
Chapitre XI

POLITIQUE DE GESTION CALENDRAIRE DES STOCKS «T, S»

La politique de gestion calendaire présente le double avantage d'être simple à mettre en œuvre et de permettre commodément de passer des commandes groupées à un même fournisseur. Son principe est simple : une commande est systématiquement passée à intervalle régulier auprès du fournisseur¹. Ce laps de temps séparant deux prises de décision successives est appelé **période de révision calendaire** et noté T . La quantité commandée varie habituellement d'une période à l'autre (sauf le cas étudié au § I-1, page 667), mais elle s'effectue toujours en référence avec un niveau de stock S , appelé **niveau de recomplètement**.

La période de révision calendaire sera ici considérée comme imposée, la seule variable de commande prise en compte étant S . Cette restriction n'est pas gênante dans la mesure où la détermination simultanée de valeurs optimales pour S et T conduit inéluctablement à recommander une périodicité inapplicable en pratique (5,47 jours ouvrables par exemple). D'un point de vue pratique, il est préférable de comparer le coût de différentes politiques optimales caractérisées par des périodes de révision calendaire opérationnelles (semaine, mois, trimestre, multiples entiers de jours ouvrables...)².

Cette politique conduit à passer une commande quelle qu'en soit l'importance, ce qui revient à ne pas prendre en considération le coût de commande. La détermination de la valeur optimale de S passe alors par un arbitrage entre les seuls coûts de possession et de rupture. On peut envisager de ne passer commande que si le stock disponible est inférieur à un seuil s (appelé **point de commande**), mais, dans ce cas, la politique suivie se caractériserait par 3 variables de commandes « S, s, T » et leur détermination optimale effectue un arbitrage entre les coûts de possession, de rupture et de commande. Cette politique, plus délicate à analyser, ne sera pas abordée ici. Nous réserverons l'appellation de politique de gestion calendaire à la seule politique « T, S », mais cette restriction est contestable, à certains égards. Il convient d'ajouter que l'intérêt de cette classe de modèles ne se limite pas à la prise de décisions opérationnelles en matière d'approvisionnement, mais aussi, comme on le verra, à celle de certaines décisions stratégiques ou tactiques

1. Il s'agit du fournisseur de l'usine, en ce qui concerne les composants qui ne sont pas gérés par un système de MRP ou en Juste-À-Temps, ou de l'usine ou le dépôt en ce qui concerne la distribution de produits finis (ce qui n'empêche pas que les informations de demande remontent au plus tôt les différents nœuds du réseau de distribution (voir page 931)).

2. On peut signaler qu'une aide à la détermination de la périodicité optimale sera présentée au chapitre XII, § I-2.3.3, page 826, et § II-2.1.3, page 868.

d'approvisionnement (décisions de capacité d'investissement, analyse de point mort en univers aléatoire).

On examinera dans une première section les modèles de base des politiques de gestion calendaire qui se caractérisent tous par: l'existence d'un seul étage de stock, l'hypothèse d'un délai d'obtention nul (ou sans conséquence sur l'optimisation) et l'indépendance mutuelle des articles dans la détermination des politiques optimales. La [section II, page 720](#), constitue une introduction à des modèles plus complexes, chacun d'entre eux levant une (et dans certains cas deux) des hypothèses de base de la section I. L'objectif poursuivi n'étant que d'introduire la problématique des stocks, des modèles plus élaborés de gestion calendaire levant simultanément plusieurs de ces hypothèses ne seront pas présentés.

La version CD-Rom de ce chapitre permet d'accéder directement à un logiciel exploitant les principales techniques décrites dans ce chapitre. La présence d'une icône en marge du texte (comme celle figurant dans cette page) indique la possibilité d'utilisation de la technique décrite dans le texte et le lien hypertextuel placé sur cette icône permet d'accéder à l'exemple numérique utilisé dans le texte. Vous avez la possibilité de créer vos propres exemples pour exploiter les possibilités offertes, mais ce logiciel n'a qu'une vocation pédagogique et ne prétend en aucun cas, concurrencer des logiciels professionnels¹.



SECTION I LES MODÈLES DE BASE DES POLITIQUES DE GESTION CALENDRAIRE DES STOCKS

À la distinction fondamentale des articles stockables et non stockables, correspondent des politiques optimales différentes. Dans les problèmes de gestion d'*articles non stockables*, le délai d'obtention est considéré comme nul parce qu'aucune demande n'est possible entre la prise de décision et la mise à disposition de la marchandise, ce qui fait que le stock de début de période est connu avec certitude. Ce cas de figure se rencontre dans l'approvisionnement de marchandises dont l'intérêt économique est limité à une période généralement très courte (journaux quotidiens, pain...) ou, au contraire, assez longue (décision de capacité à installer pour satisfaire une demande aléatoire).

Table des
matières

Index
thématique

Dans les problèmes de gestion d'*articles stockables*, on rencontre de plus en plus souvent le cas d'un délai d'obtention à considérer comme nul parce que l'approvisionnement s'effectue en temps masqué, une commande passée le soir à la fermeture d'un établissement étant livrée le lendemain à l'ouverture. La généralisation des approvisionnements à flux tendus fait que l'intérêt de cette classe de problèmes s'est considérablement renforcé. Là encore, le stock de début de période est connu avec certitude, que la demande non satisfaite soit perdue ou puisse être différée: en cas de rupture de stock, si les demandes non satisfaites sont perdues, on commande S unités qui sont immédiatement livrées, tandis que ***si ces demandes non satisfaites sont différées, on commandera en plus de ces S unités, le nombre de demandes non satisfaites à la période précédente.*** Si le délai d'obtention ne peut être considéré comme nul, on assiste à une interdépendance temporelle des décisions d'approvisionnement qui complique la détermination de la politique optimale, ce que l'on examinera en [section II, page 720](#).

1. Voir avertissement de la note du bas de la [page 8](#).

I-1 Gestion calendaire des articles non stockables

La détermination de la politique optimale diffère selon que la demande observée est approximée par une loi discrète (§ I-1.1) ou par une loi continue (§ I-1.2, page 672), sachant que cette dernière est souvent utilisée pour décrire une demande de nature discrète.

On examinera enfin dans un troisième paragraphe (§ I-1.3, page 677) les conséquences économiques de la solution optimale et un dernier paragraphe (§ I-1.4, page 688) sera consacré à des remarques sur la généralité du modèle proposé et sur son application au problème du point mort en univers aléatoire.

I-1.1 Détermination du stock initial S dans le cas d'une loi de demande discrète

I-1.1.1 Exemple introductif: le problème du pâtissier

L'une des spécialités du très célèbre pâtissier **LE VÔTRE** est le **Spécial Délice** dont le coût direct de fabrication est de 25 dollars liduriens (pour 6-8 personnes) et le prix de vente 60 dollars liduriens. La vente quotidienne de ce gâteau est, en semaine, de 2,5 en moyenne, et le relevé des demandes pendant trois mois laisse supposer que celle-ci suit une loi de Poisson, c'est-à-dire que l'on a la distribution de probabilités suivante du nombre X de gâteaux demandés au cours d'une journée (tronquée à $x = 10$, car la probabilité de ventes supérieures à 10 est inférieure à 0,0001).

TABLEAU 178
Distribution de probabilité de la demande quotidienne du Spécial Délice

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0003

LE VÔTRE ne saurait envisager de vendre de la pâtisserie qui ne serait pas du jour, aussi les invendus sont-ils donnés à des œuvres. **LE VÔTRE**, en commerçant avisé, a demandé à un conseil en gestion de lui indiquer combien de **Spécial Délice** mettre en fabrication chaque jour pour maximiser son bénéfice (mais l'investigation ne se limite pas au **Spécial Délice**).

Dans l'optique retenue de minimisation des coûts, le coût de possession c_p associé à un invendu est de 25 dollars liduriens, tandis que le coût de rupture c_r est égal au manque à gagner consécutif à une vente ratée, c'est-à-dire la marge $60 - 25 = 35$ dollars. Une gestion rationnelle doit permettre de calculer le stock initial S (autrement dit le nombre de gâteaux à fabriquer) qui minimise l'indicateur de coût de gestion $C(S)$, somme du coût de possession associé au nombre moyen¹ de gâteaux invendus en fin de journée $I_p(S)$, et du coût de rupture associé au nombre moyen de ventes ratées au cours d'une journée² $I_r(S)$:

1. En toute rigueur, il s'agit d'une espérance mathématique; on utilisera le vocable de **rupture de stock moyenne** ou, plus simplement, celui de **rupture de stock**.

2. On parlera encore de **stock résiduel moyen**. Au cours d'une journée donnée, les deux événements «gâteau ayant manqué à la vente» et «gâteau n'ayant pas trouvé acheteur» sont incompatibles; on s'intéresse ici à des informations moyennes sur longue période.

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) \quad \text{relation 132}$$

ce qui donne ici: $C(S) = 25 \cdot I_p(S) + 35 \cdot I_r(S)$.

La valeur optimale S^* de l'approvisionnement initial est telle que le coût $C(S^*)$ est inférieur à celui associé aux stocks initiaux immédiatement inférieur ou supérieur ($S^* \pm 1$), c'est-à-dire qu'il est inférieur à $C(S^* + 1)$ et à $C(S^* - 1)$. Il faut donc

chercher S^* tel que: $\begin{cases} C(S^*) < C(S^* + 1) \\ C(S^*) < C(S^* - 1) \end{cases}$, ce qui peut encore s'écrire:

$$\begin{cases} C(S^* + 1) - C(S^*) > 0 \\ C(S^*) - C(S^* - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{relation 133}$$

Cette relation 133 conduit à étudier comment se comporte l'évolution de la différence de coût de stocks successifs: $C(S + 1) - C(S)$. Arrivé à ce stade du raisonnement, on quitte la problématique des stocks, pour résoudre un problème mathématique.

I-1.1.2 Digression mathématique

L'étude de $C(S + 1) - C(S)$ passe par celle de $I_r(S + 1) - I_r(S)$ car nous verrons que l'on peut exprimer cette variation de coût en fonction de la seule variation de rupture moyenne (avec la relation 136 de la page 670).

L'espérance mathématique du stock défaillant $I_r(S)$ est une fonction mathématique comme une autre. L'étude du sens de variation d'une fonction constitue l'un des points essentiels de toute étude d'une fonction. Lorsque celle-ci est dérivable, on analyse pour ce faire la fonction dérivée. Lorsque cette fonction est discrète, il faut alors étudier le comportement de la différence $I_r(S + 1) - I_r(S)$, qui a la même signification que la fonction dérivée.

En effet, la dérivée $f'(x_0)$ en un point x_0 , d'une fonction quelconque $f(x)$ est la limite du rapport $f'(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$. Lorsque la variable x n'est suscep-

tible de varier que par palier «saut» $\Delta x = 1$, on a alors $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f(x_0 + 1) - f(x_0)$, qui est l'équivalent en formulation continue de $I_r(S + 1) - I_r(S)$ en formulation discrète.

Outre l'étude du sens de variation de $I_r(S)$, on examinera également la relation qui lie $I_p(S)$ et $I_r(S)$ ainsi que les modalités de calcul pratique de $I_r(S)$.

I-1.1.2.1 Calcul analytique de $[I_r(S + 1) - I_r(S)]$

Reprenons la distribution de probabilités de la loi de demande quotidienne du **Spécial Délice** et supposons que l'on veuille calculer la rupture moyenne $I_r(S = 4)$ associée au stock initial $S = 4$. On doit alors calculer l'espérance mathématique de $X - 4$ (pour des valeurs de X supérieures à 4), réalisé dans les colonnes 3 et 4 du **tableau 179** et correspondant au calcul suivant:

$$\begin{aligned}
 I_r(S=4) &= \sum_{x=5}^{10} (x-4) \cdot P(X=x) \\
 &= 1 \cdot P(X=5) + 2 \cdot P(X=6) + 3 \cdot P(X=7) + 4 \cdot P(X=8) \\
 &\quad + 5 \cdot P(X=9) + 6 \cdot P(X=10)
 \end{aligned}$$

De même, dans les colonnes 5 et 6 de ce [tableau 179](#), on a calculé la rupture moyenne pour un stock initial $S=5$:

$$\begin{aligned}
 I_r(S=5) &= \sum_{x=6}^{10} (x-5) \cdot P(X=x) \\
 &= 1 \cdot P(X=6) + 2 \cdot P(X=7) + 3 \cdot P(X=8) + 4 \cdot P(X=9) + 5 \cdot P(X=10)
 \end{aligned}$$

TABLEAU 179
Calcul direct du stock moyen possédé et de la rupture de stock

Données de la demande		Calcul de la rupture moyenne pour				$I_r(x)$ $- I_r(x + 1)$ $= P(X > x)$ (7)	Calcul du stock moyen possédé pour $S = 4$	
		$S = 4$		$S = 5$			$4 - x$ (8)	$(4 - x).P(X = x)$ (9)
x (1)	$P(X = x)$ (2)	$x - 4$ (3)	$(x - 4). P(X = x)$ (4)	$x - 5$ (5)	$(x - 5). P(X = x)$ (6)			
0	0,0821	-	-	-	-	0,9179	4	0,3284
1	0,02052	-	-	-	-	0,7127	3	0,6156
2	0,2565	-	-	-	-	0,4562	2	0,5130
3	0,2138	-	-	-	-	0,2424	1	0,2138
4	0,1336	-	-	-	-	0,1088	0	-
5	0,0668	1	0,0668	-	-	0,0420	-	-
6	0,0278	2	0,0556	1	0,0278	0,0142	-	-
7	0,0099	3	0,0297	2	0,0198	0,0043	-	-
8	0,0031	4	0,0124	3	0,0093	0,0012	-	-
9	0,0009	5	0,0045	4	0,0036	0,0003	-	-
10	0,0003	6	0,0018	5	0,0015	0	-	-
Σ	1,0000	-	$I_r(4) = 0,1708$	-	$I_r(5) = 0,0620$	-	-	$I_p(4) = 1,6708$

Il ressort des calculs que le fait de faire passer le stock initial S , de 4 à 5, diminue la rupture moyenne en la faisant passer de 0,1708 à 0,0620. Mais on peut trouver directement ce résultat:

$$\begin{aligned}
 I_r(S=4) - I_r(S=5) &= \sum_{x=5}^{10} (x-4) \cdot P(X=x) - \sum_{x=6}^{10} (x-5) \cdot P(X=x) \\
 &= 1P(X=5) + (2-1)P(X=6) + (3-2)P(X=7) + (4-3)P(X=8) \\
 &\quad + (5-4)P(X=9) + (6-5)P(X=10) \\
 &= P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \\
 &= \sum_{x=5}^{10} P(X=x) = P(X > 4)
 \end{aligned}$$

Autrement dit, la diminution de rupture moyenne $I_r(S)$ occasionnée en augmentant d'une unité un stock préalablement dimensionné à $S = 4$, est égale à la probabilité que la demande soit strictement supérieure au stock initial $P(X > 4)$. Ce que l'on vient d'établir n'est pas seulement vrai pour le cas particulier étudié, cette propriété se démontre sans difficulté d'une façon générale¹ (mais le lecteur de formation non scientifique peut sans inconvénient «sauter» cette démonstration).

Cette propriété est valable quelle que soit la distribution de probabilité de la loi de demande (par hypothèse discrète), puisqu'aucune restriction n'a été faite sur cette distribution.

$$I_r(S+1) - I_r(S) = -P(X > S) \quad \text{relation 134}$$

La colonne 7 du **tableau 179** donne la diminution de rupture moyenne que l'on obtient en accroissant d'une unité ce stock S .

I-1.1.2.2 Relation entre $I_r(S)$ et $I_p(S)$

Lorsque le coût de possession c_p n'est pas lié au temps, on a vu que le stock moyen sur lequel pèse le coût de possession est celui constaté en fin de période. Son espérance mathématique dans le cas discret est²:

$$I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S) \quad \text{stock moyen possédé calculé sur la base du stock résiduel de fin de période} \quad \text{relation 135}$$

On peut vérifier cette relation dans le **tableau 179**: $I_p(S=4) = 4 - 2,5 + 0,1708 = 1,6708$.

Le coût $C(S)$ peut s'écrire, en utilisant la **relation 135**, comme une fonction de la seule rupture moyenne $C(S) = c_p \cdot [S - \bar{x} + I_r(S)] + c_r \cdot I_r(S)$, ce qui conduit à la **relation 136**.

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) = c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_r + c_p) \cdot I_r(S) \quad \text{relation 136}$$

La **relation 135**, on le verra, reste vraie si la distribution de probabilités de la demande est continue. La **relation 136** qui découle directement de la **relation 135** est alors générale pour les articles non stockables.

$$\begin{aligned} 1. \quad I_r(S) &= \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) = \sum_{x=S+1}^{\infty} x \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+1}^{\infty} S \cdot P(X=x) \\ &= \left[(S+1) \cdot P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} x \cdot P(X=x) \right] - \left[S \cdot P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} S \cdot P(X=x) \right] = P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) \\ I_r(S+1) &= \sum_{x=S+2}^{\infty} [x-(S+1)] \cdot P(X=x) = \sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+2}^{\infty} P(X=x) \\ I_r(S) - I_r(S+1) &= \left[P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) \right] - \left[\sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+2}^{\infty} P(X=x) \right] = \sum_{x=S+1}^{\infty} P(X=x) = P(X > S) \\ 2. \quad I_p(S) &= \sum_{x=0}^{S-1} (S-x) \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^S (S-x) \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} (S-x) \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+1}^{\infty} (S-x) \cdot P(X=x) \\ I_p(S) &= S \cdot \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) - \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x) - \left[- \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) \right] \end{aligned}$$

Revenons sur l'interprétation de la **relation 135**. Deux points intéressants méritent d'être notés.

- Cette relation peut encore s'écrire $I_p(S) = S - [\bar{x} - I_r(S)]$, ce qui veut dire que le stock résiduel moyen $I_p(S)$ est égal au stock de départ S diminué de la demande moyenne satisfaite $[\bar{x} - I_r(S)]$, puisque la demande moyenne exprimée \bar{x} est nécessairement la somme de la demande moyenne satisfaite et de la rupture moyenne de stock $I_r(S)$, une demande exprimée ne pouvant qu'être satisfaite ou non satisfaite.
- Cette **relation 135** peut également s'écrire :

$$\bar{x} - I_r(S) = S - I_p(S) \quad \text{relation 137}$$

Demande moyenne satisfaite = Offre moyenne utilisée

Son interprétation vient d'être faite, en ce qui concerne la demande moyenne satisfaite. Le second membre s'interprète bien comme l'offre moyenne utilisée car l'offre initiale S se décompose nécessairement en une offre moyenne utilisée et une offre moyenne inutilisée, laquelle n'est autre que le stock résiduel moyen $I_p(S)$. Cette relation est donc une relation particulière d'équilibre entre une offre et une demande.

I-1.1.2.3 Calcul de $I_r(S)$

Il n'y a rupture de stock que si l'on a $x > S$. L'espérance mathématique du nombre de demandes non satisfaites, que l'on désignera également sous le nom de **rupture de stock moyenne**, est alors :

$$I_r(S) = \sum_{x>S} (x-S) \cdot P(X=x) = \sum_{x>S} x \cdot P(X=x) - S \sum_{x>S} P(X=x)$$

D'où la **relation 138** :

$$I_r(S) = \sum_{x>S} x \cdot P(X=x) - S \cdot P(X>S) \quad \text{relation 138}$$

Le premier terme du second membre de l'équation correspond à un «calcul tronqué» de moyenne, qui s'effectue plus ou moins facilement selon les distributions étudiées. On montre¹ par exemple, pour une loi de Poisson de paramètre λ , que $\sum_{x>S} x \cdot P(X=x) = \lambda \cdot P(X \geq S) = \lambda \cdot [P(X>S) + P(X=S)]$, d'où l'on tire :

$$I_r(S) = \lambda \cdot P(X=S) + (\lambda - S) \cdot P(X>S), \text{ pour } \mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{relation 139}$$

I-1.1.3 Détermination de la solution optimale

À partir de la **relation 136** ($C(S) = c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_r + c_p) \cdot I_r(S)$) on obtient :

$$\begin{aligned} C(S+1) - C(S) &= [c_p \cdot (S+1) - c_p \bar{x} + (c_r + c_p) \cdot I_r(S+1)] \\ &\quad - [c_p \cdot S - c_p \bar{x} + (c_r + c_p) \cdot I_r(S)] \\ &= c_p + (c_r + c_p) \cdot [I_r(S+1) - I_r(S)] \end{aligned}$$

Ce qui donne, compte tenu de la **relation 134** :

$$C(S+1) - C(S) = c_p + (c_r + c_p) \cdot [-P(X>S)]$$

1. Voir Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 437, formule 3, ou encore p. 131-132.

Dans ces conditions, les inégalités de la [relation 133 de la page 668](#) deviennent :

$$c_p + (c_r + c_p) \cdot [-P(X > S^*)] > 0 ; \text{ d'où } \frac{c_p}{c_p + c_r} > P(X > S^*)$$

$$c_p + (c_r + c_p) \cdot [-P(X > S^* - 1)] < 0 ; \text{ d'où } \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X > S^* - 1)$$

La réunion de ces deux conditions conduit à la [relation 140](#) :

$$S^* \text{ optimal si : } P(X > S^*) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X > S^* - 1) \quad \text{relation 140}$$

Cette [relation 140](#) peut s'énoncer comme suit : «le niveau optimal S^* du stock initial correspond à la valeur la plus faible possible de S qui a une probabilité de rupture supérieure à la valeur calculée pour le critère».

$$S^* = \text{minimum de } S \text{ tel que : } P(X > S) < \frac{c_p}{c_p + c_r} \quad \text{relation 141}$$

Elle peut encore s'écrire sous d'autres formes¹ qui peuvent être plus faciles à utiliser selon les tables statistiques disponibles :

$$\left| \begin{array}{l} P(X \leq S^* - 1) < \frac{c_r}{c_p + c_r} < P(X \leq S^*) \\ P(X < S^*) < \frac{c_r}{c_p + c_r} < P(X < S^* + 1) \\ P(X \geq S^* + 1) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X \geq S^*) \end{array} \right. \quad \text{relation 142}$$

Dans notre exemple numérique, on a : $\frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{25}{25 + 35} = 0,4167$. Le calcul des probabilités $P(X > S)$ a été effectué colonne 7 du [tableau 179 de la page 669](#), où l'on trouve : $P(X > 2) = 0,4562$ et $P(X > 3) = 0,2424$. Or : $0,2424 < 0,4167 < 0,4562$, d'où : $S^* = 3$ (et non 2). On examinera au § I-1.3, page 677, les conséquences économiques d'un tel choix.

I-1.2 Détermination du stock initial S dans le cas d'une loi de demande continue

I-1.2.1 Exemple introductif : le problème du marchand de journaux²

L'**Univers** est un quotidien vendu 2,50 dollars liduriens dont le système de distribution est le suivant : le vendeur de journaux l'acquiert à 1,80 dollar, et ses invendus lui sont repris à 1,60 dollar pour l'inciter à gérer sa commande de journaux au mieux des intérêts de la société distributrice (comme toute tarification qui se respecte). L'analyse de ces données conduit à un coût de rupture égal au

1. Le lecteur non familiarisé avec ces transformations peut se reporter à Giard (1995, [182]), chapitre III, §I.2.1.1, p. 133.

2. Il est d'usage chez les spécialistes anglo-saxons de recherche opérationnelle d'identifier un modèle par un exemple d'utilisation caractéristique. C'est ainsi que l'on parle du problème du voyageur de commerce ou du problème du marchand de journaux ou... Nous avons adopté cette démarche en raison de ses vertus pédagogiques indéniables.

manque à gagner consécutif à une vente perdue, c'est-à-dire à $2,50 - 1,80 = 0,70$ dollar, le coût de possession est égal à la perte enregistrée par un invendu, c'est-à-dire $1,80 - 1,60 = 0,20$ dollar.

La **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville, soucieuse de rationaliser sa gestion, a fait procéder à l'étude de la demande¹ quotidienne de l'**Univers** et a trouvé que l'approximation par une loi Normale de moyenne $\bar{x} = 300$ et d'écart type $\sigma = 20$ était satisfaisante. Le problème posé est celui de la définition du nombre d'exemplaires à commander, c'est-à-dire de la définition du stock de début de période, qui minimise la fonction «indicateur de coût de gestion $C(S)$ » qui se définit, là encore (relation 132 de la page 668), comme: $C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$.

L'approximation de la loi de demande par une loi continue modifie, par rapport à ce que nous avons vu au § I-1.1, page 667, les formulations du stock moyen possédé $I_p(S)$ et de la rupture moyenne $I_r(S)$. Il convient alors de remplacer la notion de probabilité $P(X = x)$ par son équivalent continu $f(x) \cdot dx$ et la sommation \sum_0^S par l'intégration \int_0^S . En formulation continue, le coût moyen de gestion de la période se décrit donc par la relation 143 (qui est l'équivalent de la relation 136 de la page 670, trouvée pour le cas discret):

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) = c_p \cdot \int_0^S (S-x) \cdot f(x) dx + c_r \cdot \int_S^{\infty} (x-S) \cdot f(x) dx$$

relation 143

Une condition nécessaire pour que ce coût soit minimal est que sa dérivée première par rapport à S soit nulle. Il faut donc calculer cette dérivée.

I-1.2.2 Digression mathématique

Nous abordons ici des problèmes similaires à ceux étudiés au § I-1.1.2, page 668.

I-1.2.2.1 Calcul de la dérivée de $I_r(S)$ par rapport à S

Le calcul de la dérivée de $I_r(S)$, par rapport à S , présente comme particularité de porter sur une fonction faisant l'objet d'une intégration, dans laquelle, de surcroît, la variable S intervient sur l'une des bornes de l'intégrale. Sur le plan mathématique, la solution de ce problème passe par une généralisation d'un résultat classique connu sous le nom de formule de Leibniz et que nous nous

contentons de reproduire ici: $K = \int_{a(S)}^{b(S)} g(x, S) dx$. La généralisation de cette formule de Leibniz donne:

1. La demande est égale à la vente s'il y a des invendus, mais dans le cas contraire, il faut procéder à l'enregistrement des demandes non satisfaites que l'on doit ajouter ensuite au stock initial pour obtenir la demande. Il convient toutefois de noter que cette demande n'est pas indépendante des habitudes anciennes de commande; un niveau trop bas peut avoir découragé une clientèle potentielle (on retrouve ici implicitement un problème de perte de goodwill que l'on devrait inclure dans le coût de rupture).

$$\frac{dK}{dS} = \int_{a(S)}^{b(S)} \frac{\partial g(x, S)}{\partial S} dx + g[b(S), S] \cdot \frac{db(S)}{dS} - g[a(S), S] \cdot \frac{da(S)}{dS} \quad \text{relation 144}$$

L'application de cette formule au problème posé est immédiate :

- $K = I_r(S) = \int_S^{\infty} (x - S) \cdot f(x) dx$;
- $g(x, S) = (x - S) \cdot f(x)$, dont la dérivée par rapport à S est : $\frac{\partial g(x, S)}{\partial S} = -f(x)$;
- $a(S) = S$, dont la dérivée par rapport à S est : $\frac{da(S)}{dS} = 1$;
- $b(S) = \infty$, que l'on peut considérer ici comme une constante H aussi grande que l'on voudra (la notion d'une demande infinie n'ayant aucun sens concret) et dont la dérivée par rapport à S sera en conséquence nulle : $\frac{db(S)}{dS} = 0$.

L'application de la [relation 144](#) donne :

$$\frac{dI_r(S)}{dS} = \int_0^{\infty} [-f(x)] dx + [(H - S) \cdot f(H)] \cdot 0 - [(S - S) \cdot f(S)] \cdot 1$$

D'où :

$$\frac{dI_r(S)}{dS} = - \int_S^{\infty} f(x) dx = -P(X > S) \quad \text{relation 145}$$

Cette [relation 145](#) est l'équivalent, dans le cas continu, de la [relation 134](#) de la [page 670](#) établie pour le cas discret.

I-1.2.2.2 Relation entre $I_p(S)$ et $I_r(S)$

On montre sans difficulté que la [relation 135](#) de la [page 670](#) établie pour une loi discrète reste vraie lorsque la loi de demande est continue :

$$I_p(S) = \int_0^S (S - x) f(x) dx = \int_0^{\infty} (S - x) f(x) dx - \int_S^{\infty} (S - x) f(x) dx$$

$$= S - \bar{x} - \left[- \int_S^{\infty} (x - S) f(x) dx \right] = S - \bar{x} + I_r(S)$$

⇒ relations [135](#) et [136](#)

$I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$, stock moyen possédé calculé sur la base du stock résiduel en fin de période

$$C(S) = c_p(S - \bar{x}) + (c_p + c_r)I_r(S)$$

I-1.2.2.3 Calcul de $I_r(S)$

Une relation analogue à la [relation 138](#) de la [page 671](#) s'établit sans difficulté dans le cas continu :

$$I_r(S) = \int_S^{\infty} (x-S)f(x)dx = \int_S^{\infty} x \cdot f(x)dx - S \int_S^{\infty} f(x)dx$$

$$I_r(S) = \int_S^{\infty} x \cdot f(x)dx - S \cdot P(X > S)$$

relation 146

Le premier terme du second membre de l'équation correspond encore à un calcul «tronqué» de moyenne, qui s'effectue plus ou moins facilement selon les distributions étudiées. On montre¹ que :

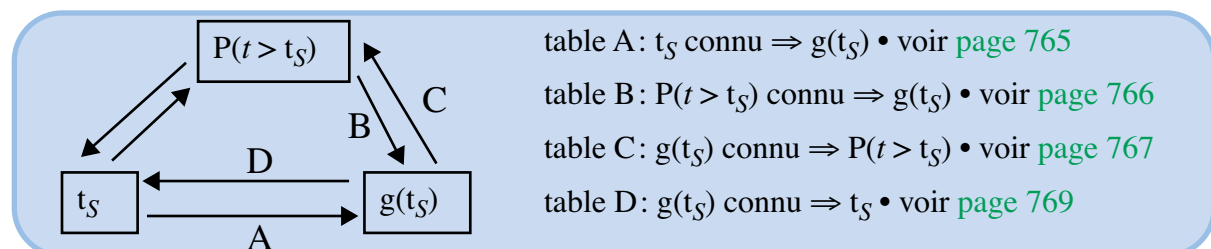
$$I_r(S) = \sigma \{ f(t_S) - t_S P(t > t_S) \} = \sigma g(t_S) \text{, pour } \mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma) \text{ avec } t_S = (S - \bar{x})/\sigma$$

$$\text{et } f(t_S) = e^{-t_S^2/2} / \sqrt{2\pi}$$

relation 147

La quantité entre { }, que l'on a notée également $g(t_S)$ dans la relation 147, est telle qu'à une valeur $g(t_S)$ ne peut correspondre qu'une valeur et une seule de t_S . En statistique, des tables existent qui permettent de trouver, par simple lecture, la valeur de t_S correspondant à une valeur donnée de $P(t > t_S)$, ou l'inverse. On peut donc constituer des tables établissant la correspondance entre deux des grandeurs suivantes : t_S , $g(t_S)$ et $P(t > t_S)$, comme l'illustre la figure 183. Les tables reliant t_S à $P(t > t_S)$ existent déjà². Les quatre autres tables possibles qui présentent un intérêt opérationnel pour des calculs sur calculette, sont fournies aux pages 765 à 769. Leur usage sera expliqué aux pages 677 (table A et B) et 679 (tables C et D)

FIGURE 183

Relations entre t_S , $P(t > t_S)$ et $g(t_S)$ 

Sous Excel, le calcul de $g(t_S)$ pour une valeur t_S mise dans la cellule B1 est effectué en tapant «=EXP(-B1*B1/2)/RACINE(2*PI())-B1*(1-LOI.NORMALE(B1;0;1;1))» dans la cellule B2 dans laquelle on veut calculer $g(t_S)$.

1. Pour la loi Normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma)$ de densité de probabilité $h(x)$, la densité de probabilité de la loi Normale centrée

réduite $\mathcal{N}(0,1)$ étant alors notée $f(t)$: $h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ et $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ implique :

$h(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)$. On en déduit que $I_r(S) = \int_S^{\infty} (x-S)h(x)dx = \int_S^{\infty} x \cdot h(x)dx - S \cdot P(X > S)$, ce qui conduit, en posant $t_S = \frac{S-\bar{x}}{\sigma}$

$\int_{t_S}^{\infty} x \cdot h(x)dx = \bar{x} \cdot P(t > t_S) + \sigma \cdot f(t_S)$, d'où : $I_r(S) = \sigma \cdot f(t_S) - \sigma \frac{S-\bar{x}}{\sigma} P(t > t_S) = \sigma [f(t_S) - t_S P(t > t_S)]$.

Des résultats analytiques ont également été établis pour la loi Gamma (voir Burton, [81]).

2. Voir **Giard**, *Statistique appliquée à la gestion*, 7^e édition, p. 517 à 519, [182].



TS1				
	A	B	C	D
1	ts =	1		
2	g(ts)	0,08332		B2
3				=EXP(-B1*B1/2)/RACINE(2*PI())- B1*(1-LOI.NORMALE(B1;0;1;1))

Calcul direct de g(ts)

I-1.2.3 Détermination de la solution optimale

On a vu au § I-1.2.2.2, que la relation 136 de la page 670 ($C(S) = c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_r + c_p) \cdot I_r(S)$) reste valable dans le cas continu. La recherche de l'optimum s'effectue alors facilement en utilisant la relation 145 de la page 674

$$\left(\frac{dI_r(S)}{dS} = -\int_S^{\infty} f(x)dx = -P(X > S) \right) : \frac{dC(S)}{dS} = c_p + (c_p + c_r)[-P(X > S)] . \text{ Cette}$$

dérivée étant nulle à l'optimum, on en déduit la relation 148.

$$S^* \text{ optimal si : } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_p + c_r}, \text{ ou } P(X < S^*) = \frac{c_r}{c_p + c_r} \quad \text{relation 148}$$

Cet optimum est un minimum, car la dérivée seconde de $C(S)$ est toujours positive, puisque la dérivée de $P(X > S)$, fonction de répartition, n'est autre que la densité de probabilité, dont la valeur est toujours positive (ou nulle).

Que la loi de demande soit discrète ou continue, on remarque que la politique optimale d'approvisionnement se détermine à partir d'une probabilité de rupture optimale faisant intervenir des coûts relatifs. Il en est ainsi dans la plupart des modèles de gestion des stocks présentés dans cet ouvrage¹.

Le problème de la **MAISON DE LA PRESSE** se résout alors par simple consultation d'une table de la loi Normale²: $P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{0,2}{0,2 + 0,7} = 0,222$, d'où :

$t_s = 0,7655 = \frac{S - 300}{20} \rightarrow S^* = 315,3 \approx 315$. L'approvisionnement périodique optimal est donc $S^* = 315$.

Il convient de noter que l'on a utilisé ici, ce qui est classique³, une distribution continue pour décrire la distribution d'une variable de nature discrète (le journal se vend à l'unité). En pareil cas, il convient d'introduire la correction de continuité pour calculer la probabilité de rupture; dans ces conditions, $P(X > 315) =$

1. Dans le cas contraire, au lieu de travailler sur une fonction de répartition, on travaille sur une fonction qui jouit des mêmes propriétés et, pour cette raison, est appelée **pseudo-fonction de répartition**.

2. Ici, on a utilisé la table 3-C de notre ouvrage *Statistique appliquée à la gestion* (1995, [182]), p. 519, qui retient 3 chiffres significatifs pour la probabilité, raison pour laquelle on a fourni les résultats avec 3 chiffres significatifs. L'usage d'un tableur permet d'atteindre sans problème la précision numérique désirée.

3. Voir Giard (1995, [182]), p. 153.

$$P\left(X > \frac{315 + 0,5 - 300}{20}\right) = P(T > 0,775) = 21,92\% \text{ en calcul exact (tableur) et}$$

21,77 %, si l'on arrondit la valeur de T à 0,78 pour utiliser directement une table «classique» à 2 chiffres après la virgule. Il s'ensuit que l'on n'atteindra qu'exceptionnellement la «probabilité de rupture optimale», en cas de variable de nature discrète décrite par une distribution continue (observation déjà faite dans le cas des distributions discrètes avec l'exemple de **LE VÔTRE**). *Le logiciel qui vous est proposé utilise la valeur exacte de la valeur de T associée à une probabilité et tient compte de l'impact de la correction de continuité dans la recherche la valeur de S* : pour $S = 315$, la probabilité de rupture exacte avec correction de continuité est de 21,92 %; pour $S = 314$, elle est de 23,42 % et pour $S = 316$, elle est de 20,46 %, ce qui conduit à conserver $S = 314$ dont la probabilité de rupture étant la plus proche de celle visée.

I-1.3 Les conséquences économiques de la solution optimale

Les conséquences économiques de la solution optimale peuvent s'apprécier à partir d'indicateurs physiques (qui peuvent, du reste, remettre en cause la possibilité d'application de la solution proposée) et d'indicateurs en valeur. Ces indicateurs sont utilisables pour évaluer les conséquences de n'importe quelle politique d'approvisionnement (optimale ou non) et en vérifier les possibilités d'application (voir page 648).

Table des
matières

I-1.3.1 Indicateurs physiques

Index
thématique

On retiendra cinq indicateurs: la rupture moyenne de stock (§ I-1.3.1.1), la demande moyenne satisfaite (§ I-1.3.1.2, page 678), le pourcentage moyen de demandes non satisfaites (§ I-1.3.1.3, page 679), le stock moyen possédé (§ I-1.3.1.4, page 680) et la probabilité de rupture (§ I-1.3.1.5, page 680). Deux d'entre eux sont des variables d'état dont la connaissance est nécessaire pour le calcul d'indicateurs en valeur.

I-1.3.1.1 La rupture moyenne de stock $I_r(S)$

Cet indicateur permet d'évaluer l'importance de la défaillance du système qui découle de l'adoption de la politique d'approvisionnement proposée. Une défaillance jugée excessive peut conduire à une perte de goodwill (éventuellement négligée dans les calculs) et, ce faisant, à une remise en cause de la solution envisagée.

Dans le cas du **Spécial Délice**, le calcul de $I_r(S)$ s'effectue à partir de la relation 5, puisque la loi de demande est une loi de Poisson :

$$I_r(S^* = 3) = 2,5 \cdot P(X = 3) + (2,5 - 3) \cdot P(X > 3) = 0,413$$

Sur 260 jours ouvrables $0,413 \times 260 = 107$ clients, en moyenne, partiront du magasin sans le gâteau qu'ils sont venus chercher (ce qui ne veut pas dire qu'ils seront forcément partis sans rien).

Le calcul de la rupture moyenne du quotidien l'**Univers** est plus simple puisque des tables ont été constituées à cet effet. Mais nous allons cependant effectuer le calcul direct, à l'aide de la relation 147 de la page 675, pour bien faire comprendre comment a été constituée la table A de la page 765. La variable centrée réduite

correspondant à la valeur optimale S^* est, nous l'avons vu, $t_S = 0,7655$. L'application de la [relation 147](#) conduit à : $f(t_S) = \frac{e^{-0,7655^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 0,29762$. La lecture d'une table normale donne $P(t > 0,7655) = 0,2218$ (qui diffère légèrement du 0,2222 obtenu au § I-1.2.3, [page 676](#), dans le processus de recherche de S^*), d'où :

$$g(t_S) = 0,29762 - 0,7655 \times 0,2218 = 0,1278$$

$$I_r(S) = \sigma \cdot g(t_S) = 20 \times 0,1278 = 2,556$$

Il est en réalité préférable d'utiliser la correction de continuité¹. La variable centrée réduite est alors $t_S = (315,5 - 300)/20 = 0,775$, ce qui conduit à une valeur de $g(t_S = 0,775) = 0,12559$, et une rupture moyenne de 2,512. **Cette correction de continuité sera systématiquement utilisée dans les exemples présentés dans cet ouvrage.**



TS2			
	A	B	C
1		Avec correction de continuité	Sans correction de continuité
2	xbarre =	300	300
3	sigma =	20	20
4	S =	315	315
5	ts =	0,775	0,75
6	g(ts)	0,12559	0,13117
7	Ir(S) =	2,512	2,623

Table des matières

Index thématique

Remarquons enfin que l'utilisation de la table A, [page 765](#), permettait de trouver directement pour $t_S = 0,77$ la valeur 0,12669 (au lieu de 0,1256) pour $g(t_S)$, d'où une rupture moyenne $I_r(S) = 2,534$ (au lieu de 2,512), un coût moyen de 5,2805 (inférieur de 4% au coût exact). De même, l'utilisation de la table B, [page 766](#), permettait de trouver directement pour $P(t > t_S) = P(X > S^*) = 0,222$, la valeur 0,12770 pour $g(t_S)$ et donc $I_r(S^*) = 20 \times 0,12770 = 2,554$, valeur peu différente des valeurs trouvées avec ou sans correction de continuité. Quelle que soit la méthode de calcul retenue, l'ordre de grandeur est le même. Aussi peut-on dire qu'en moyenne, sur 260 jours ouvrables, quelque 663 exemplaires de ce quotidien manqueront.



I-1.3.1.2 La demande moyenne satisfaite

Nous avons dit, en commentant la [relation 135](#), [page 670](#), que la demande moyenne satisfaite est égale à la demande moyenne exprimée (\bar{x}) diminuée de la demande moyenne non satisfaite ($I_r(S)$) pour le pâtissier, cet indicateur est donc de $2,5 - 0,413 = 2,087$ demandes satisfaites par jour, ce qui conduit, sur 260 jours ouvrables par an, à une demande moyenne annuelle satisfaite de 542,6 clients. Pour le marchand de journaux, si l'on retient la rupture moyenne calculée avec correction de continuité, la demande moyenne satisfaite chaque jour se

1. Sur ce problème de correction de continuité, voir, par exemple, Giard (1995, [182]), p. 153. Il est à noter qu'elle ne s'impose réellement qu'avec un écart-type inférieur à 10.

monte à $300 - 2,513 = 297,487$ clients, ce qui conduit à une demande moyenne annuelle satisfaite de 77347 journaux.

I-1.3.1.3 Pourcentage moyen de demande non satisfaites

L'information fournie par la demande moyenne non satisfaite ($I_r(S)$) doit être complétée par l'importance relative que cette rupture représente par rapport à la demande moyenne (\bar{x}). Cet indicateur, qui ne dépend pas de la longueur de la période retenue, est noté $\beta(S)$ et se définit¹ comme :

$$\beta(S) = \frac{I_r(S)}{\text{demande moyenne}} \times 100 \quad \text{relation 149}$$

Ce pourcentage de demandes non satisfaites est, dans l'exemple du marchand de journaux ($I_r(S) = 2,51$ avec correction de continuité) :

$$\beta(S) = \frac{2,51}{300} 100 = 0,84\%$$

Pour le pâtissier, le pourcentage de demandes non satisfaites s'élève à 16,5 %, comme vous pouvez le vérifier. Dans le cas d'une demande approximée par une loi Normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma)$, on a vu que l'on peut écrire $I_r(S) = \sigma \cdot g(t_S)$. On en tire une nouvelle formulation pour ce pourcentage de demandes non satisfaites :

$$\beta(S) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot g(t_S) \cdot 100 \quad \text{relation 150}$$

Le rapport σ / \bar{x} est connu en statistique sous le nom de coefficient de variation ; dans l'exemple du marchand de journaux, il est égal à $20 / 300 = 0,0667$. On peut encore écrire cette dernière relation de la façon suivante, permettant de calculer $g(t_S)$ à partir d'une valeur imposée $\beta(S)$ exprimée en pourcentage :

$$g(t_S) = \frac{\bar{x}}{\sigma} \cdot \frac{\beta(S)}{100} \quad \text{relation 151}$$

Cette relation permet d'utiliser les tables C et D (pages 767 et 769) pour résoudre des problèmes posés en termes de pourcentage de demandes non satisfaites :

- Les tables C et D, qui ont comme argument d'entrée $g(t_S)$, permettent de calculer directement le stock initial (table D, page 769) et sa probabilité de rupture (table C, page 767), et donc le coût de rupture implicite. Supposons par exemple que le marchand de journaux se fixe comme objectif un pourcentage de demandes non satisfaites de 1,5 %, on a alors : $\beta(S) = 1,5 = 0,06667 \cdot g(t_S) \cdot 100$ et $g(t_S) = \frac{0,015}{0,0667} = 0,225$. La lecture de la table D donne $t_S = 0,416$ d'où la valeur de S : $0,416 = \frac{S - 300}{20} \rightarrow S \approx 308$.
- La table C donne la probabilité de rupture correspondante $\alpha(S = 308) = 33,87\%$. Le coût de rupture implicite est alors tel que : $0,2 / (0,2 + c_r) = 0,3387$,

1. La multiplication par 100 est destinée à fournir un pourcentage au lieu d'une fraction.

ce qui donne un coût de rupture de 1,37 dollar lidurien et donc une perte de goodwill de 0,67 dollar.

- Outre l'utilisation citée au § I-1.3.1, la table B permet un calcul direct du pourcentage de demandes non satisfaites sans pour autant calculer $I_r(S)$. Dans notre exemple, la probabilité de rupture à laquelle on aboutit après arbitrage entre des coûts de possession et des coûts de rupture est de 22,22 %. La lecture de la table B donne en lecture directe la valeur $g(t_S)$ correspondante :

$$P(X > S) = 22,22\% \rightarrow g(t_S) = 0,12770$$

$$D'où: \beta(S) = \frac{20}{300} \times 0,12770 \times 100 = 8,51\%.$$

I-1.3.1.4 Le stock moyen possédé $I_p(S)$

Dans le cas d'articles non stockables, le stock moyen possédé correspond au stock résiduel moyen. Cet indicateur permet de se faire une idée du « gâchis » engendré par la politique d'approvisionnement retenue puisque, par hypothèse, tout article non vendu au cours de la période ne peut l'être au cours de la période suivante. Cet indicateur s'obtient à partir de la rupture moyenne de stock déjà calculée et de la [relation 135, page 670](#), valable aussi bien pour les variables discrètes que les variables continues.

- Pour le pâtissier, on aura donc : $I_p(S^* = 3) = (3 - 2,5) + 0,413 = 0,913$. Autrement dit, sur 260 jours ouvrables, **LE VÔTRE** donnera aux œuvres de l'ordre de $260 \times 0,913 = 237$ **Spécial Délice** (qui lui auront coûté $237 \times 25 = 5925$ dollars liduriens).
- Pour le marchand de journaux, on aura, en utilisant les résultats obtenus sans correction de continuité : $I_p(S = 315) = (315 - 300) + 2,556 = 17,556$ journaux. Tandis que si l'on utilise les résultats obtenus avec correction de continuité, c'est un stock résiduel moyen de 17,512 que l'on obtient. Sur 260 jours ouvrables, c'est quelque 4550 exemplaires de l'**Univers** qui seront retournés. Mais cette remarque doit être tempérée par le fait que ces retours représentent seulement $17,5/315 \approx 5,5\%$ des livraisons.

I-1.3.1.5 Probabilité de rupture $\alpha(S)$

La probabilité de rupture, que nous noterons $\alpha(S)$, est un indicateur de niveau de service très utile. Nous avons vu que l'arbitrage entre un coût de possession et un coût de rupture conduit à une détermination de S qui passe par le calcul de la probabilité de rupture. Ce calcul amène les cinq remarques.

I-1.3.15a) Non coïncidence stricte entre la probabilité de rupture requise et la probabilité de rupture effective

La recherche du niveau de stock S , à partir de la probabilité $\alpha(S)$ ne conduit habituellement pas à la définition d'un niveau de stock ayant une probabilité de rupture strictement égale à $\alpha(S)$. Ceci est évident pour les demandes suivant une loi discrète ; nous avons vu par exemple que le problème posé par la pâtisserie **LE VÔTRE** conduit à une probabilité de rupture idéale de 41,7 % et que le stock retenu en définitive correspond à une probabilité de rupture de 24,2 %. Mais il en est de même pour les lois continues dans la mesure où celles-ci sont utilisées pour

décrire des phénomènes de nature discrète (on n'achète pas une fraction de journal). Par exemple, dans le problème du marchand de journaux, la probabilité de rupture requise était de 22,22 %, alors que celle effectivement réalisée par un stock de 315 est, en utilisant la correction de continuité, de 21,92 % (voir la fin du § I-1.2.3, page 677).

I-1.3.15b) Recherche du coût de rupture implicite

Dans certains cas, le coût de rupture peut être considéré comme délicat à quantifier, notamment en raison de la difficulté de mesurer objectivement la perte de goodwill. Pour ces raisons, on peut être tenté d'imposer comme contrainte de fonctionnement au système-stock une probabilité de rupture fixée a priori.

La détermination du coût de possession ne soulevant pas les mêmes problèmes, il est facile de calculer le coût de rupture implicitement choisi par celui qui impose au système cette contrainte de fonctionnement, et permettre ainsi de juger du réalisme de cette contrainte. Supposons par exemple que la Direction de la **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville n'accepte pas une probabilité de rupture de plus de 1 % pour le quotidien l'**Univers**, on a alors, pour la même valeur de coût de possession

($c_p = 0,2$): $\frac{0,2}{0,2 + c_r} = 0,01 \rightarrow c_r = 19,8$ dollars liduriens. L'estimation de la diminution de Goodwill est donc: $19,8 - 0,7 = 19,10$ dollars.

Si le taux d'actualisation est bien de 5 % en termes réels, nous avons vu que la perte certaine d'un client conduit à une diminution de goodwill de 5 236,35 dollars liduriens. Si l'on suppose, par exemple, qu'il y a une probabilité de 0,9 pour qu'une demande non satisfaite émane d'un client régulier, on peut alors dire que la Direction attache implicitement à p , probabilité qu'un client régulier n'ayant pas trouvé son journal soit définitivement perdu, une valeur telle que : $5\,236,35 \times 0,9 \times p = 19,10$ dollars liduriens. La valeur de p que l'on en tire est 0,4 % et il ne reste plus qu'à en évaluer la vraisemblance.

Table des
matières

Index
thématique

I-1.3.15c) Probabilité de rupture et exercice annuel

La probabilité de rupture $\alpha(S)$ est définie pour une période de révision calendaire donnée (qui ne comporte qu'une journée pour le problème du marchand de journaux). Lorsque l'on désire caractériser la politique de stock retenue sur une période de temps différente, l'exercice annuel par exemple, en gardant cette notion de probabilité de rupture, il faut faire appel au raisonnement statistique.

Reprenons le problème du marchand de journaux et supposons que l'on cherche à caractériser sa gestion sur 260 jours. Le fait de soumettre à une demande aléatoire de loi $\mathcal{N}(300; 20)$ un stock initial de 315 exemplaires du journal l'**Univers** constitue une épreuve statistique indépendante des précédentes et à l'issue de laquelle l'événement «rupture de stock» peut se produire avec une probabilité de 22 %. Cette épreuve est répétée 260 fois, le nombre k de jours où l'événement «rupture de stock» se produit suit la loi binomiale $\mathcal{B}(260; 0,22)$. C'est à partir de cette distribution de probabilité qu'il faut caractériser la possibilité de rupture de stock sur une année. On peut approximer cette loi binomiale par une loi Normale de moyenne $260 \times 0,22 = 57,2$ et de variance $260 \times 0,22 \times 0,78 = 42,9$, c'est-à-dire par la loi $\mathcal{N}(57,2; 6,5)$. On aura donc en moyenne 57,2 jours de rupture par an et,

par exemple, une probabilité de 2,1 % de dépasser les 70 jours de rupture dans l'année (calcul avec correction de continuité).

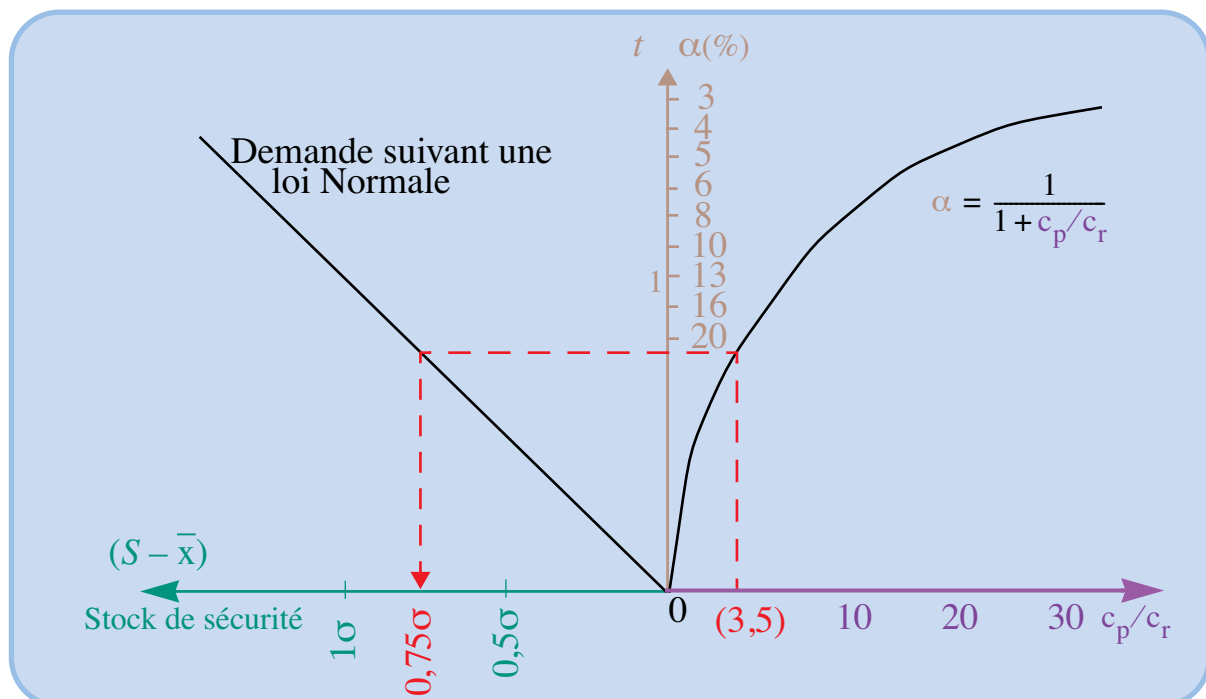
Rappelons que nous avons vu que le pourcentage de demandes non satisfaites $\beta(S)$ est indépendant du découpage temporel retenu; autrement dit, c'est le même sur une année que sur un jour ouvrable.

I-1.3.15d) Probabilité de rupture et stock de sécurité

Le stock de sécurité est la différence entre le stock initial S (ou le niveau de reconstituer s'il s'agit d'un article stockable) et la demande moyenne \bar{x} . Cette différence est habituellement positive, mais il peut très bien en être autrement. Lorsque la demande suit une loi Normale, on a, par définition de la variable centrée réduite: $t_S = \frac{S - \bar{x}}{\sigma} \rightarrow S - \bar{x} = \text{stock de sécurité} = t_S \cdot \sigma$, et le stock de sécurité se détermine manuellement sans difficulté sur un graphique gaussio-arithmétique (puisque l'axe représentatif des probabilités est établi à partir d'une graduation arithmétique des valeurs de variables centrées réduites). Par ailleurs, la probabilité de rupture ne dépend que du rapport entre le coût de possession et le coût de rupture: $P(X > S) = \frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{1}{1 + c_r/c_p}$. On peut donc établir l'abaque de la [figure 184](#), qui permet de déterminer graphiquement le niveau de stock de sécurité (d'où l'on tire la valeur de S , en y ajoutant \bar{x}) à partir du rapport c_r/c_p pour des articles dont la demande suit une loi Normale. Cet abaque n'a été construit que pour des coûts de rupture supérieurs à des coûts de possession (d'où une probabilité de rupture inférieure à 50 %, compte tenu de la [relation 148 de la page 676](#)).

FIGURE 184

Relations entre le stock de sécurité, la probabilité de rupture et les coûts de possession et de rupture dans le cas d'une demande suivant une loi Normale

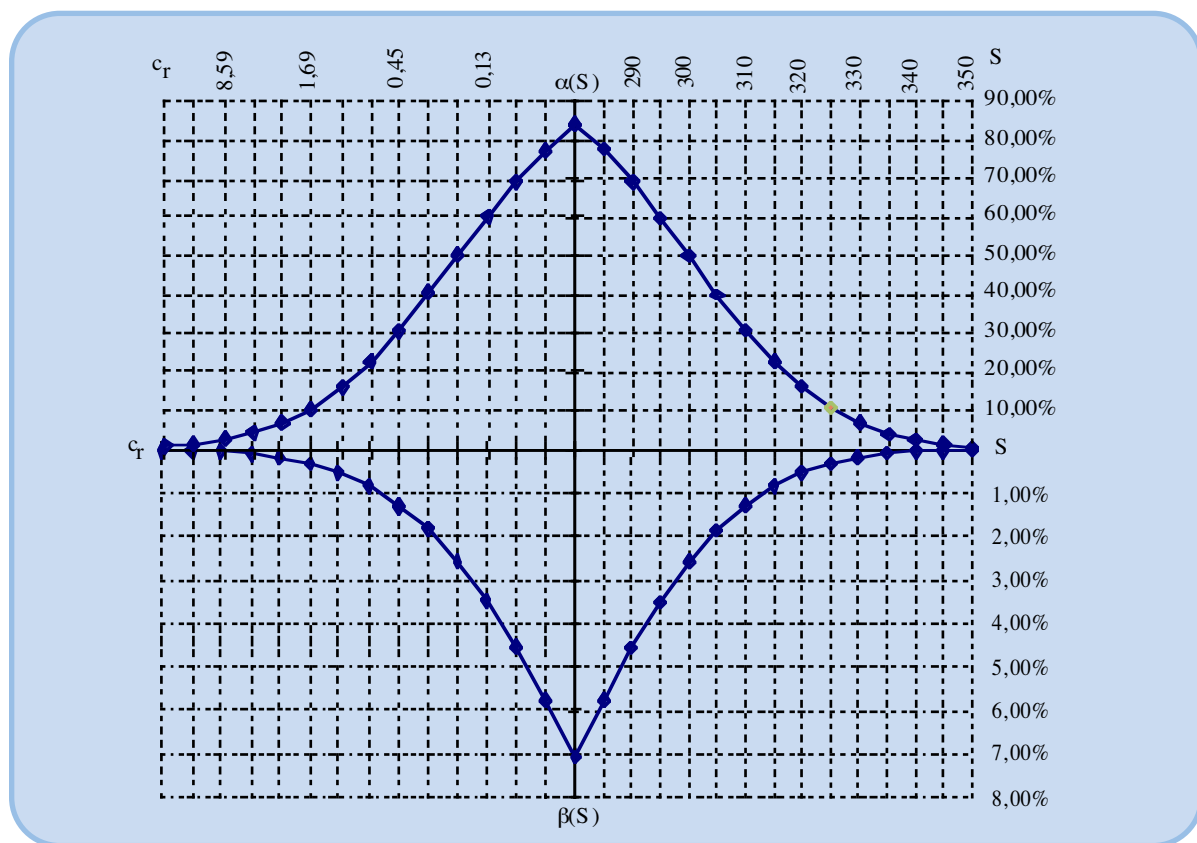


Il est possible d'utiliser de tels documents dans le cadre d'une gestion «manuelle» des stocks (par l'agent d'exécution, chargé sur le terrain de cette gestion), mais les progrès de l'informatique ont rendu totalement dépassé l'appel à ces outils graphiques qui ne présentent plus d'intérêt que pour illustrer des relations entre paramètres. Dans l'exemple du marchand de journaux, on a $c_r/c_p = 0,7/0,2 = 3,5$; on obtient alors en lecture graphique sur le schéma (droites en pointillés), la valeur du stock de sécurité, après avoir gradué la partie gauche de l'axe horizontal de façon à avoir la valeur de l'écart-type de la loi de demande, en dessous du σ porté sur cet axe.

I-1.3.15e) Liaison existant entre $\alpha(S)$, $\beta(S)$, S et c_r

La figure 185 illustre les relations qui existent entre S , $\beta(S)$, $\alpha(S)$ et c_r (en supposant, dans la liaison de c_r avec les autres paramètres, que la politique implicitement suivie est optimale).

FIGURE 185
Relation entre S , $\alpha(S)$, $\beta(S)$ et c_r (pour $c_p = 0,2$)



I-1.3.2 Indicateurs en valeur

Trois indicateurs peuvent être calculés et le dernier uniquement dans le cas d'un approvisionnement pour vente à des tiers.

I-1.3.2.1 Dépense moyenne d'acquisition

Cet indicateur évalue le décaissement moyen associé à l'approvisionnement en tenant compte de la valeur de récupération du stock résiduel.

La politique optimale suivie par la **MAISON DE LA PRESSE** a conduit à acheter, chaque jour, 315 journaux, soit une dépense de $315 \times 1,8 = 567$ dollars liduriens. Étant donné que, chaque jour, 17,512 journaux sont restitués, un avoir de $17,512 \times 1,6 = 28,02$ dollars liduriens est crédité à la **MAISON DE LA PRESSE**. La « facture moyenne » quotidienne à régler, que l'on désignera encore sous le vocable de dépense moyenne d'acquisition, s'élèvera donc à $567 - 28,02 = 538,98$ dollars liduriens. Pour une année de 260 jours ouvrables, la **MAISON DE LA PRESSE** règlera donc une facture moyenne de $538,98 \times 260 = 140\,135$ dollars liduriens.

Pour le pâtissier, le problème est un peu différent, d'une part parce que la valeur de récupération des gâteaux est nulle et, d'autre part, parce que l'approvisionnement est interne. Dans ces conditions, la dépense moyenne d'acquisition quotidienne correspond au coût direct de fabrication : $3 \times 25 = 75$ dollars liduriens. Pour une année de 260 jours ouvrables, le pâtissier dépensera donc $75 \times 260 = 19\,500$ dollars liduriens.

I-1.3.2.2 Indicateur de coût moyen $C(S)$

On peut également souhaiter calculer la valeur prise à l'optimum par l'indicateur de coût moyen que l'on a cherché à minimiser. On peut partir de la [relation 136 de la page 670](#), mais il est instructif de connaître les valeurs prises par les coûts partiels.

Le [tableau 180](#) explique, pour le pâtissier **LE VÔTRE**, la détermination de l'indicateur de coût moyen quotidien, ce qui conduit à un indicateur de coût moyen annuel de $260 \times 37,29 = 9\,696$ dollars liduriens.

TABLEAU 180

*Calcul de l'indicateur de coût moyen associé à la politique $S = 3$ pour **LE VÔTRE***

coût associé à la rupture moyenne $c_r I_r(S) = 35 \times 0,4132$	14,46
+ coût associé au stock résiduel moyen $c_p I_p(S) = 25 \times 0,9132$	+ 22,83
= indicateur de coût moyen quotidien de gestion $C(S)$	= 37,29

Table des
matières

Index
thématique

Le [tableau 181](#) explique, pour la **MAISON DE LA PRESSE**, la détermination de l'indicateur de coût moyen quotidien, ce qui conduit à un indicateur de coût moyen annuel de $260 \times 5,26 = 1\,368$ dollars liduriens.

TABLEAU 181

*Calcul de l'indicateur de coût moyen associé à la politique $S = 315$ pour la **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville*

coût associé à la rupture moyenne $c_r I_r(S) = 0,7 \times 2,512$	1,76
+ coût associé au stock résiduel moyen $c_p I_p(S) = 0,2 \times 17,512$	+ 3,50
= indicateur de coût moyen quotidien de gestion $C(S)$	= 5,26

Dans nos deux exemples, les articles étudiés sont destinés à la vente à des tiers. L'indicateur de coût $C(S)$ n'a pas de signification concrète car il est la somme d'un manque à gagner (associé à la rupture de stock) et d'un coût lié au stock résiduel, que l'entreprise a effectivement à supporter. Cet indicateur constitue, comme on l'a dit au [chapitre X, page 655](#), un artifice de présentation utilisé pour se ramener

systématiquement à une catégorie unique de problème à résoudre. Lorsqu'il y a vente à des tiers, l'indicateur synthétique pertinent sur le plan financier est celui de la marge nette $B(S)$; celle-ci se déduit directement de l'indicateur de coût $C(S)$.

On remarquera que, dans un cas comme dans l'autre, l'optimum ne se caractérise pas par une égalité des coûts partiels de rupture et de possession.

I-1.3.2.3 Marge nette moyenne $B(S)$

Lorsque le coût de rupture n'est autre que la marge unitaire que l'on n'a pas encaissée en manquant la vente d'une unité, on montre, pour une valeur quelconque du stock initial S (qu'il soit optimal ou non), que la **marge totale sur la période**¹ se calcule comme suit :

$$B(S) = c_r \cdot \bar{x} - C(S) = c_r \cdot \bar{x} - \{c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)\} \quad \text{relation 152}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$B(S) = c_r \cdot [\bar{x} - I_r(S)] - c_p \cdot I_p(S) \quad \text{relation 153}$$

ce qui permet de constater que la marge nette moyenne est égale au produit de la marge unitaire par la demande moyenne satisfaite, diminué du coût associé au stock résiduel moyen, ce qui semble parfaitement logique.

Cette relation est vraie si le coût de rupture est calculé sur la pénurie constatée en fin de période (c'est-à-dire est indépendant de la durée de la rupture) et si la demande est perdue². Cette relation se démontre sans difficulté, que la loi de demande soit discrète ou continue. Pour l'établir, il faut formuler le problème en termes de bénéfice et non de coût. Deux démonstrations sont possibles mais peuvent être «sautées» sans inconvénient.

I-1.3.23a) Première démonstration

Notons : v , le prix de vente ($v = 2,50$ pour l'**Univers**), a , le prix d'achat ($a = 1,8$ pour le vendeur de journaux), et r , le prix de reprise ($r = 1,6$ dollar lidurien). Le coût de rupture est $c_r = v - a$ ($= 2,5 - 1,8 = 0,7$) et $c_p = a - r$ ($= 1,8 - 1,6 = 0,2$). L'acquisition initiale de S journaux conduit à une dépense $S \cdot a$ et à une espérance

mathématique de recettes s'élevant à $v \int_0^S x f(x) dx$, si la demande est inférieure à S

et à $v \cdot S \cdot P(X > S)$, dans le cas contraire. Il convient également de tenir compte de la recette sur les invendus ($S - x$) que l'on encaisse si la demande est inférieure à

S . L'espérance mathématique de cette recette est $r \int_0^S (S - x) f(x) dx$. L'expression de

l'espérance mathématique de la marge $B(S)$ réalisée en dimensionnant le stock initial au niveau S est donc :

1. Il s'agit bien d'une marge et non d'un bénéfice (lequel s'obtiendrait en agrégeant les marges de différents articles, et en y retranchant l'ensemble des charges fixes) car il importe de raisonner en se basant sur les principes du *direct costing* pour déterminer la politique optimale, et surtout pas sur ceux du coût de revient complet (dont les éléments de calculs deviennent caducs si l'optimum diffère de la solution de référence implicitement prise en compte dans le coût de revient complet).

2. Si les demandes non satisfaites le sont en totalité à un coût plus élevé, on obtient une relation voisine qui sera étudiée à la page 706.

$$B(S) = -S \cdot a + v \int_0^S x \cdot f(x) dx + v \cdot S \int_S^\infty f(x) dx + r \int_0^S (S-x) f(x) dx$$

$$B(S) = -a \cdot [(S-\bar{x}) + \bar{x}] + v \left(\bar{x} - \int_S^\infty x \cdot f(x) dx \right) + v \cdot S \int_S^\infty f(x) dx + r \left((S-\bar{x}) - \int_S^\infty (S-x) f(x) dx \right)$$

$$B(S) = (v-a)\bar{x} - \left[(a-r)(S-\bar{x}) + v \int_S^\infty (S-x) f(x) dx - r \int_S^\infty (S-x) f(x) dx \right]$$

$$B(S) = (v-a)\bar{x} - [(a-r)(S-\bar{x}) + (v-r)I_r(S)] \quad \text{relation 154}$$

Compte tenu du fait que $c_r = v-a$ et $c_p = a-r$, on en déduit que $v-r = (v-a) + (a-r) = c_r + c_p$ et que: $B(S) = c_r \cdot \bar{x} - \{c_p \cdot (S-\bar{x}) + (c_p + c_r)I_r(S)\}$. L'expression entre $\{\}$ n'est autre que la somme des coûts de possession et de rupture en vertu de la [relation 136](#), ce qui achève la démonstration de la [relation 152](#).

On peut ajouter que la recherche de S^* à partir de la maximisation de la marge donne la même solution (obtenue en égalant à zéro la dérivée de $B(S)$ par rapport

$$\text{à } S): P(X < S^*) = \frac{v-a}{v-r} = \frac{v-a}{v-a+a-r} = \frac{c_r}{c_r+c_p}.$$

I-1.3.23b) Seconde démonstration

On peut également répartir des observations faites en commentant la [relation 154](#). Compte tenu de la définition de la demande moyenne satisfaite, on peut écrire:

$$\begin{aligned} B(S) &= c_r \left[\int_0^S x \cdot f(x) dx + S \int_S^\infty f(x) dx \right] - c_p \cdot I_p(S) \\ &= c_r \left[\bar{x} - \int_S^\infty x \cdot f(x) dx + S \int_S^\infty f(x) dx \right] - c_p \cdot I_p(S) \\ &= c_r \cdot \bar{x} - c_r \cdot I_r(S) - c_p \cdot I_p(S) = c_r \cdot \bar{x} - C(S) \end{aligned}$$

L'application de la [relation 152 de la page 685](#) à nos exemples numériques donne pour la valeur optimale S^* , et compte tenu du coût minimal $C(S^*)$ qui lui est associé:

- $B(S) = 2,5 \times 35 - 37,29 = 50,21$ dollars liduriens pour le pâtissier **LEVÔTRE**.
- $B(S) = 300 \times 0,7 - 5,26 = 204,74$ dollars liduriens pour la Maison de Presse d'Alphaville

La marge nette annuelle, sur la base de 260 jours ouvrables, s'élèvera donc à $260 \times 50,21 = 13\,054$ dollars liduriens pour le pâtissier et à $260 \times 204,74 = 53\,232$ dollars liduriens pour la **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville. Ces sommes correspondent à ce que peuvent espérer tirer ces commerçants de ces activités. Rappelons qu'il ne s'agit pas d'un bénéfice, les charges fixes n'ayant pas été prises en considération.

Ajoutons enfin que, le coût de rupture revêtant la signification de manque à gagner dans les deux problèmes étudiés, il est facile de calculer la marge moyenne annuelle non réalisée pour rupture de stock. Il suffit en effet de multiplier par 260 le coût associé à la rupture moyenne quotidienne. On obtient alors un manque-à-gagner annuel de $260 \times 1,76 = 457$ dollars liduriens, associé à la stratégie d'approvisionnement de 315 journaux chaque jour. De même, la marge moyenne annuelle du pâtissier, non réalisée pour rupture de stock, s'élève à $260 \times 14,46 = 3760$ dollars.

Le [tableau 182](#) et la [figure 186](#) montrent comment évoluent différents indicateurs physiques et financiers en fonction des valeurs prises par S . On peut remarquer que l'optimum trouvé est relativement plat (une erreur de ± 10 exemplaires dans la détermination de S est sans effet sensible), mais ceci est lié à un ordre de grandeur très voisin des coûts unitaires de rupture et de possession.

FIGURE 186

Évolution des coûts partiels de gestion et du coût total de gestion

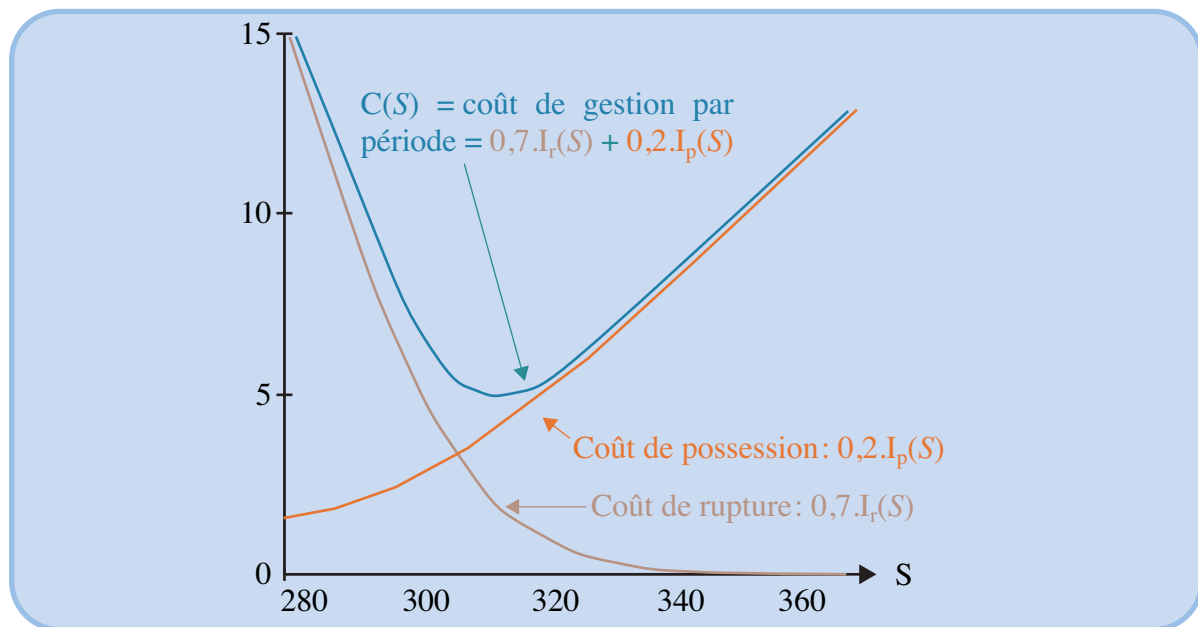


TABLEAU 182

Évolution des coûts et de la marge en fonction du stock initial[†]

Variable de commande	Indicateurs de niveau de service		Variables d'état		Paramètres économiques			
					Coût			Marge
S	$\alpha(S)$	$\beta(S)$	$I_r(S)$	$I_p(S)$	$0,7.I_r(S)$	$0,2.I_p(S)$	$C(S)$	$B(S)$
280	83,52	7,08	21,24	1,25	14,87	0,25	15,12	194,88
284	78,08	6,00	18,00	2,01	12,60	0,40	13,00	197,00
288	71,74	5,00	15,00	3,01	10,50	0,60	11,10	198,90
292	64,62	4,09	12,27	4,28	8,59	0,86	9,45	200,55
296	56,95	3,28	9,84	5,85	6,89	1,17	8,06	201,94
300	49,00	2,58	7,74	7,73	5,42	1,55	6,96	203,04
304	41,10	1,98	5,94	9,93	4,16	1,99	6,14	203,86
308	33,54	1,48	4,44	12,44	3,11	2,49	5,60	204,40
310	29,98	1,27	3,81	13,80	2,67	2,76	5,43	204,57
312	26,6	1,08	3,24	15,24	2,27	3,05	5,32	204,68
314	23,42	0,91	2,73	16,74	1,91	3,35	5,26	204,74

TABLEAU 182 (SUITE)
Évolution des coûts et de la marge en fonction du stock initial[†]

Variable de commande	Indicateurs de niveau de service		Variables d'état		Paramètres économiques			
					Coût			Marge
S	$\alpha(S)$	$\beta(S)$	$I_r(S)$	$I_p(S)$	$0,7 \cdot I_r(S)$	$0,2 \cdot I_p(S)$	$C(S)$	$B(S)$
316	20,47	0,77	2,31	18,30	1,62	3,66	5,28	204,72
318	17,75	0,64	1,92	19,92	1,34	3,98	5,33	204,67
320	15,27	0,53	1,59	21,59	1,11	4,32	5,43	204,57
324	11,03	0,36	1,067	25,07	0,75	5,01	5,76	204,24
328	7,71	0,23	0,69	28,69	0,48	5,74	6,22	203,78
332	5,21	0,15	0,45	32,44	0,32	6,49	6,80	203,20
336	3,4	0,09	0,27	36,27	0,19	7,25	7,44	202,56
338	2,71	0,07	0,21	38,21	0,15	7,64	7,79	202,21
342	1,68	0,04	0,12	42,121	0,08	8,42	8,51	201,49
346	1,00	0,02	0,06	46,07	0,04	9,21	9,26	200,74
350	0,58	0,01	0,03	50,04	0,02	10,01	10,03	199,97

†. Avec usage de la correction de continuité.

I-1.3.3 Analyse synthétique des conséquences de la politique optimale d'approvisionnement

L'ensemble des indicateurs qui viennent d'être présentés figure dans le [tableau 183 de la page 689](#) (loi de demande discrète) et [tableau 184 de la page 690](#) (loi de demande continue). L'intérêt de cette « photographie » des conséquences de la politique proposée est de permettre au décideur de vérifier que la solution proposée est bien applicable (certaines contraintes pesant sur le problème ayant pu être relaxées, c'est-à-dire omises, pour faciliter l'analyse de la solution). Rappelons que l'icône du micro-ordinateur en marge indique que, si vous travaillez sur la version CD-Rom de l'ouvrage, vous pouvez en cliquant sur cette icône, accéder directement au logiciel de calcul des politiques de stock, avec les paramètres correspondant au problème pris en exemple.

Table des matières

Index thématique

I-1.4 Remarques

Trois remarques complémentaires peuvent être faites sur le modèle d'approvisionnement d'articles non stockables que nous venons d'analyser en détail. La première a trait à une présentation possible du problème par l'analyse marginaliste. La deuxième concerne son application à des problèmes de minimisation d'une dépense. La dernière vise son utilisation dans l'étude de problèmes de point mort en univers aléatoire.

I-1.4.1 Interprétation marginaliste du résultat trouvé

On aurait pu trouver directement les relations [148](#) et [140](#) en faisant appel à l'analyse marginale (au sens donné à ce terme par la théorie économique). On a, en effet, intérêt à augmenter d'une unité le stock de départ, jusqu'au moment où *l'espérance mathématique du coût de possession de cette unité supplémentaire devient égale à l'espérance mathématique du coût de rupture*.

Or la dernière unité du stock S a une probabilité de ne pas être utilisée strictement égale à $P(X < S)$. L'espérance mathématique du coût de possession de cette unité marginale est donc $c_p P(X < S)$. De même cette dernière unité, si elle n'est

Tableau 183

Analyse de la politique optimale de la **Maison de la Presse** pour l'Univers

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour l'Univers	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 260 périodes calendaires)
Stock S de début de période	315	-
Stock de sécurité	15	-
Demande moyenne satisfaite	297,488	77 346,907
Rupture moyenne de stock	2,512	653,093
Pourcentage de demandes non satisfaites	0,84%	0,84%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	21,92%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	56,984
Stock résiduel moyen	17,512	4 553,093
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	538,98	140 135,05
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	1,76	457,17
Coût de possession	3,50	910,62
Indicateur de coût moyen	5,26	1 367,78
Marge nette moyenne	204,74	53 232,22

Table des matières

Index thématique

pas intégrée au stock de départ (qui est alors de $(S - 1)$), aura une probabilité $P(X \geq S)$ de faire défaut; l'espérance mathématique du coût de rupture de cette unité marginale est donc $c_r P(X \geq S)$. Le stock initial est optimal si ces espérances mathématiques sont égales : $c_p \cdot P(X < S) = c_r \cdot P(X \geq S) = c_r \cdot [1 - P(X < S)]$, d'où $P(X < S) = \frac{c_r}{c_r + c_p}$. Cette dernière relation est bien équivalente à la [relation 148 de la page 676](#).

Il convient cependant de noter que le raisonnement marginaliste n'est applicable que parce que les hypothèses que l'on a retenues pour le calcul de $I_p(S)$ et de $I_r(S)$ font que ces stocks ne dépendent que de l'état du système en fin de période (il n'en sera plus de même au § I-2).

I-1.4.2 Généralité du modèle de base présenté

Les exemples que nous avons retenus jusqu'ici concernaient un problème de détermination d'un niveau optimal de *production* (pour le pâtissier) et un problème d'*approvisionnement* optimal d'un distributeur (pour le marchand de journaux). Dans les deux cas, une marge pouvait directement être associée à l'article pour lequel le problème de stock se posait mais, il n'en est pas toujours ainsi.

- On peut noter tout d'abord que certains problèmes de stock concernent l'approvisionnement de facteurs productifs qui concourent avec d'autres à la

TABLEAU 184

Analyse de la politique optimale du pâtissier LE VÔTRE pour le Spécial Délice



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour le Spécial Délice	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 260 périodes calendaires)
Stock S de début de période	3	-
Stock de sécurité	0,500	-
Demande moyenne satisfaite	2,087	542,569
Rupture moyenne de stock	0,413	107,431
Pourcentage de demandes non satisfaites	16,53%	16,53%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	24,24%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	63,030
Stock résiduel moyen	0,913	237,431
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	75,00	19 500,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	14,46	3 760,08
Coût de possession	22,83	5 935,77
Indicateur de coût moyen	37,29	9 695,85
Marge nette moyenne	50,21	13 054,15

Table des matières

Index thématique

production de biens ou de services et ne font donc pas directement l'objet d'une vente. C'est le cas, par exemple, de certaines pièces détachées qui sont achetées en même temps que des machines, du fait des conséquences financières relativement lourdes d'un réapprovisionnement tardif, qu'elles soient liées à un arrêt de la production (coût du personnel payé à ne rien faire, coût associé à une modification inopinée d'un programme de production, préjudice commercial...) ou au réapprovisionnement lui-même. Ce type de constitution de stock de précaution est connu sous le terme de *spare insurance*, dans la littérature spécialisée. Plus prosaïquement, le problème sera similaire pour l'approvisionnement en farine du pâtissier **LE VÔTRE** (mais il s'agira alors d'un problème d'approvisionnement d'articles stockables, puisque le sac de farine non utilisé en fin de période calendaire le sera au cours de la période suivante).

- La notion de marge n'intervient également pas dans certains problèmes de détermination d'une capacité optimale de production, même si celle-ci est orientée vers la production d'un seul bien ou service destiné à la vente. Il faudra pour cela qu'en cas d'insuffisance de la capacité offerte, il y ait une possibilité d'assurer la production (à un coût évidemment supérieur).

Ce sera le cas par exemple d'un service de restauration d'entreprise qui, décidant de fournir un repas à tout employé se présentant à la cantine, utilise une restauration de type classique à concurrence de S repas et satisfait toute demande excédant S par des plats surgelés ; le problème est bien alors un problème de mini-

misation de coût de production dans lequel la recette unitaire n'intervient pas. Signalons enfin que d'autres problèmes de capacité optimale, en particulier ceux impliquant un choix d'investissement, font intervenir la notion de marge et procèdent également de la logique des modèles d'approvisionnement d'articles non stockables.

Nous allons partir, une fois de plus, d'un exemple introductif avant de formaliser le problème, pour obtenir une solution analytique qui sera appliquée au problème posé.

I-1.4.2.1 Exemple introductif

La société **MECANOR**, entreprise lidurienne spécialisée dans la mécanique générale, doit remplacer l'une de ses machines-outils.

Les renseignements recueillis auprès du Centre d'Etude de Technique de la branche, sur le modèle T99 qu'elle envisage d'acquérir, laissent penser que la pièce critique de ce modèle est un axe qu'un technicien de l'usine peut remplacer sans problème, mais dont le délai d'approvisionnement est normalement de 5 jours ouvrables. Il semblerait, par ailleurs, que sur la durée de vie «normale» de ce matériel, la distribution de probabilités du nombre de ruptures d'axe puisse raisonnablement être approximée par une loi de Poisson de moyenne 2. **MECANOR** peut acheter des axes de rechange en même temps que la machine, et ce pour un prix unitaire a de 500 dollars liduriens. La valeur de récupération r des axes inutilisés lors de la radiation de la machine est évaluée à 4 dollars liduriens, et correspond à la valeur du métal. Par ailleurs, le chef d'atelier estime qu'un arrêt de 5 jours de ce type de machine entraîne une dépense improductive c_r de 3000 dollars liduriens, du fait de la mauvaise utilisation de facteurs productifs qu'il entraîne; une rupture coûte alors 3500 dollars liduriens, si l'on suppose que le coût d'acquisition reste le même. Le problème posé est celui de la détermination du nombre de pièces de rechange que **MECANOR** a intérêt à acheter en même temps que la machine.

Table des
matières

Index
thématique

I-1.4.2.2 Analyse du problème

Deux formulations du problème sont possibles, mais toutes les deux conduisent à la même solution analytique.

I-1.4.2.2a) Première formulation du problème

Supposons que **MECANOR** décide d'acheter $S = 3$ pièces de rechange, elle débourse de manière certaine une somme de $500 \times 3 = 1\,500$ dollars, et d'une manière générale $500 S$. Si le nombre X de ruptures est inférieur à 3, par exemple, s'il est égal à 1, **MECANOR** récupérera $4 \times (3 - 1) = 8$ dollars, et d'une manière générale $r(S - X)$ dollars. Par contre, si le nombre de ruptures est supérieur à 3, par exemple s'il est égal à 6, **MECANOR** devra supporter une dépense de $3\,500 \times (6 - 3) = 10\,500$ dollars en sus de la dépense initiale de 1 500 dollars, et d'une manière générale $(c_r + a)(X - S)$. Résumons dans le tableau synoptique 185 ces différents cas de figure.

Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance mathématique de la dépense totale $C(S)$, en pondérant ces différentes dépenses par leurs probabilités d'occurrence avant d'en effectuer la sommation.

TABLEAU 185
Première formulation du problème du réapprovisionnement de pièces de rechange

Demande	Exemple numérique			Cas général		
	$X < 3$	$X = 3$	$X > 3$	$X < S$	$X = S$	$X > S$
Dépense initiale	500×3	500×3	500×3	aS	aS	aS
Valeur de récupération	$-4(3 - X)$	0		$-r(S - X)$	0	
Coût des unités manquantes		0	$(3000 + 500)(X - 3)$		0	$(c_r + a)(X - S)$

$$C(S) = 500 \cdot S - 4 \sum_{x < S} (S - x) \cdot P(X = x) + 3500 \sum_{x > S} (x - S) \cdot P(X = x)$$

On retrouve, dans cette formulation, l'expression analytique du stock résiduel moyen $I_p(S)$ et de la rupture moyenne $I_r(S)$:

$$C(S) = 500 \cdot S - 4 \cdot I_p(S) + 3500 \cdot I_r(S)$$

En utilisant la [relation 135 de la page 670](#), on obtient :

$$C(S) = 500(S - 4[S - \bar{x} + I_r(S)]) + 3500 \cdot I_r(S) = 4 \cdot \bar{x} + 496 \cdot S + 3496 \cdot I_r(S)$$

Dans le cas général, on a¹ :

$$C(S) = r \cdot \bar{x} + (a - r) \cdot S + (c_r + a - r) \cdot I_r(S) \quad \text{relation 155}$$

On est donc en présence d'une fonction de coût qui ne dépend que de $I_r(S)$, comme dans le cas de l'étude du problème du pâtissier. Il est alors facile, en utilisant les résultats analytiques obtenus au § I-1.1, [page 667](#), d'établir que :

$$C(S + 1) - C(S) = (a - r) + (c_r + a - r) \cdot [-P(X > S)]$$

d'où : S^* optimal si $P(X > S^*) < \frac{a - r}{c_r + a - r} < P(X > S^* - 1)$ et en posant $c_p = a - r$, on

retrouve les relations [140 à 142 \(page 672\)](#) précédemment établies.

Si la variable aléatoire X suit une loi continue au lieu d'une loi discrète, on établit de même que la solution optimale est obtenue en utilisant la [relation 148 de la page 676](#).

I-1.4.22b) Seconde formulation du problème

La formulation que l'on vient de présenter s'articule sur le stock initial S , mais on peut également en proposer une autre dont le « pivot » est la demande X . Cette seconde formulation n'ajoute rien sur le plan opérationnel, mais elle permet tout d'abord d'illustrer le fait que la genèse d'un même modèle peut procéder de démarches initiales différentes. D'autre part, elle conduit directement à une expression analytique du coût qui est identique, à une constante additive près, à celle introduite dès le début de ce chapitre et, de ce fait, illustre la généralité de ce type de formulation.

Le point de base du raisonnement est la constatation que, quelle que soit la politique d'approvisionnement retenue (S), une demande X conduit à une dépense

1. Cette [relation 155](#) peut encore s'écrire $C(S) = a \cdot S - r \cdot I_p(S) + (c_r + a) \cdot I_r(S)$, en utilisant la [relation 135 de la page 670](#).

minimale de $500X$ et, d'une manière générale, de aX . Cela dit, il faut, là encore, dissocier le cas de figure où la demande est inférieure à S de celui où elle lui est supérieure.

- Supposons tout d'abord que la demande X soit égale à 1, pour un stock initial S de 3 pièces de rechange. **MECANOR** doit financer en plus de la première unité (déjà prise en compte avec le coût de $500X$), les $3 - 1 = 2$ dernières au coût unitaire de 500, duquel il convient de défalquer la valeur de récupération.
- Supposons maintenant qu'il y a rupture de stock de pièces détachées, parce que la demande X est supérieure à S ; prenons $X = 6$ pour fixer les idées. Pour satisfaire les $(6 - 3)$ dernières demandes, il faudra consentir à un supplément de dépense de $(6 - 3)3000 = 9000$ dollars, en plus des 500 dollars déjà pris en compte pour chacune d'entre elles au début du raisonnement. D'une manière générale, il faudra ajouter pour les $(X - S)$ dernières demandes un supplément de dépense de $c_r(X - S)$. Résumons, dans le tableau synoptique 186, ces différents cas de figure :

TABLEAU 186

Seconde formulation du problème du réapprovisionnement de pièces de rechange

Demande	Exemple numérique			Cas général		
	$X < 3$	$X = 3$	$X > 3$	$X < S$	$X = S$	$X > S$
Coût (minimal) d'acquisition des unités utilisées	$500X$	$500X$	$500X$	aX	aX	aX
Coût des unités inutilisées	$(500 - 4)(3 - X)$	0		$(a - r)(S - X)$	0	
Coût de rupture des unités manquantes		0	$3000(X - 3)$		0	$c_r(X - S)$

Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance mathématique de la dépense totale $C(S)$: $C(S) = a \cdot \bar{x} + (a - r) \sum_{x < S} (S - x) \cdot P(X = x) + c_r \cdot \sum_{x > S} (x - S) \cdot P(X = x)$
 $C(S) = a \cdot \bar{x} + (a - r) \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$ et, en posant, là encore, $c_p = a - r$, on obtient :

$$C(S) = a \cdot \bar{x} + [c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)] \quad \text{relation 156}$$

On retrouve alors, à la constante additive $a \cdot \bar{x}$ près, la formulation «classique» du coût moyen de gestion, somme d'un coût moyen de possession et d'un coût moyen de rupture. En réalité, cette formulation a une interprétation différentielle puisque c_r est le coût unitaire supplémentaire qu'il faut supporter en cas de rupture de stock, tandis que c_p , qui s'analyse comme une valeur d'acquisition nette d'une valeur de récupération, s'interprète bien comme la dépense unitaire des unités acquises inutilement.

On peut ajouter qu'en remplaçant, dans la relation 156, \bar{x} par $S + I_r(S) - I_p(S)$, qui découle directement de l'application de la relation 135 de la page 670, on obtient bien la relation 155 :

$$C(S) = a \cdot [S + I_r(S) - I_p(S)] + [(a - r) \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)]$$

$$C(S) = a \cdot S + [-a + (a - r)] \cdot I_p(S) + (c_r + a) \cdot I_r(S)$$

$$C(S) = a \cdot S - r \cdot I_p(S) + (c_r + a) \cdot I_r(S) \text{ CQFD}$$

I-1.4.2.3 Solution numérique du problème introductif

L'application de la [relation 142 de la page 672](#) à notre exemple numérique, en utilisant comme coût de possession $c_p = 500 - 4 = 496$ et comme coût de rupture $c_r = 3000$:

$$P(X < S^*) < \frac{3000}{3000 + 496} < P(X < S^* + 1)$$

La consultation de la table de Poisson, pour une moyenne égale à 2, donne:

$$P(X < 4) = 0,8571 < 0,8581 < P(X < 5) = 0,9473$$

L'approvisionnement optimal est donc de $S^* = 4$ unités. La rupture moyenne de stock est alors, en application de la relation 6:

$$I_r(S = 4) = 2P(X = 4) + (2 - 4)P(X > 4) = 2 \times 0,0902 - 2 \times (1 - 0,9473) = 0,0751$$

Le stock résiduel est, en application de la [relation 135 de la page 670](#):

$$I_p(S = 4) = 4 - 2 + 0,0751 = 2,0751$$

L'espérance mathématique du coût de gestion est alors, en application de la [relation 156 de la page 693](#) ($C(S) = a \cdot \bar{x} + [c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)]$):

$$C(S = 4) = 500 \times 2 + (496 \times 2,0751 + 3000 \times 0,0751) = 2254,69$$

On peut également chercher à compléter cette information de coût moyen par celle de la distribution de probabilités de la dépense effective pour **MECANOR**, pour un approvisionnement initial de $S = 4$ pièces (en reprenant la formulation du [tableau 185 de la page 692](#)):

TABLEAU 187
Établissement de la distribution de probabilité de la dépense totale

i	Nombre x_i de pièces à changer	Stock y_i résiduel	Rupture z_i	Dépense totale $d_i = 500.4 - 4.y_i + 3\,500.z_i$	$P(D \geq d_i) = P(X \geq x_i)$
1	0	4	0	1984	100,00 %
2	1	3	0	1988	86,47 %
3	2	2	0	1992	59,40 %
4	3	1	0	1996	32,33 %
5	4	0	0	2000	14,29 %
6	5	0	1	5500	5,27 %
7	6	0	2	9000	1,66 %
8	7	0	3	12500	0,46 %
...

L'analyse synthétique des conséquences de cette politique optimale est reprise dans le [tableau 188](#) dont la structure diffère de celle des tableaux 183 et 184 ([page 689](#)) du fait qu'il n'y a pas de périodicité associée à la période calendaire de cette catégorie de problème.

TABLEAU 188
Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de pièces détachées de
MECANO



Politique optimale d'approvisionnement	Axes (Mecanor)
Stock de début de période	4
Stock de sécurité	2
Demande moyenne satisfaite	1,925
Rupture moyenne de stock	0,075
Pourcentage de demandes non satisfaites	3,76%
Probabilité de rupture de stock	5,27%
Stock résiduel moyen	2,075
Coût moyen de gestion	2 254,69

I-1.4.3 Point mort en univers aléatoire et demandes non satisfaites perdues

Le modèle du point mort est l'un des plus connus de la gestion et la démarche qu'il sous-tend reste à la base de bon nombre d'analyses de rentabilité. Comme tout modèle, son adéquation au réel dépend du réalisme de ses hypothèses. Son amélioration passe donc par le remplacement d'hypothèses restrictives par d'autres hypothèses susceptibles de mieux rendre compte de la réalité. C'est ainsi¹ que :

- l'hypothèse du coût variable proportionnel et de charges fixes uniques a été abandonnée au profit de celle du coût variable non proportionnel et des charges fixes variant par palier,
- l'hypothèse de l'indépendance entre le prix et la quantité vendue a été remplacée par celle d'une liaison entre ces deux variables,
- l'hypothèse du produit unique a été abandonnée conduisant à une approche de point mort multi-produits,
- l'hypothèse d'un univers aléatoire a été substituée à celle d'un univers certain.

Le modèle du point mort en univers aléatoire, sous sa forme classique, suppose que la demande qui s'adresse à l'entreprise sur la période de référence retenue (l'année en général) est connue en probabilité pour le (ou les) produit(s) vendu(s). Par contre, une hypothèse implicite, limitant la portée du modèle, n'a pas été soulignée par les tenants de l'approche probabiliste. Implicitement, toute demande exprimée est satisfaite, ce qui implique l'une des trois conditions suivantes :

- une unité demandée est produite immédiatement là où s'exprime la demande,
- une unité demandée est prélevée immédiatement sur un stock existant situé là où s'exprime la demande,
- une unité demandée peut être livrée ultérieurement (demande non satisfaite différée).

1. Les implications d'une approche bayésienne du problème ont été largement traitées, notamment par Teller (1977, [411] et 1983, [412]).

Autrement dit, le cas des demandes non satisfaites perdues n'est pas envisagé et c'est là que le recours aux modèles de gestion des approvisionnements s'avère indispensable pour intégrer les conséquences des politiques d'approvisionnement dans le calcul du point mort. Pour illustrer ce propos, on s'appuiera ici sur le modèle de gestion calendaire d'articles non stockables, correspondant au cas de figure le plus simple. Dans un premier temps, on introduira un exemple concret pour illustrer l'intérêt du problème posé et, dans un second temps, on présentera les solutions analytiques et numériques au problème posé. Dans un dernier temps, on envisagera quelques extensions possibles.

I-1.4.3.1 Exemple introductif: le cas du restaurant universitaire d'Alphaville

Le Directeur du **RU** (restaurant universitaire) d'Alphaville a des problèmes liés à l'existence d'un déficit qu'il lui faut résorber. Pour ce faire, il envisage une dégradation du niveau de service (il lui semble acceptable de descendre éventuellement à 1 % de demandes non satisfaites) et une hausse tarifaire qui, pour des raisons évidentes de commodité, doit être un multiple de 0,1 dollar lidurien. Par ailleurs, des actions « commerciales » ou de « production » (utilisation de surgelés conduisant à un coût variable de 9 dollars liduriens / repas) peuvent être envisagées.

Actuellement, chaque repas servi procure une recette unitaire $v = 10$ dollars liduriens, qui comprend une subvention de 2 dollars liduriens/repas servi. Le nombre S de repas préparés chaque jour est actuellement de 3 200 et le **RU** est ouvert le midi seulement, pendant $n = 250$ jours par an. On supposera, pour simplifier dans un premier temps, d'une part que les caractéristiques probabilistes de la fréquentation du **RU** sont les mêmes à longueur d'année, autrement dit que la demande aléatoire est statique (ce qui implique qu'elle ne connaît pas de cycle en cours de semaine) et, d'autre part, qu'il n'y a pas d'inflation. Plusieurs menus sont proposés à chaque repas, mais la clientèle étudiante se reporte sans problème sur un autre menu lorsque le menu initialement choisi n'est plus disponible. La nourriture non servie a une valeur moyenne de récupération de $r = 1$ dollar liduriens (fruit...), qui vient en déduction des achats de matières premières le lendemain.

TABLEAU 189

Compte de résultats simplifié du restaurant universitaire pour l'exercice 2003

CHARGES		PRODUITS	
Variation de stock	100000	Produit des ventes des tickets	5984000
Achat matières	4170000	Subvention (2\$/ticket)	1496000
Charges de structure y	3473000	Résultat d'exploitation (perte de l'exercice)	263000
	7743000		7743000

Le compte de résultats simplifié de l'exercice 2003 (tableau 189) amène les commentaires suivants.

- Les charges de structure y (= 3 473 000 dollars liduriens) correspondent principalement aux charges de personnel et aux amortissements; elles peuvent être considérées comme fixes si le nombre de repas préparés est compris entre 2 700 et 3 500 par jour. Le nombre annuel de repas préparés est de

$3\,200 \times 250 = 800\,000$ / an. La valeur de nourriture récupérée d'un jour sur l'autre est estimée à 50 000 dollars liduriens, pour cet exercice.

- Déterminons le coût variable de fabrication d'un repas. Pour fabriquer 800 000 repas, le **RU** a dépensé 4 170 000 dollars liduriens en matières et prélevé 100 000 dollars liduriens de matières sur ses stocks, mais il faut tenir compte également du fait qu'il a évité de dépenser 50 000 dollars liduriens (une pomme non consommée un jour n'a pas à être rachetée pour le lendemain), somme qui dépend étroitement de la politique de service suivie (si l'on avait décidé de ne servir que 3 000 repas, la récupération aurait été plus faible et les achats de matières proportionnellement plus importants); le coût de revient variable s'élève donc à :

$$a = (100\,000 + 4\,170\,000 + 50\,000) / 800\,000 = 5,40 \text{ dollars liduriens / repas}$$

- L'analyse de la *demande effective* de repas (qui diffère de la demande *satisfaite*) permet¹ de considérer que l'on est en présence d'un processus aléatoire stationnaire, que l'on peut caractériser par la loi Normale $\mathcal{N}(3040 ; 215)$.

I-1.4.3.2 Solutions analytiques et numériques du problème posé

On peut commencer par noter que **le raisonnement du point mort en univers certain conduit à un diagnostic erroné de la situation**. En effet, avec une marge unitaire de $10 - 5,4 = 4,60$ dollars liduriens et des charges fixes de 3 473 000 dollars, le point mort s'établit à $3\,473\,000 / 4,6 = 755\,000$ repas par an, alors que la demande moyenne annuelle s'élève à $3\,040\,250 = 760\,000$, ce qui conduit normalement à une situation bénéficiaire et donc à prétendre que si le **RU** fait des pertes, c'est qu'il est mal géré. Cette double assertion, que bien des conseillers en gestion feraient leur, repose sur un modèle inapproprié. En effet, nous allons voir que ce *déficit est structurel*, même si la politique de niveau de service est remise en cause.

Pour vérifier que le déficit est «normal», il suffit de calculer l'espérance mathématique de ce déficit pour le niveau de service retenu. Le problème posé s'apparente à celui du marchand de journaux. Le coût de rupture est égal à la marge non réalisée du fait de la vente manquée d'un repas: $c_r = v - a = 10 - 5,4 = 4,6$ \$. Le coût de possession d'un repas non servi est égal à la valeur d'acquisition $a = 5,4$ \$ diminuée de la valeur de récupération $r = 1$ dollar lidurien: $c_p = 5,4 - 1 = 4,40$ dollars liduriens / repas. Pour le niveau de service imposé ($S = 3\,200$), la valeur de la variable centrée réduite correspondante est: $t_S = [3\,200 - 3\,040] / 215 = 0,744$, il est alors facile de calculer que $I_r(S)$, la rupture moyenne quotidienne de stock (c'est-à-dire le nombre quotidien moyen d'étudiants qui n'ont pu manger au **RU**), est égale à 28,37 et que $I_p(S)$, stock résiduel moyen d'une journée (c'est-à-dire le nombre moyen quotidien de repas non servis) est égal à 188,37. Ces informations se retrouvent dans le [tableau 191, page 699](#).

1. En pratique, les informations disponibles sont relatives à la demande satisfaite (repas servis) et non à la demande exprimée (= demande satisfaite + demande non satisfaite, cette dernière étant impossible à connaître sauf mise en place d'une collecte spécifique d'informations difficile à justifier). Le report de ces informations sur un papier gaussien-arithmétique permet de déterminer graphiquement les paramètres de la demande exprimée et l'usage de technique de régression linéaire, d'automatiser les calculs. Cette démarche est décrite dans Giard (1995, [182]), dans l'exercice (corrigé) n° 27, p. 412 et l'usage de la régression linéaire sur droite de Henry, pour déterminer la moyenne et l'écart-type de la loi Normale est décrit au chapitre VI, §I-3.3, p. 277 de cet ouvrage.

La marge par période $B(S)$ est (relation 152, page 685) : $B(S) = c_r \cdot \bar{x} - [c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)]$, ce qui donne ici : $4,6 \times 3040 - (4,4 \times 188,37 + 4,6 \times 28,37) = 13024,66$ dollars liduriens. Sur 250 jours ouvrables, l'activité du **RU** permet de dégager 3256164,66 dollars liduriens par an, ce qui ne couvre pas des charges fixes s'élevant à 3473000 dollars. On peut ajouter que l'espérance mathématique de déficit $(3473000 - 3256164,66) = 216835,24$ dollars est tout à fait comparable au déficit observé de 263000 dollars liduriens (ce déficit est une variable aléatoire d'espérance mathématique 216835,24 et dont on observe une réalisation : les 263000 dollars observés).

La généralisation analytique de ce raisonnement de **point mort en univers aléatoire** conduit à dire que le point mort est dépassé si :

$$n[c_r \cdot \bar{x} - \{c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)\}] > y \quad \text{relation 157}$$

où n est le nombre annuel de périodes calendaires et y les charges fixes annuelles.

Ce diagnostic effectué à l'aide d'un modèle de stock peut être également obtenu en partant des mêmes informations et en utilisant le langage comptable, ce qui est de nature à faciliter la communication. Il suffit tout simplement d'établir, en espérance mathématique, un compte de résultat caractérisant le régime de croisière. La valeur de nourriture récupérée au cours d'une année est égale à $250 \times 1 \times 188,37 = 47092$ dollars liduriens, et vient en déduction du coût variable de fabrication de $250 \times 3200 \times 5,4 = 4320000$ dollars liduriens, ce qui donne un achat annuel moyen de matière égal à 4272907 dollars liduriens. Pour calculer les recettes quotidiennes (subvention comprise), il faut multiplier par 10 dollars liduriens la demande quotidienne moyenne satisfaite qui peut se calculer, en vertu de la relation 136 de la page 670 :

- soit en retranchant à $S (= 3200)$ le stock résiduel moyen $I_p(S) (= 188,37)$,
- soit en retranchant à la demande moyenne $\bar{x} (= 3040)$, la rupture moyenne $I_r(S) (= 28,37)$,

ce qui donne 3011,63 et donc une recette quotidienne de 30116,3 et une recette annuelle 250 fois plus forte, égale à 7529072 dollars liduriens. On en tire l'espérance mathématique du compte de résultat simplifié associé du « régime de croisière » (tableau 190).

L'ensemble des implications physiques et financières figure dans le tableau 191 ; elles seront reprises dans le tableau 193 de la page 705, à des fins de comparaison avec d'autres politiques d'approvisionnement.

TABLEAU 190
Espérance mathématique du compte de résultats simplifié du restaurant universitaire en régime stationnaire

CHARGES		PRODUITS	
Achat matières	4272907	Recettes (y compris subventions)	7529072
Frais fixes	3473000	Résultat comptable (déficit)	216835
	7745907		7745907

TABLEAU 191
Comparaison des politiques d'approvisionnement (optimale ou non) du restaurant universitaire d'alphaville



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "RU d'Alphaville"	Politique optimale		Politique non optimale (S imposé)	
	par période de révision calendaire	par an (sur 250 périodes calendaires)	par période de révision calendaire	par an (sur 250 périodes calendaires)
Stock S de début de période	3 045	-	3 200	-
Stock de sécurité	5	-	160	-
Demande moyenne satisfaite	2 956,949	739 237,336	3 011,629	752 907,184
Rupture moyenne de stock	83,051	20 762,664	28,371	7 092,816
Pourcentage de demandes non satisfaites	2,73 %	2,73 %	0,93 %	0,93 %
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	48,98 %	-	22,77 %	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	122,449	-	56,920
Stock résiduel moyen	88,051	22 012,664	188,371	47 092,816
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement				
Dépense d'acquisition nette moyenne	16 354,95	4088 737,34	17 091,63	4272 907,18
Coût de commande / Charges fixes calendaires	13 892,00	3473 000,00	13 892,00	3473 000,00
Coût de rupture	382,03	95 508,25	130,51	32 626,95
Coût de possession	387,42	96 855,72	828,83	207 208,39
Indicateur de coût moyen	14 661,46	3665 363,97	14 851,34	3712 835,34
Marge nette moyenne	- 677,46	-169 363,97	- 867,34	-216 835,34

La généralisation de cette démarche, pour aboutir au compte de résultat analytique (avant impôt), valable quel que soit le choix retenu pour la variable de commande S est synthétisée dans le [tableau 192 de la page 700](#).

On peut pousser plus loin l'analyse du problème et se demander s'il est possible d'éviter une hausse tarifaire en modifiant le niveau de service. Pour ce faire, il suffit de rechercher la politique optimale (du point de vue du gérant du **RU**) et d'examiner si, pour ce niveau de service optimal, l'équilibre est atteint ou non. L'application de la [relation 148 de la page 676](#), déterminant la politique optimale, conduit à une mise en fabrication quotidienne de 3045 repas (avec correction de continuité) et à un déficit moyen annuel de 169364 (voir [tableau 193 de la page 705](#)), ce qui constitue un butoir en dessous duquel il est impossible de descendre (en espérance mathématique). Deux remarques complémentaires doivent être faites :

TABLEAU 192
Généralisation du raisonnement du point mort en univers aléatoire

	CHARGES	PRODUITS
Si déficit	Achats matières $n.[a.S - r.I_p(S)]$	Recettes (y compris subventions) $n.v.[S - I_p(S)]$
	Charges fixes y	Résultat d'exploitation (<i>déficit</i>) $y - n.[(v - a).S + (r - v).I_p(S)]$
	Total $y + n.[a.S - r.I_p(S)]$	Total $y + n.[a.S - r.I_p(S)]$
	CHARGES	PRODUITS
Si bénéfice	Achats matières $n.[a.S - r.I_p(S)]$	Recettes (y compris subventions) $n.v.[S - I_p(S)]$
	Charges fixes y	
	Résultat net d'exploitation $n[(v - a).S + (r - v).I_p(S)] - y$	
	Total $n.v.[S - I_p(S)]$	Total $n.v.[S - I_p(S)]$

- tout d'abord, les résultats analytiques permettent d'obtenir immédiatement les conséquences de n'importe quelle politique d'approvisionnement du **RU**, sans faire appel aux méthodes de Monte Carlo pour simuler la réalité,
- ensuite, la politique minimisant le déficit ($S = 3045$) est inacceptable, car elle suppose que les usagers puissent accepter sans réagir une dégradation sensible du service rendu, cette politique conduisant à une probabilité de 49 % pour qu'il y ait une rupture de stock (= demande de repas supérieure aux 3045 disponibles) et à un pourcentage de demandes non satisfaites égal à 2,7 % et donc nettement supérieur au 1 % que l'intendant souhaite ne pas dépasser.

La recherche d'une solution numérique au problème de la hausse peut s'effectuer par tâtonnement pour une valeur de S donnée, ce qui ne pose aucune difficulté pratique avec l'aide du tableur ou du logiciel d'accompagnement. Mais une réflexion analytique complémentaire est des plus utiles. La hausse tarifaire modifiant le coût de rupture c_r , il est préférable d'écrire ce dernier comme la différence entre la recette v et le coût d'acquisition a ($\rightarrow c_r = v - a$). La contrainte d'équilibre précédemment trouvée s'écrit alors (en passant à l'égalité):

$$z = n\{(v - a) \cdot \bar{x} - [c_p \cdot I_p(S) + (v - a) \cdot I_r(S)]\} - y = 0$$

Cette équation comporte deux inconnues (les variables de commande v et S), ce qui conduit à une indétermination. Celle-ci est levée en assignant une valeur à l'une des variables et en recherchant ensuite la (ou les) valeur(s) de l'autre variable qui rend(ent) nulle la fonction z ¹. Cette dernière, notons-le, s'interprète comme le résultat (positif ou négatif) de l'exercice.

Dans le problème posé, on retiendra la contrainte du 1 % de demandes non satisfaites pour assigner à S une valeur, laquelle est égale (voir [tableau 193, page 705](#)) à 3191, tandis que la rupture moyenne s'élève à 30,48 (et non exactement 30,4 du

1. Pour une valeur donnée de v et si z peut être nul, on a normalement deux valeurs possibles de S (et exceptionnellement, une seule), ce qui se comprend fort bien si l'on remarque que z a une représentation graphique de type parabolique; par contre, pour une valeur donnée de S , il n'existe qu'une valeur positive v qui rend nul z (qui est alors de la forme $\alpha_v + \beta$).

fait de l'utilisation de la correction de continuité) et le stock résiduel moyen est de 181,48. On a alors :

$$250 [(v - 5,4) \times 3040 - (4,4 \times 181,4 + (v - 5,4) \times 30,48)] - 3 \times 473000 = 0$$

D'où l'on tire $v = 10,28$ dollars liduriens, que l'on arrondit à 10,30 dollars pour satisfaire la contrainte d'une hausse qui soit un multiple de 0,1 dollar. On peut indiquer que l'application de cette hausse conduit à un résultat bénéficiaire d'environ 14000 dollars liduriens (comme on peut le vérifier en remplaçant v par 10,3 dans la fonction z ; voir également le [tableau 193 de la page 705](#)).

I-1.4.3.3 Quelques extensions possibles

Trois remarques complémentaires importantes peuvent être faites. La première est de nature théorique et concerne le lien entre l'approche développée ici et l'approche classique du point mort probabiliste. La deuxième est d'ordre opérationnel et vise le traitement d'une demande aléatoire non stationnaire. La troisième est liée au cas étudié et s'attaque à des implications stratégiques du point mort, avec demandes non satisfaites perdues.

I-1.4.33a) Lien entre les approches probabilistes avec et sans demandes non satisfaites perdues

En travaillant en espérance mathématique, comme nous l'avons fait ici, l'éclairage probabiliste du problème posé s'en trouve estompé, dans la mesure où la solution proposée conduit, comme en univers certain d'ailleurs, à répondre par l'affirmative ou par la négative à la question de savoir si les conditions générales d'exploitation assurent la rentabilité de l'activité envisagée. Il est cependant évident qu'une réponse tranchée ne peut être apportée si l'on travaille en univers aléatoire, puisque la marge réalisée annuellement est une variable aléatoire, que les demandes non satisfaites soient différées ou non. Le calcul de la probabilité de dépasser le point mort, qui a fait tout l'intérêt de l'approche probabiliste, se complique singulièrement avec la prise en compte de politiques d'approvisionnement pouvant conduire à des demandes non satisfaites perdues.

Dans notre problème, la variable aléatoire «marge annuelle» Z est la somme des variables aléatoires W_t caractérisant chacune des 250 «marges quotidiennes», mais comme ces dernières ont été considérées comme indépendantes et caractérisées par la même distribution de probabilités (hypothèse d'une demande aléatoire statique), se pose un problème de détermination de la loi suivie par la somme de 250 variables aléatoires identiques (problème qualifié de «convolution» par les statisticiens). Ce type de problème a une solution analytique pour certaines distributions de probabilités : il est bien connu, par exemple, qu'une somme de lois de Poisson suit elle-même une loi de Poisson et qu'une somme de lois normales suit elle-même une loi Normale (dans les deux cas, si l'hypothèse d'indépendance est vérifiée). L'ennui c'est qu'ici aucun résultat analytique ne peut être invoqué, puisque la marge quotidienne W_t dépend linéairement de la demande satisfaite Y_t (avec, par définition, $Y_t \leq S$). Avec une hausse tarifaire de 0,3 dollar et une valeur de récupération portant sur $S - Y_t$ repas, on a en effet :

$$W_t = 10,3 \cdot Y_t - 5,4 \cdot S + 1 \cdot (S - Y_t) = 9,3 \cdot Y_t - 4,4 \cdot S$$

et en général :

$$W_t = (v - r) \cdot Y_t - (a - r) \cdot S$$

où Y_t , et donc W_t , suivent « presque » une loi Normale tronquée ($Y_t = X_t$ si $X_t < S$; sinon $Y_t = S$). À défaut d'une solution analytique, qui présenterait l'intérêt d'être applicable quel que soit le nombre de variables aléatoires « élémentaires » cumulées, on peut toujours faire appel au théorème de la limite centrale, puisque le nombre de ces variables aléatoires, indépendantes et de même type, excède la trentaine. On peut alors écrire :

$$Z = \sum_{t=1}^{250} W_t = \sum_{t=1}^{250} (9,3 \cdot Y_t - 4,4 \cdot S)$$

et compte tenu des résultats classiques portant sur les transformations linéaires de variables aléatoires : $V(W_t) = 9,3^2 V(Y_t)$ et $E(W_t) = 9,3 E(Y_t) - 4,4 S$.

La demande quotidienne moyenne satisfaite $E(Y_t)$ étant égale à 3009,52 pour le niveau de service retenu ($S = 3191$ pour avoir 1 % de demandes non satisfaites, d'où un stock résiduel moyen de 181,48). On en déduit que la marge quotidienne moyenne se monte à $9,3 \times 3009,52 - 4,4 \times 3191 = 13948,16$ d'où un résultat d'exploitation annuel de $250 \times 13948,16 = 3487039$ (se reporter au [tableau 193 de la page 705](#) pour connaître toutes les implications de ce choix).

On peut généraliser analytiquement ce que l'on vient de trouver, compte tenu de la définition de la variable Y_t et, quelle que soit la valeur retenue pour la variable de commande S :

$$W_t = v \cdot Y_t - a \cdot S + r(S - Y_t) = (v - r)Y_t - (a - r)S$$

La variance de la marge sur coût variable quotidienne W_t peut être calculée sans trop de problèmes, dans la mesure où la demande satisfaite Y_t est elle-même fonction de la demande effective X_t qui suit une loi Normale ; on démontre¹, en effet, que l'on peut dans ce cas utiliser la relation suivante :

1. Note de la [page 703](#). Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}$ est la densité de probabilité de la variable centrée réduite t suivant une

loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ et connaissant le résultat classique $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t) dt = +1$, ainsi que le résultat suivant, beaucoup moins « classique » (voir, par exemple, Hadley & Whitin, 1966, [212], p. 444, relation 3) :

$\int_{t_S}^{+\infty} t^2 \cdot f(t) dt = P(T > t_S) + t_S f(t_S)$. On peut alors écrire : $\int_{-\infty}^{t_S} t^2 \cdot f(t) dt = 1 - [P(T > t_S) + t_S f(t_S)] = P(T < t_S) - t_S f(t_S)$. Par

ailleurs, nous savons que si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\bar{x}; \sigma)$, sa densité de probabilité $g(x)$ est alors :

$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2/2} = \frac{1}{\sigma} f(t)$. avec $t = \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)$ on en déduit : $x = \bar{x} + t\sigma$, $g(x) = \sigma f(t)$, $dx = \sigma dt$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{t_S} t^2 \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^S \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 \cdot \sigma_X \cdot f(x) \cdot \left(\frac{dx}{\sigma}\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^S (x-\bar{x})^2 \cdot g(x) \cdot dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{t_S} t^2 \cdot f(t) dt = \sigma^2 [P(T > t_S) - t_S f(t_S)].$$

Par ailleurs, la variable aléatoire Y , « demande satisfaite » est une fonction de la variable aléatoire X , « demande exprimée », puisque $y = x$ si $x > S$ et $y = S$ dans le cas contraire. Désignons par $y = h(x)$ cette fonction liant les variables X et Y . On peut remarquer que cette dernière fonction n'est pas dérivable pour tout x (l'exception étant $X = S$), on ne peut donc utiliser les résultats classiques des fonctions inverses. Mais, étant donné que très souvent des demandes de nature discrète sont « modélisables », par des modèles continus, on peut alors écrire, pour une variation discrète Δx (valant 1 dans notre exemple) : $P(X = x) = P\left(X > x + \frac{\Delta x}{2}\right) - P\left(X < x - \frac{\Delta x}{2}\right) \approx f(x) \cdot \Delta x$. Sachant que :

$\sum_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})^2 P(Y = y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{x})^2 P(Y = y) = V(Y)$, on peut écrire : $V(Y) = \sum_{-\infty}^S (x - \bar{x})^2 P(X = x) + (S - \bar{x})^2 P(X > S)$. En posant $\sum_{-\infty}^S (x - \bar{x})^2 P(X = x) = \sum_{-\infty}^S (x - \bar{x})^2 \cdot f(x) \cdot \Delta x$, on a : $V(Y) = \sigma_X^2 \{P(T < t_S) - t_S f(t_S)\} + (S - \bar{x})^2 P(X > S)$, en négligeant la correction de continuité.

$$V(Y_t) = \sigma^2[P(X < S) - t_s \cdot f(t_s)] + (S - \bar{x})^2 P(X > S) \quad \text{relation 158}$$

Dans notre exemple où la probabilité de rupture est le critère retenu (1 % de demandes non satisfaites conduisant à $S = 3\,191$), on a $P(X_t > 3\,191) = 24,05\%$ et une valeur de variable centrée réduite de 0,70233 (valeurs calculées en faisant appel à la correction de continuité), on trouve alors :

$$V(Y_t) = 215^2 \left[0,7595 - \frac{0,70233}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,70233^2/2} \right] + 0,2405(3191 - 3040)^2 = 30470$$

La variance de la marge quotidienne sur coût variable est alors $V(W_t) = 9,3^2 V(Y_t) = 2635385$ et celle de la marge annuelle sur coût variable est : $V(Z) = 250 \times 2635385 = 658\,846\,268$, d'où un écart-type de 25 668. L'application du théorème de la limite centrale nous permet donc de dire que la marge annuelle sur coût variable Z suit une loi Normale de moyenne 3487032 et d'écart-type 25 668. Nous pouvons alors calculer la probabilité d'un résultat net d'exploitation positif :

$$P(Z > 3473000) = P\left(T > \frac{3473000 - 3487039}{25668}\right) = P(T > -0,547) \cong 71\%$$

Il n'est donc pas certain de retrouver un équilibre avec cette proposition de hausse tarifaire. De plus, pour «éponger» la perte de l'exercice passé et être presque certain d'un retour à l'équilibre, c'est à une hausse de 0,8 dollar qu'il faut procéder (voir [tableau 193, page 705](#)).

Table des
matières

I-1.4.33b) Introduction de l'hypothèse d'une demande aléatoire non stationnaire

Dans la réalité, les caractéristiques de la demande aléatoire de repas ne sont pas stables dans le temps : les caractéristiques de la fréquentation du restaurant universitaire varient aussi bien au cours de la semaine (existence d'un cycle hebdomadaire) qu'au cours de l'année (saisonnalité).

Index
thématique

La prise en compte de cette non-stationnarité pose, sur le plan pratique de délicats problèmes d'inférence statistique, mais n'amène guère de complication sur le plan de l'analyse du point mort en univers aléatoire avec prise en compte de demandes non satisfaites perdues.

En effet, la marge annuelle étant la somme des marges quotidiennes, il suffit d'utiliser les propriétés classiques des sommes de variables aléatoires pour obtenir les caractéristiques de la marge annuelle. En outre, la même logique d'approvisionnement (politique optimale ou même niveau de service imposé) peut, sans problème, être appliquée systématiquement à chaque ensemble homogène de périodes.

Illustrons ce propos d'un exemple numérique, en supposant qu'une étude statistique ait permis d'établir que la demande quotidienne effective X_{1t} s'adressant à notre restaurant universitaire, se caractérise les lundis, mardis et mercredis, par une loi Normale de moyenne 3 180 et d'écart-type 150, tandis que celle des deux derniers jours de la semaine X_{2t} se caractérise par une loi Normale de moyenne 2 900 et d'écart-type 240. Si l'on souhaite calculer la marge annuelle découlant de l'adoption d'une hausse tarifaire unitaire de 0,3 dollar lidurien et d'une politique systématique de niveau de service de 1 % de demandes non satisfaites, on est alors conduit ([tableau 193, page 705](#)) à mettre en fabrication $S_1 = 3\,248$ repas en début

de semaine (d'où une demande quotidienne moyenne satisfaite de 3 148,27) et $S_2 = 3091$ repas en fin de semaine (d'où une demande quotidienne moyenne satisfaite de 2 871,04). L'espérance mathématique de la marge réalisée quotidiennement les trois premiers jours de la semaine s'élève alors à 14 987,76 et celle des deux derniers jours à 13 100,31. Comme il y a dans l'année 150 jours ouvrables du premier type (lundi à mercredi) et 100 du second type, on en déduit que l'espérance mathématique de la marge annuelle s'élève à : $150 \times 14\,987,76 + 100 \times 13\,100,31 = 3\,558\,195$ dollars liduriens.

De la même façon, on peut calculer la probabilité que le point mort soit dépassé. La variance de la demande quotidienne satisfaite des jours ouvrables du premier type s'élève à : $V(Y_{1t}) = 13037$ et celle du second type à $V(Y_{2t}) = 39789$. Comme précédemment, la variance des marges quotidiennes s'en déduit par une multiplication par $9,3^2(100 \times 11\,789 + 150 \times 43\,743) = 513\,275\,634$, d'où un écart-type de 22 656. Il est alors facile de vérifier qu'il est à peu près certain (probabilité égale à 99,992 %, pour une valeur de variable centrée réduite égale à $-3,76$) que le point mort sera dépassé, l'espérance mathématique du résultat net d'exploitation étant de $3\,558\,195 - 3\,473\,000 = 85\,195$ (voir le [tableau 193](#)).

I-1.4.33c) Quelques implications stratégiques du point mort en univers aléatoire avec demandes non satisfaites perdues

L'observation suivant laquelle, si l'on s'était trouvé en univers certain et non en univers aléatoire, notre restaurant universitaire se serait trouvé en situation bénéficiaire, conduit à faire observer que la dispersion plus ou moins forte de la demande fera que l'on s'écartera moins ou plus d'une situation bénéficiaire (à politique de niveau de service donnée). Puisque la dispersion de la demande est génératrice de gaspillage et d'insatisfaction, on peut envisager des politiques visant à réduire cette dispersion.

Dans cette perspective, des actions tarifaires pourront jouer sur la demande en la «fidélisant». On pourra, par exemple, adopter une politique tarifaire discriminatoire, l'usager régulier payant moins cher que l'usager occasionnel (carte d'abonnement hebdomadaire personnalisée ou non, par exemple). Dans d'autres domaines que celui envisagé ici (service), une politique de rabais sur quantité (en particulier par la technique des lots) aura le même effet.

Cela dit, les implications stratégiques de cette observation ne sont pas seulement d'ordre commercial. Il faut remarquer, en effet, que le gaspillage est fondamentalement lié à l'inadéquation de l'offre à la demande et qu'il y a peut-être lieu d'envisager de limiter ce gaspillage en cherchant une meilleure adéquation de l'offre à la demande. Le service de la Production est alors interpellé et une remise en cause stratégique peut s'avérer également nécessaire dans ce domaine et conduire à un rattrapage total de la demande qui est **perdue pour le système productif normal**, en le complétant par un système productif additionnel, plus onéreux mais capable de répondre aux pointes de demande.

Dans notre exemple, on peut imaginer d'utiliser des plats surgelés, mais il serait stupide de ne faire appel qu'à eux, compte tenu d'un coût de production plus important (par exemple, 9 dollars liduriens pour un repas surgelé contre 5,40 dollars pour un repas «classique»). Se pose alors un problème de structure optimale de production, à savoir quel nombre S de repas «classiques» mettre en

TABLEAU 193
Point mort en univers aléatoire
– tarification d'équilibre et demandes aléatoires non stationnaires –

Problème étudié		Demande aléatoire stationnaire détermination d'une politique de tarification d'équilibre					Demandes aléatoires non stationnaires	
Distribution statistique de la demande		$\mathcal{N}(3040; 215)$					$\mathcal{N}(3180; 150)$	$\mathcal{N}(2900; 240)$
Revenu unitaire		10 \$		10,30 \$	10,80 \$		10,30 \$	10,30 \$
Politique retenue		S = 3 200	optimale	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$
INDICATEURS JOURNALIERS	PHYSIQUES	Production quotidienne: S	3200	3045	3 191		3248	3091
		Stock de sécurité: $S - \bar{x}$	160	5	151		68	191
		Espérance mathématique de la demande satisfaite: $\bar{x} - I_r(S)$	3011,63	2956,95	3009,52		3 148,28	2871,04
		Espérance mathématique de la demande non satisfaite: $I_r(S)$	28,37	83,05	30,48		31,72	28,96
		% de demandes satisfaites: $\beta(S) = I_r(S)/\bar{x}$	0,93 %	2,73 %	1 %		1 %	1 %
		Probabilité de rupture de stock: $P(X > S)$	22,77 %	48,98 %	24,05 %		32,40 %	21,25 %
	FINANCIERS	Espérance mathématique du stock résiduel: $I_p(S)$	188,37	88,05	181,48		99,72	219,96
		Espérance mathématique des coûts variables: $aS - rI_p(S)$	17091,63	16354,95	17049,92		17439,48	16471,44
		Espérance mathématique des coûts de rupture: $c_r I_r(S)$	130,51	382,03	140,20	149,34	164,58	155,45
		Espérance mathématique des coûts de possession: $c_p I_p(S)$	828,83	387,42	798,51		438,79	967,81
		Espérance mathématique de l'indicateur des coûts de gestion: $C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$	959,34	769,46	938,71	947,85	963,08	594,24
		Espérance mathématique de la marge sur coût variable: $B(S) = c_r \bar{x} - C(S)$	13024,66	13214,54	13045,30	13948,16	15492,92	14987,76
INDICATEURS ANNUELS	PHYSIQUES	Nombre annuel de périodes calendaires: n	250	250	250	250	250	150
		Espérance mathématique du nombre de jours en rupture de stock: $n \cdot P(X > S)$	56,92	122,45	60,13		48,59	21,25
	FINANCIERS	Espérance mathématique des dépenses annuelles variables: $n(aS - rI_p(S))$	4272907	4088737	4262481		2615921	1647144
		Espérance mathématique des coûts annuels de possession: $nc_p I_p(S)$	207208	96856	199626		65818	96781
		Espérance mathématique des coûts annuels de rupture: $nc_r I_r(S)$	32627	95508	35050	37335	41145	23317
		Espérance math. de l'indicateur de coût annuel de gestion: $nC(S)$	239835	192364	234675	236961	240771	89136
		Espérance mathématique de la marge annuelle sur coûts variables: $nB(S)$	3256165	3303636	3261325	3487039	3863229	2248164
		Coûts fixes annuels: y	3473000	3473000	3473000	3473000	3473000	3473000
		Espérance mathématique du résultat d'exploitation: $nB(S) - y$	-216835	-169364	-211675	14039	390224	2248164 + 1310031 - 3473000 = 85195
		Espérance mathématique de la valeur des ventes perdues: $nI_r(S)$	70928	207626	76195	78480	82290	49015 + 29825 = 78840

Table des matières

Index thématique

fabrication chaque jour pour minimiser le coût de production (ou, ce qui revient au même, pour maximiser la marge), sachant que toutes les demandes excédentaires seront satisfaites par des repas surgelés.

La résolution de ce problème de détermination d'une offre optimale (S) passe encore par l'utilisation d'une légère variante du modèle de gestion des stocks d'articles non stockables. La formulation du problème posé, pour la période calendaire de base, est la suivante :

- la demande X étant satisfaite en totalité par l'une des deux formes de restauration, il s'ensuit que :
 - la recette est vX (ce qui donne ici : $10X$),
 - l'espérance mathématique de la recette est $v\bar{x}$ (ce qui donne ici : $10\bar{x}$);
- la mise en fabrication de S repas, au coût unitaire a , conduit à une dépense certaine de aS (ce qui donne ici : $5,4S$);
- si la demande est inférieure à la production initiale S , il faut tenir compte de la valeur de récupération des repas non servis qui ont une valeur de récupération unitaire v ; il s'ensuit que :
 - la valeur de récupération de $(S - X)$ repas non servis (pour $X \leq S$) est $r(S - X)$ (ce qui donne ici : $1 \cdot X$),
 - l'espérance mathématique de la valeur de récupération des repas non servis est $rI_p(S)$ (ce qui donne ici : $1 \cdot I_p(S)$);
- si la demande est supérieure à la production initiale S , il faut tenir compte du coût de production des repas surgelés, d'un coût unitaire b ; il s'ensuit que
 - le coût de production de $(X - S)$ repas surgelés (pour $X > S$) est $b(X - S)$ (ce qui donne ici : $9(X - S)$),
 - l'espérance mathématique du coût de fabrication des surgelés est $bI_r(S)$ (ce qui donne ici : $9I_r(S)$).

Ceci conduit à la marge suivante :

$$vX - aS + r(S - X), \text{ pour } X \leq S$$

$$vX - aS - b(X - S), \text{ pour } X > S$$

d'où l'on tire l'espérance mathématique de marge : $v\bar{x} - aS + rI_p(S) - bI_r(S)$, que l'on peut encore écrire, en vertu de la [relation 135 de la page 670](#) :

$$(v - a)\bar{x} + a\bar{x} - aS + r\{S - \bar{x} + I_r(S)\} - bI_r(S)$$

$$(v - a)\bar{x} - [(a - r)(S - \bar{x}) + (b - r)I_r(S)]$$

relation 159

Cette [relation 159](#) ressemble à la [relation 154 de la page 686](#) (qui justifiait la généralité de la [relation 152 de la page 685](#)), à une légère différence près. Dans la fonction de coût entre crochets, $(b - r)$ remplace $(v - r)$, ce qui conduit à avoir $b - r = (b - a) + (a - r) = c_r + c_p$ et revient à utiliser comme coût de rupture le supplément de coût engendré par la satisfaction d'une demande par le système de secours (surgelé) et non par le système de production normal. La détermination de la politique optimale reste inchangée ([relation 148, page 676](#)), avec ici $c_r = b - a$, ce qui

$$\text{donne } P(X > S^*) = \frac{(5,4 - 1)}{(9 - 5,4) + (5,4 - 1)} = 55\%.$$

On peut ajouter que le fait que, avec ce système productif, la demande soit maintenant satisfaite en totalité, n'exclut nullement l'appel aux actions commer-

TABLEAU 194

Analyse de la politique optimale du restaurant universitaire d'alphaville en cas de rattrapage des demandes perdues.

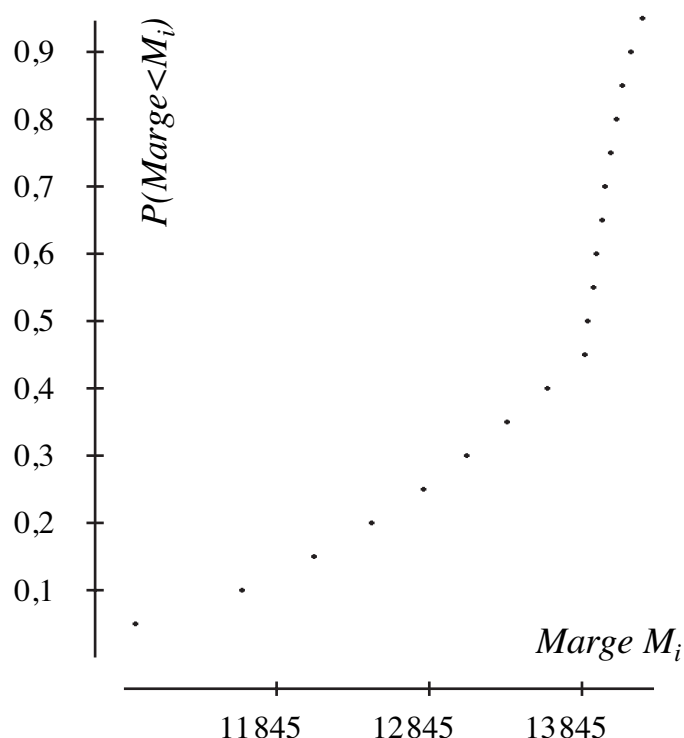


Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "RU d'Alphaville"	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 250 périodes calendaires)
Stock S de début de période	3 012	-
Stock de sécurité	- 28	-
Demande moyenne satisfaite	2 939,777	734 944,184
Rupture moyenne de stock	100,223	25 055,816
Pourcentage de demandes non satisfaites	3,30%	3,30%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	55,09%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	137,722
Stock résiduel moyen	72,223	18 055,816
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	17 094,59	4273 646,53
Coût de commande / Charges fixes calendaires	13 892,00	3473 000,00
Coût de rupture	360,80	90 200,94
Coût de possession	317,78	79 445,59
Indicateur de coût moyen	14 570,59	3642 646,53
Marge nette moyenne	- 586,59	-146 646,53

Table des matières

Index thématique

$P(X < x_i) = P(\text{Marge} \leq M_i)$	x_i	Marge M_i associé à x_i
5%	2686	10917
10%	2764	11619
15%	2817	12096
20%	2859	12474
25%	2895	12798
30%	2927	13086
35%	2957	13356
40%	2986	13617
45%	3013	13860
50%	3040	13887
55%	3067	13914
60%	3094	13941
65%	3123	13970
70%	3153	14000
75%	3185	14032
80%	3221	14068
85%	3263	14110
90%	3316	14163
95%	3394	14241



cialées envisagées précédemment, car toute réduction de la dispersion de la demande se traduit automatiquement par une diminution du coût de production.

I-2 Gestion calendaire des stocks d'articles stockables à délai d'obtention nul

Les articles stockables sont de loin les plus nombreux, aussi cette section revêt-elle une importance toute particulière. Dans un § I-2.1, page 708, on présentera les caractéristiques du problème, puis on en donnera la solution exacte dans un § I-2.2, page 712. Cette solution est cependant délicate à mettre en œuvre, aussi examinerons-nous dans un § I-2.3, page 717, une solution approchée qui est tout à fait satisfaisante tant que la probabilité de rupture de stock n'est pas trop élevée. Rappelons, avant d'aborder ces différents points que, lorsqu'une gestion de type calendaire est suivie pour des articles stockables, le niveau S du stock que l'on cherche périodiquement à « retrouver » est appelé **niveau de recombplètement** (et parfois **niveau de rétablissement**) et non stock initial (comme dans le § I-1). En outre, la commande passée pour un approvisionnement en début de période n'est plus fixe, comme dans le cas d'articles non stockables, mais variable. Si le stock résiduel est positif, on commandera la différence entre le niveau de recombplètement S et ce stock résiduel. Mais, si le stock résiduel est nul parce que la demande de la période qui vient de s'écouler a été supérieure à S , on commandera alors S unités si les demandes non satisfaites sont perdues et un nombre S augmenté du nombre de demandes non satisfaites si celles-ci sont différées. Dans tous les cas de figure, on a retrouvé comme stock de début de période le niveau de recombplètement S , parce que le délai d'obtention est nul.

I-2.1 Les données du problème

On partira d'un exemple pour mettre en évidence les hypothèses que l'on est amené à faire dans le processus de modélisation au terme duquel un niveau de recombplètement optimal S^* sera défini.

I-2.1.1 Exemple introductif: le problème du remplacement des ampoules d'éclairage

La demande moyenne hebdomadaire d'ampoules de 60 watts de **LUMINOR**, magasin spécialisé dans l'éclairage, est de 300 ampoules et l'on peut raisonnablement estimer que la demande hebdomadaire suit une loi Normale d'écart-type 20. Le réapprovisionnement se fait en début de semaine chez le grossiste de la ville. Le coût de possession se limite au coût de détention, avec un taux de 20 % pour calculer le taux d'opportunité. Les ampoules ordinaires sont achetées 3 dollars liduriens et revendues 3,50 dollars (valeurs hors TVA). Le coût annuel de possession d'une ampoule est donc $3 \times 0,2 = 0,6$ dollar, ce qui conduit à un coût hebdomadaire de possession $c_p = 0,6 / 52 = 0,0115$ dollar. Le coût de rupture que l'on retiendra est égal à la marge non réalisée en ne vendant pas une ampoule, c'est-à-dire $c_r = 3,5 - 3 = 0,5$ dollar. Le problème qui se pose est la détermination du niveau de recombplètement optimal S , que **LUMINOR** doit chercher à atteindre au début de chaque semaine. Le coût de gestion hebdomadaire est toujours $C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$, mais si la rupture moyenne reste celle utilisée jusqu'ici (cf. relations 138 et 139, page 671, et relations 146 et 147, page 675), il n'en est plus de même pour le stock moyen possédé $I_p(S)$, qui n'est plus le stock résiduel

moyen. Ceci implique en particulier que la [relation 135 de la page 670](#), liant $I_p(S)$ et $I_r(S)$ ($I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$), n'est plus vérifiée : elle sera remplacée par la [relation 173 de la page 718](#).

I-2.1.2 Hypothèses de calcul du stock moyen possédé

Le coût de possession comprend principalement un coût d'opportunité. Il porte sur un stock moyen calculé comme le quotient du nombre d'unités-jours observées par ce nombre de jours (voir [chapitre X, page 656](#)). Pour un stock initial S donné, la loi de demande X au cours de la période définit la distribution de probabilités du stock en fin de période sans renseigner sur l'évolution du stock au cours de cette période. L'analyse du problème conduit à distinguer deux cas de figure, selon que la demande exprimée est supérieure ou non au niveau de reapprovisionnement S . On supposera, pour fixer les idées et sans préjuger de la solution optimale que l'on trouvera ultérieurement, que ce niveau de reapprovisionnement a été arbitrairement fixé à 320.

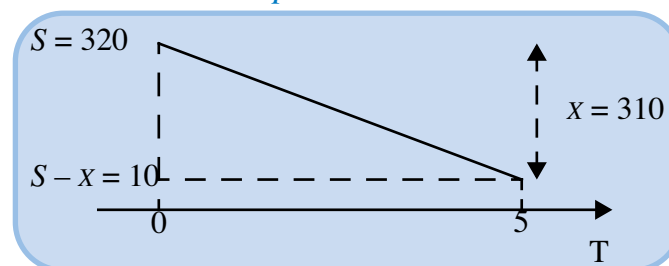
I-2.1.2.1 Cas d'une demande inférieure au niveau de reapprovisionnement S – pas de rupture de stock

Supposons qu'une demande hebdomadaire soit de 310, événement dont la probabilité d'occurrence est égale à 1,8 %. Le stock de fin de période est alors de $320 - 310 = 10$ ampoules. Pour calculer le stock moyen il faut faire des hypothèses sur l'évolution de l'inventaire permanent tout au long de la semaine (de 5 jours ouvrables) débutant à 320 ampoules et se terminant à 10 ampoules.

La solution que l'on adopte habituellement est l'**interpolation linéaire**¹, c'est-à-dire que la demande de 310 ampoules est également répartie sur les 5 jours, d'où

FIGURE 187

Evolution postulée du stock au cours de la période calendaire, en l'absence de rupture de stock



une consommation journalière de 62 ampoules. Ceci conduit à la reconstitution suivante de l'inventaire permanent de fin de journée de $(320 - 62) = 258$ ampoules le premier jour, 196 le deuxième, 134 le troisième, 72 le quatrième et 10 ampoules le dernier jour. Toutefois, le stock moyen ne sera pas calculé comme la moyenne de ces stocks de fin de journée, c'est-à-dire $(258 + 196 + 134 + 72 + 10) / 5 = 134$ ampoules car on poursuit jusqu'au bout la logique de l'interpolation linéaire pour calculer le stock à chaque instant du temps et en calculer la moyenne, ce qui conduit à un stock moyen égal à la moyenne arithmétique des stocks de début et

1. D'autres hypothèses de calcul sont envisageables, mais conduisent à des solutions analytiques plus complexes à mettre en œuvre. Voir sur ce point : Naddor (1966, [313]), p. 144.

de fin de période, c'est-à-dire ici $(320 + 10) / 2 = 165$. Donc, d'une façon générale pour une demande x inférieure à S , le stock moyen possédé est égal à :

$$x < S \Rightarrow \text{stock moyen possédé} = \frac{S + (S - x)}{2} = S - \frac{x}{2} \quad \text{relation 160}$$

I-2.1.2.2 Cas d'une demande supérieure au niveau de reapprovisionnement S (rupture de stock)

On examinera successivement deux hypothèses de calcul du stock $I_p(S)$. La seconde hypothèse est une simplification de la première et présente l'avantage sur celle-ci de conduire à des solutions analytiques générales, c'est-à-dire permettant d'utiliser des tables statistiques «classiques».

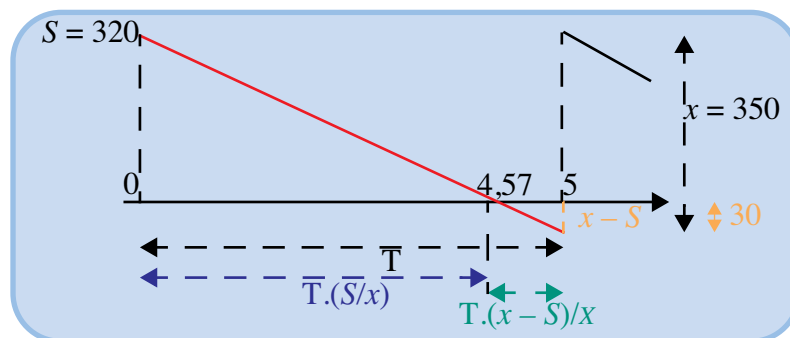
I-2.1.22a) Première hypothèse de calcul : l'interpolation linéaire

Supposons, pour reprendre notre exemple, que la demande d'ampoules sur une autre période de 5 jours soit de 350, pour un même stock initial de 320. Le stock de fin de période est nul. Le problème qui se pose pour le calcul de $I_p(S)$ est celui de savoir depuis quand ce stock est nul.

Si l'on garde toujours l'hypothèse d'interpolation linéaire, la demande journalière aura été de $350 / 5 = 70$ ampoules et la rupture de stock se sera produite au bout de $320 / 70 = 4,57$ jours. Le stock moyen calculé comme la moyenne arithmétique du stock de début ($= 320$) et du stock de fin de période ($= 0$), c'est-à-dire $(320 + 0) / 2 = 160$ est en réalité un stock moyen calculé sur une période de 4,57 jours, et non 5 jours. Le stock moyen sur 5 jours est égal à la moyenne pondérée du stock moyen sur chacune des deux périodes.

FIGURE 188

Évolution postulée du stock au cours de la période calendaire en cas de rupture de stock - usage de l'interpolation linéaire stricte



$$\begin{aligned} \text{Stock moyen possédé} &= [160] \frac{4,57}{5} + [0] \frac{5 - 4,57}{5} = [160] \frac{4,57}{5} = \left[\frac{320 + 0}{2} \right] \cdot \frac{320}{350} \cdot 5 \\ &= \left[\frac{320}{2} \right] \cdot \frac{320}{350} = 146,29 \end{aligned}$$

D'une façon générale, en remplaçant 320 par S et 350 par x , on aura :

$$x > S \Rightarrow \text{stock moyen possédé} = \frac{S}{2} \cdot \frac{S}{x} \quad \text{relation 161}$$

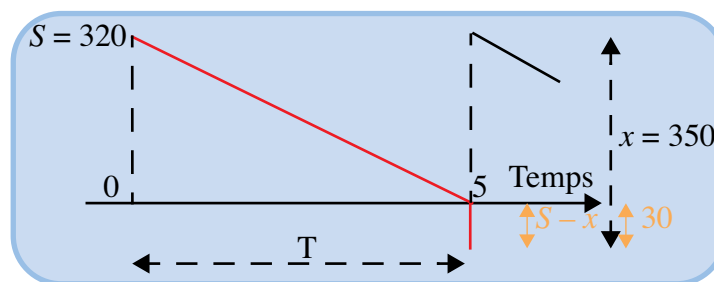
Le calcul rigoureux du stock possédé permet de trouver une solution analytique au problème posé, c'est-à-dire une valeur du niveau de reapprovisionnement S^* qui minimise le coût de gestion $C(S)$ du système-stock. Mais cette solution analytique présentée au § II-2, page 729 est assez difficile à mettre en œuvre car elle reste spécifique au problème posé, ce qui revient à dire qu'aucune table générale ne peut être constituée (comme celles introduites au § I-1.2, page 672).

I-2.1.22b) Seconde hypothèse de calcul : la rupture de stock se produit en fin de période

D'un point de vue mathématique, les difficultés que l'on vient d'évoquer sont liées à l'existence du facteur correctif S/x . Une seconde hypothèse de calcul permet de résoudre ces difficultés en éliminant ce facteur correctif : il suffit de convenir que les ruptures de stock se produisent très exactement en fin de période. Ceci implique dans notre exemple que la rupture de stock de 30 ampoules s'est produite à la date 5 au lieu de la date 4,57. Cette solution approchée se traduit donc

FIGURE 189

Évolution du stock au cours de la période calendaire : interpolation linéaire et hypothèse simplificatrice de la rupture de stock en fin de période



par une évolution de la demande correspondant à celle de la figure 189, et donc par un stock moyen de 160 ampoules au lieu de 146,29. Cette différence peut sembler importante, mais il faut bien voir que la solution approchée ne vise que le cas de rupture de stock se produisant avec une probabilité d'occurrence pas trop forte ; il s'ensuit que, dans le calcul de l'espérance mathématique du stock moyen possédé, cette rupture de stock a un poids relativement faible. On peut ajouter que, plus la rupture de stock est forte, plus grande est l'erreur de calcul (facteur S/x négligé) commise sur le stock moyen possédé correspondant à ce niveau de demande, mais que cet accroissement de l'erreur est plus que compensé par la baisse de probabilité d'occurrence d'une rupture de stock plus forte¹.

$$x > S \Rightarrow \text{stock moyen possédé} = \frac{S+0}{2} = \frac{S}{2} \quad \text{relation 162}$$

Dans ce chapitre (cf. relation 173 de la page 718), et dans le chapitre suivant, on utilisera pour les articles stockables la relation 162 de préférence à la relation 161. Aussi faudrait-il comprendre lorsqu'on parlera de «stock moyen possédé, avec hypothèse simplificatrice», que ce sont la relation 160 et la relation 162 que l'on aura retenues dans le calcul de l'espérance mathématique de ce stock :

1. Pour toutes les distributions statistiques «classiques», à l'exception de la distribution uniforme, à condition toutefois que la demande soit supérieure au mode de la distribution.

$$\text{stock moyen possédé, avec hypothèse simplificatrice} = \begin{cases} (S - x/2) & \text{si } x < S \\ S/2 & \text{si } x \geq S \end{cases}$$

I-2.2 Étude de la solution optimale exacte

L'indicateur de coût de gestion du système par période de révision est toujours celui de la [relation 132 de la page 668](#) ($C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$). Pour le calcul du stock moyen possédé, il faut maintenant dissocier le cas où la demande x est strictement inférieure au niveau de reapprovisionnement S de celui où elle est supérieure ou égale à S , afin de pouvoir calculer correctement l'espérance mathématique du stock moyen possédé.

$$\text{- Dans le cas continu, on a: } I_p(S) = \underbrace{\int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx}_{\text{cas où } x < S} + \underbrace{\int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx}_{\text{cas où } x > S}, \text{ d'où}$$

l'on tire¹:

$$I_p(S) = \left[S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \right] - \frac{S \cdot P(X > S)}{2} + \frac{S^2}{2} \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{relation 163}$$

L'expression entre crochets correspond au stock moyen possédé calculé avec l'hypothèse simplificatrice ([relation 173 de la page 718](#)). L'expression qui n'est pas entre crochets étant nécessairement négative, le stock moyen possédé en utilisant l'hypothèse simplificatrice est surestimé de cette quantité.

$$\text{- Dans le cas discret, on a: } I_p(S) = \sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \sum_{x=S}^\infty \frac{S^2}{2x} P(X=x),$$

d'où:

$$I_p(S) = \left[S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \right] - \frac{S \cdot P(X > S)}{2} + \sum_{x=S}^\infty \frac{S^2}{2x} P(X=x) \quad \text{relation 164}$$

La recherche de l'optimum dans le cas continu passera toujours par l'étude de la dérivée de $C(S)$ par rapport à S , ce qui implique qu'il faudra calculer les dérivées de $I_p(S)$ et de $I_r(S)$ par rapport à S . Le calcul de la dérivée de $I_p(S)$ est immédiat².

$$\frac{d I_p(S)}{d S} = \int_0^S f(x) dx + S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{relation 165}$$

1. $I_p(S) = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx - \int_S^\infty \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx$
 $= S + \frac{\bar{x}}{2} - \frac{S}{2} \int_S^\infty f(x) dx + \frac{1}{2} \int_S^\infty (x-S) \cdot f(x) dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx = S - \frac{\bar{x}}{2} - \frac{S \cdot P(X > S)}{2} + \frac{I_r(S)}{2} + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx$

Arrivé à ce stade du raisonnement, nous distinguerons dans la recherche de l'optimum le cas où le coût de rupture est proportionnel au temps de celui où il est indépendant du temps.

I-2.2.1 Cas du coût de rupture indépendant du temps

I-2.2.1.1 Solution analytique

C'est l'hypothèse que nous avons privilégiée jusqu'à présent et qui s'applique parfaitement à l'exemple choisi : il est vraisemblable, en effet, qu'une rupture de stock en ampoules de 60 watts se traduira par des ventes perdues, et l'on voit mal une mise en place d'un suivi des demandes différées¹.

En combinant la **relation 145 de la page 674** $\left(\frac{d I_r(S)}{dS} = - \int_S^\infty f(x) dx \right)$ et la **relation 165**, l'optimum est tel que : $\frac{d C(S)}{dS} = \frac{d (c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S))}{dS} = 0$, ce qui conduit² à la **relation 166**:

$$\frac{\int_S^\infty f(x) dx}{1 + S^* \int_{S^*}^\infty \frac{f(x)}{x} dx} = \frac{c_p}{c_r + c_p} \quad \text{relation 166}$$

Cette dernière relation est difficilement opérationnelle sans l'aide logistique d'un ordinateur, car elle dépend étroitement des paramètres de la loi de demande (en effet on ne peut pas se ramener à une formulation générale du type variable

Table des matières

Index thématique

2. Note de la **page 712**. En effet, L'utilisation de la formule de Leibniz (**relation 144 de la page 674**) pour $\int_0^S \left(S - \frac{x}{2} \right) f(x) dx$, conduit à poser $g(S, x) = \left(S - \frac{x}{2} \right) f(x)$ $a(S) = 0$ et $b(S) = S$, d'où l'on tire : $\frac{\partial g(S, x)}{\partial S} = f(x)$, $\frac{d a(S)}{dS} = 0$ et

$$\frac{d b(S)}{dS} = 1 \quad \text{puis : } \frac{\int_0^S \left(S - \frac{x}{2} \right) f(x) dx}{\partial S} = \int_0^S f(x) dx + \left[\left(S - \frac{S}{2} \right) f(S) \right] \cdot 1 - \left[S - \frac{0}{2} f(0) \right] \cdot 0 = \int_0^S f(x) dx + \frac{S}{2} f(S)$$

De même, pour $\int_S^\infty \frac{S^2}{2x} f(x) dx$, en posant $g(S, x) = \frac{S^2}{2x} f(x)$, $a(S) = S$ et $b(S) = \infty$, on obtient : $\frac{\partial g(S, x)}{\partial S} = \frac{2S}{2x} f(x) = \frac{S \cdot f(x)}{x}$,

$$\frac{d a(S)}{dS} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d b(S)}{dS} = 0, \quad \text{puis : } \frac{\int_S^\infty \frac{S^2}{2x} f(x) dx}{\partial S} = \int_S^\infty \frac{S \cdot f(x)}{x} dx + \left[\left(\frac{S^2}{2H} \right) f(H) \right] \cdot 0 - \left[\left(\frac{S^2}{2S} \right) f(S) \right] \cdot 1 = S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx - \frac{S}{2} f(S)$$

D'où : $\frac{d I_p(S)}{dS} = \left[\int_0^S f(x) dx + \frac{S}{2} \cdot f(S) \right] + \left[\int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx - \frac{S}{2} \cdot f(S) \right]$, ce qui conduit à la **relation 165**.

1. Lorsqu'une rupture de stock se traduit par une vente perdue, le coût de rupture n'a aucune raison de dépendre de la durée de la rupture, contrairement au cas des demandes différées.

$$2. \text{ En effet, } \frac{d C(S)}{dS} = c_p \left[\int_0^S f(x) dx + S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \left[- \int_S^\infty f(x) dx \right] = c_p \left[1 - \int_S^\infty f(x) dx + S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \left[- \int_S^\infty f(x) dx \right] = 0$$

$$\frac{d C(S)}{dS} = c_p - (c_r + c_p) P(X > S) + c_p \cdot S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx = 0, \quad \text{d'où l'on tire } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p} \left(1 + S^* \int_{S^*}^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right), \quad \text{puis la relation 166.}$$

centrée réduite). Le premier membre de cette relation est susceptible de prendre des valeurs comprises entre 0 et 1. On remarque en outre qu'elle est nulle lorsque S est très grand et est égale à 1, lorsque S est nul. Le premier membre est donc de nature tout à fait comparable à une probabilité de rupture de stock.

De même, lorsque la loi de demande est discrète, on démontre¹ que l'optimum est atteint pour :

$$\frac{P(X > S^*)}{1 + \left(S^* + \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S^*} \frac{P(X=x)}{x}} < \frac{c_p}{c_r + c_p} < \frac{P(X > S^* - 1)}{1 + \left(S^* - \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S^* - 1} \frac{P(X=x)}{x}} \quad \text{relation 167}$$

I-2.2.1.2 Résolution numérique du problème posé

Le programme mis au point pour trouver la valeur de S conformément à la [relation 166 de la page 713](#), donne un niveau de reapprovisionnement optimal égal à 340, pour une valeur du critère égale à $0,0115 / (0,0115 + 0,5) = 0,0228$. On peut préférer tenir compte de l'impact de la correction de continuité qui conduit à une probabilité de rupture de 0,0214 pour $S = 340$ et à 0,02413 pour $S = 339$, ce qui conduit alors à préférer cette dernière valeur, la probabilité de rupture étant la plus proche de celle visée. Rappelons que le logiciel tient compte de l'impact de la correction de continuité. Le [tableau 195](#) montre comment varie numériquement ce premier membre en fonction de S . Il fournit également la rupture moyenne (calculée à l'aide de la [relation 147 de la page 675](#)) : $I_r(S) = 0,170$. Par contre, le calcul du stock moyen possédé nécessite, là encore, l'utilisation d'un algorithme spécial (utilisé pour établir le [tableau 195](#)). La valeur obtenue est $I_p(S) = 190,02$, pour $S = 340$ et $I_p(S) = 189,09$, pour $S = 339$. Il s'ensuit que le coût minimal de gestion du système est : $C(S) = 190,03 \times 0,0115 + 0,170 \times 0,5 = 2,19 + 0,35 = 2,28$, dans le premier cas et 2,27 pour $S = 339$.

I-2.2.2 Cas du coût de rupture proportionnel au temps

À partir du moment où l'on constate une demande $x = 350$, supérieure à $S = 320$, on aura en fin de période une rupture de stock de : $(x - S) = 350 - 320 = 30$. Le calcul d'une pénurie moyenne $I_r(S)$ s'inspire exactement des mêmes principes que ceux utilisés précédemment pour le calcul du stock possédé

1. En effet, on a :

$$I_p(S) = \sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \sum_{x=S}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x)$$

$$I_p(S) = \sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \frac{S}{2} P(X=S) + \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x) \quad \text{et} \quad I_p(S+1) = \sum_{x=0}^S \left(S+1 - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{(S+1)^2}{2x} P(X=x)$$

$$I_p(S+1) = \left[\sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + P(X \leq S) + \left(1 + \frac{S}{2}\right) P(X=S) \right] + \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x) + \left[\sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x) + \left(S + \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{P(X=x)}{x} \right]$$

$$\text{d'où } I_p(S+1) - I_p(S) = \left(S + \frac{1}{2}\right) \sum_{x>S} \frac{P(X=x)}{x} + P(X \leq S), \text{ or } C(S+1) - C(S) = c_p [I_p(S+1) - I_p(S)] + c_r [I_r(S+1) - I_r(S)]$$

ce qui donne, compte tenu de la [relation 134](#), et de ce que l'on vient d'établir :

$$C(S+1) - C(S) = c_p \left[\left(S + \frac{1}{2}\right) \sum_{x>S} \frac{P(X=x)}{x} + 1 - P(X > S) \right] + c_r [-P(X > S)] = (c_p + c_r) [-P(X > S)] + c_r \left[1 + \left(S + \frac{1}{2}\right) \sum_{x>S} \frac{P(X=x)}{x} \right]$$

$$C(S) - C(S-1) = (c_p + c_r) [-P(X > S-1)] + c_r \left[1 + \left(S - \frac{1}{2}\right) \sum_{x>S-1} \frac{P(X=x)}{x} \right] \quad \text{et compte tenu de la relation 133, on retrouve la relation 166.}$$

TABLEAU 195

Analyse de l'incidence des différentes hypothèses retenues dans le calcul du stock moyen possédé et de la rupture moyenne

S	Détermination de S* (%)			I _p (S) avec hypothèse de coût de possession			I _r (S) avec hypothèse de coût de rupture		Coût de gestion C(S)				$S \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$
	$\int_0^S f(x) dx$	$1 - \left(\int_0^{\infty} f(x) dx \right) / \left(1 + S \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$	$\int_0^S f(x) dx + S \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$	Indépendant du temps (§ I-1.2.2)	dépendant du temps		Indépendant du temps (§ I-1.2.1)	Dépendant du temps (relation 169)	0,0115 · I _{p1} (S) + 0,5 · I _{r1} (S)	0,0115 · I _{p2} (S) + 0,5 · I _{r1} (S)	0,0115 · I _{p3} (S) + 0,5 · I _{r1} (S)	0,0115 · I _{p3} (S) + 0,5 · I _{r2} (S)	
					Avec hypothèse simpli- ficatrice (relation 162)	Sans hypothèse simpli- ficatrice (relation 161)							
300	50	66,13	97,63	7,979	153,99	150,43	7,98	0,43	4,08	5,77	5,73	1,95	0,476
302	53,98	68,03	97,93	9,019	155,51	152,39	7,02	0,39	3,61	5,30	5,27	1,95	0,440
304	57,93	70,01	98,21	10,14	157,07	154,35	6,14	0,35	3,19	4,88	4,85	1,96	0,403
306	61,79	72,04	98,47	11,34	158,67	156,33	5,34	0,33	2,80	4,50	4,47	1,97	0,367
308	65,54	74,12	98,69	12,61	160,30	158,29	4,61	0,29	2,45	4,15	4,13	1,97	0,332
310	69,15	76,22	98,9	13,96	161,98	160,26	3,96	0,26	2,14	3,85	3,83	1,98	0,298
312	72,57	78,31	99,06	15,37	163,69	162,23	3,37	0,23	1,86	3,57	3,56	1,99	0,265
314	75,8	80,39	99,22	16,86	165,43	164,21	2,86	0,21	1,62	3,34	3,32	2,00	0,234
316	78,81	82,42	99,35	18,40	167,20	166,18	2,40	0,18	1,41	3,13	3,12	2,01	0,205
318	81,59	84,38	99,46	20,01	169,00	168,16	2,01	0,16	1,24	2,96	2,95	2,02	0,179
320	84,13	86,25	99,56	21,67	170,83	170,14	1,67	0,14	1,09	2,81	2,80	2,03	0,154
322	86,43	88,01	99,65	23,37	172,69	172,12	1,37	0,12	0,95	2,68	2,67	2,05	0,132
324	88,49	89,65	99,72	25,12	174,56	174,11	1,12	0,11	0,85	2,57	2,57	2,06	0,112
326	90,32	91,16	99,78	26,91	176,46	176,09	0,91	0,09	0,77	2,49	2,49	2,08	0,095
328	91,92	92,51	99,82	28,73	178,37	178,08	0,73	0,08	0,70	2,42	2,42	2,09	0,079
330	93,32	93,73	99,86	30,59	180,29	180,07	0,59	0,07	0,65	2,38	2,37	2,11	0,065
332	94,52	94,80	99,89	32,47	182,23	182,06	0,46	0,06	0,60	2,33	2,33	2,13	0,054
334	95,54	95,73	99,91	34,37	184,18	184,05	0,37	0,05	0,58	2,31	2,31	2,15	0,044
336	96,41	96,53	99,94	36,29	186,14	186,04	0,29	0,04	0,56	2,29	2,29	2,17	0,035
338	97,13	97,21	99,95	38,22	188,11	188,03	0,22	0,03	0,55	2,28	2,28	2,18	0,028
340	97,72	97,77	99,96	40,17	190,09	190,03	0,17	0,03	0,55	2,28	2,28	2,21	0,022
342	98,21	98,23	99,97	42,13	192,07	192,02	0,13	0,02	0,55	2,28	2,28	2,23	0,018
344	98,61	98,62	99,98	44,10	194,05	194,02	0,10	0,02	0,56	2,29	2,29	2,25	0,014
346	98,93	98,94	99,99	46,07	196,04	196,01	0,07	0,01	0,57	2,30	2,30	2,27	0,011
348	99,18	99,18	99,99	48,05	198,03	198,01	0,05	0,01	0,58	2,31	2,31	2,29	0,008
350	99,38	99,38	99,99	50,04	200,02	200,01	0,04	0,01	0,60	2,33	2,33	2,31	0,006

moyen $I_p(S)$. Autrement dit, la pénurie moyenne passe de 0 à la date 4,57 jours (moment où la rupture de stock se manifeste) à 30 à la date 5 (fin de la période de révision calendaire), ce qui fait que la pénurie moyenne est de $(0 + 30)/2 = 15$ sur une période de $(5 - 4,57) = 0,43$ jour, et de 0 pendant les 4,57 premiers jours. La pénurie moyenne sur la période des 5 jours est alors :

$$x = 50 \text{ et } S = 320 \Rightarrow \text{rupture de stock} = 0 \frac{4,57}{5} + 15 \frac{5-4,57}{5} = 1,29$$

et d'une façon générale: $x > S \Rightarrow \text{rupture de stock} = 0 \cdot \frac{S}{x} + \frac{0+x-S}{2} \cdot \frac{x-S}{x}$, d'où:

$$x \geq S \Rightarrow \text{rupture de stock} = \frac{(x-S)^2}{2x} \quad \text{relation 168}$$

Dans ces conditions, l'espérance mathématique de la rupture moyenne est:

$$I_r(S) = \int_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} \cdot f(x) dx \quad \text{relation 169}$$

La dérivée de cette rupture moyenne par rapport à S est¹:

$$\frac{d I_r(S)}{dS} = \int_S^{\infty} \frac{(S-x)}{x} \cdot f(x) dx = - \int_S^{\infty} f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

La valeur optimale de S est alors définie² par la relation 170:

$$\frac{c_r}{c_r + c_p} = \int_0^{S^*} f(x) dx + S^* \int_{S^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{relation 170}$$

Le second membre de cette relation est une fonction monotone croissante, variant entre 0 et 1, qui possède donc sur le plan formel les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition³, ce qui rapproche cette relation de la relation 148 de la page 676, dont elle ne diffère que d'un terme. L'évolution de ce second membre en fonction de S , toujours pour une demande suivant une loi Normale $\mathcal{N}(300,20)$ est donnée au tableau 195, page 715; on peut y constater que l'adjonction d'un terme à la fonction de répartition a pour conséquence d'abaisser la valeur du niveau de reapprovisionnement puisque, pour une même valeur critique 0,2 / (0,2 + 0,7) = 0,22, le niveau de reapprovisionnement optimal est de 311 unités contre 316 unités avec une utilisation directe de la fonction de répartition.

1. En effet, L'utilisation de la formule de Leibniz (relation 144 de la page 674) pour $\int_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} f(x) dx$, conduit à

poser $g(S, x) = \frac{(x-S)^2}{2x} f(x)$ $a(S) = S$ et $b(S) = \infty$, d'où l'on tire: $\frac{\partial g(S, x)}{\partial S} = \frac{-2(x-S)}{2x} f(x) = \left(\frac{S}{x} - 1\right) f(x)$, $\frac{d a(S)}{dS} = 1$ et

$\frac{d b(S)}{dS} = 0$ puis:

$$\frac{\int_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} f(x) dx}{S} \frac{dS}{dS} = \int_S^{\infty} \left(\frac{S}{x} - 1\right) f(x) dx + \left[\left(\frac{(H-S)^2}{2H}\right) f(H)\right] \cdot 0 - \left[\left(\frac{(S-S)^2}{2S}\right) f(S)\right] \cdot 1 = S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \int_S^{\infty} f(x) dx$$

2. En effet, à l'optimum on a:

$$\frac{d C(S)}{dS} = c_p \cdot \frac{d I_p(S)}{dS} + c_r \cdot \frac{d I_r(S)}{dS} = c_p \cdot \left[\int_0^S f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \cdot \left[- \int_S^{\infty} f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] = 0$$

$$\frac{d C(S)}{dS} = c_p \left[\int_0^S f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \left[- \left(1 - \int_0^S f(x) dx\right) + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] = 0, \text{ d'où la relation 170.}$$

3. Naddor (1966, [313]), p. 166-169. On parlera alors de pseudo-fonction de répartition.

I-2.3 Étude de la solution optimale approchée

Nous établirons tout d'abord la relation caractérisant l'optimum, puis donnerons la solution numérique de l'exemple introductif du § I-2.1.1, page 708.

I-2.3.1 Détermination analytique de la solution optimale

L'indicateur de coût de gestion du système par période de révision est toujours :

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$$

Pour le calcul du stock moyen possédé $I_p(S)$, il faut, là encore, dissocier le cas où la demande x est strictement inférieure au niveau de reapprovisionnement, de celui où elle est supérieure ou égale à S . Dans le cas discret on aura donc :

$$I_p(S) = \sum_0^{S-1} \left(S - \frac{x}{2} \right) \cdot P(X = x) + \sum_S^{\infty} \frac{S}{2} \cdot P(X = x)$$

$$I_p(S) = \sum_0^{S-1} \left(S - \frac{x}{2} \right) \cdot P(X = x) + \frac{S}{2} \cdot P(X \geq S) \quad \text{relation 171}$$

tandis que, pour une demande continue, le stock moyen possédé s'écrira :

$$I_p(S) = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2} \right) f(x) dx + \frac{S}{2} P(X > S) \quad \text{relation 172}$$

En raisonnant sur le cas discret, on peut exprimer le stock moyen possédé $I_p(S)$, en fonction du stock *résiduel* moyen de fin de période (introduit lors de l'étude d'articles non stockables).

$$I_p(S) = \sum_0^{S-1} \left(\frac{S}{2} + \frac{S}{2} - \frac{x}{2} \right) \cdot P(X = x) + \frac{S}{2} \cdot \sum_S^{\infty} P(X = x)$$

$$I_p(S) = \frac{1}{2} \sum_0^{S-1} (S - x) \cdot P(X = x) + \frac{S}{2} \cdot \left[\sum_0^{S-1} P(X = x) + \sum_S^{\infty} P(X = x) \right]$$

$$I_p(S) = \frac{1}{2} \left[\sum_0^{S-1} (S - x) \cdot P(X = x) + (S - S) P(X = S) \right] + \frac{S}{2} \sum_0^{\infty} P(X = x)$$

$$I_p(S) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_0^S (S - x) \cdot P(X = x)}_{\text{Stock résiduel moyen de fin de période}} + \underbrace{S}_{\text{Stock initial}} \right]$$

Cette relation qu'il est facile d'établir également dans le cas continu montre que le stock moyen possédé dans le cas d'un article stockable est la moyenne arithmétique du niveau de reapprovisionnement et du stock résiduel moyen possédé en fin de période. Un raisonnement « naïf » aurait permis d'aboutir directement à ce résultat, mais les hypothèses sous-jacentes (interpolation linéaire et hypothèse simplificatrice d'une rupture de stock instantanée en fin de période) n'auraient pu, alors, être mises en évidence. De ce fait, les limites de cette approche ne seraient pas apparues.

À partir de la [relation 135 de la page 670](#) ($I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$), qui relie le stock résiduel moyen avec la rupture de stock, on obtient un stock moyen possédé calculé comme une moyenne du stock initial S et du stock résiduel, ce qui conduit à : $I_p(S) = \frac{1}{2}[S + \{S - \bar{x} + I_r(S)\}]$, d'où l'on tire la [relation 173](#).

$$I_p(S) = S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \quad \text{stock moyen possédé calculé sur la base de la moyenne des stocks de début et de fin de période et de l'hypothèse simplificatrice (rupture de stock se produisant en fin de période)} \quad \text{relation 173}$$

C'est cette [relation 173](#), et non la [relation 135](#), qu'il convient d'utiliser en cas d'articles stockables. Par ailleurs nous avons vu, avec la [relation 136](#), qu'il est possible d'exprimer le coût de gestion $C(S)$, en fonction de la seule rupture moyenne. Il en est de même si l'article est stockable. Il suffit de remplacer $I_p(S)$ par sa valeur établie par la [relation 173](#), dans la relation définissant l'indicateur de coût de gestion :

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) = c_p \left[S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \right] + c_r I_r(S)$$

$$C(S) = c_p \cdot \left[S - \frac{\bar{x}}{2} \right] + \left(c_r + \frac{c_p}{2} \right) \cdot I_r(S) \quad \text{relation 174}$$

Les [relations 173](#) et [174](#), valables quelle que soit la valeur S , permettent d'utiliser les tables mises en annexe pour calculer $I_p(S)$ et $C(S)$ à partir de la valeur de $I_r(S)$, si la demande suit une loi Normale.

Si la loi de demande est continue, l'optimum s'obtient sans difficulté¹.

$$P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p/2} \quad \text{ou} \quad P(X < S^*) = \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} \quad \text{relation 175}$$

Cette [relation 175](#), valable seulement dans le cas d'articles stockables (et en adoptant l'hypothèse simplificatrice de la [relation 162 de la page 711](#)), est l'équivalent de la [relation 148 de la page 676](#) établie pour le cas d'articles non stockables. Ces relations concernent des lois de demandes continues (ou des lois de demandes discrètes approximées par des lois continues). Le raisonnement suivi au § I-1.3.2.3, page 685, dans le cas d'approvisionnement d'articles non stockables, pour les lois de demandes discrètes, est transposable sans difficulté au cas d'articles stockables. On obtient alors les [relations 176](#) :

1. À l'optimum, on a $\frac{dC(S)}{dS} = c_p \cdot \frac{dI_p(S)}{dS} + c_r \cdot \frac{dI_r(S)}{dS}$. Avec la [relation 145 de la page 674](#) ($\frac{dI_r(S)}{dS} = -\int_S^\infty f(x)dx = -P(X > S)$)

et la [relation 174](#) ci-dessus, on obtient : $\frac{dC(S)}{dS} = c_p + \left(c_r + \frac{c_p}{2} \right) \cdot \frac{dI_r(S)}{dS} = c_p + \left(c_r + \frac{c_p}{2} \right) \cdot \left(-\int_S^\infty f(x)dx \right) = 0$, d'où la [relation 175](#).

$$P(X > S^*) < \frac{c_p}{c_r + c_p/2} < P(X > S^* - 1)$$

$$P(X \geq S^* + 1) < \frac{c_p}{c_r + c_p/2} < P(X \geq S^*)$$

$$P(X \leq S^* - 1) < \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} < P(X \leq S^*)$$

$$P(X < S^*) < \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} < P(X < S^* + 1)$$

relation 176

Ajoutons enfin :

- le fait qu'une probabilité ne puisse être négative implique que le coût de rupture ne puisse être inférieur à la moitié du coût de possession (calculé sur la période de révision calendaire T);

$$c_r > c_p/2$$

relation 177

- la relation 152 de la page 685 ($B(S) = c_r \cdot \bar{x} - C(S)$) reste valable¹ pour calculer la marge $B(S)$ associée à un niveau de rechargement quelconque S , à condition que :
 - c_r corresponde bien à la marge unitaire
 - et que l'on s'accorde bien sur le fait que cette marge est nette du coût des immobilisations.

Table des matières

I-2.3.2 Résolution numérique du problème posé

La relation 175 permet de calculer la probabilité de rupture

$$P(X > S^*) = \frac{0,01154}{0,5 + 0,01154/2} = 2,28\%$$

ce qui correspond (après lecture d'une table normale) à une valeur de variable centrée réduite 2,00, d'où la valeur optimale S^* du niveau de rechargement.

$$t_s = 2 = \frac{S - 300}{20} \rightarrow S^* = 340$$

Cette valeur est la même que celle obtenue dans le cas de l'utilisation de la solution optimale exacte (§ I-2.2.1.2, page 714). L'usage de la correction de continuité (non effectué dans la recherche de la solution optimale) conduit à $S^* = 339$, valeur qui sera retenue dans les résultats de synthèse présentés dans le tableau 196 de la page 721. On peut ajouter, en comparant les colonnes 2 et 3 du tableau 195 de la page 715, que le nombre d'ampoules commandées est pratiquement le même² dans la solution optimale et dans la solution approchée pour des niveaux de rechargement supérieurs à 320 (2 ampoules d'écart au plus).

1. Reprise de la démonstration du § I-1.3.23b, page 686, dans laquelle seule la définition de $I_p(S)$ change.

2. Cette observation n'a rien de général, elle résulte seulement de la valeur relativement faible de c_p par rapport à c_r .

Index thématique

En utilisant la table A (page 765) et la correction de continuité ($t = (340,5 - 300)/20 = 2,025$), on obtient: $I_r(S) = 0,159$, valeur inférieure à celle fournie au § I-2.2.1.2, page 714, où la correction de continuité n'était pas prise en compte. Le stock moyen possédé est donc, d'après la relation 173 de la page 718 :

$$I_p(S^*) = 340 - \frac{300}{2} + \frac{0,159}{2} = 190,08$$

La demande moyenne satisfaite par semaine est égale à $300 - 0,159 = 299,84$. Le pourcentage de demandes non satisfaites est $\beta(S) = 0,159/300 = 0,5\%$. L'indicateur de coût moyen de gestion hebdomadaire est d'après la relation 174 :

$$C(S^*) = 0,01154 \left(340 - \frac{300}{2} \right) + 0,159 \left(0,5 + \frac{0,01154}{2} \right) = 2,27 \text{ et la marge moyenne}$$

hebdomadaire, en utilisant la relation 152: $B(S^*) = 300 \times 0,5 - 2,27 = 147,73$.

Pour illustrer la remarque faite à la fin du § I-2.3.1, page 717, on peut noter qu'avec une demande moyenne satisfaite de 299,841 et une marge unitaire de 0,5 dollar lidurien, notre marchand perçoit, en moyenne, 149,92 dollars / semaine; si l'on défalque le coût des immobilisations, c'est-à-dire le produit du stock moyen possédé 190,08 par le coût de possession hebdomadaire 0,01154 (ce qui donne 2,19 dollars) de cette marge brute de 149,92 dollars, on retrouve les 147,73 dollars liduriens de marge nette calculée pour $B(S^*)$.

Ajoutons enfin que le stock résiduel moyen au moment où l'on passe la commande (ou au moment où l'on reçoit la livraison, puisque le délai d'obtention est nul, par hypothèse) se calcule sans problème grâce à la relation 135 de la page 670; il s'élève à $340 - 300 + 0,159 = 40,159$. La commande moyenne, portant sur la différence entre le niveau de reapprovisionnement (340) et le stock résiduel moyen lors de la passation de commande (40,159), sera donc de $340 - 40,159 = 299,84$, si les demandes non satisfaites sont perdues. On peut remarquer, et c'est logique, que la commande moyenne est égale à la demande moyenne satisfaite. Par contre, si les demandes non satisfaites sont différées, il faut ajouter la rupture moyenne et l'on trouve bien que la commande moyenne est égale à la demande moyenne exprimée.

Sur la base de 52 semaines ouvrables, l'ensemble des implications de la solution optimale pour LUMINOR est donné dans le tableau 196 de la page 721.

La solution d'un problème similaire se posant à LUMINOR pour un lampadaire halogène acheté 300 et vendu 400, la demande suivant une loi de Poisson de paramètre 12 est donnée dans le tableau 197 de la page 721.

SECTION II QUELQUES EXTENSIONS DES MODÈLES DE BASE

Nous avons indiqué au début de ce chapitre que les modèles de base étudiés en section I ont en commun les trois hypothèses suivantes: stock à un seul étage, délai d'obtention nul (ou ne jouant aucun rôle dans la recherche de l'optimum) et indépendance des articles entre eux pour la définition des politiques optimales. Nous lèverons successivement ces trois hypothèses en introduisant tout d'abord la possibilité de stock à étages (§ II-1), puis celle d'un délai d'obtention non nul

TABLEAU 196

Analyse de la politique optimale de **LUMINOR** pour les ampoules de 60W

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour les ampoules de 60 W	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Stock S de début de période	339	-
Stock de sécurité	39	-
Demande moyenne satisfaite	299,818	15 590,560
Rupture moyenne de stock	0,182	9,440
Pourcentage de demandes non satisfaites	0,06 %	0,06 %
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	2,41 %	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	1,255
Stock moyen possédé	189,091	189,091
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	899,46	46 771,68
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	0,09	4,72
Coût de possession	2,18	113,45
Indicateur de coût moyen	2,27	118,17
Marge nette moyenne	147,73	7 681,83

TABLEAU 197

Analyse de la politique optimale de **LUMINOR** pour les lampadaires halogènes

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour le lampadaire halogène	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Stock S de début de période	21	-
Stock de sécurité	9	-
Demande moyenne satisfaite	11,988	623,386
Rupture moyenne de stock	0,012	0,614
Pourcentage de demandes non satisfaites	0,10 %	0,10 %
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	0,61 %	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	0,315
Stock moyen possédé	15,006	15,006
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	3 596,46	187 015,85
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	1,18	61,38
Coût de possession	17,31	900,35
Indicateur de coût moyen	18,49	961,74
Marge nette moyenne	1 181,51	61 438,26

(§ II-2, page 729). La dernière hypothèse sera remplacée par celle de l'existence d'une contrainte portant sur un facteur rare (dotation budgétaire, espace de stockage) consommé simultanément par plusieurs articles (§ II-3, page 753).

II-1 Introduction aux stocks à étages en gestion calendaire

Dans la réalité, de très nombreux stocks sont à étages. La description de leur fonctionnement par des modèles peut s'avérer très complexe, surtout si ces



modèles cherchent à cerner de près la réalité. On se contentera ici d'une introduction à cette catégorie de problème, en examinant le cas le plus simple: celui de stocks en série (voir [chapitre X, figure 174, page 631](#)), en limitant leur nombre à trois, et en se plaçant dans le seul cas d'approvisionnement d'articles non stockables. On est en présence d'une application du principe de différenciation retardée. Il convient de souligner qu'ici l'existence du second étage n'exclut pas la possibilité d'une rupture de stock, contrairement à ce que nous avons vu au [§ I-1.4.33c, page 704](#) (possibilité de *rattrapage intégral et immédiat*, par un système productif de secours, des demandes perdues par le système productif normal). Par ailleurs, le cas de stocks à étages en univers certain est à relier aux techniques de planification de type MRP étudiées au [chapitre VI, page 455](#).

II-1.1 Exemple introductif

Le fabricant de vêtements féminins **NEW GIRL** est spécialisé dans le vêtement de mode. La mode des vêtements amples lui permet de limiter le nombre de tailles à 3, référencées par les lettres S, M ou L. La préparation d'une collection passe par le choix d'un certain nombre de modèles et celui de tissus. Pour la taille M d'un modèle de la nouvelle collection, et l'un des coloris du tissu vedette de la prochaine saison, les commerciaux de **NEW GIRL**, s'appuyant sur leur expérience et une enquête réalisée auprès d'un échantillon représentatif de détaillants, estiment que les ventes de cet article devraient tourner aux alentours de 10000 unités et qu'une loi Normale d'écart-type 2000 est acceptable pour résumer la distribution de probabilités des ventes. En première analyse, le problème de production qui se pose est de savoir combien de robes produire.

En réalité, la décision à prendre est plus complexe, d'une part parce que **NEW GIRL** achète des tissus dont le réapprovisionnement est trop long pour satisfaire en temps utile les demandes susceptibles d'être différées dont la vente est nécessairement limitée dans le temps (mode de l'hiver prochain) et, d'autre part, parce qu'il n'est pas forcément intéressant de transformer immédiatement tout le tissu en robes. Deux stocks sont donc constitués: un stock S_1 de robes et un stock S_2 de tissu (longueur de tissu convertie en équivalent-robes) que l'on peut «convertir» dans un délai raisonnable en robes. Une robe revient à $a_1 = 150$ dollars liduriens, dont $a_2 = 50$ dollars de tissu; elle est revendue $v = 350$ dollars et soldée à $r_1 = 90$ dollars. Le coût de rupture c_r est égal à la marge: $c_r = v - a_1 = 350 - 150 = 200$ dollars liduriens. Une «unité - robe» non vendue a donc un coût de possession $c_{p1} = a_1 - r_1 = 150 - 90 = 60$ tandis qu'une «unité - tissu» non utilisée est soldée (vente à des forains...) à $r_2 = 20$ dollars a un coût de possession $c_{p2} = a_2 - r_2 = 50 - 20 = 30$ dollars liduriens. **Ce second étage ne se justifie que si $c_{p1} > c_{p2}$** car, dans le cas contraire, il est plus avantageux d'avoir des invendus-robes que des invendus-tissus. On supposera enfin qu'une rupture de stock du modèle étudié se traduit par une probabilité de 30% de rattrapage de la vente par le système de secours basé sur le tissu stocké.

Cette probabilité fait que si l'on a retenu pour S_1 , par exemple, la valeur 11000, une demande de 13000, c'est-à-dire de 2000 robes supplémentaires, ne sera satisfaite qu'à concurrence de $11000 + 2000 \times 0,3 = 11600$. Inversement un stock S_2 de 600 est correctement «calibré» pour une demande supplémentaire de $600 / 0,3 = S_2 / p = 2000$ robes. Cette remarque nous conduira à distinguer trois cas de figure

dans la demande: demande inférieure à S_1 , demande comprise entre S_1 et $S_1 + S_2 / p$, et demande supérieure à $S_1 + S_2 / p$. Le problème posé est alors celui de la détermination des stocks S_1 et S_2 .

II-1.2 Analyse du problème

L'analyse de ce problème peut s'effectuer en utilisant deux approches: celle du coût différentiel et l'approche directe. Après les avoir examinées toutes les deux, nous verrons en quoi la première approche est préférable à la seconde, puis une solution du problème par l'approche marginaliste.

II-1.2.1 Résultats analytiques

Le coût d'exploitation du système $C(S_1, S_2)$ s'analyse comme la somme de deux coûts:

$$C(S_1, S_2) = C(S_1) + C(S_2/S_1) \quad \text{relation 178}$$

- où:

$$C(S_1) = c_{p1} \cdot I_p(S_1) + c_r \cdot I_r(S_1) = c_{p1} \int_0^{S_1} (S_1 - x)f(x)dx + c_r \int_{S_1}^{\infty} (x - S_1)f(x)dx \quad \text{relation 179}$$

dépend du stock de produits finis S_1 et pas du stock S_2 de produits semi-finis ou de matières premières,

- et où $C(S_2 / S_1)$ est un coût différentiel associé au stock de produits semi-finis S_2 , sachant que le stock de produits finis est au niveau S_1 (la notation probabiliste est adoptée ici, aussi S_2 / S_1 ne signifie pas « S_2 divisé par S_1 »).

L'analyse de ce dernier coût est relativement simple, à condition de procéder méthodiquement. Il convient, en effet, de tenir compte de trois cas de figure: la demande sur la période peut être inférieure à S_1 ou comprise entre S_1 et $S_1 + S_2 / p$, ou enfin supérieure à $S_1 + S_2 / p$:

- **Cas 1.** $x < S_1$: le stock supplémentaire S_2 ne servira pas et le coût associé à cet événement est $c_{p2} \cdot S_2$, avec une probabilité $P(x < S_1)$,
- **Cas 2.** $S_1 < x < S_1 + S_2 / p$: le stock résiduel de produits semi-finis en fin de période est égal au stock départ S_2 diminué de la fraction p de la demande $(x - S_1)$. Le coût de possession c_{p2} portera donc sur $S_2 - p \cdot (x - S_1)$ et son espé-

rance mathématique est $c_{p2} \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} [S_2 - p(x - S_1)]f(x)dx$. La satisfaction de

la fraction p de la demande $(x - S_1)$ permet d'éviter le coût de rupture c_r qui est pris en compte dans le calcul de $C(S_1)$ pour $x > S_1$, tant que la demande reste inférieure à $S_1 + S_2 / p$. Il convient donc d'intégrer au coût $C(S_2 / S_1)$

cette diminution de coût imputable à S_2 : $-p \cdot c_r \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} (x - S_1)f(x)dx$

- **Cas 3.** $x > S_1 + S_2 / p$: dans ce cas, la totalité du stock S_2 est utilisée, ce qui diminue de $c_r S_2$ la perte enregistrée dans le cas où seul le stock S_1 existe, avec une probabilité $P(x > S_1 + S_2 / p)$. L'espérance mathématique de cette

économie de dépenses est: $-c_r \cdot S_2 \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx$

En définitive on a:

$$C(S_2/S_1) = c_{p2} \left[S_2 \int_0^{S_1} f(x) dx + \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} [S_2 - p(x - S_1)] f(x) dx \right] - c_r \left[p \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} (x - S_1) f(x) dx + S_2 \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right] \quad \text{relation 180}$$

La première expression entre crochets correspond au stock moyen résiduel du produit semi-fini $I_p(S_2)$ qui peut encore s'écrire, en utilisant les notations classi-

ques $I_p(S) = \left[\int_0^S (S - x) f(x) dx \right]$ et $I_r(S) = \left[\int_S^{\infty} (x - S) f(x) dx \right]$:

$$I_p(S_2) = S_2 P(X < S_1 + S_2/p) - p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \}$$

Stock moyen résiduel du 2^e étage

relation 181

La seconde expression entre crochets de la **relation 180** correspond à la diminution moyenne de rupture de stock que l'on peut encore écrire:

$$p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p) \quad \text{diminution moyenne de rupture de stock imputable au second étage} \quad \text{relation 182}$$

Dans ces conditions, la *rupture moyenne totale* obtenue avec les deux étages est donnée par la **relation 183**:

$$I_r(S_1, S_2) = I_r(S_1) - [p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p)]$$

Rupture moyenne de stock (stock à 2 étages)

relation 183

le *coût différentiel* $C(S_2 / S_1)$ de la **relation 180** se simplifie pour devenir:

$$C(S_2/S_1) = c_{p2} [S_2 P(X < S_1 + S_2/p) - p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \}] - c_r [p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p)] \quad \text{relation 184}$$

et le *coût total* (en reprenant les relations 178 et 179, page 723):

$$C(S_1, S_2) = c_{p1} \cdot I_p(S_1) + c_{p2} [S_2 P(X < S_1 + S_2/p) - p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \}] + c_r [I_r(S_1) - \{ p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p) \}] \quad \text{relation 185}$$

La *dépense totale* sera égale au coût de fabrication des robes qui sont produites à partir des stocks S_1 (dépense certaine) et de tout ou partie de S_2 (en moyenne

$S_2 - I_p(S_2)$) au coût c_{p1} , auquel il faut ajouter l'achat du tissu inutilisé $I_p(S_2)$ et soldé ($c_{p2}I_p(S_2)$) et retrancher la valeur des robes soldées $r_1I_p(S_1)$.

$$a_1[S_1 + \{S_2 - I_p(S_2)\}] + c_{p2}I_p(S_2) - r_1I_p(S_1) \quad \text{relation 186}$$

La *marge totale* sera égale (relation 187) à la recette unitaire v multipliée par la demande moyenne satisfaite ($\bar{x} - I_r(S_1, S_2)$), moins la dépense totale. Elle peut être également calculée (relation 188) comme le produit de la demande moyenne satisfaite ($\bar{x} - I_r(S_1, S_2)$) par la marge unitaire c_r , moins le coût de gestion de la relation 185, ce qui revient à adopter l'approche de la relation 152 de la page 685.

$$B(S) = v[\bar{x} - I_r(S_1, S_2)] - [a_1[S_1 + \{S_2 - I_p(S_2)\}] + c_{p2}I_p(S_2) - r_1I_p(S_1)]$$

relation 187

$$B(S) = c_r[\bar{x} - I_r(S_1, S_2)] - C(S_1, S_2)$$

relation 188

La recherche du coût minimum implique que les dérivées partielles de la fonction de coût $C(S_1, S_2)$ par rapport à S_1 et à S_2 soient nulles. Examinons tout d'abord la dérivée par rapport à S_2 :

$$\frac{\partial C(S_1, S_2)}{\partial S_2} = 0 = \frac{\partial C(S_1)}{\partial S_2} + \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2} = 0 + \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2}, \text{ puisque } S_2 \text{ n'intervient}$$

pas du tout dans le coût $C(S_1)$.

On montre après quelques calculs¹ que :

$$P\left(X > S_1^* + \frac{S_2^*}{p}\right) = \frac{c_{p2}}{c_r + c_{p2}}, \text{ ou encore } P\left(X < S_1^* + \frac{S_2^*}{p}\right) = \frac{c_r}{c_r + c_{p2}} \quad \text{relation 189}$$

Cette dernière relation est comparable à la relation 148 de la page 676, à ceci près que la probabilité n'est pas calculée à partir d'une demande satisfaite : $P(X < S_1)$, mais à partir d'une demande partiellement satisfaite : $P(X < S_1 + S_2/p)$.

La recherche du coût minimum implique également que l'on ait :

$$\frac{\partial C(S_1, S_2)}{\partial S_1} = \frac{\partial C(S_1)}{\partial S_1} + \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = 0$$

On sait déjà (relation 147, page 675) que $\frac{\partial C(S_1)}{\partial S_1} = -c_r + (c_r + c_{p1}) \cdot P(X < S_1)$.

Il ne reste plus qu'à calculer la seconde dérivée², qui conduit à :

$$\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = p(c_{p2} + c_r)[P(X < S_1 + S_2/p) - P(X < S_1)]$$

On a donc³ :

$$P(X < S_1) = \frac{(1-p)c_r}{(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}}, \text{ ou } P(X > S_1) = \frac{c_{p1} - pc_{p2}}{(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}}$$

relation 190

On peut ajouter que $S_1 + S_2/p > S_1$ implique d'avoir une valeur de p telle que

$$P(X > S_1) > P(X > S_1 + S_2/p) \Rightarrow \frac{c_{p2}}{c_r + c_{p2}} > \frac{c_{p1} - pc_{p2}}{(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}}.$$

II-1.2.2 Généralisation

L'intérêt de la formulation différentielle réside dans sa récurrence. Si l'on ajoute un 3^e étage, susceptible de récupérer une fraction q (avec $q < p$) de la demande lorsque celle-ci est comprise entre $S_1 + S_2/p$ et $S_1 + S_2/p + S_3/q$, on

1. *Note de la page 725.* Il faut calculer les dérivées partielles par rapport à S_2 des 4 fonctions intervenant dans le coût différentiel $C(S_2/S_1)$ défini par la relation 184 de la page 724, en utilisant la formule de Leibniz :

- le calcul de $\frac{\partial}{\partial S_2} \left[\int_0^{S_1} f(x) dx \right]$ conduit, à poser $g(S_2, x) = S_2 f(x)$, $a(S_2) = 0$ et $b(S_2) = S_1$, d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = f(x)$,

$$\frac{d a(S_2)}{d S_2} = 0 \text{ et } \frac{d b(S_2)}{d S_2} = 0 ; \text{ d'où } \frac{\partial}{\partial S_2} \left[\int_0^{S_1} f(x) dx \right] = \int_0^{S_1} f(x) dx + 0 - 0$$

- le calcul de $\frac{\partial}{\partial S_2} \left\{ \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = (S_2 - p(x - S_1)) f(x)$, $a(S_2) = S_1$ et $b(S_2) = S_1 + S_2/p$, d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = f(x)$, $\frac{d a(S_2)}{d S_2} = 0$ et $\frac{d b(S_2)}{d S_2} = \frac{1}{p}$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left\{ \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\} = \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} f(x) dx + \frac{1}{p} \cdot [S_2 - p(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1)] f(S_1 + \frac{S_2}{p}) - 0 = \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} f(x) dx$$

- le calcul de $\frac{\partial}{\partial S_2} \left\{ \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = p(x - S_1) f(x)$, $a(S_2) = S_1$ et $b(S_2) = S_1 + S_2/p$, d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = 0$, $\frac{d a(S_2)}{d S_2} = 0$ et $\frac{d b(S_2)}{d S_2} = \frac{1}{p}$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial S_2} \left\{ \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\} = 0 + \frac{1}{p} p \left(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1 \right) f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) - 0 = \frac{S_2}{p} f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right)$$

- le calcul de $\frac{\partial}{\partial S_2} \left\{ \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = S_2 f(x)$, $a(S_2) = S_1 + S_2/p$ et $b(S_2) = \infty$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = f(x), \frac{d a(S_2)}{d S_2} = \frac{1}{p} \text{ et } \frac{d b(S_2)}{d S_2} = 0 ; \text{ d'où } \frac{\partial}{\partial S_2} \left\{ \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\} = \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx - \frac{S_2}{p} f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right)$$

Il s'ensuit que : $\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2} = c_{p2} \left[\int_0^{S_1} f(x) dx + \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} f(x) dx \right] - c_r \cdot \left[\frac{S_2}{p} \cdot f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) + \left(\int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx - \frac{S_2}{p} \cdot f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) \right) \right]$ et

$$\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2} = c_{p2} \int_0^{S_1 + S_2/p} f(x) dx - c_r \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx = (c_r + c_{p2}) \int_0^{S_1 + S_2/p} f(x) dx - c_r, \text{ d'où la relation 189.}$$

obtient alors comme diminution de la rupture moyenne imputable à la présence de ce 3^e étage :

$$q \int_{S_1+S_2/p}^{S_1+S_2/p+S_3/q} \left(x - S_1 - \frac{S_2}{p}\right) f(x) dx + S_3 \int_{S_1+S_2/p+S_3/q}^{\infty} f(x) dx$$

tandis que l'accroissement du coût de possession est :

2. Note de la page 725. Il faut calculer les dérivées partielles par rapport à S_1 des 4 fonctions intervenant dans le coût différentiel $C(S_2/S_1)$ défini par la relation 184 de la page 724, en utilisant la formule de Leibniz :

- le calcul de $\frac{\partial \left[\int_0^{S_1} S_2 f(x) dx \right]}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = S_2 f(x)$, $a(S_1) = 0$ et $b(S_1) = S_1$ d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = 0$,

$$\frac{d a(S_1)}{d S_1} = 0 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 1 ; \text{ d'où } \frac{\partial \left[\int_0^{S_1} S_2 f(x) dx \right]}{\partial S_1} = 0 + 1 \cdot S_2 f(S_1) - 0 = S_2 f(S_1)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = (S_2 - p(x - S_1)) f(x)$, $a(S_1) = S_1$ et

$$b(S_1) = S_1 + S_2/p, \text{ d'où l'on tire } \frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = f(x), \frac{d a(S_1)}{d S_1} = 1 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 1, \text{ d'où : } \frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}}{\partial S_1} =$$

$$p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + \left[S_2 - p \left(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1 \right) \right] f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) + [S_2 - p(S_1 - S_1)] f(S_1) = p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx - S_2 f(S_1)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = p(x - S_1) f(x)$, $a(S_1) = S_1$ et $b(S_1) = S_1 + S_2/p$, d'où

$$\text{l'on tire } \frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = -p \cdot f(x), \frac{d a(S_1)}{d S_1} = 1 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 1, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}}{\partial S_1} = -p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + \left[S_2 - p \left(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1 \right) \right] f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) - p(S_1 - S_1) f(S_1) = -p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + S_2 f(S_1 + S_2/p)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ S_2 \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = S_2 f(x)$, $a(S_1) = S_1 + S_2/p$ et $b(S_1) = \infty$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = 0, \frac{d a(S_1)}{d S_1} = 1 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 0 ; \text{ d'où } \frac{\partial \left\{ S_2 \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}}{\partial S_1} = 0 + 0 - S_2 f(S_1 + S_2/p) = -S_2 f(S_1 + S_2/p)$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = c_{p2} \left[S_2 f(S_1) + p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx - S_2 f(S_1) \right] - c_r \left[\left(-p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + S_2 f(S_1 + S_2/p) \right) - S_2 f(S_1 + S_2/p) \right]$$

$$\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = p(c_{p2} + c_r) \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx = p(c_{p2} + c_r) [P(X < S_1 + S_2/p) - P(X < S_1)]$$

$$c_{p3} \left[S_3 \int_0^{S_1 + S_2/p} f(x) dx + \int_{S_1 + S_2/p}^{S_1 + S_2/p + S_3/q} \left(S_3 - q \left(x - S_1 - \frac{S_2}{p} \right) f(x) dx \right) \right]$$

En ajoutant les dérivées partielles du coût différentiel introduit par la présence du troisième étage, on trouve à l'optimum :

$$P\left(X > S_1 + \frac{S_2}{p} + \frac{S_3}{q}\right) = \frac{c_{p3}}{c_r + c_{p3}} \quad (\text{adaptation de la relation 189}) \quad \text{relation 191}$$

$$P\left(X > S_1 + \frac{S_2}{p}\right) = \frac{pc_{p2} - qc_{p3}}{(p-q)c_r + pc_{p2} - qc_{p3}} \quad (\text{adaptation de la relation 190}) \quad \text{relation 192}$$

$$P(X > S_1) = \frac{c_{p1} - pc_{p2}}{c_r(1-p) + c_{p1} - pc_{p2}} \quad (\text{relation 190})$$

II-1.2.3 Application directe du raisonnement marginaliste

On aurait pu trouver directement ces trois relations en utilisant le raisonnement marginaliste (cf. § I-1.4.1, page 688) et donc en évitant bien des calculs !

Dans le cas d'un stock à **deux** étages :

- La présence du second stock a un coût de rupture qui est de $(1-p)c_r$, puisque le second étage permet de «rattraper» la fraction p de la demande. La probabilité d'occurrence de ce coût est toujours $P(X \geq S_1)$ et donc l'espérance mathématique de ce coût marginal est $(1-p)c_r P(X \geq S_1)$.
- Par ailleurs, si l'on détient pour rien la dernière robe stockée, ce qui a une probabilité $P(X < S_1)$ de se réaliser, on a un coût de possession qui serait seulement de c_{p1} si le second étage du magasin n'existait pas ; toutefois, en augmentant d'une unité le stock S_1 , on diminue d'une unité le stock S_2 mais en termes de vente, une unité du second étage (qui, elle aussi, n'aurait pas été vendue si $X < S_1$) est égale à une fraction p d'une unité du premier étage, ce qui fait que l'on doit diminuer c_{p1} de $p.c_{p2}$ seulement.

Dans ces conditions, le coût de possession de l'unité marginale est $(c_{p1} - pc_{p2})P(X < S_1)$. Pour que le stock S_1 soit optimal, nous avons vu (au § I-1.4) que les espérances mathématiques du coût de possession et de rupture doivent être égales, et donc que : $(c_{p1} - pc_{p2})P(X < S_1) = (1-p)c_r P(X \geq S_1) = (1-p)c_r [1 - P(X < S_1)]$, d'où la relation 190. La relation 189 de la page 725 s'obtient également sans aucune difficulté en faisant appel au raisonnement marginaliste (reprise directe du raisonnement tenu au § I-1.4.1, page 688).

3. Note de la page 725. $-c_r + (c_r + c_{p1})P(X < S_1) + p(c_{p2} + c_r)[P(X < S_1 + S_2/p) - P(X < S_1)] = 0$

$-c_r + [(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}]\{P(X < S_1) + p(c_{p2} + c_r)P(X < S_1 + S_2/p)\} = 0$, d'où, en utilisant la relation 189 de la page 725 :

$-c_r + [(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}]\left\{P(X < S_1) + p(c_{p2} + c_r)\frac{c_r}{c_{p2} + c_r}\right\} = 0$

Dans le cas du stock à **trois** étages, les égalités des espérances mathématiques des coûts marginaux de possession et de rupture entre 2 étages successifs sont, en suivant un raisonnement similaire :

$$c_r(1-p)P(X \geq S_1) = (c_{p1} - pc_{p2})P(X < S_1)$$

$$c_r(p-q)P\left(X \geq S_1 + \frac{S_2}{p}\right) = (pc_{p2} - qc_{p3})P\left(X < S_1 + \frac{S_2}{p}\right)$$

$$c_rP\left(X \geq S_1 + \frac{S_2}{p} + \frac{S_3}{q}\right) = c_{p3}P\left(X < S_1 + \frac{S_2}{p} + \frac{S_3}{q}\right)$$

II-1.3 Solution numérique de l'exemple introductif

D'après la [relation 190 de la page 725](#), on peut écrire :

$$P(X > S_1^*) = \frac{70 - (0,3 \times 30)}{(1 - 0,3) \times 200 + 70 - (0,3 \times 30)} = 23,74\%$$

Une lecture de table de la loi Normale et une interpolation donnent comme valeur de la variable centrée réduite correspondant à cette probabilité de rupture $t = 0,7148$. On en tire $S_1 = 10000 + 0,7148 \times 2000 = 11430$ qui est le nombre de robes à fabriquer.

La [relation 189, page 725](#), permet d'écrire :

$$P\left(X \geq S_1^* + \frac{S_2^*}{p}\right) = P\left(X > 11430 + \frac{S_2^*}{0,3}\right) = \frac{200}{200 + 30} = 13,04\%$$

Cette probabilité correspond à une valeur de la variable centrée réduite de 1,12434, d'où une valeur de stock $11430 + \frac{S_2^*}{0,3}$ de 12249. On en tire $S_2^* = 246$.

La politique de **NEW GIRL** consiste donc à fabriquer 11 430 robes de la taille M, et à constituer un stock de tissu permettant de fabriquer ultérieurement 246 autres robes. Le [tableau 198 de la page 730](#) retrace l'ensemble des conséquences de cette politique.

II-2 Gestion calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul

Pour les articles stockables, l'existence d'un délai d'obtention empêche de définir la politique optimale d'une période sans tenir compte de ce qui se passe dans les périodes précédentes, comme nous l'avons fait dans la première section. Cette interdépendance temporelle n'est pas trop lourde de conséquences lorsque la demande non satisfaite peut être différée, car une solution analytique permettant de créer facilement des tables de décisions peut être trouvée. Il n'en est plus de même lorsque la demande non satisfaite est perdue pour le système d'approvisionnement étudié (même si elle est rattrapable en totalité par un système d'approvisionnement «de secours»), car la solution dépend du niveau de reapprovisionnement observé lors de la passation de la commande.

TABLEAU 198

Politique optimale d'approvisionnement de **NEW GIRL**

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	par période de révision calendaire
Probabilité de rupture de stock de l'étage 1	23,74%
Stock de robes (S1)	11430
Probabilité de rupture de stock de l'étage 2	13,04%
S1+S2/p	12249
S2	246
Rupture moyenne de stock de l'étage 1	278,45
Diminution moyenne de rupture de stock due à l'étage 2	76,39
Rupture moyenne de stock totale	202,06
% de demandes non satisfaites	2,02%
Stock résiduel moyen de l'étage 1	1708,45
Stock résiduel moyen de l'étage 2	169,31
Demande moyenne satisfaite	9797,94
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	
Coût de gestion moyen	165 083,96
Dépense totale moyenne	1 594 361,28
Marge totale moyenne	1 834 916,04

II-2.1 Cas des demandes différées

II-2.1.1 Exemple introductif

Le dépôt régional de **MAXITYRE**, fabricant de pneumatiques automobiles, pratique une gestion calendaire de ses stocks, le délai de révision calendaire étant de 20 jours ouvrables ($T = 20$) et le délai d'obtention de 10 jours ouvrables ($L = 10$). Le pneu qui connaît le plus grand succès dans sa gamme « automobile » est le CRT, pneu à carcasse radiale. On étudiera la politique optimale suivie pour la référence CRT 12 qui correspond à la dimension la plus demandée et dont la demande annuelle suit la loi $\mathcal{N}(2600 ; 180)$. La demande X_T pendant la période de révision calendaire T suit alors la loi $\mathcal{N}(120 ; 49,92)$ et la demande X_L pendant le délai d'obtention suit la loi $\mathcal{N}(100 ; 33,30)$. L'unité de demande utilisée ici est la paire de pneus, achetée 390 dollars liduriens HT et vendue aux garagistes 500 dollars. Le dépôt de **MAXITYRE** a décidé de poursuivre une politique commerciale agressive sur ce créneau fortement concurrentiel. Le dépôt est ouvert 5 jours par semaine et 52 semaines par an, c'est-à-dire 260 jours ouvrables par an. Le coût de possession est calculé sur la base d'un taux d'opportunité de 20 %, ce qui donne $c_p = 0,2 \times 390 = 78$ dollars liduriens/an; d'où un coût de possession de $78 \times (20 / 260) = 6$ dollars sur la période de révision calendaire. Le problème posé est celui de la détermination de la politique optimale d'approvisionnement si l'on suppose que toute demande non satisfaite est différée et que le coût d'une demande différée (constitution de dossier...) est de 10 dollars liduriens / article.

II-2.1.2 Analyse du problème

La commande passée sera égale à la différence entre le niveau de reapprovisionnement S et la position de stock, que nous avons définie (page 471) comme étant le stock détenu, plus les livraisons attendues (ce cas ne se produisant que si le délai d'obtention est supérieur à la période de révision calendaire, cas qui n'est pas exclu dans cette analyse) moins les demandes non satisfaites. La position de stock peut fort bien être négative; dans notre exemple si le niveau de reapprovisionnement est de 130 paires, et si la rupture de stock est de 20 paires au moment où la commande est passée (d'où une position de stock de -20), **MAXITYRE** commandera 150 paires.

Si aucune demande n'arrivait entre le moment où la commande est passée et la livraison, qui se produit par hypothèse au début d'une période de révision calendaire, un stock de S unités serait alors disponible, comme dans le cas du délai d'obtention nul. Ce cas limite a peu de chances de se produire et la position de stock sera $S - X_L$, c'est-à-dire le niveau de reapprovisionnement diminué de la demande durant le délai d'obtention. En fin de période de révision calendaire, la position de stock sera celle du début de période diminuée de la demande X_T durant cette période, c'est-à-dire $S - X_L - X_T$. Ce stock en fin de période n'est pas influencé par la décision d'approvisionnement prise pendant la période de révision calendaire, car elle n'aura d'effet qu'après cette date.

La détermination de la politique optimale passera donc par la recherche du coût minimum de gestion pendant la période de révision calendaire, coût qui ne dépendra que de S , X_L et X_T .

Pour formaliser correctement le problème posé, il est préférable de faire appel à des graphiques explicitant les différents cas de figure possibles. On notera R_t la position des stocks à la date t . Si à la date t une livraison est effectuée, on notera R_{tv} , la position de stock en t avant livraison, et R_{tp} , la position de stock après livraison.

Les figures du [tableau 199 de la page 732](#) ne reprennent pas les données de l'exemple introductif ($T = 20$, $L = 10$) mais des données différentes ($T = 5$ et $L = 2$), pour rendre plus facile la lecture des positions de stock R_{tp} et R_{tv} (remplacement de t par une date ne comportant qu'un seul chiffre).

Ajoutons enfin que l'hypothèse simplificatrice de rupture de stock se produisant nécessairement en fin de période (cf. § I-2.1.2, page 709) sera retenue pour le calcul du stock moyen possédé. La solution analytique que l'on trouvera sera donc approchée, et d'autant plus proche de la solution exacte que la probabilité de rupture sera faible¹.

L'espérance mathématique du coût de gestion pendant la période de révision calendaire est donc, dans le cas continu et si l'on note f_T et f_L les fonctions de densité de probabilité des demandes pendant un temps T et un temps L : (la

1. On peut ajouter que certains auteurs comme Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 235, ou Johnson & Montgomery (1974, [245]), p. 57 aboutissent à une solution analytique différente, en partant d'hypothèses simplificatrices plus fortes.

TABLEAU 199

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul – cas des demandes différées –

Calcul du stock moyen possédé et de la rupture moyenne entre $t = L = 2$ et $t = T + L = 7$			
Stock possédé entre $t = 2$ et $t = 7$: $(R_{2p} + R_{7v})/2$, avec			
<ul style="list-style-type: none"> • R_{7v} stock observé à la date t avant livraison • R_{2p} stock observé à la date t après livraison 			
Pas de rupture de stock en $t = 7$ (demande $x_T < R_{2p}$)		Rupture de stock en $t = 7$ (demande $x_T > R_{2p}$)	
<ul style="list-style-type: none"> • $R_{7v} = R_{2p} - x_T = S - x_L - x_T$ • rupture de stock: 0 		<ul style="list-style-type: none"> • $R_{7v} = 0$ • rupture de stock: $x_T - R_{2p}$ 	
Pas de rupture de stock en $t = L = 2$ après livraison: $x_L < S$	Stock moyen possédé	$\frac{(S - x_L) + (S - x_L - x_T)}{2} = S - x_L - \frac{x_T}{2}$	
	Rupture moyenne	0	
Rupture de stock en $t = L = 2$ après livraison: $x_L > S$	Stock moyen possédé	$\frac{(S - x_L) + 0}{2} = \frac{S - x_L}{2}$	
	Rupture moyenne	$x_T - (S - x_L) = x_T + x_L - S$	

Table des matières

Index thématique

première expression entre crochets représentant le stock moyen possédé et la seconde, la rupture moyenne):

$$\begin{aligned}
C(S) = & c_p \int_0^S \left\{ \int_0^{S-x_L} \left(S - x_L - \frac{x_T}{2} \right) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L \\
& + \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} \left(\frac{S-x_L}{2} \right) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L \\
& + c_r \int_0^S \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} (x_T + x_L - S) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L \\
& + \int_S^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} (x_T + x_L - S) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L
\end{aligned}$$

La solution optimale est obtenue¹ pour :

$$\int_0^S \left\{ \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L = \frac{c_r - (c_p/2)P(X_L < S)}{c_r + c_p/2}$$

relation 193

Cette relation 193 amène quatre remarques.

II-2.1.2.1 Indépendance des demandes et condition d'optimalité

La double intégration s'interprète comme la probabilité que la demande durant la période T + L soit inférieure à S. Or, mathématiquement la densité de probabilité de S, pour une loi définie sur la période T + L, est $f_{T+L}(S)$:

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^S f_{T+L}(x_{T+L}) dx_{T+L} = f_{T+L}(S)$$

tandis que l'on démontre² que :

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^S \left\{ \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^S f_L(x_L) \cdot f_T(S-x_L) dx_L$$

Il n'y a, a priori, aucune raison d'avoir : $f_{T+L}(S) = \int_0^S f_L(x_L) \cdot f_T(S-x_L) dx_L$ sauf

s'il y a indépendance en probabilité entre la demande durant la période T et la demande durant la période L. Si l'on suppose que la position de stock n'influe pas sur la demande (achats de précaution ou de spéculation), on pourra faire raisonnablement cette hypothèse.

Dans ces conditions, la [relation 193](#) se transforme pour donner la [relation 194](#) de la page 735 :

1. *Note de la page 733.* D'une manière générale, on démontre que :

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_a^{f(S)} \left[\int_b^{g(S, x_L)} h(S, x_L, x_T) \cdot dx_T \right] dx_L = \int_a^{f(S)} \left[\int_b^{g(S, x_L)} \left\{ \frac{\partial h(S, x_L, x_T)}{\partial S} \right\} \cdot dx_T \right] dx_L + \frac{\partial f(S)}{\partial S} \int_b^{g(S, f(S))} h\{S, f(S), x_T\} \cdot dx_T + \int_a^{f(S)} \left[h\{S, x_L, g(S, x_L)\} \cdot \frac{\partial g(S, x_L)}{\partial S} \right] dx_L$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L-\frac{x_T}{2}} (S-x_L-\frac{x_T}{2}) \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L &= \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + 1 \cdot \int_0^{S-x_L} \left(S-x_L-\frac{x_T}{2} \right) \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S) dx_T \\ &\quad + \int_0^S \left(S-x_L-\frac{S-x_L}{2} \right) \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \cdot 1 \cdot dx_L \\ &= \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \int_0^S \left(\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \right) dx_L \\ \bullet \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L &= \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + 1 \cdot \int_{S-x_L}^{\infty} \left[\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S) \right] dx_T \\ &\quad - \int_0^S \left[\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(S-x_L) dx_T \cdot f_L(x_L) \cdot 1 \right] dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - \int_0^S \left[\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(S-x_L) dx_T \cdot f_L(x_L) \cdot 1 \right] dx_L \\ \bullet \frac{\partial}{\partial S} \left(\int_a^{f(S)} \left[\int_b^{g(S, x_L)} h(S, x_L, x_T) \cdot dx_T \right] dx_L + \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L \right) &= \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T + \frac{1}{2} \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L \\ &= \int_0^{S-x_L} \left[\frac{1}{2} \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T + \frac{1}{2} \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T + \frac{1}{2} \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L = \frac{1}{2} \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \frac{1}{2} \int_0^S f_L(x_L) dx_L \\ \bullet \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{S-x_L} \left(\int_{S-x_L}^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right) \cdot f_L(x_L) dx_L &= - \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + 1 \cdot \int_{S-x_L}^{\infty} [(x_T+S-S) \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S)] dx_T \\ &\quad - \int_0^S [(x_L+(S-x_L)-S) \cdot f_T(S-x_L) dx_T \cdot f_L(x_L) \cdot 1] dx_L = - \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \overline{x_T} \cdot f_L(S) \\ \bullet \frac{\partial}{\partial S} \int_0^S \left(\int_0^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right) \cdot f_L(x_L) dx_L &= - \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - 1 \int_0^{\infty} [(x_T+S-S) \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S)] dx_T + 0 \\ &= - \int_0^{\infty} f_L(x_L) dx_L - \overline{x_T} \cdot f_L(S) \\ \bullet \frac{\partial}{\partial S} \left[\int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L \right] &= - \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - \int_0^{\infty} f_L(x_L) dx_L \\ &= \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - \left(1 - \int_0^{\infty} f_L(x_L) dx_L \right) - \int_0^{\infty} f_L(x_L) dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - 1 \end{aligned}$$

$$P(X_{T+L} < S^*) = \frac{c_r - (c_p/2)P(X_L < S^*)}{c_r + c_p/2}$$

$$P(X_{T+L} > S^*) = \frac{c_p \left(1 - \frac{P(X_L < S^*)}{2}\right)}{c_r + c_p/2}$$

relation 194

Si la loi de demande est discrète, on montre que :

$$P(X_{T+L} > S^*) < \frac{c_p(1 - P(X_L < S^*)/2)}{c_r + c_p/2} < P(X_{T+L} > S^* - 1)$$

relation 195

$$P(X_{T+L} < S^*) < \frac{c_r - (c_p/2)P(X_L < S^*)}{c_r + c_p/2} < P(X_{T+L} < S^* + 1)$$

Rappelons que, d'une part, la loi d'une somme de variables aléatoires normales indépendantes suit une loi Normale dont la moyenne est la somme des moyennes et la variance la somme des variances et, d'autre part, que la loi d'une somme de variables aléatoires de Poisson suit elle-même une loi de Poisson dont la moyenne est la somme des moyennes des variables aléatoires initiales. Ces propriétés permettent d'éviter d'effectuer une double intégration (ou une double sommation). Par ailleurs, l'application de la [relation 194](#) implique d'avoir une structure de coûts telle que $c_r > c_p / 2$.

Table des matières

II-2.1.2.2 Indépendance des demandes et stock moyen possédé

Index thématique

L'hypothèse d'indépendance des demandes entre les périodes permet une nouvelle formulation du stock moyen possédé qui, compte tenu de la remarque faite au § I-2.3.1, peut alors se calculer comme la moyenne arithmétique du stock initial (après livraison et satisfaction des demandes différées) et du stock final (avant livraison) et du fait que R_0 est le stock disponible lors de la passation de la commande (à l'instant $t = 0$). Cette approche permet d'établir les [tableaux 200 et 201](#) (le lecteur prêter attention au fait que L intervient en indice de X pour désigner une période et de R , pour désigner une date).

L'espérance mathématique du stock initial est donc, en retenant la notation continue et en utilisant la [relation 135 de la page 670](#) (calcul du stock résiduel moyen) :

$$\int_0^S (S - x_L) \cdot f_L(x_L) dx_L = S - \bar{x}_L + I_{r_L}(S) \quad \text{Stock moyen initial} \quad \text{relation 196}$$

L'analyse du stock final (avant livraison), à l'instant $t = T$, s'effectue également sans difficulté, à condition de supposer qu'en cas de rupture de stock à l'instant t

2. Note de la [page 733](#).

$$\frac{\partial \int_0^S \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \cdot f_L(x_L) dx_L}{\partial S} = 0 + \int_0^S \int_0^{S-S} f_T(x_T) dx_T \cdot f_L(x_L) dx_L + \int_0^S f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^S f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) dx_L$$

TABLEAU 200

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul (cas des demandes différées): détermination du stock initial

Importance de la demande X_L durant le délai d'obtention (entre $t = 0$ et $t = L$)	$X_L < R_0$	$R_0 \leq X_L \leq S$	$X_L > S$
commande livrée en $t = L$	$S - R_0$	$S - R_0$	$S - R_0$
+ Stock résiduel R_{LV} en $t = L$	$R_0 - X_L$	0	0
– Demandes différées servies	– 0	$-(X_L - R_0)$	$-(S - R_0)$
= Stock initial R_{LP} (après livraison et demandes différées servies) en $t = L$	$S - X_L$	$S - X_L$	0

= 0, une fois la livraison effectuée (autrement dit $X_L < S$), le même phénomène ne se reproduit pas à la livraison suivante (c'est-à-dire que l'on a $X_T + X_L < 2S$). Le rejet de cette hypothèse conduit à de sérieuses complications analytiques, du fait d'une plus grande interdépendance temporelle.

TABLEAU 201

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul (cas des demandes différées): détermination du stock final

Importance de la demande X_L durant le délai d'obtention	$X_L \leq S$		$X_L > S$
Importance de la demande X_T durant la période calendaire	$X_T \leq S - X_L$	$X_T > S - X_L$	$X_T + X_L \leq 2S$
Stock initial en $t' = L$, après livraison	$S - X_L$	$S - X_L$	0
Stock final en $t' = T + L$, avant livraison	$S - X_T - X_L$	0	0

L'espérance mathématique du stock final se détermine sans problème à partir de la distribution de probabilités $f_{T+L}(x_{T+L})$ introduite au § II-2.1.2.1 :

$$\int_0^S (S - x_{T+L}) \cdot f_{T+L}(x_{T+L}) dx_{T+L} = S - \overline{x_{T+L}} + I_{r_{T+L}}(S) = S - \overline{x_T} - \overline{x_L} + I_{r_{T+L}}(S)$$

relation 197

Le stock moyen possédé pouvant se calculer comme la moyenne arithmétique des stocks de début et de fin de période (comme on l'a vu au § I-1.2.2, page 673, si l'on retient toujours l'hypothèse simplificatrice d'une rupture de stock se produisant instantanément en fin de période):

$$I_p(S) = \frac{[S - \overline{x_L} + I_{r_L}(S)] + [S - \overline{x_T} - \overline{x_L} + I_{r_{T+L}}(S)]}{2}$$

d'où:

$$I_p(S) = S - \overline{x_L} - \frac{\overline{x_T}}{2} + \frac{I_{r_{T+L}}(S) + I_{r_L}(S)}{2}$$

relation 198

(stock moyen possédé: cas d'articles stockables à délai d'obtention non nul et demandes non satisfaites différées)

La fonction de coût devient alors :

$$C(S) = c_p \left(S - \bar{x}_L - \frac{\bar{x}_T}{2} + \frac{I_{r_{T+L}}(S) + I_{r_L}(S)}{2} \right) + c_r \cdot I_{r_{T+L}}(S) \quad \text{relation 199}$$

avec la même solution analytique.

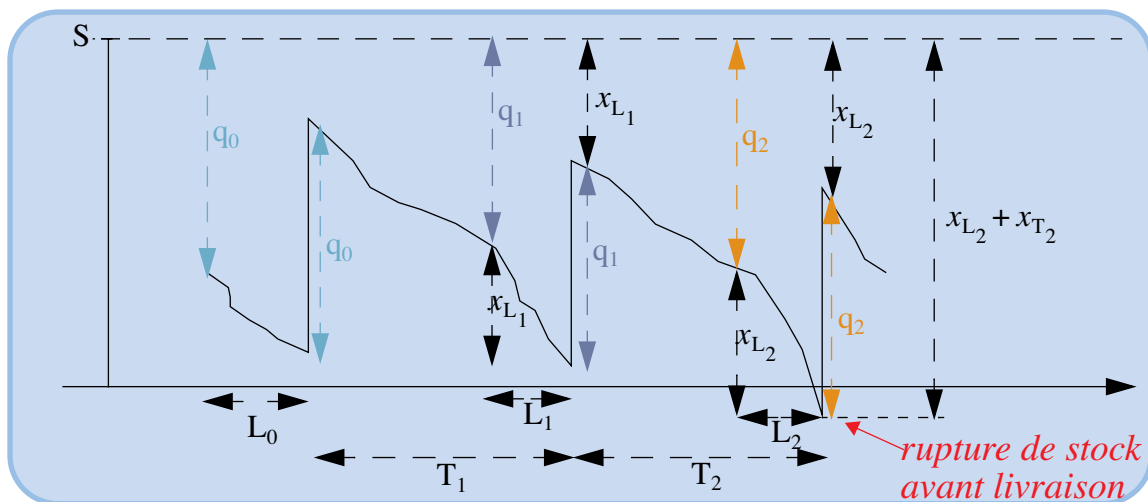
II-2.1.2.3 Indépendance des demandes et probabilités de rupture après et avant livraison

La relation 193 est analogue à la relation 175 $\left(\int_0^S f(x) dx = \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} \right)$, si l'on

définit la probabilité de rupture sur la période $T + L$ (relation 193, page 733) au lieu de la période T (relation 175, page 718) et si l'on observe en outre que $P(x_L < S)$ est proche de l'unité si c_p n'est pas trop important par rapports à c_r (ce qui est habituellement le cas) et si T n'est pas trop faible par rapport à L . La probabilité $P(X_L > S)$ s'analyse comme la probabilité de rupture de stock après livraison, tandis que la probabilité $P(X_{T+L} > S)$ s'analyse comme la probabilité de rupture de stock avant livraison, comme l'illustre la figure 190.

FIGURE 190

Probabilité $P(X_T + L > S)$ d'occurrence d'une rupture de stock avant livraison



II-2.1.2.4 Autres hypothèses de calcul possibles

Les relations 194 et 195 (page 735) sont des approximations (en raison de l'utilisation de l'hypothèse simplificatrice du § I-2.1.2, page 709). D'autres relations approchées sont habituellement proposées, mais elles reposent sous des hypothèses encore plus fortes¹.

1. Voir par exemple Hadley et Whitin (1966, [212]), p.232-240 pour les demandes différées et les demandes perdues. L'introduction de certaines hypothèses simplificatrices complémentaires conduit à une solution analytique approchée différente de celles présentées ici, mais qui en pratique donne des résultats voisins. Pour une présentation rigoureuse, mais avec des coûts de possession et de rupture tous proportionnel au temps, ou tous indépendants du temps, voir Naddor (1966, [313]), chapitre IX, qui ne traite du reste que le cas des demandes différées; voir Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 255-259 pour une solution exacte dans le cas d'une demande normale ou de Poisson.

II-2.1.3 Solution numérique de l'exemple introductif

Sur une période $T + L = 20 + 10$ jours, l'année comportant 260 jours ouvrables, la demande suit la loi Normale $\mathcal{N}(300 ; 61,14)$. Posons $P(X_L < S) = 1$, on a alors :

$$P(X_{T+L} > S) = \frac{6}{10 + (6/2)} = 0,4615$$

d'où l'on tire $S = 306$; on peut vérifier que $P(X_L > 306) = P(T > 5,89) \approx 0 \%$, ce qui justifie a posteriori notre approximation. Dans ces conditions, la solution optimale pour **MAXITYRE** est donc de compléter sa position de stock à 306, lorsqu'il passe commande.

TABLEAU 202

Analyse de la politique optimale de la **MAXITYRE** pour la référence CRT pour un coût de rupture de 10 dollars liduriens et des demandes non satisfaites différées (demande suivant une loi Normale)

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour la référence CRT1	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Niveau de recomplètement S	306	-
Stock de sécurité	106	-
Probabilité de rupture APRES livraison	0,00%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	-	0,000
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,000	0,000
Probabilité de rupture AVANT livraison	45,77%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	-	5,950
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	21,280	276,643
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	10,64%	10,64%
Stock moyen possédé	116,640	116,640
Stock moyen après livraison	206,000	206,000
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	78 000,00	1014 000,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	212,80	2 766,43
Coût de possession	699,84	9 097,93
Indicateur de coût moyen	912,64	11 864,36
Marge nette moyenne	21 087,36	274 135,64

Table des matières

Index thématique

Le **tableau 203** reprend l'exemple précédent en remplaçant la loi Normale par une loi de Poisson de moyenne annuelle égale à 70, pour illustrer l'utilisation de la relation du cas discret (**relation 195**, page 735). Le niveau de recomplètement est 8 et la marge annuelle s'élève à 7300 dollars liduriens.

Si le coût de rupture est de 3,20 dollars liduriens au lieu de 10 dollars, il est plus difficile de considérer comme négligeable la probabilité d'une rupture de stock après livraison. L'algorithme utilisé est simple : on commence tout d'abord par admettre que cette probabilité de rupture est nulle, pour calculer une valeur initiale S_1 , on calcule ensuite $P(X_L > S_1)$ que l'on utilise ensuite dans la **relation 193** pour calculer une valeur S_2 . On calcule ensuite $P(X_L > S_2)$ que l'on utilise pour déterminer S_3 , etc. jusqu'à ce que l'on obtienne $S_j \approx S_{j-1}$. Les résultats de l'applica-

TABLEAU 203

Analyse de la politique optimale de la **MAXITYRE** pour la référence CRT pour un coût de rupture de 10 dollars liduriens et des demandes non satisfaites différées (demande suivant une loi de Poisson)



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT2"	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Niveau de recomplètement S	8	-
Stock de sécurité	2,615	-
Probabilité de rupture APRES livraison	0,19%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	-	0,024
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,003	0,033
Probabilité de rupture AVANT livraison	41,82%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	-	5,436
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	1,159	15,069
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	21,53%	21,53%
Stock moyen possédé	3,196	3,196
Stock moyen après livraison	5,310	5,310
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	2 100,00	27 300,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	11,59	150,69
Coût de possession	19,18	249,31
Indicateur de coût moyen	30,77	400,00
Marge nette moyenne	581,54	7 300,00

Table des matières

Index thématique

tion de cet algorithme sont consignés dans le [tableau 204](#). Les résultats numériques de ce nouveau problème sont donnés dans le [tableau 205](#) de la page 740.

TABLEAU 204

Analyse du cas d'une probabilité de rupture[†] de stock après livraison considérée comme non négligeable

j	S_{j-1}	$P(X_{L,j} > S_{j-1})$	$P(X_{T+L,j} > S_j)$	S_j
1	∞	0	96,77 %	187
2	187	0,71 %	96,44 %	190
3	190	0,56 %	96,51 %	189
4	189	0,61 %	96,49 %	189

[†]. Avec correction de continuité

II-2.2 Cas des demandes perdues

En cas de demandes perdues, l'analyse du problème se complique sur le plan analytique du fait de l'interdépendance temporelle des décisions prises qui croît avec le nombre de périodes de révision calendaires que couvre le délai d'obtention. Lorsque la loi de demande est discrète et que le délai d'obtention correspond à un multiple entier de la période de révision calendaire, une approche basée sur les chaînes de Markov et la programmation dynamique permet d'établir¹ la politique optimale du régime stationnaire, c'est-à-dire d'indiquer la commande opti-

TABLEAU 205

Analyse de la politique optimale de la **MAXITYRE** pour la référence CRT pour un coût de rupture de 3,2 dollars liduriens et des demandes non satisfaites différées (demande suivant une loi Normale)

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT"	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 260 périodes calendaires)
Niveau de reapprovisionnement S	189	-
Stock de sécurité	- 11	-
Probabilité de rupture APRES livraison	0,56%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	-	0,073
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,063	0,824
Probabilité de rupture AVANT livraison	96,46%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	-	12,540
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	111,357	1 447,642
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	55,68%	55,68%
Stock moyen possédé	44,710	44,710
Stock moyen après livraison	89,063	89,063
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	78 000,00	1014 000,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	356,34	4 632,45
Coût de possession	268,26	3 487,40
Indicateur de coût moyen	624,60	8 119,85
Marge nette moyenne	21 375,40	277 880,15

Table des matières

Index thématique

male à passer compte tenu des commandes en attente de livraison et du stock disponible à la passation de commande. L'interdépendance de ces décisions est alors totale (dans le cadre d'un « régime de croisière » concrètement improbable). Mais, d'une part, la puissance de calcul exigée peut être considérable et, d'autre part, cette approche limite singulièrement les « combinaisons » des couples de valeurs possibles de délai d'obtention et de période calendaire. Pour ces différentes raisons, on adoptera ici une démarche moins ambitieuse (en ce sens que l'interdépendance de toutes les décisions possibles ne sera pas prise en compte), mais plus facile à mettre en œuvre dans les entreprises : on cherchera seulement à minimiser l'espérance mathématique du coût associé à la seule période concernée

par la commande à passer en négligeant, là encore, l'incidence des coûts de passation de commande. On se contentera ici d'examiner deux cas de figure qui couvrent, vraisemblablement l'essentiel des besoins dans le contexte actuel de tension sur les flux : celui d'un délai d'obtention inférieur à la période calendaire (§ II-2.2.1) et celui d'un délai d'obtention n'excédant pas deux fois la période calendaire (§ II-2.2.2).

Comme précédemment, les longueurs de période calendaire et de délai d'obtention sont définies par l'utilisateur (et ne font pas l'objet d'une optimisation). Ce dernier, à l'occasion d'une mise en place d'un système s'appuyant sur les solutions analytiques développées ici, doit également réfléchir aux valeurs à donner à ces paramètres et qui ne doivent pas forcément être les mêmes pour toutes les références gérées ni être identiques à celles précédemment utilisées. Il doit s'assurer aussi que le nombre de commandes à passer n'excédera pas les «capacités de traitement» disponibles, puisque l'approche proposée ne tient pas compte des coûts de commandes. Ce parti pris s'explique, d'une part, par l'impossibilité de faire table rase sur l'existant dans les entreprises susceptibles de mettre en œuvre la démarche proposée (d'une manière générale, la mise en œuvre de solutions analytiques de modèles où un certain nombre de contraintes ont été relaxées reste un art assez difficile à exercer) et, d'autre part, sur le caractère nécessairement arbitraire des coûts de commande qui, comme tous les coûts standards, ne restent utilisables que sur une place de validité restreinte¹ (dont on peut notablement s'écarter dans l'application de solutions optimales).

Table des matières

Index thématique

Rappelons que la notion de demande non satisfaite perdue s'apprécie par rapport à un système d'approvisionnement précis (approvisionnement pour reconstituer un stock) et qu'un système complémentaire peut être mis en place pour satisfaire rapidement les demandes en rupture de stock. Pour illustrer ce point et le cas d'une loi de demande discrète, nous nous appuierons sur l'exemple de l'entreprise **RAUTOR** qui fabrique des véhicules automobiles et dispose d'un réseau de concessionnaires : ces derniers s'approvisionnent en pièces détachées, soit dans le cadre d'une politique calendaire à un prix égal à 60 % du prix-tarif, soit en approvisionnement d'urgence (livraison garantie en moins de 24 heures) à un prix égal à 74 % du prix-tarif. Si l'on raisonne sur la base d'un prix-tarif de 1 000 dollars liduriens, le coût de rupture du système d'approvisionnement «pour stock» est alors de $1\,000 (74\% - 60\%) = 140$ dollars liduriens, tandis que le coût de possession sera calculé sur la base de 600 dollars liduriens (d'où un coût de possession annuel de 120 dollars liduriens sur la base d'un taux annuel de 20 %). En l'absence d'une prise en compte explicite du coût de commande, pour une loi de demande donnée, la politique optimale trouvée pourra être utilisée quel que soit le prix.-tarif, la fonction de coût étant la même à une constante multiplicative près.

II-2.2.1 Demandes non satisfaites perdues : cas du délai d'obtention inférieur à la période de révision calendaire

On examinera successivement le cas d'une demande suivant une loi discrète et celui d'une loi continue.

1. Voir page 649.

II-2.2.1.1 Cas discret

Le **tableau 206 de la page 742**, définissant la séquence des événements, permet d'analyser facilement le problème posé et d'établir l'indicateur de coût de gestion correspondant $C(S, R_0)$ associé à la décision, prise à l'instant $t = 0$, de reconstituer le stock au niveau S , sachant que le stock disponible à cet instant est R_0 .

- En $t = 0$: le stock résiduel étant R_0 , une commande égale à $S - R_0$ est passée pour reconstituer la position de stock à S (dont on cherchera la valeur optimale).
- En $t = L$: le stock résiduel avant livraison, compte tenu d'une demande X_L exprimée entre $t = 0$ et $t = L$ (mais non forcément satisfaite en totalité), étant égal à R_{LV} , on reçoit la commande passée en $t = 0$, ce qui conduit à un stock après livraison, égal à R_{LP} .
- En $t = T$: passation d'une nouvelle commande qui sera livrée en $t = T + L$.
- En $t = T + L$: le stock résiduel $R_{T+L,V}$ avant livraison de la commande passée en T dépend de la demande X_T exprimée entre $t = L$ et $t = T + L$, et du stock initial R_{LV} , mais est, par définition, indépendant de la commande passée en $t = T$.

TABLEAU 206

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul compris entre 0 et T (cas des demandes perdues)

Demande X_L entre 0 et L	$X_L \leq R_0$		$X_L > R_0$	
Quantité commandée en $t = 0$	$S - R_0$		$S - R_0$	
Stock résiduel R_{LV} en $t = L$ (avant livraison)	$R_0 - X_L$		0	
Stock initial R_{LP} en $t = L$ (après livraison)	$(S - R_0) + (R_0 - X_L) = S - X_L$		$(S - R_0) + 0 = S - R_0$	
Importance de la demande X_T entre $t = L$ et $t = L + T$	$X_T \leq S - X_L$	$X_T > S - X_L$	$X_T \leq S - R_0$	$X_T > S - R_0$
Stock résiduel $R_{T+L,V}$ en $t = L + T$ (avant livraison)	$(S - X_L) - X_T$	0	$(S - R_0) - X_T$	0
Rupture de stock Z entre $t = L$ et $t = L + T$	0	$X_L + X_T - S$	0	$X_T - (S - R_0)$

Table des
matièresIndex
thématique

Calculons tout d'abord l'espérance mathématique $I_p(S, R_0)$ du stock moyen durant la période de révision calendaire (définie par les dates $t = L$ et $t = L + T$):

$I_p(S, R_0) = \{E(R_{LP}) + E(R_{L+T,V})\} / 2$ avec, si on utilise la notation discrète:

$$\begin{aligned}
 E(R_{LP}) &= \sum_{X_L \leq R_0} (S - x_L)P(X_L = x_L) + (S - R_0)P(X_L > R_0) \\
 &= \sum_{X_L \leq R_0} (S - R_0 + R_0 - x_L)P(X_L = x_L) + (S - R_0)P(X_L > R_0) \\
 &= S - R_0 + I_{pL}(R_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(R_{L+T, V}) &= \sum_{X_L \leq R_0} \sum_{X_T \leq S - x_L} (S - x_L - x_T) \cdot P(X_T = x_T) \cdot P(X_L = x_L) \\
&\quad + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \\
&= \sum_{X_L \leq R_0} I_{p_T}(S - x_L) \cdot P(X_L = x_L) + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0)
\end{aligned}$$

où $I_{p_T}(K)$ est le stock résiduel de fin de période calendaire (délimitée par deux livraisons successives), pour un stock initial K .

$$I_p(S, R_0) = \frac{\left\{ S - R_0 + I_{p_L}(R_0) + \sum_{X_L \leq R_0} I_{p_T}(S - x_L) \cdot P(X_L = x_L) + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \right\}}{2}$$

Stock moyen possédé - cas des demandes discrètes perdues et $0 < L < T$ relation 200

L'analyse du [tableau 206](#) permet d'établir l'espérance mathématique $I_r(S, R_0)$ de la rupture de stock entre deux livraisons successives :

$$I_r(S, R_0) = \sum_{X_L \leq R_0} I_{r_T}(S - x_L) \cdot P(X_L = x_L) + P(X_L > R_0) \cdot I_{r_T}(S - R_0)$$

Rupture moyenne de stock - cas des demandes discrètes perdues et $0 < L < T$ relation 201

où $I_{r_T}(K)$ est la rupture de stock observée en fin de période de révision calendaire (délimitée par deux livraisons), lorsque le stock initial est de K unités.

L'espérance mathématique de l'indicateur de coût de gestion $C(S, R_0)$ associé à la décision à prendre à l'instant $t = 0$, où le stock disponible est R_0 , et portant sur la période calendaire délimitée par les deux prochaines livraisons est donc :

$$C(S, R_0) = c_r \cdot I_r(S, R_0) + c_p \cdot I_p(S, R_0) \quad \text{relation 202}$$

où c_p est le coût de possession défini sur la période calendaire.

La variation de coût pour deux valeurs successives de niveau de recombplètement est alors¹ :

$$\begin{aligned}
C(S+1, R_0) - C(S, R_0) &= \\
&\frac{c_p}{2} \left[1 + \left\{ \sum_{X_L \leq R_0} P(X_T \leq S - x_L) P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L \leq R_0) \right\} \right] \\
&- c_r \left[1 - \left\{ \sum_{X_L \leq R_0} P(X_T \leq S - x_L) P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L \leq R_0) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Détermination de l'optimum dans le cas de demandes discrètes perdues et $0 < L < T$ relation 203

La [relation 133 de la page 668](#) permet de déterminer la valeur optimale S^* de S qui est la valeur la plus faible pour laquelle cette différence est positive, la fonction de coût étant monotone pour les principaux modèles statistiques utilisables. Dès lors, il est possible d'obtenir des tables de décision faciles à mettre en œuvre. Si l'on reprend l'exemple introductif de la société **RAUTOR** et si on travaille sur des lois de demande de Poisson, on obtient des tables valables pour des plages de

valeurs plus ou moins étendues de paramètre de Poisson du type de celles du [tableau 207](#).

Il y a rupture de stock après livraison si $X_L \leq R_0$ et $X_L + X_T > S$, ce qui se produit avec une probabilité $P(X_L \leq R_0) \cdot P(X_L + x_T > S)$, ou si $X_L > R_0$ (rupture de stock avant livraison, avec la probabilité $P(X_L > R_0)$) et $X_T > S - R_0$, ce qui se produit avec la probabilité $P(X_L > R_0) \cdot P(X_T > S - R_0)$. En définitive, la *probabilité de rupture de stock après livraison* est donnée par la [relation 204](#):

$$P(X_L \leq R_0) \cdot P(X_L + X_T > S) + P(X_L > R_0) \cdot P(X_T > S - R_0) \quad \text{relation 204}$$

Dans notre exemple, avec une demande suivant la loi de $\mathcal{P}(10)$ sur la période calendaire de 20 jours (ce qui correspond à une demande moyenne annuelle de 130 unités), le délai d'obtention étant toujours de 10 jours, et pour un stock initial à la commande $R_0 = 8$, on obtient la politique optimale d'approvisionnement du [tableau 208, page 746](#) (les probabilités de rupture, variables d'état étant calculées conformément l'analyse du [tableau 206 de la page 742](#)). Ce tableau ne comporte pas le calcul de la marge moyenne annuelle, car celui-ci est fonction d'un stock disponible lors de la commande R_0 , par hypothèse variable. Pour déterminer la distribution de probabilité de R_0 il faut passer par des chaînes de Markov, ce qui, ici, est assez peu triviale mais surtout d'un intérêt assez limité lorsque l'on constate que la marge moyenne de la période est peu sensible au stock initial (moins de 1 % dans notre exemple).

1. *Note de la page précédente.* Compte tenu de la [relation 134 de la page 670](#), ($I_r(K+1) - I_r(K) = -P(X > K)$), et de la [relation 135 de la page 670](#), ($I_p(K) = K - \bar{x} + I_r(K)$), on déduit: $I_p(K+1) - I_p(K) = P(X \leq K)$. L'application de ces relations conduit à:

$$\begin{aligned} I_{p_T}(S+1-R_0) - I_{p_T}(S-R_0) &= P(X_T \leq S-R_0), \text{ d'où } I_{p_T}(S+1-R_0)P(X_L > R_0) - I_{p_T}(S-R_0)P(X_L > R_0) = P(X_T \leq S-R_0)P(X_L > R_0) \\ \sum_{x_L \leq R_0} I_{p_T}(S+1-x_L) \cdot P(X_L = x_L) - \sum_{x_L \leq R_0} I_{p_T}(S-x_L)P(X_L = x_L) &= \sum_{x_L \leq R_0} \{I_{p_T}(S+1-x_L) - I_{p_T}(S-x_L)\}P(X_L = x_L) \\ &= \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) \end{aligned}$$

On en déduit la variation de stock moyen possédé (défini par la [relation 200 de la page 743](#)):

$$I_p(S+1, R_0) - I_p(S, R_0) = \left[\{(S+1) - S\} - 0 + 0 + \left\{ \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) \right\} + \{P(X_T \leq S-R_0)(1 - P(X_L \leq R_0))\} \right] / 2$$

$$I_p(S+1, R_0) - I_p(S, R_0) = \left[1 + \left\{ \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S-R_0) - P(X_T \leq S-R_0)P(X_L \leq R_0) \right\} \right] / 2$$

Par ailleurs on a:

$$\begin{aligned} P(X_L > R_0)\{I_{r_T}(S+1-R_0) - I_{r_T}(S-R_0)\} &= -P(X_L > R_0)P(X_T > S-R_0) = -[(1 - P(X_L \leq R_0))(1 - P(X_T \leq S-R_0))] \\ &= -[1 - P(X_L \leq R_0) - P(X_T \leq S-R_0) + P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x_L \leq R_0} I_{r_T}(S+1-x_L) \cdot P(X_L = x_L) - \sum_{x_L \leq R_0} I_{r_T}(S-x_L) \cdot P(X_L = x_L) &= \sum_{x_L \leq R_0} \{I_{r_T}(S+1-x_L) - I_{r_T}(S-x_L)\} \cdot P(X_L = x_L) \\ &= - \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T > S-x_L)P(X_L = x_L) = - \left[\sum_{x_L \leq R_0} \{1 - P(X_T \leq S-x_L)\}P(X_L = x_L) \right] = - \left[P(X_L \leq R_0) - \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) \right] \end{aligned}$$

On en déduit la variation de rupture de stock (défini par la [relation 201 de la page 743](#)):

$$I_r(S+1, R_0) - I_r(S, R_0) = - \left[P(X_L \leq R_0) - \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + 1 - P(X_L \leq R_0) - P(X_T \leq S-R_0) + P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0) \right]$$

$$I_r(S+1, R_0) - I_r(S, R_0) = - \left[- \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + 1 - P(X_T \leq S-R_0) + P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0) \right]$$

$$I_r(S+1, R_0) - I_r(S, R_0) = - \left[1 - \left\{ \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S-R_0) - P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0) \right\} \right]$$

TABLEAU 207

Détermination de la quantité optimale à commander dans le cas de demandes perdues pour le système étudié (mais rattrapées en totalité par un système de secours) pour $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(\lambda)$; $L = 10$; $T = 20$; 260 jours / an; prix d'achat sur stock = 60% du prix de vente client; prix d'achat d'urgence = 74% du prix de vente client; taux de possession = 20%

Demande annuelle λ	Stock R disponible à la passation de la commande																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
75	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
80	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
85	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
90	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
95	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0
100	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0
105	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
110	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
115	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
120	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
125	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
130	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
135	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
140	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
145	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
150	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4

Table des matières

Index thématique

II-2.2.1.2 Cas continu

L'adaptation de ce qui vient d'être vu au cas continu ne pose guère de difficulté. Le stock moyen possédé (défini par la [relation 200](#), [page 743](#), dans le cas discret)

est défini par la [relation 205](#) et la rupture moyenne (défini par la [relation 201](#), page 743, dans le cas discret) est définie par la [relation 206](#).

$$I_p(S, R_0) = \frac{\left\{ S - R_0 + I_{p_L}(R_0) + \int_0^{R_0} I_{p_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \right\}}{2}$$

Stock moyen possédé dans le cas continu ($0 < L < T$; demandes perdues) relation 205

TABLEAU 208

*Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de **RAUTOR** pour les références à taux de marge de 40% sur stock et 26% en approvisionnement urgent; taux de possession 20% - Cas de la loi de Poisson avec $L=10 < T=20$*

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT"	Solution optimale
Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Stock S de début de période	21
Stock disponible à la commande	8
Quantité à commander	13
Stock de sécurité	11
Probabilité de rupture de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande	5,87%
Rupture moyenne de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande	0,095
% de demandes non satisfaites jusqu'à la prochaine passation de commande	0,95%
Stock moyen APRES livraison	16,122
Probabilité de rupture de stock juste avant la prochaine livraison	6,81%
Demande moyenne satisfaite jusqu'à la prochaine passation de commande	9,905
Stock moyen possédé jusqu'à la prochaine passation de commande	11,056
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Dépense d'acquisition de l'approvisionnement de la prochaine période calendaire	7 800,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00
Coût de rupture jusqu'à la prochaine passation de commande	13,25
Coût de possession jusqu'à la prochaine passation de commande	102,08
Indicateur de coût moyen jusqu'à la prochaine passation de commande	115,31
Marge nette moyenne de la prochaine période calendaire	3 884,69

Table des matières

Index thématique

$$I_r(S, R_0) = \int_0^{R_0} I_{r_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_L > R_0) I_{r_T}(S - R_0)$$

Rupture moyenne dans le cas continu ($0 < L < T$; demandes perdues) relation 206

L'indicateur de coût de gestion est alors:

$$C(S, R_0) = \frac{c_p}{2} \left[S - R_0 + I_{p_L}(R_0) + \int_0^{R_0} I_{p_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \right] \\ + c_r \left[\int_0^{R_0} I_{r_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_L > R_0) I_{r_T}(S - R_0) \right]$$

À l'optimum, on doit donc avoir¹:

$$\frac{d C(S, R_0)}{dS} = \frac{c_p}{2} \left[1 + \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right]$$

1. En posant $K = I_{p_T}(S - R_0) = \int_0^{S-R_0} (S - R_0 - x_T) f(x_T) dx_T$, $g(x, S) = (S - R_0 - x_T) f(x_T)$, $a(S) = 0$ et $b(S) = S - R_0$, l'application

de la formule de Leibniz (relation 144 de la page 674) donne: $\frac{\partial g(x, S)}{\partial S} = f(x)$, $\frac{da(S)}{dS} = 0$ et $\frac{db(S)}{dS} = 1$, d'où:

$$\frac{d I_{p_T}(S - R_0)}{dS} = \int_0^{S-R_0} f(x_T) dx_T + (S - R_0 - (S - R_0)) f(x_T) \cdot 1 - 0 = P(X_T \leq S - R_0) \text{ et:}$$

$$\frac{d I_{p_T}(S - R_0) P(X_L > R_0)}{dS} = P(X_T \leq S - R_0) P(X_L > R_0) = P(X_T \leq S - R_0) (1 - P(X_L < R_0)) = P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0)$$

De même, x_L étant constant, on peut écrire: $\frac{d I_{p_T}(S - x_L)}{dS} = P(X_T \leq S - x_L)$, d'où l'on tire:

$$\frac{d \int_0^{R_0} I_{p_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L}{dS} = \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L. \text{ On en déduit la dérivée du stock moyen possédé:}$$

$$\frac{d I_p(S, R_0)}{dS} = \left[1 - 0 - 0 + \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right] / 2 \\ = \left[1 + \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right] / 2$$

Par ailleurs, l'application de la formule de Leibniz donne $\frac{d I_{r_T}(S - R_0)}{dS} = - \int_{S-R_0}^{\infty} f(x_T) dx_T = -P(X_T > S - R_0)$, d'où :

$$\frac{d I_{r_T}(S - R_0) P(X_L > R_0)}{dS} = -P(X_T > S - R_0) P(X_L > R_0) = -\{ [1 - P(X_T < S - R_0)] [1 - P(X_L < R_0)] \} \\ = -\{ 1 - P(X_T < S - R_0) - P(X_L < R_0) + P(X_T < S - R_0) P(X_L < R_0) \}$$

En outre, x_L étant constant, on peut écrire: $\frac{d I_{r_T}(S - x_L)}{dS} = -P(X_T > S - x_L)$, d'où l'on tire:

$$\frac{d \int_0^{R_0} I_{r_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L}{dS} = - \int_0^{R_0} P(X_T > S - x_L) f(x_L) dx_L = - \int_0^{R_0} \{ 1 - P(X_T < S - x_L) \} f(x_L) dx_L \\ = - \left\{ P(X_L < R_0) - \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L \right\}$$

On en déduit la dérivée de la rupture moyenne:

$$\frac{d I_r(S, R_0)}{dS} = - \left[1 - P(X_T < S - R_0) - P(X_L < R_0) + P(X_T < S - R_0) P(X_L < R_0) + P(X_L < R_0) - \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L \right] \\ = - \left[1 - \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right]$$

$$-c_r \left[1 - \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right] = 0$$

*Détermination de l'optimum dans le cas de demandes continues perdues et
0 < L < T* *relation 207*

Illustrons ce cas de figure en reprenant l'exemple de **MAXITYRE** et en supposant maintenant que les demandes non satisfaites sont perdues et que la demande annuelle suive une loi Normale de moyenne 2600 et d'écart-type 180 ($\Rightarrow \mathcal{L}(X_T) = \mathcal{N}(200 ; 49,93)$) et que, comme précédemment, le taux de marge est de 40 % pour un article en stock contre 26 % pour un article approvisionné en urgence (délai d'obtention de 10 jours et durée de la période de révision calendaire, de 20 jours). Si le niveau de stock à la commande R_0 est de 150 paires, la politique optimale est alors de reconstituer la position de stock à 317, c'est-à-dire de commander 167 paires de pneus (voir [tableau 209](#)).

TABEAU 209

*Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de **RAUTOR** pour les références à
taux de marge de 40 % sur stock et 26 % et taux de possession de 20 % en
approvisionnement urgent avec L < T (L = 10 ; T = 20) Cas de la loi Normale*

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT"		Solution optimale
Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement		entre cette commande et la prochaine
Stock S de début de période		390
Stock disponible à la commande		150
Quantité à commander		240
Stock de sécurité		90
Probabilité de rupture de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande		8,00 %
Rupture moyenne de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande		1,509
% de demandes non satisfaites jusqu'à la prochaine passation de commande		0,75 %
Stock moyen APRES livraison		291,210
Probabilité de rupture de stock juste avant la prochaine livraison		7,63 %
Demande moyenne satisfaite jusqu'à la prochaine passation de commande		198,491
Stock moyen possédé jusqu'à la prochaine passation de commande		190,006
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		entre cette commande et la prochaine
Dépense d'acquisition de l'approvisionnement de la prochaine période calendaire		144 000,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires		0,00
Coût de rupture jusqu'à la prochaine passation de commande		211,20
Coût de possession jusqu'à la prochaine passation de commande		1 753,90
Indicateur de coût moyen jusqu'à la prochaine passation de commande		1 965,10
Marge nette moyenne de la prochaine période calendaire		78 034,90

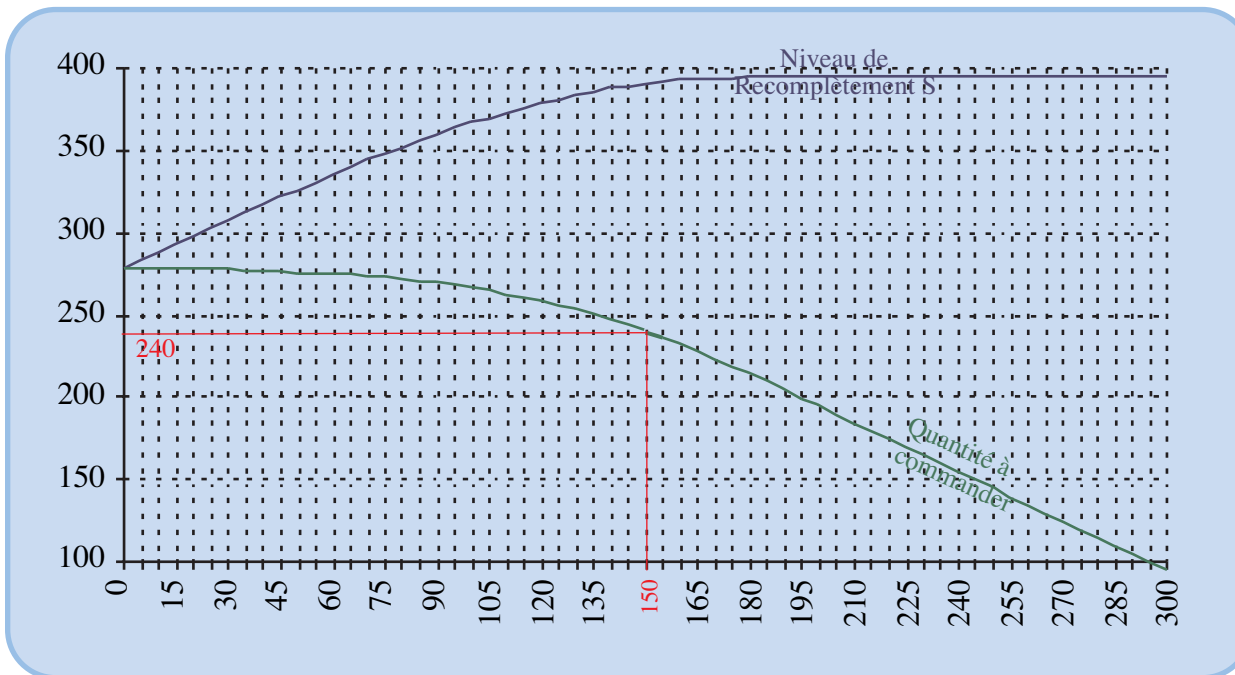
Table des matières

Index thématique

Là encore, on peut établir des tables de décision donnant directement le niveau de reconstituer pour plusieurs valeurs possibles du stock disponible à la passation de la commande, mais il faut prendre en compte simultanément les deux paramètres caractérisant la loi Normale, en plus du stock initial. En pratique, il est plus facile de faire un calcul direct. La [figure 191, page 749](#), montre l'évolution du

FIGURE 191

Détermination du niveau de reapprovisionnement optimal (et de la quantité à commander) dans le cas de demandes perdues pour le système étudié (mais rattrapées en totalité par un système de secours) pour $\mathcal{L}(X_{an}) = \mathcal{N}(2600; 180)$; $L = 10 < T = 20$; 260 jours / an; prix d'achat sur stock = 60% du prix de vente client; prix d'achat d'urgence = 74% du prix de vente client; taux de possession annuel de 20 %

Table des
matièresIndex
thématique

niveau de reapprovisionnement et de la quantité commandée, en fonction du stock initial. On peut remarquer, là encore, une stabilisation progressive du niveau de reapprovisionnement. Il ne faut pas perdre de vue que cette table n'est utilisable que pour un couple donné de moyenne et d'écart-type de la loi Normale caractérisant la demande.

II-2.2.2 Demandes non satisfaites perdues: cas du délai d'obtention compris entre une et deux fois la période de révision calendaire

Nous nous limiterons au cas d'un délai d'obtention supérieur à la période de révision calendaire, mais n'excédant pas deux fois celle-ci. Dans ces conditions, en effet, la détermination de l'approvisionnement optimal ne dépend que du stock disponible lors de la passation de la commande et de la commande en attente de livraison. Dans le cas contraire ($T \geq 2L$), l'approvisionnement optimal dépendrait non plus d'une seule commande en attente de livraison, mais de toutes les commandes en attente de livraison.

Dans la définition du problème, nous ne retiendrons qu'une variable de commande, à savoir la quantité q_0 à commander à l'instant $t = 0$, sachant que le stock physiquement disponible à cet instant est R_0 et que la commande q_T doit être prochainement livrée. Nous pouvons encore définir cette variable de commande, comme un niveau de reapprovisionnement S égal à la somme du stock disponible R_0 et de la commande q_0 à passer. Il convient de noter que :

- ce niveau de complètement S ne tient pas compte de la commande q_{-T} en attente de livraison;
- ce niveau de recomplètement dépend à la fois de R_0 et de q_{-T} et ne peut donc être fixe;
- la position de stock S' après livraison sera donc $S' = R_0 + q_{-T} + q_0 = S + q_0$.

Pour préciser les idées, il est nécessaire de fixer la chronologie des événements :

- en $t = 0$: passation d'une commande $q_0 = S - R_0$
- en $t = L - T = \theta$: réception de la commande q_{-T} passée en $t - L = -T$
- en $t = T$: passation d'une commande q_T
- en $t = L$: réception de la commande $q_0 = S - R_0$
- en $t = 2T$: passation d'une commande q_{2T}
- en $t = L + T$: réception de q_T

Le **tableau 210** décrit la chronologie des différents cas de figure rencontrés. L'indicateur de coût correspond à la période calendaire déterminée par les dates $t = L$ et $t = L + T$. Par ailleurs, on notera X_T et X_τ les demandes correspondant aux périodes allant de $t = \theta$ à $t = L$ et de $t = L$ à $t = L + T$. Leurs distributions de probabilités sont définies sur des périodes égales à la période de révision calendaire.

TABLEAU 210

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention compris entre T et $2T$ (cas des demandes perdues)

Demande X_θ entre $t = 0$ et $t = \theta$	$X_\theta \leq R_0$		$X_\theta > R_0$	
Stock disponible après livraison de q_{-T} en $t = \theta$	$q_{-T} + R_0 - x_\theta$		q_{-T}	
Demande X_T entre $t = \theta$ et $t = L$	$X_T \leq q_{-T} + R_0 - x_\theta$	$X_T > q_{-T} + R_0 - x_\theta$	$X_T \leq q_{-T}$	$X_T > q_{-T}$
Stock disponible (avant livraison) en $t = L$	$R_0 + q_{-T} - x_\theta - X_T$	0	$q_{-T} - X_T$	0
Livraison en $t = L$	$q_0 = S - R_0$	$q_0 = S - R_0$	$q_0 = S - R_0$	$q_0 = S - R_0$
Stock disponible (après livraison) en $t = L$	$R_0 + q_{-T} - x_\theta - x_T + q_0$ $= S + q_{-T} - x_\theta - x_T$	$0 + q_0 = S - R_0$	$q_{-T} - x_T + q_0$ $= S + q_{-T} - R_0 - x_T$	$0 + q_0 = S - R_0$
Demande X_τ entre $t = L$ et $t = L + T$	$X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T$	$X_\tau > S + q_{-T} - x_\theta - x_T$	$X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T$	$X_\tau > S - R_0 + q_{-T} - x_T$
Stock disponible (avant livraison) en $t = L + T$	$S + q_{-T} - x_\theta - x_T - x_\tau$	0	$S - R_0 + q_{-T} - x_\tau - x_T$	0
Rupture de stock entre $t = L$ et $t = L + T$	0	$x_\tau + x_T + x_\theta - S - q_{-T}$	0	$x_\tau + R_0 - S - q_{-T}$

Table des matières

Index thématique

Si nous passons en espérance mathématique, le stock moyen possédé $I_p(S)$, entre les dates L et L + T est :

$$I_p(S) = \frac{(\text{Stock initial en L après livraison}) + (\text{Stock résiduel en T+L après livraison})}{2}$$

Le stock initial en L après livraison, $I_1(S)$, est égal à la quantité livrée ($S - R_0$), augmentée de l'espérance mathématique du stock résiduel avant livraison correspondant aux deux cas de figure identifiés dans le [tableau 210, page 750](#) (en notant $I_{p_\phi}(K)$ le stock résiduel en fin de période d'amplitude ϕ , pour un stock initial K) :

$$I_1(S) = S - R_0 + \sum_{X_\theta \leq R_0} I_{p_T}(q_{-T} + R_0 - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) + I_{p_T}(q_{-T})P(X_\theta > R_0)$$

Le stock résiduel en T + L avant livraison, $I_2(S)$, est la somme des espérances mathématiques des quatre cas de figures identifiés au [tableau 210](#) ; on a retenu ici une forme propice aux calculs :

$$\begin{aligned} I_2(S) = & \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} I_{p_T}(S + q_{-T} - x_\theta - x_T)P(X_T = x_T)P(X_\theta = x_\theta) \\ & + \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) \right\} I_{p_T}(S - R_0) \\ & + P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{p_T}(S - R_0 + q_{-T} - x_T)P(X_T = x_T) + P(X_\theta > R_0)P(X_T > q_{-T})I_{p_T}(S - R_0) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'espérance mathématique de la rupture de stock en fin de période de révision calendaire (à la date L + T) est :

$$\begin{aligned} & \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} I_{r_T}(S + q_{-T} - x_\theta - x_T)P(X_T = x_T)P(X_\theta = x_\theta) \\ & \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) \right\} I_{r_T}(S - R_0) \\ & + P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{r_T}(S - R_0 + q_{-T} - x_T)P(X_T = x_T) + P(X_\theta > R_0)P(X_T > q_{-T})I_{r_T}(S - R_0) \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de l'indicateur de coût de gestion $C(S)$ associé à la stratégie d'approvisionnement (recompléter à S) et la période calendaire T est (le coût de possession étant calculé sur cette période) :

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$$

La recherche de l'optimum s'effectue, pour un couple de valeurs R_0 et q_{-T} donné, en recherchant la valeur de S faisant changer de signe $C(S + 1) - C(S)$, ce qui donne¹ :

$$\begin{aligned} C(S + 1) - C(S) = & \frac{c_p}{2} \left[1 + \left\{ \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T)P(X_T = x_T)P(X_\theta = x_\theta) \right\} \right] \\ & + \frac{c_p}{2} \left[\left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) \right\} P(X_\tau \leq S - R_0) \right] \\ & + \frac{c_p}{2} \left[\left\{ \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left[\sum_{X_T \leq q_{-T}} P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T)P(X_T = x_T) \right] \right\} + \left\{ \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \{1 - P(X_T \leq q_{-T})\} P(X_\tau \leq S - R_0) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_r \left[\sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{1 - P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \right] \\
& -c_r \left[\left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{1 - P(X_\tau \leq S - R_0)\} \right] \\
& -c_r \left[\left\{ \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} [1 - P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T)] P(X_T = x_T) \right\} \right\} + \{[1 - P(X_\theta \leq R_0)][1 - P(X_T \leq q_{-T})][1 - P(X_\tau \leq S - R_0)]\} \right] = 0
\end{aligned}$$

relation 208

La probabilité de rupture, toujours en application de l'analyse faite au **tableau 210** est donnée par la **relation 209**:

$$\begin{aligned}
& \sum_{X_\theta \leq R_0} \left\{ \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} P(X_\tau > S + q_{-T} - x_\theta - x_T) P(X_T = x_T) + P(X_\tau > S - R_0) P(X_T > R_0 + q_{-T} - x_\theta) \right\} P(X_\theta = x_\theta) \\
& + P(X_\theta > R_0) \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} P(X_\tau > S - R_0 + q_{-T} - x_T) P(X_T = x_T) + P(X_T > q_{-T}) P(X_\tau > S - R_0) \right\} \quad \text{relation 209}
\end{aligned}$$

Illustrons ce cas de figure en reprenant le cas de la société **RAUTOR** en supposant maintenant que le délai d'obtention L soit de 15 jours ouvrables et que la période de révision calendaire est de 10 jours ouvrables, avec une demande annuelle suivant une loi $\mathcal{A}(150)$, un stock 3 unités à la passation de commande et une commande de 5 unités en attente de livraison. On peut alors sans difficulté établir des tables de décision pour des demandes suivant des lois de Poisson, ces tables

1. Note de la page précédente. Sachant que $I_p(S+1+K) - I_p(S+K) = P(X \leq S+K)$, $I_r(S+1+K) - I_r(S+K) = -P(X > S+K) = -(1 - P(X \leq S+K))$, on déduit:

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{I_{p_\tau}(S+1+q_{-T}-x_\theta-x_T) - I_{p_\tau}(S+q_{-T}-x_\theta-x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& = \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T) P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& \bullet \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{I_{r_\tau}(S+1+q_{-T}-x_\theta-x_T) - I_{r_\tau}(S+q_{-T}-x_\theta-x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& = - \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{1 - P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& \bullet \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{I_{p_\tau}(S+1-R_0) - I_{p_\tau}(S-R_0)\} \\
& = \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} P(X_\tau \leq S - R_0) \\
& \bullet \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{I_{r_\tau}(S+1-R_0) - I_{r_\tau}(S-R_0)\} \\
& = - \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{1 - P(X_\tau \leq S - R_0)\} \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} \{I_{p_\tau}(S+1-R_0+q_{-T}-x_T) - I_{p_\tau}(S+1-R_0+q_{-T}-x_T)\} P(X_T = x_T) \\
& = \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T) P(X_T = x_T) \right\} \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{r_\tau}(S+1-R_0+q_{-T}-x_T) P(X_T = x_T) - P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{r_\tau}(S-R_0+q_{-T}-x_T) P(X_T = x_T) \\
& = - \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} [1 - P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T)] P(X_T = x_T) \right\} \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) P(X_T > q_{-T}) \{I_{p_\tau}(S+1-R_0) - I_{p_\tau}(S-R_0)\} = \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \{1 - P(X_T \leq q_{-T})\} P(X_\tau \leq S - R_0) \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) P(X_T > q_{-T}) \{I_{r_\tau}(S+1-R_0) - I_{r_\tau}(S-R_0)\} = - \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \{1 - P(X_T \leq q_{-T})\} \{1 - P(X_\tau \leq S - R_0)\}
\end{aligned}$$

Table des
matièresIndex
thématique

étant du reste valables pour des plages plus ou moins importantes de paramètres de Poisson. Le [tableau 211](#) fournit un extrait de ces tables donnant pour chaque couple de stock disponible à la commande et de livraison attendue, le niveau de recombplètement et la quantité à commander. Le [tableau 212](#) donne les résultats détaillés de la politique d'approvisionnement pour un couple de valeurs de stock disponible à la commande et de livraison attendue; comme dans le cas étudié au § II-2.2.1, le calcul des conséquences annuelles de la politique retenue est sans objet.

TABLEAU 212

Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de RAUTOR pour les références à taux de marge de 40% sur stock et 26% en approvisionnement urgent Cas de la loi de Poisson avec $T=10 < L=15 < 2T=20$

Solution optimale pour Rautor	
Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Quantité en attente de livraison	5
Disponible à la passation de commande	3
Niveau de recombplètement S	13
Quantité optimale à commander	10
Stock moyen après livraison	10,988
Rupture moyenne de stock avant livraison	0,039
% de demandes non satisfaites	0,68%
Stock moyen avant livraison	5,258
Probabilité de rupture de stock	2,25%
Demande moyenne satisfaite	5,730
Stock moyen possédé	8,123
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Dépense d'acquisition	6 000,00
Coût de commande	0,00
Coût de rupture	5,52
Coût de possession	37,49
Indicateur de coût moyen	43,01
Marge nette moyenne	2 264,68

L'analyse du cas continu continu conduit à une adaptation de la [relation 208](#), similaire à celle trouvée avec la [relation 207 de la page 748](#) qui constitue une transposition de la [relation 202 de la page 743](#), pour le cas d'un délai d'obtention plus court que la période calendaire. On n'examinera pas ce cas ici pour des raisons numériques: on est en présence de calculs faisant intervenir des intégrales triples qui nécessitent l'usage d'algorithmes spécifiques qui nous éloignent de l'illustration «basique» que nous avons retenue.

II-3 Incidence de l'utilisation simultanée d'un même facteur rare pour plusieurs articles

Le lecteur n'ayant aucune connaissance des problèmes d'optimisation sous contrainte a intérêt à lire ce § II-3, après avoir pris connaissance du [chapitre XII](#),

TABLEAU 211

Détermination de la quantité optimale de commande q_0 pour une demande annuelle suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda=150/\text{an})$ – avec $L = 15$ $T = 10$ – prix d'achat sur stock = 60% du prix de vente client et prix d'achat d'urgence = 74% du prix de vente client et taux de possession = 20% –

		Stock disponible à la commande																					
		0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
		S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀
Livraison attendue	0	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	16	11	17	11	18	11	18	10	19	10	20	10
	1	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	16	11	17	11	17	10	18	10	19	10	19	9
	2	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	16	11	16	10	17	10	18	10	18	9	19	9
	3	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	15	10	16	10	17	10	17	9	18	9	18	8
	4	11	11	12	11	13	11	14	11	14	10	15	10	16	10	16	9	17	9	17	8	18	8
	5	11	11	12	11	12	10	13	10	14	10	15	10	15	9	16	9	16	8	17	8	17	7
	6	10	10	11	10	12	10	13	10	14	10	14	9	15	9	15	8	16	8	16	7	16	6
	7	10	10	11	10	12	10	13	10	13	9	14	9	14	8	15	8	15	7	15	6	15	5
	8	9	9	10	9	11	9	12	9	13	9	13	8	14	8	14	7	14	6	14	5	14	4
	9	9	9	10	9	11	9	11	8	12	8	13	8	13	7	13	6	13	5	13	4	13	3
	10	8	8	9	8	10	8	11	8	11	7	12	7	12	6	12	5	12	4	12	3	12	2
	11	7	7	8	7	9	7	10	7	10	6	11	6	11	5	11	4	11	3	11	2	11	1
	12	6	6	7	6	8	6	9	6	10	6	10	5	10	4	10	3	10	2	10	1	10	0
	13	6	6	7	6	7	5	8	5	9	5	9	4	9	3	9	2	9	1	9	0	10	0
	14	5	5	6	5	6	4	7	4	8	4	8	3	8	2	8	1	8	0	9	0	10	0

Table des matières

Index thématique

§ I-2.3.1, page 802, où cette problématique de l'optimisation sous contrainte est exposée avec plus de détails et où l'interprétation économique de la variable λ (coût fantôme associé à la contrainte) est présentée de façon plus complète. Nous verrons successivement le cas de délais d'obtention nuls (pour tous les articles soumis à la contrainte) puis celui de délais d'obtention non nuls.

II-3.1 Cas de délai d'obtention nul

Nous examinerons successivement le problème posé par l'approvisionnement d'articles non stockables (§ II-3.1.1) et celui d'articles stockables (§ II-3.1.2, page 756).

II-3.1.1 Articles non stockables à délais d'obtention nuls

II-3.1.1.1 Exemple introductif

La **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville ne vend pas seulement l'Univers, mais également plusieurs autres journaux nationaux comme la Dépêche du matin, ou locaux comme le Courrier d'Alphaville. Elle se voit contrainte pendant une période relativement courte (3 semaines) d'effectuer un certain nombre de travaux qui limitent le stockage des quotidiens et périodiques. Prenons le cas de trois d'entre eux seulement dont les données sont fournies dans le **tableau 213 de la**

page 755; ces demandes suivent toutes des lois normales et la limitation imposée est de 900 journaux au plus lors de la livraison du matin.

TABLEAU 213
Caractéristiques des journaux vendus par la **MAISON DE LA PRESSE**

j	Journal	\bar{x}_j	σ_j	v_j	b_j	r_j	$c_{pj} = \frac{c_{pj}}{b_j - r_j}$	$c_{rj} = \frac{c_{rj}}{v_j - b_j}$	$P(X_j > S_j^*)$	S_j^*
1	Univers	300	20	2,5	1,8	1,60	0,2	0,7	22,2%	315
2	Dépêche	250	30	2,8	2,0	1,75	0,25	0,8	23,7%	271
3	Courrier	400	50	2,5	1,9	1,75	0,15	0,6	20%	442

II-3.1.1.2 Formulation analytique du problème posé

En l'absence de contrainte de stockage, on cherchera à minimiser la somme $\sum C_j(S_j)$ des coûts moyens de gestion d'une période de révision calendaire pour les différents articles j , qui dépendent du stock S_j .

Ces coûts sont calculés d'après la [relation 136 de la page 670](#), si les articles sont non stockables (ce qui est le cas ici), ou la [relation 174 de la page 718](#) dans le cas d'articles stockables. L'introduction de la contrainte portant sur l'utilisation d'une ressource rare conduit à dériver le Lagrangien suivant:

$$H = \sum_j C_j(S) + \lambda(\sum_j a_j S_j - A)$$

$$H = \sum_j [c_{pj}(S_j - \bar{x}_j) + (c_{pj} + c_{rj}) \cdot I_r(S_j)] + \lambda(\sum_j a_j S_j - A)$$

ce qui donne pour notre exemple numérique:

$$H = 0,2(S_1 - 300) + 0,9I_r(S_1) + 0,25(S_2 - 250) + 1,05I_r(S_2) + 0,15(S_3 - 400) + 0,75I_r(S_3) + \lambda(S_1 + S_2 + S_3 - 900)$$

Pour que H soit un extremum, il faut que les différentes dérivées partielles de H soient nulles, ce qui donne:

$$\frac{\partial H}{\partial S_1} = 0 = 0,2 + 0,9(-P(X_1 > S_1)) + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_2} = 0 = 0,25 + 1,05(-P(X_2 > S_2)) + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_3} = 0 = 0,15 + 0,75(-P(X_3 > S_3)) + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 = S_1 + S_2 + S_3 - 900$$

et d'une façon générale: $\frac{\partial H}{\partial S_j} = 0 = c_{pj} + (c_{pj} + c_{rj})(-P(X_j > S_j)) + \lambda a_j$, d'où:

$$P(X_j > S_j^*) = \frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj} + c_{rj}}$$

relation 210

Toute probabilité étant inférieure à 1, cette relation implique nécessairement que l'on ait $\frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj} + c_{rj}} < 1$, d'où la [relation 211](#)¹.

$$\lambda < \underset{j}{\text{Min}}(c_{rj}/a_j) \quad \text{relation 211}$$

Par ailleurs, $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 = \sum_j a_j S_j - A$ conduit à la [relation 212](#).

$$\sum_j a_j S_j^* = A \quad \text{relation 212}$$

II-3.1.1.3 Résolution numérique

Ce système de 4 équations à 4 inconnues (λ, S_1, S_2, S_3) n'a pas de solution explicite, mais celle-ci peut-être obtenue assez rapidement à l'aide de l'algorithme itératif de la [figure 192 de la page 758](#) qui converge rapidement vers la solution recherchée. L'application de cet algorithme donne les résultats fournis dans le [tableau 217 de la page 763](#). Vous pouvez tester à l'aide du logiciel une variante de cet exemple dans lequel on décide de limiter à 1 500 dollars liduriens la dépense quotidienne d'achat de ces journaux. Il convient alors d'acquérir chaque jour 280 exemplaires de l'**Univers**, 222 exemplaires de la **Dépêche** et 291 exemplaires du **Courrier**, ce qui conduit à une marge totale annuelle de 141 624,58 dollars liduriens, contre 162 419,48 en l'absence de contrainte.

II-3.1.2 Articles stockables à délai d'obtention nul

La seule différence par rapport au cas étudié au paragraphe précédent est l'utilisation de la [relation 174](#) à la place de la [relation 136](#) dans la sommation des coûts moyens de gestion (ce qui suppose là encore que l'hypothèse simplificatrice soit

utilisée): $\sum_j \left[S_j - \frac{\bar{x}}{2} + \left(c_{rj} + \frac{c_{pj}}{2} \right) I_r(S_j) \right]$ sous contrainte $\sum_j a_j S_j \leq A$.

La dérivation du Lagrangien H correspondant à ce problème donne:

$$P(X_j > S_j^*) = \frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj}/2 + c_{rj}} \quad \text{relation 213}$$

La [relation 210](#) restant valable, l'algorithme vu précédemment reste utilisable, la [relation 213](#) se substituant à la [relation 210 de la page 755](#). Il faut ajouter que la

1. *Note de la page précédente.* En pratique, une forte contrainte sur la ressource rare pose un problème numérique difficile à résoudre car on se trouvera alors en présence de probabilités de rupture infinitésimale, permettant, en toute rigueur, de baisser les S_j (qui varient théoriquement de manière continue entre 0 et l'infini) de telle sorte que la contrainte soit satisfaite mais les algorithmes généralement disponibles sont inappropriés pour résoudre ce cas de figure. Ce problème se retrouvera dans les deux autres cas de gestion sous contrainte étudiés dans ce chapitre, avec la [relation 214 de la page 757](#), qui traite de l'approvisionnement simultané d'articles stockables à délai d'obtention nul, et d'une relation similaire se déduisant de la [relation 216 de la page 761](#), qui traite de l'approvisionnement simultané d'articles stockables à demandes non satisfaites différées avec délai d'obtention non nul. Le logiciel proposé avec cet ouvrage borne en pratique la contrainte, de telle sorte qu'une solution numérique soit toujours possible dans ces 3 cas de figure.



TABLEAU 214

Analyse de la politique optimale de la **MAISON DE LA PRESSE** pour l'approvisionnement de ses quotidiens sous contrainte de volume stocké

Politique optimale d'approvisionnement sous contrainte		Univers	Dépêche	Courrier
Conséquences physiques		par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Stock S de début de période		291	240	368
Stock de sécurité		- 9	- 10	- 32
Demande moyenne satisfaite		287,061	232,687	360,470
Rupture moyenne de stock		12,939	17,313	39,530
Pourcentage de demandes non satisfaites		4,31%	6,93%	9,88%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire		66,46%	62,43%	73,57%
Stock résiduel moyen		3,939	7,313	7,530
Conséquences financières		par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Dépense d'acquisition nette moyenne		517,50	467,20	686,02
Coût de commande / Charges fixes calendaires		0,00	0,00	0,00
Coût de rupture		9,06	13,85	23,72
Coût de possession		0,79	1,83	1,13
Indicateur de coût moyen		9,84	15,68	24,85
Marge nette moyenne		200,16	184,32	215,15
Conséquences physiques		par an	par an	par an
Demande moyenne satisfaite		74 635,917	60 498,522	93 722,275
Rupture moyenne de stock		3 364,083	4 501,478	10 277,725
Pourcentage de demandes non satisfaites		4,31%	6,93%	9,88%
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock		172,791	162,305	191,270
Stock résiduel moyen		1 024,083	1 901,478	1 957,725
Conséquences financières		par an	par an	par an
Dépense d'acquisition nette moyenne		134 549,47	121 472,41	178 365,98
Coût de commande		0,00	0,00	0,00
Coût de rupture		2 354,86	3 601,18	6 166,63
Coût de possession		204,82	475,37	293,66
Indicateur de coût moyen		2 559,87	4 076,55	6 460,29
Marge nette moyenne		52 040,33	47 923,45	55 939,71
Consommation de la ressource		291	240	368
Prix-fantôme (lambda) = 0,399559				

Table des matières

Index thématique

probabilité $\frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj}/2 + c_{rj}}$ étant nécessairement inférieure à 1, on en déduit les conditions de la **relation 214**¹:

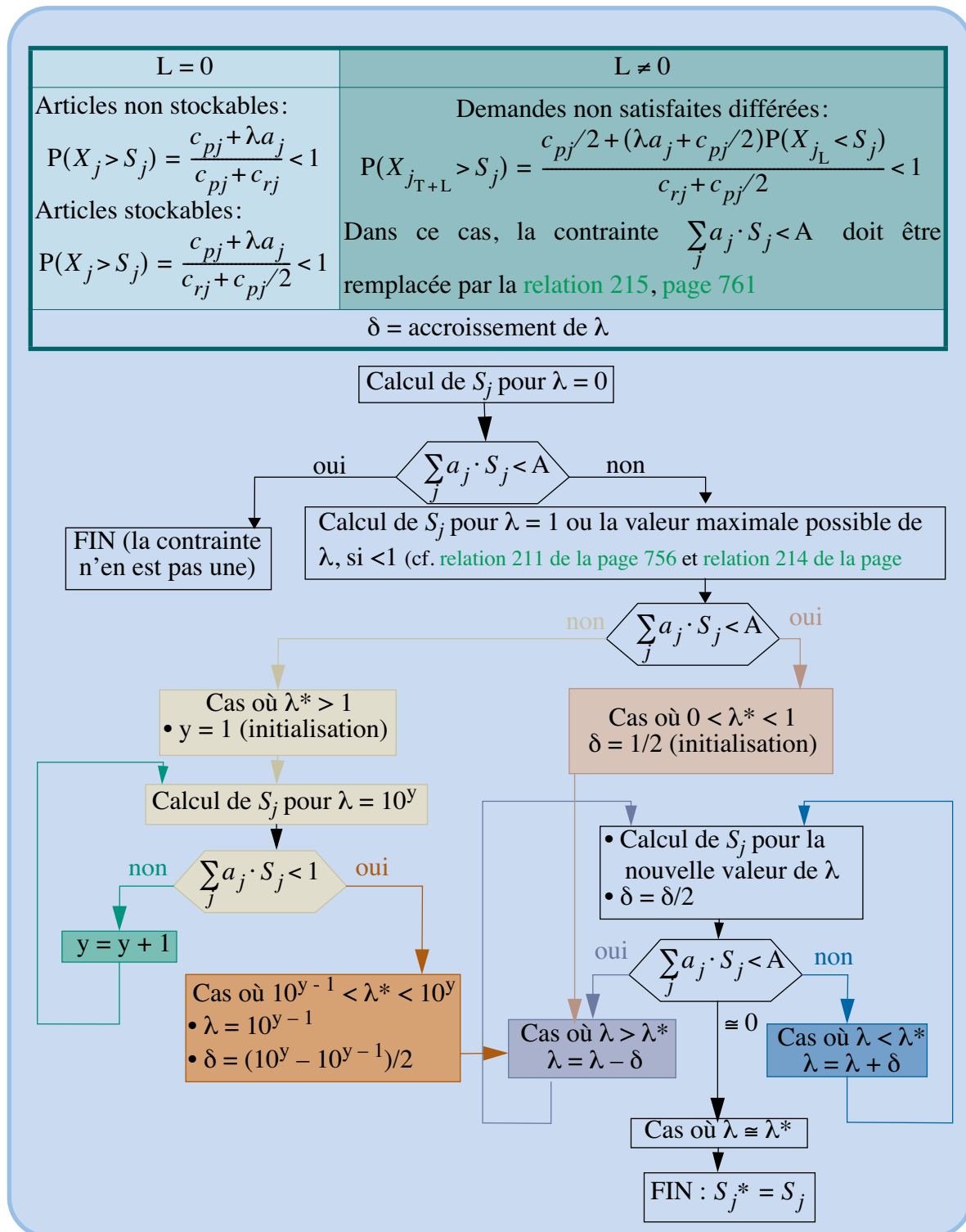
$$\lambda < \min_j ((c_{rj} - c_{pj}/2)/a_j) \quad \text{relation 214}$$

On peut illustrer ce cas de figure par l'exemple (partiel) de l'approvisionnement du magasin de bricolage **CASTOLIN** (**tableau 215 de la page 759**), qui est ouvert 52 semaines par an et commande chaque mardi soir et est livré le lendemain matin à l'ouverture. La solution numérique de ce problème est fournie dans le **tableau 216**.

1. Voir note du bas de la **page 756**.

FIGURE 192

Algorithme de résolution du problème de gestion sous contrainte



II-3.2 Gestion calendaire sous contrainte d'utilisation d'un facteur rare: cas du délai d'obtention non nul et des demandes non satisfaites différées

II-3.2.1 Exemple introductif

Le dépôt régional de **MAXITYRE** (cf. § II-2.1, page 730) gère plusieurs dizaines de références de pneumatiques avec la même politique de gestion calendaire,

TABLEAU 216

Analyse de la politique optimale de **CASTOLIN** avec limitation de la valeur initiale du stock de début de période fixé à 1500 dollars liduriens



Politique optimale d'approvisionnement de	Ampoule	Tourne-vis	Marteau
Conséquences physiques	par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Stock S de début de période	243	34	106
Consommation de la ressource rare	729,00	136,00	636,00
Stock de sécurité	-57,00	4,00	6,00
Demande moyenne satisfaite	243,49	29,22	96,71
Rupture moyenne de stock	56,51	0,78	3,29
Pourcentage de demandes non satisfaites	18,84%	2,58%	3,29%
Probabilité de rupture par période	99,76%	20,57%	33,24%
Stock moyen possédé	121,26	19,39	57,64
Conséquences financières	par période	par période	par période
Dépense d'acquisition nette moyenne	730,46	116,90	580,28
Coût de commande	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	28,26	2,33	9,86
Coût de possession	1,40	0,30	1,33
Indicateur de coût moyen	29,66	2,62	11,19
Marge nette moyenne	120,34	87,38	288,81
Conséquences physiques	par an	par an	par an
Demande moyenne satisfaite	12 661,27	1 519,70	5 029,06
Rupture de stock moyenne annuelle	2 938,73	40,30	170,94
Pourcentage de demandes non satisfaites	18,84%	2,58%	3,29%
Nombre moyen annuel de périodes en rupture	51,88	10,69	17,28
Stock moyen possédé	121,26	19,39	57,64
Conséquences financières	par an	par an	par an
Dépense d'acquisition nette moyenne	37 983,82	6 078,80	30 174,35
Coût de commande	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	1 469,36	120,90	512,83
Coût de possession	72,75	15,51	69,17
Indicateur de coût moyen	1 542,12	136,41	582,00
Marge nette moyenne	6 257,88	4 543,59	15 018,00
Prix-fantôme (Λ) = 0,16438			

Table des
matièresTable des
matièresIndex
thématiqueIndex
thématique

TABLEAU 215

Exemple de gestion d'articles stockables à délai d'obtention nul avec limitation de la valeur initiale du stock total à 1500 dollars liduriens (**CASTOLIN**)

Article	Loi	moyenne	écart-type	prix de vente	prix d'achat
Ampoule	Normal	300	20	3,5	3
Tourne-vis	Poisson	30	-	7	4
Marteau	Normal	100	15	9	6

caractérisée par une période de révision calendaire de 20 jours ouvrables et un délai d'obtention de 10 jours ouvrables. La prise en compte de plusieurs références peut poser un problème si ces articles consomment simultanément une même ressource rare. Cette consommation ne dépend plus uniquement des niveaux de reapprovisionnement S_j dans le cas d'un délai d'obtention non nul, comme c'était le cas avec le délai d'obtention nul. En effet, cette contrainte peut porter :

- sur les *stocks moyens disponibles après livraison*, et ce sera le cas par exemple d'un espace limité de stockage alloué à plusieurs références ;
- sur les *quantités commandées* (c'est-à-dire sur les différences entre les niveaux de reconstitution et les stocks disponibles au moment de la passation de la commande) et ce sera le cas par exemple d'une contrainte financière pesant sur le montant moyen des commandes.

Nous n'aborderons ici que le premier de ces deux cas de figure, parce que c'est celui qui présente le plus d'intérêt en pratique (mais les démarches suivies sont similaires).

On limitera notre exemple au traitement simultané de trois références de pneumatiques : le CRT 12 déjà rencontré (demande annuelle suivant une loi Normale de moyenne 650 paires et d'écart-type 126), le CRT 10 dont la demande annuelle suit une loi Normale de moyenne 520 paires et d'écart-type 100, et le CRT 15 dont la demande annuelle se caractérise également par une loi Normale de moyenne 286 paires et d'écart-type 50. Le coût de rupture d'une demande non satisfaite différée (ouverture d'un dossier, suivi particulier de la commande) est de 10 dollars liduriens pour n'importe laquelle de ces références. Le coût de possession est calculé avec un taux d'opportunité de 20 %, sur la base d'un coût d'acquisition hors taxes de 260 dollars pour le CRT 12 (vendu 310), de 292,50 dollars liduriens pour le CRT 10 (vendu 350) et de 325 dollars pour le CRT 15 (vendu 370). L'espace moyen maximum alloué pour ces trois références est de 100 paires de pneus.

II-3.2.2 Analyse du problème

Pour chaque article, et si l'on adopte l'hypothèse simplificatrice dans le calcul des stocks moyens possédés, le coût moyen de gestion par période de révision calendaire est celui qui a été obtenu au § II-2.1.2, page 731.

Il ne reste plus qu'à indiquer par j les différents paramètres et variables, et à effectuer la somme de ces coûts moyens de gestion $C(S_j)$, puisque ces diverses espérances mathématiques sont indépendantes, tant qu'aucune contrainte n'est introduite, la dérivée partielle, par rapport à S_j , de cette somme de coûts est alors (cf. page 731), après indexation par j :

$$(c_{pj}/2 + c_{rj}) \int_0^{S_j} \int_0^{S_j - x_{jL}} f_{jT}(x_{jT}) \cdot dx_{jT} \Bigg] f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} - c_{rj} + \frac{c_{pj}}{2} P(X_{jL} > S_j)$$

À la réception d'une livraison d'un article donné j , le stock disponible est égal :

- au niveau de reconstitution S_j , diminué de la consommation x_{jL} entre le moment où la commande a été passée et celui où elle a été livrée, si cette consommation x_{jL} est inférieure à S_j ,
- à zéro si cette demande x_{jL} a été supérieure ou égale au niveau de reconstitution S_j .

L'espérance mathématique de ce stock disponible après livraison est donc dans le cadre d'une formalisation continue, qui se transpose sans difficulté au cas discret (cf. relation 135 de la page 670),

$$\int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL}$$

Si chaque unité en stock d'un article j consomme a_j de la ressource rare, la contrainte s'écrit :

$$\sum_j a_j \left[\int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} \right] < A \quad \text{relation 215}$$

Le Lagrangien correspondant au problème d'optimisation sous contrainte est

$$\text{donc : } H = \sum_j C(S_j) + \lambda \left[\sum_j a_j \left\{ \int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} \right\} - A \right]$$

dont la dérivée par rapport à S_j n'est autre que celle de $C(S_j)$ à laquelle il convient d'ajouter l'incidence de l'adjonction de la contrainte, c'est-à-dire :

$$\lambda \cdot a_j \int_0^{S_j} f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} = \lambda \cdot a_j \cdot P(X_{jL} < S_j)$$

On doit donc avoir à l'optimum :

$$\int_0^{S_j} \left[\int_0^{S_j - x_{jL}} f_{jT}(x_{jT}) \cdot dx_{jT} \right] f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} = \frac{c_{rj} - (\lambda \cdot a_j + c_{pj}/2) P(X_{jL} < S_j)}{c_{rj} + c_{pj}/2}$$

que l'on peut encore écrire, si les demandes sont indépendantes entre périodes :

$$P(X_{jT+L} < S_j) = \frac{c_{rj} - (\lambda \cdot a_j + c_{pj}/2) P(X_{jL} < S_j)}{c_{rj} + c_{pj}/2}$$

avec c_{pj} calculé sur la durée T , ou

$$P(X_{jT+L} > S_j) = \frac{[c_{pj} \{1 + P(X_{jL} < S_j)\}]/2 + \lambda \cdot a_j P(X_{jL} < S_j)}{c_{rj} + c_{pj}/2}$$

relations 216

Le numérateur de la probabilité de rupture donnée dans cette relation 216 correspond à celui de la relation 195 de la page 735 qui correspond au cas sans contrainte, au facteur additif près $(\lambda a_j P(X_{jL} < S_j))$, au numérateur, nul avec λ , ce qui correspond au cas de figure où la contrainte ne joue pas.

On doit avoir en outre¹, après dérivation du Lagrangien par rapport à λ , satisfaction de la contrainte :

$$\sum_j a_j \int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} = A \quad \text{relation 217}$$

Il faut souligner que cette contrainte est satisfaite en espérance mathématique ; ce qui implique, pour reprendre notre exemple, qu'en suivant la politique optimale

1. Voir la note du bas de la page 756, sur les contraintes opérationnelles pesant sur λ .

que l'on trouvera au § II-3.2.3, page 762, il ne sera pas anormal qu'après certaines livraisons, le nombre de pneus en stock soit supérieur aux 100 paires requises. Ajoutons, pour en finir sur ce point, que dans le cas d'un délai d'obtention nul, la contrainte était rigoureusement respectée : dans notre exemple au début de chacun des 20 jours ouvrables où la contrainte de stockage existe, le stock disponible après livraison est toujours de 899, c'est-à-dire toujours inférieur à la limite de 900 exemplaires imposée à la gestion des trois quotidiens. Ajoutons que si l'on peut considérer comme voisine de 1 la probabilité que la demande X_{jL} durant le délai d'obtention L soit inférieure à S_j , on peut alors écrire :

$$P(X_{j_{T+L}}) < S_j \equiv \frac{c_{rj} - (\lambda \cdot a_j + c_{pj}/2)}{c_{rj} + c_{pj}/2}, \text{ ou } P(X_{j_{T+L}} > S_j) = \frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{rj} + c_{pj}/2} \quad \text{relation 218}$$

Cette dernière relation est analogue à la relation 213 de la page 756, mais elle définit une probabilité de rupture pour la variable aléatoire $X_{j_{T+L}}$ et non pour la variable X_{jT} implicitement utilisée dans la relation 213. On peut utiliser cette relation pour déterminer les niveaux de reapprovisionnement S_j , après quoi il convient de vérifier le bien-fondé de l'hypothèse de départ ($P(X_{jL} < S_j) \approx 1$ pour tous les articles j). Par ailleurs, la relation 214 de la page 757, qui fournit une borne supérieure à λ dans le cas d'un délai d'obtention nul, reste valable dans le cas étudié ici.

D'un point de vue algorithmique, si cette dernière hypothèse est fondée, l'algorithme décrit à la figure 192, page 758, s'applique alors parfaitement puisque ce cas de figure est similaire à celui analysé au § II-3.1.2, page 756. Dans le cas contraire, il convient d'utiliser la relation 216, ce qui conduit à faire appel en outre à un algorithme similaire à celui utilisé pour résoudre numériquement les problèmes faisant appel à la relation 193. C'est une telle combinaison d'algorithmes qui sera utilisée pour résoudre le problème numérique posé.

Comme dans le cas du délai d'obtention nul, la contrainte imposée ne doit pas être trop draconienne pour que l'utilisation de l'hypothèse simplificatrice dans le calcul du stock moyen possédé se justifie.

II-3.2.3 Résolution numérique du problème posé

L'application de l'algorithme de résolution du problème posé conduit aux calculs intermédiaires du tableau 217 (l'algorithme utilisé est plus « astucieux » et conduit à des valeurs légèrement différentes, plusieurs solutions pouvant être considérées comme optimales, compte tenu du caractère discret des valeurs prises par les points de commande). Les résultats auxquels on parvient sont fournis dans le tableau 218 de la page 764. Il est à noter qu'avec la feuille de calcul correspondante, vous pouvez utiliser indifféremment des lois normales et / ou des lois de Poisson (ce que nous n'illustrerons pas) et aller jusqu'à 10 références.

La politique optimale que doit suivre MAXITYRE est de compléter son stock à concurrence de 72 paires pour le CRT 12, de 55 paires pour le CRT 10 et 29 paires pour le CRT 15. La valeur prise par le multiplicateur de Lagrange λ est de l'ordre de 2,55, ce qui signifie économiquement que l'allocation d'un espace de stockage supplémentaire de 1 paire de pneu, alloué à ces 3 références, permettrait de diminuer le coût moyen de gestion calendaire de 2,55 dollars liduriens ce qui corres-

TABLEAU 217

Exemple d'utilisation de l'algorithme dans le cas de la gestion de **MAXITYRE** sous contrainte d'un stock moyen après livraison de 100 pneus

λ	Niveau de reemplètement			Stock moyen après livraison pour la référence $j =$			Consommation totale demandée	$P(X_{Lj} > S_j) = \text{probabilité (\%)} \text{ d'une rupture de stock après livraison pour } j =$		
	S_1	S_2	S_3	1	2	3		1	2	3
0,00000	93	72	55	68,02	52,02	26,01	146,05	2,79%	0,43%	0,36%
1,00000	84	65	34	59,30	44,70	23,00	123,30	0,83%	1,14%	0,96%
10,00000	0	0	0	-	-	-	-	100,00%	100,00%	100,00%
5,50000	52	40	22	28,44	21,81	11,37	61,62	13,95%	14,96%	13,63%
3,25000	66	51	27	41,53	31,30	16,19	89,02	4,83%	5,79%	5,13%
2,12500	75	57	30	49,89	37,57	19,50	106,96	2,21%	2,83%	2,38%
2,68750	70	54	29	45,54	34,28	17,80	97,74	3,36%	4,16%	3,25%
2,40625	72	56	30	47,68	35,91	18,62	102,21	2,75%	3,45%	2,95%
2,54688	71	55	29	46,60	35,09	18,20	99,89	3,04%	3,80%	3,25%

pond à une économie annuelle de $2,55 \times (260/20) = 33,15$ dollars. On peut noter en outre que le niveau de service est relativement bas, puisque pour toutes les références, on a plus d'une chance sur deux d'observer une rupture de stock avant livraison; il est à craindre qu'une partie de la clientèle ne se lasse et s'adresse ailleurs, ce qui implique, d'une part que le coût de rupture utilisé par **MAXITYRE** est dans doute trop faible (il y a peut-être lieu d'y inclure une perte de Goodwill), ce qui conduit à un coût fantôme faible, et d'autre part que la contrainte imposée est sans doute trop forte.

TABLEAU 218

Analyse de la politique optimale sous contrainte de **MAXITYRE** pour plusieurs références \diamond – cas demandes non satisfaites différées



Solution optimale sous contrainte	CTR12	CTR10	CTR15
Conséquences physiques	par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Niveau de recomplètement S	72	55	29
Stock de sécurité	21,543	14,974	7,180
Probabilité de rupture APRES livraison	2,85%	3,52%	2,84%
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,271	0,274	0,107
Probabilité de rupture AVANT livraison	52,75%	55,30%	57,75%
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	18,594	15,935	8,565
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	37,19%	39,84%	38,93%
Stock moyen possédé	30,975	23,078	11,516
Stock moyen après livraison	46,81	35,25	18,29
Conséquences financières	par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Dépense d'acquisition nette moyenne	13 000,00	11 700,00	7 150,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	185,94	159,35	85,65
Coût de possession	123,90	103,85	57,58
Indicateur de coût moyen	309,84	263,20	143,23
Marge nette moyenne	2 190,16	2 036,80	846,77
Conséquences physiques	par an	par an	par an
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	0,370	0,458	0,369
Rupture moyenne annuelle de stock APRES livraison	3,517	3,560	1,391
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	6,858	7,189	7,507
Rupture moyenne annuelle de stock AVANT livraison	241,724	207,149	111,342
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	37,19%	39,84%	38,93%
Stock moyen possédé	30,975	23,078	11,516
Conséquences financières	par an	par an	par an
Dépense d'acquisition nette moyenne	169 000,00	152 100,00	92 950,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	2 417,24	2 071,49	1 113,42
Coût de possession	1 610,70	1 350,07	748,53
Indicateur de coût moyen annuel	4 027,94	3 421,56	1 861,95
Marge nette moyenne annuelle	28 472,06	26 478,44	11 008,05
Consommation de la ressource	46,81	35,25	18,29
Prix-fantôme (λ) = 2,519111328125			

Table des
matièresIndex
thématique

SECTION III ANNEXES DU CHAPITRE XI

III-1 Tables de relations entre S et $I_r(S)$ pour la loi NormaleIII-1.1 Table A : $t_S = (S - \bar{x})/\sigma = t_1 + t_2$ connu $\Rightarrow g(t_S)^1$

$t_1 \backslash t_2$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,50	2,50200	2,51194	2,52188	2,53183	2,54177	2,55171	2,56166	2,57161	2,58156	2,59151
-2,40	2,40272	2,41264	2,42256	2,43248	2,44241	2,45234	2,46227	2,47220	2,48213	2,49207
-2,30	2,30366	2,31356	2,32345	2,33335	2,34325	2,35316	2,36307	2,37298	2,38289	2,39280
-2,20	2,20489	2,21475	2,22462	2,23449	2,24436	2,25423	2,26411	2,27400	2,28388	2,29377
-2,10	2,10647	2,11629	2,12612	2,13595	2,14579	2,15563	2,16547	2,17532	2,18517	2,19503
-2,00	2,00849	2,01827	2,02805	2,03783	2,04762	2,05742	2,06722	2,07702	2,08683	2,09665
-1,90	1,91105	1,92077	1,93049	1,94022	1,94996	1,95970	1,96945	1,97920	1,98896	1,99872
-1,80	1,81428	1,82392	1,83357	1,84323	1,85290	1,86257	1,87226	1,88195	1,89164	1,90134
-1,70	1,71829	1,72785	1,73742	1,74699	1,75658	1,76617	1,77578	1,78539	1,79501	1,80464
-1,60	1,62324	1,63270	1,64217	1,65165	1,66114	1,67064	1,68015	1,68967	1,69920	1,70874
-1,50	1,52931	1,53865	1,54800	1,55736	1,56674	1,57612	1,58552	1,59494	1,60436	1,61380
-1,40	1,43667	1,44587	1,45508	1,46431	1,47356	1,48281	1,49208	1,50137	1,51067	1,51998
-1,30	1,34553	1,35457	1,36363	1,37270	1,38179	1,39090	1,40002	1,40916	1,41831	1,42748
-1,20	1,25610	1,26496	1,27384	1,28274	1,29165	1,30059	1,30954	1,31851	1,32750	1,33650
-1,10	1,16862	1,17727	1,18595	1,19465	1,20336	1,21210	1,22086	1,22964	1,23844	1,24726
-1,00	1,08332	1,09174	1,10019	1,10866	1,11716	1,12568	1,13422	1,14279	1,15138	1,15999
-0,90	1,00043	1,00860	1,01680	1,02503	1,03328	1,04156	1,04986	1,05819	1,06654	1,07491
-0,80	0,92021	0,92810	0,93603	0,94398	0,95196	0,95997	0,96801	0,97607	0,98417	0,99229
-0,70	0,84288	0,85048	0,85810	0,86576	0,87345	0,88117	0,88892	0,89669	0,90450	0,91234
-0,60	0,76867	0,77595	0,78325	0,79059	0,79797	0,80537	0,81281	0,82028	0,82778	0,83531
-0,50	0,69780	0,70473	0,71170	0,71870	0,72573	0,73281	0,73991	0,74705	0,75422	0,76143
-0,40	0,63044	0,63701	0,64362	0,65027	0,65695	0,66367	0,67042	0,67721	0,68404	0,69090
-0,30	0,56676	0,57296	0,57920	0,58547	0,59178	0,59813	0,60452	0,61094	0,61740	0,62390
-0,20	0,50689	0,51271	0,51856	0,52445	0,53038	0,53634	0,54235	0,54840	0,55448	0,56060
-0,10	0,45094	0,45635	0,46181	0,46731	0,47285	0,47842	0,48404	0,48969	0,49539	0,50112
0,00	0,39894	0,39396	0,38902	0,38412	0,37926	0,37444	0,36966	0,36492	0,36022	0,35556
0,10	0,35094	0,34635	0,34181	0,33731	0,33285	0,32842	0,32404	0,31969	0,31539	0,31112
0,20	0,30689	0,30271	0,29856	0,29445	0,29038	0,28634	0,28235	0,27840	0,27448	0,27060
0,30	0,26676	0,26296	0,25920	0,25547	0,25178	0,24813	0,24452	0,24094	0,23740	0,23390
0,40	0,23044	0,22701	0,22362	0,22027	0,21695	0,21367	0,21042	0,20721	0,20404	0,20090
0,50	0,19780	0,19473	0,19170	0,18870	0,18573	0,18281	0,17991	0,17705	0,17422	0,17143
0,60	0,16867	0,16595	0,16325	0,16059	0,15797	0,15537	0,15281	0,15028	0,14778	0,14531
0,70	0,14288	0,14048	0,13810	0,13576	0,13345	0,13117	0,12892	0,12669	0,12450	0,12234
0,80	0,12021	0,11810	0,11603	0,11398	0,11196	0,10997	0,10801	0,10607	0,10417	0,10229
0,90	0,10043	0,09860	0,09680	0,09503	0,09328	0,09156	0,08986	0,08819	0,08654	0,08491
1,00	0,08332	0,08174	0,08019	0,07866	0,07716	0,07568	0,07422	0,07279	0,07138	0,06999
1,10	0,06862	0,06727	0,06595	0,06465	0,06336	0,06210	0,06086	0,05964	0,05844	0,05726
1,20	0,05610	0,05496	0,05384	0,05274	0,05165	0,05059	0,04954	0,04851	0,04750	0,04650
1,30	0,04553	0,04457	0,04363	0,04270	0,04179	0,04090	0,04002	0,03916	0,03831	0,03748
1,40	0,03667	0,03587	0,03508	0,03431	0,03356	0,03281	0,03208	0,03137	0,03067	0,02998
1,50	0,02931	0,02865	0,02800	0,02736	0,02674	0,02612	0,02552	0,02494	0,02436	0,02380
1,60	0,02324	0,02270	0,02217	0,02165	0,02114	0,02064	0,02015	0,01967	0,01920	0,01874
1,70	0,01829	0,01785	0,01742	0,01699	0,01658	0,01617	0,01578	0,01539	0,01501	0,01464
1,80	0,01428	0,01392	0,01357	0,01323	0,01290	0,01257	0,01226	0,01195	0,01164	0,01134
1,90	0,01105	0,01077	0,01049	0,01022	0,00996	0,00970	0,00945	0,00920	0,00896	0,00872
2,00	0,00849	0,00827	0,00805	0,00783	0,00762	0,00742	0,00722	0,00702	0,00683	0,00665
2,10	0,00647	0,00629	0,00612	0,00595	0,00579	0,00563	0,00547	0,00532	0,00517	0,00503
2,20	0,00489	0,00475	0,00462	0,00449	0,00436	0,00423	0,00411	0,00400	0,00388	0,00377
2,30	0,00366	0,00356	0,00345	0,00335	0,00325	0,00316	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280
2,40	0,00272	0,00264	0,00256	0,00248	0,00241	0,00234	0,00227	0,00220	0,00213	0,00207
2,50	0,00200	0,00194	0,00188	0,00183	0,00177	0,00171	0,00166	0,00161	0,00156	0,00151
2,60	0,00146	0,00142	0,00137	0,00133	0,00129	0,00125	0,00121	0,00117	0,00113	0,00110
2,70	0,00106	0,00103	0,00099	0,00096	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079
2,80	0,00076	0,00074	0,00071	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056
2,90	0,00054	0,00052	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044	0,00042	0,00041	0,00040
3,00	0,00038	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033	0,00032	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028

Table des
matièresIndex
thématique

III-1.2 Table B¹: $P(t > t_S) = p_1 + p_2 \Rightarrow g(t_S)$, avec $t_S = (S - \bar{x})/\sigma$

Probabilité de rupture $P(t > t_S)$ lue en première colonne et première ligne des tableaux ci-dessous :

- Le premier tableau donne les valeurs $g(t_S)$ pour des probabilités variant entre 0,1 % et 25,9 %, par pas de 0,1 % ; exemple: $P(t > t_S) = 9,6 \% \rightarrow g(t_S) = 0,04508$.
- Le second tableau donne les valeurs de $g(t_S)$ pour des probabilités variant entre 10 % et 89 % par pas de 1 % ; exemple: $P(t > t_S) = 37 \% \rightarrow g(t_S) = 0,25478$.

$p_1 \backslash p_2$	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,00	-	0,00028	0,00058	0,00091	0,00124	0,00158	0,00193	0,00229	0,00265	0,00302
0,01	0,00339	0,00377	0,00415	0,00453	0,00492	0,00532	0,00572	0,00612	0,00652	0,00693
0,02	0,00734	0,00776	0,00818	0,00860	0,00902	0,00945	0,00988	0,01031	0,01074	0,01118
0,03	0,01162	0,01206	0,01250	0,01295	0,01340	0,01385	0,01431	0,01476	0,01522	0,01568
0,04	0,01615	0,01661	0,01708	0,01755	0,01802	0,01849	0,01897	0,01945	0,01993	0,02041
0,05	0,02089	0,02138	0,02187	0,02236	0,02285	0,02334	0,02384	0,02433	0,02483	0,02533
0,06	0,02584	0,02634	0,02685	0,02736	0,02787	0,02838	0,02889	0,02941	0,02992	0,03044
0,07	0,03096	0,03148	0,03201	0,03253	0,03306	0,03359	0,03412	0,03465	0,03519	0,03572
0,08	0,03626	0,03680	0,03734	0,03788	0,03843	0,03897	0,03952	0,04007	0,04062	0,04117
0,09	0,04172	0,04228	0,04283	0,04339	0,04395	0,04451	0,04508	0,04564	0,04621	0,04677
0,10	0,04734	0,04791	0,04849	0,04906	0,04963	0,05021	0,05079	0,05137	0,05195	0,05253
0,11	0,05312	0,05370	0,05429	0,05488	0,05547	0,05606	0,05665	0,05725	0,05785	0,05844
0,12	0,05904	0,05964	0,06024	0,06085	0,06145	0,06206	0,06267	0,06328	0,06389	0,06450
0,13	0,06511	0,06573	0,06635	0,06696	0,06758	0,06821	0,06883	0,06945	0,07008	0,07070
0,14	0,07133	0,07196	0,07259	0,07323	0,07386	0,07449	0,07513	0,07577	0,07641	0,07705
0,15	0,07769	0,07834	0,07898	0,07963	0,08028	0,08093	0,08158	0,08223	0,08289	0,08354
0,16	0,08420	0,08486	0,08552	0,08618	0,08684	0,08750	0,08817	0,08884	0,08950	0,09017
0,17	0,09085	0,09152	0,09219	0,09287	0,09354	0,09422	0,09490	0,09558	0,09627	0,09695
0,18	0,09763	0,09832	0,09901	0,09970	0,10039	0,10108	0,10178	0,10247	0,10317	0,10387
0,19	0,10456	0,10527	0,10597	0,10667	0,10738	0,10808	0,10879	0,10950	0,11021	0,11092
0,20	0,11164	0,11235	0,11307	0,11379	0,11451	0,11523	0,11595	0,11667	0,11740	0,11812
0,21	0,11885	0,11958	0,12031	0,12105	0,12178	0,12251	0,12325	0,12399	0,12473	0,12547
0,22	0,12621	0,12695	0,12770	0,12845	0,12919	0,12994	0,13070	0,13145	0,13220	0,13296
0,23	0,13371	0,13447	0,13523	0,13599	0,13675	0,13752	0,13828	0,13905	0,13982	0,14059
0,24	0,14136	0,14213	0,14291	0,14368	0,14446	0,14524	0,14602	0,14680	0,14758	0,14837
0,25	0,14915	0,14994	0,15073	0,15152	0,15231	0,15311	0,15390	0,15470	0,15550	0,15629

Table des
matièresIndex
thématique

$p_1 \backslash p_2$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,10	0,04734	0,05312	0,05904	0,06511	0,07133	0,07769	0,08420	0,09085	0,09763	0,10456
0,20	0,11164	0,11885	0,12621	0,13371	0,14136	0,14915	0,15710	0,16519	0,17343	0,18182
0,30	0,19037	0,19908	0,20795	0,21698	0,22617	0,23554	0,24507	0,25478	0,26467	0,27474
0,40	0,28500	0,29545	0,30610	0,31694	0,32800	0,33926	0,35074	0,36244	0,37437	0,38653
0,50	0,39894	0,41160	0,42452	0,43771	0,45117	0,46492	0,47896	0,49332	0,50799	0,52300
0,60	0,53835	0,55406	0,57015	0,58664	0,60353	0,62086	0,63864	0,65689	0,67565	0,69493
0,70	0,71477	0,73521	0,75627	0,77800	0,80044	0,82364	0,84766	0,87256	0,89840	0,92527
0,80	0,95326	0,98246	1,01300	1,04501	1,07866	1,11413	1,15165	1,19151	1,23403	1,27964

1. Exemple d'utilisation: $t_S = -1,72 \rightarrow g(t_S) = 1,73742$ et $t_S = 0,80 \rightarrow g(t_S) = 0,12021$; voir aussi l'exemple du § I-1.3.1, page 677.

1. Voir § I-1.3.1.3, page 679, pour une illustration de l'application de cette table.

III-1.3 Table C : $g(t_S) = g_1 + g_2 \Rightarrow^1 P(t > t_S)$ – unité : % –

Voir table A pour la définition de t_S , S et $g(t_S)$; la probabilité de rupture $P(t > t_S)$ est donnée en pourcentage, comme dans la table B.

- Le premier tableau donne les valeurs $P(t > t_S)$ pour des valeurs de $g(t_S)$ variant entre 0,0001 et 0,0039 par pas de 0,0001 : exemple : $g(t_S) = 0,0251 \rightarrow P(t > t_S) = 5,85 \%$
- Le second tableau donne les valeurs de $P(t > t_S)$ pour des valeurs de $g(t_S)$ variant entre 0,0010 et 0,3090 par pas de 0,001 : exemple : $g(t_S) = 0,092 \rightarrow P(t > t_S) = 17,17 \%$.

$g_1 \backslash g_2$	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
0,000	0,00	0,04	0,07	0,11	0,14	0,17	0,21	0,24	0,27	0,30
0,001	0,33	0,36	0,39	0,42	0,45	0,48	0,51	0,53	0,56	0,59
0,002	0,62	0,65	0,68	0,70	0,73	0,76	0,79	0,81	0,84	0,87
0,003	0,90	0,92	0,95	0,98	1,00	1,03	1,06	1,08	1,11	1,14
0,004	1,16	1,19	1,21	1,24	1,27	1,29	1,32	1,34	1,37	1,39
0,005	1,42	1,44	1,47	1,50	1,52	1,55	1,57	1,60	1,62	1,65
0,006	1,67	1,70	1,72	1,74	1,77	1,79	1,82	1,84	1,87	1,89
0,007	1,92	1,94	1,97	1,99	2,01	2,04	2,06	2,09	2,11	2,13
0,008	2,16	2,18	2,21	2,23	2,25	2,28	2,30	2,32	2,35	2,37
0,009	2,40	2,42	2,44	2,47	2,49	2,51	2,54	2,56	2,58	2,61
0,010	2,63	2,65	2,68	2,70	2,72	2,74	2,77	2,79	2,81	2,84
0,011	2,86	2,88	2,90	2,93	2,95	2,97	3,00	3,02	3,04	3,06
0,012	3,09	3,11	3,13	3,15	3,18	3,20	3,22	3,24	3,27	3,29
0,013	3,31	3,33	3,36	3,38	3,40	3,42	3,44	3,47	3,49	3,51
0,014	3,53	3,55	3,58	3,60	3,62	3,64	3,66	3,69	3,71	3,73
0,015	3,75	3,77	3,80	3,82	3,84	3,86	3,88	3,90	3,93	3,95
0,016	3,97	3,99	4,01	4,03	4,05	4,08	4,10	4,12	4,14	4,16
0,017	4,18	4,20	4,23	4,25	4,27	4,29	4,31	4,33	4,35	4,37
0,018	4,40	4,42	4,44	4,46	4,48	4,50	4,52	4,54	4,56	4,59
0,019	4,61	4,63	4,65	4,67	4,69	4,71	4,73	4,75	4,77	4,79
0,020	4,82	4,84	4,86	4,88	4,90	4,92	4,94	4,96	4,98	5,00
0,021	5,02	5,04	5,06	5,08	5,10	5,12	5,15	5,17	5,19	5,21
0,022	5,23	5,25	5,27	5,29	5,31	5,33	5,35	5,37	5,39	5,41
0,023	5,43	5,45	5,47	5,49	5,51	5,53	5,55	5,57	5,59	5,61
0,024	5,63	5,65	5,67	5,69	5,71	5,73	5,75	5,77	5,79	5,81
0,025	5,83	5,85	5,87	5,89	5,91	5,93	5,95	5,97	5,99	6,01
0,026	6,03	6,05	6,07	6,09	6,11	6,13	6,15	6,17	6,19	6,21
0,027	6,23	6,25	6,27	6,29	6,31	6,33	6,35	6,37	6,39	6,41
0,028	6,43	6,45	6,47	6,48	6,50	6,52	6,54	6,56	6,58	6,60
0,029	6,62	6,64	6,66	6,68	6,70	6,72	6,74	6,76	6,78	6,80
0,030	6,81	6,83	6,85	6,87	6,89	6,91	6,93	6,95	6,97	6,99

$g_1 \backslash g_2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,00	0,00	0,33	0,62	0,90	1,16	1,42	1,67	1,92	2,16	2,40
0,01	2,63	2,86	3,09	3,31	3,53	3,75	3,97	4,18	4,40	4,61
0,02	4,82	5,02	5,23	5,43	5,63	5,83	6,03	6,23	6,43	6,62
0,03	6,81	7,01	7,20	7,39	7,58	7,76	7,95	8,14	8,32	8,51
0,04	8,69	8,87	9,05	9,23	9,41	9,59	9,76	9,94	10,12	10,29
0,05	10,46	10,64	10,81	10,98	11,15	11,32	11,49	11,66	11,83	11,99
0,06	12,16	12,33	12,49	12,65	12,82	12,98	13,14	13,31	13,47	13,63
0,07	13,79	13,95	14,11	14,26	14,42	14,58	14,74	14,89	15,05	15,20
0,08	15,36	15,51	15,66	15,82	15,97	16,12	16,27	16,42	16,57	16,72
0,09	16,87	17,02	17,17	17,32	17,47	17,61	17,76	17,91	18,05	18,20
0,10	18,34	18,49	18,63	18,78	18,92	19,06	19,20	19,35	19,49	19,63
0,11	19,77	19,91	20,05	20,19	20,33	20,47	20,61	20,75	20,88	21,02
0,12	21,16	21,29	21,43	21,57	21,70	21,84	21,97	22,11	22,24	22,37
0,13	22,51	22,64	22,77	22,91	23,04	23,17	23,30	23,43	23,56	23,69
0,14	23,82	23,95	24,08	24,21	24,34	24,47	24,60	24,73	24,85	24,98

1. Voir § I-1.3.1.3, page 679, pour une illustration de l'application de cette table.

$g_1 \backslash g_2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,15	25,11	25,23	25,36	25,49	25,61	25,74	25,86	25,99	26,11	26,24
0,16	26,36	26,49	26,61	26,73	26,85	26,98	27,10	27,22	27,34	27,47
0,17	27,59	27,71	27,83	27,95	28,07	28,19	28,31	28,43	28,55	28,67
0,18	28,78	28,90	29,02	29,14	29,26	29,37	29,49	29,61	29,72	29,84
0,19	29,96	30,07	30,19	30,30	30,42	30,53	30,65	30,76	30,88	30,99
0,20	31,10	31,22	31,33	31,44	31,56	31,67	31,78	31,89	32,01	32,12
0,21	32,23	32,34	32,45	32,56	32,67	32,78	32,89	33,00	33,11	33,22
0,22	33,33	33,44	33,55	33,66	33,77	33,87	33,98	34,09	34,20	34,30
0,23	34,41	34,52	34,62	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15	35,26	35,37
0,24	35,47	35,58	35,68	35,78	35,89	35,99	36,10	36,20	36,30	36,41
0,25	36,51	36,61	36,72	36,82	36,92	37,02	37,12	37,23	37,33	37,43
0,26	37,53	37,63	37,73	37,83	37,93	38,03	38,13	38,23	38,33	38,43
0,27	38,53	38,63	38,73	38,83	38,93	39,03	39,12	39,22	39,32	39,42
0,28	39,51	39,61	39,71	39,81	39,90	40,00	40,10	40,19	40,29	40,38
0,29	40,48	40,58	40,67	40,77	40,86	40,96	41,05	41,15	41,24	41,34
0,30	41,43	41,52	41,62	41,71	41,80	41,90	41,99	42,08	42,18	42,27

III-1.4 Table D¹ : $g(t_S) \rightarrow t_S$

Voir table A pour la définition de t_S , S et $g(t_S)$; la probabilité de rupture $P(t > t_S)$ est donnée en pourcentage, comme dans la table B. La lecture de $g(t_S)$ s'effectue comme pour la **table C**, mais en sortie, on obtient t_S au lieu de $P(t > t_S)$; exemples : $g(t_S) = 0,0251 \rightarrow t_S = 1,567$; $g(t_S) = 0,0920 \rightarrow t_S = 0,947$.

$g_1 \backslash g_2$	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
0,000		3,363	3,179	3,068	2,987	2,923	2,870	2,825	2,785	2,750
0,001	2,718	2,689	2,662	2,637	2,614	2,592	2,572	2,553	2,534	2,517
0,002	2,501	2,485	2,470	2,455	2,441	2,428	2,415	2,402	2,390	2,379
0,003	2,367	2,356	2,346	2,335	2,325	2,315	2,306	2,296	2,287	2,278
0,004	2,270	2,261	2,253	2,245	2,237	2,229	2,221	2,214	2,206	2,199
0,005	2,192	2,185	2,178	2,171	2,165	2,158	2,152	2,145	2,139	2,133
0,006	2,127	2,121	2,115	2,110	2,104	2,098	2,093	2,087	2,082	2,077
0,007	2,071	2,066	2,061	2,056	2,051	2,046	2,041	2,036	2,032	2,027
0,008	2,022	2,018	2,013	2,008	2,004	2,000	1,995	1,991	1,987	1,982
0,009	1,978	1,974	1,970	1,966	1,962	1,958	1,954	1,950	1,946	1,942
0,010	1,938	1,935	1,931	1,927	1,923	1,920	1,916	1,913	1,909	1,905
0,011	1,902	1,898	1,895	1,892	1,888	1,885	1,881	1,878	1,875	1,872
0,012	1,868	1,865	1,862	1,859	1,855	1,852	1,849	1,846	1,843	1,840
0,013	1,837	1,834	1,831	1,828	1,825	1,822	1,819	1,816	1,813	1,811
0,014	1,808	1,805	1,802	1,799	1,797	1,794	1,791	1,788	1,786	1,783
0,015	1,780	1,778	1,775	1,772	1,770	1,767	1,765	1,762	1,759	1,757
0,016	1,754	1,752	1,749	1,747	1,744	1,742	1,739	1,737	1,735	1,732
0,017	1,730	1,727	1,725	1,723	1,720	1,718	1,716	1,713	1,711	1,709
0,018	1,706	1,704	1,702	1,700	1,697	1,695	1,693	1,691	1,689	1,686
0,019	1,684	1,682	1,680	1,678	1,676	1,674	1,671	1,669	1,667	1,665
0,020	1,663	1,661	1,659	1,657	1,655	1,653	1,651	1,649	1,647	1,645
0,021	1,643	1,641	1,639	1,637	1,635	1,633	1,631	1,629	1,627	1,625
0,022	1,623	1,621	1,619	1,617	1,616	1,614	1,612	1,610	1,608	1,606
0,023	1,604	1,603	1,601	1,599	1,597	1,595	1,594	1,592	1,590	1,588
0,024	1,586	1,585	1,583	1,581	1,579	1,578	1,576	1,574	1,572	1,571
0,025	1,569	1,567	1,565	1,564	1,562	1,560	1,559	1,557	1,555	1,554
0,026	1,552	1,550	1,549	1,547	1,545	1,544	1,542	1,541	1,539	1,537
0,027	1,536	1,534	1,533	1,531	1,529	1,528	1,526	1,525	1,523	1,521
0,028	1,520	1,518	1,517	1,515	1,514	1,512	1,511	1,509	1,508	1,506
0,029	1,505	1,503	1,502	1,500	1,499	1,497	1,496	1,494	1,493	1,491
0,030	1,490	1,488	1,487	1,485	1,484	1,482	1,481	1,480	1,478	1,477

Table des
matièresIndex
thématique

$g_1 \backslash g_2$	0,0000	0,0010	0,0020	0,0030	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090
0,000		2,718	2,501	2,367	2,270	2,192	2,127	2,071	2,022	1,978
0,010	1,938	1,902	1,868	1,837	1,808	1,780	1,754	1,730	1,706	1,684
0,020	1,663	1,643	1,623	1,604	1,586	1,569	1,552	1,536	1,520	1,505
0,030	1,490	1,475	1,461	1,447	1,434	1,421	1,408	1,396	1,384	1,372
0,040	1,360	1,349	1,338	1,327	1,316	1,305	1,295	1,285	1,275	1,265
0,050	1,256	1,246	1,237	1,228	1,219	1,210	1,201	1,192	1,184	1,175
0,060	1,167	1,159	1,151	1,143	1,135	1,127	1,120	1,112	1,105	1,097
0,070	1,090	1,083	1,076	1,069	1,062	1,055	1,048	1,041	1,034	1,028
0,080	1,021	1,015	1,008	1,002	0,996	0,989	0,983	0,977	0,971	0,965
0,090	0,959	0,953	0,947	0,942	0,936	0,930	0,925	0,919	0,913	0,908
0,100	0,902	0,897	0,892	0,886	0,881	0,876	0,870	0,865	0,860	0,855
0,110	0,850	0,845	0,840	0,835	0,830	0,825	0,820	0,815	0,810	0,806
0,120	0,801	0,796	0,792	0,787	0,782	0,778	0,773	0,769	0,764	0,760
0,130	0,755	0,751	0,746	0,742	0,738	0,733	0,729	0,725	0,720	0,716
0,140	0,712	0,708	0,704	0,700	0,695	0,691	0,687	0,683	0,679	0,675
0,150	0,671	0,667	0,663	0,659	0,655	0,651	0,648	0,644	0,640	0,636
0,160	0,632	0,628	0,625	0,621	0,617	0,613	0,610	0,606	0,602	0,599
0,170	0,595	0,592	0,588	0,584	0,581	0,577	0,574	0,570	0,567	0,563
0,180	0,560	0,556	0,553	0,549	0,546	0,542	0,539	0,536	0,532	0,529

1. Voir § I-1.3.1.3, page 679, pour une illustration de l'application de cette table.

0,190	0,526	0,522	0,519	0,516	0,512	0,509	0,506	0,503	0,499	0,496
0,200	0,493	0,490	0,486	0,483	0,480	0,477	0,474	0,471	0,468	0,464
0,210	0,461	0,458	0,455	0,452	0,449	0,446	0,443	0,440	0,437	0,434
0,220	0,431	0,428	0,425	0,422	0,419	0,416	0,413	0,410	0,407	0,404
0,230	0,401	0,398	0,395	0,393	0,390	0,387	0,384	0,381	0,378	0,375
0,240	0,373	0,370	0,367	0,364	0,361	0,359	0,356	0,353	0,350	0,347
0,250	0,345	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329	0,326	0,323	0,320
0,260	0,318	0,315	0,313	0,310	0,307	0,305	0,302	0,299	0,297	0,294
0,270	0,292	0,289	0,286	0,284	0,281	0,279	0,276	0,274	0,271	0,268
0,280	0,266	0,263	0,261	0,258	0,256	0,253	0,251	0,248	0,246	0,243
0,290	0,241	0,238	0,236	0,234	0,231	0,229	0,226	0,224	0,221	0,219
0,300	0,217	0,214	0,212	0,209	0,207	0,205	0,202	0,200	0,197	0,195

Table des
matièresIndex
thématique