La théorie des probabilités

Chapitre 1: La théorie du dénombrement (Analyse combinatoire)
Chapitre 2: Introduction aux calculs de probabilité.
Chapitre 3: Les variables aléatoires.
Chapitre 4: les lois de probabilité.

Introduction

L'analyse combinatoire ,ou théorie de dénombrement, a pour objet le dénombrement des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

A la base d'un problème de dénombrement, on considère un ensemble de n éléments (population) au sein duquel on prélève p éléments (échantillon) pour former une disposition. Des méthodes appropriées à chaque type de problème permettent de calculer le nombre de disposition différentes de p éléments pris parmi les n dont on dispose.

La réponse à un problème d'analyse combinatoire, dépend à la fois de la structure de l'ensemble de départ, de celles des dispositions que l'on se propose de former et du mode de prélèvement des différents éléments.

Théorème général de dénombrement

Définition 1: On appelle épreuve simple une expérience qui peut aboutir à n résultats possibles.

Exemples:

- *Le lancé d'un dé est une épreuve simple qui conduit 6 résultats possibles 1,2,3,4,5 ou 6.*
- *Le lancé d'une pièce de monnaie est une épreuve simple qui conduit à 2 résultas possibles « Pile » ou « Face ».*

Définition 2: On appelle épreuve complexe une épreuve constituée de k épreuves simples, qui aboutissent respectivement à n1, n2,…nk.

Exemple:

Le lancé d'un dé et d'une pièce de monnaie est une épreuve complexe qui conduit à 12 résultats possibles. Il est à noté que 12 = 6x2.

Le Théorème général De Dénombrement

Le nombre de résultats possible pouvant résulter d'une épreuve complexe constituée de k épreuves simples, qui aboutissent respectivement à $n1, n2, \ldots nk$ est égal à:

$$n = n1 \times n2 \times \ldots \times nk$$

Remarque: Le nombre de résultats possible est par convention appelé nombre de cas possible.

Cas des tirages avec remise

Cette situation est un cas particulier du théorème général de dénombrement.
En effet, dans le cas d'un tirage avec remise l' épreuve complexe devient une épreuve simple répétée k fois et d'après le théorème général de dénombrement son nombre de résultas possibles est:

$$m = n \times n \times \ldots \times n \quad k \text{ fois}$$

Soit:

$$m = n^k$$

Exemples:

a) *On tire successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes. De combien de manière différentes cette épreuve peut-elle se réaliser si les tirages ont lieu avec remise?*

b) *Combien de nombres différents de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 2,5 et6?*

Cas des tirages sans remise

Dans ce cas il faut encore faire la distinction entre les dispositions ordonnées et les dispositions non ordonnées.

Définition 1: Un arrangement de p éléments pris parmi n éléments (ou arrangement de n éléments pris p à p) est une disposition ordonnée de p des n éléments. Chaque élément ne peut figurer qu'une fois dans l'arrangement.

Le nombre des arrangements de p éléments pris parmi n est noté par A_n^p *et est donné par*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Définition 2: Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments (ou combinaison de n éléments pris p à p) est une disposition non ordonnée de p des n éléments. Chaque élément ne peut figurer qu'une fois dans l'arrangement.

Le nombre des arrangements de p éléments pris parmi n est noté par C_n^p *et est donné par*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

[*Travaux dirigés\TD 3.doc*]

Chapitre 2 : Introduction aux calculs de probabilité

Introduction

La théorie des probabilités peut être aborder selon deux approches:

- *L'approche empirique,*
- *L'approche ensembliste.*

Dans ce cours, nous allons adopter l'approche ensembliste.

Terminologie de base

Définition 1: On appelle espace probabilisé E l'ensemble sur lequel va se réaliser l'expérience.

Définition 2: On appelle événement élémentaire un singleton de E.

Définition 3: On appelle événement toute union d'événements élémentaires.

Définition 4: On appelle événements incompatibles A et B deux événements qui n'ont aucun point commun. Autrement dit: A n B= $\varnothing$

Définition 5: on appelle événement complémentaire de A et on note $\bar{A}$ L'événement tel que $A \cup \bar{A} = E$

Définition d'une probabilité

Soit E l'ensemble des événements pouvant résulter d'une expérience.

Une probabilité p est une application « additive » de P(E) à valeurs dans [0,1] et qui vérifie:

1) $p(E) = 1$
2) $p(\varnothing) = 0$.
3) $p(A) = k/n$ où k représente le nombre de cas favorable à la réalisation de l'événement A et n le nombre de cas possible.

L'additivité de p s'exprime de la façon suivante:

Pour tout couple (A,B) d'événements incompatibles de E, on a:

$$\boldsymbol{p}(\quad \cup \quad) = \boldsymbol{p}(\quad) + \boldsymbol{p}(\quad)$$

On démontre que pour tout couple d'éventement (A,B), on a:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Cas particulier: évènements complémentaires.

Pour tout couple $\left(A, \bar{A}\right)$ d'évènements complémentaires on a:

$$p(A) = 1 - p\left(\bar{A}\right)$$

Probabilités conditionnelles

Définition: Soit E un ensemble d'évènements sur lequel on a défini une probabilité. Soient A et B deux évènements de probabilité non nul.
Par définition, on appelle probabilité conditionnelle de B liée par A ou B si A ou B sachant A le rapport:

$$\boldsymbol{p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$$

Remarque: le slash (/) ne veut pas dire fraction

Règle de multiplication:

A partir de la formule des probabilités conditionnelles, on déduit que:

$$p(A \cap B) = p(B/A) x p(A)$$

Événements indépendants:

Dire que B est indépendant de A veut dire que:

$$p(B/A) = p(B)$$

Règle de distribution:

Soit E un ensemble d'évènements (population) sur lequel on a définit deux caractères A et B de modalités respectives $A_1, A_2, \ldots. A_p$ *et* $B_1, B_2, \ldots. B_q$, *on peut écrire alors :*

$$A_i = (A_i \cap B_1) \cup (A_i \cap B_2) \cup (A_i \cap B_3) \cup \ldots. \cup (A_i \cap B_q)$$

Soit : $$A_i = \bigcup_{j=1}^{j=q} (A_i \cap B_j)$$

Il vient donc que :

$$p(A_i) = \sum_{j=1}^{j=q} p(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{j=q} p(A_i / B_j) \times p(B_j)$$

Théorème de Bayes

Soit E un ensemble d'évènements (population) sur lequel on a définit deux caractères A et B de modalités respectives $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *et* $B_1, B_2, \ldots, B_q$, *on peut écrire alors :*

$$p\left(A_i / B_j\right) = \frac{p\left(A_i\right) \times p\left(B_j / A_i\right)}{\sum_{k=1}^{k=q} p\left(A_k\right) \times p\left(B_j / A_k\right)}$$

Chapitre 3 : les variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire discrète

Soit un espace probabilisé fini E. on appelle variable aléatoire réelle X toute application de E à valeur dans le corps $\Re$

$$X : E \to \Re$$
$$e_i \to X(e_i) = x_i$$

Exemple:

Une urne contient une boule blanche, trois noirs et six rouges. On gagne cent dirhams quand on tire une boule blanche, vingt dirhams une boule noire et zéro dirhams une boule rouge.

Le gain possible est une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs discrètes: $X_1 = 100$, $X_2 = 20$ et $X_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
X: \quad E &\rightarrow \Re \\
B &\rightarrow X(B) = 100 \\
N &\rightarrow X(N) = 20 \\
R &\rightarrow X(R) = 0
\end{aligned}
$$

Loi de probabilité

Étant donné un espace probabilisé E et une variable aléatoire X définie sur E. l'application qui à tout élément xi de X associe le nombre P(X=xi) défini par:

$$P(X = x_i) = p(e_i \in E / X(e_i) = x_i)$$

Constitue la loi de probabilité ou distribution de probabilité de la variable aléatoire X.

Exemple:

Reprenons l'exemple précédent :

on a $E = \{1B; 3N; 6R\}$ et $Card\ E = 10;$

$\otimes$ La probabilité définie sur E est caractérisée par : $p(B) = \frac{1}{10}$; $p(N) = \frac{3}{10}$ et $p(R) = \frac{6}{10}$

$\otimes$ La variable aléatoire est définie par : $X : \quad E \to \Re$

$$\begin{aligned} B &\to X(B) = 100 \\ N &\to X(N) = 20 \\ R &\to X(R) = 0 \end{aligned}$$

$\otimes$ La loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = 100) = p(e_i / X(e_i) = 100) = p(B) = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 20) = p(e_i / X(e_i) = 20) = p(N) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 0) = p(e_i / X(e_i) = 0) = p(R) = \frac{6}{10}$$

Espérance mathématique

Définition 1 : On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X le nombre noté $E(X)$ et qui est donné par la formule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p_i$$

où x_i est une valeur de la variable et $p_i = P(X = x_i)$

Exemple:

Un monsieur offre à 100 personnes de jouer simultanément au jeu qui consiste à tirer une boule d'une urne contenant 5 boules blanches, 10 jaunes, 15 vertes, 20 rouges et 50 noires.

Si un joueur tire une boule blanche il gagne 1000 dh, jaune 500 dh, verte 200 dh, rouge 100 dh et noire zéro dh.

A combien doit s'élever la mise pour que l'organisateur de ce jeux, ne perd rien?

$E = \{5B, 10J, 15V, 20R, 50N\}$ $\quad CardE = 100$

$\otimes$ La probabilité sur E est donné par : $p(B) = \frac{5}{100}$; $p(J) = \frac{10}{100}$; $p(V) = \frac{15}{100}$; $p(R) = \frac{20}{100}$ et $p(N) = \frac{50}{100}$

$\otimes$ La variable aléatoire est définie par : $X : E \rightarrow \Re$

$$B \rightarrow X(B) = 1000 = x_1$$
$$J \rightarrow X(J) = 500 = x_2$$
$$V \rightarrow X(V) = 200 = x_3$$
$$R \rightarrow X(R) = 100 = x_4$$
$$N \rightarrow X(N) = 0 = x_5$$

$\otimes$ La loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = 1000) = p(e_i / X(e_i) = 1000) = p(B) = \frac{5}{100}$$

$$P(X = 500) = p(e_i / X(e_i) = 500) = p(J) = \frac{10}{100}$$

$$P(X = 200) = p(e_i / X(e_i) = 200) = p(V) = \frac{15}{100}$$

$$P(X = 100) = p(e_i / X(e_i) = 100) = p(R) = \frac{20}{100}$$

$$P(X = 0) = p(e_i / X(e_i) = 0) = p(N) = \frac{50}{100}$$

$\otimes$ L'espérance mathématique est donnée par : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=5} p_i \times x_i$ soit :

$$E(X) = 1000 \times \frac{5}{100} + 500 \times \frac{10}{100} + 200 \times \frac{15}{100} + 100 \times \frac{20}{100} + 0 \times \frac{50}{100} = 150 \text{ dh}$$

Remarquons que pour faire face au paiements des lots, l'organisateur du jeu devra disposer de 15.000 dh; et que en conséquence, il devra élever la mise à au moins 150 dh par personne (s'il veut dégager un bénéfice).
Ainsi, l'espérance mathématique, dans notre exemple, se trouve être la Somme que doit donner un joueur pour que la vente des boules permette le paiement de tous les lots.
Conclusion: l'espérance mathématique est une moyenne arithmétique.

Propriétés de l'espérance mathématique:

1) Soient a et b deux constantes et X une variable aléatoire:

$$E(aX+b) = a\,E(X) + b$$

2) Soient X et y deux variables aléatoires:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Variance et écart type

Définition 1: La variance d'une variable aléatoire X est l'espérance mathématique des carrés des écarts à l'espérance mathématique. Elle est donnée par la formule suivante:

$$V(X) = \sum p_i \times \left(x_i - E(X)\right)^2$$

Définition 2: L'écart type est la racine carrée de la variance.

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

Remarque:

On démontre que (formule simplifiée):

$$V(X) = \sum p_i \times x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$$

Propriétés de la variance:

1) *Soient a et b deux constantes et X une variable aléatoire:*

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

2) *Soient X et y deux variables aléatoires:*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

La loi binomiale

Une variable aléatoire suit une loi binomiale si les conditions suivantes sont vérifiées:

1) Avoir deux épreuves complémentaires.
2) La probabilité des évènements reste constante au cours de l'épreuve.
3) Les évènements sont indépendants
4) L'épreuve se fait avec remise.

Exemple : on lance 5 fois un dé et on s' attache au nombre de sortie du chiffre "1".
Soit l' évènement A = " sortie du chiffre 1".

la probabilité de A et de $\overline{A}$ sont comme suit : $p(A)=\frac{1}{6}$ *et* $p\left(\overline{A}\right)=\frac{5}{6}$.

L' évènement A peut se produire 1,2,3,4 ou 5 fois au cours de l' expérience.
le nombre d' apparution du chiffre 1 est une variable alèatoire X. Déterminons sa loi de probabilité :

$$p(X=0)=C_5^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5;$$

$$p(X=1)=C_5^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4;$$

$$p(X=2)=C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3;$$

$$p(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2;$$

$$p(X=4)=C_5^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1;$$

$$p(X=5)=C_5^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0.$$

Loi de probabilité d'une loi binomiale:

De façon générale si l'on procède à n expérience (ici n=5), si l'on s'attache à la réalisation d'un événement de probabilité p (ici p=1/6) et que l'on cherche la probabilité de voir au cours de ces n expériences l'événement en question se réaliser k fois on aura:

$$p(X = k) = p_k = C_n^k p^k q^{(n-k)} \qquad (q = 1 - p)$$

Une pareille loi de probabilité qui s'attache à une variable aléatoire discrète et dont les probabilités s'obtiennent à l'aide des coefficients du binôme de Newton est dite la loi Binomiale.

Remarques:

1. La loi binomiale dépend de deux paramètres:

n: Le nombre de lancer, de tirages ou d'épreuves indépendants.

p: La probabilité de l'événement étudié lors de chacun des lancers, tirages ou épreuves indépendantes.

2. On note $X \longrightarrow \boldsymbol{B(n,p)}$ *pour indiquer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p.*

Valeurs caractéristiques d'une loi binomiale

Espérance mathématique

Dans le cas d'une loi binomiale, on démontre que:

$$E(X)=np$$

Variance et écart type

On montre que:

$$V(X)=npq$$

$$\sigma=\sqrt{npq}$$

La loi de Poisson

La loi de Poisson est caractérisée par la probabilité minime. C'est la loi de probabilité rare.

Elle convient à la description des événements dont les chances de réalisation sont faibles.

Comme dans le cas de la distribution binomiale, il est nécessaire pour que la loi s'applique que la probabilité reste constante.

Définition

La variable de Poisson X est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs X = 0, 1, 2, 3, …….avec les probabilité

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k}}{k!}$$

Symboliquement on notera X = P(λ) pour indiquer que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ

Valeurs caractéristiques d'une loi de Poisson

Espérance mathématique

Dans le cas d'une loi de Poisson, on démontre que:

$$E(X) = \lambda$$

Le paramètre de la loi de Poisson a donc une signification particulière: c'est la moyenne de la distribution.

Variance et écart type

On montre que:

$$V(X) = \lambda$$

Le paramètre de la loi de Poisson a donc une double signification, il est égale à la fois à la moyenne de la distribution et à sa variance.

Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson

En pratique, les critères à partir desquels on peut approximer une loi Binomiale par une loi de Poisson sont les suivants:

1) $n \geq 50$ et $np \leq 10$

ou

2) $P \leq 1/10$ et $np \leq 10$