Variables aléatoires

Définition : variable aléatoire

Considérons un processus aléatoire d'univers Ω. On appelle variable aléatoire une fonction de l' espace Ω dans R.

En considérant $X(\Omega)$ comme un nouvel univers et $X(w)$ comme la réalisation correspondant à w, on obtient une loi de probabilité sur les sous-ensembles de $X(\Omega)$. Elle est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire.

Exemple : *Considérons une grille de loto remplie et le processus aléatoire correspondant au tirage. Ω est l'ensemble des 6-uplets d'entiers entre 0 et 49.*

Si X est le nombre de bons numéros, $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et la loi de probabilité de X correspond au probabilités d'avoir aucun, un, ... bons numéros.

On pourrait raisonner de même en prenant pour X le gain réalisé.

Fonction de Répartition

Définition : *fonction de répartition*

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F_X définie pour t dans R, par $F_X(t) = P(X \leq t)$. C'est une fonction croissante, tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Autrement dit deux variables aléatoires ayant même fonction de répartition, ont même loi.

VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

- *X est une variable discrète si elle prend un nombre fini ou infini de valeurs distinctes généralement des entiers 0, 1, 2, 3, 4, …*
- *Exemples (comptages)*
- *nombre de défauts de surface ;*
- *nombre de versions d'un dessin de définition pendant une année;*
- *nombre de pièces non conformes dans un lot de 500 ;*
- *nombre de pièces en attente devant une machine;*

Fonction de masse $p_X(x) = P_X(X = x)$

- $p_X(x) \geq 0$
- *Fonction de répartition* $F_X(u) = \Sigma\, p_X(x)$ *Pour tout* $x \leq u$.
- *Distributions importantes Binomiale - Poisson – Hypergéométrique seront étudiées dans un autre chapitre.*

- *Moyenne :* $E[X] = \mu = \Sigma\, x\, p_X(x)$
  premier moment par rapport à l'origine – centre de masse
- *Variance :*

$$Var[X] = \sigma^2 = \Sigma\,(x - \mu)^2 p_X(x) = \Sigma\, x^2 p_X(x) - \mu^2$$

- *Écart type :* $ET[X] = \sigma = \sqrt{Var[X]}$

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

- *L'espace de la variable aléatoire X est un intervalle sur les nombres réels*
- *sa fonction de répartition $F_X(x)$ est dérivable*
- *La dérivée de $F_X(x)$ notée f_X est la densité de X*
- *Exemples :(mesures)*

✓ *volume d'un réservoir d'eau*

✓ *temps requis pour finaliser une conception*

✓ *tension d'un câble métallique*

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$
- $f(x) \geq 0$
- $\int_{Rx} f_x(x)\, dx = 1$
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f x(t)\, dt = \mu$

$VAR[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \right) - \mu^2$

Espérance mathématique:

- *X va discrète* $p_X(x)$*: fonction de masse de X*
- *X va continue* $f_x(x)$ *: densité de X*
- *h fonction de R dans R,* $h : R \to R$
- *espérance mathématique de h* $= E(h(X))$
- *Cas particuliers*
- $h(X) = X$ *: moyenne* μ
- $h(X) = X^2$ *2 ème moment par rapport à l'origine 0*
- $h(X) = (X - \mu)^2$ *variance*
- $h(X) = X^k$ *k - ième moment par rapport à l'origine*
- $h(X) = (X - \mu)^k$ *k–ième moment par rapport à la moyenne* μ*.*

Propriétés:

- $E(a + bX) = a + b\,E(X)$
- $Var(a + bX) = b^2\,var(X)$
- $ET(a + bX) = |b|\;ET(X)$
- *Variable centrée-réduite*

$Z = (X - E(X))\,/\,ET(X)$

✓ *Alors* $E(Z) = 0$

✓ $ET(Z) = 1$

Exemple : *soumission pour la réalisation d'un travail d'ingénierie*

X v.a. « nombre de jours requis pour le travail »

Vous estimez vos « probabilités »

x	***< 3***	***3***	***4***	***5***	***6***	***total***
p(x)	***0***	***1/8***	***4/8***	***2/8***	***1/8***	***1***

Y = profit net = φ (X) dépend du nombre de jours X pour réaliser le travail

x	***3***	***4***	***5***	***6***
Y = φ (x)	***10K$***	***3K$***	***0,7K$***	***-1,5K$***

Profit net moyen = ?

E(Y) = 10K$ *1/8 + 3K$ * 4/8 + 0,7K$ * 2/8 + (-1,5K$) * 1/8 = 2,73K$

Critère de décision :

si E(profit net Y) = profit net moyen ≥ 0 on accepte le travail.