 + 2400 \times 33 = 82282,86 \text{ F/an}$$

Deux stratégies sont envisageables à l'annonce de cette hausse. Une stratégie de **hausse tarifaire subie** conduira le responsable à ne rien faire et donc à passer une commande au nouveau prix, lors du prochain franchissement du point de commande. La seconde stratégie, qui sera qualifiée de stratégie de **hausse tarifaire anticipée**, consiste à passer une commande pour bénéficier encore de l'actuel tarif.

Supposons, dans le cas d'une stratégie d'anticipation, que l'on commande juste avant la hausse tarifaire  $q = 2000$  bouilloires électriques, le coût de gestion de la période correspondant à la consommation de cette commande et d'une durée  $q/D = 2000/2400 = 0,8333$  an, est :

$$C_1(q) = c_c + q \cdot c_{u_1} + i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{D} \quad \text{relation 229}$$

$$C_1(q) = 300 + 2000 \times 30 + 6 \times \frac{2000}{2} \times 0,8333 = 65300$$

à la suite de cette période de 0,8333 an, on retrouvera un approvisionnement au nouveau prix.

Dans le cas d'une hausse subie, on se trouve dans le cadre d'un approvisionnement au nouveau prix dès la prochaine livraison. La différence entre les deux stratégies ne porte donc que sur cette période de 0,8333 an. Le coût moyen annuel du nouveau régime de croisière est de 82 282,86 dollars / an, c'est donc une fraction de ce coût, exactement  $C_2(q = 2000) = 82282,86 \times 0,8333 = 68569,05$  dollars, que l'on peut attribuer à la stratégie de hausse subie et comparer aux 65 300 dollars trouvés pour satisfaire la demande de cette même période dans le cadre de la stratégie d'anticipation. L'adoption de cette stratégie d'anticipation procure donc une économie de  $68569,05 - 65300 = 3269,05$  dollars liduriens. Il semble raisonnable de retenir une valeur de  $q$  qui maximise cette économie qui analytiquement s'écrit  $C_2(q) - C_1(q)$ , soit :

$$\frac{q}{D} M - \left( c_c + q \cdot c_{u_1} + i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{q^2}{2D} \right), \text{ avec } M = \sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u_2}} + D \cdot c_{u_2} \quad \text{relation 230}$$

L'optimum est obtenu, comme vous pouvez le vérifier, pour une valeur de :

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i}, \text{ avec } M = \sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u_2}} + D \cdot c_{u_2} \quad \text{relation 231}$$

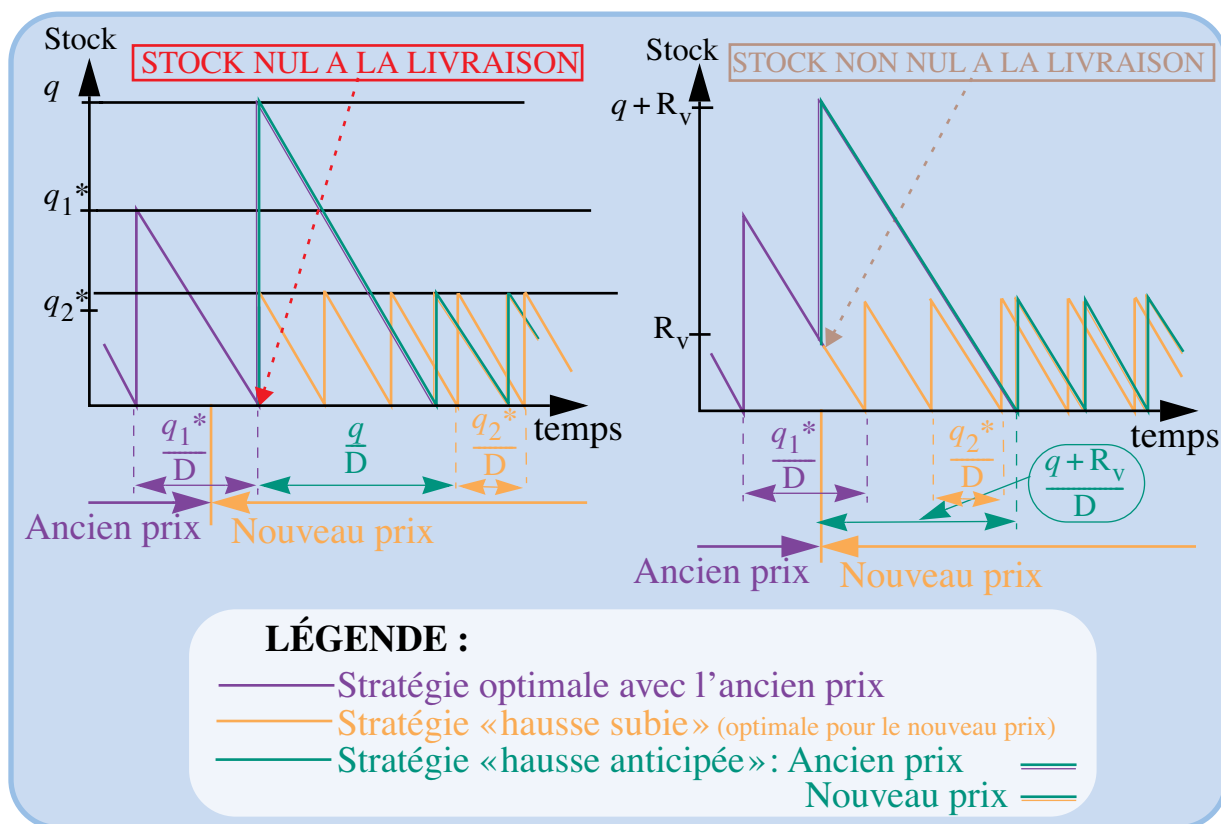
L'application de la **relation 231** donne :  $q^* = \frac{82282,86}{0,2 \times 30} - \frac{2400}{0,2} \approx 1714$ . Cette relation peut encore s'écrire :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{i \cdot c_{u_2}}} + \left( \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{i \cdot c_{u_2}}} + \frac{D}{i} \right) \frac{c_{u_2} - c_{u_1}}{c_{u_1}} \quad \text{relation 232}$$



FIGURE 201

*Incidence de la date de livraison sur l'évolution du stock en cas de hausse tarifaire*



ce qui revient à ajouter à la quantité économique calculée avec le nouveau prix, le taux d'augmentation multiplié par la somme de cette quantité économique et du quotient de la demande annuelle par le taux d'opportunité.

Il convient d'utiliser avec prudence cette formule qui conduit à une forte commande, d'une part en raison des risques d'obsolescence de l'article stocké et, d'autre part, parce que l'augmentation concernant normalement plusieurs références, l'application de la [relation 232](#) peut n'être pas possible pour des raisons de stockage ou budgétaires (ce point sera traité au § I-2.3.1.4, page 816).

#### I-2.1.1.2 Cas de la livraison et du paiement non susceptible d'être différés ( $R_v \neq 0$ )

Si le stock résiduel  $R_v$  n'est pas nul, lors de la livraison de la quantité  $q$  commandée dans le cadre de la stratégie d'anticipation, le stock disponible après livraison s'élèvera à  $q + R_v$  et non à  $q$ . Avant que ce stock disponible ne soit épuisé, s'écoulera une durée de  $(q + R_v)/D$  années (voir [figure 201](#)). Le coût associé à cette stratégie d'anticipation ne diffère donc du précédent que par l'importance du stock moyen disponible après livraison et la durée d'écoulement de ce stock.

$$C_1(q) = q \cdot c_{u_1} + c_c + i \cdot c_{u_1} \left( \frac{q + R_v}{2} \right) \left( \frac{q + R_v}{D} \right) \quad \text{relation 233}$$

Si l'on adopte une stratégie de hausse subie, il faut décomposer en deux la période qui s'écoule entre le moment où s'effectue la livraison de  $q$  dans le cadre d'une stratégie d'anticipation et celui de la livraison ultérieure, dans le cadre

normal du nouveau régime de croisière. La première sous-période est d'une durée de  $(R_v / D)$  année et correspond au temps nécessaire pour épuiser le stock résiduel. Le seul coût supporté pendant cette sous-période est le coût associé à la possession de ce stock résiduel d'un niveau moyen  $R_v / 2$  et auquel est associé un coût de possession unitaire de  $i \cdot c_{u_1} \cdot (R_v / D)$ , compte tenu de la correction «prorata temporis». La seconde sous-période, d'amplitude  $q / D$  année, supportera la fraction correspondante du coût annuel  $M$ . Le coût associé à la stratégie de hausse subie est donc :

$$C_2(q) = i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{R_v^2}{2D} + \frac{q}{D} \cdot M \quad \text{relation 234}$$

L'économie réalisée en anticipant la hausse est donc :

$$C_2(q) - C_1(q) = \left[ i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{R_v^2}{2D} + \frac{q}{D} \cdot M \right] - \left[ q \cdot c_{u_1} + c_c + i \cdot c_{u_1} \frac{(q + R_v)^2}{2D} \right] \quad \text{relation 235}$$

Cette économie sera maximale si :

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} - R_v \Leftrightarrow q^* + R_v = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} \quad \text{relation 236}$$

La relation 231 de la page 785 découle de cette relation 236 en rendant nul le stock résiduel. Ce qui compte, en définitive, ce n'est pas tant la quantité commandée que le stock disponible après livraison.

Illustrons rapidement ce cas de figure d'un exemple numérique. Supposons qu'au moment de passer la commande, il reste 250 unités. Vingt jours plus tard, au moment de la livraison, le stock résiduel s'élèvera à  $250 - 167 = 83$  unités. La quantité à commander doit donc être égale à  $1714 - 83 = 1631$  unités. La solution de ce problème est fournie dans le tableau 222 de la page 788.

### I-2.1.2 Prix d'achat variable en fonction des quantités achetées

Il convient de distinguer deux pratiques commerciales de rabais sur quantité :

- Le **rabais uniforme**, qui porte sur l'intégralité des articles commandés. Par exemple, si le prix de vente passe de 31 dollars liduriens / unité à 30 dollars / unité lorsque la commande effectuée dépasse 300, le nouveau prix s'applique sur l'intégralité de la commande. Pour fixer les idées, supposons qu'une commande de 400 unités soit passée : les 400 unités sont alors acquises au prix de 30 dollars liduriens et la facture s'élève à 12000 dollars.
- À la différence du rabais uniforme, le **rabais progressif** ne s'applique que sur une «tranche de commande» et non sur sa totalité. En reprenant notre exemple avec un rabais progressif, les 300 premières unités sont acquises au prix unitaire de 31 dollars et seules les suivantes sont payées 30 dollars. La facture s'élève alors à  $31 \cdot 300 + 30 \cdot (400 - 300) = 12300$  dollars liduriens.

Nous étudierons successivement le cas du rabais uniforme et celui du rabais progressif à partir de notre exemple des bouilloires électriques, en ne modifiant que le calcul du coût de possession. Ce dernier sera pris comme égal à 20 % (= i) d'un coût d'achat unitaire  $c_{u_j}$ , variable en fonction du montant  $q$  de la commande et obéissant à la logique du rabais uniforme ou à celle du rabais progressif.



TABLEAU 222  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - hausse tarifaire)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (livraison et paiement non susceptibles d'être différés)		
Conséquences physiques	Avec commande exceptionnelle optimale	Politique optimale après hausse tarifaire
Stock disponible à la commande	250	-
Quantité de commande du nouveau régime de croisière	-	467
<b>Quantité à commander maintenant</b>	<b>1631</b>	-
Point de commande	167	167
Intervalle de temps séparant les deux prochaines livraisons	205,7 jours	-
Délai avant franchissement normal du point de commande	10 jours	-
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	56 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	5,139
Stock disponible juste avant la prochaine livraison	83	-
Stock disponible juste après la prochaine livraison	1 714	-
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	612,04	-
Stock moyen détenu	-	233,50
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	10,28
Conséquences financières		
Montant de la commande exceptionnelle	48 930,00	-
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	3 024,42	-
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	-	79 200,00
Coût moyen annuel de commande	-	1 541,76
Coût moyen annuel de possession	-	1 541,10
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat exclu)	-	3 082,86
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat inclus)	-	82 282,86
Marge sur coût moyen annuel de gestion (achat inclus)	-	13 717,14

Table des matières

Index thématique

La **figure 202** illustre<sup>1</sup> la différence de ces deux systèmes de rabais sur la seule dépense d'acquisition de  $q$  unités (à l'exclusion donc des coûts de possession et de passation de commande); les pentes de ces segments de droite correspondent au coût unitaire  $c_{u_j}$ .

#### I-2.1.2.1 Rabais uniforme

Le problème d'optimisation posé est assez simple à visualiser. On peut, pour chacun des 5 prix d'achat possibles et sans se préoccuper des conditions de quan-

1. Elle ne s'appuie pas l'exemple numérique du **tableau 223**, pour des raisons de «lisibilité».

FIGURE 202

Évolution du coût d'acquisition de  $q$  unités en cas de rabais uniforme et de rabais progressif

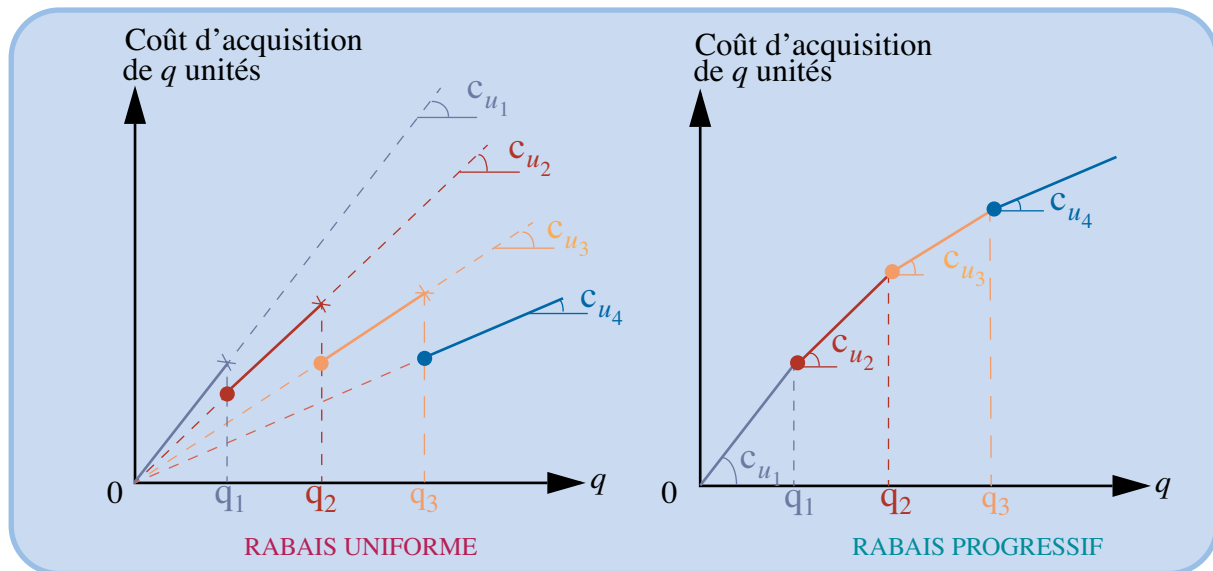


TABLEAU 223  
Données du problème de rabais

$j$	0	1	2	3	4	5
$q_j$	$q_0 = 0$	$q_1 = 250$	$q_2 = 500$	$q_3 = 750$	$q_4 = 1000$	$q_5 = \infty$
$q_{j-1} \leq q < q_j$		$q_0 \leq q < q_1$ ou $q < q_1$	$q_1 \leq q < q_2$	$q_2 \leq q < q_3$	$q_3 \leq q < q_4$	$q_4 \leq q < q_5$ ou $q \geq q_4$
$c_{u_j}$		31	30,5	30	29,5	29

tité, calculer le coût moyen annuel en fonction de la quantité de commande  $q$ . Les 5 fonctions de coûts sont les suivantes :

- Si  $q < 250$ :  $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 31) \times q / 2 + 2400 \times 31$
- Si  $250 \leq q < 500$ :  $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 30,5) \times q / 2 + 2400 \times 30,5$
- Si  $500 \leq q < 750$ :  $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 30) \times q / 2 + 2400 \times 30$
- Si  $750 \leq q < 1000$ :  $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 29,5) \times q / 2 + 2400 \times 29,5$
- Si  $q \geq 1000$ :  $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 29) \times q / 2 + 2400 \times 29$  et, d'une façon plus générale en utilisant une notation littérale :

$$q_{j-1} \leq q < q_j \Rightarrow C(q) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \cdot \frac{q}{2} + D \cdot c_{u_j} \quad \text{relation 237}$$

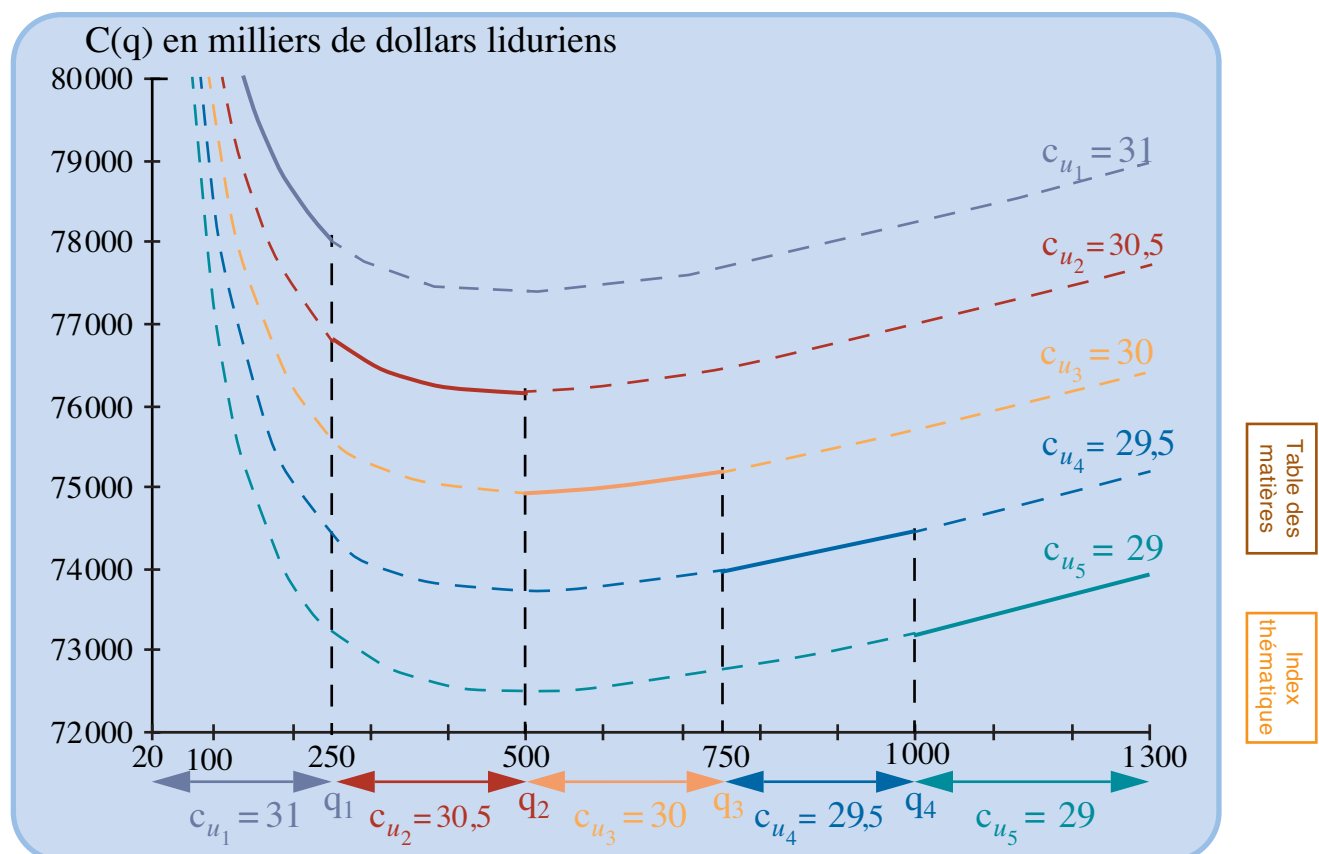
On peut reporter sur la [figure 203, page 790](#), les courbes correspondant à ces 5 fonctions de coût. Ces courbes n'ont aucun point d'intersection, ce qui ne saurait surprendre car la [relation 237](#) peut encore s'écrire :

$$C(q) = c_c \frac{D}{q} + c_{u_j} \cdot \left( i \cdot \frac{q}{2} + D \right) \quad \text{relation 238}$$

ce qui montre que, pour une quantité de commande donnée  $q$  (les autres données  $c_c$ , et  $D$  étant constantes), le coût  $C(q)$  est une fonction linéaire du seul coût  $c_{u_j}$ . On aurait intérêt à «se placer» systématiquement sur la courbe  $C(q)$  la plus basse, celle qui correspond à  $c_{u_5}$  dans notre exemple, si aucune condition de quantité n'était formulée. Ces différentes conditions rendent virtuelles, c'est-à-dire non réalisables concrètement, une partie de chacune de nos 5 courbes. Pour différencier graphiquement les parties réelles des parties virtuelles, ces dernières ont été portées en pointillés sur la [figure 203](#).

FIGURE 203

*Rabais uniforme : l'optimum global coïncide avec une borne*



La recherche de la solution est guidée par le fait que le coût le plus bas se trouve nécessairement :

- soit au minimum de l'une des courbes (ce minimum devant être réalisable, sinon on le qualifiera de virtuel) ;
- soit à l'une des bornes  $q_j$ , en prenant bien soin d'utiliser le prix  $c_{u_{j+1}}$  et non  $c_{u_j}$ , puisque par hypothèse le coût  $c_{u_j}$  est applicable pour une commande strictement inférieure à  $q_j$ .

Pour notre exemple, les calculs détaillés sont fournis dans le [tableau 224](#)<sup>1</sup>. L'optimum se situe ici sur l'une des bornes :  $q^* = 1000$ . L'ensemble des conséquences de cette politique est décrit dans le [tableau 225 de la page 791](#).

1. On peut raffiner l'algorithme pour éviter d'explorer toutes les solutions possibles (voir par exemple Hadley et Whitin, 1966, [212], p. 58-62).



TABLEAU 225  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - rabais uniforme)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	1 000
Point de commande	167
Coût unitaire d'acquisition	29,00
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	2,400
Intervalle moyen entre 2 commandes	120 jours
Stock moyen détenu	500
Taux moyen annuel de rotation du stock	4,80
Conséquences financières	
Dépense moyenne d'acquisition	69 600,00
Coût moyen de commande	720,00
Coût moyen de possession	2 900,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 620,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	73 220,00
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	22 780,00

Table des matières

TABLEAU 224  
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais uniforme

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		Calculs à la borne inférieure	
	plage de commande possible	coût unitaire	$q_{\text{wilson}}^*$	Coût annuel	q	Coût annuel
1	$q < 250$	31	482	virtuel	-	
2	$250 \leq q < 500$	30,5	486	76 163,78	250	76 842,50
3	$500 \leq q < 750$	30	490	virtuel	500	74 940,00
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	494	virtuel	750	73 972,50
5	$q \geq 1000$	29	498	virtuel	1000	73 220,00

La figure 204, page 792, illustre le cas où l'optimum est à l'extremum de l'une des courbes, et non à l'une des bornes (dans cet exemple, seuls trois coûts d'achat ont été pris en compte).

### I-2.1.2.2 Rabais progressif

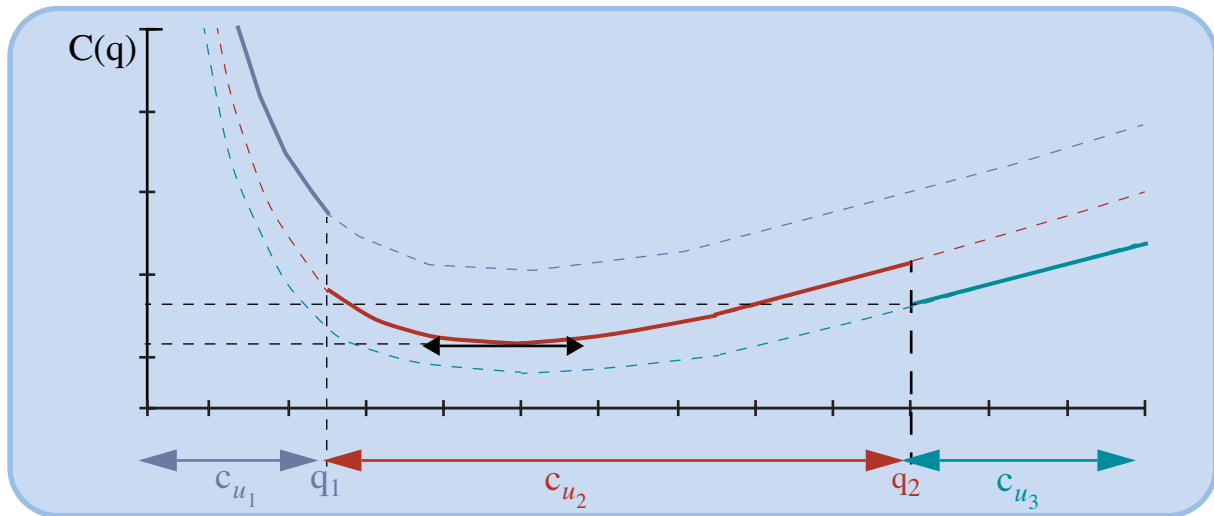
La recherche de l'optimum n'est guère plus compliquée que dans le cas précédent. Pour le déterminer, il faut procéder par étapes progressives<sup>1</sup>.

1. L'optimum ne peut se trouver sur l'une des bornes. Voir démonstration dans Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 63-64.

Index thématique

FIGURE 204

*Rabais uniforme - cas où l'optimum global coïncide avec un optimum local*



• **Première étape :  $q$  tel que  $q < q_1$  (ici  $q < 250$ )**

Le coût global est fonction seulement de  $c_{u_1} = 31$  et a exactement la même formulation que dans le cas du rabais uniforme :

$$C(q) = 2400 \times 31 + 300 \left( \frac{2400}{q} \right) + 0,2 \times 31 \times \frac{q}{2}$$

Pour  $q < 250$  l'extremum de cette fonction, nous l'avons vu, n'est pas réalisable ( $q^* = 482 > 249$ ). Dans cette zone, le coût  $C(q)$  est décroissant, le coût le plus faible est obtenu pour  $q = 249$  et s'élève à 78063 dollars liduriens / an.

• **Deuxième étape :  $q$  tel que  $q_1 \leq q < q_2$  (ici  $250 \leq q < 500$ )**

Cette fois-ci le coût global est fonction de deux coûts d'achat. Notons  $A_1$  la dépense d'acquisition des 249 premières unités, et d'une façon générale  $A_j$  celle des  $q_j - 1$  premières unités si  $q_j$  est le seuil à partir duquel le prix  $c_{u_j}$  est applicable. On a, dans notre exemple,  $A_1 = (q_1 - 1)c_{u_1} = 249 \times 31 = 7719$ . Dans ces conditions, la dépense d'acquisition d'une commande est, si  $q_1 \leq q < q_2$  :  $7719 + 30,5 \times (q - 249)$ , c'est-à-dire littéralement :

$$A_1 + [q - (q_1 - 1)]c_{u_2} = [A_1 - (q_1 - 1)c_{u_2}] + q \cdot c_{u_2} = B_2 + q \cdot c_{u_2}$$

où  $B_2$  s'analyse comme la différence entre la dépense effective pour acquérir les  $(q_1 - 1)$  premières unités, et celle que l'on aurait supportée dans le cas d'un rabais uniforme.

La valeur du stock moyen est alors :  $\frac{7719 + 30,5(q - 249)}{2} = \frac{124,5 + 30,5q}{2}$ ,

c'est-à-dire littéralement :  $\frac{A_1 + [q - (q_1 - 1)]c_{u_2}}{2} = \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{2}$ . La dépense



annuelle de possession s'en déduit en multipliant cette dernière expression par  $i = 20\%$  :

$$\frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{2} \cdot i = \frac{124,5 + 30,5q}{2} \cdot 0,2.$$

Pour calculer la dépense moyenne annuelle d'acquisition, il faut multiplier la demande  $D = 2400$  par le coût moyen d'acquisition qui n'est autre que le quotient de la dépense d'acquisition d'une commande par la quantité de commande. Cette dépense moyenne annuelle d'acquisition est donc :

$$D \cdot \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{q} = 2400 \cdot \frac{124,5 + 30,5 \cdot q}{q} = 2400 \cdot \left( \frac{124,5}{q} + 30,5 \right)$$

La dépense globale moyenne est donc :

$$250 \leq q < 500 : C(q) = 2400 \left( \frac{124,5}{q} + 30,5 \right) + 300 \frac{2400}{q} + \frac{124,5 + 30,5q}{2} \cdot 0,2$$

soit, littéralement :

$$\text{si } q_1 \leq q < q_2 : C(q) = D \cdot \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{q} + c_c \frac{D}{q} + \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{2} \cdot i$$

La dérivée, nulle à l'optimum, de cette fonction de coût est :

$$\frac{dC(q)}{dq} = 0 = \frac{-D \cdot B_2}{q^2} - \frac{c_c \cdot D}{q^2} + \frac{c_{u_2} \cdot i}{2}$$

d'où :  $q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (c_c + B_2)}{c_{u_2} \cdot i}}$ , avec  $B_2 = A_1 - (q_1 - 1)c_{u_2} = (q_1 - 1)(c_{u_1} - c_{u_2})$

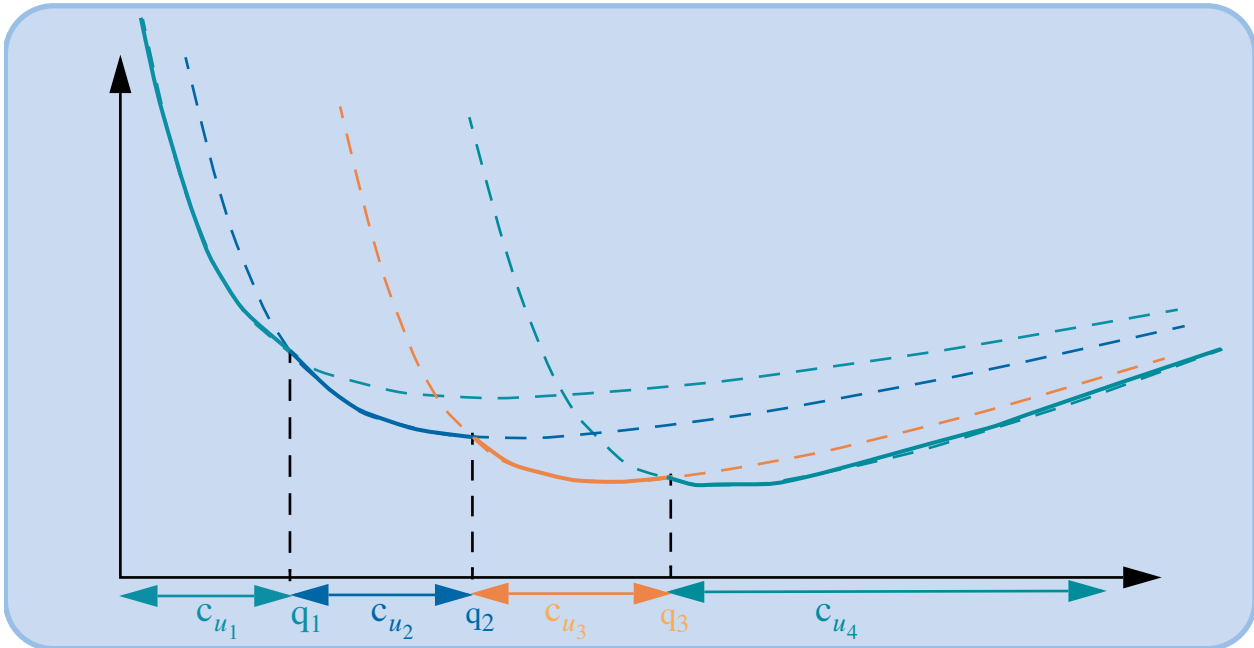
ce qui donne ici :  $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 2400(300 + 124,5)}{30,5 \times 0,2}} \approx 578.$

Tout se passe comme si on appliquait la formule de Wilson, avec le prix valable pour  $q_1 \leq q < q_2$ , mais en ajoutant au coût de commande une dépense supplémentaire correspondant à la différence entre la dépense effective pour acquérir les  $(q_1 - 1)$  premières unités, et la dépense que l'on aurait eue dans le cas d'un rabais uniforme. Mais cette quantité de commande n'est pas réalisable, parce que  $q^* > q_2$ , c'est-à-dire :  $578 > 499$ .

L'analyse de la fonction de coût montre que celle-ci est, à une constante additive près (la dépense d'acquisition moyenne annuelle), du même type que celle étudiée au § I-1.3, page 774. Il s'ensuit que cette fonction est décroissante pour des valeurs de  $q$  inférieures à l'optimum, et croissante pour les valeurs de  $q$  supérieures à l'optimum. Dans le cas présent, nous sommes dans la zone des coûts décroissants. L'introduction, à l'étape suivante, d'un nouveau rabais a pour effet, comme nous allons le voir, d'accroître  $q^*$  (le numérateur de la fraction s'accroît et le dénominateur décroît) et donc de rester, au moins au départ, dans la zone des coûts décroissants. On est donc assuré, au cours de l'étape suivante, de trouver une solution meilleure que toute autre solution réalisable dans cette présente étape.

FIGURE 205

Évolution de la fonction de coût dans le cas d'un rabais progressif



• **Troisième étape :  $q$  tel que  $q_2 \leq q < q_3$  (ici  $500 \leq q < 750$ )**

Étude d'une commande  $q$  telle que  $q_2 \leq q < q_3$ , c'est-à-dire  $500 \leq q < 750$ . Il suffit d'adapter ici le raisonnement suivi au cours de la deuxième étape. Les unités  $q_1$  ( $= 250$ ) à  $q_2 - 1$  ( $= 499$ ) sont acquises au prix 30,5 soit au total  $\{(q_2 - 1) - (q_1 - 1)\} = 499 - 249 = 250$  unités acquises à ce prix (ou, après simplification :  $q_2 - q_1$ )

$$A_2 = A_1 + (q_2 - q_1)c_{u_2} = 7719 + (500 - 250) \cdot 30,5 = 15344$$

La dépense d'acquisition d'une commande est donc :

$$A_2 + (q - (q_2 - 1)) \cdot c_{u_3} = 15344 + (q - 499) \cdot 30$$

que l'on peut écrire en posant  $B_3 = A_2 - (q_2 - 1)c_{u_3}$ , qui s'analyse comme la différence entre la dépense effective pour acquérir les  $(q_2 - 1)$  premières unités et la dépense que l'on aurait eue dans le cas d'un rabais uniforme :

$$B_3 + q \cdot c_{u_3} = 374 + 30q$$

La dépense globale moyenne annuelle est donc :

$$\text{si } 500 \leq q < 750 : C(q) = 2400 \cdot \left( \frac{374}{q} + 30 \right) + 300 \cdot \frac{2400}{q} + \frac{374 + q \cdot 30}{2} \cdot 0,2$$

$$\text{soit, littéralement : si } q_2 \leq q < q_3 : C(q) = D \cdot \left( \frac{B_3}{q} + c_{u_3} \right) + c_c \frac{D}{q} + \frac{B_3 + q \cdot c_{u_3}}{2} \cdot i ,$$

$$\text{d'où } q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (c_c + B_3)}{c_{u_3} \cdot i}} = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times (300 + 374)}{30 \times 0,2}} \approx 734$$

Cet optimum est cette fois-ci réalisable et le coût annuel moyen correspondant est:  $C(q = 734) = 2400 \cdot \left(\frac{374}{734} + 30\right) + 300 \cdot \frac{2400}{734} + \frac{374 + 734,30}{2} \times 0,2 = 76443$ .

### • Étapes suivantes

La généralisation du raisonnement suivi précédemment est relativement aisée. L'étape  $j$  correspond au cas d'une commande  $q$  telle que, pour  $q_{j-1} \leq q < q_j$ , la quantité  $\{q - (q_{j-1} - 1)\}$  est acquise au prix  $c_{u_j}$ .

Posons:  $A_j = A_{j-1} + (q_j - q_{j-1})c_{u_j} = \sum_{h=1}^j (q_h - q_{h-1})c_{u_h}$ , avec  $q_0 = 1$ , le coût unitaire moyen est:

$$\frac{A_{j-1} + [q - (q_{j-1} - 1)]c_{u_j}}{q} = c_{u_j} + \frac{A_{j-1} - (q_{j-1} - 1)c_{u_j}}{q} = c_{u_j} + \frac{B_j}{q}$$

où  $B_j$  s'analyse comme la dépense supplémentaire des  $(q_{j-1} - 1)$  premières unités acquises à un coût supérieur à  $c_{u_j}$  par rapport à une acquisition à un prix unique  $c_{u_j}$  (cas du rabais uniforme). Dans ces conditions, le coût moyen annuel de gestion est:

$$C(q) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \frac{q}{2} \quad \text{relation 239}$$

D'où la solution optimale:

$$q^* = \sqrt{\frac{2D(c_c + B_j)}{i \cdot c_{u_j}}}, \text{ avec } B_j = \sum_{h=1}^{j-1} (q_h - q_{h-1})c_{u_h} - (q_{j-1} - 1)c_{u_j}, \text{ pour } j > 1$$

$$\text{et } B_1 = 0 \text{ et } q_0 = 1 \quad \text{relation 240}$$

ce qui donne pour notre exemple numérique:

- si  $q_3 \leq q < q_4$  :  $750 \leq q < 1000 \rightarrow q^* = 924$ , réalisable
- si  $q \geq q_4$  :  $q \geq 1000 \rightarrow q^* = 1132$ , réalisable

TABLEAU 227

Recherche de l'optimum dans le cas d'un rabais progressif

Conditions tarifaires	Coût unitaire	$q^*$	Coût annuel
$1 \leq X < 250$	31,00	482	Virtuel
$250 \leq X < 500$	30,50	578	Virtuel
$500 \leq X < 750$	30,00	734	76443,21
$750 \leq X < 1000$	29,50	924	76324,02
$X \geq 1000$	29,00	1132	76289,58

La commande qui minimise le coût global moyen annuel est donc celle qui correspond à une commande 1132. Soulignons qu'ici l'optimum correspond à la



TABLEAU 226  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - rabais progressif)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	1 132
Point de commande	167
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,10247
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	2,120
Intervalle moyen entre 2 commandes	135,8 jours
Stock moyen détenu	566
Taux moyen annuel de rotation du stock	4,24
Conséquences financières	
Dépense moyenne d'acquisition	72 245,94
Coût moyen de commande	636,04
Coût moyen de possession	3 407,60
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	4 043,64
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	76 289,58
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	19 710,42

valeur trouvée pour le dernier extremum calculé, mais qu'il n'en est pas forcément toujours ainsi (en particulier si la dernière borne supérieure n'est pas l'infini, mais une valeur techniquement plausible).

### I-2.1.3 Augmentation tarifaire dans le cas de rabais sur quantité

#### I-2.1.3.1 Augmentation tarifaire dans le cas de rabais uniforme

La démarche présentée au § I-2.1.1 et § I-2.1.2 se transpose sans difficulté. Le calcul de la politique optimale après hausse tarifaire s'effectue conformément à la logique du § I-2.1.1.1 (en remplaçant les  $c_{u_1}$  et  $c_{u_2}$  par des  $c_{u_{1j}}$  et  $c_{u_{2j}}$ ) et conduit au calcul de la constante  $M$ , laquelle reste toujours la somme de la dépense annuelle d'achat et de la valeur optimale de l'indicateur moyen annuel de gestion avec la nouvelle tarification. On a vu précédemment que c'est le stock disponible après livraison ( $q + R_v$ ) que l'on déterminait dans l'approche retenue. On peut donc, sans perte de généralité, considérer comme nul le stock disponible juste avant la livraison ( $R_v$ ).

L'économie qu'il nous faut maintenant chercher à maximiser, étant une fonction de quantités  $q_j$  dépendante du niveau  $j$  de prix, est alors, en transposant la relation 230 de la page 785 :

$$C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j) = \left[ \frac{q_j \cdot M}{D} + ic_{u_{1j}} \frac{R_v^2}{2D} \right] - \left[ c_c + q_j c_{u_{1j}} + ic_{u_{1j}} \frac{(q_j + R_v)^2}{2D} \right]$$

relation 241

C'est une fonction du second degré de  $q_j$  et, comme au § I-2.1.2.1, on peut construire un réseau de courbes non sécantes (à concavité inversée) pour les différents

nouveaux prix, dotées également de parties réelles et virtuelles. Un raisonnement similaire à celui conduit au § I-2.1.2.1, permet de dire que la valeur optimale est trouvée soit sur l'une des bornes inférieures, soit pour une valeur de  $q_j$  obtenue en transposant la **relation 231 de la page 785**:

$$q_j^* = \frac{M}{ic_{u_1j}} - \frac{D}{i} - R_v \quad \text{relation 242}$$

Illustrons rapidement ce cas de figure, en reprenant l'exemple numérique du § I-2.1.2.1 et en supposant qu'une hausse tarifaire de 10 % soit annoncée, avec un stock de 250 unités disponibles lors de la passation de la commande. Il est facile de calculer que le nouveau régime de croisière se caractérise par une quantité commandée de 1 000 bouilloires électriques, achetées au prix unitaire de 31,90 dollars liduriens, ce qui conduit à une valeur de  $M$  égale à 80 470 dollars. On en tire alors facilement la politique optimale (commande de 1 791 bouilloires achetées au prix unitaire de 29 dollars liduriens); les conséquences détaillées de cette proposition de politique (sans doute difficile à appliquer car elle conduit à commander près de 10 mois de consommation) sont décrites dans le **tableau 229**.

TABLEAU 228  
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale  
en cas d'augmentation tarifaire sur rabais uniforme

<i>i</i>	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		Calculs à la borne inférieure	
	plage de commande possible	coût unitaire	$q_{\text{wilson}}^*$	Économie	$q$	Économie
1	$q < 250$	31	896	virtuel	-	
2	$250 \leq q < 500$	30,5	1 108	virtuel	250	324,92
3	$500 \leq q < 750$	30	1 329	virtuel	500	1 047,92
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	1 556	virtuel	750	1 876,82
5	$q \geq 1000$	29	1 791	3 576,54	1 000	2 819,44

### I-2.1.3.2 Augmentation tarifaire dans le cas de rabais progressif

Comme au paragraphe précédent, il faut d'abord calculer la politique optimale de croisière après la hausse tarifaire, ce qui conduit toujours au calcul d'une constante  $M$ .

L'économie qu'il nous faut chercher à maximiser combine les approches des § I-2.1.1, page 784, et § I-2.1.2.2, page 791, en remplaçant  $c_{u_1}$  par  $c_{u_1j} + B_j/q_j$ :

$$C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j) = \left[ \frac{q_j \cdot M}{D} + i \left( c_{u_1j} + \frac{B_j}{q_j} \right) \frac{R_v^2}{2D} \right] - \left[ c_c + q_j \left( c_{u_1j} + \frac{B_j}{q_j} \right) + i \left( c_{u_1j} + \frac{B_j}{q_j} \right) \frac{[q_j + R_v]^2}{2D} \right] \quad \text{relation 243}$$

après simplification, sa représentation graphique est, à une inversion de concavité près, du type de celle de la **figure 205, page 794**. Il s'ensuit que la solution optimale est la solution non virtuelle du type:



**TABEAU 229**  
*Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - rabais momentané sur rabais uniforme)*

<b>Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques</b>		
<b>Conséquences physiques de la politique optimale d'approvisionnement</b>	<b>Commande ponctuelle optimale</b>	<b>Politique optimale après hausse tarifaire</b>
Stock disponible à la commande	250	-
Quantité de commande	1791	1000
Point de commande	167	167
Coût unitaire d'acquisition	29,00	31,90
Intervalle de temps séparant les deux prochaines livraisons	214,9 jours	-
Délai avant franchissement normal du point de commande	10 jours	-
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	120 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	2,4
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	-
Stock disponible après la prochaine livraison	1874	-
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	731,6408333	-
Stock moyen détenu	-	500
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,8
<b>Conséquences financières de la politique optimale d'approvisionnement</b>		
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	51 939,00	76 560,00
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	3 576,54	-
Coût moyen annuel de commande	-	720,00
Coût moyen annuel de possession	-	3 190,00
Indicateur de coût moyen annuel (achat exclu)	-	3 910,00
Indicateur de coût moyen annuel (achat inclus)	-	80 470,00
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	-	15 530,00

Table des  
matièresIndex  
thématique

$$q_j^* = \frac{M}{ic_{u_1j}} - \frac{D}{i} - \frac{B_j}{2ic_{u_1j}} - R_v \quad \text{relation 244}$$

et qui maximise l'économie et ne diffère de celle obtenue dans le cas du rabais uniforme (relation 242, page 797) que de la quantité  $\{-B_j/(2ic_{u_1j})\}$ .

Reprenons l'exemple numérique du § I-2.1.1.2 pour illustrer ce cas de figure et supposons, là encore, que le stock disponible lors de la passation de commande est de 250 et que la hausse tarifaire est toujours égale à 10 %. Le nouveau régime de croisière se caractérise par une quantité commandée de 1 122 bouilloires électriques, ce qui conduit à donner à M une valeur de 83 854 dollars / an. L'application de la démarche décrite ci-dessus (voir tableau 230) conduit à préconiser une commande de 2374 unités; les conséquences de cette politique (sans doute difficile à retenir car elle conduit à commander près de 12 mois de consommation) sont décrites au tableau 231, page 799.



TABLEAU 231  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers certain - rabais momentané sur rabais progressif)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques de la politique optimale d'approvisionnement	Commande ponctuelle optimale	Politique optimale après hausse tarifaire
Stock disponible à la commande	250	-
Quantité de commande	2353	1122
Point de commande	167	167
Coût moyen unitaire d'acquisition	29,53039	33,12353
Intervalle de temps séparant les deux prochaines livraisons	282,4 jours	-
Délai avant franchissement normal du point de commande	10 jours	-
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	134,6 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	2,14
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	-
Stock disponible après la prochaine livraison	2436	-
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	1236,27	-
Stock moyen détenu	-	561
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,28
Conséquences financières de la politique optimale d'approvisionnement		
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	69 485,00	79 496,47
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	5 134,46	-
Coût moyen annuel de commande	-	641,71
Coût moyen annuel de possession	-	3 716,46
Indicateur de coût moyen annuel (achat exclu)	-	4 358,17
Indicateur de coût moyen annuel (achat inclus)	-	83 854,64
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	-	12 145,36

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 230  
Recherche de l'optimum dans le cas de rabais progressif

Conditions tarifaires	Prix	$q^*$	Économie
$1 \leq X < 250$	31,00	1442	Virtuel
$250 \leq X < 500$	30,50	1662	Virtuel
$500 \leq X < 750$	30,00	1887	Virtuel
$750 \leq X < 1000$	29,50	2117	Virtuel
$X \geq 1000$	29,00	2353	5 134,46

## I-2.2 Cas de l'approvisionnement continu

Avec l'approvisionnement continu, nous levons la dernière hypothèse du § I-1.2 selon laquelle la commande est livrée en une seule fois.



### I-2.2.1 Le problème posé

Ce cas de figure se rencontre lorsque la commande est interne à l'entreprise, c'est-à-dire lorsqu'un service de l'entreprise passe une commande d'approvisionnement à un atelier de fabrication :

- L'article demandé peut être un produit fini, et le service demandeur est le service des ventes, mais il faut que les ventes soient régulières pour que l'hypothèse d'une demande continue soit acceptable.
- Mais l'article demandé peut également être un composant d'un article élaboré que l'atelier demandeur est chargé d'assembler avec d'autres composants.

Dans un cas comme dans l'autre un arbitrage est à effectuer entre un coût de commande, encore appelé dans ce cas **coût de lancement**, et un coût de possession lié au stockage des composants. Le coût de lancement correspond essentiellement à des coûts de réglage et de mise au point. La production d'une série d'un composant donné n'est pas instantanée, ce qui permet d'envisager un approvisionnement étalé dans le temps. Dans ce cas, si l'on décide de produire  $q$  unités, ce qui nécessite, par exemple 5 jours ouvrables, le stock disponible, lorsque les  $q$  unités auront été produites, n'est pas  $q$ , mais  $q - 5x$ , où  $x$  est la consommation quotidienne. Nous analyserons le cas de l'approvisionnement continu en supposant qu'aucune contrainte ne pèse sur la définition de la série optimale, en particulier au niveau de l'utilisation de la capacité productrice de l'atelier, nous verrons au § I-2.3.2, page 822, comment tenir compte des contraintes d'utilisation de cette capacité, liées à la production successive d'articles différents dans le même atelier.

### I-2.2.2 Exemple numérique

La société **Cuisor** fabrique des articles de cuisines. La demande annuelle de bouilloires électriques est de 50000 unités / an. La production maximale annuelle que l'on notera  $O$  (pour offre) est  $O = 200000$  unités / an. Le coût de lancement est  $c_c = 500$  dollars liduriens, et le coût de possession est de 3 dollars / unité / an. L'usine travaille 240 jours par an.

### I-2.2.3 Solution

Pendant une journée ouvrable, la demande est de  $50000 / 240 = 208,33$  bouilloires, tandis que la production est de  $200000 / 240 = 833,33$ , ce qui fait que le stock net de fin de journée s'est accru de  $833,33 - 208,33 = 625$ . La production de  $q$  unités s'effectuera en  $q / 833,33$  jours, le stock net lorsque la série sera terminée ne sera pas de  $q$ , mais de 625 (= accroissement quotidien du stock net)

fois ce nombre de jours :  $\frac{q \cdot 240}{200000} \cdot 625$ , que l'on peut encore écrire :

$$\frac{q \cdot 240}{200000} \cdot \left( \frac{200000}{240} - \frac{50000}{240} \right) = q \cdot \left( \frac{200000 - 50000}{200000} \right)$$

Dans cette formulation, on voit apparaître directement des taux annuels de production et de demande au lieu de taux journaliers. On peut écrire ce stock net en fin de production de la série, sous la forme littérale suivante :  $q \cdot \left( \frac{O - D}{O} \right)$ . Si  $q$

= 8000 et si le stock initial est nul, la production des 8000 unités nécessitera 9,60 jours, pendant lesquels le stock net passera de 0 (stock initial nul par hypothèse) à  $8000 \cdot \left(\frac{200000 - 50000}{200000}\right) = 6000$ , stock qui sera ensuite consommé en  $\frac{6000}{208,33} = 28,80$  jours. Un raisonnement analogue à celui mené à la [page 774](#) conduit à estimer le stock moyen à longueur d'année à  $6000 / 2$ , puisque tous les  $9,6 + 28,8 = 38,4$  jours ouvrables, le stock net connaît la même évolution que celle décrite ci-dessus et visualisée dans la [figure 206](#).

FIGURE 206

Évolution du stock en cas d'approvisionnement continu

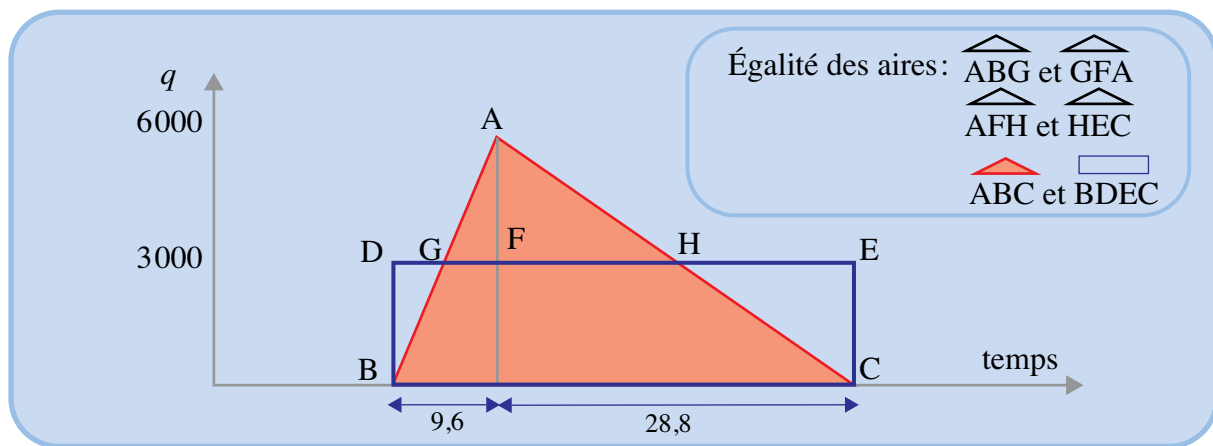


Table des matières

Index thématique

Pour une commande d'une série de  $q$  unités, le stock moyen annuel est  $\frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{O-D}{O}$ . Il s'ensuit que le coût moyen annuel que l'on cherche à minimiser

est:  $C(q) = 500 \left( \frac{50000}{q} \right) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left( \frac{200000 - 50000}{200000} \right)$  et d'une façon générale:

$$C(q) = c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{O-D}{O} \quad \text{relation 245}$$

qui n'est autre que la fonction de base du modèle de Wilson ([relation 219 de la page 774](#)), à condition de remplacer le coût de possession  $c_p$  par:  $c_p \cdot (O-D)/O$ .

La solution optimale est donc:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p \cdot \frac{O-D}{O}}} \quad \text{relation 246}$$

ce qui donne ici:  $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 50000 \times 500}{3 \times \frac{200000 - 50000}{200000}}} = 4714$ , d'où un coût moyen annuel

de:  $C(q=4714) = 500 \times \frac{50000}{4714} + 3 \times \frac{1}{2} \times 4714 \times \frac{200000 - 50000}{200000} = 10607$ , que

l'on aurait pu également calculer directement à l'aide de la [relation 224 de la page 776](#), en utilisant le coût de possession rectifié ( $c_p \cdot (O-D)/O = 3 \times 0,75 = 2,25$ ):

$$C(q=4714) = c_p \cdot \frac{O-D}{O} \cdot q^* = 3 \times 0,75 \times 4714 = 10607$$



TABLEAU 232  
Analyse de la politique optimale de la **CUISOR** pour la bouilloire électrique

Politique optimale d'approvisionnement (production interne) des bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	4 714
Nombre moyen annuel deancements en production	10,61
Intervalle moyen entre 2ancements	22,6 jours
Stock moyen détenu	1 767,75
Taux moyen annuel de rotation du stock	28,28
Conséquences financières	
Dépense moyenne de production	750 000,00
Coût moyen annuel deancement	5 303,35
Coût moyen annuel de possession	5 303,25
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (production exclue)	10 606,60
Indicateur de coût moyen de gestion (production incluse)	760 606,60

On peut ajouter qu'en cas de rupture de stock autorisée, la demande non satisfaite pouvant être différée, à concurrence d'un montant  $B$ , si chaque unité livrée avec retard est pénalisée d'un coût de rupture  $c_{r_1}$  indépendant de la durée de rupture, et si en outre un coût de rupture  $c_{r_2}$  proportionnel à la durée de rupture pèse sur le nombre d'unités-années livrées avec retard, on montre que la quantité de commande optimale  $q^*$  et le report optimal  $B^*$  sont tels que<sup>1</sup>:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p \cdot (1 - D/O)} - \frac{(c_{r_1} \cdot D)^2}{c_p(c_p + c_{r_2})}} \cdot \sqrt{\frac{c_p + c_{r_2}}{c_{r_2}}} \quad \text{et} \quad B^* = \frac{(c_p q^* - c_{r_1} D) \left( \frac{O-D}{O} \right)}{c_p + c_{r_2}} \quad \text{relation 247}$$

On montre en outre que, pour  $c_{r_2} = 0$  et  $c_{r_1} > 0$ , la politique optimale consiste à n'avoir jamais de rupture de stock ou, au contraire, à être toujours en rupture de stock.

### I-2.3 Prise en compte de l'interdépendance avec d'autres articles

Nous nous limiterons à la prise en compte de trois catégories d'interdépendance: l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare par plusieurs articles (§ I-2.3.1), l'utilisation commune et successive d'une même ressource rare (§ I-2.3.2, page 822) et le cas des commandes groupées (§ I-2.3.3, page 826). Dans ces deux derniers cas, la variable de commande du système n'est plus  $q$ , mais  $T$ .

#### I-2.3.1 Utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare

Nous examinerons, dans un premier temps, la détermination de la politique optimale, en régime de croisière, de plusieurs références partageant la même ressource rare non financière (§ I-2.3.1.1) ou la même ressource rare financière (§ I-2.3.1.2, page 812) ou les deux (§ I-2.3.1.3, page 815). Dans un second temps,

1. Johnson et Montgomery (1974, [245]), p. 29-31.

nous examinerons les problèmes de détermination de la politique optimale d'approvisionnement en cas de hausse tarifaire lorsqu'il faut tenir compte d'une ressource rare financière et / ou non financière (§ I-2.3.1.4, page 816).

### I-2.3.1.1 Implication de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière «en régime de croisière»

#### I-2.3.11a) Le problème posé

La réception d'une commande se traduit habituellement par la consommation (au sens large) d'une ou de plusieurs ressources rares, c'est-à-dire possédées en quantité limitée par l'entreprise.

- C'est tout d'abord le cas des contraintes budgétaires qui pèsent sur le montant des stocks qui résultent de l'arbitrage explicite ou implicite effectué par la direction de l'entreprise sur la structure de son bilan<sup>1</sup>. Cet arbitrage dépend du nombre total d'articles (les décaissements seront d'autant plus réguliers qu'il y a de nombreux articles), du rythme de consommation de chacun des articles (les commandes sont d'autant plus nombreuses, toutes choses égales par ailleurs, que la demande est forte), et des capacités de financement de l'entreprise.
- C'est également le cas d'autres facteurs productifs rares comme l'espace (stockage en réserve, linéaires de vente...), les capacités de production de frigos pour un entrepôt frigorifique, etc.

#### I-2.3.11b) Exemple introductif

Supposons que le rayon «Articles de cuisine» du supermarché **SUPERLAMBDA** ait une capacité totale de stockage (linéaire de vente + réserve) d'environ 30 m<sup>3</sup>. Pour simplifier l'exemple numérique, nous supposons que trois articles différents seulement sont vendus et qu'ils ont le même coût de commande ( $c_c = 300$  dollars liduriens). Les caractéristiques de ces articles sont les suivantes :

- la bouilloire électrique, caractérisée par une demande moyenne annuelle  $D_1 = 2400$ , un coût de possession  $c_{p1} = 0,2 \times 30 = 6$  dollars / unité / an, un prix de vente de 40 \$ et un encombrement  $a_1 = 0,05$  m<sup>3</sup> / unité ;
- la cocotte-minute, caractérisée par une demande moyenne annuelle  $D_2 = 1000$ , un coût de possession  $c_{p2} = 0,2 \times 100 = 20$  dollars / unité / an, un prix de vente de 130 \$ et un encombrement  $a_2 = 0,06$  m<sup>3</sup> / unité ;
- une casserole, caractérisée par une demande moyenne annuelle  $D_3 = 5000$ , un coût de possession  $c_{p3} = 0,2 \times 15 = 3$  dollars / unité / an, un prix de vente de 20 \$ et un encombrement  $a_3 = 0,03$  m<sup>3</sup> / unité.

Si l'on cherche les quantités de commande optimales de ces différents articles, sans se préoccuper de la contrainte globale de stockage, on en déduit alors le volume représenté par une livraison optimale :

1. Ces marchandises livrées ont leur contrepartie au bilan au compte de stock «37-marchandise». La rotation plus ou moins rapide des stocks se traduit par des transferts plus ou moins rapides vers le bas du bilan. Si la commande est interne à l'entreprise, c'est le compte de stock «33-en-cours de production de biens» qui sera alors gonflé, mais l'arbitrage est de même nature car la consommation du stock considéré se traduit par des ventes à l'extérieur, immédiatement si le lancement concerne des produits finis, et ultérieurement si le lancement concerne des produits intermédiaires.

- $q_1^* = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{6}} = 490$ , d'où  $a_1 \cdot q_1^* = 0,05 \times 490 = 24,50 \text{ m}^3$  ;
- $q_2^* = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 300}{20}} = 173$ , d'où  $a_2 \cdot q_2^* = 0,06 \times 173 = 10,38 \text{ m}^3$  ;
- $q_3^* = \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 300}{3}} = 1000$ , d'où  $a_3 \cdot q_3^* = 0,03 \times 1000 = 30,00 \text{ m}^3$ .

En réalité ces commandes n'arriveront jamais simultanément, puisque leurs périodicités diffèrent : 4,90 commandes de bouilloires par an, 5,78 commandes de cocottes-minute par an et 5 commandes de casseroles par an. L'espace maximal de stockage nécessaire, en dehors de toute contrainte, est donc inférieur à  $a_1 \cdot q_1^* + a_2 \cdot q_2^* + a_3 \cdot q_3^* = 64,88 \text{ m}^3$ , valeur qui correspondrait à l'espace rendu nécessaire pour des livraisons simultanées de nos trois articles. L'exemple simplifié de la [figure 207, page 805](#), illustre bien ce point : les stocks et demandes étant convertis en volumes et une livraison s'effectuant à l'instant 0 pour les articles 1 et 3, tandis que le stock résiduel de l'article 2 s'élève à 1,5, on peut constater que l'évolution du stock global est caractérisée par un cycle de 6 périodes et que le stock maximal est de 7,5 alors que le cumul de livraison se monte à 9, d'où un abattement de  $7,5 / 9 = 83 \%$ .

Cet espace maximal nécessaire sera défini en diminuant les quantités  $q_j$  par un coefficient de minoration, noté  $k_j$ , nécessairement compris entre 1 (arrivée simultanée de tous les articles ou espace de stockage dédiés, sans banalisation<sup>1</sup>) et 0,5 (réceptions continues de commandes, le nombre de références prises en compte étant en outre très grand et le stockage étant banalisé). Ces trois articles étant vendus dans un rayon comportant de très nombreuses références, on leur affectera un coefficient d'abattement relativement fort ( $k_j = 0,6$  quel que soit l'article considéré), ce qui ne restreint en rien la portée de l'exemple choisi. En conséquence de quoi, la consommation maximale d'espace de stockage s'élève à  $0,6 \times 64,88 = 38,93 \text{ m}^3$ , valeur nettement supérieure à la dotation allouée de  $30 \text{ m}^3$ .

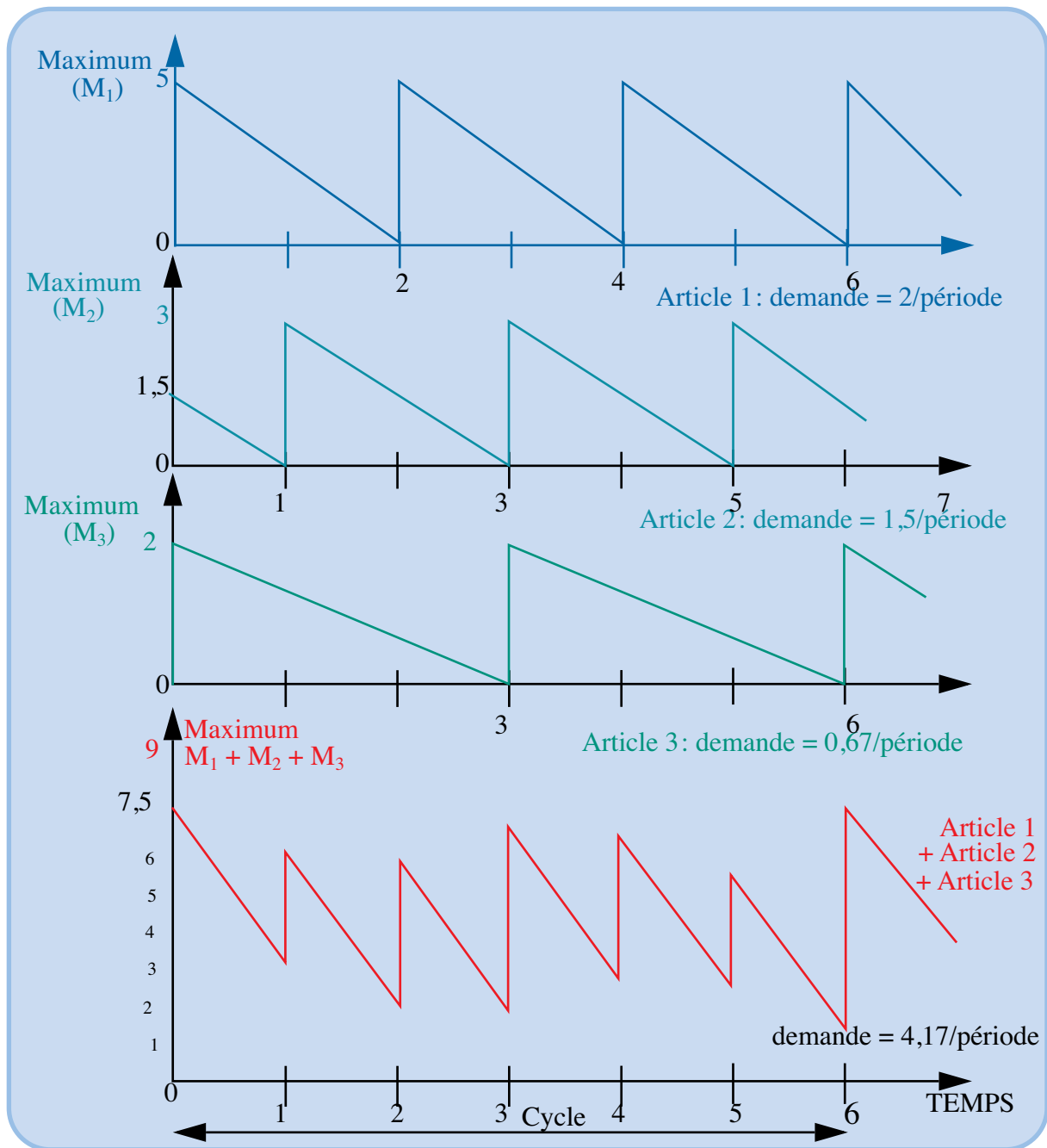
On pourrait régler ce problème de façon arbitraire, par exemple en procédant à un même pourcentage d'abattement en volume des commandes pour satisfaire la contrainte, c'est-à-dire que l'on commanderait dans cette perspective  $30 / 38,93 = 0,771$  des valeurs anciennes de  $q_1, q_2, q_3$  ; on aurait alors :

$$\begin{aligned} q_1 &= 0,771 \times 490 = 378, \text{ d'où } a_1 \cdot q_1 = 0,05 \times 378 = 18,90 \text{ m}^3 ; \\ q_2 &= 0,771 \times 173 = 133, \text{ d'où } a_2 \cdot q_2 = 0,06 \times 133 = 7,98 \text{ m}^3 ; \\ q_3 &= 0,771 \times 1000 = 771, \text{ d'où } a_3 \cdot q_3 = 0,03 \times 771 = 23,13 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Cette règle empirique respecte bien la contrainte du volume de stockage  $(18,9 + 7,98 + 23,13) \times 0,6 = 30$ , mais elle n'a aucune raison de correspondre au coût de gestion le plus faible pour l'entreprise. Pour bien faire comprendre ce point, calculons le coût moyen annuel correspondant à la règle sommaire qui vient d'être proposée, pour pouvoir la comparer par la suite avec le coût minimum :

1. Voir les principes de stockage à la [page 904](#) du [chapitre XIII](#).

FIGURE 207  
Évolution simultanée des stocks des articles achetés



$$C_1(q_1) = 300 \times \frac{2400}{378} + 0,5 \times 378 \times 6 = 3039$$

$$C_2(q_2) = 300 \times \frac{1000}{133} + 0,5 \times 133 \times 20 = 3586$$

$$C_3(q_3) = 300 \times \frac{5000}{771} + 0,5 \times 771 \times 3 = 3102$$

d'où un coût total annuel moyen de 9727 dollars liduriens.

## I-2.3.11c) Formulation mathématique du problème

On ne peut plus chercher à minimiser indépendamment les fonctions de coût  $C(q_j)$ , puisque les articles  $j$  sont interdépendants de par leur consommation du même facteur rare. Il faut donc chercher à minimiser la fonction de coût  $\sum_j C_j(q_j)$

$$\sum_j C_j(q_j) = \sum_j \left[ c_{c_j} \cdot \frac{D_j}{q_j} + c_{p_j} \cdot \frac{q_j}{2} \right] \quad \text{relation 248}$$

c'est-à-dire :  $\left[ 300 \cdot \frac{2400}{q_1} + 6 \cdot \frac{q_1}{2} \right] + \left[ 300 \cdot \frac{1000}{q_2} + 20 \cdot \frac{q_2}{2} \right] + \left[ 300 \cdot \frac{5000}{q_3} + 3 \cdot \frac{q_3}{2} \right]$ ,  
sous contrainte :

$$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j \leq A \quad \text{relation 249}$$

où  $A$  est la dotation maximale du facteur rare et  $a_j$  la consommation unitaire de facteur rare. D'où ici :  $0,05 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 0,06 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 0,03 \cdot 0,6 \cdot q_3 \leq 30$ .

Ce problème d'optimisation sous contrainte se ramène à un problème de recherche d'optimum libre de la fonction suivante  $H$  (dite Lagrangien) qui introduit en sus des  $q_j$ , une variable nouvelle  $\lambda$  (lambda), que l'on indicera par  $\lambda_A$  (désignation de la contrainte) pour faciliter la généralisation qui suivra :

$$H = \sum_j C_j(q_j) + \lambda_A (\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j - A)$$

soit ici :

$$H = \left( 300 \cdot \frac{2400}{q_1} + \frac{q_1}{2} \cdot 6 \right) + \left( 300 \cdot \frac{1000}{q_2} + \frac{q_2}{2} \cdot 20 \right) + \left( 300 \cdot \frac{5000}{q_3} + \frac{q_3}{2} \cdot 3 \right) \\ + \lambda_A (0,05 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 0,06 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 0,03 \cdot 0,6 \cdot q_3 - 30)$$

Pour que  $H$  ait un extremum, il faut que les différentes dérivées partielles de  $H$  soient nulles :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 = -300 \cdot \frac{2400}{q_1^2} + \frac{6}{2} + \lambda_A \cdot 0,05 \cdot 0,6$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 = -300 \cdot \frac{1000}{q_2^2} + \frac{20}{2} + \lambda_A \cdot 0,06 \cdot 0,6$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0 = -300 \cdot \frac{5000}{q_3^2} + \frac{3}{2} + \lambda_A \cdot 0,03 \cdot 0,6$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_A} = 0 = 0,05 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 0,06 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 0,03 \cdot 0,6 \cdot q_3 - 30$$

L'interprétation économique de la dernière équation  $\partial H / \partial \lambda_A = 0$  est évidente : elle exprime que, dans la solution optimale, la totalité de l'espace de stockage disponible sera utilisée.

Chacune des 3 premières équations peut s'écrire littéralement sous la forme :



$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 = -c_{c_j} \cdot \frac{D_j}{q_j^2} + \frac{c_{p_j}}{2} + \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j$$

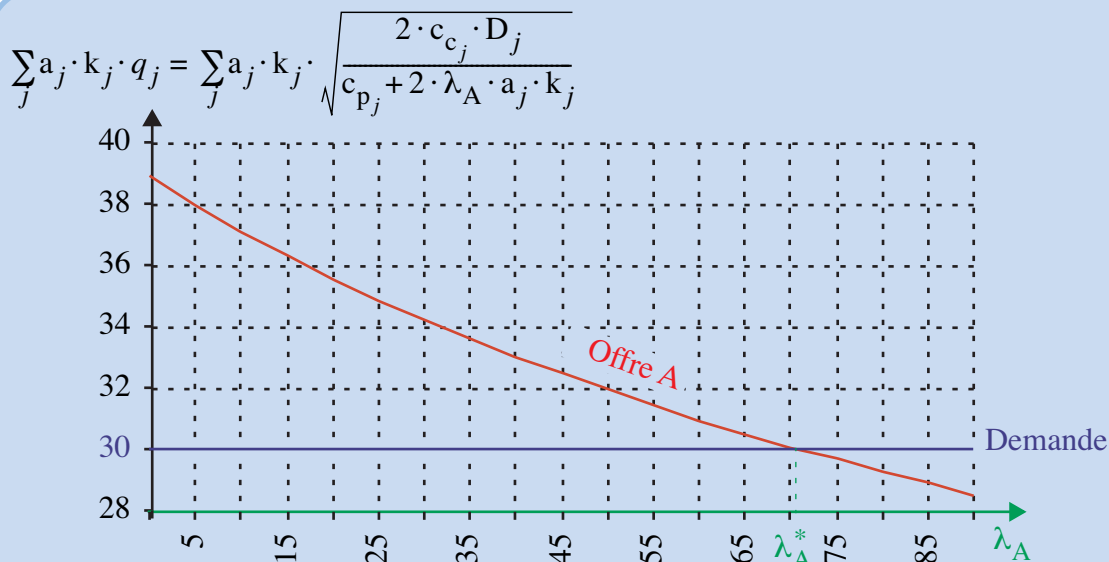
équation à 2 inconnues ( $\lambda$  et  $q_j$ ) d'où l'on tire :

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{p_j} + 2 \cdot \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j}} \quad \text{relation 250}$$

Ce système de 4 équations à 4 inconnues ( $\lambda_A, q_1, q_2, q_3$ ) n'a pas de solution explicite. Mais, d'après la [relation 250](#), les quantités commandées  $q_j$ , et donc la demande totale du facteur rare  $\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j$  par les différents articles seront d'autant plus faibles que  $\lambda_A$  sera élevé. Autrement dit, la demande totale du facteur rare par les différents articles est une fonction monotone décroissante de  $\lambda_A$ . Il existe une valeur optimale  $\lambda_A^*$  qui égalise la demande du facteur rare par les différents articles et l'offre disponible. Toute valeur de  $\lambda_A$  supérieure à  $\lambda_A^*$  entraîne une demande inférieure à l'offre et toute valeur de  $\lambda_A$  inférieure à  $\lambda_A^*$  entraîne une demande supérieure à l'offre, comme l'illustre la [figure 208](#) qui s'appuie sur notre exemple numérique (les calculs sont effectués dans le [tableau 233, page 808](#), et seront utilisés à nouveau dans l'interprétation économique de  $\lambda$ , [page 811](#)).

FIGURE 208

*Mécanisme d'ajustement « offre – demande »*



La recherche de la valeur optimale  $\lambda_A^*$  s'appuie sur cette propriété. L'algorithme de résolution utilisé (voir [figure 209, page 809](#)) comporte 3 grandes étapes de calcul :

- la première étape consiste à vérifier que la contrainte en est bien une, c'est-à-dire que la demande du facteur rare par les différents articles, en supposant que ceux-ci soient gérés indépendamment les uns des autres en l'absence de

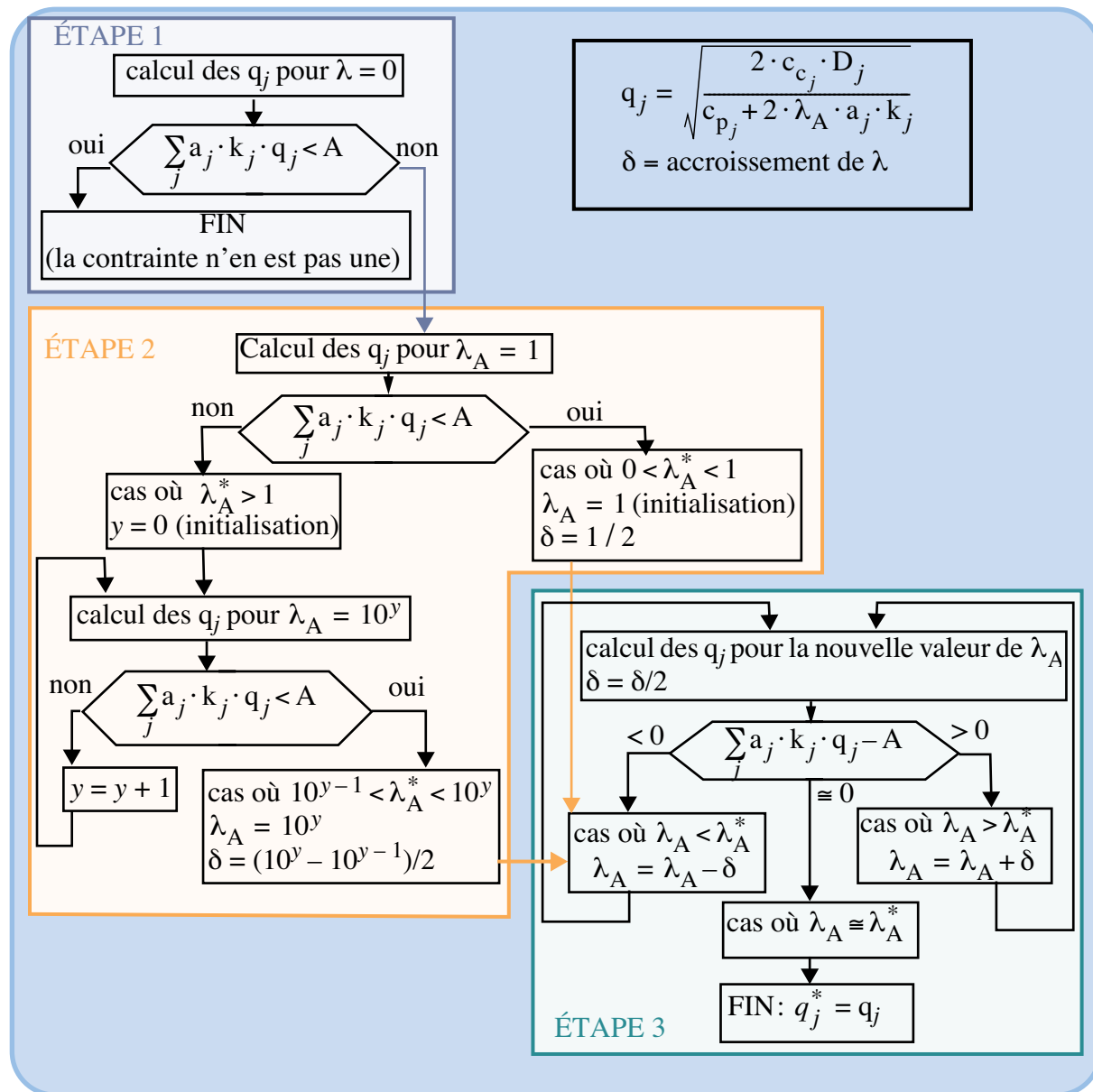
TABLEAU 233  
Incidence de  $\lambda$  sur le coût de gestion et la consommation de ressource rare

$\lambda_A$	Volume	Coût	$\lambda_A$	Volume	Coût	$\lambda_A$	Volume	Coût
300	20,06	11290	200	23,00	10566	100	27,87	9859
290	20,31	11218	190	23,37	10493	90	28,56	9794
280	20,56	11146	180	23,77	10421	80	29,31	9731
270	20,82	11074	170	24,18	10348	70	30,11	9670
260	21,10	11002	160	24,62	10276	60	31,00	9613
250	21,38	10929	150	25,08	10205	50	31,97	9559
240	21,68	10857	140	25,57	10134	40	33,05	9511
230	21,99	10784	130	26,09	10064	30	34,25	9469
220	22,31	10711	120	26,64	9994	20	35,60	9435
210	22,65	10638	110	27,24	9926	10	37,15	9412
						0	38,93	9403

- toute contrainte, est bien supérieure à la dotation disponible du facteur rare. Dans notre exemple, la contrainte est effective puisqu'une gestion indépendante des articles conduit à une demande de 38,9 pour une dotation de 30 m<sup>3</sup>;
- la deuxième étape consiste à trouver deux valeurs de  $\lambda_A$  qui «encadrent» la valeur optimale. Dans notre exemple numérique, ces deux valeurs sont 10 et 100;
  - la troisième étape consiste à trouver progressivement cette valeur  $\lambda_A^*$ , en modifiant à chaque itération l'une de ces bornes :
    - en remplaçant l'une d'entre elles par la moyenne arithmétique des bornes de l'itération précédente,
    - puis en examinant si, pour cette valeur de  $\lambda_A$  la dotation de facteur rare est :
      - excédentaire, auquel cas la valeur optimale de  $\lambda_A$  lui est inférieure et l'on retient comme deuxième borne, la borne inférieure de l'itération précédente,
      - ou déficitaire auquel cas la valeur optimale de  $\lambda_A$  lui est supérieure, et l'on retient comme deuxième borne, la borne supérieure de l'itération précédente.

Un tel algorithme est utilisable chaque fois que l'on cherche la valeur d'une variable  $x$ , telle que  $f(x)$ , fonction monotone de  $x$ , ait une valeur imposée (par exemple  $f(x)$  peut être une fonction de répartition ou une transformée monotone d'une fonction de répartition, et  $x$  une valeur donnée d'une variable aléatoire, s'analysant comme un niveau de recombplètement, par exemple). Une utilisation de cet algorithme a déjà été faite au [chapitre XI](#) (voir [figure 192, page 758](#)) pour le cas de la détermination des politiques optimales de gestion calendaire de plusieurs articles sous contrainte d'utilisation simultanée d'une même ressource rare; dans ce cas, les variables de commande étaient des niveaux de recombplètement  $S_j$ , au lieu des quantités de commande  $q_i$  utilisées ici, et seul changeait le

**FIGURE 209**  
*Algorithme de détermination de la valeur optimale de  $\lambda$*



calcul de la consommation de la ressource rare, associée aux valeurs prises par les variables de commande pour une valeur donnée de  $\lambda_A$ .

#### I-2.3.11d) Solution numérique de l'exemple

L'application de l'algorithme proposé (voir [tableau 234 de la page 810](#)) permet de trouver rapidement la solution optimale, ici en 8 étapes de calcul pour une précision de 0,05 m<sup>3</sup> du respect de la contrainte. Pour obtenir une solution très précise, davantage d'itérations sont nécessaires, mais la précision est économiquement illusoire, compte tenu du degré d'approximation des paramètres utilisés et inutile, compte tenu du caractère discret des valeurs prises par les  $q_j$  (un écart sur le volume de stockage de  $\pm 0,05$  m<sup>3</sup> représente 1 bouilloire électrique). Dans la colonne  $\delta$  du [tableau 234](#) se trouve la valeur des  $\delta$  ayant servi à calculer le  $\lambda$  de la ligne considérée.

TABLEAU 234  
Application de l'algorithme de la figure 209

$\lambda$	$\delta$	$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j$	$q_1 = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{6 + 2 \cdot 0,03 \cdot \lambda}}$	$q_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 300}{20 + 2 \times 0,036\lambda}}$	$q_3 = \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 300}{3 + 2 \times 0,018\lambda}}$
0,000	-	38,9323	490	173	1000
1,000	-	38,7412	487	173	994
10,000	-	37,1475	467	170	945
100,000	-	27,8747	346	149	674
55,000	45,000	31,4724	393	158	776
77,500	22,500	29,5015	368	153	720
66,250	11,250	30,4365	380	156	746
71,875	5,625	29,9574	374	154	733

Le coût minimal, pour la solution optimale  $q_1 = 374$ ,  $q_2 = 154$ ,  $q_3 = 733$  (valeurs entières), est :  $\left(300 \frac{2400}{q_1} + 6 \frac{374}{2}\right) + \left(300 \frac{1000}{q_2} + 20 \frac{154}{2}\right) + \left(300 \frac{5000}{q_3} + 3 \frac{733}{2}\right) = 9681,07$ . Cette valeur est inférieure de 45,93 dollars liduriens à la solution brutale de l'abattement proportionnel du § I-2.3.11b, mais elle est supérieure (de 277,58 dollars) à la solution optimale obtenue sans contrainte de stockage.

TABLEAU 235

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte non financière en univers certain

Politique optimale d'approvisionnement sous contrainte de capacité (possible : 30 ; utilisée : 29,958) - lambda : 71,875				
Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocotte-minute	casseroles	
Quantité de commande	374	154	733	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	6,417	6,494	6,821	
Intervalle moyen entre 2 commandes	44,9 jours	44,4 jours	42,2 jours	
Stock moyen détenu	187,00	77,00	366,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	12,83	12,99	13,64	
Consommation moyenne de la ressource	11,220	5,544	13,194	29,958
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocotte-minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	72 000,00	100 000,00	75 000,00	247 000,00
Coût moyen annuel de commande	1 925,13	1 948,05	2 046,38	5 919,57
Coût moyen annuel de possession	1 122,00	1 540,00	1 099,50	3 761,50
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 047,13	3 488,05	3 145,88	9 681,07
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 047,13	103 488,05	78 145,88	256 681,07
Marge nette annuelle	20 952,87	26 511,95	21 854,12	69 318,93



I-2.3.11e) Interprétation économique de  $\lambda_A$ 

Les coefficients  $(k_j a_j)$  associés à  $\lambda_A$  dans la [relation 250 de la page 807](#) s'analysent dans notre exemple comme un encombrement moyen unitaire (en  $\text{m}^3$ ) de l'article  $j$  considéré. Dans cette même formule,  $k_j \cdot q_j \cdot \lambda_A$  est ajouté au coût  $c_{p_j}$ . Il s'ensuit que  $\lambda$  ne peut que s'analyser comme un coût associé à un volume de  $1 \text{ m}^3$ . Pour interpréter  $\lambda$ , il faut faire appel aux résultats classiques de l'optimisation sous contrainte. Ils nous apprennent que  $(-\lambda_A)$  s'analyse comme la dérivée de la fonction initiale que l'on cherche à optimiser (c'est-à-dire ici la fonction  $\sum C(q_j)$  et non  $H$ ) par rapport à la contrainte (c'est-à-dire ici la dotation limitée de facteur rare):

$$\frac{dC}{dA} = -\lambda_A = -71,875 \text{ avec } C = \sum_j C(q_j).$$

Un faible accroissement  $dA$  de la dotation du facteur rare, au voisinage de la dotation  $A = 30 \text{ m}^3$ , se traduira par une variation de coût de  $-\lambda_A dA = -71,875 \cdot dA$ , c'est-à-dire une diminution de coût. En toute rigueur, le raisonnement n'est correct que pour des variations infinitésimales de la dotation de facteur rare, mais en première approximation on considère que  $\lambda$  reste valable pour des variations plus importantes. La qualité de cette approximation peut être même valable sur des variations plus importantes, comme on peut le vérifier dans le [tableau 233 de la page 808](#)). La [figure 210](#) illustre cette interprétation marginaliste de  $\lambda_A$ .

L'intérêt de cette interprétation économique est de donner une indication de rentabilité d'un investissement réalisé pour accroître la capacité de stockage: accroître la capacité de  $1 \text{ m}^3$  procure un échéancier (infini) d'économies de dépenses d'environ 71 dollars liduriens / an. Cet échéancier peut être ramené à une valeur ponctuelle grâce à la technique de l'actualisation (voir [chapitre XVII, § II-4, page 1168](#)). Si le coût d'opportunité  $i$  est correctement calculé, ce qui implique qu'il soit égal à la rentabilité, exprimée en dollars liduriens constants, de l'investissement le moins rentable réalisé au cours de l'année (voir [chapitre III, § III-1.2.2.2, page 206](#)), on peut calculer la valeur actualisée de cet échéancier d'écono-

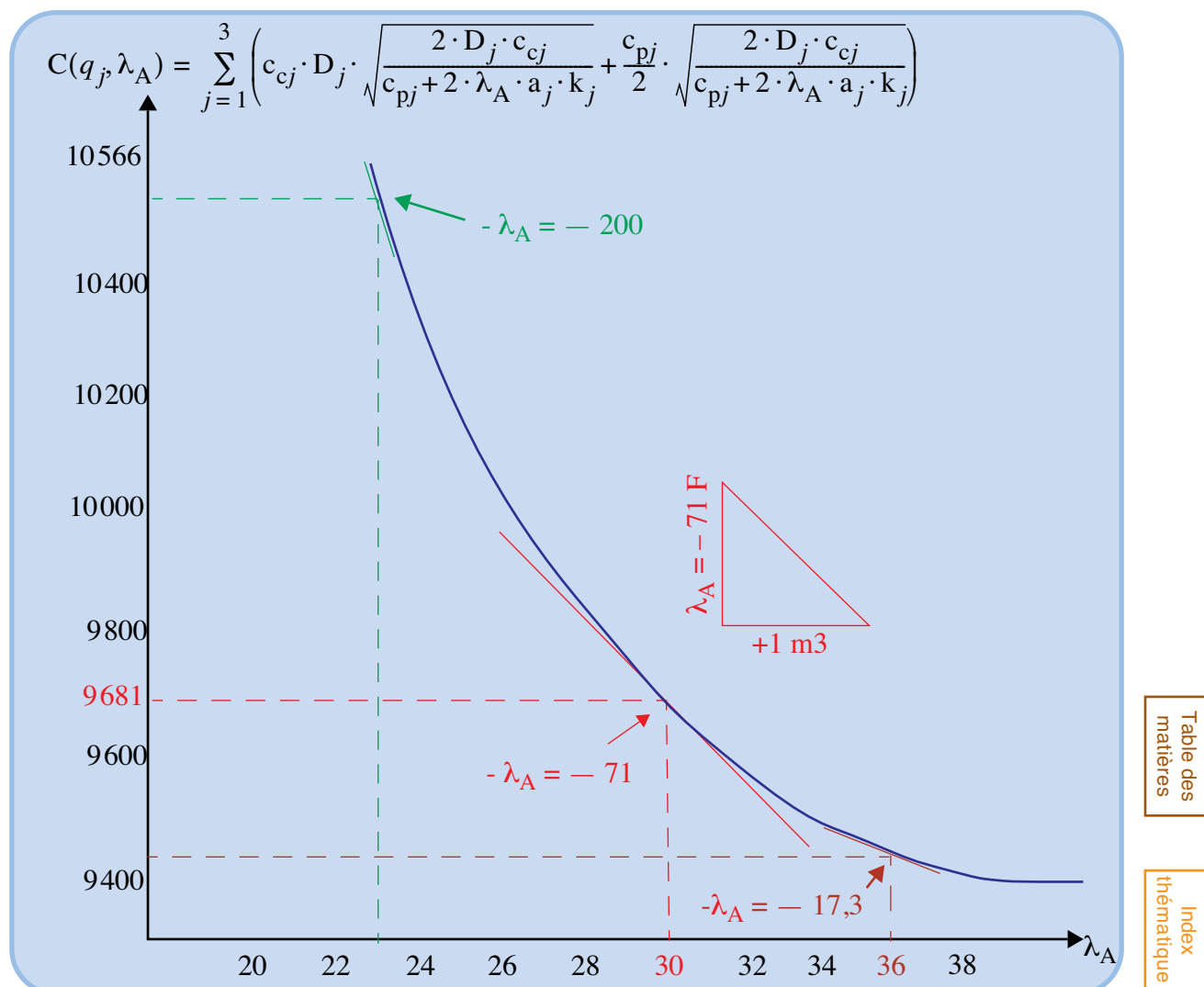
mies de dépenses comme étant égale à  $\lambda_A \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{-t} = \frac{\lambda_A}{i}$ , c'est-à-dire dans

notre exemple  $71 / 0,2 = 355$ . Si le coût d'extension d'un  $\text{m}^3$  de stockage est inférieur à 355 dollars liduriens, l'investissement peut être considéré comme rentable.

En réalité, pour calculer la rentabilité de l'extension de l'espace de stockage par rapport à la contrainte actuelle ( $\Rightarrow 30 \text{ m}^3$  et un coût de 9681,07 dollars / an), il convient de ne pas raisonner à la marge, mais, si l'on envisage de supprimer toute contrainte sur le stockage des articles de cuisine ( $\Rightarrow 38,93 \text{ m}^3$  et le coût minimal de 9403,49 dollars / an), de raisonner sur un accroissement d'environ  $9 \text{ m}^3$  procurant une économie de dépenses actualisées de  $278 / 0,2 = 1390$  dollars liduriens qui s'analyse comme une rentabilité moyenne.

Le problème est en réalité plus complexe car ces articles de cuisine rentrent en concurrence avec d'autres articles dans notre supermarché dans le partage des ressources rares. L'étude des différentes valeurs de  $\lambda$  associées aux différents

FIGURE 210  
Interprétation marginaliste de  $\lambda$



rayons du supermarché permet tout d'abord de déceler des anomalies choquantes d'allocation d'espace, puisque les rayons ayant les plus fortes valeurs de  $\lambda$  sont ceux pour lesquels le contingentement coûte le plus cher à l'entreprise. Cette étude permet également un premier classement pour connaître les rayons qu'il faut privilégier dans l'investissement en tenant compte du fait que si la rentabilité moyenne est inférieure à la rentabilité marginale (voir supra), le groupe des investissements jugés les plus rentables (sur le critère de  $\lambda$ ) à toutes chances de constituer un «noyau stable» (des permutations de classement peuvent se produire dans ce groupe au niveau des rentabilités moyennes, sans modifier profondément le groupe initialement choisi à partir de  $\lambda$ ).

#### I-2.3.1.2 Implication de l'existence d'une ressource rare financière (valeur limitée des stocks moyens détenus) sur la détermination de politique de «régime de croisière»

L'analyse que l'on va présenter s'applique à tous les cas de figure où les consommations d'une ressource rare sont proportionnelles aux coûts d'acquisition. Supposons que le montant moyen des articles de cuisine en stock soit limité à  $B = 20000$  dollars liduriens. Une solution explicite au problème posé peut alors

être trouvée, rendant inutile l'utilisation de l'algorithme de la page 809. Mais, pour qu'il en soit ainsi, 2 conditions doivent nécessairement être remplies.

- Le coût de possession  $c_{p_j}$  de l'article  $j$  utilisé dans le calcul de l'indicateur de coût moyen annuel de gestion doit être proportionnel à son coût d'acquisition  $c_{u_j}$ , ce qui ramène en pratique le coût de possession à un coût d'opportunité, le taux d'intérêt utilisé sera le taux  $i$ :  $c_{p_j} = i \cdot c_{u_j}$ .
- La consommation unitaire du facteur rare par l'article  $j$  doit non seulement être proportionnelle à la quantité livrée  $q_j$  qui, à l'évidence, joue proportionnellement sur la valeur des stocks détenus, mais également être proportionnelle au coût d'acquisition unitaire (ce qui est le cas ici). On notera  $h$  ce second facteur de proportionnalité. L'utilisation globale de la ressource rare par les articles peut alors s'écrire  $\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j$ . Le problème qui reste alors à

résoudre est celui de la détermination de ce coefficient  $h$ . Quels que soient la fréquence des livraisons et leurs coûts d'acquisition, l'évolution au cours du temps de la valeur des stocks détenus peut être visualisée par un graphique du type de celui de la figure 207, page 805. La variation de la valeur globale des stocks détenus sera d'autant plus forte que le nombre d'articles considérés est faible. À la limite, pour un très grand nombre d'articles de valeurs voisines, on observera une compensation quasi intégrale entre la valeur des articles qui viennent d'être livrés et celle de ceux en passe de l'être, ce qui conduit à donner au facteur de proportionnalité  $h$  une valeur proche de 0,5. La valeur de ce facteur  $h$  sera donc comprise entre 0,5 («compensation» intégrale) et 1 (cas limite, très improbable, d'articles ayant tous systématiquement les mêmes dates de livraison, impliquant donc une absence totale de «compensation»).

$$\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j < B \quad \text{relation 251}$$

Reprenons notre exemple limité à l'étude de 3 articles, et supposons que  $i = 0,2$ , ce qui donne, pour être cohérent avec les coûts de possession utilisés,  $c_{u_j} = c_{p_j}/i$  d'où  $c_{u_1} = 30$  dollars / article,  $c_{u_2} = 100$  dollars / article et  $c_{u_3} = 15$  dollars / article. On prendra, arbitrairement,  $h = 0,6$  pour tous les articles. Le problème posé est alors la recherche du minimum de la fonction de coût  $C$  suivante :

$$C = \left[ 300 \cdot \frac{2400}{q_1} + 6 \cdot \frac{q_1}{2} \right] + \left[ 300 \cdot \frac{1000}{q_2} + 20 \cdot \frac{q_2}{2} \right] + \left[ 300 \cdot \frac{5000}{q_3} + 3 \cdot \frac{q_3}{2} \right]$$

sous contrainte:  $30 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 100 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 15 \cdot 0,6 \cdot q_3 \leq 20000$

Le problème d'optimum libre équivaut à ce problème d'optimisation sous contrainte, introduit la fonction  $H$  (Lagrangien) qui, sous sa forme littérale générale s'écrit:  $H = \sum_j \left( \frac{c_{p_j} \cdot D_j}{q_j} + \frac{q_j}{2} \cdot i \cdot c_{u_j} \right) + \lambda_B (\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j - B)$  et dont la dérivée

par rapport à  $q_j$ , nulle à l'optimum, est:



$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 = -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + \frac{i \cdot c_{u_j}}{2} + \lambda_B \cdot h \cdot c_{u_j} = -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + c_{u_j} \left( \frac{i}{2} + \lambda_B \cdot h \right)$$

D'où la **relation 252**:

$$q_j^* = \frac{1}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{u_j}}} \quad \text{relation 252}$$

En remplaçant les  $q_j$  par leurs valeurs optimales dans la dérivée de  $H$  par rapport à  $\lambda$ , nulle à l'optimum ( $\frac{\partial H}{\partial \lambda_B} = 0 = \sum_j [h \cdot c_{u_j} \cdot q_j - B]$ ), on obtient:

$$\sum_j \left[ h \cdot c_{u_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{u_j}}} \right] = B$$

$$\frac{h}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \sum_j \left[ c_{u_j} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{u_j}}} \right] = \frac{h}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \sum_j \sqrt{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j \cdot c_{u_j}} = B$$

d'où  $i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h = \left( \frac{h}{B} \right)^2 \left[ \sum_j \sqrt{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j \cdot c_{u_j}} \right]^2$  et:

$$\lambda_B = \frac{h}{2 \cdot B^2} \left[ \sum_j \sqrt{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j \cdot c_{u_j}} \right]^2 - \frac{i}{2 \cdot h} \quad \text{relation 253}$$

Il suffit donc de calculer dans un premier temps  $\lambda$ , à l'aide de la **relation 253**, puis dans un second temps d'utiliser la **relation 252** en remplaçant  $\lambda$  par la valeur trouvée. Dans notre exemple:

$$\lambda = \frac{0,6 \{ \sqrt{2 \times 2400 \times 300 \times 30} + \sqrt{2 \times 1000 \times 300 \times 100} + \sqrt{2 \times 5000 \times 300 \times 5} \}^2}{2 \times 20000^2}$$

$$-\frac{0,2}{2 \times 0,6} = 0,16493$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{0,2 + 2 \times 0,6 \times 0,16493}} \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{30}} \approx 347$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{0,2 + 2 \times 0,6 \times 0,16493}} \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 300}{100}} \approx 123$$

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{0,2 + 2 \times 0,6 \times 0,16493}} \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 300}{15}} \approx 709$$

Les conséquences de cette solution sont présentées dans le **tableau 236**. On peut y vérifier que la «dotation budgétaire» est saturée, mais les valeurs optimales étant entières, la dotation budgétaire ne peut pas être exactement saturée ( $0,6 \times (347 \times 20 + 123 \times 100 + 709 \times 15) = 20007 \approx 20000$ ).

TABLEAU 236

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte financière en univers certain



Politique optimale d'approvisionnement sous contrainte de valeur moyenne de stock (possible : 20000 ; utilisée : 20007) ; lambda : 0,164929				
Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	
Quantité de commande	347	123	709	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	6,916	8,130	7,052	
Intervalle moyen entre 2 commandes	41,6 jours	35,4 jours	40,8 jours	
Stock moyen détenu	173,50	61,50	354,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	13,83	16,26	14,10	
Consommation moyenne de la ressource	6 246,00	7 380,00	6 381,00	20007,00
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	72 000,00	100 000,00	75 000,00	247 000,00
Coût moyen annuel de commande	2 074,93	2 439,02	2 115,66	6 629,61
Coût moyen annuel de possession	1 041,00	1 230,00	1 063,50	3 334,50
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 115,93	3 669,02	3 179,16	9 964,11
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 115,93	103 669,02	78 179,16	256 964,11
Marge nette annuelle	20 884,07	26 330,98	21 820,84	69 035,89

Table des matières

Index thématique

### I-2.3.1.3 Implication de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière et d'une même ressource rare non financière «en régime de croisière»

Le plus souvent, la solution optimale trouvée avec l'une des contraintes (par exemple, la contrainte de stockage) respecte l'autre contrainte (c'est-à-dire la contrainte budgétaire, dans l'exemple retenu). Il convient donc de commencer par tester cette possibilité, étant entendu que dans le cas où les deux solutions sont possibles, on retiendra celle qui maximise la marge. On examinera immédiatement la solution analytique qui est une généralisation immédiate des approches développées précédemment.

Le problème posé est donc celui de la minimisation de la somme des coûts de gestion (donnée par la [relation 248](#) de la page 806):

$$\sum_j C_j(q_j) = \sum_j \left[ c_{c_j} \cdot \frac{D_j}{q_j} + c_{p_j} \cdot \frac{q_j}{2} \right] \quad \text{relation 248}$$

sous deux contraintes ([relation 248](#), page 806, et [relation 251](#), page 813) :

$$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j \leq A \quad \text{relation 249}$$

$$\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j < B \quad \text{relation 251}$$

Le problème d'optimum libre équivaut à ce problème d'optimisation sous contrainte, introduit la fonction  $H$  (Lagrangien) qui, sous sa forme littérale générale s'écrit :

$$H = \sum_j \left( \frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j} + \frac{q_j}{2} \cdot i \cdot c_{u_j} \right) + \lambda_A (\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j - A) + \lambda_B (\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j - B)$$

dont la dérivée par rapport à  $q_j$ , nulle à l'optimum, est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 &= -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + \frac{i \cdot c_{u_j}}{2} + \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + \lambda_B \cdot h \cdot c_{u_j} \\ &= -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j} \left( \frac{i}{2} + \lambda_B \cdot h \right) \end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{2\lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j}(i + 2\lambda_B \cdot h)}} \quad \text{relation 254}$$

étant entendu que l'on doit avoir saturation des contraintes :

$$\sum_j \left[ a_j \cdot k_j \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{2\lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j}(i + 2\lambda_B \cdot h)}} \right] = A \quad \text{relation 255}$$

$$\sum_j \left[ h \cdot c_{u_j} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{2\lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j}(i + 2\lambda_B \cdot h)}} \right] = B \quad \text{relation 256}$$

Numériquement, le problème est plus compliqué à résoudre car les deux consommations de ressources rares varient en sens inverse de  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$ . Dans l'optique introductive retenue ici nous ne traiterons pas la résolution numérique de ce cas de figure, sachant que son intérêt opérationnel est limité par la remarque introductive de ce paragraphe § I-2.3.1.3.

#### I-2.3.1.4 Prise en compte de contraintes dans la détermination de l'approvisionnement optimal lors d'une hausse tarifaire

Il est rare qu'une hausse tarifaire n'affecte qu'un seul article. Le plus souvent, un fournisseur relève simultanément les tarifs d'un ensemble conséquent de références, voire de la totalité de ses références. Lorsqu'il en est ainsi, l'application de la [relation 231 de la page 785](#) (stock nul à la livraison) ou de la [relation 236 de la page 787](#) (stock non nul à la livraison) peut conduire à un volume de marchandises livrées inacceptable et / ou à une facture rédhitoire. La prise en compte de contraintes non financières et / ou financière modifie alors un peu les résultats analytiques trouvés. On commencera par analyser la prise en compte d'une ressource non financière (§ I-2.3.14a), la prise en compte d'une ressource financière constituant un cas particulier (§ I-2.3.14b, page 818), avant d'aborder la prise en compte simultanée des deux contraintes<sup>1</sup> (§ I-2.3.14c, page 820).

### I-2.3.14a) Prise en compte de la contrainte d'une ressource non financière en cas de hausse tarifaire

Reprenons l'exemple numérique du paragraphe précédent et supposons qu'une hausse de 10 % soit annoncée et qu'au moment le plus tardif pour passer commande tout en bénéficiant des prix actuels, il soit certain que les stocks ne seront pas nuls à la livraison. Nous nous ramenons délibérément au cas général abordé au § I-2.1.1.2, page 786, qui est le seul réaliste dans le cadre d'une hausse simultanée portant sur plusieurs articles. Le [tableau 237](#) regroupe les données du problème posé à l'exception du taux d'opportunité utilisé pour calculer le coût de possession ( $i = 20\%$ ), du volume maximal alloué à ces articles à la livraison (c'est-à-dire pour le cumul des stocks disponibles immédiatement avant livraison et des quantités livrées), que l'on supposera être égal à  $115 \text{ m}^3$ .

TABLEAU 237

Données du problème de prise en compte simultanée de la hausse tarifaire et de contrainte de stockage et / ou de montant de la commande

Article $j$	Demande annuelle $D_j$	Coût d'acquisition		Coût de commande de $c_{cj}$	Encombrement unitaire $a_j$	Stock à la passation de la commande
		Actuel $c_{u1j}$	Futur $c_{u2j}$			
1 - Bouilloire électrique	2400	30	33	300	0,05	250
2 - Cocottes minute	1000	100	110	300	0,06	100
3 - Casserole	5000	15	16,5	300	0,03	400

Table des matières

Index thématique

La détermination de la solution analytique optimale est assez aisée : on cherche à maximiser l'économie totale réalisée sur tous les articles en préférant la stratégie d'anticipation à celle de la hausse subie (la substitution d'un coût de commande groupée  $c_c$  aux coûts « individuels » de commande  $c_{cj}$  ne changeant rien au problème). Il faut donc adapter la [relation 235 de la page 787](#) en effectuant une sommation sur les articles  $j$ , ce qui conduit à chercher à maximiser la fonction définie par la [relation 257](#).

$$\sum_j [C_2(q_j) - C_1(q_j)] = \sum_j \left[ \frac{q_j}{D_j} M_j + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{R_{vj}^2}{2 \cdot D_j} \right] - \sum_j \left[ q_j \cdot c_{u1j} + c_{cj} + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{(R_{vj} + q_j)^2}{2 \cdot D_j} \right] \quad \text{relation 257}$$

sous contrainte de stockage :

$$\sum_j a_j \cdot (R_{vj} + q_j) \leq A \quad \text{relation 258}$$

Il faut donc chercher à optimiser le Lagrangien  $H$  suivant :

1. *Note de la page précédente.* En l'absence de hausse tarifaire, une solution analytique peut être obtenue lorsque l'on souhaite une prise en compte simultanée de ces deux types de contraintes. Sa mise en œuvre en univers certain est assez simple, mais il n'en est pas de même en univers aléatoire. C'est la raison pour laquelle ce cas n'est pas traité ici, d'autant plus qu'en pratique, il suffit de comparer les deux solutions obtenues dans la formulation ne retenant que l'une des deux contraintes et de retenir celle qui respecte l'autre contrainte (si les deux solutions sont acceptables, on retiendra celle qui maximise la marge).

$$H = \sum_j \left\{ \left[ \frac{q_j}{D_j} M_j + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{R_{vj}^2}{2 \cdot D_j} \right] - \left[ q_j \cdot c_{u1j} + c_{cj} + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{(R_{vj} + q_j)^2}{2 \cdot D_j} \right] \right\} - \lambda_A \left( \sum_j a_j \cdot (R_{vj} + q_j) - A \right)$$

dans lequel un signe négatif a été affecté au multiplicateur de Lagrange  $\lambda_A$  parce qu'il s'agit d'un problème de maximisation (et non de minimisation) et que l'on souhaite garder la même interprétation de  $\lambda_A$ .

La dérivée partielle de  $H$  par rapport aux quantités  $q_j$  conduit alors à la [relation 259](#) qui modifie la [relation 236 de la page 787](#) en amputant la commande optimale calculée en l'absence de contrainte financière par la quantité  $\{D_j a_j \lambda_A\} / \{i c_{u1j}\}$ .

$$q_j^* = \left\{ \frac{M_j}{i c_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right\} - \frac{D_j a_j \lambda_A^*}{i c_{u1j}} \quad \text{relation 259}$$

Par ailleurs, la dérivée partielle de  $H$  par rapport à  $\lambda_A$  conduit à une saturation de la contrainte.

$$\sum_j a_j (q_j^* + R_{vj}) = A \quad \text{relation 260}$$

En remplaçant, dans la [relation 260](#), les  $q_j^*$  par leurs valeurs optimales définies par la [relation 259](#)  $\left( \sum_j a_j \left\{ \left[ \frac{M_j}{i c_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right] - \frac{D_j a_j \lambda_A^*}{i c_{u1j}} \right\} + R_{vj} \right) = A$ , on en déduit la valeur optimale  $\lambda^*$  prise par  $\lambda$ .

$$\lambda_A^* = \frac{\sum_j a_j \{M_j / c_{u1j} - D_j - R_{vj}\} - iA}{\sum_j a_j^2 D_j / c_{u1j}} \quad \text{relation 261}$$

Numériquement, il faut d'abord appliquer la [relation 261](#) pour déterminer  $\lambda_A^*$  puis utiliser la [relation 259](#) pour calculer les  $q_j^*$ . Dans notre exemple, la mise en place des nouveaux tarifs conduit aux nouvelles politiques optimales de «régime de croisière» du [tableau 238](#). On notera que cette politique optimale se traduit par une commande d'un montant égal à 93 795 dollars liduriens.

#### *I-2.3.14b) Prise en compte de la contrainte d'une ressource financière en cas de hausse tarifaire*

Dans ce cas, la consommation unitaire du facteur rare  $a_j$  n'est autre que le coût unitaire actuel d'acquisition; par ailleurs, cette contrainte porte sur les quantités achetées et non sur celles détenues après livraison. Dans ces conditions, la fonction à optimiser reste celle de la [relation 257 de la page 817](#) et il faut remplacer la contrainte définie par la [relation 258, page 817](#), par celle de la [relation 262](#).

$$\sum_j c_{u1j} \cdot q_j^* \leq B \quad \text{relation 262}$$



TABLEAU 238  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement  
d'articles de cuisine sous contrainte de stockage en univers certain  
avec hausse tarifaire

Politique optimale d'approvisionnement après hausse tarifaire des bouilloires électriques cocottes-minute casseroles				
Conséquences physiques				
Quantité de commande	467	165	953	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	5,14	6,06	5,25	
Intervalle moyen entre 2 commandes	56 jours	47,5 jours	54,9 jours	
Stock moyen détenu	233,50	82,50	476,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	10,28	12,12	10,49	
Conséquences financières				TOTAL
Dépense moyenne d'acquisition	79 200,00	110 000,00	82 500,00	271 700,00
Coût moyen de commande	1 541,76	1 818,18	1 573,98	4 933,91
Coût moyen de possession	1 541,10	1 815,00	1 572,45	4 928,55
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 082,86	3 633,18	3 146,43	9 862,46
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	82 282,86	113 633,18	85 646,43	281 562,46
Marge nette	13 717,14	16 366,82	14 353,57	44 437,54
Approvisionnement optimal hors contrainte d'espace				
Quantité à commander	1631	651	3496	
Stock disponible à la commande	250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison	1714	682	3549	
Consommation d'espace	85,7	40,92	106,47	233,09
Montant de la commande	48 930,00	65 100,00	52 440,00	166 470,00
La contrainte d'espace joue (espace disponible : 115 ; espace demandé : 233,09) $\lambda = 44,0501$				
Approvisionnement optimal sous contrainte d'espace				
Commande exceptionnelle	750	519	1293	
Stock disponible à la commande	250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison	833	550	1346	
Consommation d'espace	41,65	33	40,38	115,03
Montant de la commande	22 500,00	51 900,00	19 395,00	93 795,00
Economie permise par la commande exceptionnelle	2 777,44	6 633,98	2 272,84	11 684,26

L'adaptation des relations 259 et 261 conduit aux relations 263 et 264 :

$$q_j^* = \left\{ \frac{M_j}{ic_{u,j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right\} - \frac{D_j}{i} \lambda_B^* \quad \text{relation 263}$$

$$\lambda_B^* = \frac{\sum_j \{M_j - c_{u1j}D_j - ic_{u1j}R_{vj}\} - iB}{\sum_j c_{u1j}D_j} \quad \text{relation 264}$$

Reprenons notre exemple numérique, en supposant que la « dotation budgétaire » A allouée par les services financiers à la commande à passer est limitée à 90000 dollars liduriens. L'application de ces relations 263 et 264 conduit à la solution optimale proposée dans le [tableau 239](#). On notera que cette solution conduit à un volume stocké après livraison, égal à 130,99 m<sup>3</sup>.

#### I-2.3.14c) Prise en compte simultanée d'une contrainte financière et d'une contrainte non financière en cas de hausse tarifaire

Dans ce cas, on cherche toujours à optimiser la fonction décrite par la [relation 257 de la page 817](#), mais en faisant intervenir simultanément les contraintes définies par la [relation 258, page 817](#), et la [relation 262](#). Le plus souvent, la solution optimale trouvée avec l'une des contraintes (par exemple, la contrainte de stockage) respecte l'autre contrainte (c'est-à-dire la contrainte budgétaire, dans l'exemple retenu). Il convient donc de commencer par tester cette possibilité, étant entendu que, dans le cas où les deux solutions sont possibles, on retiendra celle qui maximise la marge. Dans les exemples numériques proposés, il n'en est pas ainsi.

Dans ce cas de figure, il faut partir du Lagrangien construit à partir des relations 257, 258 et 262.

$$H = \sum_j \left\{ \left( \frac{q_j}{D_j} M_j + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{R_{vj}^2}{2 \cdot D_j} \right) - \left( q_j \cdot c_{u1j} + c_{c_j} + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{(R_{vj} + q_j)^2}{2 \cdot D_j} \right) \right\} \\ - \lambda_A \left\{ \sum_j a_j \cdot (R_{vj} + q_j) - A \right\} - \lambda_B \left\{ \sum_j c_{u1j} \cdot q_j - B \right\}$$

On en déduit immédiatement la solution optimale pour les quantités à acheter pour contrer économiquement la hausse en tenant compte des contraintes imposées. Cette solution de la [relation 265](#) combine celles trouvées dans les relations 259 ([page 818](#)) et 263 ([page 819](#)) et constitue une généralisation, puisqu'obligatoirement  $\lambda_A^* = 0$  si la contrainte de stockage ne joue pas et  $\lambda_B^* = 0$  si la contrainte budgétaire ne joue pas.

$$q_j^* = \left\{ \frac{M_j}{ic_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right\} - \frac{D_j a_j}{ic_{u1j}} \lambda_A^* - \frac{D_j}{i} \lambda_B^* \quad \text{relation 265}$$

Comme précédemment, la détermination des multiplicateurs de Lagrange s'obtient en remplaçant, dans la [relation 260 de la page 818](#) et dans la [relation 262 de la page 818](#), les  $q_j^*$  par leurs valeurs optimales définies par la [relation 265](#). On obtient alors le système suivant de 2 équations à 2 inconnues ( $\lambda_A^*$  et  $\lambda_B^*$ ):





TABLEAU 239

Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte financière en univers certain avec hausse tarifaire

Politique optimale d'approvisionnement après hausse	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
<b>Conséquences physiques</b>				
Quantité de commande	467	165	953	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	5,14	6,06	5,25	
Intervalle moyen entre 2 commandes	56 jours	47,5 jours	54,9 jours	
Stock moyen détenu	233,50	82,50	476,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	10,28	12,12	10,49	
<b>Conséquences financières</b>				<b>TOTAL</b>
Dépense moyenne d'acquisition	79 200,00	110 000,00	82 500,00	271 700,00
Coût moyen de commande	1 541,76	1 818,18	1 573,98	4 933,91
Coût moyen de possession	1 541,10	1 815,00	1 572,45	4 928,55
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 082,86	3 633,18	3 146,43	9 862,46
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	82 282,86	113 633,18	85 646,43	281 562,46
Marge nette	13 717,14	16 366,82	14 353,57	44 437,54
<b>Approvisionnement optimal hors contrainte de budget</b>				
Quantité à commander	1631	651	3496	
Stock disponible à la commande	250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison	1714	682	3549	
Montant de la commande	48 930,00	65 100,00	52 440,00	166 470,00
La contrainte de budget joue (budget disponible : 90000 ; budget demandé : 166470) - Lambda = 0,0619				
<b>Approvisionnement optimal sous contrainte de budget</b>				
<b>Commande exceptionnelle</b>	<b>888</b>	<b>342</b>	<b>1949</b>	
Stock disponible à la commande	250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison	971	373	2002	
Consommation d'espace				
Montant de la commande	26 640,00	34 200,00	29 235,00	90 075,00
Economie permise par la commande exceptionnelle	3 316,84	4 302,59	3 450,02	11 069,46

Table des matières

Index thématique

$$\sum_j a_j \left[ \left( \left\{ \frac{M_j}{ic_{u,j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v,j} \right\} - \frac{D_j a_j}{ic_{u,j}} \lambda_A^* - \frac{D_j}{i} \lambda_B^* \right) + R_{v,j} \right] = A$$

$$\sum_j c_{u,j} \left[ \left\{ \frac{M_j}{ic_{u,j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v,j} \right\} - \frac{D_j a_j}{ic_{u,j}} \lambda_A^* - \frac{D_j}{i} \lambda_B^* \right] = B$$

La solution analytique de ce système est donnée par les relations 266 et 267.

$$\lambda_A^* = \frac{\left\{ \sum_j \frac{c_{u1j} D_j}{i} \right\} \left\{ \sum_j a_j \left[ \frac{M_j}{ic_{u1j}} - \frac{D_j}{i} \right] - A \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\} \left\{ \sum_j c_{u1j} \left[ \frac{M_j}{ic_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right] - B \right\}}{\left\{ \sum_j \frac{D_j a_j^2}{ic_{u1j}} \right\} \left\{ \sum_j \frac{c_{u1j} D_j}{i} \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\}^2}$$

relation 266

$$\lambda_B^* = \frac{\left\{ \sum_j \frac{D_j a_j^2}{ic_{u1j}} \right\} \left\{ \sum_j c_{u1j} \left[ \frac{M_j}{ic_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right] - B \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\} \left\{ \sum_j a_j \left[ \frac{M_j}{ic_{u1j}} - \frac{D_j}{i} \right] - A \right\}}{\left\{ \sum_j \frac{D_j a_j^2}{ic_{u1j}} \right\} \left\{ \sum_j \frac{c_{u1j} D_j}{i} \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\}^2}$$

relation 267

La prise en compte simultanée de la contrainte de stockage après livraison (115 m<sup>3</sup>) et de la contrainte du montant maximal de la commande (90000 dollars liduriens) conduit alors à préconiser la politique optimale décrite dans le [tableau 240](#).

### I-2.3.2 Utilisation commune et successive d'une même ressource rare

#### I-2.3.2.1 Le problème posé

Il s'agit ici d'une généralisation à plusieurs articles du cas de l'approvisionnement continu étudié au § I-2.2, page 799, qui se pose classiquement en approvisionnement interne à l'entreprise, lorsque ces articles ne peuvent pas être produits simultanément, parce qu'ils utilisent de façon exclusive les mêmes équipements.

#### I-2.3.2.2 Exemple introductif

Reprenons l'exemple numérique de la société **Cuisor**, introduit au § I-2.2.2, page 800, et supposons que le même atelier fabrique les bouilloires électriques, les cocottes-minute et les casseroles (on ne retient toujours qu'un seul modèle, pour alléger l'exemple numérique). Pour chacun de ces articles  $j$  ( $j$  variant de 1 à 3), la demande annuelle  $D_j$  est supposée certaine et uniforme, c'est-à-dire pour fixer les idées, que chaque semaine la demande hebdomadaire à satisfaire est la même:  $D_j/48$ , s'il y a 48 semaines ouvrables dans l'année. Par ailleurs, les capacités maximales de production annuelles  $O_j$  sont définies à partir d'une utilisation exclusive de l'atelier à la fabrication de l'article  $j$ . Cette capacité maximale de production tient compte du temps consacré à la maintenance. La production hebdomadaire est également constante et égale à  $O_j/48$ . Les données numériques que nous retiendrons sont les suivantes:

Vérifions tout d'abord qu'il est techniquement possible de produire ces 3 articles. Si le temps de mise au point du lancement d'une nouvelle série est négligeable, il suffit alors que l'utilisation requise de l'atelier soit inférieure à 100 % de sa capacité productive. Cette dernière notion sera mesurée en temps d'utilisation des équipements, seule unité de mesure commune aux 3 productions. Une production de 50000 bouilloires électriques entraîne une utilisation de la capacité



TABLEAU 240

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte de stockage et contrainte budgétaire en univers certain avec hausse tarifaire

Politique optimale d'approvisionnement après hausse tarifaire de		bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Conséquences physiques					
Quantité de commande		467	165	953	
Point de commande		167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		5,14	6,06	5,25	
Intervalle moyen entre 2 commandes		56 jours	47,5 jours	54,9 jours	
Stock moyen détenu		233,50	82,50	476,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock		10,28	12,12	10,49	
Conséquences financières					TOTAL
Dépense moyenne d'acquisition		79 200,00	110 000,00	82 500,00	271 700,00
Coût moyen de commande		1 541,76	1 818,18	1 573,98	4 933,91
Coût moyen de possession		1 541,10	1 815,00	1 572,45	4 928,55
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)		3 082,86	3 633,18	3 146,43	9 862,46
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)		82 282,86	113 633,18	85 646,43	281 562,46
Marge nette		13 717,14	16 366,82	14 353,57	44 437,54
Approvisionnement optimal hors contraintes d'espace et de budget					
Quantité à commander		1631	651	3496	
Stock disponible à la commande		250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison		83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison		1714	682	3549	
Consommation d'espace		85,7	40,92	106,47	233,09
Montant de la commande		48 930,00	65 100,00	52 440,00	356 610,50
les contraintes d'espace et de budget jouent (espace disponible : 115 ; demandé : 233,09 - budget disponible : 90000 ; budget demandé : 356610,5)					
Approvisionnement optimal sous contraintes d'espace et de budget					
Commande exceptionnelle		755	465	1392	
Stock disponible à la commande		250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison		83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison		838	496	1445	
Consommation d'espace		41,9	29,76	43,35	115,01
Montant de la commande		22 650,00	46 500,00	20 880,00	90 030,00
Economie permise par la commande exceptionnelle		2 797,13	5 926,03	2 456,01	11 179,16

productive annuelle de  $50000 / 200000 = 25\%$ , elle est de  $20000 / 100000 = 20\%$  pour les cocottes-minute, et de  $70000 / 250000 = 28\%$  pour les casseroles. La

TABLEAU 241  
Exemple d'utilisation commune et successive d'une même ressource rare

Article $j$	Coût de possession $c_{p_j}$	Demande annuelle $D_j$	Production maximale annuelle $O_j$	Coût de lancement $c_{c_j}$
1 - Bouilloire électriques	6	50000	200000	500
2 - Cocottes minutes	20	20000	100000	700
3 - Casseroles	3	70000	250000	600

production de 50000 bouilloires, 200000 cocottes-minute et 70000 casseroles requiert donc une utilisation de  $25\% + 20\% + 28\% = 73\%$  de la capacité productive. D'une façon générale, si les temps de mise au point sont négligeables, il faudra avoir :

$$\sum_j \frac{D_j}{O_j} < 1 \quad \text{relation 268}$$

On peut noter qu'ici le taux de charge de l'atelier (73%) est assez faible: les 27% de capacité inemployée, correspondent en effet à près de 65 jours ouvrables sur une année de 240 jours ouvrables (= 48 semaines, de 5 jours ouvrables chacune).

#### I-2.3.2.3 Solution

Une solution réalisable peut être obtenue en recherchant un nombre moyen annuel de commandes  $I_c$  qui soit le même pour tous les articles ou, ce qui revient au même, en recherchant une périodicité commune  $T$  pour tous les articles. **La variable de commande est maintenant  $T$**  (exprimée en année) et non  $q$  comme c'était le cas jusqu'à présent, mais comme nous sommes en avenir certain et qu'implicitement on s'interdit ici toute rupture de stock, la quantité mise en fabrication est nécessairement  $T \cdot D$ . À cette périodicité correspond bien entendu un même nombre annuel de commandes  $I_c = 1/T$ . Par exemple pour  $T = 0,333$ , on a  $I_c = 3$  ce qui signifie que 9 lancements en production seront successivement effectués au cours de l'année. Par exemple, les lancements 1, 4 et 7 correspondront à la fabrication des bouilloires électriques, les lancements 2, 5 et 8, à celle des cocottes-minute et enfin les lancements 3, 6 et 9, à celle des casseroles. Par ailleurs,  $q_1 = T \cdot D_1 = 2400 \times 0,333 = 800$  bouilloires électriques, etc.

Mais cette solution d'un cycle commun de fabrication peut ne pas être celle qui minimise le coût moyen annuel sur longue période. En effet, la solution optimale peut correspondre par exemple à une production cyclique calculée sur 2 ans et demi, constituée par exemple par un panachage de 5 lancements de l'article 1, 9 lancements de l'article 2 et 4 lancements de l'article 3, la longueur des séries pour un article donné n'ayant aucune raison d'être constante. Mais la recherche de cet optimum optimorum peut s'avérer d'un coût prohibitif compte tenu du caractère hautement combinatoire des solutions à étudier, et en définitive d'un intérêt relativement faible si le cycle obtenu est de plusieurs années, parce que l'évolution de l'environnement économique risque de rendre caduque la solution trouvée, avant même que la fin du premier cycle (de 2,5 ans dans notre exemple) ne soit atteinte<sup>1</sup>.

Il s'agira donc de chercher à minimiser une fonction de coût dépendant de la seule inconnue  $T$ . En effet, pour une valeur donnée de  $T$ , les quantités commandées  $q_j$  seront nécessairement égales au produit de la demande annuelle  $D_j$  par  $T$ , pour que la demande de l'article  $j$  soit juste satisfaite. Le stock moyen annuel de l'article  $j$  sera donc :  $\frac{q_j}{2} = \frac{D_j \cdot T}{2}$ , c'est-à-dire dans notre exemple  $\frac{50000 \cdot T}{2}$  pour l'article 1,  $\frac{20000 \cdot T}{2}$  pour l'article 2 et  $\frac{70000 \cdot T}{2}$  pour l'article 3.

Le coût de possession doit, comme nous l'avons vu au § I-2.2.1, page 800, être corrigé pour tenir compte du fait que l'approvisionnement est continu, et non instantané. Il convient de retenir comme coût de possession :  $c_{p_j} \cdot \frac{O_j - D_j}{O_j}$ , ce qui donne :

$$c_{p_1} = 6 \cdot \frac{200000 - 50000}{200000} = 4,5$$

$$c_{p_2} = 20 \cdot \frac{100000 - 20000}{100000} = 16$$

$$c_{p_3} = 3 \cdot \frac{250000 - 70000}{250000} = 2,16$$

Dans ces conditions, la fonction de coût que l'on cherchera à minimiser, que l'on notera  $C(T)$ , et qui est la somme des coûts moyens annuels de chacun des articles, est dans notre exemple, puisque  $I_c = 1/T$ :

$$C(T) = \left( \frac{500}{T} + 4,5 \frac{50000 \cdot T}{2} \right) + \left( \frac{700}{T} + 16 \frac{20000 \cdot T}{2} \right) + \left( \frac{600}{T} + 2,16 \frac{70000 \cdot T}{2} \right)$$

ce que l'on peut noter littéralement :  $C(T) = \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{c_{c_j}}{T} + c_{p_j} \cdot \frac{O_j - D_j}{O_j} \cdot \frac{D_j \cdot T}{2} \right\}$ , ou

encore, en «sortant» la variable  $T$  :  $C(T) = \frac{1}{T} \sum_j c_{c_j} + \frac{T}{2} \sum_j \left\{ D_j \cdot c_{p_j} \cdot \frac{O_j - D_j}{O_j} \right\}$ , ex-

pression qui est de la forme :  $C(T) = T \cdot A + B/T$  avec  $B = \sum_j c_{c_j}$  et  $A = \sum_j \left\{ D_j \cdot c_{p_j} \cdot (O_j - D_j) / O_j \right\} / 2$ . La valeur de  $T$  qui minimise cette fonction est

d'après la relation 220 de la page 775 ( $T^* = \sqrt{\frac{B}{A}}$ ) :

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_j c_{c_j}}{\sum_j [D_j \cdot c_{p_j} \cdot (1 - D_j/O_j)]}} \quad \text{relation 269}$$

Appliquons cette relation 269 à notre exemple, à l'aide du tableau 242.

1. Note de la page précédente. Un certain nombre de modèles et d'algorithmes de calcul ont été proposés ces dernières années (voir, par exemple, Chakravarty, 1984, [88]).

TABLEAU 242  
Calculs intermédiaires de  $T^*$

Article $j$	$D_j$	$O_j$	$D_j / O_j$	$c_{pj} \frac{O_j - D_j}{O_j} D_j$	$c_{cj}$
1 - Bouilloires électriques	50000	200000	0,25	225000	500
2 - Cocottes minutes	20000	100000	0,20	320000	700
3 - Casseroles	70000	250000	0,28	151200	600
Total	-	-	0,73 < 1	696200	1800

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \times 1800}{696200}} = 0,071909 \text{ année}$$

Examinons les implications pratiques de ce résultat (voir [tableau 243](#)):

- le nombre moyen annuel de cycles est de  $1/T^* = 13,91$  lancements pour chaque article;
- le nombre d'unités fabriquées  $q_j^*$  par commande de l'article  $j$  est égal à  $q_j^* = D_j \cdot T^*$ , d'où:  $q_1^* = 3595$ ,  $q_2^* = 1438$  et  $q_3^* = 5034$ .
- le temps de fabrication nécessaire à cette fabrication est de:  $q_j^*/O_j$  an ce qui correspond à  $(240 \cdot q_j^*)/O_j$  jours ouvrables et  $(8 \cdot 240 \cdot q_j^*)/O_j$  heures ouvrables; le cumul des temps de fabrication est 0,052391 année par cycle, ce qui laisse un temps résiduel de 0,019518 par cycle (ce qui redonne bien les 27 % de capacité trouvée à la [page 824](#)).
- chaque lancement en production de l'article  $j$  correspond à une consommation de  $\frac{q_j^*}{D_j} = \frac{D_j \cdot T^*}{D_j} = T^* = 0,0719$  an, soit  $240 \times 0,0719 = 17,26$  jours ouvrables, soit encore  $8 \times 17,26 = 138,08$  heures ouvrables.

Table des  
matières

Index  
thématique

#### I-2.3.2.4 Impact de la solution sur le planning d'atelier

Chacune des commandes permet de satisfaire 17,26 jours de consommation, mais la production de  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  ne demande que 12,60 jours, ce qui laisse au planning une assez grande marge de manœuvre. Bien entendu, nous retrouvons ici un taux de charge de l'atelier de  $12,6 / 17,26 = 73\%$ , identique à celui que nous avons calculé initialement sur l'année. Si l'on suppose que l'on produise les articles 1, 2 et 3 dans cet ordre et sans arrêt entre deux productions consécutives d'une même rafale, on obtient alors le planning de production et l'évolution des stocks nets de la [figure 211](#) (et du [tableau 244](#)), avec une origine arbitraire du temps.

### I-2.3.3 Commandes groupées

#### I-2.3.3.1 Le problème posé

Le problème étudié au § I-2.3.2 (utilisation commune et successive d'une même ressource rare) se pose fréquemment dans le cas de commandes internes à



TABLEAU 243  
Analyse de la politique optimale de la **CUISOR** pour sa production d'articles dans le même centre de production

Politique optimale d'approvisionnement (utilisation commune et successive d'une même ressource) des				
	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Conséquences physiques				
Quantité de commande	3 595	1 438	5 034	
Nombre moyen annuel de lancements en production	13,91	13,91	13,91	
Intervalle moyen entre 2 lancements	17,3 jours	17,3 jours	17,3 jours	
Stock moyen détenu	1 348,13	575,20	1 812,24	
Taux moyen annuel de rotation du stock	37,09	34,77	38,63	
Conséquences financières				TOTAL
Dépense moyenne de production	1500 000,00	2000 000,00	1050 000,00	4550 000,00
Coût moyen annuel de lancement	6 953,22	9 734,50	8 343,86	25 031,58
Coût moyen annuel de possession	8 088,75	11 504,00	5 436,72	25 029,47
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (production exclue)	15 041,97	21 238,50	13 780,58	50 061,05
Indicateur de coût moyen de gestion (production incluse)	1515 041,97	2021 238,50	1063 780,58	4600 061,05

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 244  
Évolution des stocks des articles fabriqués par **CUISOR**

date (en jours)	Bouilloires	Cocottes	Casseroles
0,00	0	360	2265
4,31	2696	0	1007
7,77	1977	1 150	0
12,60	970	748	3 624
17,26	0	359	2265
21,57	2696	0	1007
25,02	1977	1 150	0
29,86	970	748	3 624
34,52	0	359	2265
38,83	2696	0	1007

l'entreprise tandis que celui que l'on va étudier ne se pose que dans le cas de commandes passées à l'extérieur de l'entreprise.

Comme dans le cas précédent, il s'agit de définir la périodicité optimale de commandes portant simultanément sur plusieurs articles, la différence majeure est qu'au lieu d'avoir un approvisionnement progressif, on a une livraison périodique de la totalité de la quantité de commandes. Il s'ensuit qu'il n'y a pas lieu de



FIGURE 211  
Production et évolution du stock des articles produits par **CUISOR**

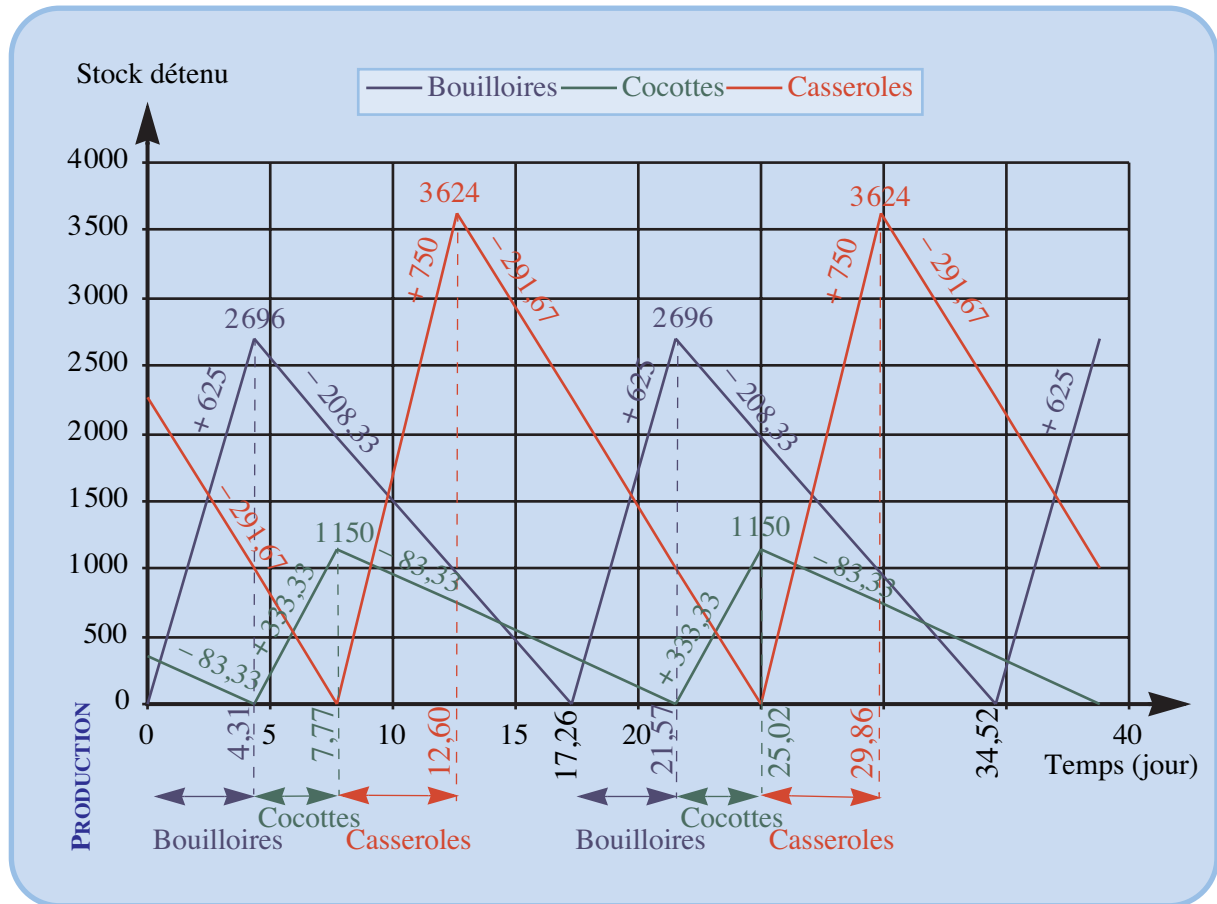


Table des  
matières

Index  
thématique

corriger le coût de possession par le facteur correctif  $(O_j - D_j) / O_j$ ; mais on peut garder la [relation 269 de la page 825](#) en considérant que le taux de production annuel est infini (ce qui donne la valeur 1 au facteur correctif). Par ailleurs, la commande porte sur tous les articles  $j$ , il n'y a donc pas de  $c_{c_j}$ , mais un coût  $c_c$ , que l'on suppose indépendant de l'importance de la commande passée. Ce nombre optimal moyen annuel de commandes est donné par la [relation 270](#)<sup>1</sup>:

$$I_c^* = \sqrt{\frac{\sum_j D_j \cdot c_{p_j}}{2 \cdot c_c}} \quad \text{ou} \quad T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{\sum_j D_j \cdot c_{p_j}}} \quad \text{relation 270}$$

1. Dans certains cas, le problème des commandes groupées est plus complexe : à chaque commande, passée avec une périodicité  $T$ , l'entreprise supporte un coût de commande  $c_c$ . Mais cette commande ne concerne pas forcément tous les articles du groupe d'articles considérés ; ce qui revient à dire, toute rupture de stock étant interdite, que l'on commande pour un article quelconque  $j$ , de quoi satisfaire la consommation d'une période égale à un multiple entier de  $T$ . Une telle politique, qui accroît le coût moyen de stockage, n'est envisageable que parce qu'un coût de commande  $c_{c_j}$  complémentaire spécifique à l'article  $j$  s'ajoute au coût de commande général précédemment envisagé. Diverses solutions ont été proposées pour résoudre ce problème (voir Silver, Pike & Peterson, 1998, [387], p. 497-503).

## I-2.3.3.2 Application numérique

Le rayon d'articles de cuisine du supermarché **SUPERLAMBDA** s'approvisionne en bouilloires électriques, cocottes-minute et casseroles auprès de l'entreprise **Cuisor**. Supposons que le service approvisionnement de **SUPERLAMBDA** étudie la solution de commandes groupées auprès d'un même fournisseur, et qu'il estime que le coût de telles commandes est de 300 dollars liduriens. Les données relatives au coût de possession et à la demande annuelle de ces trois articles pour **SUPERLAMBDA** (et non pour **Cuisor** comme au § I-2.3.2) sont les mêmes que celles de l'exemple du § I-2.3.11b, page 803, et sont rappelées dans le [tableau 245](#). L'application de la [relation 270](#) conduit à  $I_c^* = \sqrt{\frac{49400}{2 \cdot 300}} = 9,07$ , d'où  $T^* = 0,1102$  an = 31,8 jours ouvrables. Les quantités commandées dans chaque commande groupée sont:  $q_1 = \frac{2400}{9,07} = 264$ ,  $q_2 = \frac{1000}{9,07} = 110$ ,  $q_3 = \frac{5000}{9,07} = 551$ . Tous les 31,8 jours ouvrables **SUPERLAMBDA** commande donc à **Cuisor**: 264 bouilloires électriques, 110 cocottes-minute et 551 casseroles. L'ensemble des conséquences de cette politique d'approvisionnement est donné dans le [tableau 246 de la page 830](#).

TABLEAU 245

*Calcul de la périodicité optimale de la commande groupée de **SUPERLAMBDA***

Article $j$	$c_{pj}$	$D_j$	$D_j \cdot c_{pj}$
1 - Bouilloires électriques	6	2400	14400
2 - Cocottes minutes	20	1000	20000
3 - Casseroles	3	5000	15000
Total	-	-	49400

Table des  
matièresIndex  
thématique

Cela dit, en utilisant une périodicité calendaire d'approvisionnement fixe, il conviendra d'arrondir la solution optimale à 32 jours (ou à un nombre «voisin» plus facile d'utilisation) et de modifier en conséquence la politique d'approvisionnement.

## SECTION II LA QUANTITÉ ÉCONOMIQUE DE COMMANDE EN UNIVERS ALÉATOIRE

Comme dans la section précédente, nous examinerons successivement les modèles de base (demande aléatoire et délai d'obtention certain, puis demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire) et les améliorations de ce modèle, c'est-à-dire les extensions au cas aléatoire des principaux cas de figure analysés au § I-2.

### II-1 La généralisation du modèle de base au cas aléatoire

Dans ce paragraphe la demande de l'article faisant l'objet d'un stock n'est plus considérée comme certaine, mais connue en probabilité. Le fait que la demande devienne aléatoire ne remet pas en cause sa nature statique<sup>1</sup>, ce qui signifie que les

1. Par opposition à dynamique (voir [page 630](#)).



TABLEAU 246  
Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de  
SUPERLAMBDA auprès de CUISOR.

Politique optimale d'approvisionnement (commande groupée) de	bouilloires électriques	cocottes-minute	casserolles	
<b>Conséquences physiques</b>				
Quantité de commande	264	110	551	
Nombre moyen annuel de commandes	9,07	9,07	9,07	
Intervalle moyen entre 2 commandes	31,7 jours	31,7 jours	31,7 jours	
Stock moyen détenu	132,00	55,00	275,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	18,18	18,18	18,15	
<b>Conséquences financières</b>				<b>TOTAL</b>
Dépense moyenne d'acquisition	72 000,00	100 000,00	75 000,00	247 000,00
Coût moyen annuel de commande	907,38	907,38	907,38	2 722,13
Coût moyen annuel de possession	792,00	1 100,00	826,50	2 718,50
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	1 699,38	2 007,38	1 733,88	5 440,63
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	73 699,38	102 007,38	76 733,88	252 440,63

«caractéristiques» de cette distribution de probabilités restent stables au cours du temps<sup>1</sup>. Dans un premier temps (§ II-1.1), nous maintiendrons l'hypothèse d'un délai d'obtention connu avec certitude, hypothèse acceptable dans un grand nombre de cas pratiques où le délai d'obtention est connu avec une marge d'erreur faible. Dans un second temps (§ II-1.2, page 854) nous lèverons cette dernière hypothèse et chercherons à être en mesure de résoudre numériquement la classe de problèmes concrets que l'on rencontre le plus souvent sur le terrain.

### II-1.1 Politique optimale « $q, s$ » avec demande aléatoire et délai d'obtention certain

Le raisonnement s'appuiera sur un exemple numérique (§ II-1.1.1). Une solution approchée du problème sera présentée au § II-1.1.2, page 831, puis la solution analytique exacte, au § II-1.1.3, page 834. Au § II-1.1.4, page 842, les indicateurs de qualité de service introduits au chapitre précédent seront adaptés. La détermination de politique sous contrainte de niveau de service sera abordée au § II-1.1.5, page 849. Enfin, au § II-1.1.6, page 853, on analysera rapidement le cas des points de commandes multiples.

#### II-1.1.1 Exemple introductif

Reprenons l'exemple des ventes de bouilloires électriques du supermarché SUPERLAMBDA et supposons maintenant que la demande n'est plus certaine, mais aléatoire, et plus précisément que la distribution de probabilités de la demande

1. On peut encore dire que l'on a affaire à un processus purement aléatoire (cf. chapitre XV, § I-2.3.1, page 989), ce qui revient à considérer que l'on est dans un régime de croisière caractérisé par un environnement technique, économique et social stable.

annuelle est une loi Normale de moyenne 2400 (valeur retenue comme demande annuelle en avenir certain) et d'écart-type 189,74. La distribution de probabilité de la demande  $X$  pendant les 20 jours ouvrables ( $= 20 / 288$  an) correspondant au délai d'obtention est également une loi Normale dont les paramètres se déduisent de ceux de la loi annuelle en multipliant moyenne et variance par ce coefficient  $20 / 288$ . La variable  $X$  suit donc une loi Normale de moyenne 167, et d'écart-type égal à  $189,74 \cdot \sqrt{20/288} = 50$ .

Supposons en outre que le coût de rupture soit de 10 dollars liduriens, marge brute unitaire réalisé par **SUPERLAMBDA** sur la vente d'une bouilloire. La fonction de coût à minimiser fait alors intervenir simultanément trois variables d'état:

- le nombre moyen de commandes  $I_c$ ,
- le stock moyen annuel de bouilloires possédé  $I_p$  (sur lequel pèse le coût de possession de 6 dollars liduriens / article / an),
- la rupture moyenne  $I_r$  annuelle, c'est-à-dire le nombre moyen de bouilloires qu'il n'a pas été possible de vendre à la suite d'une rupture de stock (le coût de rupture de 10 dollars / article pèse sur chaque vente perdue).

### II-1.1.2 Détermination indépendante de $s$ et de $q$

#### II-1.1.2.1 Principes suivis

Une solution approchée du problème consiste à résoudre *indépendamment* les deux problèmes suivants:

- Le premier problème se focalise sur la détermination de la quantité économique de commande  $q$ , en effectuant un arbitrage entre coût de commande et coût de possession à partir de la demande moyenne. Ce problème n'est autre que celui étudié au § I-1, page 772 en remplaçant la notion de demande annuelle certaine par celle d'espérance mathématique de la demande annuelle ( $\bar{D} = 2400$ ).
- Le second problème a pour objet la détermination du point de commande  $s$ . Il effectue un arbitrage entre coût de rupture et coût de possession en utilisant le modèle de la gestion calendaire pendant le délai d'obtention  $L$  et en retenant comme point de commande  $s$ , le niveau de recomplètement  $S$  correspondant à la solution optimale. La différence entre le point de commande et la demande moyenne durant le délai d'obtention  $s$  s'analyse comme un stock de sécurité.

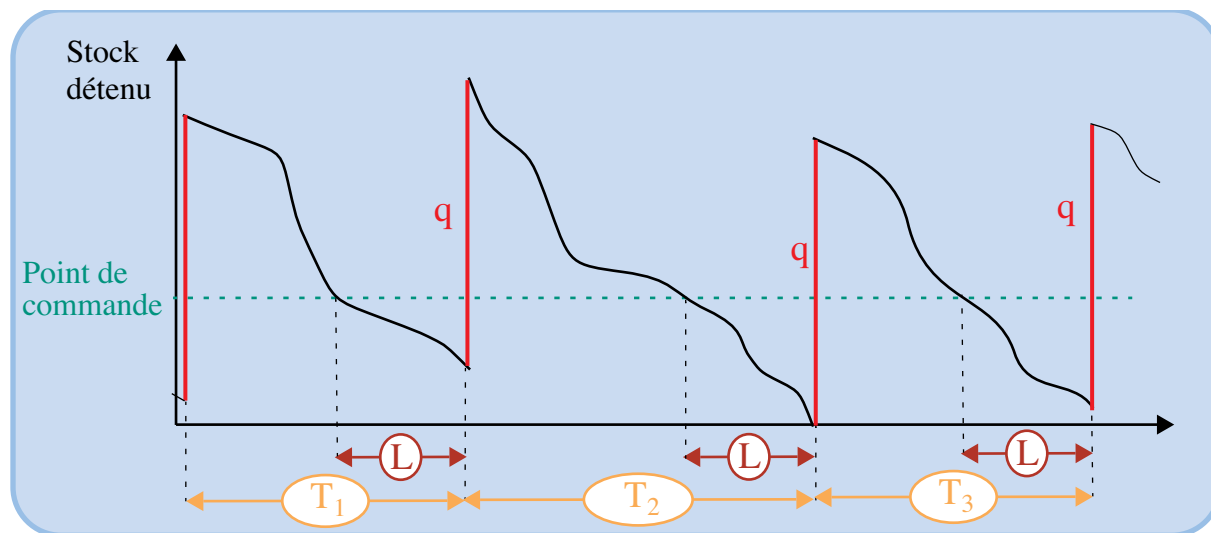
L'évolution du stock détenu est illustrée dans la figure 212, page 832 (qui reste valable en cas de solution exacte); on peut y remarquer que l'intervalle entre deux approvisionnements successifs n'est pas stable. Les solutions proposées dans ce § II-1.1 ne seront valides que si l'on n'est pas dans le cas des points de commandes multiples, c'est-à-dire si la quantité commandée reste supérieure au point de commande.

#### II-1.1.2.2 Résolution d'un problème de quantité économique optimale

La solution numérique du premier problème n'est autre que celle trouvée en univers certain, à la page 776, c'est-à-dire que l'on a  $q^* = 490$ .

FIGURE 212

Exemple d'application d'une politique d'approvisionnement « $q, s$ » en univers aléatoire



### II-1.1.2.3 Détermination du stock de sécurité: résolution d'un problème de gestion calendaire

Le point de commande  $s$  sera égal au niveau de reapprovisionnement  $S$ , solution optimale de ce second problème, ceci nous conduit à minimiser un coût de gestion, somme d'un coût de possession  $c_p \cdot I_p(S)$  et d'un coût de rupture  $c_r \cdot I_r(S)$ . La rupture moyenne est l'espérance mathématique du nombre de bouilloires électriques non fournies durant le délai d'obtention (qui est l'équivalent de la période de révision calendaire de la gestion calendaire, dans ce problème). Nous avons déjà dit que les politiques de quantité économique de commande ne concernaient que des articles stockables. Ceci implique que le stock moyen possédé durant le délai d'obtention se calcule comme la moyenne arithmétique du point de commande  $s$  (qui est l'équivalent du niveau de reapprovisionnement  $S$  du problème de gestion calendaire) et du stock résiduel au moment de la livraison. S'il y a rupture de stock, on adopte l'hypothèse simplificatrice d'après laquelle la rupture de stock se produit instantanément à la fin du délai d'obtention. Dans ces conditions, le problème de gestion calendaire que l'on cherche à résoudre est celui du § II-3.1, page 754, du chapitre XI.

Ce problème de gestion calendaire se rencontrera en moyenne  $2400 / 490 = 4,9$  fois par an, c'est-à-dire que le stock moyen  $I_p(s)$  correspondra à une immobilisation portant sur une période de  $490 / 2400 = 1 / 4,9 = 0,2042$  an, c'est-à-dire  $288 \times 0,2042 = 58,81$  jours ouvrables et non sur les seuls 20 jours ouvrables où le problème de gestion calendaire se pose. On conviendra d'appeler **cycle**, cette période de 58,81 jours ouvrables en moyenne.

Le coût annuel de possession  $c_p = 30 \times 0,2 = 6$  dollars liduriens pèse sur un article détenu pendant 288 jours ouvrables. Il convient donc de le multiplier par 0,2042 pour obtenir un coût de possession  $c_p'$  par cycle de 59 jours ouvrables. Dans ces conditions, le problème posé est la recherche du niveau de reapprovisionnement  $S$  qui minimise la fonction de coût suivante:  $C(S) = 6 \times 0,2042 \times I_p(S) +$

$10 \times I_r(S)$ . La valeur optimale de  $S$  s'obtient en utilisant la [relation 175 de la page 718](#) établie au chapitre précédent, en remplaçant  $c_p$  par  $c_p'$  :

$$P(X > S^*) = \frac{c_p'}{c_r + c_p'/2} = \frac{6 \times 0,2042}{10 + 6 \times 0,2042/2} = 0,115$$

La demande  $X$  durant le délai d'obtention de 20 jours est par hypothèse la loi Normale  $\mathcal{N}(167; 50)$ . La valeur de la variable centrée réduite correspondant à cette probabilité est, après lecture d'une table de la loi Normale, égale à 1,2004. D'où

$$1,2004 = \frac{S^* - 167}{50} \rightarrow S^* \approx 227$$

Dans ces conditions la politique d'approvisionnement optimale consiste à commander 490 bouilloires électriques chaque fois que le stock possédé devient égal ou inférieur à 227 bouilloires. Évaluons les conséquences économiques de cette politique.

La rupture moyenne au cours d'un cycle est, après lecture de la table A, [page 765](#)<sup>1</sup> :  $I_r(S = 227) = \sigma \cdot g(t_S = 1,2) = 50 \times 0,0561 = 2,81$ . Chaque année, on a en moyenne  $2400 / 490 = 4,898$  cycles. Le nombre moyen annuel de bouilloires que l'on n'a pas pu vendre s'élève donc à  $2,81 \times 4,898 = 13,76$  bouilloires, ce qui correspond à un pourcentage de demandes non satisfaites  $\beta$  correspondant à  $13,76 / 2400 = 0,57\%$  de la demande moyenne annuelle.

Le stock de sécurité, qui en gestion calendaire est la différence entre le niveau de reapprovisionnement et la demande moyenne (ici 167), s'élève à  $227 - 167 = 60$  bouilloires. Sa constitution est rendue nécessaire par le caractère aléatoire de la demande. Mais il faut bien observer que la demande effective au cours d'un délai d'obtention peut aussi bien être supérieure qu'inférieure à la demande moyenne sur cette période. En conséquence de quoi, *la non-constitution d'un stock de sécurité n'implique pas qu'en moyenne le stock résiduel soit nul au moment de la livraison*.

- L'utilisation de la [relation 135 de la page 670](#) (étendue au cas continu en [page 674](#)) établie au chapitre précédent et permettant de calculer l'espérance mathématique du stock résiduel ( $I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$ ), conduit, après lecture de la table A, à :  $I_p(S = 167) = 167 - 167 + I_r(S = 167) = 0 + 50 \times 0,39894 = 19,95$ . Ce stock résiduel moyen de 19,95 bouilloires s'analyse d'une certaine façon comme un stock «presque toujours dormant», nécessaire pour atteindre un niveau de service (ici, 50% de chances de ne pas être en rupture de stock avant la livraison), face à une demande aléatoire, et non comme un gaspillage ou la conséquence d'une mauvaise gestion. *Pour le réduire, il faudrait agir sur le délai d'obtention et / ou sur la variabilité de la demande*.
- La constitution d'un stock de sécurité de 60 accroît ce stock résiduel :  $I_p(S = 227) = 227 - 167 + I_r(S = 227) = 60 + 2,81 = 62,81$ . Cette élévation de la

1. Un calcul précis fait à partir de la valeur exacte de la moyenne (166,667) et en tenant compte de la correction de continuité (voir [page 678](#)), donne comme valeur  $t_S = \frac{(227,5 - 166,667)}{50} = 1,2167$ . La valeur exacte de  $g(t_S)$  est alors 0,05421 (valeur calculée et non lue sur une table), et la rupture moyenne est alors 2,71053.



valeur du point de commande s'accompagne donc d'un accroissement du stock résiduel de  $62,81 - 19,95 = 42,86$  bouilloires. Ceci revient à dire que  $42,86 / 60 = 71\%$  de ce stock de sécurité pourra être considéré comme un stock «presque toujours dormant». *Ce stock «presque toujours dormant», qui n'est pas imputable à une mauvaise gestion, a donc une valeur optimale<sup>1</sup>.*

Il n'est pas possible de calculer le coût moyen annuel de gestion sans avoir formulé analytiquement le problème. On examinera donc ce point ultérieurement.

### II-1.1.3 Détermination simultanée de $s$ et $q$

On examinera successivement le cas des ventes perdues (qui correspond à notre exemple numérique), celui des ventes ou livraisons différées (§ II-1.1.3.2, page 839) et enfin le cas mixte (§ II-1.1.3.3, page 841).

#### II-1.1.3.1 Cas des demandes non satisfaites perdues

En réalité, comme nous allons le voir, la rupture moyenne et le stock moyen possédé dépendent aussi bien du point de commande  $s$ , que de la quantité économique  $q$ . Mais la variable d'état  $I_p$  dépend directement comme on va le voir, des variables de commande  $s$  et  $q$ ; aussi la notera-t-on  $I_p(s, q)$ . Par contre, comme on va le voir également, la détermination de  $s$  fait intervenir  $q$ , mais une fois fixé  $s$ , la rupture moyenne au cours d'un cycle ne dépend que du seul  $s$  (mathématiquement donc la dérivée de la rupture moyenne par rapport à  $q$  est nulle). On notera donc  $I_r(s)$  cette rupture moyenne. Enfin, la dernière variable d'état  $I_c$ , nombre annuel moyen de commandes, ne dépend que de la seule variable  $q$  et sera noté en conséquence  $I_c(q)$ .

Le stock moyen annuel possédé  $I_p(s, q)$ , qui est, de toute évidence, égal à celui calculé sur un cycle, peut s'analyser comme une moyenne pondérée de :

- l'espérance mathématique  $I_{p2}(s, q)$  du stock entre la livraison d'une commande et le franchissement du point de commande
- et de l'espérance mathématique  $I_{p1}(s, q)$  du stock entre le franchissement du point de commande et la prochaine livraison.

Le stock moyen  $I_{p1}(s, q)$  n'est autre que celui qu'on a utilisé dans le problème de gestion calendaire, page 717, à ceci près que l'on utilise ici dans la formulation le point commande  $s$  au lieu du niveau de recomplètement  $S$ , et que la demande aléatoire  $X$  est définie pour une période égale au délai d'obtention  $L$  au lieu de la période de révision calendaire  $T$ .

$$I_{p1}(s, q) = \sum_{x_L=0}^s \left[ \frac{1}{2} \{s + (s - x_L)\} P(X_L = x_L) + \frac{1}{2} (s + 0) P(X_L > s) \right]$$

ce qui, compte tenu de la relation 173 de la page 718, peut encore s'écrire, en remplaçant  $I_r(S)$  par la notation équivalente  $I_r(s)$  dans notre nouvelle formulation (raisonnement identique à celui du § I-2.3.1, page 717, du chapitre XI):

$$I_{p1}(s, q) = \frac{1}{2} [2 \cdot s - \bar{x}_L + I_r(s)] \quad \text{relation 271}$$

1. Puisqu'à  $S^*$  correspond une valeur unique de  $I_p(S^*)$ , l'inverse étant vrai pour les distributions de probabilités classiques



Le calcul du stock  $I_{p2}(s, q)$  est simple. À la livraison de  $q$  unités, le stock passe de  $(s - x_L)$ , stock résiduel avant livraison de la commande, à  $(s - x_L + q)$  unités, à condition d'avoir un stock résiduel positif ( $x_L < s$ ), ou à  $q$  unités s'il y a rupture de stock ( $x_L \geq s$ )<sup>1</sup>. Pendant l'intervalle de temps qui sépare la livraison d'une commande et le franchissement du prochain point de commande, le stock moyen possédé est donc :

- $\frac{1}{2}[(0 + q) + s] = \frac{1}{2}(q + s)$ , si le stock résiduel avant livraison est nul,
- $\frac{1}{2}[(s - x_L + q) + s] = \frac{1}{2}(2s - x_L + q)$  si le stock résiduel avant livraison est positif.

L'espérance mathématique de ce stock est donc, dans le cas d'une demande discrète (la transposition au cas continu étant immédiate) :

$$I_{p2}(s, q) = \sum_{x_L=0}^s \left[ \frac{1}{2} \{2s - x_L + q\} P(X_L = x_L) \right] + \frac{1}{2}(q + s)P(X_L > s)$$

$$I_{p2}(s, q) = \sum_{x_L=0}^s \left[ \frac{1}{2}(s - x_L)P(X_L = x_L) \right] + \frac{1}{2}(q + s) \sum_{x_L=0}^s P(X_L = x_L) + \frac{1}{2}(q + s)P(X_L > s)$$

$$I_{p2}(s, q) = \frac{1}{2}[s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \frac{1}{2}(q + s)\{P(X_L \leq s) + P(X_L > s)\}$$

$$I_{p2}(s, q) = \frac{1}{2}[2s - \bar{x}_L + q + I_r(s)] \quad \text{relation 272}$$

L'espérance mathématique du stock moyen possédé se calcule tout naturellement, à partir des relations 271 et 272, comme la moyenne des espérances mathématiques des stocks  $I_{p1}(s, q)$  et  $I_{p2}(s, q)$ , pondérée par la fraction de cycle où ils interviennent physiquement. La longueur d'un cycle est sensiblement égale<sup>2</sup> à  $q/D$ . Le délai de livraison est par hypothèse  $L$ . S'il n'y a pas de points de commande multiples, c'est-à-dire si l'on a  $L < q/D$ , on peut alors écrire :

$$I_p(s, q) = \frac{L}{q/D} \cdot I_{p1}(s, q) + \left(1 - \frac{L}{q/D}\right) \cdot I_{p2}(s, q) \quad \text{relation 273}$$

que l'on peut écrire en remarquant que, par définition,  $\bar{x}_L = DL$  :

$$I_p(s, q) = \frac{\bar{x}_L}{q} \cdot I_{p1}(s, q) + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) \cdot I_{p2}(s, q)$$

1. On verra que, s'il est possible de différer la demande en cas de rupture de stock, la position du stock reste toujours  $(s - x_L)$  juste avant la réception de la commande (avec une valeur négative en cas de rupture de stock), à condition toutefois qu'il ne puisse y avoir de demande différée d'un cycle sur l'autre, c'est-à-dire que la position du stock après livraison soit toujours positive (ce qui implique  $P(X_L > s + q) = 0$ ). Il s'ensuit qu'après livraison, la position du stock sera toujours  $(s - x_L + q)$  qu'il y ait eu ou non rupture de stock.

2. On démontre (voir Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 171-173) que la durée moyenne d'un cycle est  $q/D$  lorsque les demandes non satisfaites non différées, et  $(q + I_r(s))/D$  lorsqu'elles sont perdues. Si  $I_r(s)$  est faible par rapport à  $q$ , ce que l'on suppose implicitement déjà en utilisant les relations 175 et 176, page 718, du chapitre précédent (hypothèse simplificatrice), le système de pondération retenu est acceptable lorsque les demandes non satisfaites sont perdues ; il sera exact lorsqu'elles seront différées (§ II-1.1.3.2, page 839).

$$\begin{aligned}
 I_p(s, q) &= \frac{\bar{x}_L}{q} \cdot \frac{1}{2} [2s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) \cdot \frac{1}{2} [2s - \bar{x}_L + q + I_r(s)] \\
 I_p(s, q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x}_L}{q} + 1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) [2s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) \cdot \frac{q}{2} \\
 I_p(s, q) &= \left\{s - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(s)}{2}\right\} + \left(1 - \frac{\bar{x}}{q}\right) \cdot \frac{q}{2}
 \end{aligned}
 \tag{relation 274}$$

La première expression entre  $\{ \}$  n'est autre que le stock moyen possédé durant le délai d'obtention (relation 173 de la page 718, établie au chapitre précédent), mais considéré ici comme supporté à longueur d'année. Il faut y ajouter le stock moyen possédé utilisé dans le modèle de base de la quantité économique optimale, en le pondérant par la fraction moyenne de temps où le système n'est pas en attente de livraison (autrement dit, n'est pas dans une gestion de type calendaire). La formulation du stock moyen  $I_p(s, q)$  s'interprète donc parfaitement. D'un point de vue pratique, on a intérêt à poursuivre les simplifications de cette relation 274, et à remplacer  $\bar{x}_L$  par  $D \cdot L$ , pour aboutir à la relation 275.

$$\begin{aligned}
 I_p(s, q) &= \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \frac{I_r(s)}{2} \\
 I_p(s, q) &= \frac{\text{quantité économique}}{2} + \text{stock de sécurité} + \frac{\text{rupture par cycle}}{2}
 \end{aligned}
 \tag{relation 275}$$

Le coût moyen annuel de gestion  $C(q, s)$ , dépend également du nombre moyen annuel de commandes. On continuera de noter  $I_c(q)$  cette variable d'état puisqu'elle est, par définition, égale au rapport  $D/q$  et ne dépend que de la seule variable de commande  $q$ . Ce coût moyen annuel de gestion dépend enfin de la rupture moyenne au cours d'un cycle, valeur qu'il faut multiplier par le nombre moyen annuel de cycles (égal au nombre moyen annuel de commandes), pour obtenir le nombre moyen annuel de demandes non satisfaites.

$$C(q, s) = c_c \cdot I_c(q) + c_p \cdot I_p(s, q) + c_r \cdot [I_c(q) \cdot I_r(s)] \tag{relation 276}$$

$$\begin{aligned}
 C(q, s) &= c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \left[ \frac{q}{2} + s - D \cdot L + \frac{I_r(s)}{2} \right] + c_r \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \\
 C(q, s) &= c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left( c_r \cdot \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) I_r(s)
 \end{aligned}
 \tag{relation 277}$$

Il ne reste plus qu'à chercher les valeurs  $s^*$  et  $q^*$  qui minimisent ce coût moyen annuel:  $\frac{\partial C(q, s)}{\partial q} = 0 = \frac{c_p}{2} - \{c_c + c_r \cdot I_r(s)\} \cdot \frac{D}{q^2}$ , d'où l'on tire:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \{c_c + c_r \cdot I_r(s^*)\}}{c_p}} \tag{relation 278}$$

Cette quantité économique optimale correspond à celle de Wilson, à condition d'ajouter au coût de passation d'une commande  $c_c$ , le coût moyen de rupture pendant le délai d'obtention  $c_r \cdot I_r(s^*)$ , ce qui revient à dire qu'au moment où l'on

passer commande, la dépense à prendre en compte n'est pas le seul coût de commande, comme dans le modèle de Wilson, mais qu'il convient d'y ajouter le coût de défaillance que l'on supporte en moyenne chaque fois que l'on passe une commande.

Par ailleurs, à l'optimum, on doit avoir :

$$\frac{\partial C(q, s)}{\partial s} = 0 = c_p - \left\{ \frac{c_p}{2} + c_r \cdot \frac{D}{q} \right\} \cdot \frac{\partial I_r(s)}{\partial s}$$

Étant donné que  $I_r(s)$ , rupture moyenne durant le délai d'obtention, n'est autre, en reprenant les notations de gestion calendaire, que la rupture moyenne  $I_r(S)$ , et compte tenu de la [relation 145 de la page 674](#), on peut écrire :  $\frac{\partial I_r(s)}{\partial s} = -P(X > s)$

d'où :

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} = \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + (c_p \cdot q^*/D)/2} \quad \text{relation 279}$$

C'est cette [relation 279](#) que l'on a implicitement utilisée dans le calcul du point de commande que nous avons opéré dans la solution approchée du § II-1.1.2 (en nous ramenant au cas étudié au chapitre précédent, après avoir corrigé le coût de possession annuel au prorata d'un cycle).

Cette probabilité étant nécessairement inférieure à 1, la [relation 280](#) doit être respectée, mais cette condition qui n'est guère restrictive dans les cas de figure que l'on rencontre en pratique :

$$c_p < \frac{c_p}{2} + \frac{c_r \cdot D}{q^*} \Rightarrow c_p < 2 \cdot \frac{c_r \cdot D}{q^*} \quad \text{relation 280}$$

Cette [relation 279](#) peut encore s'écrire si l'on préfère travailler sur les fonctions de répartition :

$$P(X < s^*) = \frac{c_r \cdot D/q^* - c_p/2}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} \quad \text{relation 281}$$

Si la loi de demande utilisée est discrète, il y a lieu alors d'adapter ces relations [278](#) et [279](#) (ou [281](#)) en transposant les relations [175](#) et [176](#) ([page 718](#)) du chapitre précédent, ce qui conduit aux [relations 282 de la page 838](#).

$$P(X > s^*) < \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} < P(X > s^* - 1)$$

$$P(X \geq s^* + 1) < \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} < P(X \geq s^*)$$

$$P(X \leq s^* - 1) < \frac{c_r \cdot D/q^* - c_p/2}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X \leq s^*)$$

$$P(X < s^*) < \frac{c_r \cdot D/q^* - c_p/2}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X < s^* + 1)$$

relation 282

Les relations 278 et 279 forment un système de deux équations à deux inconnues  $s$  et  $q$  qui n'a pas de solution analytique explicite<sup>1</sup>. Fort heureusement, on peut obtenir celle-ci assez rapidement au terme du processus itératif décrit par l'algorithme de la figure 213, dans lequel on indicera par  $j$  les variables  $s$  et  $q$  (qui deviennent donc  $s_j$  et  $q_j$ ) pour pouvoir repérer la valeur prise par ces variables au cours de l'itération  $j$ . Le fondement de cet algorithme repose sur l'analyse des relations 278 et 279, dont la représentation graphique est donnée dans la figure 214, page 840. La relation 278 est une fonction monotone décroissante de  $s$  qui tend asymptotiquement vers la quantité économique de Wilson ( $I_r(s)$  varie en sens inverse de  $s$ , et lorsque  $s$  tend vers l'infini,  $I_r(s)$  tend vers zéro). On peut transformer la relation 279, pour exprimer  $q$  en fonction de  $s$ :

$$q = \frac{P(X > s) \cdot c_r \cdot D}{c_p \cdot (1 - P(X > s)/2)}$$

relation 283

ce qui est également une fonction monotone décroissante de  $s$  qui tend asymptotiquement vers zéro. Les deux courbes se coupent si la condition (peu restrictive) de la relation 284 (obtenue en remplaçant  $s$  par zéro dans les relations 278 et 279) est respectée. Cet algorithme reste valable dans le cas discret.

$$\frac{2 \cdot c_r \cdot D}{c_p} > \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (c_c + c_r \cdot L \cdot D)}{c_p}}$$

relation 284

Le point d'intersection<sup>2</sup> de ces deux courbes satisfait simultanément les relations 278 et 279, c'est-à-dire que ses coordonnées  $q$ ,  $s$  sont des solutions du système de 2 équations non linéaires à 2 inconnues, constitué par les relations 278 et 279.

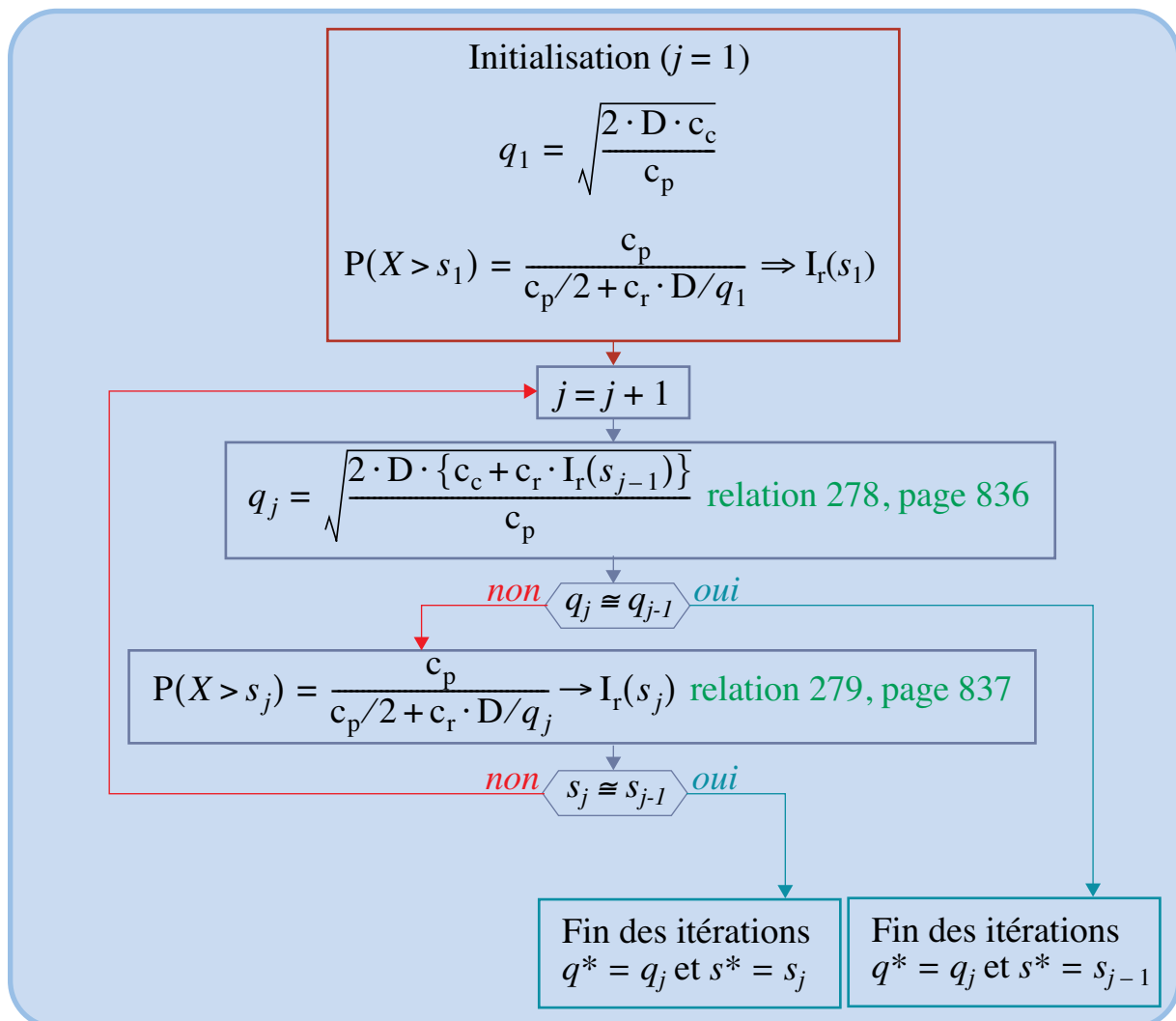
Appliquons à notre exemple numérique l'algorithme proposé. La première itération donne les résultats trouvés aux paragraphes II-1.1.2.2 (pour  $q$ , page 831) et II-1.1.2.3 (pour  $s$ , page 833), puisque nous avons vu que la première itération

1. En partant d'hypothèses de calcul légèrement différentes, Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 160 ou Johnson & Montgomery (1974, [245]) aboutissent à des relations voisines: la détermination de  $q$  est la même, mais celle de  $s$  se fait en faisant appel à la relation 148 de la page 676 du chapitre précédent et non à la relation 176 de la page 719 de ce même chapitre (les coûts de possession étant calculés sur une durée  $L$ ). La solution analytique exacte est donnée au § 4-11 du Hadley & Whitin, pour une demande suivant une loi Normale, ou de Poisson, dans le cas restrictif de point de commande unique, mais sa présentation comme sa mise en œuvre, est délicate.

2. Unique pour les distributions usuelles de probabilités (en effet, deux courbes monotones décroissantes peuvent avoir des points d'intersections multiples).

FIGURE 213

Algorithme de détermination de la solution optimale (cas des demandes perdues)



correspond à la solution approchée. On a donc (avec utilisation systématique de la correction de continuité, conformément à ce qui a été indiqué à la [page 678](#)):

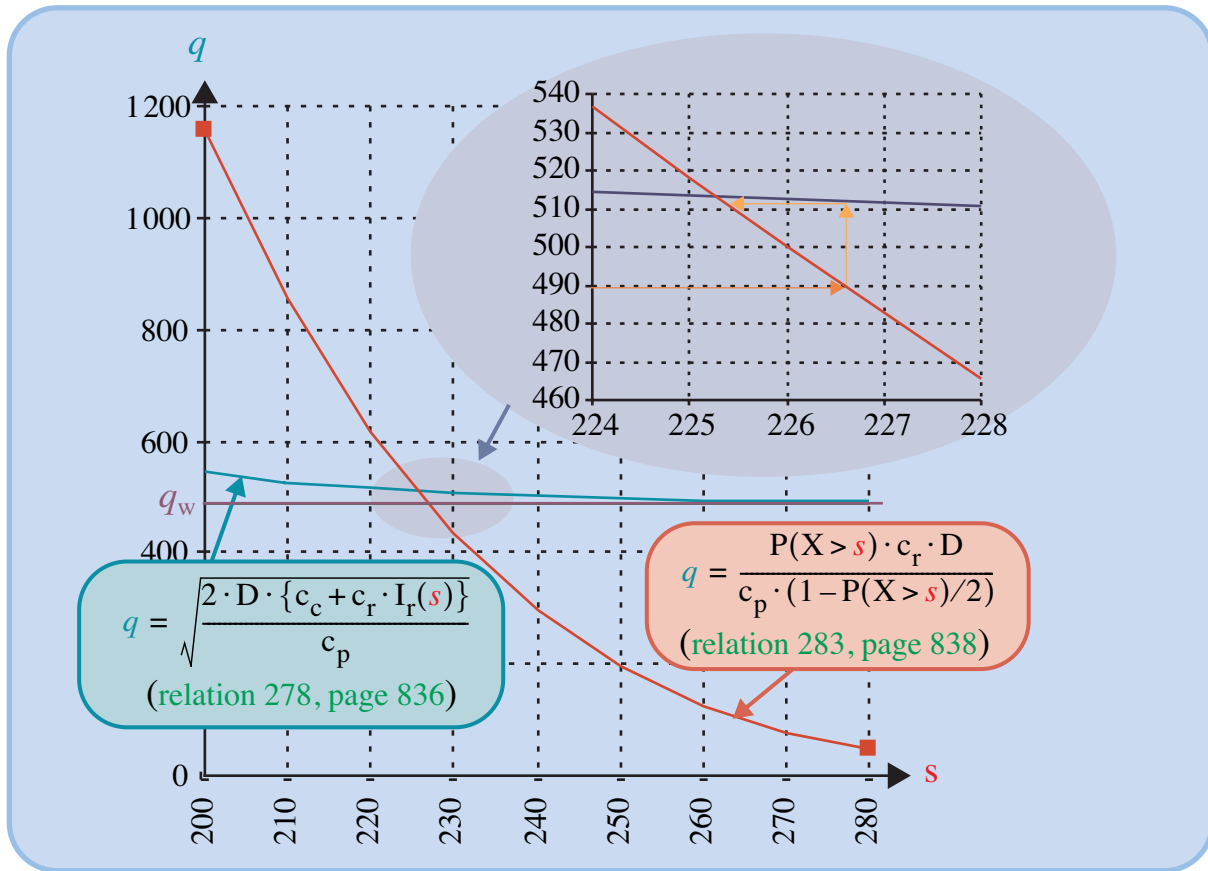
- itération  $j = 1$  :  $q_1 = 490$  ;  $P(X > s_1) = 11,54 \%$  ;  $s_1 = 227$  ;  $I_r(s_1) = 2,711$
- itération  $j = 2$  :  $q_2 = 512 \neq q_1$  ;  $P(X > s_2) = 12,03 \%$  ;  $s_2 = 225 \neq s_1$  ;  $I_r(s_2) = 2,942$
- itération  $j = 3$  :  $q_3 = 513 \neq q_2$  ;  $P(X > s_3) = 12,05 \%$  ;  $s_3 = 225 = s_2 \Rightarrow$  arrêt de l'algorithme

L'égalité de  $s_2$  et  $s_3$  met fin au processus itératif et la solution optimale est alors de commander  $q^* = 513$ , lorsque le nombre de bouilloires en stock devient inférieur ou égal à  $s^* = 225$ .

### II-1.1.3.2 Cas des demandes non satisfaites différées

Les relations 278 et 279 ne sont valables que dans le cas de ventes perdues. Dans le cas de ventes différées et de coût de rupture constant, il convient de modifier le calcul de  $I_{p2}(s, q)$  puisque la position du stock peut alors être négative (demande différée). Si l'on néglige la probabilité d'une demande supérieure à  $q$  durant le délai d'obtention (ce qui permet au stock après livraison d'être supérieur

FIGURE 214  
Application de l'algorithme de la page 839



au point de commande), il faut remplacer la relation 272 de la page 835 par la relation 285.

$$I_{p2}(s, q) = \sum_{x_L=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (2s - \bar{x}_L + q) \cdot P(X_L = x_L) \right] = s - \frac{\bar{x}_L}{2} + \frac{q}{2} \quad \text{relation 285}$$

Le stock moyen possédé devient alors en appliquant la relation 273 de la page 835, avec  $\bar{x}_L = D \cdot L$ :

$$I_p(s, q) = \frac{\bar{x}_L}{q} \cdot \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \left( 1 - \frac{\bar{x}_L}{q} \right) \cdot \left[ s - \frac{\bar{x}_L}{2} + \frac{q}{2} \right]$$

$$I_p(s, q) = (s - D \cdot L) + \frac{q}{2} + \frac{D \cdot L}{2 \cdot q} \cdot I_r(s) \quad \text{relation 286}$$

expression proche de la relation 274 de la page 836, dont elle se déduit en multipliant la rupture d'un cycle par la fraction de temps où le système est en attente de livraison.

Le coût moyen annuel de gestion devient alors:

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left( \frac{c_p \cdot L}{2} + c_r \right) \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \quad \text{relation 287}$$

qui a<sup>1</sup> pour solution optimale la [relation 288](#); les solutions optimales du cas discret ([relation 290](#)) sont immédiates et ne font qu'adapter les relations [282](#) de la [page 838](#).

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \{c_c + (c_p \cdot L/2) \cdot I_r(s^*)\}}{c_p}} \quad \text{relation 288}$$

$$P(X > s^*) = \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + c_p \cdot L/2} \quad \text{cas continu} \quad \text{relation 289}$$

$$P(X > s^*) < \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + c_p \cdot L/2} < P(X > s^* - 1)$$

$$P(X \geq s^* + 1) < \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + c_p \cdot L/2} < P(X \geq s^*)$$

$$P(X \leq s^* - 1) < \frac{c_r - c_p(q^*/D - L/2)}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X \leq s^*) \quad \text{cas discret} \quad \text{relation 290}$$

$$P(X < s^*) < \frac{c_r - c_p(q^*/D - L/2)}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X < s^* + 1)$$

Un algorithme analogue à celui utilisé de la [page 840](#), en remplaçant les relations [278](#) ([page 837](#)), [279](#) ([page 837](#)) et [282](#) ([page 838](#)) par les relations [288](#), [289](#) et [290](#), doit être utilisé pour trouver la solution numérique d'un problème donné.

### II-1.1.3.3 Cas des demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues

La situation la plus vraisemblable dans beaucoup de problèmes concrets est celle où une rupture de stock se traduit par une probabilité  $p$  de voir la demande non satisfaite différée et donc la probabilité  $(1 - p)$  de voir la demande non satisfaite perdue. On notera  $c_{rp}$  le coût de rupture en cas de demande perdue et  $c_{rd}$  le coût de rupture fixe associé à une demande différée.

Le coût moyen annuel de gestion est l'espérance mathématique des coûts moyens annuels de gestion calculés dans chaque cas de figure ([relation 277](#) de la [page 836](#) et [relation 287](#) de la [page 840](#)):

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + p \left\{ c_p \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left( \frac{c_p \cdot L}{2} + c_{rd} \right) \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \right\} \\ + (1 - p) \left\{ c_p \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left( c_{rp} \cdot \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) I_r(s) \right\}$$

1. Wagner (1975, [435]), p. 826, en partant de cette approche, aboutit exactement aux relations [278](#). On peut noter que Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 158 (ou Johnson et Montgomery, 1974, [245], p. 60) aboutissent à des relations différentes, mais en partant d'hypothèses simplificatrices plus fortes.



$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left( c_p \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left( c_{rp} \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) \right\} I_r(s)$$

relation 291

On a alors à l'optimum :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot [c_c + \{p[c_p \cdot L/2 + c_{rd}] + (1-p)c_{rp}\} \cdot I_r(s^*)]}{c_p}}$$

relation 292

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{p(D/q^*)(c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p)[c_p/2 + c_{rp} \cdot (D/q^*)]}$$

cas continu

relation 293

$$P(X > s^*) < \frac{c_p}{p(D/q^*)(c_{rd} + c_p L/2) + (1-p)[c_p/2 + c_{rp}(D/q^*)]} < P(X > s^* - 1)$$

cas discret

relation 294

Là encore, l'algorithme de la figure 214, page 840, doit être adapté : il faut remplacer les relations 278 (page 837), 279 (page 837) et 282 (page 838) par les relations 292 et 293 ou 294, doit être utilisé pour trouver la solution numérique d'un problème donné. Les relations 292 et 293 permettent de retrouver les relations 278 et 279, en posant  $p = 0$  (toute demande non satisfaite est nécessairement perdue), et les relations 288 et 289 en prenant  $p = 1$  (toute demande non satisfaite est différée).

On notera enfin que la formule générale de calcul du stock moyen possédé se calcule comme une somme pondérée des valeurs obtenues à partir de la relation 275 de la page 836 et de la relation 275 de la page 836.

$$I_p(s, q) = p \left\{ (s - D \cdot L) + \frac{q}{2} + \frac{D \cdot L}{2 \cdot q} \cdot I_r(s) \right\} + (1-p) \left\{ \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \frac{I_r(s)}{2} \right\}$$

$$I_p(s, q) = \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \left\{ p \frac{D \cdot L}{q} + (1-p) \right\} \frac{I_r(s)}{2}$$

relation 295

### II-1.1.4 Indicateurs de qualité de service

Les indicateurs de qualité de service introduits au chapitre précédent doivent être modifiés, car la gestion n'est implicitement de type calendaire, qu'une fraction d'année.

#### II-1.1.4.1 Pourcentage de demandes non satisfaites, demande moyenne annuelle satisfaite

Nous avons vu, page 839, qu'au cours d'un réapprovisionnement la rupture moyenne était de 2,94 en cas d'usage de la politique optimale en cas de demandes non satisfaites perdues, ce qui conduisait à une rupture moyenne annuelle de 2,94 ( $2400 / 513$ ) = 13,76 bouilloires. Si l'on note  $\beta_A$  et  $\beta_L$  les pourcentages de demandes non satisfaites, respectivement au cours de l'année et au cours d'un

réapprovisionnement, on a alors :  $\beta_L = \frac{I_r(s)}{D \cdot L}$  et  $\beta_A = \frac{(D/q) \cdot I_r(s)}{D} = \frac{I_r(s)}{q}$ , d'où l'on tire sans difficulté :

$$\beta_A = \frac{I_r(s)}{q} = \beta_L \cdot \frac{D \cdot L}{q}, \text{ ou encore } \beta_L = \beta_A \cdot \frac{q}{D \cdot L} \quad \text{relation 296}$$

ce qui implique que le pourcentage de demandes non satisfaites au cours d'une année est égal au pourcentage de demandes non satisfaites au cours d'un cycle que multiplie la fraction de temps où le système est en attente de livraison<sup>1</sup>.

Cette relation 296 présente un intérêt tout particulier lorsque l'on désire suivre une politique de type «q, s» utilisant la quantité économique de Wilson et garantissant un certain pourcentage de demandes non satisfaites. Une telle politique, n'est pas optimale puisqu'elle n'effectue pas un arbitrage généralisé entre coûts de possession, de commande et de rupture. Elle présente malgré tout un grand intérêt pour les articles de catégorie B de la typologie ABC<sup>2</sup> si le coût de traitement de la solution optimale ainsi que celui d'obtention des informations complémentaires (appréciation du coût de rupture et coût d'analyse du problème) est jugé prohibitif par rapport aux avantages que l'on espère en tirer. Notons dès à présent que l'on peut également utiliser dans la même optique les critères que l'on examinera dans les § II-1.1.4.2 et § II-1.1.4.3, page 844. L'utilisation systématique de ce type de critère sera abordée au § II-1.1.4.8, page 846.

Table des matières

Par exemple, si nos bouilloires électriques sont gérées de telle sorte que le pourcentage des demandes annuelles non satisfaites soit de 1 %, comme pour tous les articles de catégorie B dans laquelle se rangent nos bouilloires électriques, on aurait alors une commande  $q = 490$  et un point de commande tel que :

$$\beta_L = 0,01 \cdot \frac{490}{2400 \cdot (20/288)} = 2,94\%$$

Index thématique

ce qui implique<sup>3</sup>  $\frac{\sigma \cdot g(t_s)}{\bar{x}} = \frac{50g(t_s)}{2400(20/288)} = 2,94\% \rightarrow g(t_s) = 0,098$  d'où  $t_s = 0,913$  après lecture de la table D de la page 769, et du point de commande  $s$  tel que :

$$s = 167 + 0,913 \times 50 = 213$$

Par ailleurs, il peut être utile de connaître la demande moyenne annuelle satisfaite. Il suffit, pour calculer ce nouvel indicateur, de retrancher de la demande moyenne annuelle exprimée de la partie de la demande moyenne annuelle non satisfaite que l'on considère comme perdue :

$$D - (1 - p) \frac{D}{q} I_r(s) \quad \text{Demande moyenne annuelle satisfaite} \quad \text{relation 297}$$

1. On démontre (voir Hadley & Whitin, 1966, [212] p. 171-173) que le nombre annuel moyen de cycles est bien  $D/q$  lorsque les demandes non satisfaites sont différées, et de  $D/(q + I_r(s))$  lorsqu'elles sont perdues ; dans ce

dernier cas, on a alors en toute rigueur :  $\beta_A = \frac{D}{q + I_r(s)} \cdot \frac{I_r(s)}{D} = \frac{I_r(s)}{q + I_r(s)} = \beta_L \cdot \frac{L \cdot D}{q + I_r(s)}$ .

2. Voir chapitre X, § II-1.2.1, page 636.

3. On peut écrire directement  $g(t_s) = \beta_A \cdot q / \sigma$  ; cette relation est exacte en cas de demandes différées, mais lorsque les demandes non satisfaites sont perdues, on a, compte tenu de la note précédente :  $g(t_s) = \beta_A \cdot q / \{\sigma(1 - \beta_A)\}$ , ce qui donne numériquement dans notre exemple  $g(t_s) = 0,099$ .

Dans l'exemple numérique du § II-1.1.3.1, page 834, cet indicateur est donc égal à :  $2400 - 13,76 = 2386,24$  ( $p$  étant nul).

#### II-1.1.4.2 La notion de probabilité de rupture

La probabilité pour qu'il y ait une rupture de stock au cours d'une période  $L$  séparant la commande de la livraison est  $\alpha_L$ . La définition d'un indicateur annuel équivalent n'est pas possible, puisque chaque cycle correspond à une épreuve élémentaire, au cours de laquelle l'événement rupture se produira, ou non. Ces épreuves étant indépendantes, on est en présence d'une loi binomiale et on est en mesure de déterminer la probabilité d'avoir  $k$  ruptures de stock sur  $n$  cycles.

$$P(K = k) = C_n^k \cdot \alpha_n^k \cdot (1 - \alpha_n)^{n-k}$$

C'est donc une distribution de probabilités du nombre de ruptures de stock se produisant au cours d'une période correspondant à un multiple entier du nombre de cycles que l'on est en mesure de définir, et non une probabilité unique. Dans le cas où  $n = 5$  on aura, dans notre exemple, puisque  $\alpha_L = 0,12$  dans la solution optimale de l'exemple numérique du § II-1.1.3.1, page 834.

TABLEAU 247  
*Distribution de probabilité de  $k$  ruptures de stock au cours de 5 cycles d'approvisionnement*

Nombre $k$ de ruptures	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilité de $k$ ruptures de stock sur 5 cycles	52,773 %	35,982 %	9,813 %	1,338 %	0,091 %	0,002 %	100 %

Table des  
matières

Index  
thématique

On définira alors comme indicateur de qualité de service le nombre moyen de ruptures de stock se produisant en moyenne sur l'année, indicateur qui correspond à l'espérance mathématique de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \alpha_L)$ . On négligera ici le fait que le nombre de cycles annuels n'est pas forcément entier, afin de pouvoir comparer entre elles plusieurs politiques de gestion de stock. On notera  $\alpha_A$  cet indicateur qui sera tel que :

$$\alpha_A = \alpha_L \cdot \frac{D}{q} \quad \text{relation 298}$$

ce qui donne ici  $\alpha_A = 0,12 \times 4,9 = 0,588$  ruptures par an.

L'utilisation de la relation 135 de la page 670 (étendue au cas continu en page 674) établie au chapitre précédent permet de calculer l'espérance mathématique du stock résiduel ( $I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$ ) et conduit, après lecture de la table de la page 765, à :  $I_p(S = 213) = 213 - 167 + I_r(S = 213) = 55,39$ .

#### II-1.1.4.3 L'intervalle moyen entre deux ruptures de stock

Nous venons de voir au § II-1.1.4.2 que le nombre moyen annuel de rupture s'élevait à 0,588 / an. On peut encore exprimer le même phénomène en disant que l'intervalle moyen entre deux ruptures était  $1 / 0,588 = 1,701$  année, ce qui conduit, en moyenne à une rupture de stock tous les  $288 \times 1,701 = 490$  jours ouvrables.

Ce critère est assez parlant, et l'on peut fort bien imaginer une gestion pour des articles de la catégorie B, suivant une politique « $q, s$ » où  $q$  est déterminé à partir

de la formule de Wilson, et  $s$  à partir de la fixation d'un même intervalle moyen entre deux ruptures de stock.

Si l'on impose dans notre exemple un intervalle de deux ans, on a toujours la même quantité de commande  $q = 490$ . À l'intervalle moyen de 2 ans, correspond une valeur de  $\alpha_A$  telle que  $1 / \alpha_A = 2$  d'où :  $\alpha_A = 0,5$ . Or  $\alpha_A = 0,5 = \alpha_L \cdot \frac{D}{q} = \frac{2400}{490} \cdot \alpha_L$ . On en tire  $\alpha_L = 10,2\%$ . Le point de commande se détermine dès lors sans difficulté car après lecture d'une table normale, on sait que  $t_s = 1,2702$ , et donc que :  $s = 167 + 1,2702 \times 50 = 231$ .

#### II-1.1.4.4 Indicateur de coût moyen annuel de gestion

D'après la [relation 277](#),  $\left( C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left[ \frac{q}{2} + s - DL \right] + \left[ \frac{c_p}{2} + c_r \frac{D}{q} \right] I_r(s) \right)$ , valable en cas de demandes perdues, le coût moyen annuel de gestion de l'exemple du § II-1.1.3.1 est :

$$C(q^* = 513, s^* = 225) = 300 \frac{2400}{513} + 6 \left( \frac{513}{2} + 225 - 167 \right) + \left( \frac{6}{2} + 10 \frac{2400}{513} \right) 2,94 = 3438,97 \text{ \$/an}$$

Lorsque les demandes non satisfaites sont différées en totalité ou partiellement, le coût moyen annuel de gestion se calcule alors à partir de la [relation 287 de la page 840](#) ou de la [relation 291 de la page 842](#). Cet indicateur additionne des charges et des manques à gagner (problème déjà rencontré au chapitre précédent). C'est pourquoi, l'indicateur de la marge moyenne annuelle est nettement plus « parlant » pour un responsable d'entreprise.

#### II-1.1.4.5 Marge moyenne annuelle

L'adaptation du raisonnement conduit en univers certain à la [page 782](#), s'effectue sans difficulté. Il faut en effet retrancher à la marge brute réalisée sur la demande moyenne annuelle satisfaite, soit  $10 \times 2386,24 = 23862,40$  dollars liduriens, dans notre exemple numérique du § II-1.1.3.1, les coûts de possession et de commande. L'indicateur de coût moyen annuel de gestion comporte le manque-à-gagner associé aux demandes non satisfaites perdues. Il suffit donc de retrancher ce coût moyen annuel de gestion de la marge brute réalisée sur la demande de moyenne annuelle exprimée (et non plus satisfaite) pour obtenir la marge nette recherchée. Il s'ensuit que si le coût de rupture  $c_{rp}$  associé à une demande non satisfaite perdue est égal à la marge unitaire, on peut utiliser la [relation 299](#)<sup>1</sup> valable dans le cas général de demandes partiellement perdues :

$$B(q, s) = c_{rp} \cdot D - C(q, s) \quad \text{relation 299}$$

Dans le même ordre d'idées, si l'on désire bâtir un indicateur annuel de coût de gestion intégrant la dépense d'acquisition, il conviendra de le définir comme étant la somme de :

1. Cette relation est analogue de la [relation 154 de la page 686](#), établie au chapitre précédent pour la gestion calendaire.

- la dépense moyenne annuelle d'acquisition (qui part de la demande moyenne satisfaite et non de la demande moyenne exprimée<sup>1</sup>) égale, dans notre exemple, à 71 587 \$ liduriens ;
- du coût moyen annuel de commande égal, dans notre exemple, à 1 403,51 \$ ;
- du coût moyen annuel de possession égal, dans notre exemple, à 1 897,83 \$ ;
- et du coût moyen annuel des demandes non satisfaites différées (sans tenir compte des demandes perdues).

Ces indicateurs sont fournis, pour notre exemple numérique, dans les tableaux 248 et 249.

#### II-1.1.4.6 Taux moyen de rotation du stock

Par définition ce taux est le quotient de la demande moyenne au stock moyen possédé. Ce dernier se calcule à partir de la relation 275 de la page 836, dans le cas de demandes perdues, de la relation 275 de la page 836, dans le cas de demandes différées et de la relation 295 de la page 842, dans le cas général. Dans l'exemple numérique du § II-1.1.3.1, on a :  $I_p(q^* = 513, s^* = 225) = \frac{513}{2} + 225 - 2400 \frac{20}{288} + \frac{2,94}{2} = 316,304$ . Le taux moyen de rotation du stock est donc  $2400 / 316,304 = 7,59$ .

Il est important de remarquer d'une part que ce taux a une valeur optimale qui découle de la politique optimale, comme nous l'avons déjà souligné en univers certain, page 782. Contrairement à ce qui se passe en univers certain, il est possible qu'une politique non optimale aboutisse également à ce taux. Enfin, on peut souligner qu'il n'y a aucune raison pour que ce taux moyen de rotation du stock soit le même pour tous les articles. Cette dernière remarque implique en particulier que le jugement «comptable» d'après lequel un stock est d'autant mieux géré qu'il tourne vite, est erroné (il ne prend implicitement en compte que le coût de possession, sans tenir compte des coûts de commande et de rupture ; voir page 782).

Table des  
matières

Index  
thématique

#### II-1.1.4.7 Résumé des conséquences de la politique optimale

L'analyse des conséquences du cas des demandes perdues est fournie dans le tableau 248. L'analyse des conséquences du cas des demandes partiellement perdues et partiellement différées ( $p = 40\%$  ;  $c_{rd} = 5$  \$) est fournie dans le tableau 249 de la page 848.

#### II-1.1.4.8 Politique de gestion basée sur la notion de niveau de service

L'utilisation d'une politique optimale nécessite l'explicitation préalable de certaines données (en particulier le coût de rupture) et un traitement numérique relativement important, ce qui peut conduire à préférer, pour les articles de catégorie B ou C, l'utilisation de politiques de gestion plus faciles à mettre en œuvre, même si celles-ci ne sont pas optimales. Dans cette optique, il est fréquent de déterminer la quantité économique de commande à l'aide de la formule de Wilson, et

1. Ce qui conduit, dans les résultats numériques proposés la dépense d'acquisition est la dépense réelle. La marge annuelle est calculée à partir de la demande satisfaite et des charges décaissées.

TABLEAU 248

Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique  
(Univers aléatoire - demandes non satisfaites perdues)



Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	513	-
Point de commande	225	-
Stock de sécurité	58,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,68
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	61,6 jours
Probabilité de rupture avant livraison	12,17%	-
Rupture moyenne de stock (à 100 % perdue)	2,94	13,76
Demande moyenne satisfaite immédiatement	510,06	2 386,24
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,57%	0,57%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	505,9 jours
Stock moyen disponible avant livraison	61,28	-
Stock moyen détenu	316,30	316,30
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	7,59
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 390,00	71 587,08
Coût moyen de commande	300,00	1 403,51
Coût moyen de possession	405,66	1 897,83
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	29,42	137,64
Coût moyen des demandes différées	0,00	0,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	735,08	3 438,97
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 125,08	74 888,42
Marge nette	4 394,92	20 561,03

Table des matières

Index thématique

de calculer le point de commande à partir d'un niveau de service imposé a priori, en général le même pour toute une famille d'articles.

Illustrons cette démarche à partir d'un exemple portant sur les cinq articles du [tableau 250 de la page 848](#) qui suivent tous une loi Normale. Les quantités de commande correspondent aux quantités de Wilson et les points de commande sont déterminés, à titre d'exemple, suivant différents critères: stock de sécurité fixé arbitrairement à 30 % de la demande moyenne durant le délai d'obtention, pourcentage de demandes non satisfaites fixé pour tous les articles à une même valeur. Les résultats des calculs sont consignés dans le [tableau 251 de la page 850](#). La valorisation économique se fonde sur un taux annuel de possession de 20 % pour tous les articles. La politique optimale se traduit par une valeur annuelle d'approvisionnement manquant égale à 7318,81, ce qui correspond à 0,61 % de la valeur annuelle des approvisionnements (1 200 681,19). On peut constater sur la [figure 215](#), que si l'on impose ce niveau de service à tous les articles, le coût de gestion sera un peu plus élevé (un calcul précis montre que cette différence est de 1 622).



TABLEAU 249

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique  
(Univers aléatoire - demandes non satisfaites partiellement perdues)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	515	-
Point de commande	218	-
Stock de sécurité	51,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,66
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	61,8 jours
Probabilité de rupture avant livraison	15,23%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	3,88	18,10
Demande moyenne satisfaite immédiatement	511,12	2 381,90
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,75%	0,75%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	405,8 jours
Stock moyen disponible avant livraison	55,22	-
Stock moyen détenu	310,25	310,25
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	7,74
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 450,00	71 674,29
Coût moyen de commande	300,00	1 398,06
Coût moyen de possession	399,45	1 861,50
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	23,30	108,57
Coût moyen des demandes différées	7,77	36,19
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	730,51	3 404,32
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 180,51	74 970,03
Marge nette	4 419,49	20 595,68

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 250

Données de base de l'exemple du suivi de politiques non optimales

$i$	$\bar{x}_j^\dagger$	$\sigma_j^\dagger$	$c_{r_j}$	$c_{u_j}$	$c_{c_j}$	$L_j^\ddagger$
1	2400	189,74	10	30	300	20
2	800	200	15	45	400	15
3	1000	300	40	100	400	20
4	4000	500	60	150	300	15
5	8000	1000	30	50	300	10

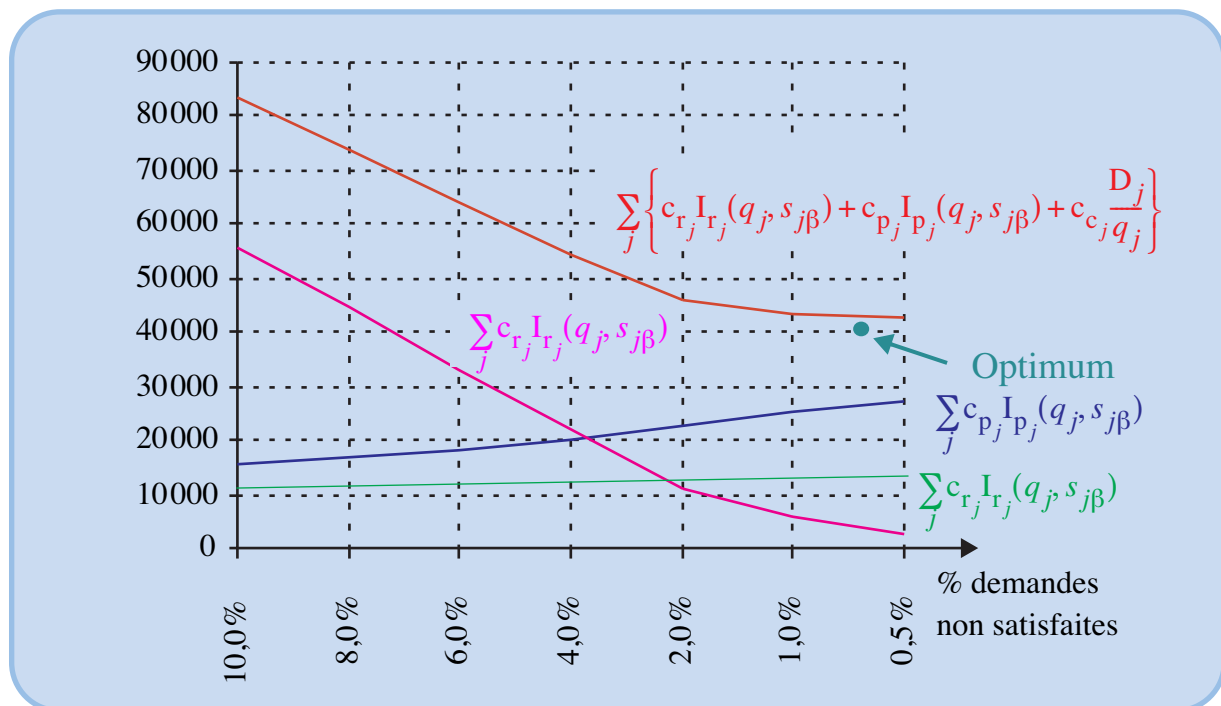
†. Données annuelles.

‡. En jours ouvrables (année de 288 jours ouvrables).

D'une manière générale, il est facile de vérifier que l'application de règles empiriques qui ne tiennent compte ni du délai d'obtention, ni de la dispersion de la demande est moins « bonne » que celles qui se basent sur la notion de niveau de



**FIGURE 215**  
Analyse globale des politiques d'approvisionnement testées



service: en règle générale, il est possible d'obtenir le niveau de performance (valeur moyenne des stocks, coût moyen de gestion annuel) des politiques empiriques avec un niveau de service nettement meilleur, ou d'atteindre le niveau de service de ces politiques empiriques avec une performance accrue (valeurs plus faibles des immobilisations ou des coûts moyens annuels de gestion).

Table des matières

Index thématique

### II-1.1.5 Détermination d'une politique optimale (q, s) sous contrainte de niveau de service

Il n'est pas rare que le responsable d'un stock assigne à celui-ci un niveau de service minimal à respecter. Le plus souvent cette contrainte porte sur le pourcentage annuel de demandes non satisfaites et le problème est alors de déterminer la politique optimale effectuant un arbitrage entre coûts de possession, de rupture et de commande, tout en respectant cette exigence d'un pourcentage  $\beta_A (= I_r(s)/q)$ , cf. [relation 296, page 843](#), inférieur ou égal à un seuil  $\beta_0$ .

Si l'on se place dans le cas des demandes non satisfaites perdues, un raisonnement analogue à celui mené au § I-2.3.1, [page 802](#), conduit à dériver le Lagrangien de la [relation 300](#), où  $C(q, s)$  est donné par la [relation 291 de la page 842](#).

$$H = C(q, s) + \lambda \left( \frac{I_r(s)}{q} - \beta_0 \right)$$

$$H = \left[ c_c \frac{D}{q} + p \left\{ c_p \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left( \frac{c_p \cdot L}{2} + c_{rd} \right) \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \right\} \right] + \lambda \{ I_r(s)/q - \beta_0 \}$$

*relation 300*

TABLEAU 251  
Analyse de différentes politiques d'approvisionnement

	$j$	$q_j$	$s_j$	$\alpha_j$	$I_{r_j}$	$\beta_j$	$I_{p_j}$	coût total annuel <sup>†</sup>
Politique optimale	1	513	225	12,17 %	2,94	0,6 %	316,30	3438,97
	2	290	81	19,44 %	4,82	1,7 %	186,74	2983,49
	3	239	165	11,34 %	4,30	1,8 %	217,21	6737,49
	4	330	408	4,01 %	1,83	0,6 %	365,58	15932,19
	5	785	839	3,21 %	2,85	0,4 %	816,26	12091,13
	$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	41 183,27
Politique imposée <sup>‡</sup>	1	490	217	15,87 %	4,09	0,8 %	297,04	3451,83
	2	267	54	39,21 %	12,44	4,7 %	152,22	3 127,72
	3	200	90	39,61 %	22,01	11,0 %	131,84	9039,58
	4	283	271	29,19 %	20,79	7,3 %	214,39	28303,20
	5	693	542	29,19 %	41,73	6,0 %	492,36	22837,16
	$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	66 759,49
Politique imposée $\beta = 0,5 \%$	1	490	230	10,29 %	2,40	0,5 %	309,46	3443,65
	2	267	110	6,67 %	1,30	0,5 %	202,66	3080,92
	3	200	216	3,23 %	0,98	0,5 %	246,57	7 128,10
	4	283	420	3,18 %	1,40	0,5 %	353,92	16044,60
	5	693	822	3,79 %	3,45	0,5 %	753,41	12 190,72
	$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	41 888,00
Politique imposée $\beta = 1 \%$	1	490	230	10,29 %	2,40	0,5 %	309,46	3443,65
	2	267	110	6,67 %	1,30	0,5 %	202,66	3080,92
	3	200	216	3,23 %	0,98	0,5 %	246,57	7 128,10
	4	283	420	3,18 %	1,40	0,5 %	353,92	16044,60
	5	693	822	3,79 %	3,45	0,5 %	753,41	12 190,72
	$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	41 888,00
Politique imposée $\beta = 5 \%$	1	490	158	56,77 %	24,22	4,9 %	248,58	4 147,02
	2	267	52	40,72 %	13,15	4,9 %	150,79	3 146,52
	3	200	130	22,04 %	9,89	4,9 %	165,89	7 295,89
	4	283	298	21,70 %	14,04	5,0 %	237,79	23 282,16
	5	693	568	25,34 %	34,52	5,0 %	515,27	20 572,06
	$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	58 443,66
Politique imposée $\beta = 10 \%$	1	490	123	80,92 %	48,60	9,9 %	225,56	5 202,94
	2	267	27	62,90 %	26,39	9,9 %	131,67	3 569,42
	3	200	96	36,82 %	19,82	9,9 %	136,53	8 693,89
	4	283	248	36,30 %	28,12	9,9 %	195,54	33 952,76
	5	693	464	41,77 %	69,09	10,0 %	428,45	31 675,46
	$\Sigma$	-	-	-	-	-	-	83 094,46

†. Coût annuel de possession + coût annuel de commande + coût annuel de rupture.

‡. Stock de sécurité = 30 % de la demande moyenne durant le délai d'obtention.

La dérivée de  $H$  par rapport à  $q$  et  $s$ , compte tenu de ce qui a été vu pour les dérivées de  $C(q, s)$  par rapport à  $q$  et  $s$ , est :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{c_p}{2} - [c_c + c_r \cdot I_r(s)] \cdot \frac{D}{q^2} - \frac{\lambda \cdot I_r(s)}{q^2} = 0$$

d'où

Table des  
matières

Index  
thématique

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot [D \cdot \{c_r \cdot I_r(s) + c_c\} + \lambda \cdot I_r(s^*)]}{c_p}} \quad \text{relation 301}$$

Par ailleurs on doit avoir à l'optimum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s} &= c_p - \left[ \frac{c_p}{2} + c_r \cdot \frac{D}{q} \right] \cdot \frac{\partial I_r(s)}{\partial s} - \frac{\lambda}{q} \cdot \frac{\partial I_r(s)}{\partial s} \\ \frac{\partial H}{\partial s} &= c_p - \left[ \frac{c_p}{2} + \frac{c_r \cdot D}{q} + \frac{\lambda}{q} \right] \cdot [-P(X > s)] = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^* + \lambda/q^*} \quad \text{relation 302}$$

Le même raisonnement, dans le cas de demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues (cf. § II-1.1.3.3, page 841) conduit aux relations générales suivantes<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} q^* &= \sqrt{\frac{D \cdot [c_c + \{p \cdot (c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p) \cdot c_{rp}\} I_r(s^*)] + \lambda \cdot I_r(s^*)}{c_p/2}} \\ P(X > s^*) &= \frac{c_p}{p(D/q^*)(c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p)(c_p/2 + c_{rp} \cdot D/q^*) + \lambda/q^*} \end{aligned} \quad \text{relations 303}$$

La dérivée de  $H$  par rapport à  $\lambda$ , nulle à l'optimum conduit à satisfaire la relation 304 :

$$I_r(s^*) = q^* \cdot \beta_0 \quad \text{relation 304}$$

Illustrons l'application de ces relations dans le cadre de demandes non satisfaites différées à 40%, en supposant que le responsable de l'approvisionnement impose à la politique optimale un pourcentage de demandes annuelles non satisfaites inférieur ou égal à 0,3 %, valeur inférieure au  $\beta = 0,57\%$  trouvé à l'optimum sans contrainte (tableau 248, page 847). Si le pourcentage demandé est supérieur à celui de la solution optimale sans contrainte, on conserve cette dernière qui fournit simultanément un meilleur niveau de service et une meilleure marge.

Sur le plan de la résolution numérique, il y a normalement lieu de combiner l'algorithme de la page 809 et celui de la page 839, en utilisant les relations qui viennent d'être établies, mais la recherche de l'optimum est plus rapide si l'on part d'une solution initiale obtenue comme suit :

- **Étape 1** : calculer  $q$  et  $s$  en prenant  $\lambda = 0$  (solution optimale sans contrainte), ce qui donne  $q = 515$  et  $s = 218$ .
- **Étape 2** : calculer  $s$  tel que  $I_r(s)/q = \beta_0$  en utilisant la valeur de  $q$  trouvée, ce qui donne dans notre exemple  $1,545 = \sigma \cdot g(t_s) = 50 \cdot g(t_s)$ , d'où l'on tire  $s = 241$  et  $\alpha(s) = 6,86\%$ .

1. La seconde de ces relations pouvant encore s'écrire  $\lambda = \frac{c_p q^*}{P(X > s^*)} - (D[p(c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p)c_{rp}] + (1-p)(q^* c_p/2))$ .

- **Étape 3**: calculer la valeur de  $\lambda$  à partir de la **relation 301** :  $\lambda = 25862$ .
- **Étape 4**: calculer la valeur de  $q$  en utilisant la **relation 301**:  $q = 512$ .
- **Étape 5**: si cette valeur de  $q$  est identique à celle précédemment calculée et qu'il en est de même pour celle de  $s$ , la solution optimale est trouvée, dans le cas contraire, il faut revenir à l'étape 2. Le caractère entier de ces variables conduit normalement à une solution rapide (ici en 5 itérations) et à ne pas porter une attention excessive à la précision de  $\lambda$  (ici 27130).

L'application de cet algorithme conduit aux résultats du **tableau 252**.



TABLEAU 252

*Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique  
(Univers aléatoire - demandes non satisfaites perdues)  
Sous contrainte de niveau de service  $\beta_A = 0,3\%$*

<b>Politique non optimale d'approvisionnement (%DNS imposé) des bouilloires électriques</b>		
<b>Conséquences physiques</b>	<b>Par cycle de réapprovisionnement</b>	<b>Par an</b>
<b>Quantité de commande</b>	<b>514</b>	-
<b>Point de commande</b>	<b>241</b>	-
Stock de sécurité	74,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,67
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	61,7 jours
Probabilité de rupture avant livraison	6,86%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	1,48	6,89
Demande moyenne satisfaite immédiatement	512,52	2 393,11
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,29%	0,29%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	899,8 jours
Stock moyen disponible avant livraison	75,81	-
Stock moyen détenu	331,87	331,87
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	7,23
<b>Conséquences financières</b>		
Dépense moyenne d'acquisition	15 420,00	71 875,92
Coût moyen de commande	300,00	1 400,78
Coût moyen de possession	426,46	1 991,23
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	8,86	41,37
Coût moyen des demandes différées	2,95	13,79
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	738,27	3 447,16
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 158,27	75 281,72
Marge nette	4 401,73	20 552,84
	Lambda = 27130	

Table des matières

Index thématique

Sur le plan de l'interprétation économique des résultats, le rapport  $\lambda / D / (1-p)$  s'analyse, dans le cas de ventes perdues, comme l'accroissement du coût de rupture aboutissant à une valeur de  $c_r$  qui donnerait la même solution optimale ( $q = 515$ ,  $s = 218$ ,  $\beta = 0,3\%$ ) en l'absence de toute contrainte de niveau de service. Cette pénalité, à ajouter à la marge non réalisée du fait de la non satisfaction d'une

demande, est ici de  $27\,130 / 2\,400 / 0,6 \approx 19$  dollars liduriens ; elle s'interprète comme une espérance mathématique de perte de Goodwill<sup>1</sup> (qui peut inclure du reste la marge non réalisée sur d'autres articles, à la suite du mécontentement du client, qui n'effectue pas ses autres achats dans le magasin).

### II-1.1.6 Cas des points de commande multiples

L'analyse des politiques du type «point de commande-quantité économique de commande» en univers aléatoire que l'on examine dans cette section repose sur l'hypothèse implicite que l'on ne se trouve pas dans le cas de points de commande multiples, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais plus d'une commande en attente de livraison. Il n'en est pas toujours ainsi, en particulier si les coûts de commande sont relativement faibles ou si les délais d'obtention sont importants. D'un point de vue analytique, on ne rencontre pas trop de difficulté si les demandes non satisfaites sont différées ; il n'en est malheureusement pas de même si ces demandes sont perdues. Si vous utilisez le logiciel, vérifiez bien que vous ne vous trouvez pas dans ce cas de figure qui invalide les résultats trouvés. Examinons cependant les approches disponibles.

#### II-1.1.6.1 Cas des demandes non satisfaites différées

Il suffit alors de déclencher une commande lorsque la position de stock (et non le stock disponible) franchit le point de commande  $s$ . L'étude de la solution analytique exacte<sup>2</sup> montre, si la demande  $X$  durant le délai d'obtention suit la loi Normale ou une loi de Poisson, qu'il faut ajouter au coût moyen annuel de gestion  $C(q, s)$  de la relation 287 de la page 840, la quantité  $G = H - c_p I_r(s) / 2$ , avec :

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\bar{x}) \rightarrow H = c_p(0,5 + K(s)/q)$ , où

$$K(s) = \frac{\bar{x}^2}{2} P(X \geq s-1) - s \cdot \bar{x} \cdot P(X \geq s) + \frac{s(s+1)}{2} \cdot P(X \geq s)$$

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma) \rightarrow H = c_p \cdot K(s)/q$ , où

$$K(s) = \sigma \cdot t_s \cdot \left[ \left( t_s + \frac{1}{t_s} \right) \cdot \sigma \cdot P(X > s) - f(t_s) \right]$$

Si la quantité  $G$  est relativement faible par rapport à  $C(q, s)$  obtenu à l'optimum (disons moins de 1 %) on gardera la solution trouvée, sinon on utilisera la solution optimale<sup>3</sup> définie par les pages 305, qui doivent être utilisées avec un algorithme voisin de celui de la page 840.

1. Un raisonnement similaire a été conduit au chapitre précédent à la page 679

2. Adaptée des relations 4-72, 4-73, 4-89 et 4-90 de Hadley et Whitin (1966, [212]), on peut noter que cette solution analytique ne repose pas sur l'hypothèse simplificatrice.

3. Optimale si  $K(s^* + q^*) \approx 0$ , ce qui est pratiquement toujours vérifié.

$$q^* = \sqrt{\frac{2D}{c_p}(c_c + c_r \cdot I_r(s)) + 2 \cdot K(s^*)} \text{ avec } K(s) :$$

- $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P} : K(s) = \frac{\bar{x}^2}{2} P(X \geq s-1) - s \cdot \bar{x} \cdot P(X \geq s) + \frac{s(s+1)}{2} \cdot P(X \geq s)$
- $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N} : K(s) = \sigma \cdot t_s \cdot \left[ \left( t_s + \frac{1}{t_s} \right) \cdot \sigma \cdot P(X > s) - f(t_s) \right]$

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{P} \Rightarrow s^* = s \text{ maximal tel que :}$

$$[Dc_r - c_p(s - \bar{x})]P(X \geq s) + c_p P(X = s) > q^* c_p$$

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N} \Rightarrow s^* \text{ tel que :}$

$$[D \cdot c_r - c_p(s^* - \bar{x})]P(X > s^*) + c_p \cdot \sigma \cdot f(t_s) = q^* \cdot c_p$$

relations 305

### II-1.1.6.2 Cas des demandes non satisfaites perdues

Comme nous l'avons vu au chapitre XI (§ II-2.2, page 739), le cas des demandes perdues est plus difficile à traiter correctement du fait de la non indépendance entre les différentes périodes. Lorsque la quantité économique de commande est supérieure au point de commande, le système-stock n'est pas toujours en attente de livraison et les périodes durant lesquelles on attend une livraison ne se chevauchent pas. L'étude analytique des points de commande multiples en univers aléatoire dépasse le propos introductif que l'on s'est fixé ici.

## II-1.2 Politique optimale « $q, s$ » avec demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire

Ce problème sera analysé, comme d'habitude, à partir d'un exemple numérique (§ II-1.2.1), celui-ci nous mènera à rechercher la probabilité de rupture lorsque le délai d'obtention est aléatoire (§ II-1.2.2, page 856), mais les implications sur le plan du calcul numérique sont telles que l'on est conduit à faire l'étude analytique de la loi de demande sur le délai d'obtention aléatoire (§ II-1.2.3, page 858). On examinera enfin (§ II-1.2.4, page 859) la politique optimale découlant de la recherche de la minimisation du coût de gestion comportant comme au § II-1.1, des coûts de commande, de rupture, et de possession.

### II-1.2.1 Exemple introductif

Reprenons le problème de nos bouilloires électriques et supposons maintenant que le fabricant ne soit pas techniquement en mesure de garantir un délai de livraison : le délai d'obtention  $L$  sera désormais variable et non égal à 20 jours. On supposera que les autres données du problème restent inchangées.

La recherche d'une politique optimale « $q, s$ » ne pourra alors se faire qu'à condition de connaître une distribution de probabilités de ce délai d'obtention  $L$ . Pour ce faire, deux méthodes sont a priori envisageables et c'est la seconde que nous utiliserons ici.

- *Estimation sur le passé de la distribution de probabilités du délai d'obtention*  
Pour pouvoir procéder ainsi, il faudra disposer d'informations suffisantes, c'est-à-dire, d'une part que le nombre de livraisons (et donc de délais d'obtention observables) soit assez important pour pouvoir induire une distribution théorique à partir des observations et, d'autre part, que les informations pertinentes aient été enregistrées. Ces deux conditions sont peu souvent remplies simultanément, et lorsqu'elles le sont, il convient de veiller tout particulièrement à ce que les différentes observations soient comparables. En effet, l'hypothèse du «toutes choses égales par ailleurs» est indispensable pour postuler que la chronique observée correspond bien à une série de réalisations d'une même variable aléatoire. Cette condition draconienne risque de rendre nécessaire l'amputation d'une partie ancienne de la chronique, et dès lors d'empêcher toute induction statistique «sérieuse».

- *Estimation subjective de la distribution de probabilité du délai d'obtention*  
Deux méthodes sont habituellement proposées :

- La première utilise le dire d'expert et privilégie des distributions théoriques continues de probabilités comme la loi Triangulaire ou la loi Bêta<sup>1</sup> qui permettent de reconstituer la distribution à partir de trois informations recueillies auprès des responsables techniques : la durée minimale, la durée maximale et la durée la plus probable (c'est-à-dire le mode). Le recueil de données est facile à mettre en œuvre, mais, en contrepartie, la distribution continue du délai d'obtention ne permet, à quelques rares exceptions, que d'utiliser une approche simulatoire, ce qui crée des difficultés de calcul dans la recherche numérique de la solution optimale<sup>2</sup>.
- La seconde méthode d'estimation de la distribution de probabilités empiriques. Elle consiste à poser une série de questions du type «donnez la probabilité pour que le délai d'obtention soit inférieur à n jours (ou semaines, ou...)» pour différentes valeurs croissantes de n. Reprenons l'exemple des bouilloires électriques et supposons que l'application d'une telle procédure ait donné les réponses suivantes :
  - . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 5 jours = 0 %
  - . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 15 jours = 20 %
  - . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 25 jours = 70 %
  - . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 35 jours = 100 %

On tire alors sans difficulté de cette fonction de répartition, en prenant par exemple comme unité de temps la dizaine de jours ouvrables :

$$P(L < 0,5) = 0 ; P(L < 1,5) = 0,2 ; P(L < 2,5) = 0,7 ; P(L < 3,5) = 1$$

Lorsque cette technique est utilisée à des fins de simulation, seule la fonction de répartition présente un intérêt ; mais ici c'est la distribution de probabilités qui importe. Si l'on affecte au centre de classe la probabilité

1. Pour une présentation de ces distributions par exemple Giard (1995, [182]), chapitre III, §II.3 et, pour une présentation succincte des approches simulatoires, voir le chapitre II, §II.2. L'usage de la loi Bêta a été évoqué en ordonnancement de projet, [page 325](#).

2. La recherche de la solution optimale peut s'effectuer à l'aide d'algorithmes génétiques (voir [chapitre III, page 196](#)), mais les temps de calcul rendent cette approche difficile d'application pour un grand nombre d'articles.



de la classe, on obtient alors la distribution suivante:  $P(L = 1) = 0,2$  ;  $P(L = 2) = 0,5$  ;  $P(L = 3) = 0,3$ .

### II-1.2.2 Probabilité de rupture et délai d'obtention aléatoire

Le problème posé est celui du calcul de la probabilité de rupture  $\alpha$  encourue avec un point de commande  $s$ , que l'on prendra égale à 272 à titre d'exemple. Pour calculer  $\alpha$  il faut tout d'abord introduire la distribution conditionnelle de la demande, puis utiliser les théorèmes classiques de probabilité.

#### II-1.2.2.1 La notion de distribution conditionnelle de la demande

La détermination de la loi de demande pour chacun des délais d'obtention s'effectue sans difficulté dans notre exemple numérique si l'on tient compte, d'une part du fait que la loi de la demande annuelle est une loi Normale de moyenne 2400 et d'écart-type 189,74 et, d'autre part, des deux propriétés classiques suivantes:

- Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi Normale, la variable aléatoire

$$Y = \sum_{k=1}^K X \text{ suit elle-même une loi Normale.}$$

- La moyenne et la variance de cette variable  $Y$  se déduisent de la moyenne et de la variance de  $X$  par une simple multiplication par le nombre  $K^1$ .

On a donc:

- pour  $L = 1$ :  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot 10/288; 189,74 \cdot \sqrt{10/288}) = \mathcal{N}(83,3, 35,4)$
- pour  $L = 2$ :  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot 20/288; 189,74 \cdot \sqrt{20/288}) = \mathcal{N}(166,7, 50)$
- pour  $L = 3$ :  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot 30/288; 189,74 \cdot \sqrt{30/288}) = \mathcal{N}(250, 61,2)$

et d'une façon générale:

- pour  $L = l$ :  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot l; 189,74 \cdot \sqrt{l})$

Ces différentes distributions de probabilités sont spécifiques du délai d'obtention  $d$ ; pour bien les différencier, on utilisera les notations des probabilités conditionnelles  $\mathcal{L}(X / L = l) = \mathcal{N}(2400 \cdot l; 189,74 \cdot \sqrt{l})$ , d'où:

$$P(X > x_0 / L = l) = \frac{1}{(189,74 \cdot \sqrt{l})\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-2400 \cdot l}{189,74 \cdot \sqrt{l}}\right)^2 / 2} dx$$

#### II-1.2.2.2 Utilisation des théorèmes classiques de probabilité

Dans notre exemple, la durée d'obtention  $L$  est une variable aléatoire définie par la distribution de probabilités suivante:  $P(L = 1) = 0,2$  ;  $P(L = 2) = 0,5$  ;  $P(L = 3) = 0,3$ . La fonction de répartition de la demande sur cette durée aléatoire s'obtient sans difficulté en utilisant le théorème des probabilités totales dans le cas d'événements exclusifs:

1. Il ne s'agit pas de la multiplication d'une variable aléatoire  $X$  par une constante  $K$  (auquel cas, la variance de  $Y$  aurait dû être multipliée par  $K^2$ ), mais bien d'un problème de somme de variables aléatoires indépendantes (et même plus précisément d'un problème qualifié de «convolution» par les statisticiens).

$$P(X < x) = P[(X < x \text{ et } L = 1) \text{ ou } (X < x \text{ et } L = 2) \text{ ou } (X < x \text{ et } L = 3)]$$

La probabilité d'avoir  $X < x$  en sachant que le délai d'obtention est  $L = 1$  se calcule sans problème en utilisant le théorème de probabilités composées dans le cas d'indépendance :  $P(X < x \text{ et } L = 1) = P(L = 1) \cdot P(X < x / L = 1)$ . On peut donc écrire :  $P(X < x) = P(L = 1) \cdot P(X < x / L = 1) + P(L = 2) \cdot P(X < x / L = 2) + P(L = 3) \cdot P(X < x / L = 3)$  et si l'on s'intéresse à la probabilité de rupture  $\alpha$ , c'est-à-dire à la probabilité complémentaire à 1 de la fonction de répartition, on a :

$$\alpha = 1 - P(X < x) = P(X > x) = P(L = 1) \cdot P(X > x / L = 1) + P(L = 2) \cdot P(X > x / L = 2) + P(L = 3) \cdot P(X > x / L = 3)$$

Pour le point de commande  $s = 272$ , la probabilité de rupture  $\alpha$  est :

$$\alpha = P(X > 272) = \frac{0,2}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \int_{272}^{\infty} e^{-\frac{[(x-83,3)/35,4]^2}{2}} dx + \frac{0,5}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \int_{272}^{\infty} e^{-\frac{[(x-166,7)/50]^2}{2}} dx + \frac{0,3}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \int_{272}^{\infty} e^{-\frac{[(x-250)/61,2]^2}{2}} dx$$

Ce qui donne dans notre exemple numérique :

$$\left. \begin{aligned} P(X > 272 / D = 1) &= P(T > (272 - 83,3)/35,4) = 0 \% \\ P(X > 272 / D = 2) &= P(T > (272 - 166,7)/50) = 1,69 \% \\ P(X > 272 / D = 3) &= P(T > (272 - 250)/61,2) = 35,48 \% \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1,69 + 0,3 \cdot 35,48 = 11,49 \%$$

En définitive la probabilité de rupture ainsi calculée n'est autre que l'espérance mathématique des probabilités de rupture calculées pour les différents délais d'obtention.

### II-1.2.2.3 Généralisation

La fonction de répartition de la demande pendant un délai d'obtention aléatoire (ou, ce qui revient au même, la probabilité de rupture pour un délai d'obtention aléatoire) s'obtient sans difficulté en généralisant la démarche précédente. Si le délai d'obtention  $D$  est une variable aléatoire discrète définie entre les bornes  $l_1$  et  $l_2$ , on a :

$$P(X < x) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L = l) \cdot P(X < x / L = l) \quad \text{relation 306}$$

ce qui peut encore s'écrire si la loi de la demande est continue, sa densité de probabilité (conditionnelle) étant notée  $f(x, d)$  :

$$P(X < x) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L = l) \cdot \int_{-\infty}^x f(x, d) dx \quad \text{relation 307}$$

Si le calcul direct est envisageable lorsque la loi du délai d'obtention est discrète, il est nettement plus délicat à mener lorsque cette dernière est continue (utilisation d'une loi Bêta par exemple). On est en effet, alors, dans l'obligation, sauf résultat analytique particulier (voir ci-après), de procéder à une double intégration ce qui nécessite un recours presque obligé à l'informatique pour résoudre numériquement des problèmes répétitifs. Si l'on note  $g(l)$  la densité de probabilité du délai d'obtention, la transposition au cas continu de ce que l'on vient de voir

est:  $P(X < x) = \int_{l_1}^{l_2} \{g(l) \cdot P(X < x/l)\} dl$  et si la loi de la demande est elle-même continue, on a alors:  $P(X < x) = \int_{l_1}^{l_2} \left( g(l) \cdot \int_{-\infty}^x (f(x, t) \cdot dx) \right) dl$ .

Ces doubles sommations ou doubles intégrations ne sont pas de nature à faciliter la recherche d'une solution numérique à un problème posé. Aussi cherchera-t-on, dans la mesure du possible, la primitive de telles expressions<sup>1</sup>. Ceci nous conduit à l'étude analytique de la loi de demande de  $X$  sur un délai d'obtention aléatoire  $L$ .

### II-1.2.3 Etude analytique de la loi de demande $X_L$ sur un délai aléatoire $L$

Peu de résultats analytiques simplifiant la formule de la loi de demande  $X_L$  sur un délai d'obtention aléatoire  $L$ , par suppression d'au moins une sommation ou une intégration, sont connus. Par contre il est facile de calculer la moyenne et la variance de  $X_L$  à partir de celles de la demande annuelle et de celles du délai d'obtention.

#### II-1.2.3.1 Exemple de simplification de la formulation analytique de la loi de $X_L$

Le principal résultat analytique<sup>2</sup> connu est relatif à la combinaison de loi de demande de Poisson et d'un délai d'obtention suivant une loi gamma:

- La loi de demande annuelle est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , la loi de demande durant le délai d'obtention  $L$  est alors:

$$P(X = x / L = l) = e^{-\lambda l} \cdot \frac{[\lambda l]^x}{x!}$$

- La densité de probabilité  $g(l)$  du délai d'obtention aléatoire  $l$  est une loi Gamma<sup>3</sup> dont l'expression analytique est:

$$g(l) = \frac{\beta(\beta \cdot L)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta \cdot l}, \text{ avec } \begin{cases} \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \text{ si } \alpha \text{ entier} \\ \alpha > 0 ; \beta > 0 ; L > 0 \end{cases}$$

cette loi Gamma, dont la loi exponentielle est un cas particulier ( $\alpha = 1$ ), couvre avec les différentes combinaisons possibles de  $\alpha$  et  $\beta$  les principales distributions empiriquement observables.

- La loi de demande  $x_l$  durant le délai d'obtention aléatoire  $l$  suit alors une loi Binomiale négative<sup>4</sup>:

$$P(X_l = x_l) = \frac{\Gamma(\alpha + x_l)}{x_l! \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \left( \frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^{x_l} \quad \text{relation 308}$$

1. De nos jours, la solution numérique peut être obtenue très rapidement sur tableur avec un add-in de type @Risk qui permet de construire par simulation (méthode de Monte-Carlo ou celle des hyper-cubes latins) des « combinaisons » de distributions, rapidement et avec une bonne précision.

2. Voir Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 109 et s.

3. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chap. III, § II-3.4.

4. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chap. III, § I-3.1.

**Exemple :** les ventes hebdomadaires d'une chemise classique blanche de taille 42 dans un grand magasin est approximable par une loi de Poisson de moyenne 10. Si le délai d'obtention suit une loi exponentielle de paramètre  $\beta = 0,5$  (ce qui revient à dire que le délai moyen d'obtention est de 2 semaines), on a alors  $P(L < l) = 1 - e^{-0,5l}$ , ce qui donne, par exemple, pour  $l = 6$  semaines :  $P(L < 6) = 1 - e^{-0,5 \cdot 6}$ . La probabilité d'observer une demande strictement égale à 15, par exemple, est alors ( $\alpha = 1$ , cf. supra) :

$$P(X = 15) = \frac{\Gamma(1+15)}{15! \cdot \Gamma(1)} \left( \frac{0,5}{0,5+10} \right)^1 \left( \frac{10}{0,5+10} \right)^{15} = \frac{15!}{15! \cdot 1!} \frac{0,5}{10,5} \left( \frac{10}{10,5} \right)^{15} = 0,0229$$

### II-1.2.3.2 Moyenne et variance de $X_L$

Si la recherche d'une formulation analytique simplifiée de la loi de demande sur délai d'obtention donne peu de résultats, la démarche suivie (basée sur l'étude des fonctions génératrices) permet<sup>1</sup> de calculer sans difficulté la moyenne  $E(X_L)$  de la demande sur délai d'obtention aléatoire  $L$  à partir de la moyenne  $E(X_1)$  de la demande sur la période de référence ainsi que de la moyenne  $E(L)$  du délai d'obtention aléatoire :

$$E(X_L) = E(X_1) \cdot E(L) \quad \text{relation 309}$$

La variance  $V(X_L)$  de la demande sur le délai d'obtention aléatoire  $L$  se calcule à l'aide de  $E(X_1)$  et  $E(L)$ , ainsi que la variance  $V(L)$  du délai d'obtention et celle  $V(X_1)$  de la demande sur la période de référence :

$$V(X_L) = E(L) \cdot V(X_1) + [E(X_1)]^2 \cdot V(L) \quad \text{relation 310}$$

Cette relation 310, notons-le au passage, ne fait pas jouer un rôle symétrique aux moyennes.

**Exemple 1.** Reprenons l'exemple des ventes de chemises et rappelons que pour la loi de Poisson et pour la loi exponentielle, la moyenne est égale à la variance :  $E(X_L) = 10 \cdot 0,5 = 5$  et  $V(X_L) = 0,5 \cdot 10 + 10^2 \cdot 0,5 = 55$ .

**Exemple 2.** Dans le cas des bouilloires électriques, notre exemple numérique donne :  $E(L) = 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3 = 2,1$ , soit 21 jours (la période de référence étant de 10 jours ouvrables) et  $V(L) = 0,2 \cdot 1^2 + 0,5 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 3^2 - 2,1^2 = 0,49$ , ce qui correspond à un écart-type de 7 jours. La demande  $X_1$  définie sur une période unitaire de 10 jours ouvrables suit (voir page 856) la loi  $\mathcal{N}(83,3; 35,4)$ . On a donc :  $E(X_L) = 2,1 \cdot 83,33 = 175$  et  $V(X_L) = 2,1 \cdot 35,4^2 + 83,33^2 \cdot 0,49 = 6027,79$  d'où  $\sigma_{X_L} = 77,64$ . On peut vérifier numériquement à partir de ces données que la loi suivie par  $X_D$  ne saurait être une loi Normale, dans ce cas, en effet, on aurait :  $P(X > 272) = P(T > (272 - 175)/77,64) = 0,106$  or, cette probabilité de rupture de 10,6% diffère sensiblement du 11,49% trouvé précédemment et qui correspond au risque de rupture réellement encouru dans l'exemple étudié.

### II-1.2.4 Minimisation de l'indicateur du coût moyen annuel avec demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire

On examinera tout d'abord la formulation analytique du problème posé (cas des demandes perdues, le cas des demandes différées étant plus compliqué) et sa solu-

1. Voir par exemple Hadley et Whitin (1966, [212]) p. 145 (problème 3-8) et 147 (problème 3-12).

tion, puis on reviendra sur notre exemple numérique pour en trouver la solution optimale, ce qui nécessitera d'être en mesure de calculer la valeur du point de commande correspondant à une probabilité de rupture imposée.

#### II-1.2.4.1 Formulation analytique du problème posé

Que le délai d'obtention soit certain ou aléatoire, le coût annuel de gestion reste:  $C(q, s) = c_c \cdot I_c(q) + c_p \cdot I_p(s, q) + c_r \cdot I_r(s)$ , seul change le calcul de l'espérance mathématique du stock moyen possédé et de la rupture moyenne.

La rupture moyenne  $I_r(s)$  est tout simplement l'espérance mathématique des ruptures moyennes  $I_{r_l}(s)$  calculées pour chaque délai d'obtention  $l$ .

$$I_r(s) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L=l) \cdot I_{r_l}(s) \quad \text{relation 311}$$

La relation 275 de la page 836 définissant le stock moyen possédé dans le cas général devient de même (en notant  $\bar{l}$  le délai moyen d'obtention) :

$$I_p(s, q) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L=l) \cdot \left\{ \frac{q}{2} + (s - D \cdot \bar{l}) + \frac{I_{r_l}(s)}{2} \right\}$$

$$I_p(s, q) = \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \frac{I_r(s)}{2} \quad \text{relation 312}$$

En définitive, le coût annuel de gestion reste celui défini dans la relation 277 de la page 836, avec simplement un calcul différent de la rupture moyenne par cycle et en remplaçant la durée certaine  $L$  par son espérance mathématique  $\bar{l}$  :

$$C(q, s) = c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot \bar{l} \right) + \left( c_r \cdot \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) I_r(s) \quad \text{relation 313}$$

À l'optimum, la relation 278 de la page 836 reste donc toujours valable (mais le calcul de la rupture moyenne est plus long) :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \{c_c + c_r \cdot I_r(s^*)\}}{c_p}} \quad \text{relation 278}$$

La relation 279 de la page 837 et les relations 282 (page 838) ne subissent qu'une transformation mineure liée au fait que la probabilité de rupture  $\alpha$  est l'espérance mathématique des probabilités de rupture définies pour chaque délai d'obtention.

$$\alpha = P(X > s^*) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L=l) \cdot P(X > s^* / L=l) = \frac{c_p}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} \quad \text{relation 314}$$

La recherche d'une solution numérique passe donc par l'utilisation de la démarche itérative décrite par l'algorithme de la page 840. Lorsque le délai d'obtention était certain, il suffisait de consulter une table statistique pour trouver immédiatement la valeur de  $s$  correspondant à une probabilité de rupture donnée. Il n'est plus possible de procéder aussi simplement maintenant, à moins de constituer une table spécifique pour le problème posé. Lorsque le délai d'obtention est une variable aléatoire discrète susceptible de prendre un nombre restreint de

valeurs (ce qui est le cas de notre exemple numérique) il n'est pas nécessaire de procéder à cette tabulation, comme nous allons le voir maintenant.

#### II-1.2.4.2 Recherche du point de commande correspondant à une probabilité de rupture imposée

Notons tout d'abord que ce problème ( $\alpha \rightarrow s$ ) est symétrique de celui abordé au § II-1.2.2.3, page 857 ( $s \rightarrow \alpha$ ). Supposons que l'on recherche la valeur de  $s$  correspondant à une probabilité de rupture de 11,54%. Nous avons vu à la page 859 que la moyenne et l'écart-type de  $X_L$  étaient respectivement 175 et 77,64. À partir de ces informations et d'une relation dérivée de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on peut mettre au point un algorithme de calcul assez performant pour pouvoir envisager de résoudre numériquement cette classe de problèmes.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff<sup>1</sup> nous enseigne que pour une variable quelconque de moyenne  $\bar{x}$  et d'écart-type  $\sigma$ , la relation suivante est toujours vérifiée :  $P(\bar{x} - t \cdot \sigma \leq X \leq \bar{x} + t \cdot \sigma) > 1 - 1/t^2$ . On en tire a fortiori que  $P(X > \bar{x} + t \cdot \sigma) < 1/t^2$ . Donc, pour un risque de rupture donné  $\alpha$  (avec  $\alpha < 50\%$ ), la valeur limite de  $X$  correspondant à cette probabilité de rupture est nécessairement inférieure à  $\bar{x} + \sigma/\sqrt{\alpha}$ . Par exemple si l'on cherche la valeur du stock  $s$  ayant une probabilité de rupture égale à 11,54%, et si la loi de demande a une moyenne de 175 et un écart-type de 77,54, cette valeur est nécessairement inférieure à  $175 + 77,54/\sqrt{0,1154} = 404$ .

Si la moyenne de la loi  $X$  a une probabilité de rupture supérieure à la probabilité de rupture demandée, ce qui est toujours le cas si celle-ci n'est pas forte, on dispose alors d'un intervalle dans lequel se situe la valeur recherchée. Dans notre exemple, la valeur du point de commande est comprise entre 175 et 404, renseignement qui ne dépend pas du fait que  $X$  est une demande définie sur un délai certain ou sur un délai aléatoire.

Il ne reste plus alors qu'à rechercher la solution correspondant à la probabilité de rupture demandée de 11,54% en se positionnant au milieu de l'intervalle<sup>2</sup>, c'est-à-dire à  $175 + (404 - 175)/2^1 = 289$ . Si la probabilité de rupture (en espérance mathématique) pour  $s = 289$  est supérieure à 11,54%, c'est que la valeur recherchée est supérieure à 289, et si cette probabilité de rupture est inférieure à 11,54% c'est que la valeur recherchée est inférieure à 289. Dans le premier cas on ajoutera à 289 la valeur :  $(404 - 175)/2^2$ , et dans le second cas on retranchera cette même valeur. À l'étape suivante, on ajoutera ou retranchera selon le cas de figure, une valeur de  $(404 - 175)/2^3$ ; et ainsi de suite. On atteint donc la précision de l'unité sur le point de commande pour une valeur de  $n$  telle qu'elle soit la valeur entière la plus faible possible satisfaisant la relation :

$$2^n \geq 404 - 175 \rightarrow n \geq (\log 229)/(\log 2) = 7,84 \rightarrow n = 8$$

On atteint donc la précision demandée en 8 itérations. Les calculs effectués pour l'initialisation (probabilité de rupture égale à 11,54%) sont donnés dans le [tableau 253](#) où  $\Delta_i$  représente l'accroissement de la prochaine itération de la recherche de  $S$  aboutissant à cette probabilité de rupture de 11,54%.

1. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chap. I, p. 67.

2. Cet algorithme de recherche par dichotomie successive est similaire à celui décrit à la [page 809](#).



TABLEAU 253  
Calcul de  $s$  dans le cas d'un délai d'obtention optimal

Itération $i$	$s_i$	Probabilité de rupture (%) pour $s_i$ et $L = l$			$\alpha_i$	$\Delta_i$
		$L = 1$	$L = 2$	$L = 3$		
1	289	0,00%	0,72%	26,21%	8,22%	-57,25
2	232	0,00%	9,57%	61,56%	23,25%	28,63
3	261	0,00%	2,96%	42,87%	14,34%	14,31
4	275	0,00%	1,51%	34,15%	11,00%	-7,16
5	268	0,00%	2,13%	38,44%	12,60%	3,58
6	271	0,00%	1,85%	36,58%	11,90%	1,79
7	273	0,00%	1,67%	35,36%	11,44%	0,89
8	272	0,00%	1,76%	35,97%	11,67%	

Notons que l'on peut calculer sans difficulté l'espérance mathématique de la rupture durant le délai d'obtention aléatoire, à partir des espérances mathématiques  $I_{r1}(s)$ ,  $I_{r2}(s)$  et  $I_{r3}(s)$  définies pour des délais certains d'obtention respectivement égaux à 1, 2 ou 3 périodes de référence :

$$I_r(s = 272) = 0,2 \cdot I_{r1}(s) + 0,5 \cdot I_{r2}(s) + 0,3 \cdot I_{r3}(s)$$

ce qui donne ici :

$$I_r(s = 272) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,3036 + 0,3 \times 14,7017 = 4,5623$$

#### II-1.2.4.3 Résolution numérique du problème posé

On utilise donc l'algorithme de la [page 839](#).

- À l'itération 1, on trouve donc la quantité économique de Wilson (490). La probabilité de rupture demandée est, comme à l'itération 1 de la [page 839](#) de 11,54 %, puisque tous les paramètres utilisés sont les mêmes. Le point de commande correspondant à cette probabilité de rupture demandée a déjà été calculé dans [tableau 268](#) ; il est de 272. À la fin de la première itération 1, on a la solution :  $q_1 = 490$ ,  $s_1 = 272$  et  $I_r(s_1 = 272) = 4,5623$ .

- À l'itération 2, on a  $q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2400(300 + 10 \times 4,5623)}{6}} = 526$  ; on calcule

alors  $P(X > s_2) = \frac{6}{6/2 + 10 \times 2400/526} = 12,34\%$ . Le calcul de  $s_2$  à partir du risque de rupture de 12,34 % s'effectue suivant l'algorithme de calcul proposé au § II-1.2.4.2 ci-dessus, on trouve alors :

$$P(X < s_2) = 87,66\% \rightarrow s_2 = 269 \text{ et } I_r(s_2 = 269) = 4,94142$$

- À l'itération 3, on trouve  $q_3 = 529$  et  $s_3 = 269$ . Le point de commande de l'itération 3 est donc le même que celui de l'itération 2, le processus itératif est donc terminé.

La politique optimale dans notre exemple numérique est donc de commander  $q^* = 529$  bouilloires électriques lorsque le stock devient inférieur ou égal à 269 bouilloires.



Le coût annuel de gestion est alors, en utilisant la [relation 313 de la page 860](#):

$$C(q^* = 529, s^* = 269) = 300 \frac{2400}{529} + 6 \left( 269 - 175 + \frac{529}{2} \right) + \left( \frac{6}{2} + 10 \cdot \frac{2400}{529} \right) \cdot 4,94142 = 3706,75 \text{ \$ / an}$$

La marge annuelle moyenne  $B(q^*, s^*) = D \cdot c_r - C(q^*, s^*)$  est donc:

$$B(q^* = 529, s^* = 269) = 2400 \cdot 10 - (3706,75) = 20293,25 \text{ \$ / an}$$

Par ailleurs, si chaque cycle a en moyenne une rupture de stock de 4,972 bouilloires, comme il y a  $2400 / 529 = 4,537$  cycles en moyenne par an, la rupture moyenne annuelle est  $4,537 \times 4,95 = 22,48$  bouilloires; ce qui donne un pourcentage de demandes annuelles non satisfaites de  $22,558 / 2400 = 0,94 \%$

Les conséquences de la politique optimale de notre exemple numérique sont consignées dans le [tableau 254](#).

## II-2 Les améliorations du modèle en univers aléatoire

Nous reprendrons ici les différentes améliorations du modèle de base en univers certain introduites au § I-2. et qui concernent la prise en compte de l'interdépendance avec d'autres articles (analysée en univers certain au § I-2.3, page 802), et le problème des rabais (analysé en univers certain au § I-2.1, page 783). La détermination de la solution analytique est relativement simple, car dans tous les cas de figure, on repartira de la fonction du coût de gestion introduite en univers certain, en remplaçant le stock moyen annuel par son espérance mathématique et en y ajoutant simplement l'espérance mathématique du coût annuel de rupture. Nous n'examinerons explicitement que le cas des délais d'obtention certains, mais il est clair que l'adaptation au cas du délai d'obtention aléatoire connu en probabilité (cf. § II-1.2, page 854) ne pose pas davantage de difficulté. Ajoutons enfin que, puisqu'il s'agit de la combinaison de deux catégories de problèmes déjà traités, nous n'aborderons pas ces problèmes par le biais d'un exemple introductif.

### II-2.1 Prise en compte de l'interdépendance entre articles

Nous examinerons successivement le cas de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière (§ II-2.1.1) puis celui d'une ressource rare financière (§ II-2.1.2, page 867) avant de traiter le cas des commandes groupées (§ II-2.1.3, page 868). Dans les deux cas, on supposera que l'on n'est pas en présence de points de commande multiples (hypothèse qui conditionne la validité des solutions analytiques proposées).

#### II-2.1.1 Utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière

On abordera tout d'abord la solution analytique puis ses implications du point de vue du calcul pratique de la politique optimale, avant d'illustrer par un exemple numérique ce type de procédure.



TABLEAU 254

Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique  
(demande aléatoire - demandes non satisfaites perdues - délai d'obtention aléatoire)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électrique		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	529	-
Point de commande	269	-
Stock de sécurité	94,00	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,54
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	63 jours
Probabilité de rupture avant livraison	12,36%	-
Rupture moyenne de stock (à 100 % perdue)	4,95	22,48
Demande moyenne satisfaite immédiatement	524,05	2 377,52
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,94%	0,94%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	513 jours
Stock moyen disponible avant livraison	98,95	-
Stock moyen détenu	360,98	360,98
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	6,65
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 870,00	71 325,64
Coût moyen de commande	300,00	1 361,06
Coût moyen de possession	477,39	2 165,86
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	49,55	224,79
Coût moyen des demandes différées	0,00	0,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	826,94	3 751,71
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 696,94	74 852,57
Marge nette	4 463,06	20 248,29

Table des matières

Index thématique

### II-2.1.1.1 Solution analytique

Reprenons la formulation du problème en univers certain (§ I-2.3.1.1, page 803), et plaçons-nous dans le cas général des demandes non satisfaites partiellement perdues, la somme des coûts annuels de gestion que l'on cherche à minimiser est, en sommant sur l'ensemble des articles, les coûts moyens annuels de la relation 291 de la page 842, ce qui conduit à la relation 315.

$$\begin{aligned}
 \sum_j C_j(q_j, s_j) = & \sum_j \left\{ c_{c_j} \frac{D_j}{q_j} + c_{p_j} \left( \frac{q_j}{2} + s_j - D_j L_j \right) \right\} \\
 & + \sum_j \left\{ p \frac{D_j}{q_j} \left( c_{p_j} \frac{L_j}{2} + c_{rd_j} \right) + (1-p) \left( c_{rp_j} \frac{D_j}{q_j} + \frac{c_{p_j}}{2} \right) \right\} I_r(s_j)
 \end{aligned}
 \quad \text{relation 315}$$

Cette optimisation s'effectue sous contrainte de consommation de cette ressource rare. On pourrait considérer, comme on l'a fait en univers certain que la contrainte pèse sur les quantités commandées, le stock disponible juste avant la livraison étant nul ( $\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j \leq A$  (relation 249 de la page 806), mais, le plus souvent, la contrainte portera sur le disponible après livraison.

Compte tenu de ce qui a été vu au chapitre précédent (relation 135 de la page 670), en supposant la commande passée lors du franchissement du point de commande  $s_j$ , le stock disponible après livraison, noté  $R_p(s_j)$  est égal à la quantité livrée  $q_j$ , augmentée l'espérance mathématique du stock résiduel avant la livraison  $\{s_j - D_j L_j + I_r(s_j)\}$  et diminué de l'espérance mathématique des demandes non satisfaites différées  $p_j I_r(s_j)$  :

$$R_p(s_j) = q_j + \{s_j - D_j L_j + I_r(s_j)\} - p_j I_r(s_j) \quad \text{relation 316}$$

Dans ces conditions, l'adaptation de la relation 249, conduit à la relation 317<sup>1</sup>.

$$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot [q_j + \{s_j - D_j L_j + I_r(s_j)\} - p_j I_r(s_j)] \leq A \quad \text{relation 317}$$

Si la contrainte retenue est celle définie par la relation 249 de la page 806, et la fonction de coût générale, celle définie par la relation 315, la solution optimale obtenue en dérivant le Lagrangien correspondant est :

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot [c_{c_j} + \{p_j [c_{p_j} \cdot L_j / 2 + c_{rd_j}] + (1 - p_j) c_{rp_j}\} \cdot I_r(s_j^*)]}{c_{p_j} + 2 \cdot \lambda \cdot a_j \cdot k_j}} \quad \text{relation 318}$$

et les relations de définition des points de commande restent (après indexation par  $j$  des paramètres) les relations 293 et 294.

$$P(X_j > s_j^*) = \frac{c_{p_j}}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{p_j} / 2 + c_{rp_j} \cdot D_j / q_j^*)} \quad \text{(cas continu - adaptation de la relation 293 de la page 842)}$$

$$P(X_j > s_j^*) < \frac{c_{p_j}}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{p_j} / 2 + c_{rp_j} \cdot D_j / q_j^*)} < P(X_j > s_j^* - 1) \quad \text{(cas discret - adaptation de la relation 294 de la page 842)}$$

Si la contrainte retenue porte sur le stock après livraison (relation 317). Dans ce cas, la relation 318 reste valable, mais les relations 293 et 294 doivent être remplacées par les relations 319 et 320.

$$P(X_j > s_j^*) = \frac{c_{p_j} + \lambda \cdot a_j \cdot k_j}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{p_j} / 2 + c_{rp_j} \cdot D_j / q_j^* + \lambda \cdot a_j \cdot k_j)} \quad \text{Cas continu relation 319}$$

1. Pour un article, le stock moyen est donné par la relation 295 de la page 842 qui tient compte du stock résiduel avant livraison. La simplification retenue ici, consistant à multiplier par un coefficient compris entre 0,5 et 1 le stock disponible après la livraison est contestable si ce stock résiduel avant livraison correspond à une fraction significative du stock disponible après livraison et si le coefficient retenu est proche de sa borne inférieure.

$$P(X_j > s_j^*) < \frac{c_{p_j} + \lambda \cdot a_j \cdot k_j}{p_j(D_j/q_j^*)(c_{rd_j} + c_{p_j}L_j/2) + (1-p_j)(c_{p_j}/2 + c_{rp_j}D_j/q_j^* + \lambda a_j k_j)} < P(X_j > s_j^* - 1)$$

*Cas discret**relation 320*

### II-2.1.1.2 Calcul de la politique optimale

La solution optimale fait apparaître une interdépendance entre  $\lambda$ ,  $s_j$  et  $q_j$ . L'algorithme à utiliser pour trouver rapidement la solution optimale découle de la combinaison des algorithmes des pages 809 et 839, ce qui donne l'algorithme de la figure 216.

### II-2.1.1.3 Exemple numérique

Reprenons l'exemple numérique du § I-2.3.11b, page 803, en supposant maintenant que les lois de demande sont des lois normales. Le délai d'obtention  $L$  sera le même pour tous les articles ( $L = 20 / 288$ ). Les données du problème sont résumées dans le tableau 255.

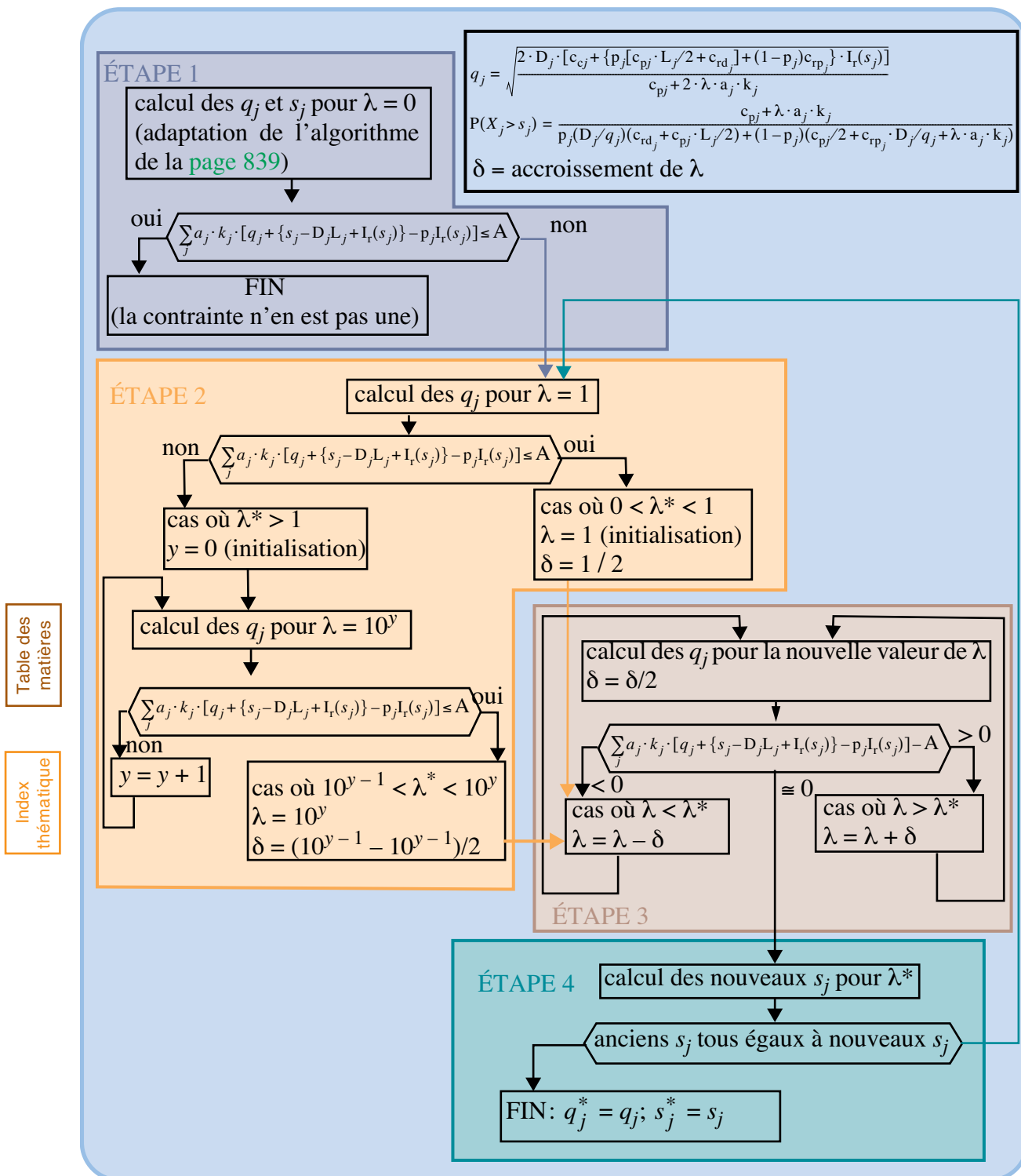
TABLEAU 255  
*Données du problème de gestion sous contrainte de ressource rare  
en univers aléatoire*

	Article 1 Bouilloire électrique	Article 2 Cocotte- minute	Article 3 Casserole
Coût d'acquisition	30	100	15
Prix de vente	40	130	20
Consommation unitaire du facteur rare	0,05	0,06	0,03
Coefficient $k_j$	0,6	0,6	0,6
Coût de commande	300	300	300
Probabilité $p_j$ qu'une demande non satisfaite soit différée	40%	40%	40%
Coût d'une demande différée	5,00	7,00	3,00
Type de loi	Normale	Normale	Normale
Demande moyenne (annuelle)	2400	1000	5000
Écart-type (sur Demande annuelle)	189,7367	100	500

Table des  
matièresIndex  
thématique

Le prix fantôme obtenu est de 212,5 contre 71,87 en avenir certain, les 140 dollars liduriens supplémentaires pouvant s'analyser comme une pénalité supplémentaire due à l'incertitude. À l'optimum on obtient la solution décrite dans le tableau 256 de la page 869 qui conduit à une marge nette annuelle de 66344, contre 67717 sans contrainte (solution impliquant de passer la contrainte de stockage de 30 à 46,6 m<sup>3</sup>). On notera que test d'arrêt retenu consiste à stopper les itérations dès que la valeur absolue de la différence entre la demande de facteur rare et son offre devient inférieure à la plus forte des consommations unitaires de cette ressource (ici 0,06). Le programme du CD-Rom permet de traiter jusqu'à 10 articles suivant des lois de Poisson et / ou Normales.

FIGURE 216

Algorithme de détermination de la valeur optimale de  $\lambda$  – univers aléatoire

### II-2.1.2 Utilisation commune et simultanée d'une ressource rare financière

L'obtention d'une solution analytique spécifique à ce cas de figure ne pose guère de problème<sup>1</sup> on peut l'algorithme général de la page 867 (avec  $a_j = c_{u_j}$ ), car son adaptation à la solution analytique ne permet qu'un gain modeste de temps de calcul.

Reprenons l'exemple du § I-2.3.1.4, page 816, en appliquant les données du tableau 255 et en conservant la contrainte financière de 20000 dollars liduriens. À l'optimum on obtient la solution décrite dans le tableau 256 de la page 869 qui conduit à une marge nette annuelle de 65275, contre 67717 sans contrainte (solution impliquant de passer la contrainte de valeur moyenne des stocks de 20000 à 33983).

## II-2.1.3 Commandes groupées

### II-2.1.3.1 Solution analytique

L'analyse de ce cas en univers certain a été conduite au § I-2.3.3, page 826. Le coût annuel de gestion dépend de la variable de commande  $T$  et des points de commandes  $s_j$  et les quantités économiques de commande  $q_j$  se déduisent de la demande annuelle  $D_j$  et de la périodicité ( $q_j = TD_j$ ). La somme de l'ensemble des coûts annuels de gestion des différents articles, en adaptant la relation 315 de la page 864, peut être approximée par la relation 321 de la page 868 si l'on considère qu'une commande est déclenchée lorsque l'un des points de commande  $s_j$  est franchi (la commande porte alors sur les quantités  $TD_j$ , diminuées de la différence entre les stocks observés et les points de commande).

$$\sum_j C_j(T, s_j) = \frac{c_c}{T} + \sum_j \left[ c_{pj} \left( \frac{TD_j}{2} + s_j - D_j \cdot L_j \right) + \sum_j \left[ \left\{ \frac{p_j}{T} \left( c_{pj} \frac{L_j}{2} + c_{rdj} \right) + (1 - p_j) \left( \frac{c_{rj}}{T} + \frac{c_{pj}}{2} \right) \right\} I_r(s_j) \right] \right] \quad \text{relation 321}$$

À l'optimum on a :

$$\frac{\partial C(T, s_j)}{\partial T} = 0 = -\frac{c_c}{T^2} + \sum_j \frac{c_{pj} D_j}{2} - \frac{\sum_j \{ p_j \cdot (c_{rdj} + c_{pj} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) c_{rpj} \} \cdot I_r(s_j)}{T^2}$$

D'où la relation 322 caractérisant l'optimum.

$$T^* = \sqrt{\frac{2[c_c + \sum_j \{ p_j \cdot (c_{rdj} + c_{pj} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) c_{rpj} \} \cdot I_r(s_j^*)]}{\sum_j c_{pj} \cdot D_j}} = 1/I_c^* \quad \text{relation 322}$$

1. Note de la page précédente. En effet, on cherche ici à minimiser la fonction de coût générale définie par la relation 315 de la page 864, en définissant le coût de possession comme proportionnel au coût d'achat. Il suffit d'adapter les relations 318 à 320 de la page 865, en remplaçant  $c_{pj}$  par  $ic_{uj}$  et  $k_j$  par  $h$  ce qui donne, après dérivation du Lagrangien correspondant :

$$q_j^* = \frac{1}{\sqrt{1 + 2h\lambda}} \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot [c_{cj} + \{ p_j [c_{pj} \cdot L_j / 2 + c_{rdj}] + (1 - p_j) c_{rpj} \} \cdot I_r(s_j^*)]}{c_{uj}}}$$

$$P(X_j > s_j^*) = \frac{c_{uj} (1 + h\lambda)}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rdj} + ic_{uj} L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{uj} / 2 + c_{rpj} \cdot D_j / q_j^* + h\lambda c_{uj})}$$

$$\lambda^* = \frac{h}{2A^2} \left( \sum_j \left\{ c_{cj} \frac{D_j}{q_j} + p_j \left[ c_{pj} \left( \frac{q_j}{2} + s_j - D_j \cdot L_j \right) + \left( \frac{c_{pj} \cdot L_j}{2} + c_{rdj} \right) \cdot \frac{D_j}{q_j} \cdot I_r(s_j) \right] + (1 - p_j) \left[ c_{pj} \left( \frac{q_j}{2} + s_j - D_j \cdot L_j \right) + \left( \frac{c_{pj} \cdot L_j}{2} + c_{rpj} \right) \cdot \frac{D_j}{q_j} \cdot I_r(s_j) \right] \right\} \right)^2$$

TABLEAU 256

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte non financière en univers aléatoire



Politique optimale d'approvisionnement sans contrainte de capacité (possible : 30 ; utilisée : 29,96) ; lambda : 212,5)				
Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	
<b>Quantité de commande</b>	<b>284</b>	<b>137</b>	<b>547</b>	
<b>Point de commande</b>	<b>235</b>	<b>100</b>	<b>536</b>	
Stock moyen disponible avant livraison	70,26	32,10	193,23	
Probabilité de rupture avant livraison	8,59%	12,31%	7,60%	
Rupture moyenne de stock avant livraison (demandes partiellement perdues pour au moins un article)	1,93	1,54	4,46	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	8,45	7,30	9,14	
Rupture moyenne annuelle de stock	16,31	11,28	40,73	
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,68%	1,13%	0,81%	
Stock moyen détenu	211,14	99,68	464,18	
Intervalle moyen entre 2 ruptures	396,9 jours	320,5 jours	414,7 jours	
Taux moyen annuel de rotation du stock	11,37	10,03	10,77	
Stock moyen disponible après livraison	353,49	168,48	738,45	
Consommation moyenne de la ressource rare non financière	10,605	6,065	13,292	29,962
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	71 706,47	99 323,40	74 633,43	245 663,31
Coût moyen annuel de commande	2 535,21	2 189,78	2 742,23	7 467,22
Coût moyen annuel de possession	1 266,83	1 993,51	1 392,54	4 652,89
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	97,84	202,98	122,19	423,01
Coût moyen annuel des demandes différées	32,61	31,57	48,88	113,06
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 932,50	4 417,85	4 305,83	12 656,18
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 541,13	103 538,27	78 817,08	257 896,48
Marge nette annuelle	20 067,50	25 582,15	20 694,17	66 343,82

Table des  
matièresIndex  
thématique

### II-2.1.3.2 Calcul opérationnel de la politique optimale

Il suffit de reprendre l'algorithme de la page 839 en remplaçant le cartouche de calcul des  $q_j$  ( $j$  étant alors l'indice d'itération), par la relation 322, puis par le calcul des quantités économiques de commande qui s'en déduit ( $q_j = TD_j$ ,  $j$  reprenant la signification de l'indice de l'article).





TABLEAU 257

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte financière en univers aléatoire

Politique optimale d'approvisionnement SOUS contrainte de valeur moyenne de stock (possible : 20000 ; utilisée : 20017,77 ; Lambda Budget : 0,479688)				
Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	
Quantité de commande	254	91	523	
Point de commande	238	106	539	
Stock moyen disponible avant livraison	73,02	37,51	196,01	
Probabilité de rupture avant livraison	7,68%	8,27%	7,28%	
Rupture moyenne de stock avant livraison (demandes partiellement perdues pour au moins un article)	1,69	0,95	4,23	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	9,45	10,99	9,56	
Rupture moyenne annuelle de stock	15,97	10,48	40,48	
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,67%	1,05%	0,81%	
Stock moyen détenu	199,06	82,49	455,11	
Intervalle moyen entre 2 ruptures	396,7 jours	316,9 jours	414 jours	
Taux moyen annuel de rotation du stock	12,06	12,12	10,99	
Stock moyen disponible après livraison	326,35	128,13	717,32	
Consommation moyenne de la ressource rare financière	5 874,26	7 687,65	6 455,87	20 017,77
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	71 712,52	99 371,48	74 635,67	245 719,67
Coût moyen annuel de commande	2 834,65	3 296,70	2 868,07	8 999,42
Coût moyen annuel de possession	1 194,37	1 649,74	1 365,33	4 209,44
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	95,83	188,56	121,44	405,83
Coût moyen annuel des demandes différées	31,94	29,33	48,58	109,85
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	4 156,79	5 164,33	4 403,42	13 724,54
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 773,48	104 347,25	78 917,65	259 038,38
Marge nette annuelle	19 843,21	24 835,67	20 596,58	65 275,46

Table des  
matièresIndex  
thématique

### II-2.1.3.3 Exemple numérique

Reprenons l'exemple du § I-2.3.3.2, page 829, les données des lois de demandes aléatoires étant toujours celles retenues dans le tableau 255 de la page 866. La solution numérique (tableau 258 de la page 871) est alors la suivante ( $T = 0,172 \text{ an}^1 \approx 49 \text{ jours ouvrables}$ , contre 32 dans le cas certain).

1. Le coût moyen de gestion annuel d'un article intègre le tiers (puisque'il y a 3 articles) du coût de commande total.

TABLEAU 258  
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine par commande groupée, en univers aléatoire



Politique optimale (commande groupée) de 5,83 commandes par an (tous les 49,4 jours)		bouilloires électriques		cocottes-minute		casseroles	
Conséquences physiques	Par cycle	Par an	Par cycle	Par an	Par cycle	Par an	
Quantité de commande	411	-	171	-	856	-	
Point de commande	225	-	96	-	504	-	
Stock de sécurité	58,33	-	26,56	-	156,78	-	
Probabilité de rupture avant livraison	12,17%	-	15,68%	-	11,71%	-	
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	2,94	17,16	2,09	12,17	7,49	43,69	
Demande moyenne satisfaite immédiatement	408,45	2 382,84	169,33	987,83	849,58	4 956,31	
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,72%	0,72%	1,22%	1,22%	0,87%	0,87%	
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	405,7 jours	-	314,9 jours	-	421,8 jours	
Stock moyen disponible avant livraison	61,28	-	28,64	-	164,27	-	
Stock moyen déterminé	264,95	264,95	112,85	112,85	587,63	587,63	
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	9,06	-	8,86	-	8,51	
Conséquences financières							
Dépense moyenne d'acquisition	12 330,00	71 622,03	17 100,00	99 028,04	12 840,00	74 513,02	
Coût moyen de commande	100,00	583,38	100,00	583,38	100,00	583,38	
Coût moyen de possession	272,50	1 589,73	386,89	2 257,02	302,19	1 762,90	
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	17,65	102,98	37,55	219,07	22,47	131,07	
Coût moyen des demandes différées	5,88	34,33	5,84	34,08	8,99	52,43	
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	396,04	2 310,42	530,28	3 093,55	433,64	2 529,77	
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	12 708,39	73 829,47	17 592,73	101 902,52	13 251,17	76 911,73	
Marge nette	3 717,91	21 689,58	4 612,15	26 906,45	3 851,72	22 470,23	
Conséquences financières		TOTAL					
Dépense moyenne d'acquisition	42 270,00	245 163,10					
Coût moyen de commande	300,00	1 750,15					
Coût moyen de possession	961,57	5 609,64					
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	77,67	453,12					
Coût moyen des demandes différées	20,71	120,83					
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	1 359,96	7 933,74					
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	43 552,28	252 643,71					
Marge nette	12 181,78	71 066,26					

Table des matières

Index thématique

## II-2.2 Les rabais en univers aléatoire

On examinera successivement le cas des rabais uniformes (§ II-2.2.1.), celui des rabais progressifs (§ II-2.2.2, page 874.) et enfin celui du rabais momentané (§ II-2.2.3, page 881).

### II-2.2.1 Cas du rabais uniforme

L'analyse de ce problème en univers certain a été conduite au § I-2.1.2.1, page 788. Son extension au cas aléatoire ne présente aucune difficulté.

#### II-2.2.1.1 Solution analytique

En univers certain, nous avons vu que le coût moyen annuel  $C(q)$ , calculé pour un coût  $c_{u_j}$  valable pour une quantité de  $q$  unités comprise entre  $q_{j-1}$  et  $q_j$ , était :

$$q_{j-1} \leq q < q_j \Rightarrow C(q) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \cdot \frac{q}{2} + D \cdot c_{u_j} \quad \text{relation 237 de la page 789}$$

Cette relation 237 doit être adaptée en univers aléatoire en adaptant la démarche générale du § II-1.1.3.3, page 841, traitant le cas de demandes partiellement différées et partiellement perdues. Dans ce contexte, le coût annuel de gestion était donné par la relation 291.

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left( \frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left( c_p \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left( c_{rp} \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) \right\} I_r(s)$$

relation 291 de la page 842

En combinant ces relations 237 et 291, on obtient alors la relation 323, pour  $q_{j-1} \leq q < q_j$ .

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \left( \frac{q}{2} + s - DL \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left( i \cdot c_{u_j} \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left( c_{rp} \frac{D}{q} + \frac{i c_{u_j}}{2} \right) \right\} I_r(s)$$

relation 323

Il suffit alors d'adapter les relations définissant l'optimum (relations 291 à 294, page 842), en remplaçant  $c_p$  par  $i c_{u_j}$  et à les appliquer<sup>1</sup> dans le cadre de la démarche d'exploration des différents niveaux tarifaires décrite au § I-2.1.2.1, page 788.

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot [c_c + \{p[i \cdot c_{u_j} \cdot L/2 + c_{rd}] + (1-p)c_{rp}\} \cdot I_r(s^*)]}{i \cdot c_{u_j}}} \quad \text{relation 324}$$

$$P(X > s^*) = \frac{i \cdot c_{u_j}}{p(D/q^*)(c_{rd} + i \cdot c_{u_j} \cdot L/2) + (1-p)((i \cdot c_{u_j})/2 + c_{rp} \cdot D/q^*)} \quad \text{relation 325}$$

cas continu

$$P(X > s^*) < \frac{i \cdot c_{u_j}}{p\left(\frac{D}{q^*}\right)\left(c_{rd} + \frac{i \cdot c_{u_j} \cdot L}{2}\right) + (1-p)\left(\frac{(i \cdot c_{u_j})}{2} + c_{rp} \cdot \frac{D}{q^*}\right)} < P(X > s^* - 1) \quad \text{relation 326}$$

cas discret

#### II-2.2.1.2 Application numérique

On calculera les extrema en utilisant tout simplement l'algorithme de la page 839 (en remplaçant les relations 278 et 279 par les relations 324 et 325 ou 326), c'est-à-dire en se ramenant au modèle général en univers aléatoire, pour chaque

coût de possession différent. Si la solution trouvée est réalisable, il faut alors ajouter au coût moyen annuel de gestion, la dépense d'acquisition proprement dite.

Pour le calcul aux bornes, il faut passer par la détermination préalable du point de commande optimal pour la borne considérée. Pour ce faire, on utilisera la [relation 325](#) (ou la [relation 326](#)). On en déduit la rupture moyenne de stock, ce qui permet de calculer alors le coût moyen annuel de gestion, dépenses d'acquisition comprises.

TABLEAU 259  
*Détail des calculs de la recherche de la solution optimale  
en cas de rabais uniforme en univers aléatoire*

<i>i</i>	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte			Calculs à la borne inférieure		
	plage de commande possible	coût unitaire	$q_j^*$	$s_j^*$	Coût annuel	$q_j$	$s_j$	Coût annuel
1	$q < 250$	31	508	215	virtuel			
2	$250 \leq q < 500$	30,5	511	217	virtuel	250	237	77096,38
3	$500 \leq q < 750$	30	515	218	75078,60	500	219	75082,92
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	518	220	virtuel	750	208	74058,41
5	$q \geq 1000$	29	523	221	virtuel	1000	199	73260,04

Reprenons l'exemple numérique § I-2.1.2.1, page 788, et la loi Normale  $\mathcal{N}(2400; 189,74)$  utilisée depuis le début de cette seconde section pour notre

1. Pour une valeur fixée de  $q$ , il est alors évident que lorsque  $c_{u_j}$  diminue, la probabilité de rupture diminue également (puisque le dénominateur de la fraction augmente). Par voie de conséquence, le point de commande s'accroît et la rupture de stock diminue, lorsque  $c_{u_j}$  diminue. Nous avons vu qu'en univers certain, le coût moyen annuel de gestion décroît avec  $c_{u_j}$ , pour une valeur fixée de  $q$ . Examinons s'il en est de même en avenir aléatoire lorsque, pour une valeur donnée de  $q$ , on retient un point de commande optimal  $s_j^*$  pour chaque coût unitaire  $c_{u_j}$ . En cas de demandes perdues, la variation de coût est (avec  $c_{u_j} > c_{u_{j+1}}$ ) :

$$C_j(q, s_j^*) - C_{j+1}(q, s_{j+1}^*) = \left[ (c_{u_j} - c_{u_{j+1}}) \left( \frac{iq}{2} + D(1 - iL) \right) \right] + [i(c_{u_j} \cdot s_j^* - c_{u_{j+1}} \cdot s_{j+1}^*)] + \left[ \frac{i}{2} \{ c_{u_j} \cdot I_r(s_j^*) - c_{u_{j+1}} \cdot I_r(s_{j+1}^*) \} \right] + \left[ \frac{D}{q} \{ (v - c_{u_j}) I_r(s_j^*) - (v - c_{u_{j+1}}) I_r(s_{j+1}^*) \} \right]$$

La première expression entre crochets est normalement positive si l'on exclut le cas des points de commande multiples (hypothèse sous-jacente dans l'utilisation de la [relation 291 de la page 842](#)), ce qui revient à écarter du raisonnement les valeurs trop faibles de  $q$  (et implique en tout état de cause que l'on ait  $q > DL$ ), et si le délai d'obtention n'est pas trop fort, car alors l'expression  $(iq)/2 + D(1 - iL)$  est alors proche de  $D$ . L'ordre de grandeur de cette première expression l'emporte nettement sur celui des expressions suivantes.

La seconde expression entre crochets peut être positive ou négative, puisqu'une baisse de coût unitaire entraîne un accroissement du point de commande. Il est cependant vraisemblable que ce déplacement est très faible (ce que l'on constate empiriquement pour des structures de coûts  $(c_c, i)$  et de rabais « habituelles »), et qu'en conséquence cette seconde expression ait plutôt tendance à être faiblement positive ou voisine de zéro. La troisième expression entre crochets est forcément positive. La dernière expression peut, comme la seconde expression, être positive ou négative; mais elle peut être considérée comme négligeable par rapport à la première si l'on se souvient que l'emploi de l'hypothèse simplificatrice implique que la probabilité de rupture soit faible, et d'autre part de ce qui a été dit sur la relative insensibilité de  $s$  aux rabais.

On pourra le plus souvent conclure, comme en avenir certain, que dans les plages de valeurs de  $q$  où l'optimum a des chances de se trouver, ces courbes de coûts ne sont pas sécantes pour des structures « normales » de coûts et rabais (mais il est certainement possible de trouver des contre-exemples). La recherche de la solution optimale s'inspire alors directement des principes développés en univers certain.

Un raisonnement similaire peut être conduit en cas de demandes non satisfaites différées.

problème de bouilloires électriques. Par ailleurs, on retiendra une probabilité de 40 % pour qu'une demande non satisfaite soit différée et un coût de demande différée de 5 dollars liduriens. La politique optimale consiste à commander 1000 unités au prix de 29 dollars liduriens, dès que le stock disponible est inférieur ou égal à 209 unités. Les conséquences de cette politique sont décrites dans le [tableau 260](#), et le détail de l'application de l'algorithme, dans le [tableau 259](#).

TABLEAU 260

*Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais uniforme - demandes non satisfaites partiellement perdues)*

<b>Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Uniforme)</b>		
<b>Conséquences physiques</b>	<b>Par cycle de réapprovisionnement</b>	<b>Par an</b>
<b>Quantité de commande</b>	<b>1 000</b>	-
<b>Point de commande</b>	<b>199</b>	-
<b>Coût unitaire d'acquisition</b>	<b>29,00</b>	29,00
Stock de sécurité	32,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,40
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	120 jours
Probabilité de rupture avant livraison	25,89%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	7,68	18,44
Demande moyenne satisfaite immédiatement	992,32	2 381,56
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,77%	0,77%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	463,5 jours
Stock moyen disponible avant livraison	40,02	-
Stock moyen détenu	534,89	534,89
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,49
<b>Conséquences financières</b>		
Dépense moyenne d'acquisition	29 000,00	69 279,14
Coût moyen de passation de commande	300,00	720,00
Coût moyen de possession	1 292,66	3 102,39
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	50,71	121,70
Coût moyen des demandes différées	15,37	36,88
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	1 658,74	3 980,97
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	30 658,74	73 260,12
Marge nette	9 341,26	22 419,03

Table des  
matièresIndex  
thématique

### II-2.2.2 Cas des rabais progressifs

L'analyse de ce problème en univers certain a été conduite au § I-2.1.2.2, page 791. Son extension au cas aléatoire ne présente aucune difficulté sur le plan analytique. Au niveau des calculs, la résolution est plus délicate lorsque les demandes non satisfaites sont différées.

## II-2.2.2.1 Cas des demandes non satisfaites perdues

## II-2.2.21a) Solution analytique

En univers certain, nous avons vu que le coût moyen annuel de gestion occasionné par une quantité de commande  $q$  telle que  $q_{j-1} \leq q < q_j$ , ce qui implique que seule la quantité  $q - (q_{j-1} - 1)$  soit acquise au prix  $c_{u_j}$ , est :

$$C(q) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \frac{q}{2} \quad \text{relation 239 de la page 795}$$

Il faut adapter cette relation, à l'aide de la [relation 277 de la page 836](#) (cas des demandes non satisfaites perdues) pour donner la relation du coût moyen annuel de gestion en univers aléatoire<sup>1</sup> :

$$C(q, s) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L\right) + \left[\frac{i}{2}\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_r \frac{D}{q}\right] I_r(s) \quad \text{relation 327}$$

ce qui donne à l'optimum :

$$q^* = \sqrt{\frac{D[B_j + c_c + c_r \cdot I_r(s^*)] + i \cdot B_j [s^* - D \cdot L + I_r(s^*)/2]}{i \cdot c_{u_j}/2}} \quad \text{relation 328}$$

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} \quad (\text{reprise de la relation 289 de la page 841}) \text{ avec :}$$

$$c_p = i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right), \begin{cases} B_j = \sum_{h=1}^{j-1} (q_h - q_{h-1})c_{u_h} - (q_{j-1} - 1)c_{u_j} \text{ si } j > 1 \\ B_1 = 0 \text{ et } q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{relation 329}$$

## II-2.2.21b) Calcul opérationnel de la politique optimale

L'algorithme de la [page 839](#), est basé sur le fait que lorsqu'on exprime  $q$  en fonction de  $s$  (ou l'inverse) dans les relations 278 et 279, les deux fonctions sont monotones décroissantes et leurs représentations graphiques se coupent nécessairement. Il en est de même ici. Reprenons l'exemple numérique § I-2.1.2.1, [page 788](#), et la loi Normale  $\mathcal{N}(2400; 189,74)$ . Les calculs numériques intermédiaires sont donnés au [tableau 262, page 876](#), et la solution optimale est présentée au [tableau 261 de la page 876](#).

## II-2.2.2.2 Cas des demandes non satisfaites différées

## II-2.2.22a) Solution analytique et algorithmique

L'indicateur de coût moyen annuel de gestion combine celui du rabais progressif en univers certain ( $C(q) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \frac{q}{2}$ , [relation 239 de la page 795](#)) et celui de l'univers aléatoire avec demandes différées (rela-

1. Avec  $c_r = v - c_{u_j}$ , en supposant que la rupture ne puisse porter que sur la tranche acquise au coût unitaire  $c_{u_j}$



TABLEAU 261

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais progressif- demandes non satisfaites perdues)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Progressif - demandes perdues)		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	1 160	-
Point de commande	203	-
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,07586	30,07586
Stock de sécurité	36,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,07
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	139,2 jours
Probabilité de rupture avant livraison	23,37%	-
Rupture moyenne de stock (à 100 % perdue)	6,71	13,88
Demande moyenne satisfaite immédiatement	1 153,29	2 386,12
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,58%	0,58%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	595,6 jours
Stock moyen disponible avant livraison	43,04	-
Stock moyen détenu	619,69	619,69
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	3,87
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	34 888,00	71 764,47
Coût moyen de passation de commande	300,00	620,69
Coût moyen de possession	1 801,64	3 727,54
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	66,60	137,80
Coût moyen des demandes différées	0,00	0,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 168,24	4 486,02
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	37 056,24	76 112,69
Marge nette	9 343,76	19 331,91

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 262

Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais progressifs en univers aléatoire - demandes perdues -

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		
	plage de commande possible	coût unitaire	$q_j^*$	$s_j^*$	Coût annuel
1	$q < 250$	31	505	222	Virtuel
2	$250 \leq q < 500$	30,5	603	218	Virtuel
3	$500 \leq q < 750$	30	760	213	Virtuel
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	950	208	76 312,11
5	$q \geq 1000$	29	1 160	203	76 265,43



tion 287 de la page 840 :  $C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left( \frac{q}{2} + s - DL \right) + \left( \frac{c_p L}{2} + c_r \right) \frac{D}{q} I_r(s)$ , en

remplaçant, dans cette dernière relation,  $c_r$  par  $c_{rd}$  et  $c_p$  par  $i \left( c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right)$  et en ajoutant la dépense annuelle d'acquisition.

$$C(q, s) = D \left( c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) + c_c \frac{D}{q} + i \left( c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) \left( \frac{q}{2} + s - DL \right) + \left[ i \left( c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) \frac{L}{2} + c_{rd} \right] \frac{D}{q} I_r(s)$$

relation 330

À l'optimum on doit avoir:

$$\frac{\partial C(q, s)}{\partial s} = i \left( c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) + \left[ i \left( c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) \frac{L}{2} + c_{rd} \right] \frac{D}{q} [-P(X > s)] = 0$$

d'où:

$$P(X > s^*) = \frac{i(c_{uj} + B_j/q^*)q^*/D}{i(c_{uj} + B_j/q^*)L/2 + c_{rd}}$$

relation 331

Cette relation 331 est identique à la relation 289 de la page 841, en remplaçant  $c_p$  par  $i(c_{uj} + B_j/q)$  et  $c_r$  par  $c_{rd}$ . On remarque que  $q$  et la probabilité de rupture varient dans le même sens, en conséquence de quoi  $q$  et  $s$  varient en sens inverse.

De même, on doit avoir:

$$\frac{\partial C(q, s)}{\partial q} = -c_c \frac{D}{q^2} + \frac{i \cdot c_{uj}}{2} - \frac{i \cdot B_j(s - DL)}{q^2} - \left( \frac{c_{uj}L}{2q^2} + \frac{iB_jL}{q^3} + \frac{c_{rd}}{q^2} \right) DI_r(s) - D \frac{B_j}{q^2} = 0$$

ce que l'on peut encore écrire:  $-\frac{a}{q^3} - \frac{b}{q^2} + c = 0$ , ou  $y = -a - bq + cq^3 = 0$

En posant:

$$\left. \begin{aligned} a &= iB_jLDI_r(s) \\ b &= D(c_c + B_j) + iB_j(s - DL) + (ic_{uj}L/2 + c_{rd})DI_r(s) \\ c &= ic_{uj}/2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &q^* \text{ tel que :} \\ &-a - bq^* \\ &+ cq^{*3} = 0 \end{aligned} \quad \text{relation 332}$$

La fonction  $y$  tend vers  $\pm\infty$  lorsque  $q$  tend vers  $\pm\infty$ . Par ailleurs, elle a 2 extrema d'abscisses  $\pm\sqrt{b/(3c)}$  et un point d'inflexion d'abscisse nulle et d'ordonnée négative, il n'y a donc qu'une racine positive, laquelle est nécessairement supérieure à  $\sqrt{b/(3c)}$ , mais on peut remarquer que, pouvant se mettre sous la forme  $y = -a + q(cq^2 - b)$ , elle prend nécessairement une valeur négative ( $-a$ ) pour  $q = \sqrt{b/c}$  qui constitue donc une meilleure borne inférieure dans la recherche de la valeur de  $q$  qui annule  $y$  que celle fournie par le second extremum (qui est  $\sqrt{3}$  plus faible). On peut remarquer que dans la mesure où  $a$  est faible par rapport à  $b$ , la valeur cherchée sera peu supérieure à  $\sqrt{b/c}$ . Ajoutons enfin que la valeur de  $q_j^*$  prise en univers certain est nécessairement inférieure à celle que l'on obtient en univers aléatoire, car le numérateur de la solution en univers certain (relation 240 de la page 795) est compris dans  $b$ , le dénominateur étant le même. Il s'ensuit d'une part que la valeur optimale de l'univers certain peut être utilisé dans la rela-

tion 331 pour une initialisation et, d'autre part, que si cette valeur excède la borne supérieure de la plage admise pour bénéficier du coût d'acquisition  $c_{u_j}$ , la solution de l'univers aléatoire est nécessairement virtuelle.

### II-2.2.22b) Application numérique

Reprenons l'exemple numérique du § II-2.2.22a en supposant que le coût de rupture d'une demande différée s'élève à 5 dollars liduriens. L'application de cet algorithme (très sommairement décrit) conduit aux calculs numériques intermédiaires donnés au tableau 263, et à la solution optimale du tableau 264.

TABLEAU 263  
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale  
en cas de rabais progressifs en univers aléatoire - demandes différées -

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		
	plage de commande possible	coût unitaire	$q_j^*$	$s_j^*$	Coût annuel
1	$q < 250$	31	513	200	Virtuel
2	$250 \leq q < 500$	30,5	610	193	Virtuel
3	$500 \leq q < 750$	30	770	183	Virtuel
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	964	171	76583,87
5	$q \geq 1000$	<b>29</b>	<b>1177</b>	<b>158</b>	<b>76500,54</b>

### II-2.2.2.3 Cas mixte des demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues

L'indicateur de coût de gestion est une moyenne pondérée des indicateurs de la relation 327 de la page 875 et de la relation 330 de la page 877, ce qui conduit à la relation 333.

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \left( \frac{q}{2} + s - DL \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left( i(c_{u_j} + B_j) \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left[ (v - c_{u_j}) \frac{D}{q} + i \left( c_{u_j} + \frac{B_j}{q} \right) / 2 \right] \right\} I_r(s) \quad \text{relation 333}$$

On démontre qu'à l'optimum, on retrouve la relation 293 de la page 842, en remplaçant  $c_p$  par  $i(c_{u_j} + B_j/q)$  :

$$P(X > s^*) = \frac{i(c_{u_j} + B_j/q)}{p \left( \frac{D}{q^*} \right) \left( c_{rd} + \frac{c_p \cdot L}{2} \right) + (1-p) \left( \frac{i(c_{u_j} + B_j/q)}{2} + c_{rp} \cdot \frac{D}{q^*} \right)} \quad \text{relation 334}$$

et la relation 332 de la page 877 se modifie comme suit :

TABLEAU 264

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais progressif- demandes non satisfaites différées)



Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Progressif - demandes différées)		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	1 177	-
Point de commande	158	-
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,06032	30,06032
Stock de sécurité	- 8,67	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,04
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	141,2 jours
Probabilité de rupture avant livraison	56,88%	-
Rupture moyenne de stock (à 0 % perdue)	24,30	49,54
Demande moyenne satisfaite immédiatement	1 152,70	2 350,46
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	2,06%	2,06%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	248,3 jours
Stock moyen disponible avant livraison	15,63	-
Stock moyen détenu	581,55	581,55
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,13
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	35 381,00	72 144,77
Coût moyen de passation de commande	300,00	611,72
Coût moyen de possession	1 714,66	3 496,34
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	0,00	0,00
Coût moyen des demandes différées	121,48	247,71
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 136,14	4 355,77
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	37 517,14	76 500,55
Marge nette	9 562,86	19 499,45

Table des matières

Index thématique

$$\begin{aligned}
 a &= p_i B_j L D I_r(s) \\
 b &= p [D(c_c + B_j) + i B_j (s - DL) + (i c_{u_j} L / 2 + c_{rd}) D I_r(s)] \\
 &\quad + (1 - p) [D \{B_j + c_c + (v - c_{u_j}) I_r(s)\} + i B_j (s - DL + I_r(s) / 2)] \\
 c &= i c_{u_j} / 2
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} q^* \text{ tel que :} \\ -a - b q^* \\ + c q^{*3} = 0 \end{array}$$

relation 335

En panachant les exemples numériques des deux cas étudiés précédemment, avec  $p = 40\%$ , on obtient la solution optimale décrite dans le [tableau 265 de la page 880.](#), après une série de calculs intermédiaires résumés dans le [tableau 266, page 880.](#)



TABLEAU 265

*Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais progressif - demandes non satisfaites partiellement perdues)*

<b>Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Progressif - demandes non satisfaites partiellement perdues)</b>		
<b>Conséquences physiques</b>	<b>Par cycle de réapprovisionnement</b>	<b>Par an</b>
<b>Quantité de commande</b>	<b>1 163</b>	-
<b>Point de commande</b>	<b>192</b>	-
<b>Coût moyen unitaire d'acquisition</b>	<b>30,07309</b>	30,07309
Stock de sécurité	25,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,06
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	139,6 jours
Probabilité de rupture avant livraison	30,62%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	9,64	19,88
Demande moyenne satisfaite immédiatement	1 153,36	2 380,12
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,83%	0,83%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	455,8 jours
Stock moyen disponible avant livraison	34,97	-
Stock moyen détenu	610,00	610,00
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	3,93
<b>Conséquences financières</b>		
Dépense moyenne d'acquisition	34 975,00	71 816,62
Coût moyen de passation de commande	300,00	619,09
Coût moyen de possession	1 777,90	3 668,92
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	57,39	118,43
Coût moyen des demandes différées	19,27	39,77
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 154,56	4 446,21
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	37 129,56	76 144,40
Marge nette	9 390,44	19 378,39

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 266

*Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais progressifs en univers aléatoire et avec demandes partiellement perdues*

<i>i</i>	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		
	plage de commande possible	coût unitaire	$q_j^*$	$s_j^*$	Coût annuel
1	$q < 250$	31	508	215	Virtuel
2	$250 \leq q < 500$	30,5	604	211	Virtuel
3	$500 \leq q < 750$	30	762	205	Virtuel
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	953	198	76335,70
5	$q \geq 1000$	29	<b>1163</b>	<b>192</b>	<b>76275,64</b>

### II-2.2.3 Rabais momentané en univers aléatoire

Comme en univers certain, nous examinerons successivement, le cas de la gestion indépendante des articles (c'est-à-dire en supposant réalisables les politiques optimales proposées), en l'absence de rabais sur quantité (§ II-2.2.3.1), puis en présence de rabais sur quantité (§ II-2.2.3.2, page 884) avant d'aborder le cas d'une gestion interdépendante des articles, en raison d'une utilisation commune et simultanée de mêmes ressources rares (§ II-2.2.3.3, page 887).

#### II-2.2.3.1 Gestion indépendante des articles en l'absence de rabais sur quantité

Par rapport à l'univers certain (cf. § I-2.1.1, page 784), l'analyse du problème fondée sur un stock résiduel nul à la livraison ne présente guère d'intérêt. Le caractère aléatoire de la demande fait que, même si l'on déclenche une commande au franchissement «normal» du point de commande  $s_1^*$  (correspondant à la politique optimale du prix actuel  $c_{u_1}$ ), parce que l'entreprise a pu obtenir de son fournisseur une livraison et un paiement différés, un stock résiduel nul à la livraison  $R_v$  n'a que la probabilité  $P(X > s_1^*)$  de se produire. On analysera donc directement le cas d'un stock résiduel quelconque lors de la livraison, et l'on travaillera en espérance mathématique, en supposant, dans un premier temps, que le problème se pose avant franchissement du point de commande.

Reprenons l'exemple numérique du § I-2.1.1, page 784, et plaçons-nous d'emblée dans le cas général d'une demande non satisfaite partiellement différée (avec une probabilité  $p = 40\%$  et un coût de rupture  $c_{rd} = 5$  dollars liduriens) et partiellement perdue (avec une probabilité  $(1 - p) = 60\%$  et un coût de rupture égal à la marge non réalisée  $v - c_{u_1} = 40 - 30 = 10$  \$). Avant l'annonce d'une hausse tarifaire, la politique optimale se caractérisait (cf. tableau 249, page 848) par une quantité optimale de commande  $q_1^* = 515$  et un point optimal de commande  $s_1^* = 218$ . Après la hausse tarifaire, en supposant inchangé le prix de vente, la politique optimale d'approvisionnement est définie par  $q_2^* = 494$  et  $s_2^* = 208$ , pour un coût moyen annuel avec dépense d'acquisition s'élevant à 82202 dollars liduriens.

Notons encore  $u$ , le stock disponible lors de la passation de commande et supposons que le stock disponible lors de l'annonce de la hausse tarifaire soit 250. Deux cas de figure doivent être distingués :

- la commande peut être différée quelque temps et passée lors du franchissement normal du point de commande ( $u = s_1^* = 218$ ) ;
- la commande doit être passée immédiatement pour bénéficier du tarif ( $u = 250$ ).

L'espérance mathématique de rupture de stock  $I_r(u)$  est dans le premier cas (cf. tableau 249, page 848)  $I_r(u = s_1^* = 218) = 3,88$  (dont 40 %, c'est-à-dire 1,55, correspondent à une demande différée et vient donc immédiatement en déduction de la livraison) et le stock résiduel moyen disponible juste avant la livraison est 55,22. Dans le second cas, on trouve facilement (en application de la relation 147 de la page 675 et de la relation 135 de la page 670)  $I_r(u = 250) = 0,97$  et, en reprenant la notation  $R_v$  pour désigner le stock disponible avant livraison :  $R_v(u = 250) = u - DL + I_r(u = 250) = 250 - 166,67 + 0,97 = 84,30$ .

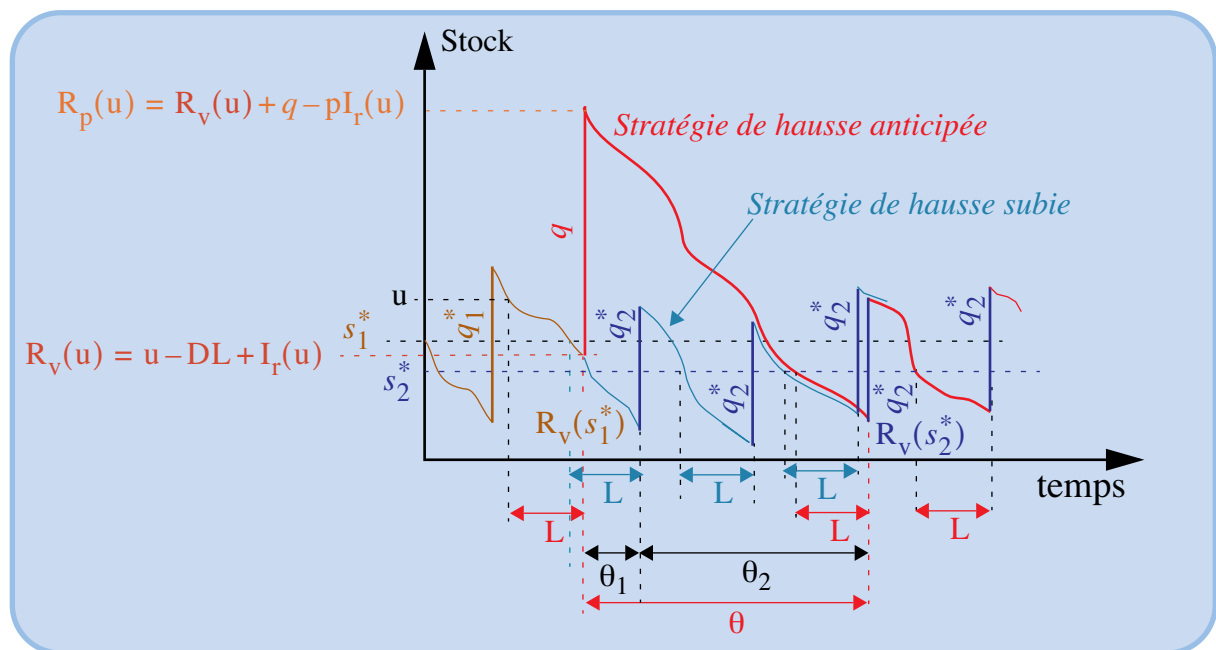
D'une manière générale, le stock disponible après livraison est donné par l'adaptation suivante de la [relation 316 de la page 865](#), obtenue en remplaçant le point de commande  $s$  par le stock  $u$  détenu à la passation de commande :

$$R_p(u) = q + \{(u - DL + I_r(u))\} - pI_r(u) \quad \text{relation 336}$$

Comme en univers certain, le stock disponible après livraison est égal à  $q$  augmenté d'une constante. La démarche du § I-2.1.1.2, page 786 est alors facilement adaptable, pour le calcul des conséquences d'une stratégie d'anticipation (voir [figure 217](#)).

FIGURE 217

*Comparaison des stratégies de hausse tarifaire anticipée et de hausse tarifaire subie en univers aléatoire*



- Le stock disponible passe de  $R_p(u)$  lors de la dernière livraison à l'ancien prix et défini par la [relation 316](#), au stock résiduel avant la première livraison au nouveau prix  $R_v(s_2^*)$ , ce qui conduit à un stock moyen  $\{R_p(u) + R_v(s_2^*)\}/2$  qui est détenu pendant une durée  $\theta = \{[R_p(u) - R_v(s_2^*)]/D\}$  ans, ce qui conduit à un coût total de possession  $ic_{u_1} \frac{R_p(u)^2 - R_v(s_2^*)^2}{2D}$ .
- Il faut y ajouter le coût associé à la rupture moyenne  $I_r(u)$  que l'on enregistrera à la livraison de  $q$  et à celle que l'on enregistrera à la livraison suivante ( $I_r(s_2^*)$ ) et qui s'élève à  $\{pc_{rd} + (1-p)(v - c_{u_1})\}[I_r(u) + I_r(s_2^*)]$ .

La [relation 337](#) est alors l'équivalent, en univers aléatoire, de la [relation 233 de la page 786](#).

$$C_1(q) = c_c + qc_{u_1} + ic_{u_1} \frac{R_p(u)^2 - R_v(s_2^*)^2}{2D} + \{pc_{rd} + (1-p)(v - c_{u_1})\}[I_r(u) + I_r(s_2^*)]$$

*relation 337*

Examinons maintenant la stratégie de hausse subie. L'intervalle de temps  $\theta$ , défini ci-dessus, se décompose en deux : tout d'abord durant une durée  $\theta_1$ , l'entreprise supporte un stock financé avec l'actuel prix  $c_{u1}$  ; ensuite, pendant  $\theta_2$  année, le nouveau régime de croisière s'applique :

- Le stock moyen détenu durant la période  $\theta_1$  s'élève à  $(R_v(u) + R_v(s_1^*))/2$  et  $\theta_1$  peut être estimé à  $\theta_1 = (R_v(u) - R_v(s_1^*))/D$  ; le coût de possession de ce stock est donc :  $\frac{R_v(u) + R_v(s_1^*)}{2} \theta_1 i c_{u1} = \frac{R_v(u)^2 - R_v(s_1^*)^2}{2D} i c_{u1}$ . À la fin de cette période  $\theta_1$ , l'entreprise supporte le coût associé à la rupture  $I_r(s_1^*)$ , c'est-à-dire :  $[p c_{rd} + (1-p)(v - c_{u1})] I_r(s_1^*)$ .
- Pendant la période  $\theta_2$ , égale à la différence entre  $\theta$  et  $\theta_1$  :

$$\theta_2 = \frac{R_p(u) - R_v(s_2^*)}{D} - \frac{R_v(u) - R_v(s_1^*)}{D} = \frac{R_p(u) - R_v(u) + R_v(s_1^*) - R_v(s_2^*)}{D}$$

elle supportera la fraction  $\theta_2$  du coût moyen annuel  $M$  associé au nouveau régime de croisière (ici 82 202 dollars liduriens).

En définitive, le coût  $C_2(q)$  associé à la stratégie de hausse subie est :

$$C_2(q) = M \left\{ \frac{R_p(u) - R_v(u) + R_v(s_1^*) - R_v(s_2^*)}{D} \right\} + i c_{u1} \frac{R_v(u)^2 - R_v(s_1^*)^2}{2D} + [p c_{rd} + (1-p)(v - c_{u1})] I_r(s_1^*) \quad \text{relation 338}$$

La relation 338 est alors l'équivalent, en univers aléatoire, de la relation 233 de la page 786.

À partir des relations 337 et 338, il est ensuite facile de montrer que l'économie  $C_2(q) - C_1(q)$  réalisée en préférant la stratégie d'anticipation est maximale pour :

$$R_p(u)^* = \frac{M}{i \cdot c_{u1}} - \frac{D}{i} \quad \text{relation 339}$$

Ce qui, compte tenu de la relation 336 de la page 882, conduit à la relation 340.

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u1}} - \frac{D}{i} - u + DL + (1-p)I_r(u) \quad \text{relation 340}$$

Cette relation 340 est tout à fait similaire à la relation 231 de la page 785 qui caractérise l'optimum en univers certain : il suffit de remplacer «stock certain après livraison» par «espérance mathématique de stock après livraison» et de tenir compte du fait que l'on passe de l'univers certain à l'univers aléatoire dans le calcul de  $M$ , pour avoir exactement la même relation.

Le tableau 267 de la page 885 illustre l'application de ces relations à notre exemple numérique. Le nouveau coût du régime de croisière est  $M = 82087,14$  ; L'application de la relation 322 de la page 868 donne, en supposant que la livraison ne puisse être différée :  $82087,14/6 - 2400/6 - 0,6 \times 0,97 = 1597$ .



On peut ajouter que le déclenchement d'une commande de  $q$  unités alors que l'entreprise attend une livraison de  $q_1^*$  unités (cas où  $u < s_1^*$ ), conduit seulement à une modification du calcul de l'espérance mathématique du stock  $R_p(u)$  disponible après la livraison des  $q$  unités. Le stock disponible moyen après la livraison de  $q_1^*$  est:  $R_p(s_1^*) = q_1^* + s_1^* - DL + (1-p)I_r(s_1^*)$ . Entre la livraison de  $q_1^*$  et celle de  $q$ , s'écoule un intervalle de temps strictement égal à celui qui sépare le franchissement du point de commande  $s_1^*$  de celui du niveau de stock  $u$ . Il est alors possible de calculer l'espérance mathématique du stock résiduel juste avant la réception des  $q$  unités, mais il faut noter que l'on travaille alors à partir d'un stock initial ( $R_p(s_1^*)$ ) connu seulement en espérance mathématique, à moins d'effectuer une double intégration (ou sommation). Dans ces conditions, il est plus simple et sans doute pas tellement faux de reconduire purement et simplement la demande ( $s_1^* - u$ ). Compte tenu de cette dernière approximation on peut écrire alors:  $R_p(u) = q + (q_1^* + s_1^* - DL + (1-p)I_r(s_1^*)) - (s_1^* - u)$ , d'où:

$$R_p(u) = q + (q_1^* + u - DL + (1-p)I_r(s_1^*)) \quad \text{relation 341}$$

Le raisonnement du paragraphe précédent reste inchangé,  $R_p(u)$  restant du type: « $q + \text{constante}$ ». Il faut alors combiner les relations 339 et 339, pour obtenir la solution optimale de la relation 342.

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} - [q_1^* + u - DL + (1-p)I_r(s_1^*)] \quad \text{relation 342}$$

### II-2.2.3.2 Gestion indépendante des articles en présence de rabais sur quantité

On examinera succinctement comment déterminer l'approvisionnement optimal en cas d'augmentation tarifaire s'appliquant au rabais uniforme (§ II-2.2.32a) puis au rabais progressif (§ II-2.2.32b, page 885).

#### II-2.2.32a) Augmentation tarifaire dans le cas de rabais uniforme

Cette généralisation, qui ne pose aucun problème, est une combinaison des approches du § II-2.2.3.1 précédent, du § II-2.2.1, page 872, et du § I-2.1.3.1, page 796. Elle permet d'établir que la quantité optimale est l'une de celles obtenues à partir de la relation 343 (en indexant par le niveau de prix  $j$ , la quantité commandée et le coût unitaire) :

$$q_j^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} - u + DL + (1-p)I_r(u) \quad \text{relation 343}$$

en retenant celle qui maximise l'économie, dont la formulation découle directement, après indexation par  $j$ , de la relation 322 de la page 868 et où  $M$  reste toujours la somme de la dépense annuelle d'acquisition et de l'indicateur moyen annuel de gestion associés à la politique optimale du futur régime de croisière.

Illustrons ce point en reprenant l'exemple numérique du § II-2.2.1, page 872, en supposant toujours qu'une hausse tarifaire de 10 % soit annoncée et que le stock s'élève à 250 unités à la passation de la commande. La politique optimale est alors décrite dans le tableau 268 de la page 886.

TABLEAU 267

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais momentané - commande anticipée)



Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques			
Conséquences physiques	Régime transitoire	Futur régime de croisière	Régime de croisière actuel
<b>Quantité de commande</b>	<b>1 597</b>	<b>494</b>	<b>515</b>
<b>Point de commande</b>	<b>218</b>	<b>208</b>	<b>218</b>
Stock disponible à la commande	250	-	-
Intervalle moyen entre 2 livraisons	201,7 jours	59,3 jours	61,8 jours
Délai avant franchissement normal du point de commande	3,8 jours	-	-
Probabilité de rupture avant livraison	15,23%	20,42%	15,23%
Rupture moyenne de stock avant livraison (à 60 % perdue)	0,97	5,63	3,88
Rupture moyenne annuelle de stock (à 60 % perdue)	-	27,36	18,10
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	-	5,54%	3,51%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	0 jours	0,00025 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	4,86	4,66
Stock disponible avant la prochaine livraison	84,30	46,97	55,22
Stock disponible après la prochaine livraison	1 680,91	538,71	568,66
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	588,18	-	-
Stock moyen détenu	-	290,40	310,25
Taux moyen de rotation du stock	4,08	8,26	7,74
Conséquences financières			
Dépense d'acquisition (ponctuelle ou annuelle)	47 910,00	78 658,25	71 674,27
Coût moyen de commande (ponctuel ou annuel)	300,00	1 457,49	1 398,06
Coût moyen de possession (ponctuel ou annuel)	3 529,08	1 916,66	1 861,50
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	5,81	114,92	108,58
Coût moyen des demandes différées	1,94	54,72	36,19
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat exclu)	3 836,82	3 543,79	3 404,33
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat inclus)	51 741,02	82 087,12	74 970,02
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	3 135,37	-	-
Marge nette annuelle	-	13 256,21	20 595,67

Table des matières

Index thématique

### II-2.2.32b) Rabais momentané sur rabais progressif en univers aléatoire

Sur le plan des principes, rien de bien compliqué dans la mesure où il ne s'agit que de transposer l'approche utilisée au § II-2.2.3.1 précédent, dans la combinaison de celles du § II-2.2.2 (rabais progressif en univers aléatoire) et du § I-2.1.3.2, page 797 (rabais momentané sur rabais progressif en univers certain). Ceci à optimiser la fonction d'économie de la relation 344 de la page 886.

TABLEAU 268

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais momentané sur rabais uniforme - commande anticipée)

Politique optimale d'approvisionnement des (Livraison non différée - Rabais Uniforme)		
Conséquences physiques	Commande ponctuelle optimale	Politique optimale après hausse
Stock disponible à la commande	250	
Quantité de commande	1 760	1 000
Point de commande	215	187
Coût unitaire d'acquisition	29,00	31,90
Stock résiduel avant livraison	84,30	31,57
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		2,40
Intervalle de temps avant passation de la commande suivante	211,2 jours	120 jours
Probabilité de rupture avant livraison	16,69%	34,21%
Rupture moyenne de stock avant livraison (à 60 % perdue)	0,97	11,24
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,05%	1,12%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	350,7 jours
Stock moyen disponible après livraison	1 843,91	1 027,08
Stock moyen (annuel) détenu entre les 2 livraisons successives	706,86	524,08
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,58
Délai avant franchissement normal du point de commande	4,2 jours	-
Conséquences financières		
Dépense d'acquisition (ponctuelle & moyenne annuelle)	51 040,00	76 043,79
Coût de commande (ponctuel & moyen annuel)	300,00	720,00
Coût (ponctuel & moyen annuel) de possession	-	3 343,63
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	-	131,08
Coût moyen annuel des demandes différées	-	53,94
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	-	4 248,64
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	-	80 161,35
Marge nette moyenne annuelle	-	15 191,36
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	5 088,46	-

Table des matières

Index thématique

$$\begin{aligned}
 C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j) = & M \left\{ \frac{R_p(u) - R_v(u) + R_v(s_1^*) - R_v(s_2^*)}{D} \right\} \\
 & + i \left( c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \frac{R_v(u)^2 - R_v(s_1^*)^2}{2D} + \left[ pc_{rd} + (1-p) \left\{ v - \left( c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \right\} \right] I_r(s_1^*) \\
 & - \left[ c_c + q_j \left( c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) + \frac{R_p(u)^2 - R_v(s_2^*)^2}{2D} \cdot i \cdot \left( c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \right] \\
 & - \left[ pc_{rd} + (1-p) \left( v - \left( c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \right) \right] [I_r(u) + I_r(s_2^*)]
 \end{aligned}$$

relation 344

Cette relation qui conduit également à un réseau de courbes avec des parties réelles et des parties virtuelles, mais maintenant, la «jonction» entre les parties réelles n'est plus assurée. La forme analytique de ces courbes étant du type  $a_j + b_j q + c_j q^2 + q_j/q$ , on montre facilement qu'avec les valeurs prises par les coefficients, la partie de ces courbes associée aux valeurs positives de  $q$  se caractérise par un minimum suivi d'un maximum. De ce fait, la résolution numérique du problème posé est un peu plus complexe que dans les cas précédents, car la quantité optimale à commander peut être l'une des bornes de chaque plage de quantités que l'on peut commander à un coût unitaire donné, ou être le maximum local de l'une de ces courbes, à condition qu'il ne soit pas virtuel (ajoutons que la recherche de ce maximum est facilitée par la connaissance d'une borne inférieure obtenue facilement à l'aide de la dérivée seconde de la fonction à optimiser).

Illustrons rapidement ce cas de figure en reprenant l'exemple du paragraphe précédent, mais en passant d'un rabais uniforme à un rabais progressif. La politique optimale est décrite dans le [tableau 269 de la page 888](#).

### II-2.2.3.3 Rabais momentané en univers aléatoire et gestion interdépendante des articles en raison d'une utilisation commune et simultanée de mêmes ressources rares

Le cas de figure étudié maintenant est une combinaison des problématiques du § I-2.3.14c, page 820 (cas de l'univers certain), du § II-2.1.1, page 863 (contrainte budgétaire en univers aléatoire), du § II-2.1.2, page 867 (contrainte de stockage en univers aléatoire) et du § II-2.2.3.1, page 881 (augmentation tarifaire dans le cas d'une gestion indépendante des articles sans rabais sur quantité). Le problème posé est en effet celui de la maximisation de l'économie réalisée sur l'ensemble des articles  $\sum_j \{C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j)\}$ .

- où  $C_{2j}(q_j)$  et  $C_{1j}(q_j)$  ne sont autres que les fonctions de coût définies par les relations 337 (page 882) et 338 (page 883), avec adjonction de l'indice  $j$  associé aux articles,
- avec prise en compte simultanée
  - de la contrainte financière (montant maximal de la commande à passer :  $\sum_j c_{u_{1j}} \cdot q_j \leq B$ , [relation 262 de la page 818](#), selon la démarche décrite au § I-2.3.14c, page 820)
  - et de la contrainte de stockage, après livraison, où l'on travaille maintenant en espérance mathématique des stocks disponibles après livraison, noté  $R_p(u_j)$  sachant que les stocks disponibles lors de la passation de commande sont  $u_j$ .

On adapte alors la [relation 317 de la page 865](#), en tenant compte du fait qu'il n'y a pas lieu ici de prendre en compte le coefficient d'abattement car la livraison s'effectue simultanément pour tous les articles, en cas de décision d'achat anticipé pour bénéficier des prix actuels (ce qui revient à dire ici que l'on ne considère pas le cas, peu vraisemblable, où les livraisons peuvent être différées, comme si la passation de commande s'effectuait, pour chaque article, au franchissement du point de commande, mais à l'ancien prix):



TABLEAU 269

*Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais momentané sur rabais progressif - commande anticipée)*

<b>Politique optimale d'approvisionnement des (Livraison non différée - Rabais Progressif)</b>		
<b>Conséquences physiques</b>	<b>Commande ponctuelle optimale</b>	<b>Politique optimale après hausse</b>
<b>Stock disponible à la commande</b>	<b>250</b>	
<b>Quantité de commande</b>	<b>2 303</b>	<b>1 155</b>
<b>Point de commande</b>	<b>192</b>	<b>179</b>
<b>Coût moyen unitaire d'acquisition</b>	<b>30,07309</b>	<b>33,08857</b>
Stock résiduel avant livraison	84,30	26,52
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		2,08
Intervalle de temps avant passation de la commande suivante	276,4 jours	138,6 jours
Probabilité de rupture avant livraison	30,62%	40,26%
Rupture moyenne de stock avant livraison (à 60 % perdue)	0,97	14,18
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,04%	1,23%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	344,3 jours
Stock moyen disponible après livraison	2 386,91	1 175,84
Stock moyen (annuel) détenu entre les 2 livraisons successives	1 185,47	594,50
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,04
Délai avant franchissement normal du point de commande	7 jours	-
<b>Conséquences financières</b>		
Dépense d'acquisition (ponctuelle & moyenne annuelle)	69 258,32	78 827,42
Coût de commande (ponctuel & moyen annuel)	300,00	623,38
Coût (ponctuel & moyen annuel) de possession	-	3 934,22
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	-	122,22
Coût moyen annuel des demandes différées	-	58,95
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	-	4 738,77
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	-	83 566,19
Marge nette moyenne annuelle	-	11 848,66
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	6 718,15	-

Table des matières

Index thématique

$$\sum_j a_j \cdot [q_j + \{u_j - D_j L_j + I_r(u_j)\} - p_j I_r(u_j)] \leq A$$

relation 345

On obtient alors, à l'optimum, outre la «classique» saturation des contraintes, une relation analytique qui «panache» les relations 340 (page 883) et relation 265 (page 820).

$$q_j^* = \left( \frac{M_j}{i \cdot c_{u_{1j}}} - \frac{D_j}{i} - u_j + D_j \cdot L_j + (1 - p_j)I_r(u_j) \right) - \lambda_B^* \frac{D_j}{i} - \lambda_A^* \frac{a_j D_j}{i c_{u_{1j}}}$$

avec une détermination de  $\lambda_A^*$  et  $\lambda_B^*$  identique à celle donnée par les relations 266 et 267 (page 822) en y remplaçant  $R_{v_j}$  par:  $u_j - D_j \cdot L_j + (1 - p_j)I_r(u_j)$ .

