Exposé

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

email : nasser_baghdad @ yahoo.fr

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

Sommaire

Chapitre. IV

Les fonctions binaires

Chapitre IV : Les fonctions binaires

I. Définition

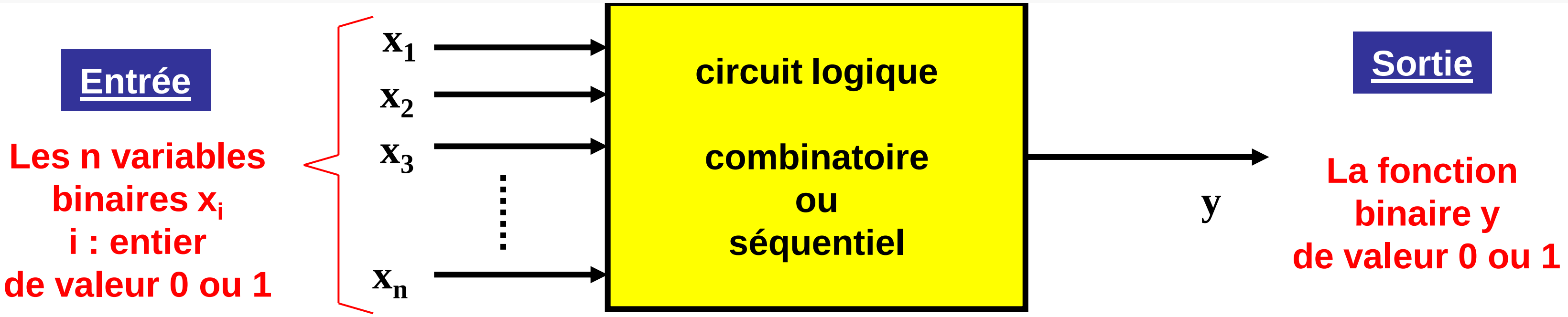
Chapitre IV : Les fonctions binaires

Qu'est ce qu'une fonction binaire?

► Une fonction binaire définit le fonctionnement logique d'un circuit (combinatoire ou séquentiel).

► C'est une fonction à plusieurs variables binaires.

► Les variables représentent les signaux d'entrée, et la fonction binaire le signal de sortie.



Entrée

Les n variables
binaires x_i
i : entier
de valeur 0 ou 1

Sortie

La fonction
binaire y
de valeur 0 ou 1

$y\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

► Si la fonction binaire est à n variables, il y a alors 2^n combinaisons binaires différentes de ces variables.

► Pour chaque combinaison binaire d'entrée formée par n bits, la fonction binaire de sortie prend une valeur de 0 ou 1

Une fonction binaire y à n variables x_i est une application de l'ensemble $\{0,1\}^n$ sur l'ensemble $\{0,1\}$.

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Remarque :

► Il existe des circuits logiques à plusieurs signaux de sortie, chaque signal de sortie est une fonction binaire.

► Toutes les fonctions binaires de sortie sont en fonction des mêmes variables d'entrée.

Entrée

Les n variables binaires x_i
i : entier
de valeur 0 ou 1

x_1
x_2
x_3
x_n

circuit logique

combinatoire
ou
séquentiel

y_1
y_2
y_3
y_n

Sortie

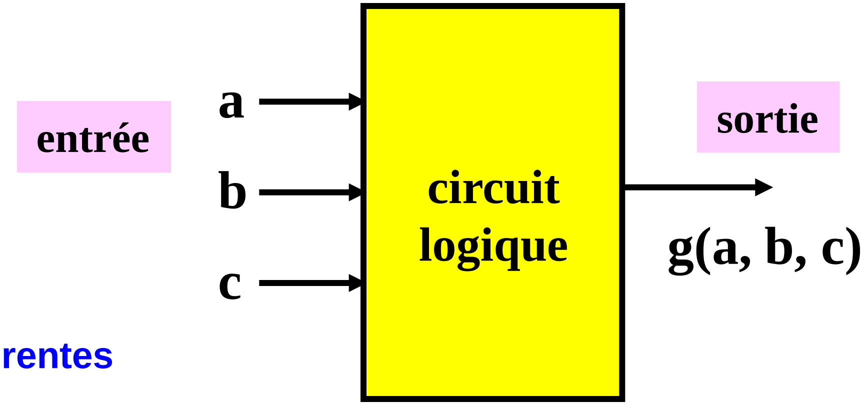
Les fonctions binaire y_i
i : entier

y_i $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ avec i entier

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple :

On veut concevoir un circuit logique dont le schéma bloc est en face :



n = 3 variables a, b et c

$2^3 = 8$ combinaisons binaires différentes

Chaque combinaison est formée par de 3 bits.

Table de vérité

a	b	c	$g=(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

L'idée est de traduire la phrase suivante :

la sortie est au niveau haut (1) si au moins 2 entrées sont au niveau haut (1)

II. Théorèmes généraux

Chapitre IV : Les fonctions binaires

1°) Théorème de De Morgan

2°) Produit fondamental (Minterme) et somme fondamental (Maxterme)

3°) Théorème fondamental de l’algèbre des fonctions logiques

4°) Théorèmes de Shannon

Chapitre IV : Les fonctions binaires

1°) Théorème de DE Morgan

Le complément (ou la négation) d'une fonction f de variables a, b, … s'obtient en remplaçant :

- **les <u>variables</u> par leur complément,**
- **les <u>opérateurs</u> AND (.) par des OR (+), et inversement.**

$$f\left(a,b,\ldots,z,+,\bullet\right) \qquad son\ complément \qquad \overline{f}\left(\overline{a},\overline{b},\ldots,\overline{z},\bullet,+\right)$$

<u>Exemple</u> :

$$f=\overline{a}\cdot b\cdot c+a\cdot\overline{b}\cdot c+a\cdot b\cdot\overline{c} \quad\Rightarrow\quad \overline{f}=\left(a+\overline{b}+\overline{c}\right)\bullet\left(\overline{a}+b+\overline{c}\right)\bullet\left(\overline{a}+\overline{b}+c\right)$$

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{aligned}
f &= \overline{a}\cdot b\cdot c+a\cdot\overline{b}\cdot c+a\cdot b\cdot\overline{c}\\
\overline{f} &= \overline{\overline{a}\,b\,c+a\,\overline{b}\,c+a\,b\,\overline{c}}\\
\overline{f} &= \overline{\overline{a}\,b\,c}\bullet\overline{a\,\overline{b}\,c}\bullet\overline{a\,b\,\overline{c}}\\
\overline{f} &= \left(a+\overline{b}+\overline{c}\right)\bullet\left(\overline{a}+b+\overline{c}\right)\bullet\left(\overline{a}+\overline{b}+c\right)
\end{aligned}$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple n°1 :

$$\underbrace{f = XOR}_{f = A\oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}} \qquad son\ complément \qquad \underbrace{\overline{f} = XNOR}_{\overline{f} = \overline{A\oplus B} = \left(A+\overline{B}\right)\cdot\left(\overline{A}+B\right)}$$

$$f\ (A, B, \bullet, +) = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}$$

$$\overline{f} = \overline{\overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}}$$

$$\overline{f} = \overline{\overline{A}\cdot B} \bullet \overline{A\cdot\overline{B}}$$

$$\overline{f}\ (\overline{A}, \overline{B}, +, \bullet) = \left(A+\overline{B}\right)\bullet\left(\overline{A}+B\right)$$

Exemple n°2 :

$$\underbrace{f = XNOR}_{f = \overline{A\oplus B} = \overline{A}\,\overline{B} + AB} \qquad son\ complément \qquad \underbrace{\overline{f} = XOR}_{\overline{f} = A\oplus B = \left(A+B\right)\cdot\left(\overline{A}+\overline{B}\right)}$$

$$f\ \left(A, B, \bullet, +\right) = \overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot B$$

$$\overline{f} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot B}$$

$$\overline{f} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} \bullet \overline{A\cdot B}$$

$$\overline{f}\ \left(\overline{A}, \overline{B}, +, \bullet\right) = (A+B)\bullet\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

2°) Produit fondamental (Minterme) et somme fondamental (Maxterme)

Soit une fonction binaire à n variables : $y = f(x_1 , x_2, \ldots , x_{n-1} , x_n)$.

a- Minterme

C'est un produit logique contenant toutes les variables de la fonction binaire complémentées ou non. On l'appelle aussi produit fondamental.

$$y = f\left(a,b,c,d\right) \quad \begin{cases} a\,\bar{b}\,c\,d \text{ est un min terme} \\ \bar{a}\,\bar{b}\,d \text{ n'est pas un min terme} \end{cases}$$

b- Maxterme

C'est une somme logique contenant toutes les variables de la fonction binaire complémentées ou non. On l'appelle aussi somme fondamentale.

$$y = f\left(a,b,c,d\right) \quad \begin{cases} a+\bar{b}+c+d \text{ est un max terme} \\ \bar{a}+\bar{b}+d \text{ n'est pas un max terme} \end{cases}$$

Exemple :

$$y_1 = f\left(a,b,c,d\right) = \bar{a}\,\bar{b}\,d + \underbrace{a\,\bar{b}\,c\,d}_{\min terme} + a\,c\,d + \underbrace{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}}_{\min terme}$$

$$y_2 = f\left(a,b,c,d\right) = \underbrace{\left(a+\bar{b}+c+d\right)}_{Maxterme} \bullet \left(\bar{a}+\bar{b}+d\right) \bullet \underbrace{\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}\right)}_{Maxterme} \bullet \left(a+c+d\right)$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple n°1 :

$$\boxed{f\left(A,B\right)=XOR}$$

$$f\ (A,B)\ \underbrace{=}_{s'écrit}\ \underbrace{\overline{A}\cdot B+A\cdot \overline{B}}_{somme\ des\ min\ termes}\ \underbrace{=}_{ou}\ \underbrace{\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\bullet\left(A+B\right)}_{produit\ des\ max\ termes}$$

Exemple n°2 :

$$\boxed{f\left(A,B\right)=XNOR}$$

$$f\ (A,B)\ \underbrace{=}_{s'écrit}\ \underbrace{\overline{A}\cdot \overline{B}+A\cdot B}_{somme\ des\ min\ termes}\ \underbrace{=}_{ou}\ \underbrace{\left(\overline{A}+B\right)\bullet\left(A+\overline{B}\right)}_{produit\ des\ max\ termes}$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

3°) Théorème fondamental de l'algèbre des fonctions logiques

► C'est un théorème qui est en relation avec la façon avec laquelle on exprime une fonction binaire.

a- Forme disjonctive ou (SOP) (Sum Of Products) : somme des produits

► Toute fonction binaire peut s'écrire sous forme de la somme de tous les mintermes correspondant aux 1 de cette fonction.

$$y = \sum m_i \qquad \left(1^{\text{ère}}\ \textit{forme canonique}\right)$$

► La SOP est la somme de tous les mintermes pour lesquels la fonction binaire est vraie (a une valeur de 1 en sortie).

b- Forme conjonctive ou (POS) (Product Of Sums) : produit des sommes

► Toute fonction binaire peut s'écrire sous forme du produit de tous les maxtermes correspondant aux 0 de cette fonction.

$$y = \prod M_i \qquad \left(2^{\text{ème}}\ \textit{forme canonique}\right)$$

► La POS est le produit de tous les Maxtermes pour lesquels la fonction binaire est fausse (a une valeur de 0 en sortie).

Chapitre IV : Les fonctions binaires

AND

Forme disjonctive ou (SOP) (Sum Of Products)

$$S = A \cdot B$$

Forme conjonctive ou (POS) (Product Of Sums)

$$S = (A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$$

OR

Forme disjonctive ou (SOP) (Sum Of Products)

$$S = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

Forme conjonctive ou (POS) (Product Of Sums)

$$S = A + B$$

$$S = (A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$$
$$S = \left[(A + B) \cdot (\overline{A} + B)\right] \cdot (A + \overline{B})$$
$$S = \left[A\overline{A} + AB + \overline{A}B + BB\right] \cdot (A + \overline{B})$$
$$S = [B] \cdot (A + \overline{B}) = A \cdot B$$

$$S = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$
$$S = (A \cdot B + \overline{A} \cdot B) + A \cdot \overline{B}$$
$$S = B + A \cdot \overline{B} = (A + B) \cdot (B + \overline{B})$$
$$S = A + B$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

XOR

Forme disjonctive ou (SOP) (Sum Of Products)

$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

Forme conjonctive ou (POS) (Product Of Sums)

$$S = (A + B) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B}\right)$$

XNOR

Forme disjonctive ou (SOP) (Sum Of Products)

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

Forme conjonctive ou (POS) (Product Of Sums)

$$S = \left(A + \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} + B\right)$$

$$S = (A + B) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B}\right)$$

$$S = A \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + B \cdot \overline{B}$$

$$S = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$S = \left(A + \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} + B\right)$$

$$S = A \cdot \overline{A} + A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{B}$$

$$S = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

4°) Théorèmes de Shannon

C'est un théorème de transfiguration c'est-à-dire d'écriture d'une fonction binaire quelconque sous forme de SOP ou sous forme de POS

a- Théorème n°1 de Shannon

► **Il développe une fonction binaire f par rapport à une de ses variables x_i comme suit :**

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\left[x_i\bullet f(x_1,\dots,1,\dots,x_n)\right]+\left[\overline{x_i}\bullet f(x_1,\dots,0,\dots,x_n)\right]$$

SOP

Permet d'exprimer une fonction f qcq sous forme de SOP

Exemple :

► **Développer la fonction suivante par rapport à la variable c :**

$$y=d\cdot\overline{c}+c\cdot b\cdot\overline{a}+\overline{b}$$

$$y=c\bullet y(a,b,1,d)+\overline{c}\bullet y(a,b,0,d)$$

$$y=c\bullet\left(b\cdot\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}\bullet\left(d+\overline{b}\right)$$

Remarque :

► **Si on développe f par rapport à toutes ses variables indépendantes x_i, on obtient la 1ère forme canonique : SOP.**

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Développement par rapport à toutes ses variables

$$y = d.\bar{c} + c.b.\bar{a} + \bar{b}$$

$$y = c \bullet y(a,b,1,d) + \bar{c} \bullet y(a,b,0,d)$$

$$y = c \bullet (b.\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} \bullet (d + \bar{b})$$

$$y = c.b.\bar{a} + c.\bar{b} + \bar{c}.d + \bar{c}.\bar{b}$$

$$y = a \bullet y(1,b,c,d) + \bar{a} \bullet y(0,b,c,d)$$

$$y = a \bullet (c.\bar{b} + \bar{c}.d + \bar{c}.\bar{b}) + \bar{a} \bullet (c.b + c.\bar{b} + \bar{c}.d + \bar{c}.\bar{b})$$

$$y = a.c.\bar{b} + a.\bar{c}.d + a.\bar{c}.\bar{b} + \bar{a}.c.b + \bar{a}.c.\bar{b} + \bar{a}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{c}.\bar{b}$$

$$y = b \bullet y(a,1,c,d) + \bar{b} \bullet y(a,0,c,d)$$

$$y = b.a.\bar{c}.d + b.\bar{a}.c + b.\bar{a}.\bar{c}.d + a.c.\bar{b} + \bar{b}.a.\bar{c}.d + a.\bar{c}.\bar{b} + \bar{a}.c.\bar{b} + \bar{b}.\bar{a}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{c}.\bar{b}$$

$$y = d \bullet y(a,b,c,1) + \bar{d} \bullet y(a,b,c,0)$$

$$y = d.b.a.\bar{c} + d.b.\bar{a}.c + d.b.\bar{a}.\bar{c} + d.a.c.\bar{b} + d.\bar{b}.a.\bar{c} + d.\bar{a}.c.\bar{b} + d.\bar{b}.\bar{a}.\bar{c} + \bar{d}.b.\bar{a}.c + \bar{d}.a.c.\bar{b} + \bar{d}.a.\bar{c}.\bar{b} + \bar{d}.\bar{a}.c.\bar{b} + \bar{d}.\bar{a}.\bar{c}.\bar{b}$$

1$^{\text{ère}}$ forme canonique : SOP.

$$y = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \underbrace{\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}}_{4:y=0} + \bar{a}.b.\bar{c}.d + \bar{a}.b.c.\bar{d} + \bar{a}.b.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.\bar{d} + a.\bar{b}.c.d + \underbrace{a.b.\bar{c}.\bar{d}}_{12:y=0} + a.b.\bar{c}.d + \underbrace{a.b.c.\bar{d}}_{14:y=0} + \underbrace{a.b.c.d}_{15:y=0}$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Expression sous forme : SOP

XOR

Théorème n° 1 de Shannon

$$y(A,B) = \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot \left(A + B\right)$$

$$y = A \cdot f(1,B) + \overline{A} \cdot f(0,B)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,B) = \overline{B} \\ f(0,B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

XNOR

Théorème n°1 de Shannon

$$y(A,B) = \left(\overline{A} + B\right) \cdot \left(A + \overline{B}\right)$$

$$y = A \cdot f(1,B) + \overline{A} \cdot f(0,B)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,B) = B \\ f(0,B) = \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Expression sous forme : SOP

XOR

POS

$$y(A,B) = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)\cdot\left(A+B\right)$$

variable B

$$y = A\cdot f(1,B) + \overline{A}\cdot f(0,B)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,B)=\overline{B}\\ f(0,B)=B\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$$

SOP

variable A

$$y = B\cdot f(A,1) + \overline{B}\cdot f(A,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(A,1)=\overline{A}\\ f(A,0)=A\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = B\cdot\overline{A}+\overline{B}\cdot A$$

SOP

Chapitre IV : Les fonctions binaires

b- Théorème n°2 de Shannon

► Il développe une fonction binaire f par rapport à une de ses variables x_i comme suit :

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\left[x_i+f(x_1,\dots,0,\dots,x_n)\right]\bullet\left[\overline{x_i}+f(x_1,\dots,1,\dots,x_n)\right]$$

POS

Permet d'exprimer une fonction f qcq sous forme de POS

Exemple :

► Développer la fonction suivante par rapport à la variable c :

$$y=d\cdot\overline{c}+c\cdot b\cdot\overline{a}+\overline{b}$$

$$y=\left[c+y(a,b,0,d)\right]\bullet\left[\overline{c}+y(a,b,1,d)\right]$$

$$y=\left[c+\left(d+\overline{b}\right)\right]\bullet\left[\overline{c}+\left(b\cdot\overline{a}+\overline{b}\right)\right]$$

Remarque :

► Si on développe f par rapport à toutes ses variables indépendantes x_i, on obtient la 2ème forme canonique : POS

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Expression sous forme : POS

XOR

Théorème n°2 de Shannon

$$y(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

$$y = \left[A + f(0,B)\right] \bullet \left[\overline{A} + f(1,B)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,B) = \overline{B} \\ f(0,B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \left[A + B\right] \bullet \left[\overline{A} + \overline{B}\right]$$

XNOR

Théorème n°2 de Shannon

$$y(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

$$y = \left[A + f(0,B)\right] \bullet \left[\overline{A} + f(1,B)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,B) = B \\ f(0,B) = \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \left[A + \overline{B}\right] \bullet \left[\overline{A} + B\right]$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Expression sous forme : POS

XOR

SOP

$$y(A,B) = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}$$

$$y = \left[A + f(0,B)\right]\bullet\left[\overline{A} + f(1,B)\right]$$

variable B

$$\left.\begin{array}{l} f(1,B) = \overline{B} \\ f(0,B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \left[A + B\right]\bullet\left[\overline{A} + \overline{B}\right]$$

POS

$$y = \left[B + f(A,0)\right]\bullet\left[\overline{B} + f(A,1)\right]$$

variable A

$$\left.\begin{array}{l} f(A,1) = A \\ f(A,0) = \overline{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \left[B + A\right]\bullet\left[\overline{B} + \overline{A}\right]$$

POS

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Différentes expressions de XOR

$$s = a \oplus b$$

Écriture compacte

SOP

$$s = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$$

Théorème n°1 de Shannon

Théorème n°2 de Shannon

$$s = \left(\bar{a} + \bar{b}\right) \cdot \left(a + b\right)$$

POS

Écritures éclatées

$$s = \overline{a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}}$$

Négation de XNOR

$$s = \left(\overline{a \cdot b}\right) \cdot \left(a + b\right)$$

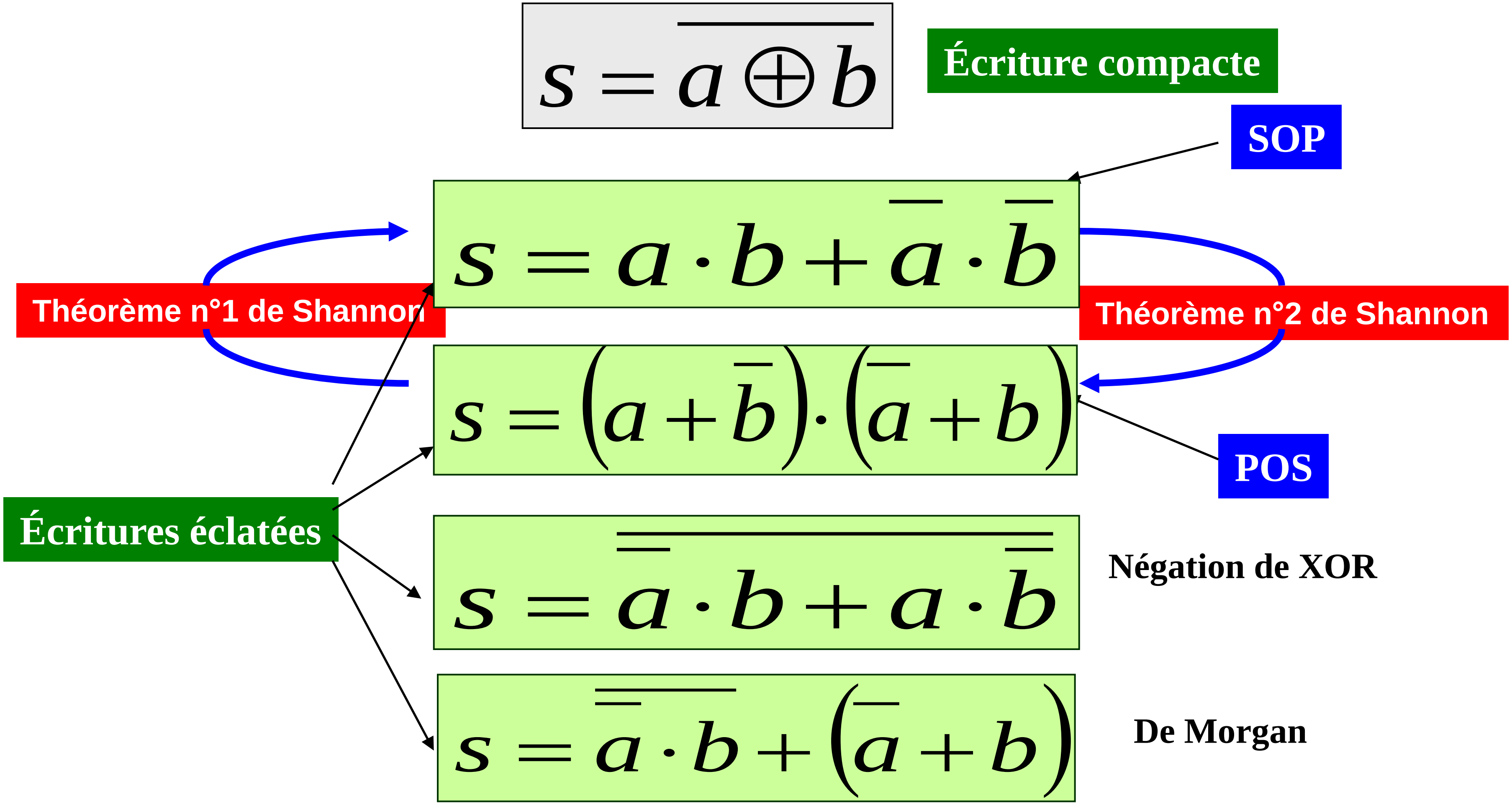
De Morgan

UNIVERSITE INTERNATIONALE DE CASABLANCA - LAUREAT INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ECOLE D'INGENIERIE - 1ÈRE ANNÉE GÉNIE INFORMATIQUE - S6

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Différentes expressions de XNOR



$$s = \overline{a \oplus b}$$

Écriture compacte

SOP

$$s = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Théorème n°1 de Shannon

Théorème n°2 de Shannon

$$s = \left(a + \bar{b}\right) \cdot \left(\bar{a} + b\right)$$

POS

Écritures éclatées

$$s = \overline{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}$$

Négation de XOR

$$s = \overline{\bar{a} \cdot b} + \left(\bar{a} + b\right)$$

De Morgan

Chapitre IV : Les fonctions binaires

III. Conception des circuits logiques

Chapitre IV : Les fonctions binaires

1°) Table de vérité

2°) Expression logique

3°) Tableau de Karnaugh

4°) Logigramme

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Principe :

► La conception des circuits logiques respecte les étapes suivantes :

■ Traduire une problématique sous forme d'une table de vérité.

■ Exprimer l'équation logique de la fonction binaire (ou les fonctions) de sortie en fonction des variables d'entrée.

■ Simplifier ci-possible l'équation logique obtenue (ou les équations).

■ Réaliser le logigramme du circuit tenant compte de la sortie (ou les sorties) à l'aide des portes logiques.

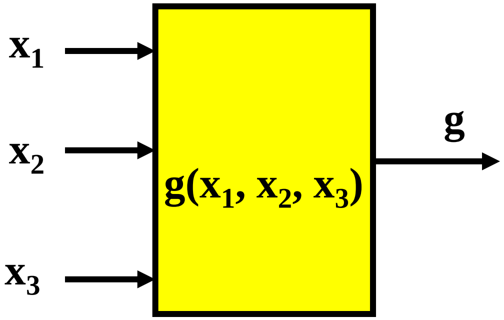
Chapitre IV : Les fonctions binaires

1°) Table de vérité

► Elle sert à traduire un problème, un texte ou un cahier des charges, Elle montre la relation entre les signaux d'entrée (variables) et les signaux de sortie (fonctions) sous forme de valeurs logiques (0 ou 1)

Exemple :

► Réaliser un circuit logique à 3 entrées et 1 sortie, sachant que la sortie est au niveau haut (1) si au moins deux entrées sont à 1



x_1	x_2	x_3	$g = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Chapitre IV : Les fonctions binaires

2°) Expression logique (ou équation logique)

► **L'expression logique exprime la relation entre les signaux d'entrée (variables) et les signaux de sortie (fonctions).**

► **Elle s'obtient à partir de la table de vérité, sous la forme :**

- **SOP (1ère forme canonique) : somme des mintermes pour lesquels la fonction vaut 1;**
- **POS (2ème forme canonique) : produit des maxtermes pour lesquels la fonction vaut 0.**

a	b	c	$g=f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

SOP

$$g=\overline{a}.b.c+a.\overline{b}.c+a.b.\overline{c}+a.b.c$$

$$g=(a+b+c)\cdot\left(a+b+\overline{c}\right)\cdot\left(a+\overline{b}+c\right)\cdot\left(\overline{a}+b+c\right)$$

POS

Chapitre IV : Les fonctions binaires

3°) Simplification graphique : Tableau de Karnaugh

► Karnaugh sert à simplifier graphiquement de manière aisée les fonctions binaires (car l'utilisation de méthode algébrique dans des cas assez complexe est insuffisante).

► Le tableau de karnaugh est une autre façon de représenter la table de vérité (en deux dimensions).

► Il comprend 2^n cases (autant de cases que de combinaison des variables).

► La construction respecte la règle d'adjacence dictée par le code Gray entre les cases voisines sur une ligne et sur une colonne

► Deux cases sont dites adjacentes si l'on passe de l'une à l'autre par le changement d'une seule variable du même rang.

► Ce principe est valable à l'intérieur du tableau mais aussi sur ses bords : en passant du bord droit au bord gauche ou du haut au bas il y a adjacence.

► Le tableau de Karnaugh est donc une sphère représentée de manière éclatée sur un plan.

<u>Construction du tableau de Karnaugh</u> :

► On se limitera à cinq variables d'entrée (au maximum) .

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Comment passer de la table de vérité vers le tableau de Karnaugh?

► **Les cases du tableau représentent au même temps les différentes combinaisons des variables d'entrée et les valeurs 0 ou 1 leur correspondant de la fonction binaire.**

► **Si la simplification utilise :**

- **les valeurs 1 de la fonction binaire, les cases sont considérées des mintermes;**
- **les valeurs 0 de la fonction binaire, les cases sont considérées des maxtermes.**

Code Gray

bc a	0 0	0 1	11	1 0
0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$
1	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$	abc	$ab\bar{c}$

mintermes

Code Gray

bc a	0 0	01	11	10
0	$a+b+c$	$a+b+\bar{c}$	$a+\bar{b}+\bar{c}$	$a+\bar{b}+c$
1	$\bar{a}+b+c$	$\bar{a}+b+\bar{c}$	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	$\bar{a}+\bar{b}+c$

maxtermes

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Utilisation des uns « 1 »

Code Gray

$a \backslash bc$	0 0	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

Code Gray

$a \backslash bc$	0 0	01	11	10
0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$
1	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$	abc	$ab\bar{c}$

a	b	c	$g = f(a,d,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Code Gray

Utilisation des 1 pour la simplification

$a \backslash bc$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	0	$\boxed{1}$	0
1	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

Sans simplification

SOP : $g = \bar{a}.b.c + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Utilisation des zéros « 0 »

Code Gray

bc a	00	01	11	10
0	1+1+1	1+1+0	1+0+0	1+0+1
1	0+1+1	0+1+0	0+0+0	0+0+1

Code Gray

bc a	00	01	11	10
0	$a+b+c$	$a+b+\bar{c}$	$a+\bar{b}+\bar{c}$	$a+\bar{b}+c$
1	$\bar{a}+b+c$	$\bar{a}+b+\bar{c}$	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	$\bar{a}+\bar{b}+c$

a	b	c	$g=f(a,d,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Code Gray

bc a	00	01	11	10
0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$
1	$\boxed{0}$	1	1	1

Utilisation des 0 pour la simplification

Sans simplification

POS :

$$g=(a+b+c)\cdot(a+b+\bar{c})\cdot(a+\bar{b}+c)\cdot(\bar{a}+b+c)$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple 1

► La figure suivante illustre ceci pour les trois variables c, b et a.

a	b	c	$g = f(a,d,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Code Gray

ab \ c	0	1
00	0_{0}	0_{4}
01	0_{1}	1_{5}
11	1_{3}	1_{7}
10	0_{2}	1_{6}

Code Gray

a \ bc	00	01	11	10
0	0_{0}	0_{1}	1_{3}	0_{2}
1	0_{4}	1_{5}	1_{7}	1_{6}

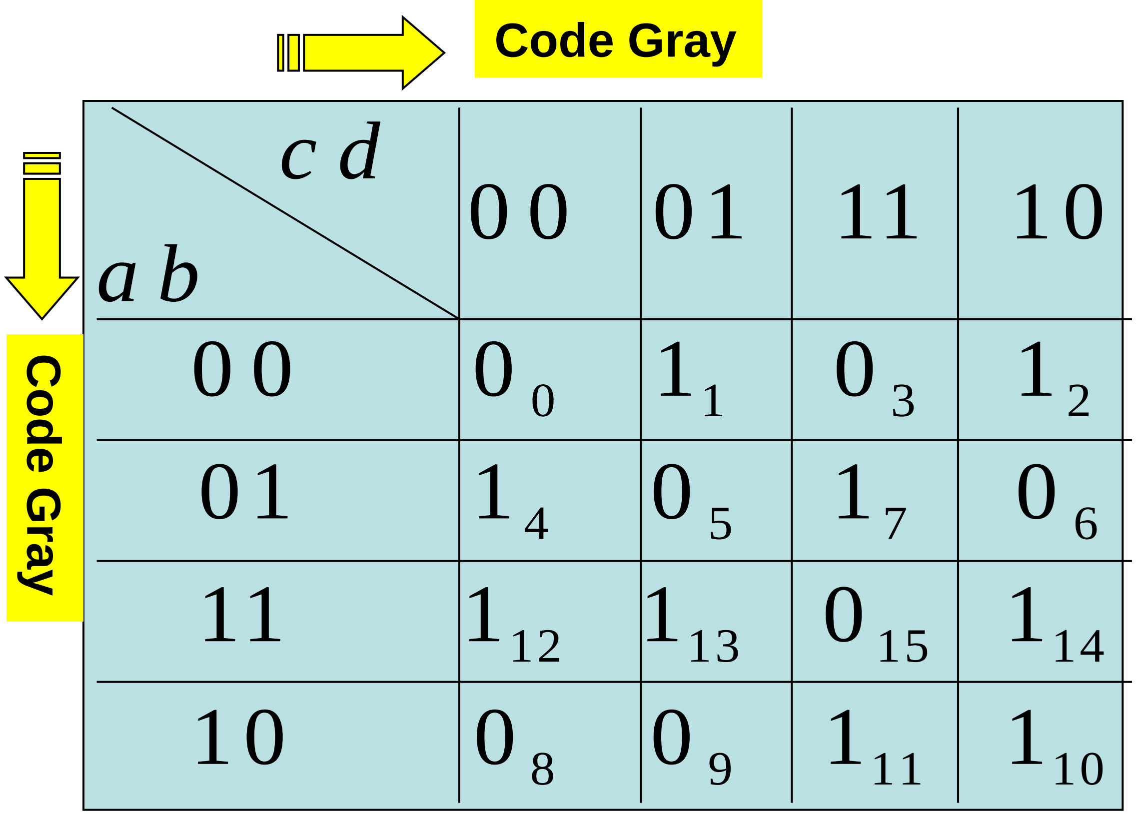
trois variables

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple 2

► La figure suivante illustre ceci pour les quatre variables d, c, b et a.

a	b	c	d	$g = f(a,b,c,d)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



Code Gray

Code Gray

cd / ab	00	01	11	10
00	0_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
01	1_{4}	0_{5}	1_{7}	0_{6}
11	1_{12}	1_{13}	0_{15}	1_{14}
10	0_{8}	0_{9}	1_{11}	1_{10}

quatre variables

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple 3

► La figure suivante illustre ceci pour les cinq variables a, b, c, d et e.

Code Gray

Code Gray

$c\,d\,e$ $a\,b$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0_{0}	0_{1}	1_{3}	0_{2}	1_{6}	0_{7}	1_{5}	0_{4}
01	0_{8}	0_{9}	1_{11}	1_{10}	0_{14}	0_{15}	1_{13}	1_{12}
11	1_{24}	0_{25}	1_{27}	0_{26}	1_{30}	0_{31}	1_{29}	0_{28}
10	1_{16}	0_{17}	1_{19}	1_{18}	0_{22}	1_{23}	0_{21}	1_{20}

cinq variables

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Code Gray

Code Gray

$d\ e$ / $a\ b\ c$	00	01	11	10
000	0_{0}	0_{1}	1_{3}	1_{2}
001	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
011	1_{12}	1_{13}	1_{15}	1_{14}
010	0_{8}	1_{9}	0_{11}	1_{10}
110	1_{24}	0_{25}	1_{27}	0_{26}
111	0_{28}	0_{29}	0_{31}	1_{30}
101	1_{20}	1_{21}	1_{23}	0_{22}
100	0_{16}	1_{17}	0_{19}	1_{18}

cinq variables

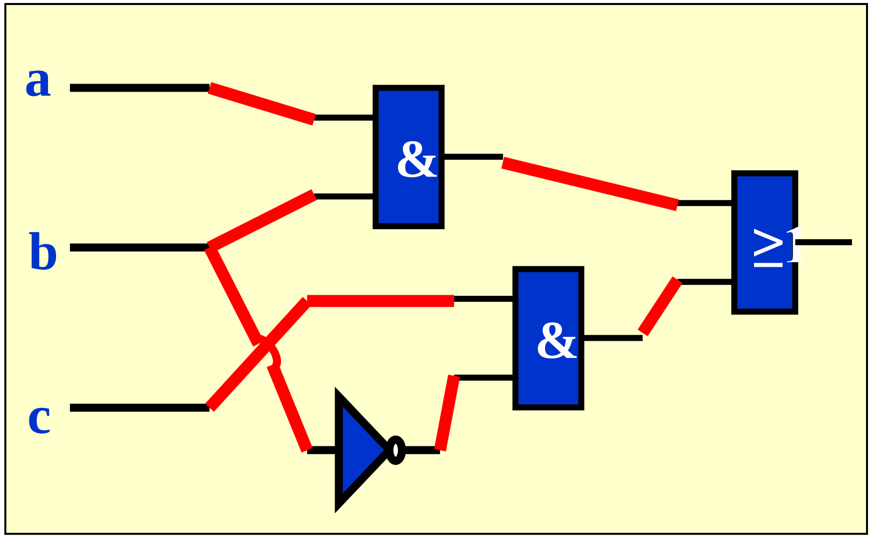
Chapitre IV : Les fonctions binaires

4°) Logigramme

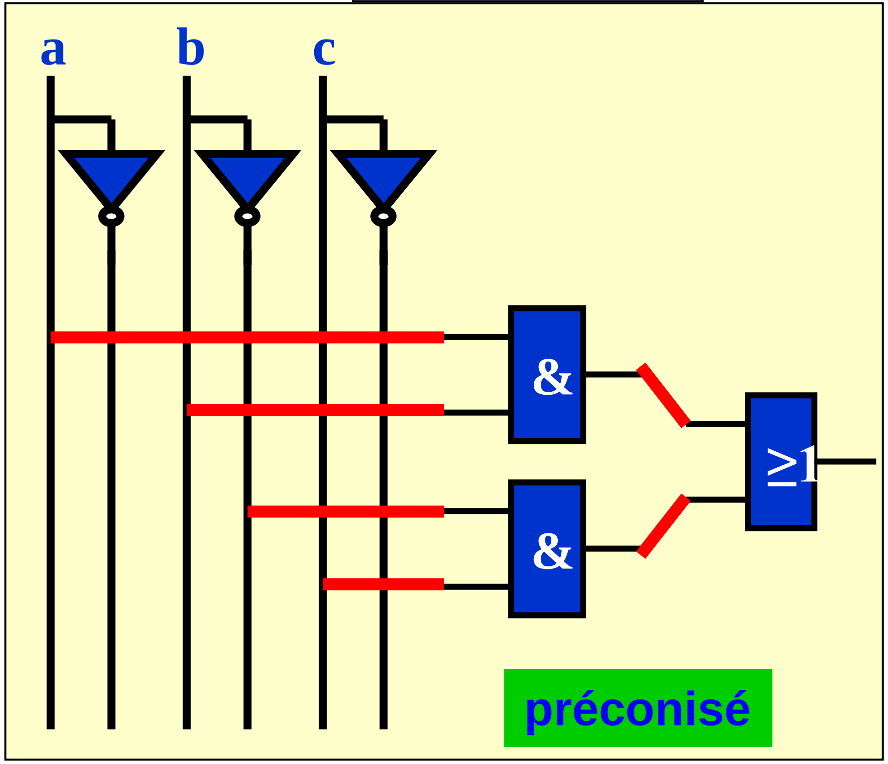
C'est un circuit conçu à base de portes logiques permettant de matérialiser l'expression logique de la fonction binaire donnée.

Exemple :

Le logigramme suivant correspond à la fonction logique : $f = a\,b + \bar{b}\,c$



à éviter



préconisé

Chapitre IV : Les fonctions binaires

IV. Méthodes de simplification des fonctions bianaires

Chapitre IV : Les fonctions binaires

1°) Méthode algébrique : identités Booléennes

2°) Méthode graphique : Tableau de Karnaugh

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Généralités

► **La simplification d'une fonction binaire a pour objectif de réduire l'encombrement et le coût de réalisation du circuit.**

► **On distingue deux méthodes de simplification :**

- ■ **Méthode algébrique.**
- ■ **Méthode graphique.**

Chapitre IV : Les fonctions binaires

1°) Méthode algébrique : identités Booléennes

► Cette technique de simplification repose sur l'utilisation des propriétés de l'algèbre de Boole (identités booléennes) et celles des théorèmes fondamentaux.

Exemple d'identités particulières :

$$a\,b + a\,\overline{b} = a$$

$$a\,b + a = a$$

$$a + \overline{a}\,b = a + b$$

$$(a+b)\left(a+\overline{b}\right) = a$$

$$a\,(a+b) = a$$

$$a\left(\overline{a}+b\right) = a\,b$$

Exemple :

► Simplifier l'équation suivante :

$$Question : f = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c$$

$$solution : f = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,c$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

2°) Méthode graphique : Tableau de Karnaugh

► **Cette méthode repose sur l'utilisation du tableau de Karnaugh.**

► **Elle consiste à mettre en évidence des associations du type :**

$$a\,b + a\,\overline{b} = a\left(b+\overline{b}\right) = a \quad \textit{entre} \quad 2 \quad \textit{cases} \quad \textit{adjacentes}$$

$$a\,b\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,\overline{b}\,\overline{c} + a\,\overline{b}\,c = a\,b\left(c+\overline{c}\right) + a\,\overline{b}\left(\overline{c}+c\right) = a\,b + a\,\overline{b} = a\left(b+\overline{b}\right) = a \quad \textit{entre} \quad 4 \quad \textit{cases} \quad \textit{adjacentes}$$

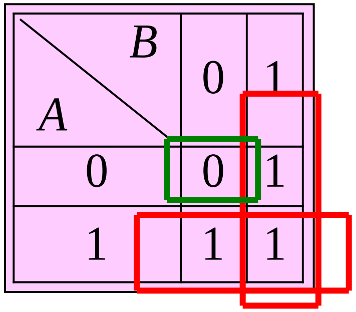
► **Les variables qui changent d'état seront éliminées.**

► **On utilise des groupements qui couvre :**
- **tous les « 1 » des cases adjacentes, si l'on veut exprimer la fonction f sous la forme SOP**
- **tous les « 0 » des cases adjacentes, si l'on veut exprimer la fonction f sous la forme POS**

► **La case est un :**
- **minterme, si la valeur correspondant de la fonction f est 1.**
- **maxterme, si la valeur correspondant de la fonction f est 0.**

Chapitre IV : Les fonctions binaires

OR

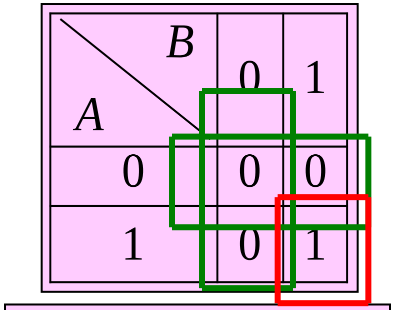


A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

SOP : $f = A + B$

POS : $f = A + B$

AND

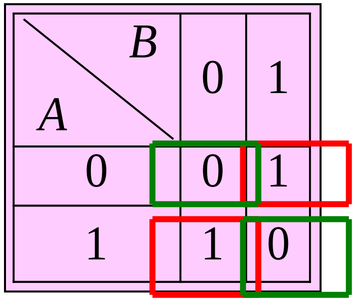


A \ B	0	1
0	0	0
1	0	1

SOP : $f = A \cdot B$

POS : $f = A \cdot B$

XOR

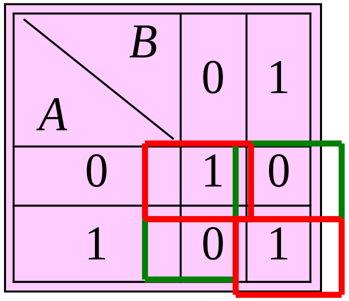


A \ B	0	1
0	0	1
1	1	0

SOP : $f = \overline{A}\,B + A\,\overline{B}$

POS : $f = \left(A + B\right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B}\right)$

XNOR



A \ B	0	1
0	1	0
1	0	1

SOP : $f = \overline{A}\,\overline{B} + A\,B$

POS : $f = \left(\overline{A} + B\right) \cdot \left(A + \overline{B}\right)$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Règle

► On cherche à effectuer des regroupements de tous les 1 des cases adjacentes par ensemble de 2, de 4, de 8, …., de en général 2^n.

- un groupement de deux 1 adjacents, permet de simplifier 1 variable
- un groupement de quatre 1 adjacents, permet de simplifier 2 variables
- un groupement de huit 1 adjacents, permet de simplifier 3 variables

.

- un groupement de 2^k 1adjacents, permet de simplifier k variables

■ On cherche un minimum de groupement qui couvre :

- tous les « 1 » adjacents de la fonction f qui sera écrite sous la forme SOP;
- tous les « 0 » adjacents de la fonction f qui sera écrite sous la forme POS.

■ Il faut que les blocs soient maximaux (maximum de 1 adjacents).
Pour cela on peut exploiter les redondances pour augmenter la taille de ces blocs.
Plus le bloc est grand, plus le terme correspondant sera simple.

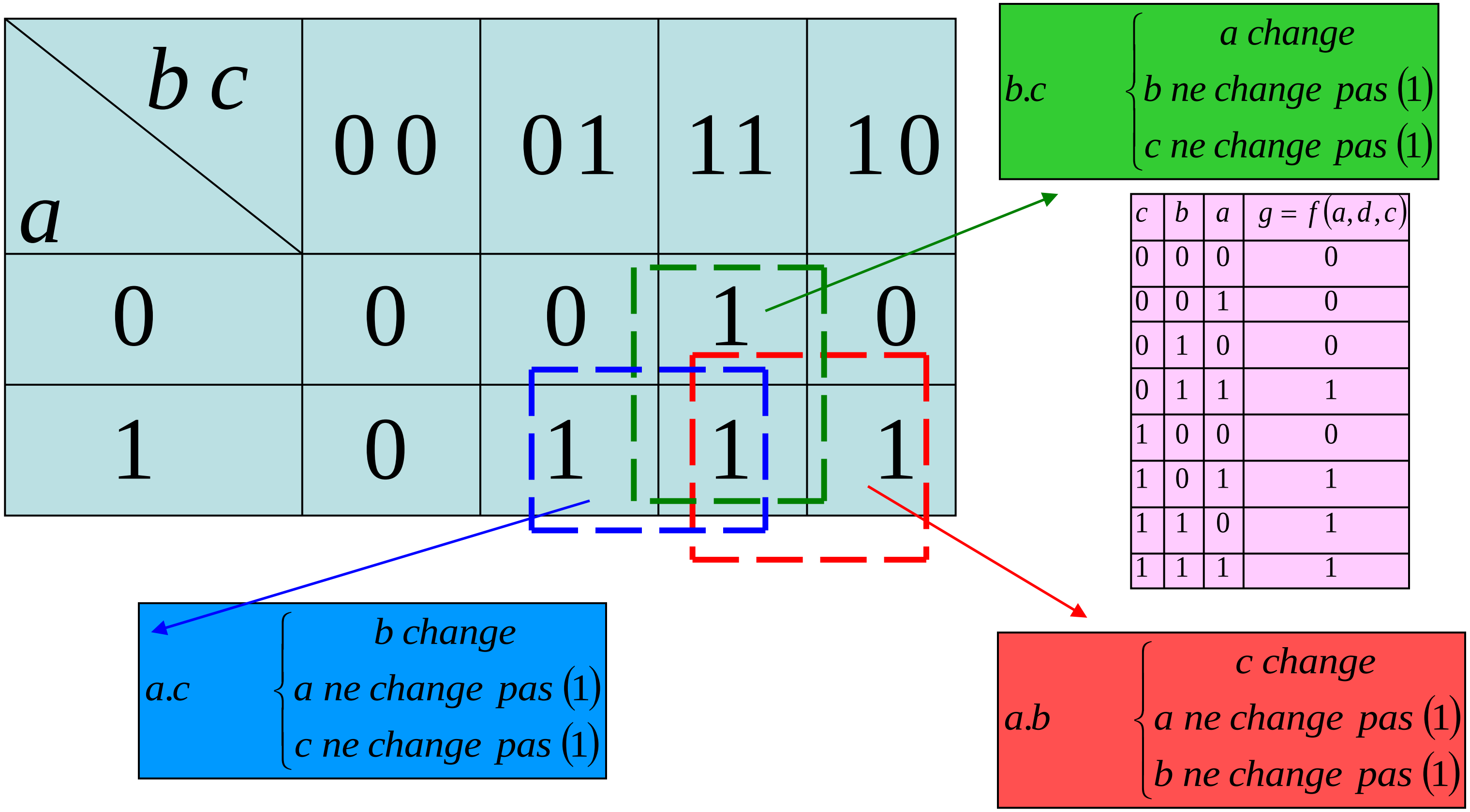
■ Il est inutile de regrouper des 1 qui ont tous déjà été regroupés.

Remarque

► Lorsque l'état Φ (indifférent) est considéré 0 ou 1, il n'est plus possible de changer son état pour le réutiliser sur un autre groupement.

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple 1



$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$b.c \quad \begin{cases} a \text{ change} \\ b \text{ ne change pas } (1) \\ c \text{ ne change pas } (1) \end{cases}$

c	b	a	$g = f(a,d,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$a.c \quad \begin{cases} b \text{ change} \\ a \text{ ne change pas } (1) \\ c \text{ ne change pas } (1) \end{cases}$

$a.b \quad \begin{cases} c \text{ change} \\ a \text{ ne change pas } (1) \\ b \text{ ne change pas } (1) \end{cases}$

► **On en déduit l'expression simplifiée de la fonction correspondante :**

$$y = a.b + b.c + a.c$$

► **Cette expression nécessite moins d'opérateurs logiques pour sa réalisation contre plusieurs sans simplification.**

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple 2

a \ $b\,c$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

$$a \quad \begin{cases} a\ change \\ bc\ change \\ c\ ne\ change\ \ pas\ (1) \end{cases}$$

$$\boxed{y = c}$$

$$y=\bar{a}\,\bar{b}\,c+\bar{a}\,b\,c+a\,\bar{b}\,c+a\,b\,c=\bar{a}\,c\left(\bar{b}+b\right)+a\,c\left(\bar{b}+b\right)=c\ \ \left(\bar{a}+a\right)=c$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exemple 3

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$\bar{a}.\bar{c} \quad \begin{cases} b \text{ change} \\ a \text{ ne change pas } (0) \\ d \text{ change} \\ c \text{ ne change pas } (0) \end{cases}$$

$$y = \bar{a}.\bar{c}$$

$$y = \bar{a}\, b\, \bar{c}\, \bar{d} + \bar{a}\, b\, \bar{c}\, d + \bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}\, \bar{d} + \bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}\, d = \bar{a}.\bar{c}$$

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Travaux Dirigés

Travaux dirigés

Exercice n°1 : simplification par Karnaugh

bc a	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

bc a	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

bc a	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

bc a	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

bc a	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

bc a	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

bc a	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

bc a	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

bc a	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	1

Travaux dirigés

c d a b	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	0	1
11	1	0	1	1
10	1	1	1	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	0	1	0	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	0	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	0	0	1	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

c d a b	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	1

Travaux dirigés

c d e a b	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	1	1	1	1	0	1
01	1	0	1	1	1	1	0	1
11	1	0	1	1	1	1	0	1
10	1	0	1	1	1	1	0	1

c d e a b	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	0	1	1	0	0	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1

c d e a b	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	1	1	1	1	0	0
01	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	1	1	1	1	0	0

c d e a b	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	1	0	1	0	1	0
01	1	0	1	0	1	0	1	0
11	1	0	1	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	0

c d e a b	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	0	0	0	0
01	0	0	0	0	1	1	1	1
11	1	1	1	1	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1	1	1	1

c d e a b	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	1	1	0	0	0	0
01	0	0	1	1	0	0	0	0
11	1	1	0	0	1	1	1	1
10	1	1	0	0	1	1	1	1

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Exercice n°2 : conception logique

► Concevez un circuit logique dont les entrées A, B et C sont telles que : la sortie S est au niveau haut si A = 0 ou si B et C sont à 1.

►Travail à faire :

- Établir l'équation de sortie.
- Simplifier.
- Établir le logigramme.
- Établir le logigramme avec les portes NAND à deux entrées uniquement.
- Établir le logigramme avec les portes NOR à deux entrées uniquement.