Prise de décision: optimisation en nombres entiers

Mohammed Saddoune

3 novembre 2014

Catégories de contraintes d'intégrité :

- Variables entières générales
  Description : Décision pouvant être représentée par une variable dont la valeur prendra une valeur entière.
  Cas d'application :
  - Décisions de production exprimées en lots
  - Décisions d'affectation d'employés à des quarts de travail
  - Décisions d'allocation de ressources importantes
  - etc.
- Variables binaires
  Description : Décision pouvant être représentée par une variable de type binaire, ou de type booléenne (i.e., 0 ou 1).
  Cas d'application :
  - Décisions de choix
  - Décisions de conception
  - etc.

Impact des décisions

Considérons l'exemple suivant : un plan optimal de production prévoit $\Rightarrow$ 1 054,75 chaises

Deux options possible pour arrondir :

- 1 054 chaises
- 1 055 chaises

Impact : la production d'une chaise supplémentaire n'entraîne pas des conséquences importantes pour l'entreprise en cause.

Impact des décisions

Considérons l'exemple suivant : un plan optimal de production prévoit $\Rightarrow$ 1 054,75 chaises
Deux options possible pour arrondir :

- 1 054 chaises
- 1 055 chaises

Impact : la production d'une chaise supplémentaire n'entraîne pas des conséquences importantes pour l'entreprise en cause.

Impact des décisions

Considérons maintenant l'exemple suivant : un plan optimal de production prévoit $\Rightarrow$ 14,33 maisons.
Deux options possible pour arrondir :

- 14 maisons
- 15 maisons

Impact : la production d'une maison supplémentaire est une décision beaucoup plus lourde de conséquences.
Donc, le fait d'arrondir peut entraîner des conséquences importantes

Impact des décisions

Considérons maintenant l'exemple suivant : un plan optimal de production prévoit $\Rightarrow$ 14,33 maisons.
Deux options possible pour arrondir :

- 14 maisons
- 15 maisons

Impact : la production d'une maison supplémentaire est une décision beaucoup plus lourde de conséquences.
Donc, le fait d'arrondir peut entraîner des conséquences importantes

Répétition des décisions

Description : une décision dont l'impact est faible mais qui est prise de façon répétitive peut entraîner des conséquences importantes à long terme.

Approche simple de résolution :

Considérons le problème :

$\max z = 100x_1 + 150x_2$

sous les contraintes

$$\begin{array}{cccc} 80x_1 & + & 40x_2 & \leq & 400 \\ 15x_1 & + & 30x_2 & \leq & 200 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

x_1, x_2 entiers.

Si on résoud sans l'intégrité :

$x_1 = 2,222$, $x_2 = 5,555$ et $z = 1055,556$

Résolution : **Étape 1** : Arrondir $\Rightarrow$ **Étape 2** : Choisir la meilleure solution

Répétition des décisions (suite)

Approche simple de résolution (suite) :

Façons d'arrondir :

- $(x_1 = 2, x_2 = 5) \Rightarrow$ Réalisable et $z = 950$
- $(x_1 = 2, x_2 = 6) \Rightarrow$ Non-Réalisable, $15(2) + 30(6) = 210 \nleq 200$
- $(x_1 = 3, x_2 = 5) \Rightarrow$ Non-Réalisable, $80(3) + 40(5) = 440 \nleq 400$
- $(x_1 = 3, x_2 = 6) \Rightarrow$ Non-Réalisable, les 2 contraintes technologiques ne sont pas respectées

Parmi les solutions arrondies une seule est réalisable :

$x_1 = 2, x_2 = 5$ et $z = 950$

Par contre, la solution optimale au problème :

$$x_1 = 1, x_2 = 6 \; et \; z = 1000$$

Conclusion :

Arrondir la solution ne permet pas nécessairement d'obtenir la solution optimale et lorsque la taille du problème augmente le nombre de façons d'arrondir devient vite astronomique.

Contexte :

La gestion des revenues implique la gestion des demandes à court terme pour des stocks périssables de façon à maximiser les revenues qui seront réalisés par l'entreprise.
Cas d'application :

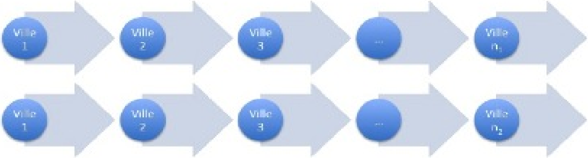
- Compagnies aériennes
- Compagnies de location de voitures
- Compagnies férovières
- etc.

Les grandes lignes : produits ont une durée de vie limitée, demande pour ces produits qui dépend des tarifs.
Question : Comment établir les tarifs de façon à maximiser les revenues ?
Particularités : pricing strategies, overbooking policies, gestion de l'offre.

Contexte des compagnies aériennes :

Ressources:

Planification de vols:



La compagnie Leisure Air :

Contexte :

Ressources :

- Boeing 737-400 (132 places E) ⇒ Pittsburgh
- Boeing 737-400 (132 places E) ⇒ Newark

Leg no.1 : P → C, Leg no.2 : N → C, Leg no.3 : C → M, Leg no.4 : C → O

La compagnie Leisure Air :

Contexte (Suite) :

La compagnie utilise 2 types de forfaits pour la classe économique :

- discount-fare Q
- full-fare Y

Les réservations de type Q doivent-être faites 14 jours avant et impliquent au passager la nuit du samedi suivant à la destination du vol.

Les réservations de type Y peuvent-être faites à tout moments et n'impliquent aucune pénalité si le passager décide de changer la réservation ultérieurement.

L'entreprise cherche à planifier les itinéraires et tarifs à proposer à ses clients.

Chaque produit offert sera identifié :

- ODIF ⇒ Origin-Destination-Intinerary Fare

La compagnie Leisure Air :

No.	ODIF	Prix	Demande Prévue
1	PCQ	178$	33
2	PMQ	268$	44
3	POQ	228$	45
4	PCY	380$	16
5	PMY	456$	6
6	POY	560$	11
7	NCQ	199$	26
8	NMQ	249$	56
9	NOQ	349$	39
10	NCY	385$	15
11	NMY	444$	7
12	NOY	580$	9
13	CMQ	179$	64
14	CMY	380$	8
15	COQ	224$	46
16	COY	582$	10

Modèle :

Définissons :

- P=Pittsburgh,
- N=Newark,
- C=Charlotte,
- O=Orlando,
- M=Myrtle Beach

Variables de décision :

PCQ = nb. de sièges alloués au vol P-C en classe Q
PMQ = nb. de sièges alloués au vol P-M en classe Q
POQ = nb. de sièges alloués au vol P-O en classe Q
PCY = nb. de sièges alloués au vol P-C en classe Y

$\vdots$

NCQ = nb. de sièges alloués au vol N-C en classe Q

$\vdots$

COY = nb. de sièges alloués au vol C-O en classe Y

Modèle :

Fonction objectif :

max $178PCQ + 268PMQ + 228POQ + 380PCY + \ldots + 224COQ + 582COY$

Sous les contraintes :

Capacités des avions :

4 Legs :

P-C : $PCQ + PMQ + POQ + PCY + PMY + POY \leq 132$

N-C : $NCQ + NMQ + NOQ + NCY + NMY + NOY \leq 132$

C-M : $PMQ + PMY + NMQ + NMY + CMQ + CMY \leq 132$

C-O : $POQ + POY + NOQ + NOY + COQ + COY \leq 132$

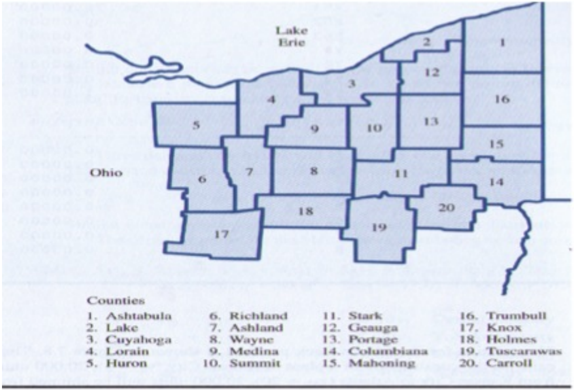
Demandes :

$PCQ \leq 33$	$PMQ \leq 44$	$POQ \leq 45$	$PCY \leq 16$	$PMY \leq 6$	$POY \leq 11$
$NCQ \leq 26$	$NMQ \leq 56$	$NOQ \leq 39$	$NCY \leq 15$	$NMY \leq 7$	$NOY \leq 9$
$CMQ \leq 64$	$CMY \leq 8$	$COQ \leq 46$	$COY \leq 10$		

Non-négativité et intégrité sur l'ensemble des variables.

Problème de localisation : Contexte

La compagnie Ohio Trust cherche à étendre ses opérations dans la région nord-est de l'état de l'Ohio. La région qui est visée comprend 20 comtés :



Problème de localisation : Précision

Les lois régissant les banques dans l'état de l'Ohio précisent que si une banque établit un PPB (principal place of business) dans un comté, celle-ci pourra inclure des succursales dans ce comté et dans les comtés adjacents.
Par contre, pour obtenir un PPB, l'entreprise devra obtenir l'autorisation du surintendant de l'état ou alors acquérir une banque existante.
Première étape dans la planification : Ohio Trust aimerait déterminer le nombre minimum de PPB nécessaires pour opérer sur l'ensemble du territoire considéré

Problème de localisation :

Modèle :

Variables de décision :

$x_i = 1$ si un PPB est établi dans le comté i ; 0 sinon.

Pour $i = 1, \ldots, 20$

Fonction objectif :

Minimiser le nombre de PPB à obtenir

min $x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}$

Sous les contraintes :

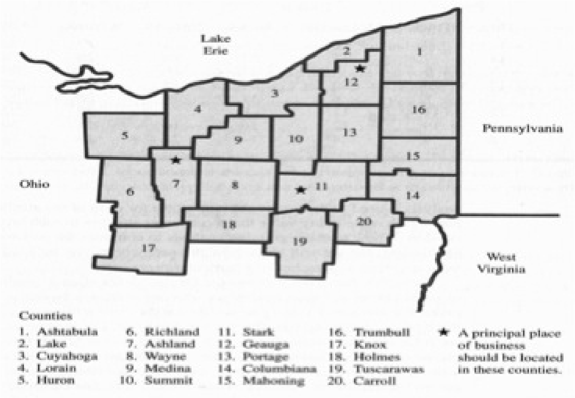
L'entreprise doit couvrir l'ensemble du territoire :

$$\begin{array}{cc}
\text{Ashtabula} & x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1 \\
\text{Lake} & x_1 + x_2 + x_3 + x_{12} \geq 1 \\
\vdots & \vdots \\
\text{Carroll} & x_{11} + x_{14} + x_{19} + x_{20} \geq 1
\end{array}$$

Intégrité : $x_i = 0$ ou 1, $i = 1, \ldots, 20$

Solution optimale

3 points d'installation :



Considérons l'exemple suivant :

Soit le problème d'optimisation (P) défini de la façon suivante :

$\max z = 10x_1 + 50x_2$

sous les contraintes

(1) $-x_1 + 2x_2 \leq 5$

(2) $x_1 + 2x_2 \leq 14$

(3) $x_1 \leq 8$

(4) $x_1, x_2 \geq 0$

(5) x_1, x_2 entiers.

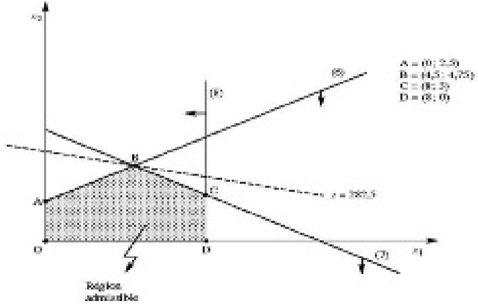
Considérons le problème (P_0) de défini de la façon suivante :

$(P_0) = \max z = 10x_1 + 50x_2$ sous les contraintes (1) à (4).

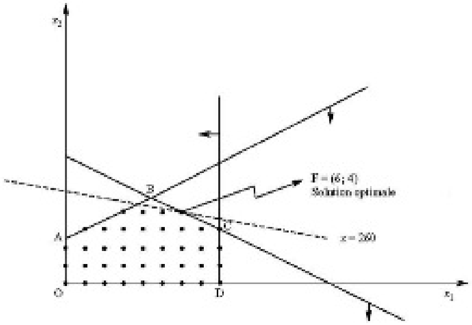
Remarques :

- (P_0) est une **relaxation** de (P)
- (P) est une **restriction** de (P_0)

Résolution graphique (P_0) :



Résolution graphique (P) :



Remarques importantes :

Caractéristiques des solutions :

- Solution optimale de (P0) est un point extrême
- Solution optimale de (P) n'est pas un point extrême

Puisque (P0) est une relaxation de (P) alors :

$$Z_0^* \geq z^* \Rightarrow 282,5 \geq 260$$

Note :

- Lorsqu'on ajoute des contraintes à un modèle de maximisation, la valeur optimale du nouveau modèle est inférieure ou égale à celle du modèle original.
- Lorsqu'on ajoute des contraintes à un modèle de minimisation, la valeur optimale du nouveau modèle est supérieure ou égale

Description

Procédure permettant de résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes d'intégrité en solutionnant de façon itérative des relaxations du problème original (évaluation), tout en éliminant des zones non-admissibles (séparation).

Point de départ :
La solution optimale de (P_0) est (4.5 ; 4.75) pour $Z_0 = 282.5$
Cette solution ne vérifie pas les contraintes d'intégrité :

- $X_1 = 4.5 \neq$ *entier*
- $X_2 = 4,75 \neq$ *entier*

Information sur la valeur optimale du problème (P)
Puisque (P_0) est une relaxation de (P) on peut dire que :
$Z^* \leq Z_0 \ = \ 282.5$

Étape de séparation :

Considérons $X_1 = 4.5$. Sans se tromper on peut affirmer que, à l'optimum :

$$X_1 \leq 4 \text{ ou } X_1 \geq 5$$

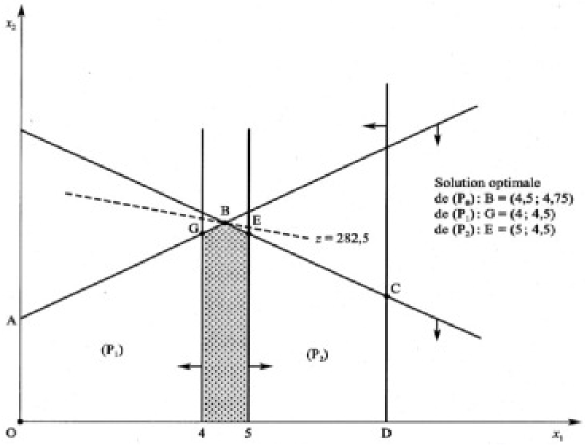
On peut donc diviser le problème (P_0) en deux restrictions :

- $(P_1) : (P_0) + X_1 \leq 4$
- $(P_2) : (P_0) + X_1 \geq 5$

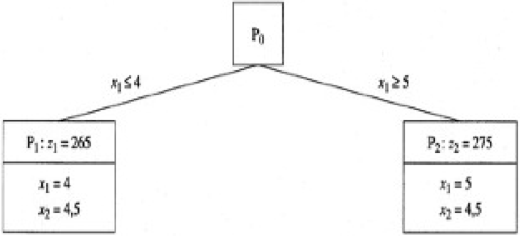
- Ce raisonnement peut également être fait pour $X_2 = 4.75$
- Critères pour le choix de la variable de séparation :

- Var. la plus distante : celle dont la valeur s'écarte le plus de l'entier le plus près.
- Meilleur cj : celle dont le coeff. dans z est le plus élevé dans le cas d'une maximisation (le moins élevé pour une minimisation).

Réprésentation graphique séparation no.1 :



Arbre dénumération après la séparation no.1 :



Étape d'**évaluation** :

Observations :

$(P_1) \Rightarrow (4; 4,5)$ pour $z_1 = 265$

$(P_2) \Rightarrow (5; 4,5)$ pour $z_2 = 275$

La solution optimale de (P) est soit une sol. réalisable de (P_1) ou de (P_2)

Information sur la valeur optimale du problème (P)

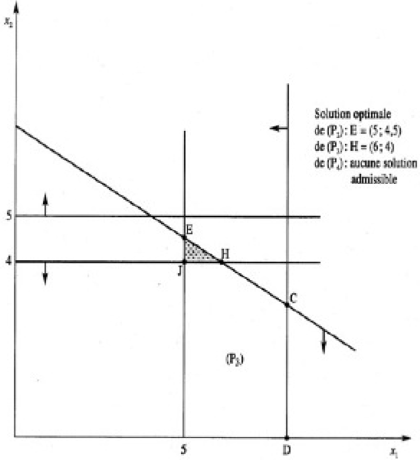
- $z^* \leq z_1$
  ou
- $z^* \leq z_2$

Donc, $z^* \leq \max\{z_1; z_2\} = 275$

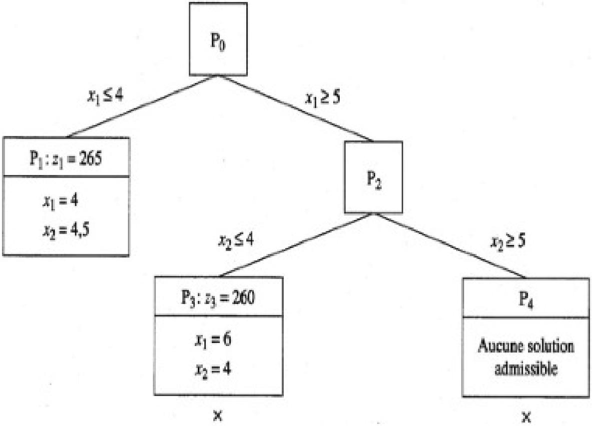
L'étape d'évaluation sert à déterminer à partir de quel noeud sera effectuer la prochaine séparation ?

Parmi les noeuds qui n'ont pas encore été séparés, on va retenir celui qui possède la valeur optimale **la plus élevée** lorsqu'il s'agit d'une **maximisation** (et **la moins élevée** lorsqu'il s'agit d'une **minimisation**)

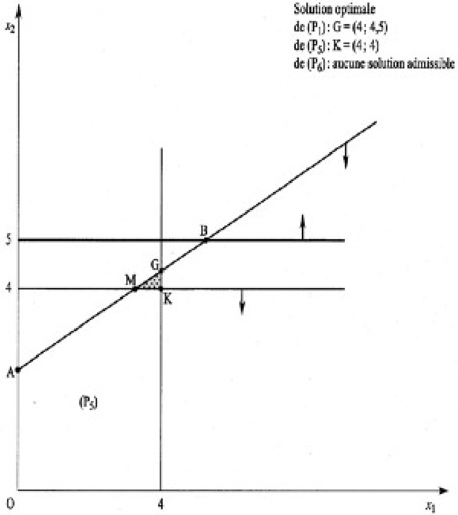
Réprésentation graphique séparation no.2 :



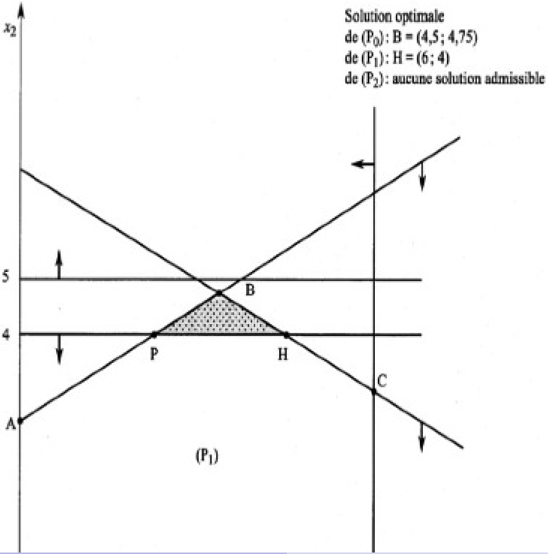
Arbre d'énumération après la séparation no.2 :



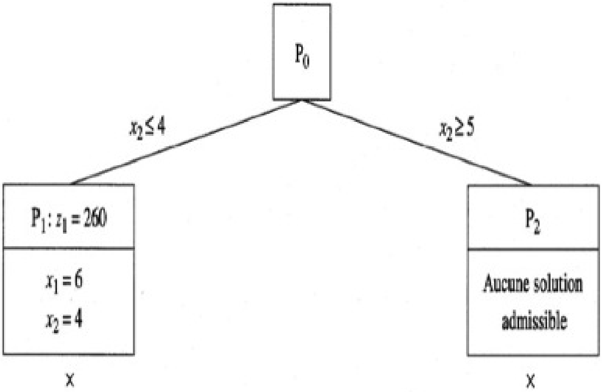
Représentation, séparation no.3 :



Représentation graphique séparation no.1 (meilleur C_j) :



Arbre d'énumération après la séparation no.1 (meilleur C_j) :



Méthode de type Branch and Cut :

Principe général :

- Lorsqu'un sous-problème est résolu au sein de la méthode SÉP, une phase d'amélioration de la borne est appliquée.
- Supposons que la solution obtenue pour le sous-problème est fractionnaire :
- Algorithme de plan coupant :
  - recherche d'une contrainte linéaire satisfaisant toutes les solutions entières du problème, mais violée par la solution fractionnaire courante,
  - ajout de cette contrainte $\Rightarrow$ élimine des solutions non entières

Cet algorithme est appliqué jusqu'au moment où :

- solution entière est obtenue
- aucun plan coupant n'est trouvé