Mathématiques appliquées à la gestion II

Yassir El-Azizi *Ing*, *Ph D*

6. Les différents types de systèmes
7. Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Exemple :

⇨ Le système (S) est donné par : $(S)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \end{cases}$

⇨ L'écriture matricielle du système (S) est : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

⇨ le système (S) est de Cramer :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 : \quad \det A \neq 0 \qquad A \text{ est alors une matrice inversible}$$

⇨ Calcul des déterminants de Cramer D_{x_1} , D_{x_2} et D_{x_3} :

$$\rightarrow D_{x_1} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -12 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 + 2L_1)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -108$$

$$\rightarrow D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - 3L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -30 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -30 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - 3L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & -30 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -30 \end{vmatrix} = 108$$

⇨ Calcul du vecteur solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: $\qquad (x_i = D_{x_i} / \det A, \ \ 1 \leq i \leq 3)$

$$\rightarrow x_1 = \frac{D_{x_1}}{\det A} = -\frac{108}{18} = -6 \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{\det A} = 0 \qquad x_3 = \frac{D_{x_3}}{\det A} = \frac{108}{18} = 6$$

⇨ $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est alors l'unique solution su système (S) .

Exemple :

⇨ Le système (S) est donné par : $(S)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \end{cases}$

⇨ L'écriture matricielle du système (S) est : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

⇨ le système (S) est de Cramer :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 : \quad \det A \neq 0 \qquad A \text{ est alors une matrice inversible}$$

⇨ Calcul des déterminants de Cramer D_{x_1} , D_{x_2} et D_{x_3} :

$$\rightarrow D_{x_1} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -12 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 + 2L_1)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -108$$

$$\rightarrow D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - 3L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -30 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -30 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} \overset{(L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - 3L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & -30 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -30 \end{vmatrix} = 108$$

⇨ Calcul du vecteur solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: $\qquad (x_i = D_{x_i} / \det A, \ \ 1 \leq i \leq 3)$

$$\rightarrow x_1 = \frac{D_{x_1}}{\det A} = -\frac{108}{18} = -6 \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{\det A} = 0 \qquad x_3 = \frac{D_{x_3}}{\det A} = \frac{108}{18} = 6$$

⇨ $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est alors l'unique solution su système (S) .

Exemple 2

Résolution du système :

$$\begin{cases} x + 3y + 4z & = & 50 \\ 3x + 5y - 4z & = & 2 \\ 4x + 7y - 2z & = & 31 \end{cases}$$

Exemple 2

Résolution du système :

$$\begin{cases} x+3y+4z &= 50 \\ 3x+5y-4z &= 2 \\ 4x+7y-2z &= 31 \end{cases}$$

La matrice A du système étant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$,

calculons A^{-1} par la formule $A^{-1} = \dfrac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|}$, sachant que $|A| = -8$ et

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -18 & 5 \\ -32 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$ où $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

$$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}{-8}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -24 \\ -40 \\ -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La forme générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \quad (\leftarrow \text{équation } 1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \quad (\leftarrow \text{équation } 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i \quad (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n \quad (\leftarrow \text{équation } n) \end{array}\right.$$

Les nombres a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, sont les ***coefficients*** du système. Ce sont des données. Les nombres b_i, $i = 1, \ldots, n$, constituent le ***second membre*** du système et sont également des données. Il convient de bien observer comment on a rangé le système en lignes (une ligne par équation) numérotées de 1 à n par l'indice i, et en colonnes : les termes correspondant à une même inconnue x_j sont alignés verticalement les uns sous les autres. L'indice j varie de 1 à p. Il y a donc p colonnes à gauche des signes d'égalité, plus une colonne supplémentaire à droite pour le second membre.

Différents types de systèmes

Voici un résultat théorique important pour les systèmes linéaires.

Théorème 1

Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

Systèmes homogènes

Un cas particulier important est celui des ***systèmes homogènes***, pour lesquels $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$. Cette solution est appelée *solution triviale*. Géométriquement, dans le cas 2×2, un système homogène correspond à deux droites qui passent par l'origine, $(0,0)$ étant donc toujours solution.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Systèmes échelonnés

Définition 5

Un système est *échelonné* si :

- le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est *échelonné réduit* si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

EXEMPLE

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{cases}$$ est échelonné (mais pas réduit).

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{cases}$$ n'est pas échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).

Il se trouve que les systèmes linéaires sous une forme échelonnée réduite sont particulièrement simples à résoudre.

EXEMPLE

Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues est échelonné et réduit.

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3 = 25 \\ \quad x_2 \quad -2x_3 = 16 \\ \qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

Ce système se résout trivialement en

$$\begin{cases} x_1 = 25 - 2x_3 \\ x_2 = 16 + 2x_3 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

En d'autres termes, pour toute valeur de x_3 réelle, les valeurs de x_1, x_2 et x_4 calculées ci-dessus fournissent une solution du système, et on les a ainsi toutes obtenues. On peut donc décrire entièrement l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \{(25 - 2x_3, 16 + 2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Opérations sur les équations d'un système

Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations (c'est-à-dire sur les lignes) qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une équation par un réel non nul.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

EXEMPLE

Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{cases}$$

Commençons par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: on soustrait à la deuxième équation deux fois la première équation. On obtient un système équivalent avec une nouvelle deuxième ligne (plus simple) :

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \end{cases}$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \\ & -2y & -2z & = & -6 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

On continue pour faire apparaître un coefficient 1 en tête de la deuxième ligne ; pour cela on divise la ligne L_2 par -3 :

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 & \end{cases}$$

EXEMPLE (SUITE)

On continue ainsi

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \\ & & 4z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & +3z & = & 1 & \\ & & z & = & -1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & y & & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & & = & 6 & L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ & y & & = & 4 & \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right.$$

On aboutit à un système réduit et échelonné :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & & & = & 2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & & = & 4 & \\ & & z & = & -1 & \end{array}\right.$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2, 4, -1)$.

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire. Nous allons décrire cet algorithme sur un exemple. Il s'agit d'une description précise d'une suite d'opérations à effectuer, qui dépendent de la situation et d'un ordre précis. Ce processus aboutit toujours (et en plus assez rapidement) à un système échelonné puis réduit, qui conduit immédiatement aux solutions du système.

Partie A. Passage à une forme échelonnée.

Soit le système suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Comme ce n'est pas le cas ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 & \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 & \end{array}\right.$$

Nous avons déjà un coefficient 1 devant le x_1 de la première ligne. On dit que nous avons un *pivot* en position $(1,1)$ (première ligne, première colonne). Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne.

Il n'y a pas de terme x_1 sur le deuxième ligne. Faisons disparaître le terme x_1 de la troisième ligne ; pour cela on fait l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 & \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

On change le signe de la seconde ligne ($L_2 \leftarrow -L_2$) pour faire apparaître 1 au coefficient du pivot (2,2) (deuxième ligne, deuxième colonne) :

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{cases}$$

On fait disparaître le terme x_2 de la troisième ligne, puis on fait apparaître un coefficient 1 pour le pivot de la position (3,3) :

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & 2x_3 & +10x_4 & = & 8 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 & L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{cases}$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée.

Partie C. Solutions. Le système est maintenant très simple à résoudre. En choisissant x_4 comme variable libre, on peut exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = 4x_4 - 2, \quad x_2 = 3x_4 + 3, \quad x_3 = -5x_4 + 4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$$\mathscr{S} = \{(4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Systèmes homogènes

Le fait que l'on puisse toujours se ramener à un système échelonné réduit implique le résultat suivant :

Théorème 2

Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.

EXEMPLE

Considérons le système homogène

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 13x_5 = 0 \\ x_3 + 20x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

On pose comme variables libres x_2 et x_5 pour avoir

$$x_1 = -x_2 - 13x_5, \qquad x_3 = -20x_5, \qquad x_4 = 2x_5,$$

et l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

qui est bien infini.

Mathématiques appliquées à la gestion II

1. Résoudre les systèmes échelonnés suivants : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_4 = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Si l'on passe d'un système (S) par une des trois opérations élémentaires à un système (S'), alors quelle opération permet de passer de (S') à (S) ?

3. Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

4. Résoudre le système suivant, selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + 2z = b \\ 2y + 2z = 4 \end{cases}$

Matrices 2×2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 9

Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Démonstration

On vérifie que si $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Idem pour BA.

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}. La preuve sera vue dans la section suivante.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{8} L_2$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \qquad \text{puis} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 2L_3$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{5}{8} L_3 \qquad \text{puis} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

Mathématiques appliquées à la gestion II

Mini-exercices

1. Si possible calculer l'inverse des matrices : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$.
2. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.
3. Calculer l'inverse des matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\,x_p & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Nous savons que :

Théorème 3

Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

Matrices inversibles et systèmes linéaires

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et B un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrices pour trouver la solution du système linéaire.

Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

Les matrices élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, et aussi pour résoudre des systèmes linéaires, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Nous allons définir trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ correspondant à ces opérations. Plus précisément, le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire sur A. Voici les définitions accompagnées d'exemples.

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I_n, où λ est un nombre réel non nul.

$$E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I_n à la i-ème ligne de I_n.

$$E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, ce qui entraîne l'inversibilité des matrices élémentaires.

Équivalence à une matrice échelonnée

Définition 13

matrices équivalentes par lignes Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

Définition 14

Une matrice est ***échelonnée*** si :
- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Elle est ***échelonnée réduite*** si en plus :
- le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Théorème 4

Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes.

Ce théorème permet donc de se ramener par des opérations élémentaires à des matrices dont la structure est beaucoup plus simple : les matrices échelonnées réduites.

Théorème 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I_n.

Corollaire 1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A est inversible.

(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution X.

Mathématiques appliquées à la gestion II

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A. Passage à une forme échelonnée.

Première itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{11}^1 = 1$.

Première itération de la boucle, étape A.2. On ne fait rien sur la ligne 2 qui contient déjà un zéro en bonne position et on remplace la ligne 3 par $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{22}^2 = 2$.

Deuxième itération de la boucle, étape A.2. On remplace la ligne 3 avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée.

B. Passage à une forme échelonnée réduite.

Étape B.1, homothéties. On multiplie la ligne 2 par $\frac{1}{2}$ et la ligne 3 par $-\frac{1}{2}$ et l'on obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, première itération. On ne touche plus à la ligne 3 et on remplace la ligne 2 par $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, deuxième itération. On ne touche plus à la ligne 2 et on remplace la ligne 1 par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien échelonnée et réduite.