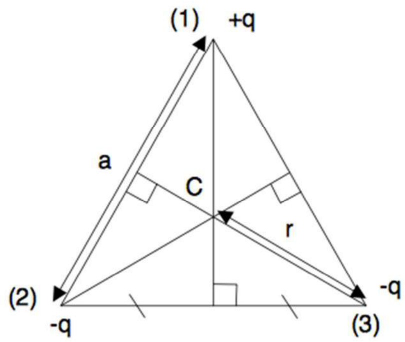
SERIE 2 DES TRAVAUX DIRIGÉS DU CHAPITRE 2

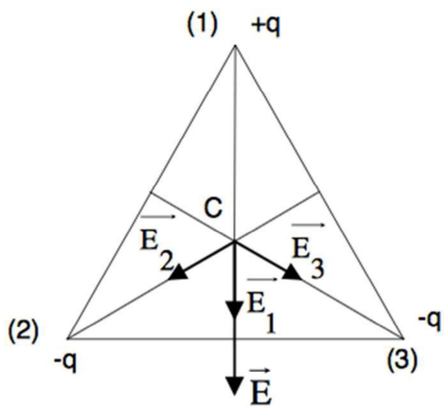
CORRECTION

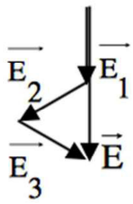
Exercice 2

Le centre C est situé à la distance : $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$



Théorème de superposition : $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3}$





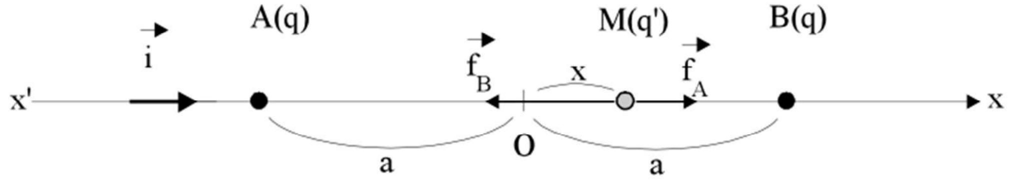
En intensité : $E = E_1 + E_2 \cos 60° + E_3 \cos 60°$

$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ (1 + 2.\cos 60°) = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

A.N. E= 540 V/m

Exercice 4



a. Soit M portant q', et $\overline{OM} = x$.
Force résultante sur M :

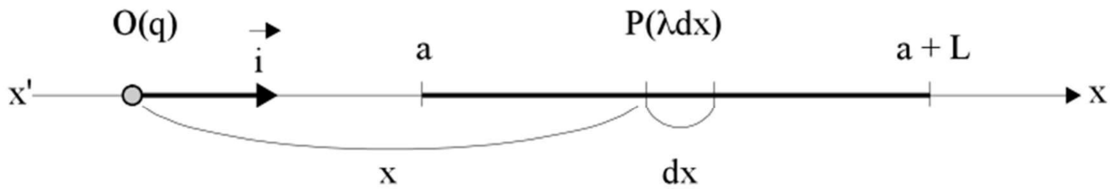
$$M \;:\; \vec{f} = \vec{f}_A + \vec{f}_B = K\,qq'\left[\frac{1}{\overline{AM}^2}\left(\vec{i}\right) + \frac{1}{\overline{BM}^2}\left(-\vec{i}\right)\right]$$

Avec :

$$\overline{AM} = x + a \quad \text{et} \quad \overline{BM} = x - a \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = K\,qq'\,\frac{-4\,ax}{\left(x^2 - a^2\right)^2}\,\vec{i} \quad \Rightarrow$$

- la position d'équilibre q' en O :
  - les deux charges en A et B sont identiques.
  - si x=0 on a $\vec{F} = \vec{0}$
- la stabilité :
  - si qq'>0 (les deux charges sont de même signe), $\vec{F}$ est dirigée vers O $\forall\, x \neq 0$: stabilité.
  - si qq'<0 (les deux charges sont de signe opposé), $\vec{F}$ fuit O $\forall\, x \neq 0$: instabilité.

b.



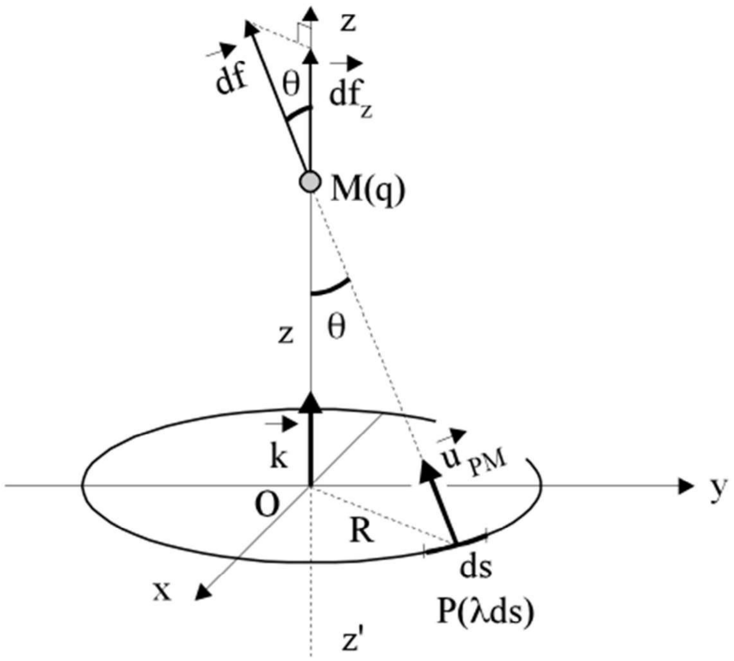
La force exercée sur q par l'élément dx portant la charge λdx et situé en P à la distance x de O, est :

$$d\vec{f} = K\,\frac{q\,(\lambda dx)}{x^2}\left(-\vec{i}\right)$$

La force totale sur q est :

$$\vec{f} = -\vec{i}\, K\, q\, \lambda \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} = +\vec{i}\, K\, q\, \lambda \left[\frac{1}{x}\right]_a^{a+L} = -K\, q\, \lambda \frac{L}{a(a+L)}\vec{i}$$

Exercice 5



ds en P portant la charge λds, exerce sur q en M la force :

$$\overrightarrow{df} = K \frac{q\, \lambda ds}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Le problème présente une symétrie axiale autour de $\overrightarrow{z'Oz}$; la force résultante $\vec{F}$ sur q est donc selon $\overrightarrow{z'Oz}$ et il suffit de ne considérer que la composante $\overrightarrow{dF_z}$ de $\overrightarrow{dF}$ selon cet axe soit :

$$\overrightarrow{df_z} = K \frac{q\, \lambda ds}{PM^2} \cos\theta\, \vec{k}$$

On peut donc écrire en remarquant que $PM^2 = R^2 + z^2$ et $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$

$$\vec{f} = \int_{cercle} \overrightarrow{df_z} = K\,q\lambda \frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{k} \int_{cercle} ds = 2\pi R\,K\,q\lambda \frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{k} = f\,\vec{k}$$

Discussion selon z :

$$\frac{df}{dz} = \cdots = 2\pi R\,K\,q\lambda \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{\left(z^2+R^2\right)^3}\left(R^2-2z^2\right)$$

d'où, pour $q\lambda > 0$:

z	$-\infty$		$-R/\sqrt{2}$		0		$+R/\sqrt{2}$		$+\infty$
df/dz		-	0	+		+	0	-	
f	0_-	↘	$min<0$	↗	0	↗	$max>0$	↘	0_+

et, pour $q\lambda < 0$: …

Exercice 6

a. C'est la force électrostatique qui empêche les gouttes de tomber. La force électrostatique est donc dirigée vers le haut. La charge étant négative, force électrostatique et champ électrostatique sont de sens opposés. Le champ électrostatique est donc dirigé vers le bas. La plaque du haut est donc chargée positivement, celle du bas négativement.

b. A l'équilibre, la somme des forces qui s'applique sur une goutte est nulle.
Le poids est exactement compensé par la force électrostatique : $m\vec{g} + q\vec{E} = \vec{O}$
(m et q désignent la masse et la charge d'une goutte).

$$|q| = \frac{mg}{E} = \frac{mg\ell}{U} = \frac{\rho V g\ell}{U} = \frac{4\rho\pi R^3 g\ell}{3U} \approx 1{,}6\cdot 10^{-18}\,\mathrm{C}$$

R est le rayon de la goutte ; l = 1,5 cm ; U = 3 kV.
V est le volume de la goutte de forme sphérique.

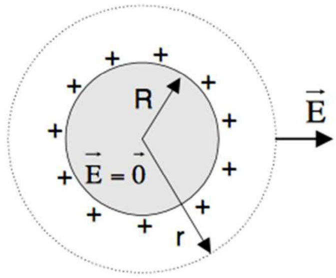
c. q = -10 e : une goutte contient dix électrons excédentaires.

Exercice 7

1. À l'équilibre, les charges se repartissent uniformément sur la surface.

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \text{ en C/m}^2$$

S est la surface d'une sphère.



Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique est nul.

À la surface (théorème de Coulomb) :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

2. Considérons une surface fermée sphérique de rayon r.
   Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est : $\Phi = ES = E\,4\pi r^2$
   L'application du théorème de Gauss donne :

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

   L'intensité du champ électrostatique à la distance r ≥ R est donc :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Exercice 9

Même que l'exercice 8 (le fil cylindrique uniformément chargé a les mêmes caractéristiques que le barreau uniformément chargé de l'exercice 8).

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\ {}_0}\,.\vec{e_r}$$

Exercice 10

1. Considérons un disque de rayon R portant la charge totale Q uniformément répartie à sa surface, ce qui correspond à une densité surfacique uniforme $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$.
   Le champ électrostatique créé par ce disque en un point M de son axe Oz à la distance z (z>0) de son centre O :

   - Tout plan contenant la droite OM est un plan de symétrie paire ; le champ $\vec{E}$ est nécessairement porté par la direction commune à tous ces plans, c'est à dire par Oz.
   - Le champ $\overrightarrow{dE}$ dû à un élément de surface dS, de charge $dq = \sigma.dS$, a pour expression :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\sigma.dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{u} = dE.\vec{u} \qquad (r = PM, \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r})$$

- On peut associer deux à deux les élements de surface de façon que les composantes normales à Oz des champs correspondants se compensent comme nous l'avons prévu à partir des éléments de symétrie du problème, seules s'ajoutent les composantes $dE_z = dE\ cos\alpha$.

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

avec $dS = \rho.d\rho.d\theta$ (coordonnées polaires) ; $r^2 = \rho^2 + z^2$ $(\rho = OP; z = OM)$ et $\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$

$$Soit:\ dE_z = \frac{\sigma.z}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\rho.d\rho.d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'expression du champ $\vec{E}$ en M (qui se confond avec sa composante sur Oz) est donnée par :

$$E = \frac{\sigma.z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho.d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\int_0^{2x} d\theta$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Cette expression est valable quelque soit le signe de z.

2. Si le point M est très proche du disque $|z| \ll R$, l'expression du champ devient approximativement égale à :

$$E(M) \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\frac{z}{|z|}$$

Nous retrouvons au voisinage immédiat du disque, le champ d'un plan uniformément chargé.

$$E(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad et \quad E(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Remarquons la discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ de E à la traversée de la couche superficielle chargée.

$$(E(z > 0) - E(z < 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0})$$

Exercice 11

La surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan :

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S_1}\vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2}\vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_3}\vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E(z).S - E(-z).S + 0 = E(z).S + E(z).S$$

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 2E.S$$

$$Or \qquad \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_S \sigma.dS = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$$

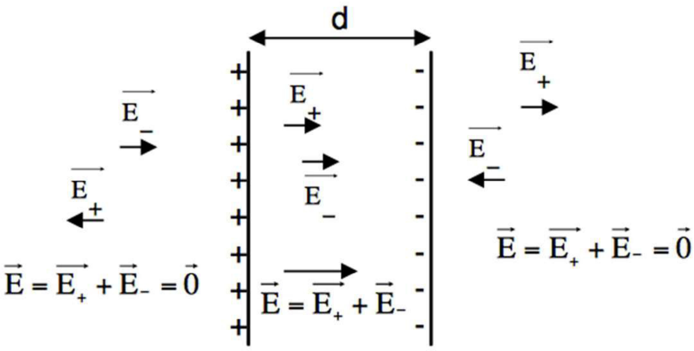
$$d'où \qquad 2E.S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0} \qquad \Longrightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 12

1. Le champ créé par le plan A :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2.



$\overrightarrow{E_+}$ et $\overrightarrow{E_-}$ désignent respectivement les champs crées par le plan chargé positivement et le plan chargé négativement.

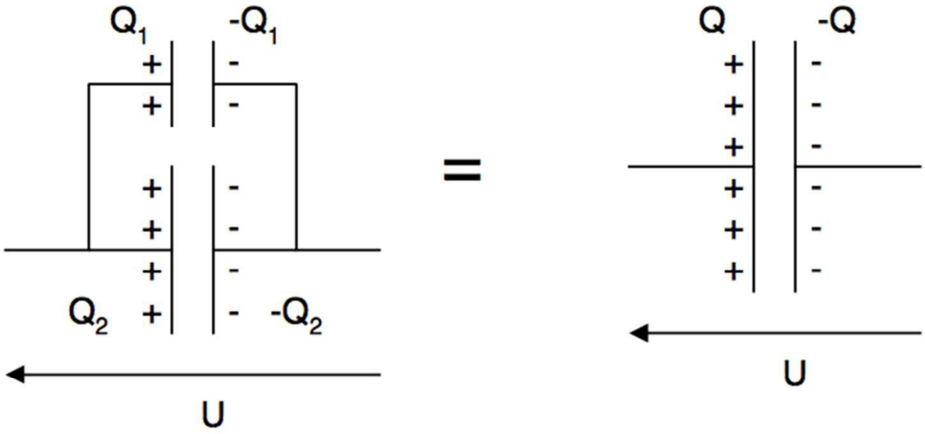
Entre les deux plans, le champ $\vec{E}$ est uniforme : c'est la somme de deux champs uniformes de même sens et de même intensité $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

$$E = 2.\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

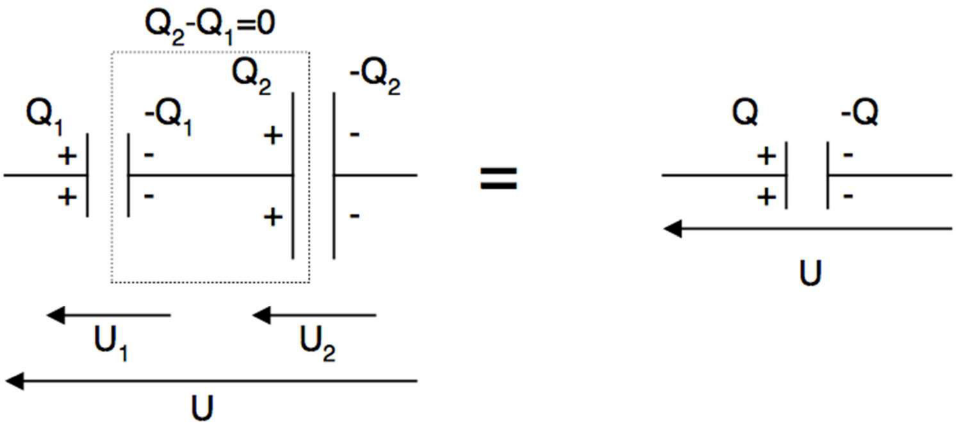
E est indépendant de la distance entre les deux plans.

En dehors des deux plaques, le champ est nul car les champs crées par chaque plaque se compensent exactement.

Exercice 13



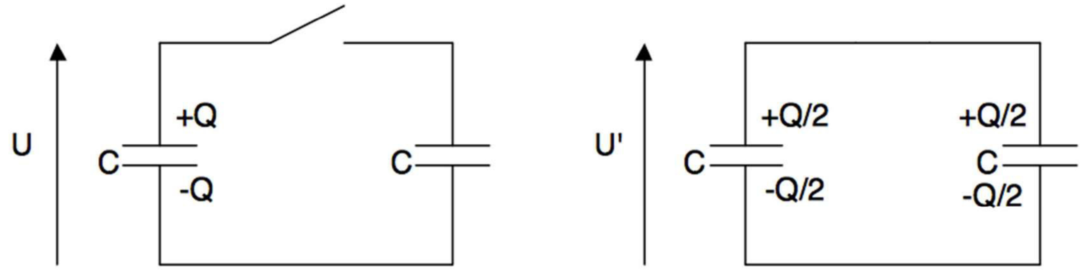
$Q_1 = C_1.U$
$Q_2 = C_2.U$
$Q = C_{eq}.U$
Il y a conservation de la charge : $Q = Q_1 + Q_2$
Donc : $C_{eq} = C_1 + C_2$



En série, tous les condensateurs ont la même charge : $Q = Q_1 = Q_2$
$U = U_1 + U_2$
$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$
$Donc\colon\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Exercice 14

a. La charge initiale Q va se répartir, après liaison, de la façon suivante :



Q/2 = C. U'
Tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble : U'=Q/(2C) = U/2 = 10V.

b. <u>Bilan énergétique :</u>
Avant liaison : $W = \frac{1}{2}\,C.U^2 + 0 = 20\ \mu J$
Après liaison : $W' = \frac{1}{2}\,C.U'^2 + \frac{1}{2}\,C.U'^2 = \frac{W}{2} = 10\ \mu J$
<u>Commentaire :</u> il « manque » 10 μJ.
Cette énergie n'a pas disparu !
Lors de la liaison, le courant de décharge crée un champ électromagnétique : 10 µJ sont donc rayonnée (à la manière d'une antenne émettrice). Pour s'en convaincre, il suffit de placer un récepteur radio à proximité du dispositif. On entend un craquement, caractéristique de la réception d'une onde électromagnétique (pour les mêmes raisons, on peut « entendre » la foudre à la radio).