Séries numériques

1 – Généralités

Définition 1 On appelle **série** de terme général U_n la suite (S_n)des sommes partielles

$S_n = U_0 + ... + U_n$. On la note ΣU_n

REMARQUE 1 Les premiers termes de la série sont les $S_0 = U_0$, $S_1 = U_0 + U_1$, $S_2 = U_0 + U_1 + U_2$, $S_3 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3$, etc.

REMARQUE 2 la série peut être définie sur $\mathbb{N}$ ou à partir d'un rang n_0

EXEMPLE 1 La série de terme général $\frac{1}{n}$ est la suite (S_n) des sommes $S_n = U_1 + ... + U_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ Cette série est définie à partir du rang 1, elle est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Définition 2 On dit que la série de terme général U_n est **convergente** si la suite (S_n) est convergente. Dans ce cas, $S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} U_n$ est appelée **somme** de la série. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **divergente**.

Propriété 3 Pour qu'une série converge il faut au moins que son terme général tende vers 0

PREUVE Si $\sum U_n$ converge vers S alors (S_n) converge vers S et (S_{n+1}) aussi. La différence : $S_{n+1} - S_n$ est égale à U_n et tend vers 0.

EXEMPLE 2 : La série $\sum \cos \frac{1}{n}$ diverge car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0$.

REMARQUE 3 lorsque le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

2 – Séries géométriques

Définition 4 On appelle **séries géométriques** les séries de terme général $U_n = q^n$. Le terme q se nomme **la raison** de la série.

EXEMPLE 1 La série de terme général $U_n = \frac{1}{2^n}$

lorsque $q = 1$ alors $S_n = (n + 1)$ donc la suite (S_n) diverge.
lorsque $q = -1$ alors S_n prend alternativement les valeurs 1 et 0 donc (S_n) diverge.
lorsque $|q| > 1$ alors (q^n) diverge donc (S_n) diverge. En effet : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ d'après le cours sur les suites géométriques.
lorsque $|q| < 1$ alors q^n tend vers 0 donc S_n tend vers $S = \frac{1}{1 - q}$

Récapitulons

Propriété 5 Une série géométrique de raison q ne converge que si $|q| < 1$, sa somme est dans ce cas $S = \dfrac{1}{1-q}$

EXEMPLE 2 La série de terme général $U_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge car $q = \dfrac{1}{2}$ vérifie $|q| < 1$. Sa somme est $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$. Ce qui signifie que $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... = 2$

3 – Critères pour les séries à termes positifs

3-1 Généralités

Définition 6 On parle de **série à termes positifs** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq 0$

REMARQUE 1 la définition reste valable si $U_n \geq 0$ à partir d'un certain rang n_0

Dans ce cas la suite des sommes partielles (S_n) est croissante. En effet : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$. Donc il suffit de montrer que (S_n) est majorée pour que (S_n) converge.

Propriété 7 Si $U_n \leq V_n$ et si $\sum V_n$ converge alors $\sum U_n$ converge aussi
Si $U_n \leq V_n$ et si $\sum U_n$ diverge alors $\sum V_n$ diverge aussi

PREUVE Soit $\sum V_n$ une série convergente à termes positifs alors (T_n) définie par $T_n = V_0 + ... + V_n$ converge donc (T_n) est majorée. Il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq M$. Or $U_n \leq V_n$ donc $S_n \leq T_n \leq M$. Finalement (S_n) est croissante et majorée, elle converge.

Soit $\sum U_n$ une série divergente à termes positifs alors (S_n) définie par $S_n = U_0 + ... + U_n$ diverge or (S_n) est croissante donc (S_n) n'est pas majorée. De plus $U_n \leq V_n$ donc $S_n \leq T_n$ donc (T_n) n'est pas majorée, elle diverge.

EXEMPLE 1 : la série de terme général $\dfrac{1}{3^n + n}$ converge car $\dfrac{1}{3^n + n} \leq \dfrac{1}{3^n}$ et $\dfrac{1}{3^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

Propriété 8 Règle de D'Alembert si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = L < 1$ alors la série $\sum U_n$ converge

si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = L > 1$ alors la série $\sum U_n$ diverge

PREUVE admis en BTS

EXEMPLE 2 Soit $\sum \dfrac{1}{n!}$, on a : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 0 < 1$ cette série converge.

REMARQUE 2 cette règle permet de prévoir la convergence mais ne donne pas la valeur de la somme.

REMARQUE 3 cette règle ne permet pas de conclure lorsque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 1$

3-2 Séries de Riemann

Définition 9 On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$

EXEMPLE 3 $\sum \frac{1}{n^2}$ ici $\alpha = 2$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ici $\alpha = \frac{1}{2}$.

Propriété 10 la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$, diverge lorsque $\alpha \leq 1$

EXEMPLE 4 $\sum \frac{1}{n^2}$ ici $\alpha = 2$ elle converge, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ici $\alpha = \frac{1}{2}$ elle diverge, $\sum \frac{1}{n}$ ici $\alpha = 1$ elle diverge.

REMARQUE 1 là encore, on sait si la série converge (ou non) mais on ne connaît pas la valeur de la somme.

PREUVE On encadre l'aire sur la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ où α est un nombre positif. Dans la cas contraire la série diverge grossièrement car son terme général ne tend pas vers zéro. On a :

$\frac{1}{2^\alpha} \times 1 \leq \int_1^2 \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{1^\alpha} \times 1$

$\frac{1}{3^\alpha} \times 1 \leq \int_2^3 \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{2^\alpha} \times 1$

$\frac{1}{4^\alpha} \times 1 \leq \int_3^4 \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{3^\alpha} \times 1$

...

$\frac{1}{n^\alpha} \times 1 \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha} \times 1$

En effectuant la somme, on obtient : $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$

♢ pour $\alpha > 1$, on a : $S_n \leq 1 + \left[\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^n$ donc $S_n \leq 1 + \frac{1}{(\alpha-1)}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \leq 1 + \frac{1}{(\alpha-1)}$ donc (S_n) est majorée or elle est croissante donc elle converge.

♢ pour $\alpha = 1$ on a de la même façon : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n$ donc $\ell n(n+1) \leq S_n$ donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$ la suite (S_n) diverge.

♢ enfin pour $\alpha < 1$, on a : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq S_n$ donc $\frac{1}{(\alpha-1)}(1-0) \leq S_n$ donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$ la suite (S_n) diverge.

Propriété 11 Règle du n^α s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\alpha U_n = L \in \mathbb{R}$ alors $\sum U_n$ converge.
s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\alpha U_n > 0$ alors $\sum U_n$ diverge.

PREUVE admis en BTS

EXEMPLE 5 La série de terme général $\frac{1}{n^2 - 3n + 5}$ converge car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^2 U_n = 1 \in \mathbb{R}$ ici $\alpha = 2 > 1$

EXEMPLE 6 La série de terme général $\frac{1}{5n + \sqrt{n}}$ diverge car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} nU_n = \frac{1}{5} > 0$ ici $\alpha = \frac{1}{2}$