Université
Internationale
de Casablanca

CPI2 : ANALYSE 4 Pr. H. EL AMRI

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables (8h)

Définition 1.0.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle fonction de plusieurs variables toute application de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.*

$$\left\{\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Exemple 1.0.2.
1. *$f(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier*
2. *$f(x, y) = \frac{x}{y}$ est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.*
3. *$f(x, y, z) = \left(y + \frac{1}{z}\right) \log x$ est une fonction de 3 variables définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.*

Définition 1.0.3. *Soit f une fonction de n variables. On appelle domaine de définition de f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels $f(x)$ existe.*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad tel \quad que \quad f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 1.0.4. *Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :*
1. *$f_1(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$*
2. *$f_2(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$*
3. *$f_3(x) = ln(cos(x))$*

$$D_{f_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y\}$$

$$D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 < 1\} = B(O, 1)$$

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

1.1 Limite

Définition 1.1.1. *Soit f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ soit $x_0 \in \bar{D}$.*
1. *On dit que f converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, c'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0\ , \quad \forall x \in D,\ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{1.2}$$

2. *On dit que f converge vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, c'est à dire :*

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists \eta > 0\ , \quad \forall x \in D,\ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow f(x) > \alpha \tag{1.3}$$

3. *On dit que f converge vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, c'est à dire :*

$$\forall \alpha < 0, \quad \exists \eta > 0 \ , \quad \forall x \in D, \ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow f(x) < \alpha \tag{1.4}$$

Exercice 1.1.2. *Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.*

1. *Donner le domaine de définition de f*
2. *f admet-elle une limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$?*

$$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + ... + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = max\,(|x_i|, \ i = 1, ..., n)$$

1. $$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \neq (0,0)\}$$
2. Sur la première bissectrice $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ et sur la deuxième bissectrice $f(x,-x) = -\dfrac{1}{2}$
   La limite obtenue dépend du chemin suivi. Donc pas de limite.

1.1.1 Quelques propriétés

Théorème 1.1.3. *Soit $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur deux domaines D_1 et D_2 tels que $D_1 \cap D_2$ contient une boule. Soit $x_0 \in \overline{D_1 \cap D_2}$.*

$$Si \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad et \lim_{x\to x_0} g(x) = l', \quad alors \quad \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + l', \quad \lim_{x\to x_0} (fg)(x) = ll'$$

et
Et si $l' \neq 0$ alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

1.2 Continuité

Soit f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ soit $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \ , \quad \forall x \in D, \ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Exercice 1.2.1. *Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x+y$. Montrer que $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ on a $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ c'est à dire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

1.3 Dérivées partielles

1.3.1 Applications partielles

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables. Si on fixe les $n-1$ variables $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ on peut définir les n applications dites applications partielles :
$f_i : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}$

Dans le cas $n = 2$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ on a deux applications partielles $f_1 : x \longrightarrow f_1(x) = f(x, y)$ et $f_2 : y \longrightarrow f_2(y) = f(x, y)$ Par exemple, si $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$$f_1 : x \longrightarrow f_1(x) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f_2 : y \longrightarrow f_2(y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Théorème 1.3.1. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $m_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, les n applications partielles f_i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en x_{0i}.*

On remarquera que la réciproque de ce théorème est fausse, comme le prouve l'exemple suivant :

Exemple 1.3.2. *Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Au point $O(0, 0)$ les deux fonctions partielles f_x et f_y qui sont égales à 0 sont continues ; cependant f n'est pas continue en O : si l'on pose $y = tx$ la limite en O est $\dfrac{t}{1 + t^2} \neq f(0, 0)$ pour $(t \neq 0)$.*

Définition 1.3.3. *Dérivée : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La dérivée de f au point $a \in I$ est donnée par :*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1.6}$$

Définition 1.3.4. *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. On appelle dérivée partielle par rapport à x_i, $(i = 1, ..., n)$ de f en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée de la fonction partielle de f en a_i :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., x_i, ...a_n) - f(a)}{x_i - a_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h_i, ...a_n) - f(a)}{h_i} \tag{1.7}$$

Remarque 1.3.5. *Une fonction peut admettre toutes les dérivées partielles en un point $a \in D$ sans être continue en ce point. Mais :*

Théorème 1.3.6. *(CONDITION SUFFISANTE DE CONTINUITÉ) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que les n fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ soient continues en $a \in D$ alors f est continue en a.*

1.3.2 Gradient

Définition 1.3.7. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in D$*

1. *On appelle gradient de f en a le vecteur*

$$grad f(a) = \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

2. *On appelle divergence de f en a le scalaire*

$$div f(a) = \nabla.f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{1.9}$$

1.4 Différentiabilité

Définition 1.4.1. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow$ une fonction. Soit $x_0 \in D$ tel que il existe une boule $B(x_0, r) \subset D$ On dit que f dérivable ou différentiable au point x_0 si :*

$$\exists (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n \quad telque$$
$$f\left(x_0 + (h_1, h_2, ..., h_n)\right) = f(x_0) + l_1 h_1 + l_2 h_2 + ... + l_n h_n + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h \to (0,0,...,0)} \varepsilon(h) = 0$

Exemple 1.4.2. *La dérivée de $f(x, y) = 3x \cos y + 4y \cos x$ au point $(0, 0)$*

$$f((0,0) + (h,k)) = f(h,k) = 3h \cos k + 4k \cos h = 3h(1 - \frac{k^2}{2} + \varepsilon(k^2)) + 4k(1 - \frac{h^2}{2} + \varepsilon(h^2))$$
$$= 3h - 3h\frac{k^2}{2} + h\varepsilon(k^2) + 4k - 3k\frac{h^2}{2} + k\varepsilon(h^2)$$
$$= 3h + 4k - 3h\frac{k^2}{2} + h\varepsilon(k^2) - 3k\frac{h^2}{2} + k\varepsilon(h^2)$$

1.5 RAPPEL

1. Pour tous $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ on note le produit scalaire de x et y par :
$$x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1,n} x_i y_i$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note sa norme euclidienne par :
$$\|x\| = \sqrt{x.x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$
3. On désigne par $o(h)$ toute fonction $o : h \in \mathbb{R}^n \to o(h) \in \mathbb{R}$ telle que
$$\lim_{h \to 0} o(h) = 0$$

1.5.1 Différentiabilité d'une fonction d'une seule variable

Définition 1.5.1. *Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a - r, a + r[\subset D$. On dit que f est différentaible en a si :*

1. *$\exists l \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a + h \in D$ on a :*
$$f(a + h) = f(a) + lh + ho(h) \qquad avec \ \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$
2. *Le réel l est appelé la dérivée de la fonction f au point a. On le note*
$$l = f'(a).$$
3. *Et la fonction*
$$\begin{cases} f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad a \to f'(a) \end{cases}.$$
est appelée ***la fonction dérivée*** *de la fonction f.*

4. *On a aussi pour tout $x \in D$:*

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)o(x-a) \quad \text{avec} \ \lim_{x \to a} o(x-a) = 0.$$

Remarque 1.5.2. *Si une fonction f est dérivable en un point a alors*

1. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - lh}{h} = \lim_{h \to 0} o(h) = 0$$
2. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l + \lim_{h \to 0} o(h) = l = f'(a)$$
3. *f est continue en a : En effet*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + l(x-a) + (x-a)o(x-a)) = f(a).$$

1.6 Différentiabilité d'une fonction de plusieurs variabes

Définition 1.6.1. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a,r) \subset D$. On dit que f est différentiable en a si :*

1. *$\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in D$ on a :*
2. $$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\| \, o(h) \quad \text{avec} \ \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$
3. *Le vecteur l est appelé dérivée de la fonction f au point a. On le note*

$$L = f'(a).$$

4. *On aura aussi $\forall x \in D$ on a :*

$$f(x) = f(a) + L.(x-a) + \|x-a\| \, o(x-a) \quad \text{avec} \ \lim_{x \to a} o(x-a) = 0.$$

5. *Et on note*

$$f'(a) = \nabla f(a)$$

Remarque 1.6.2. *Si une fonction f est dérivable en un point a alors on :*

1. $$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} |o(h)| = 0$$
2. *f est continue en a : En effet*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + L.(x-a) + \|x-a\| \, o(x-a)) = f(a)$$

1.7 Exemples

Exemple 1.7.1. *On considère la fonction f définie par $f(x,y) = xy$*
On calcule la drivée de f en en un point (a,b) en utilisant la définition

$$f(a+h, b+k) = (a+h)(b+k) = ab + ak + bh + hk$$

$$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}o(h,k) \quad avec \quad o(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

($o(h,k)$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$ (exo))

Conclusion : $f'(a,b) = \nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

Exemple 1.7.2. $f(x,y) = \sin(xy)$

$$f(a+h,b+k) = \sin((a+h)(b+k)) = \sin(ab+ak+bh+hk)$$

$$= \sin(ab)\cos(ak+bh+hk) + \cos(ab)\sin(ak+bh+hk)$$
$$= (\sin(ab)\,(1 - \|(h,k)\|o(h,k)) + \cos(ab)\,(ak+bh - \|(h,k)\|o(h,k))$$
$$= \sin(ab) + \cos(ab)\,(ak+bh) + \|(h,k)\|o(h,k)$$

D'où $\nabla f(a,b) = (b\cos(ab), a\cos(ab))$

1.8 Quelques résultats classiques

Définition 1.8.1. *Soit f une fonction diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On définit*

1. ***Le gradient** de f en a : C'est le vecteur*

$$gradf(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

2. ***La différentiab**le de f en a :*

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n = \sum_{i=1,n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i$$

3. ***La divergence** de f en a :*

$$divf(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \sum_{i=1,n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

4. *On dit que a est un point critique de f si*
$$\nabla f(a) = 0$$

Théorème 1.8.2. 1. *Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors elle est continue en a.*

2. *Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors f admet des dérivées partielles en a et on a :*

$$f'(a) = \nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

3. *Si f est différentiable en a, alors la dérivée selon toute direction $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ (de norme 1) de f en a existe et on a :*

$$f'_v(a) = v.\nabla f(a) = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

4.
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a) = \textit{dérivée selon la direction } e_i = (0,0,...,1,0,0...0)$$

5. *Si f est de classe C^1 dans un voisinage de a (c'est à dire les dérivées partielles existent et sont continues) alors f est différentiable en a.*

1.9 Opérations sur les fonctions différentiables

Théorème 1.9.1. ***Somme, Produit et quotient***

Soient f et g deux fonctions différentiables en un point a. Alors :

1. *$f+g$ est différentiable en a, et on a*

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(a) &= \nabla f(a) + \nabla g(a) \\ d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a) \end{aligned}$$

2. *fg est différentiable en a, et on a*

$$\begin{aligned} \nabla(fg)(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \\ d(fg)(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a) \end{aligned}$$

3. *Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable et on a :*

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g(a)^2} \\ d\left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

Théorème 1.9.2. ***Composées de fonctions différentiables*** *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in D$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable en $f(a)$.*
Alors $\varphi o\, f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et on a

$$(\varphi o f)'(a) = \nabla(\varphi o f)(a) = \varphi'(f(a))f'(a) = \varphi'(f(a))\nabla f(a)$$

1.10 Étude d'une fonction de deux variables

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on étudie une fonction f. Soit $(a,b) \in D_f$ Alors

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + \|(h,k)\|^2 o(h,k)$$

$$= f(a,b) + \nabla f(a,b).(h,k) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

On pose pour simplifier

$$\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\ ,\ \beta = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\ ,\ \gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

Alors

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \nabla f(a,b).(h,k) + \frac{1}{2}(\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2) + RESTE$$

1.11 Points critiques, extremums

Définition 1.11.1. *Soit $f : D \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.*

1. *a est dit extremum local de f si il existe un voisinage V de a*
$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V, \quad maximum \quad relatif$$
ou
$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in V, \quad minimum \quad relatif$$
2. *a est dit extremum absolu de f si :*
$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in D, \quad maximum \quad absolu$$
ou
$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in D, \quad minimum \quad absolu$$
3. *Si f différentiable en a, a est dit point critique de f si $\nabla f(a) = 0$).*

Théorème 1.11.2. *Soit a un point critique d'une fonction f. Alors si $\nabla^2 f(a) \neq 0$ alors a est un extremum de f.*

1.11.1 Nature d'un point critique

Remarque 1.11.3. *Si (a, b) est un point critique alors*
$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= \frac{1}{2}(\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2) + RESTE \\ &= \frac{1}{2}k^2 \left(\alpha \left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2\gamma \frac{h}{k} + \beta \right) + RESTE \end{aligned}$$
On pose $\dfrac{h}{k} = \lambda$ alors
$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}k^2 \left(\alpha\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \beta\right) + RESTE$$
Et la position de $f(a+h, b+k)$ par rapport à celle de $f(a, b)$ ne dépend que du signe du polynôme du deuxième degré
$$\alpha\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \beta$$

Théorème 1.11.4. *Si*
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$
alors

1. *(a, b) est un minimum si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$*
2. *(a, b) est un maximum si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$*

Si
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$
alors le point (a, b) n'est ni maximum ni minimum, $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ change de signe en fonction de λ donc en fonction de h et k.

Exercice 1.11.5. *Que se passe t-il si*
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \quad ?$$

Exercice 1.11.6. *Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes et donner leur nature :*

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $f(ax,y) = y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
7. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$
8. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$
9. $f(x,y) = y(x^2 + (\log y)^2)$ *(donner le domaine de définition)*
10. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Exercice 1.11.7. *Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$*

1. *Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.*
2. *Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.*
3. *Déterminer les points critiques de f.*
4. *Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ.*
5. *En déduire le minimum et le maximum de f sur D.*

Exercice 1.11.8. *Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.*

1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$ *et* $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
2. $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ *et* $K = [0,1] \times [0,1]$
3. $f(x,y) = \sin x \ \sin y \ \sin(x+y)$ *et* $K = [0, \frac{\pi}{2}]^2$

1.12 Intégrations

Définition 1.12.1. *Soit $f : D = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit f est intégrable sur D si*

$$\int_c^d f(x,y)dy \quad \text{existe} \quad \forall x \in [a,b]$$

et

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad \text{existe.}$$

On note :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

1.13 Extrema

Chapitre 2

Courbes et surfaces (6h)

2.1 Intégrales de surfaces

,

2.2 Formes différentielle et intégrales curviligne

Chapitre 3

Notions sur les équations différentielles non linéaires (4h)

3.1 Existence et unicité locale d'une solution du problème de Cauchy

3.2 (Prolongement d'une solution)

Chapitre 4

Transformée de Laplace (6h)

4.1 (Transformée des fonctions usuelles)

4.2 (Transformée des fonctions usuelles)

4.3 (Opérations)

4.4 (Transformée inverse

4.5 (Pôles et zéros)

4.6 (Fonctions de transfert)