Exercice 1:

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

Solution:

1. Il suffit de remarquer que $x\mathcal{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y \iff f(x) = f(y)$ avec $f : x \mapsto x^2 - x$. Il est alors aisé de vérifier en appliquant la définition que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les éléments y de $\mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$. On doit donc résoudre l'équation $x^2 - y^2 = x - y$. Elle se factorise en

$$(x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \iff (x-y) \times (x+y-1) = 0.$$

La classe de x est donc égale à $\{x, 1-x\}$. Elle est constituée de deux éléments, sauf si $x = 1 - x \iff x = 1/2$. Dans ce cas, elle est égale à $\{1/2\}$.

Exercice 2:

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x+y$ est pair. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation?

Solution:

La relation est

- réflexive, car $x+x=2x$ est pair;
- symétrique, car $x+y=y+x$ et donc si $x+y$ est pair, $y+x$ est pair;
- transitive, car si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x+y=2k$ et $y+z=2l$ pour des entiers k et l. Mais alors, on effectue la somme des ces deux égalités et on trouve

$$x+2y+z=2k+2l \implies x+z=2(k+l-y)$$

et donc $x+z$ est pair.

Pour déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, il suffit de trouver une famille (E_i) d'ensembles tels que :

- la réunion des E_i est $\mathbb{Z}$;
- les E_i sont deux à deux disjoints;
- si x, y sont dans le même E_i, alors $x\mathcal{R}y$;
- si x est dans E_i et y est dans E_j avec $i \neq j$, alors x n'est pas en relation avec y.

Ici, on peut constater que tous les éléments en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les entiers en relation avec 1 sont les entiers impairs. Puisque l'ensemble des entiers pairs et des entiers impairs forme une partition de $\mathbb{Z}$, on en déduit que ces deux ensembles sont exactement les deux classes d'équivalence de la relation.

Exercice 3:

Soit $E = \{1,2,3,4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\Gamma = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$$

1. Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient $R/\mathcal{R}$.

Solution:

1. D'après le graphe, on a :

$$1\mathcal{R}1;\ 1\mathcal{R}2;\ 2\mathcal{R}1;\ 2\mathcal{R}2;\ 3\mathcal{R}3;\ 3\mathcal{R}4;\ 4\mathcal{R}3 \text{ et } 4\mathcal{R}4$$

Pour tout $n \in \{1,2,3,4\}$ on a $n\mathcal{R}n$ donc la relation est réflexive. On a $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}1$ d'une part et $3\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}3$ ce qui montre que la relation est symétrique et évidemment elle est transitive, donc il s'agit d'une relation d'équivalence.

2. Il y a deux classes d'équivalence $E_1 = \{1,2\}$ et $E_2 = \{3,4\}$ par conséquent

$$R/\mathcal{R} = \{E_1, E_2\}$$

Exercice 4:

1. Montrer que la relation de congruence modulo n

$$a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n \text{ divise } b - a$$

   Est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2. En vous servant de la division euclidienne, montrer qu'il y a exactement n classes d'équivalentes distinctes.

Solution:

1. n divise $a - a = 0$ car existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 = kn$, il suffit de prendre $k = 0$, par conséquent
$$a \equiv a \ [n]$$
$\equiv$ est réflexive.
Si $a \equiv b \ [n]$ alors n divise $b - a$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b - a = kn$, ce qui entraine que $a - b = (-k)n$, $-k \in \mathbb{Z}$ donc $a - b$ divise n, autrement dit $b \equiv a \ [n]$.
$\equiv$ est symétrique.
Si $\begin{cases} a \equiv b & [n] \\ b \equiv c & [n] \end{cases}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} b - a = kn \\ c - b = ln \end{cases}$, en faisant la somme de ces deux égalités $b - a + c - b = kn + ln \Leftrightarrow c - a = (k + l)n$, comme $k + l \in \mathbb{Z}$, n divise $c - a$, autrement dit $c \equiv a \ [n]$.
$\equiv$ est transitive.
Finalement $\equiv$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $m \in \mathbb{Z}$, effectuons la division euclidienne de m par n. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, n - 1\}$ tel que $m = qn + r$, donc $m - r = qn$ autrement dit $m \equiv r \ [n]$. Il y a exactement n classes d'équivalence $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n - 1}\}$.