Exposé

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

email : nasser_baghdad @ yahoo.fr

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

Sommaire

Chapitre. III

Les portes logiques

Chapitre III : Les portes logiques

I. Les portes logiques de base

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Porte ET (AND)

2°) Porte OU$_{\text{inclusif}}$ (OR)

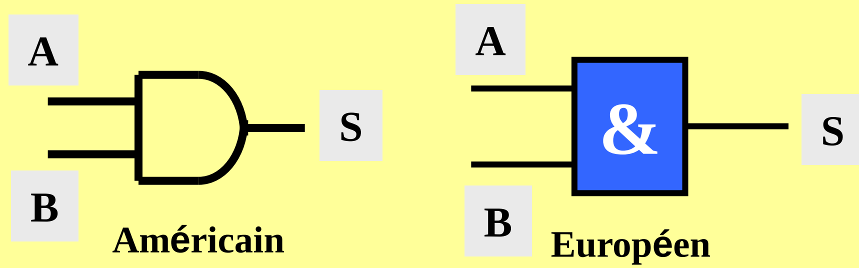
3°) Porte NON (NOT)

4°) Porte OUI (YES)

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Porte ET (AND)

Symbole logique



Deux entrées au minimum

Table de vérité

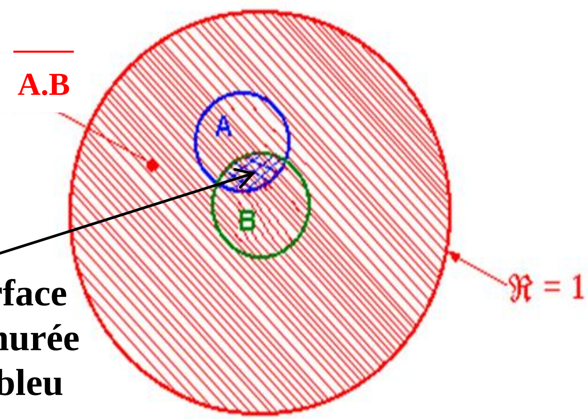
Entrée		sortie
A	B	A ET B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Équation logique

$$S = A \cdot B$$

S se lit A fois B

Représentation d'Euler

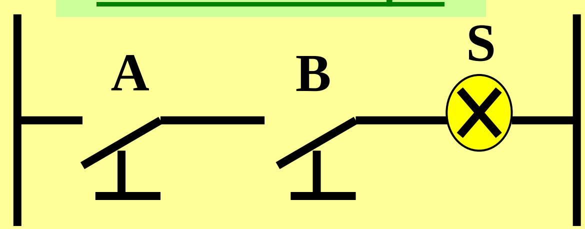


A.B
Surface hachurée en bleu

Notation

" . "

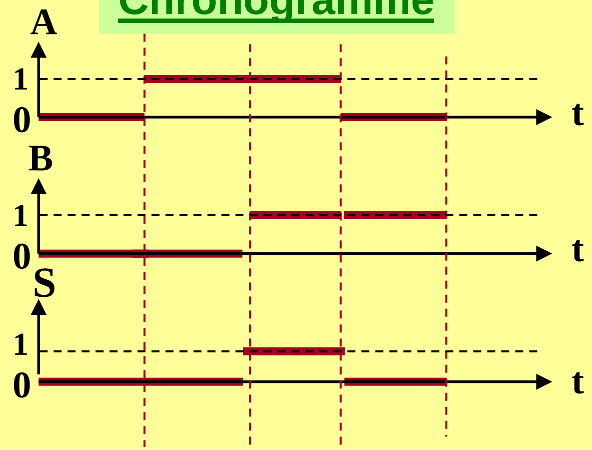
Circuit électrique



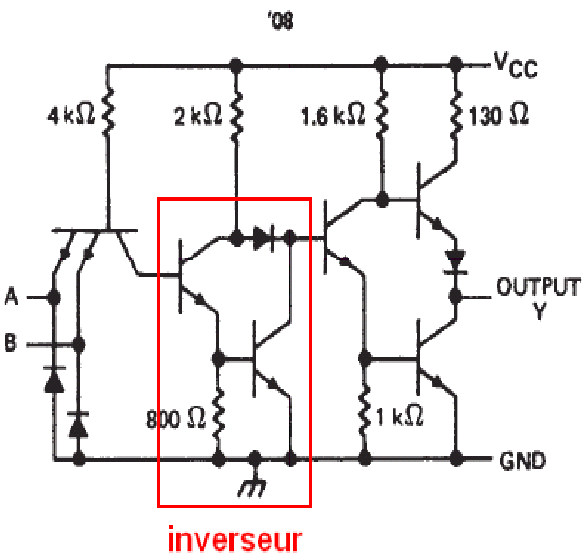
Interrupteur normalement ouvert

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

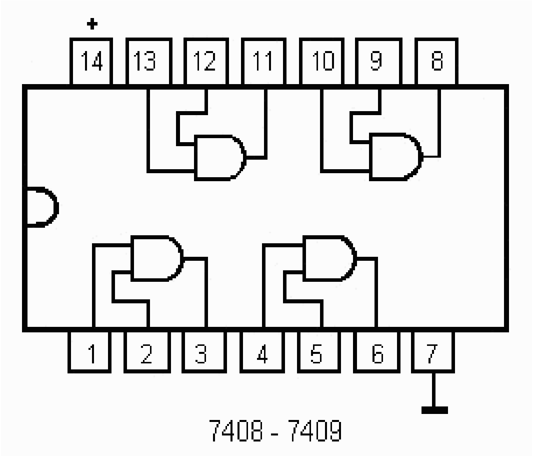


Synoptique du CI « AND »

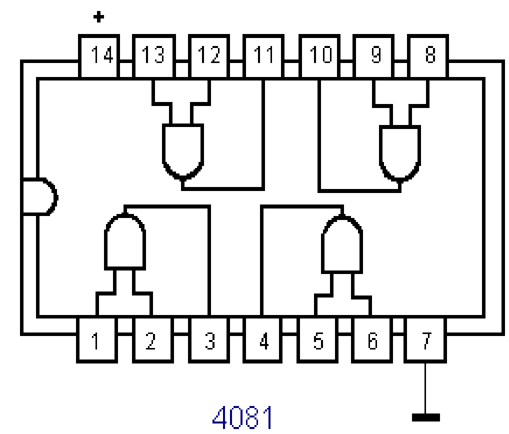


Circuit intégré logique

brochage TTL



brochage CMOS



Propriétés de AND

(A . B) . C = A . (B . C) = A . B . C	Associativité
A . B = B . A	Commutativité
A . A = A	Idempotence
A . 1 = A	Élément neutre
A . 0 = 0	

Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction ET

$$S = A \ \ ET \ \ B$$

Je vais au cinéma ce soir si Ali et Samir viennent avec moi.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Ali ne vient pas : A = 0
Ali vient : A = 1

Samir ne vient pas : B = 0
Samir vient : B = 1

Pas de sortie cinéma : S = 0
Sortie cinéma : S = 1

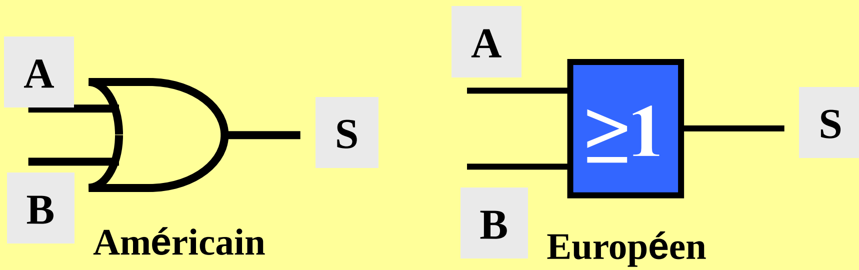
Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	A ET B
ne vient pas	ne vient pas	pas de cinéma
ne vient pas	vient	pas de cinéma
vient	ne vient pas	pas de cinéma
vient	vient	cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

2°) Porte OU$_{\text{inclusif}}$ (OR)

Symbole logique



Deux entrées au minimum

Table de vérité

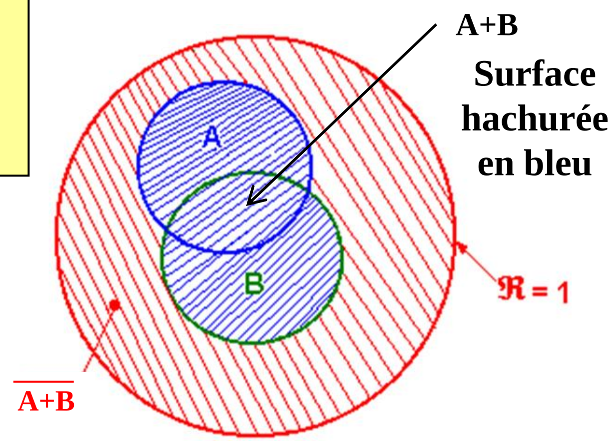
Entrée		sortie
A	B	A OU B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Équation logique

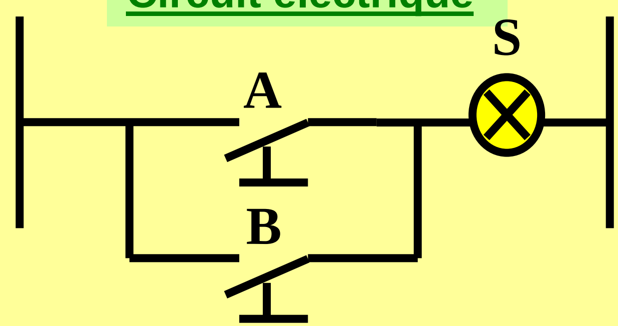
$$S = A + B$$

S se lit A plus B

Représentation d'Euler



Circuit électrique



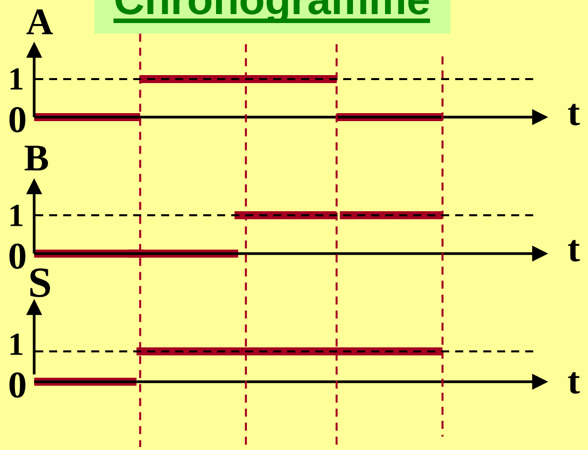
Interrupteur normalement ouvert

Notation

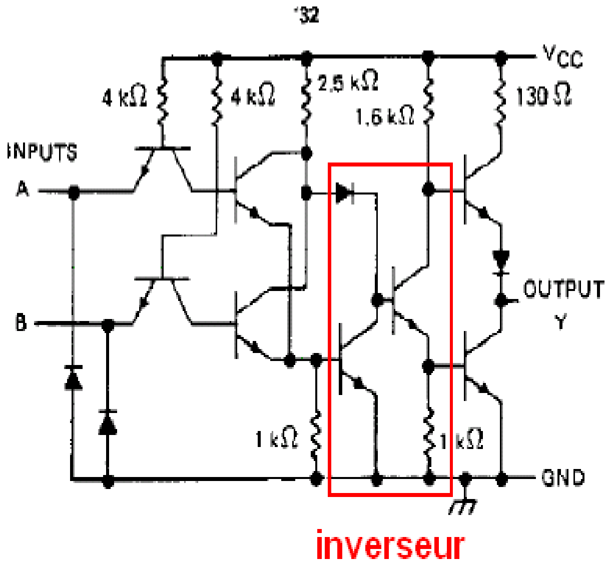
"+"

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

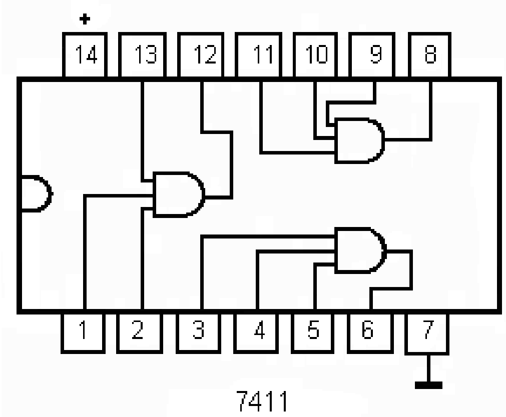


Synoptique du CI « OU »

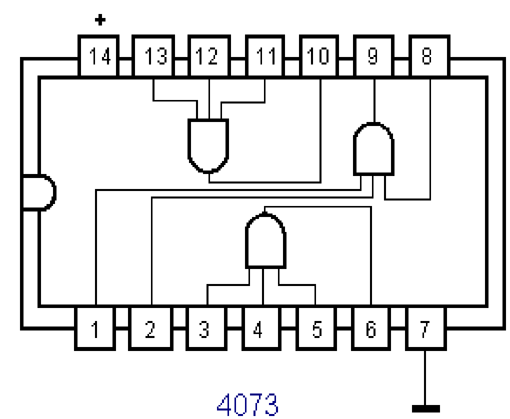


Circuit intégré logique

brochage TTL



brochage CMOS



Propriétés de OU

(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C	Associativité
A+B = B+A	Commutativité
A+A = A	Idempotence
A + 0 = A	Élément neutre
A + 1 = 1	

Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction OU

$$S = A \ OU \ B$$

Je vais au cinéma ce soir si Ali ou Samir viennent avec moi.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Ali ne vient pas : A = 0
Ali vient : A = 1

Samir ne vient pas : B = 0
Samir vient : B = 1

Pas de sortie cinéma : S = 0
Sortie cinéma : S = 1

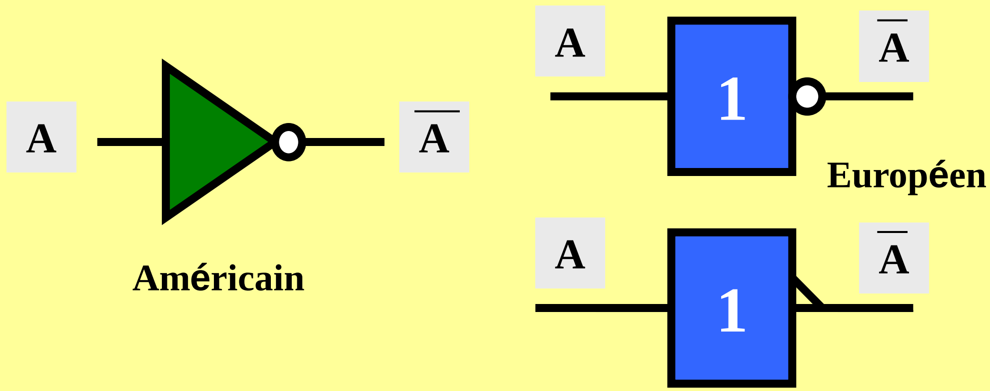
Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	A ET B
ne vient pas	ne vient pas	pas de cinéma
ne vient pas	vient	cinéma
vient	ne vient pas	cinéma
vient	vient	cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

3°) Porte NON (NOT)

Symbole logique



Une seule entrée

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	$S = \overline{A}$
0	1
1	0

Équation logique

$$S = \overline{A}$$

ou

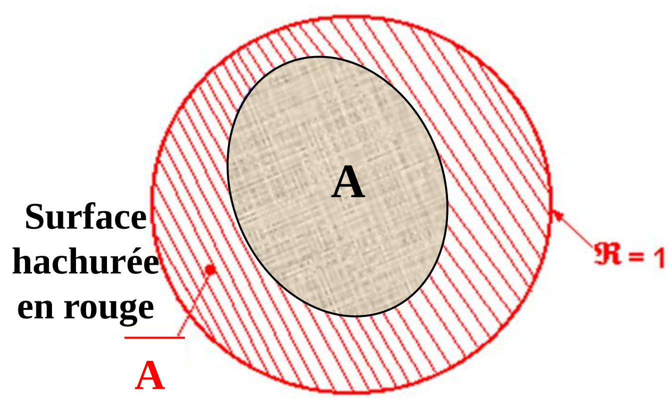
$$S = \underline{A}$$

S se lit A barre

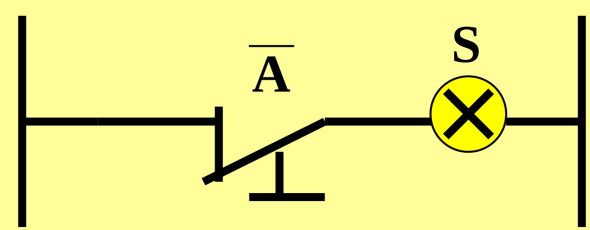
Complément de A

Négation de A

Représentation d'Euler



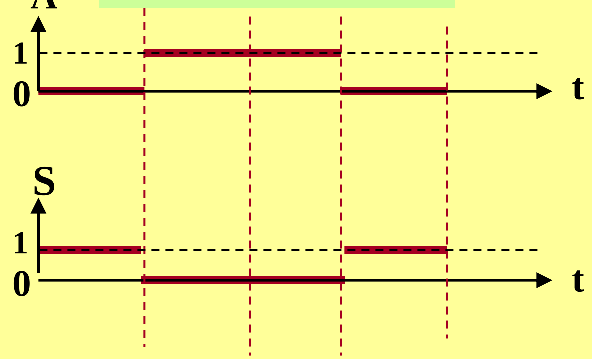
Circuit électrique



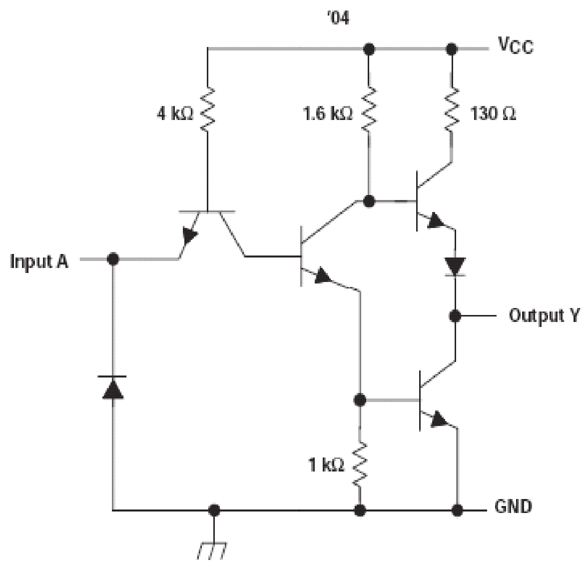
Interrupteur normalement ouvert

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

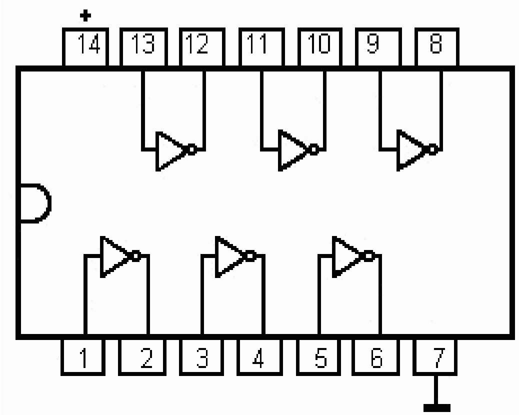


Synoptique du CI « NOT »



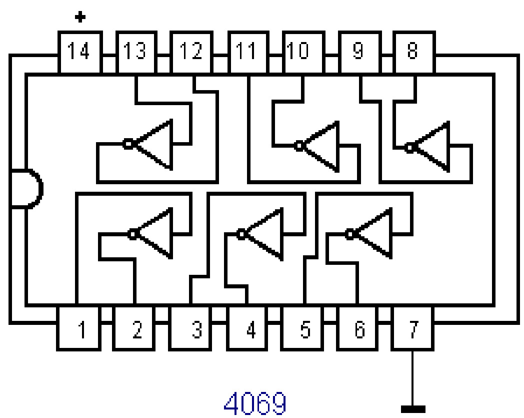
Circuit intégré logique

brochage TTL

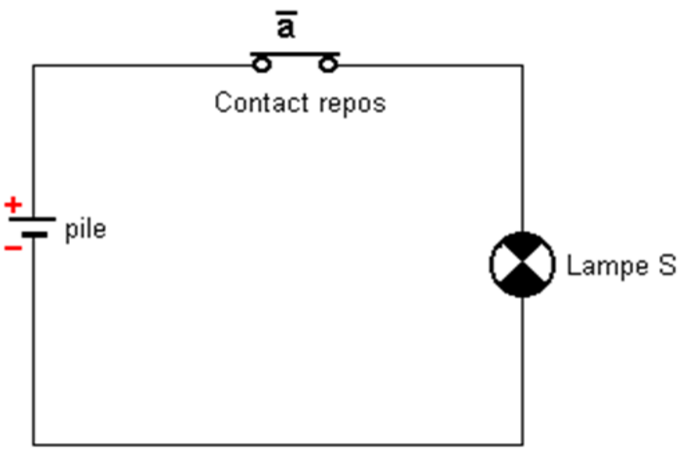


7404 - 7405 - 7406 - 7416

brochage CMOS



Circuit électrique



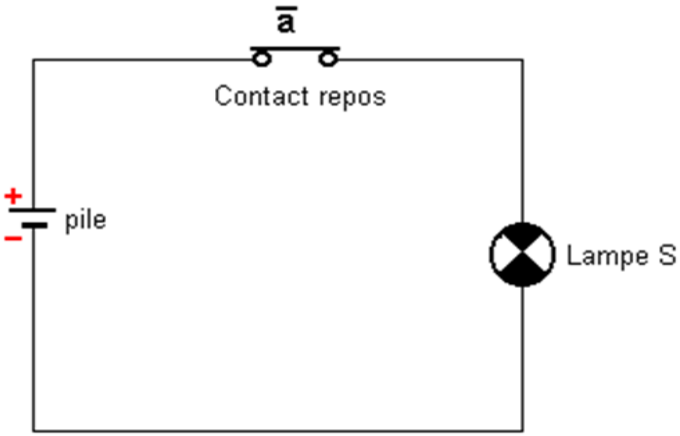
Propriétés de NOT

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A} + A = 1$$

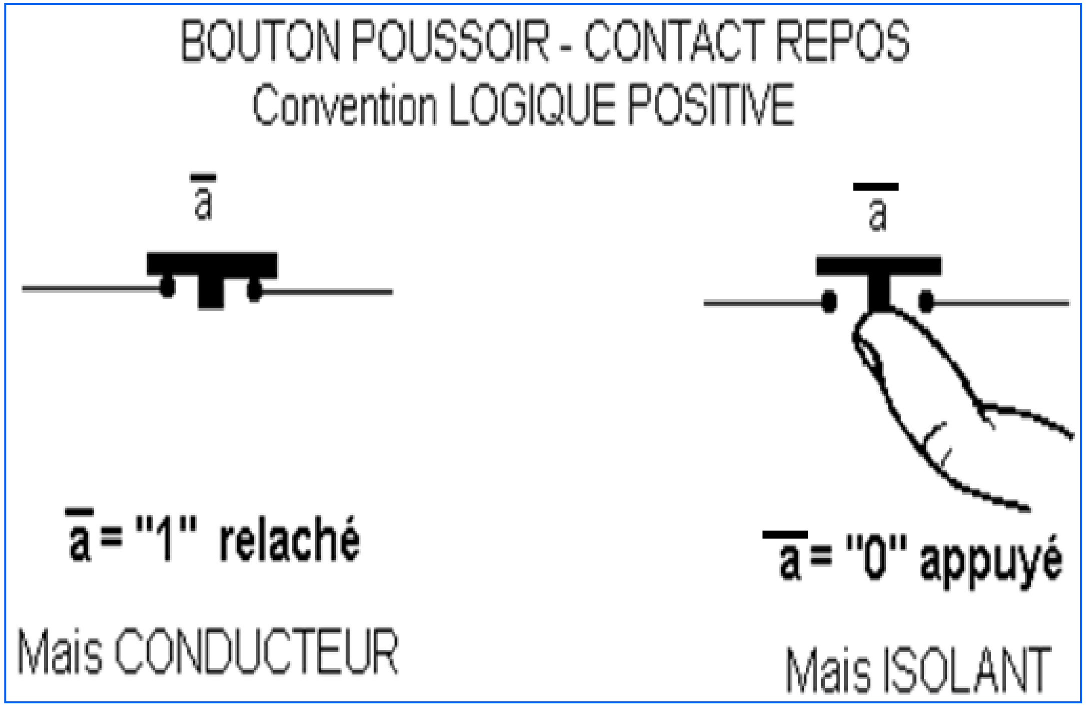
$$\overline{A} \cdot A = 0$$

Chapitre III : Les portes logiques



Montage fonction NOT

Illustration de l'état logique



$\bar{a}$	S
0	0
1	1

Table de vérité de la fonction NOT

Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction NON $S = \overline{A}$

Je ne vais pas au cinéma ce soir Amina vient.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Amina ne vient pas : A = 0
Amina vient : A = 1

Pas de sortie cinéma : S = 0
Sortie cinéma : S = 1

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	$S = \overline{A}$
ne vient pas	cinéma
vient	pas de cinéma

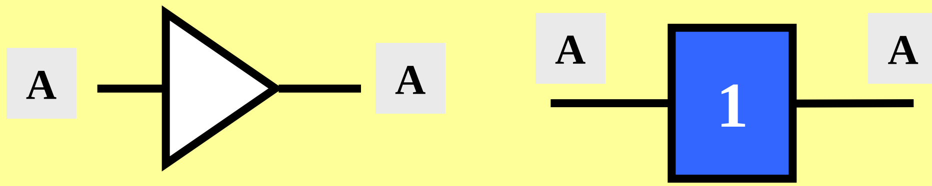
Chapitre III : Les portes logiques

4°) Porte OUI (YES)

« Buffer ou Tampon »

Dispositif d'adaptation

Symbole logique



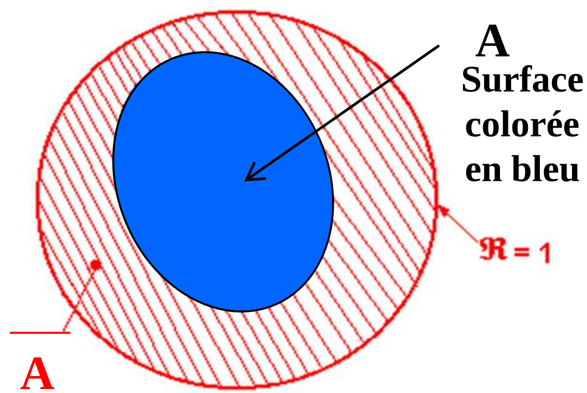
Américain

Européen

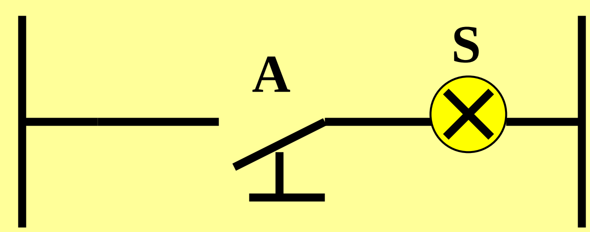
Table de vérité

Entrée	Sortie
A	S = A
0	0
1	1

Représentation d'Euler



Circuit électrique



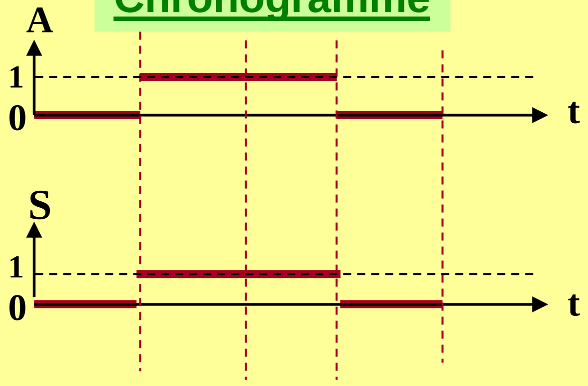
Équation logique

$$S = A$$

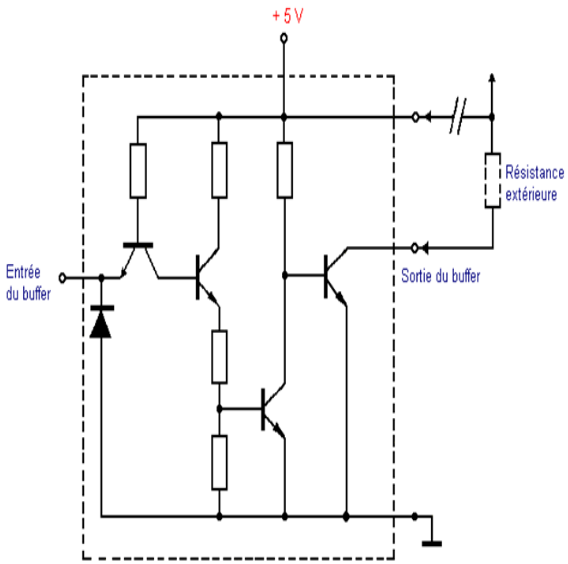
S se lit A

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

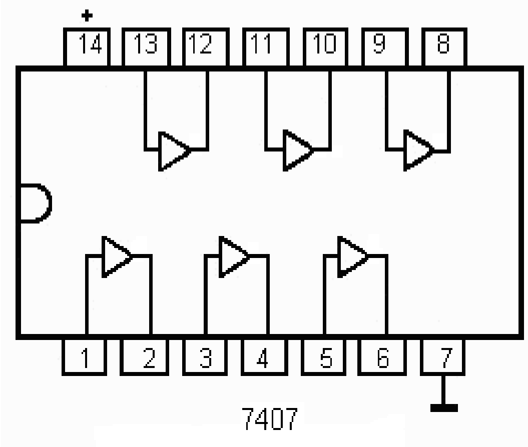


Synoptique du CI « YES »

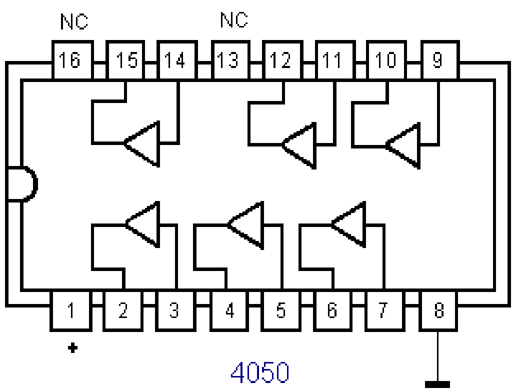


Circuit intégré logique

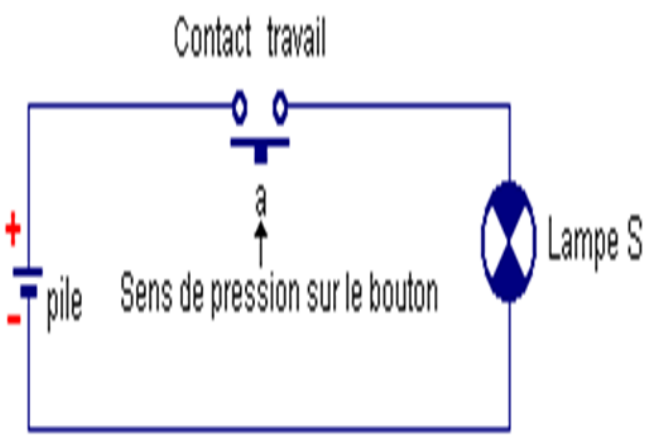
brochage TTL



brochage CMOS



Circuit électrique



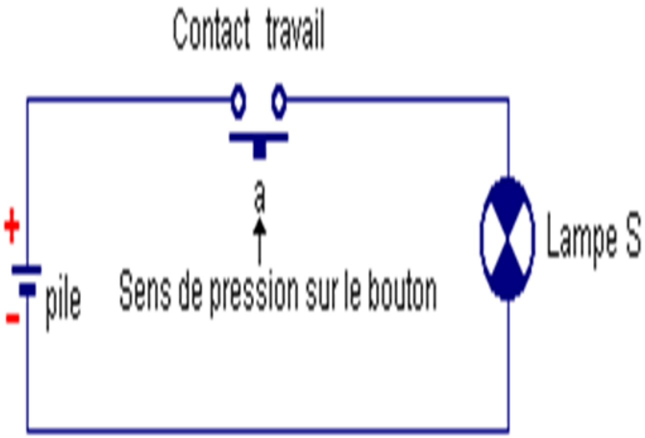
Propriétés de YES

$$A = A$$

$$A + A = A$$

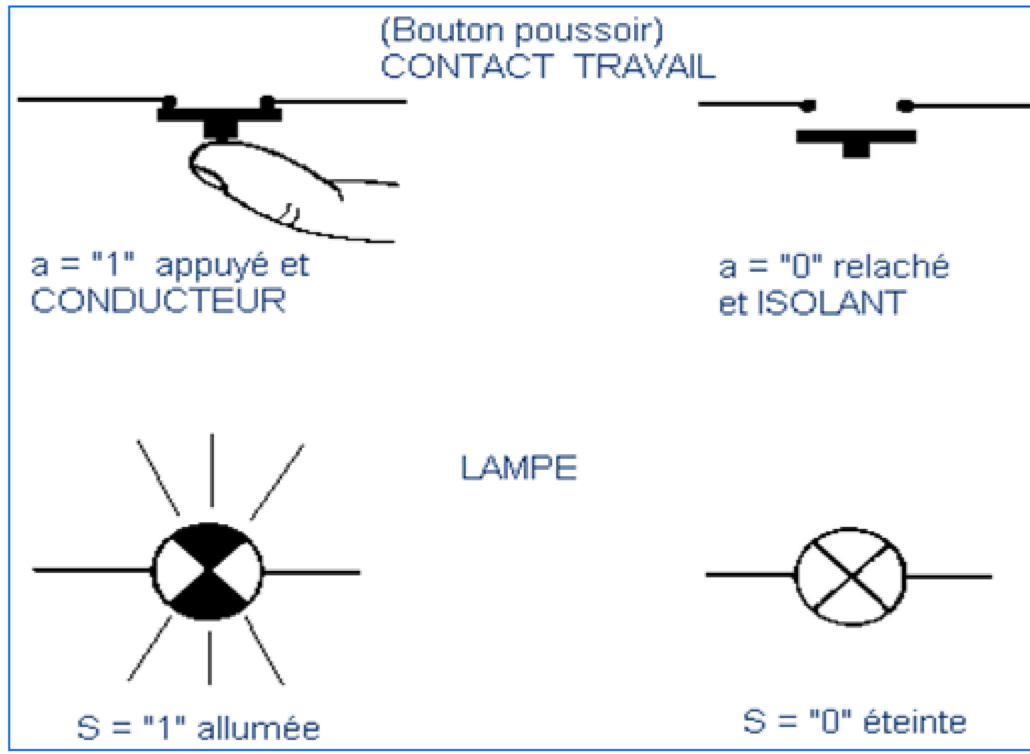
$$A \cdot A = A$$

Chapitre III : Les portes logiques



Montage fonction YES

Illustration de l'état logique



a	S
0	0
1	1

Table de vérité de la fonction YES

Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction YES $\boxed{S = A}$

Je ne vais au cinéma ce soir que si Amina vient.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Amina ne vient pas : A = 0
Amina vient : A = 1

Pas de sortie cinéma : S = 0
Sortie cinéma : S = 1

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	$S = A$
ne vient pas	pas de cinéma
vient	cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

Remarque :

► Les opérateurs AND et OR sont distributives

Distribution

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

Propriétés d'absorption

$A + (A \cdot B) = A$
$A \cdot (A + B) = A$
$(A + B) \cdot (A + \underline{B}) = A$

Conséquence de la distribution

$A + \underline{A} \cdot B = A + B$
$\underline{A} + A \cdot \underline{B} = \underline{A} + \underline{B}$

II. Théorèmes de De Morgan

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Théorèmes de De Morgan

2°) Notions sur les ensembles (algèbre logique)

3°) Représentation d'Euler

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Théorèmes de De Morgan

► De Morgan a exprimé <u>deux théorèmes</u> qui peuvent s'énoncer comme suit :

Théorèmes :

$$\underline{1^{er}\ Thérème} : \quad \overline{A+B} = \overline{A}\bullet\overline{B}$$

$$\underline{2^{ème}\ Théorème} : \quad \overline{A\bullet B} = \overline{A}+\overline{B}$$

► Ils expriment la règle d'inversion de la logique positive vers la logique négative et vice versa.

Généralisation à n entrées :

$$\underline{1^{er}\ Thérème} : \quad \overline{A+B+C+....} = \overline{A}\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}\bullet....$$

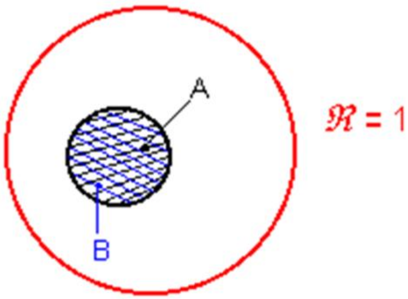
$$\underline{2^{ème}\ Théorème} : \quad \overline{A\bullet B\bullet C\bullet ....} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+....$$

Double négation (ou double complémentation) :

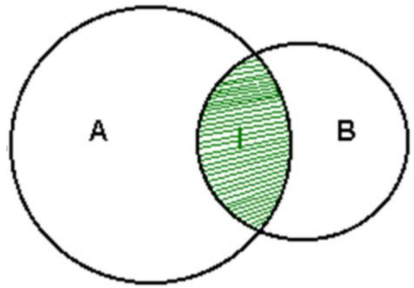
$$A\bullet B = \overline{\overline{A\bullet B}} = \overline{\overline{A}+\overline{B}} = A\bullet B$$

$$A+B = \overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A}\bullet\overline{B}} = A+B$$

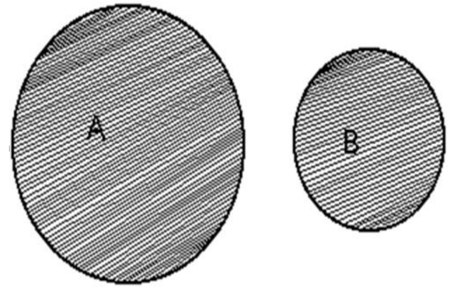
2°) Notions sur les ensembles (algèbre logique)



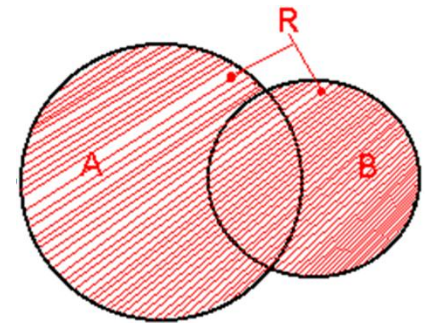
deux variables égales
A = B



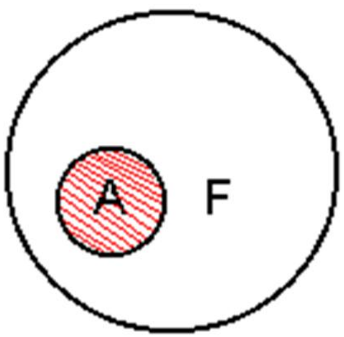
Intersection
de deux ensembles
$A \cap B$



Ensembles
Disjoints
$A \neq B$



Réunion
de deux ensembles
A u B



Ensemble inclus
dan un autre ensemble
A c B

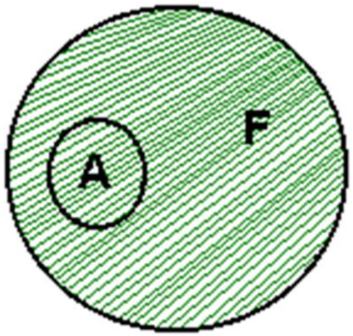


Illustration
A . F = A

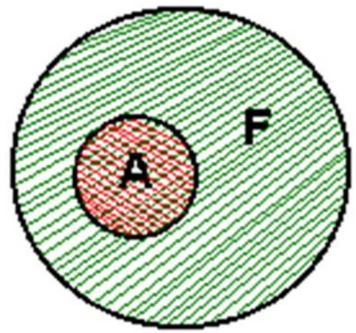
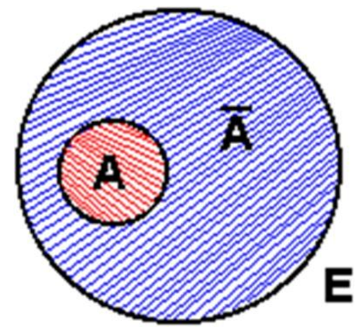


Illustration
A + F = F



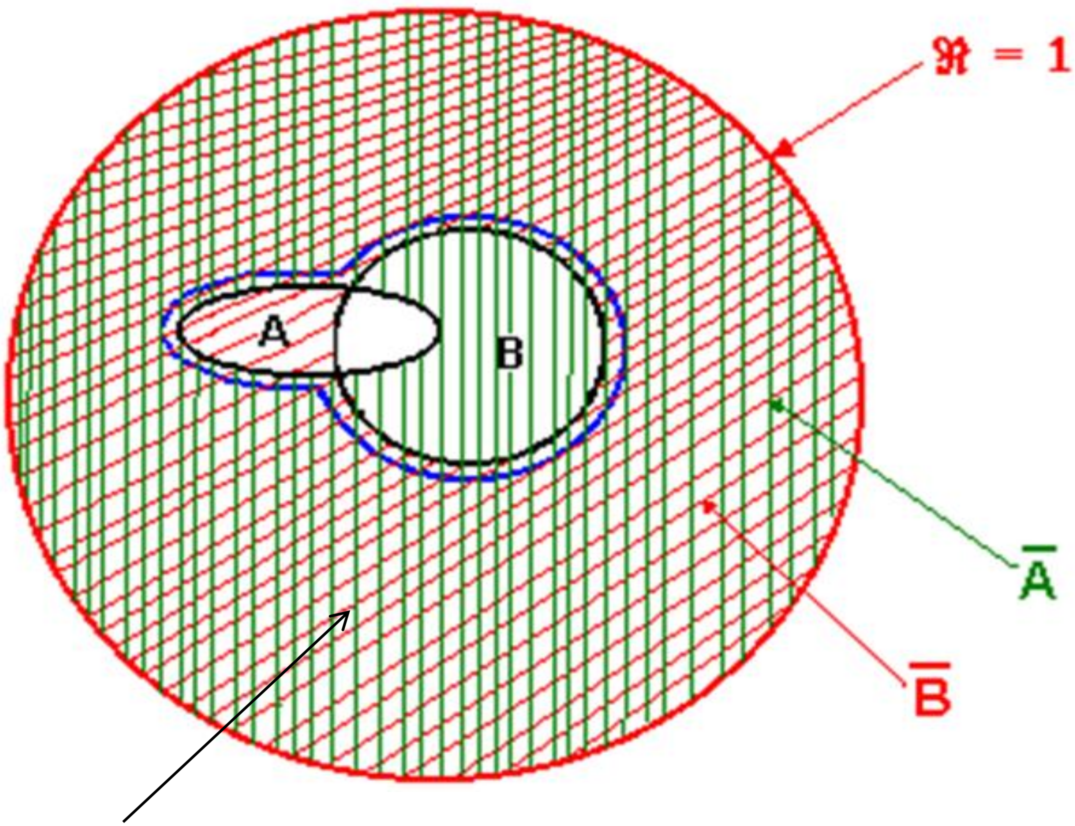
Complément
d'un ensemble
$\overline{A}$

Chapitre III : Les portes logiques

3°) Représentation d'Euler

1er Théorème de DE Morgan

$$\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

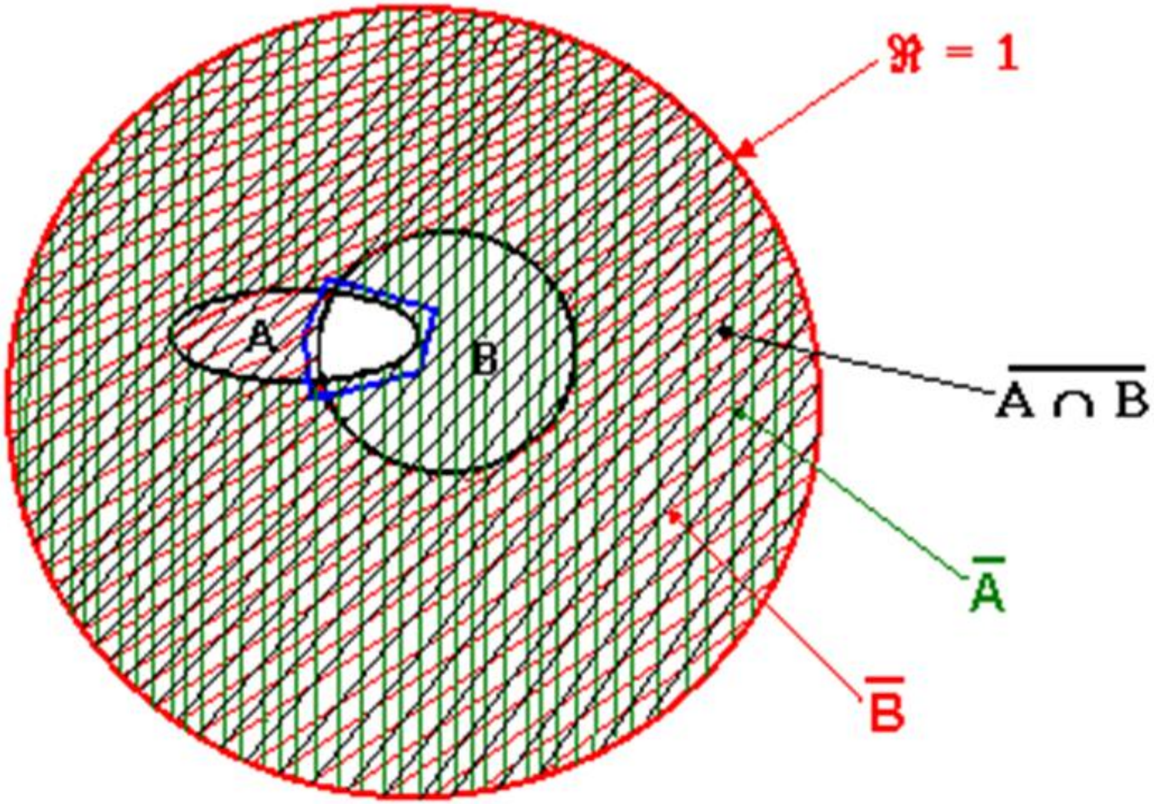


$\overline{A} \cap \overline{B}$ **Surface doublement hachurée**

Chapitre III : Les portes logiques

2ème Théorème de DE Morgan

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



$\overline{A} \cup \overline{B}$ **partie hachurée en noir**

III. Les portes logiques dérivées

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Porte NON ET (NAND)

2°) Porte NON Ou$_{\text{inclusif}}$ (NOR)

3°) Porte OU$_{\text{exclusif}}$ (XOR)

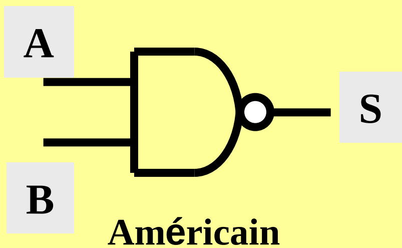
4°) Porte NON OU$_{\text{exclusif}}$ (XNOR)

Chapitre III : Les portes logiques

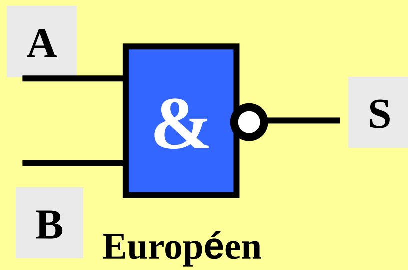
1°) Porte NON ET (NAND)

Universelle (ou complète)

Symbole logique



Américain



Européen

Deux entrées au minimum

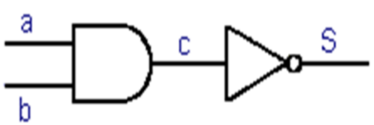


Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Équation logique

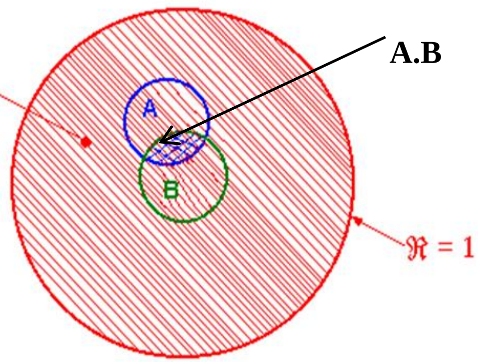
$$S = \overline{A \cdot B}$$

S se lit A fois B le tout barre

Représentation d'Euler

$\overline{A.B}$

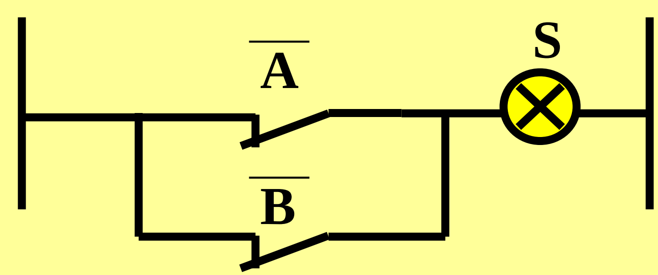
Surface hachurée en rouge



De Morgan

$$S = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

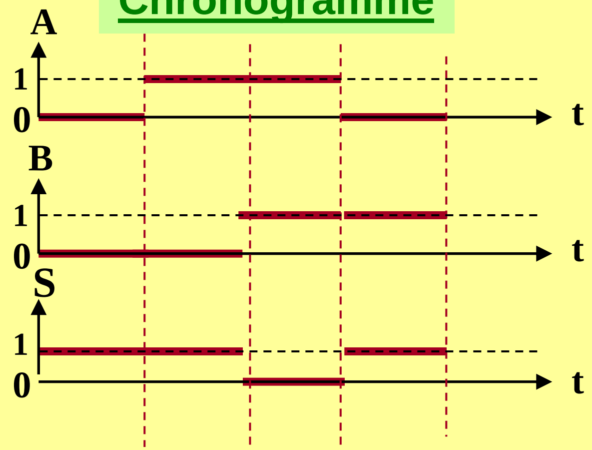
Circuit électrique



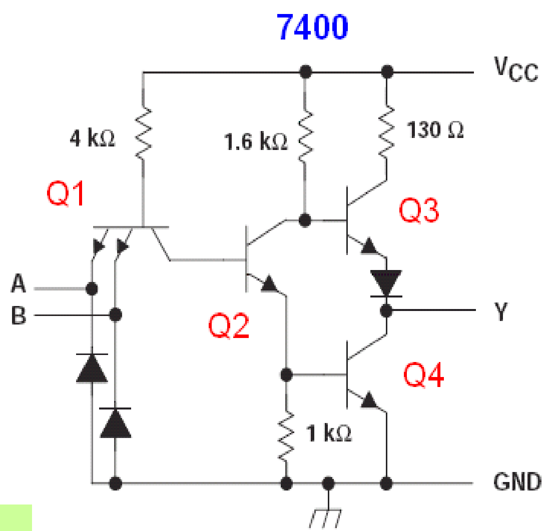
Interrupteur normalement fermé

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

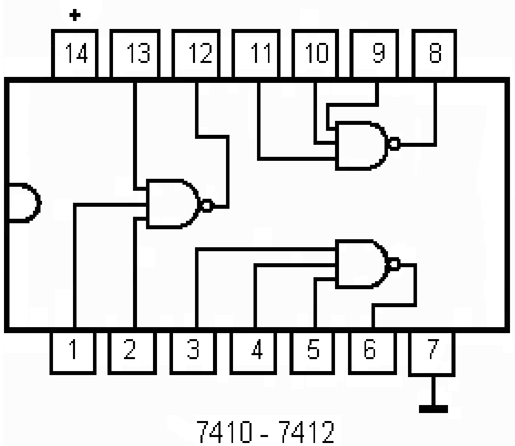


Synoptique du CI « NAND »

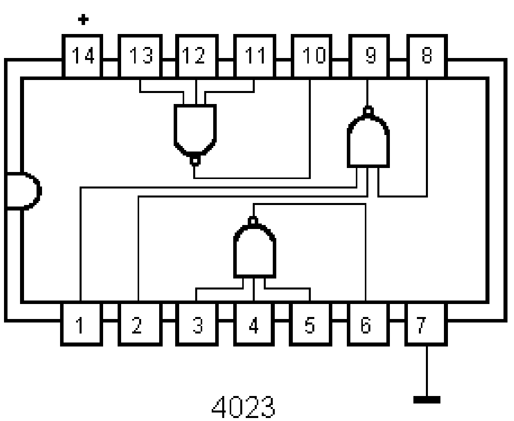


Circuit intégré logique

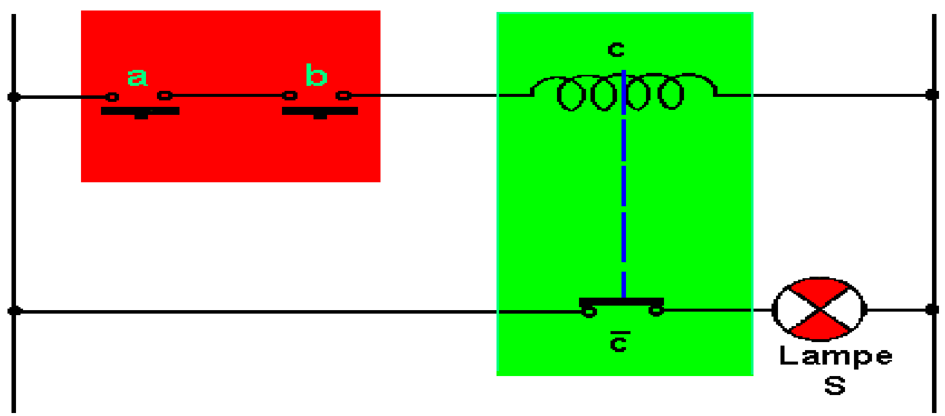
brochage TTL



brochage CMOS



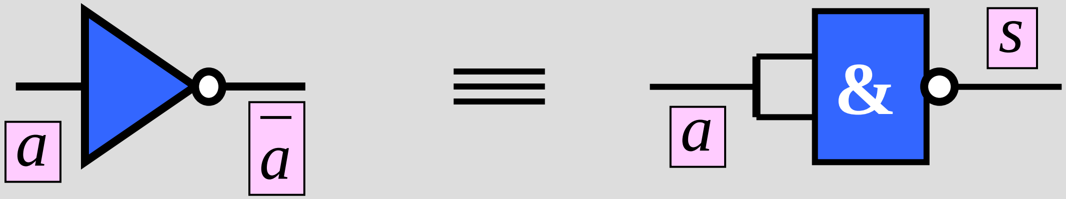
Circuit électrique



Chapitre III : Les portes logiques

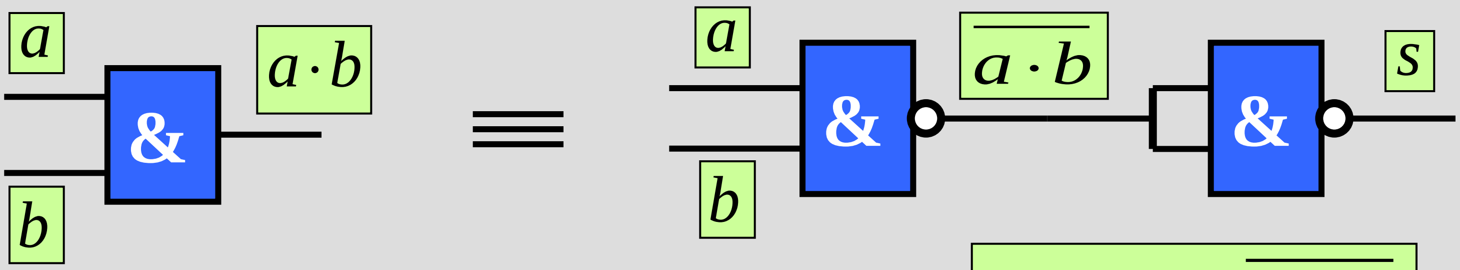
Universalité de la porte NON-ET (NAND)

Fonction NON



$$\overline{a} = \overline{a \cdot a}$$

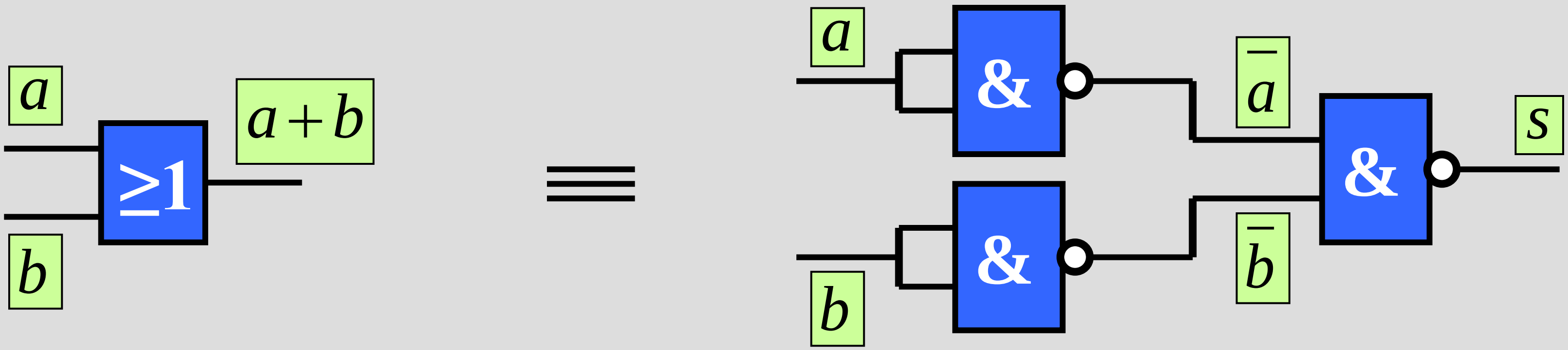
Fonction ET



$$a \cdot b = \overline{\overline{a \cdot b}}$$

Chapitre III : Les portes logiques

Fonction OU



$$a+b=\overline{\overline{a+b}}=\overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}$$

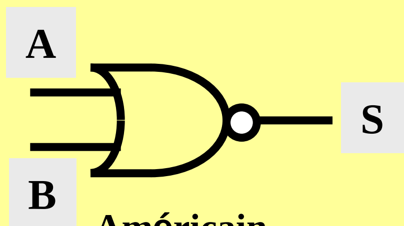
L'opérateur logique NAND est universel car on peut réaliser avec n'importe quel circuit logique.

Chapitre III : Les portes logiques

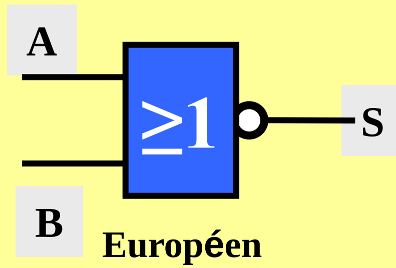
2°) Porte NON OU$_{\text{inclusif}}$ (NOR)

Universelle (ou complète)

Symbole logique



Américain



Européen

Deux entrées au minimum

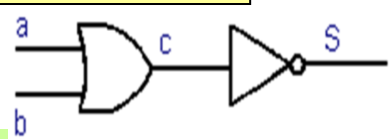


Table de vérité

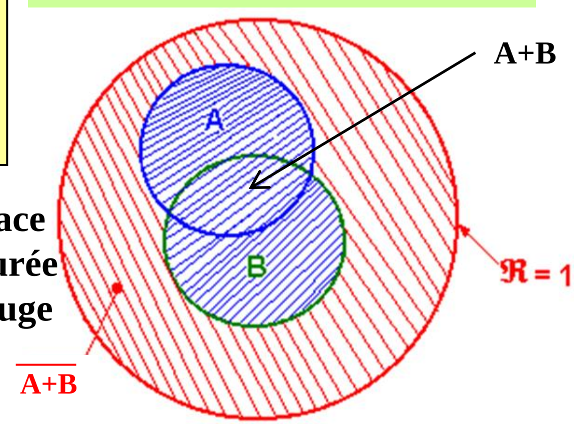
Entrée		sortie
A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Équation logique

$$S = \overline{A + B}$$

S se lit A plus B le tout barre

Représentation d'Euler

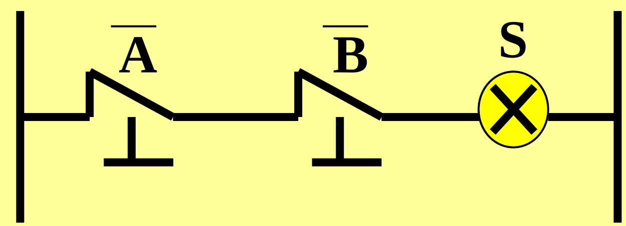


Surface hachurée en rouge

De Morgan

$$S = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

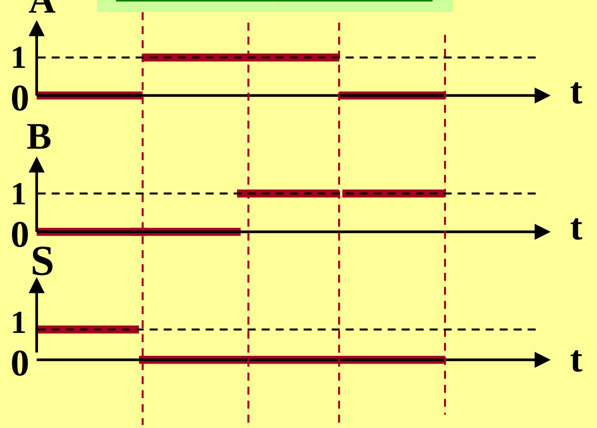
Circuit électrique



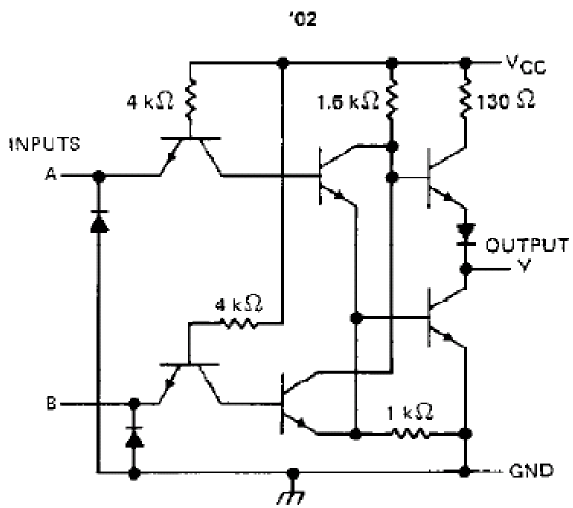
Interrupteur normalement fermé

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

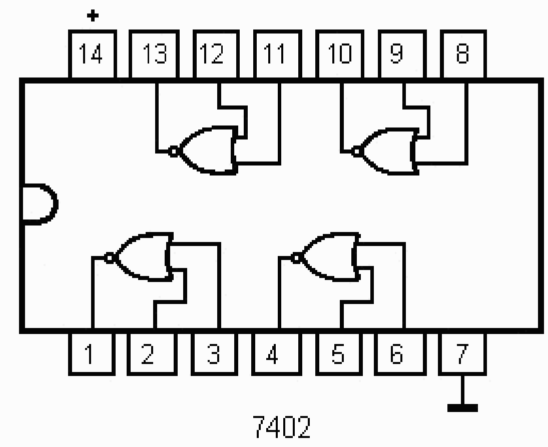


Synoptique du CI « NOR »

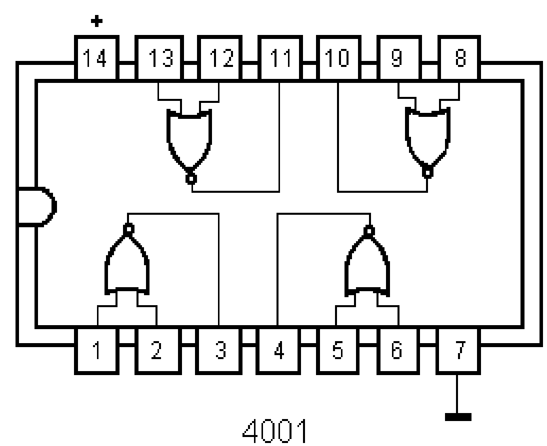


Circuit intégré logique

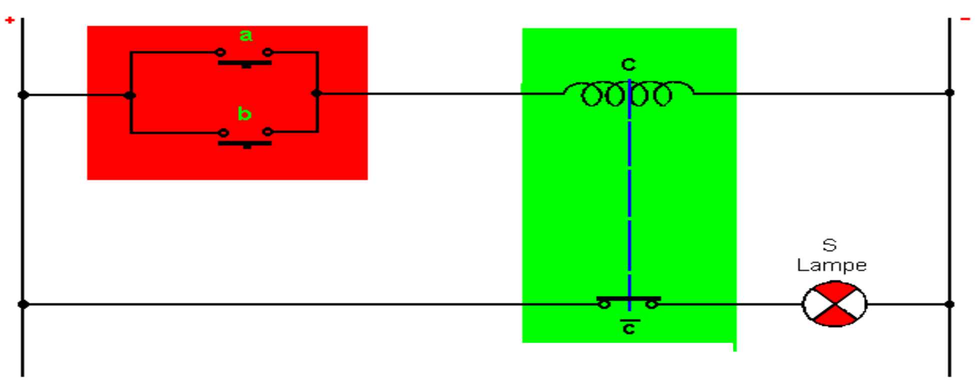
brochage TTL



brochage CMOS



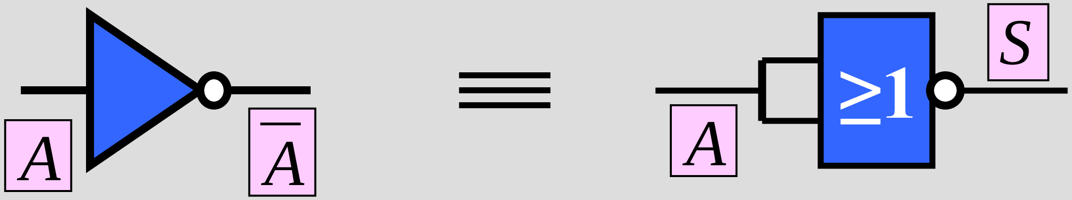
Circuit électrique



Chapitre III : Les portes logiques

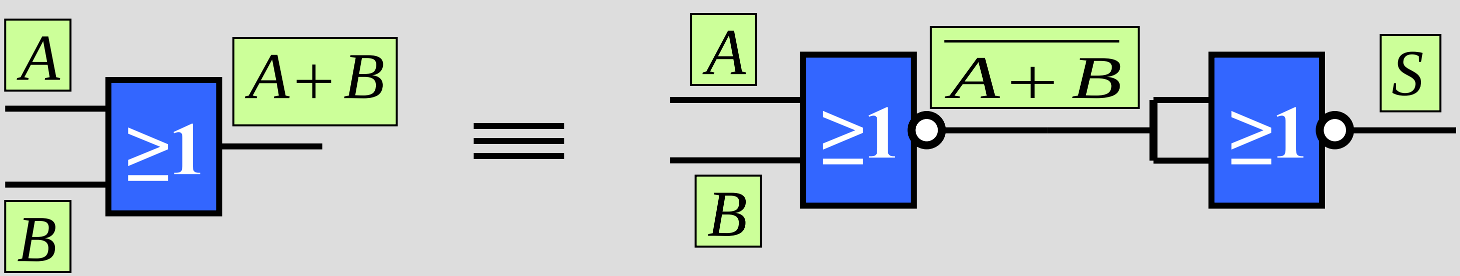
Universalité de la porte NON-OU (NOR)

Fonction NON



$$\overline{A} = \overline{A + A}$$

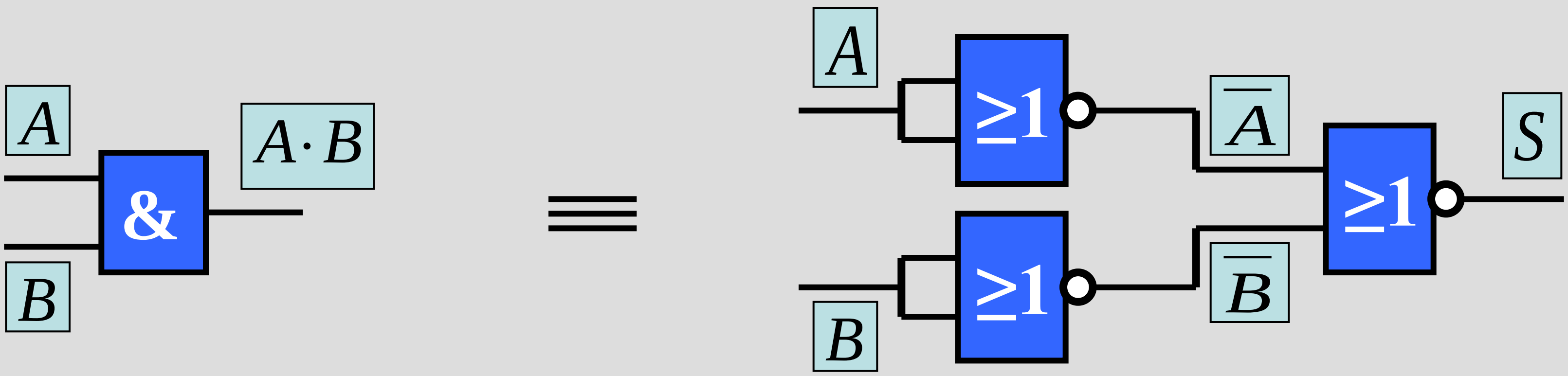
Fonction ET



$$A + B = \overline{\overline{A + B}}$$

Chapitre III : Les portes logiques

Fonction OU



$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

L'opérateur logique NOR est universel car on peut réaliser avec n'importe quel circuit logique.

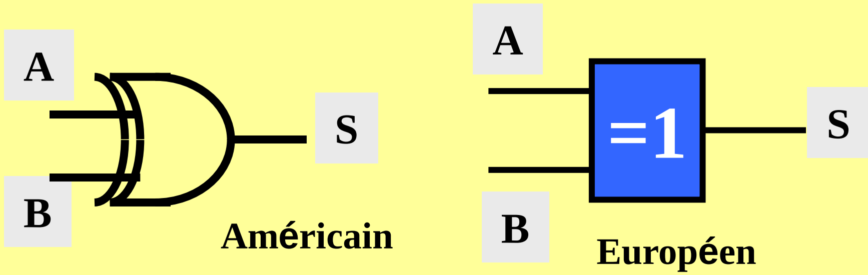
Chapitre III : Les portes logiques

3°) Porte OU$_{exclusif}$ (XOR)

composite

Codage ou cryptographie

Symbole logique



Deux entrées au maximum

Table de vérité

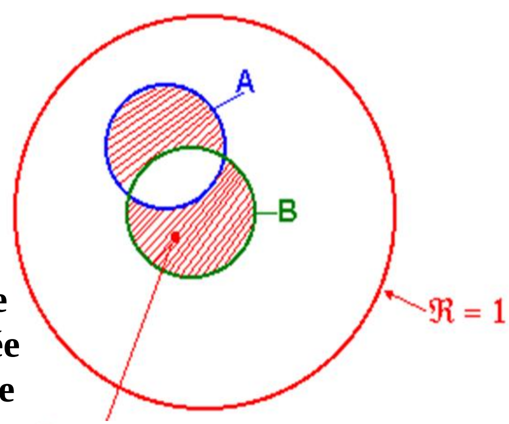
Entrée		sortie
A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Équation logique

$$S = A \oplus B$$
$$= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

S se lit A barre fois B plus A fois B barre

Représentation d'Euler



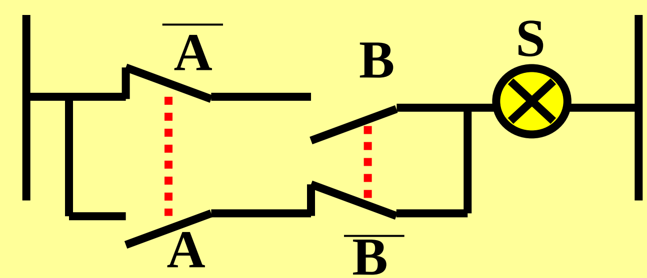
Surface hachurée en rouge

A $\oplus$ B

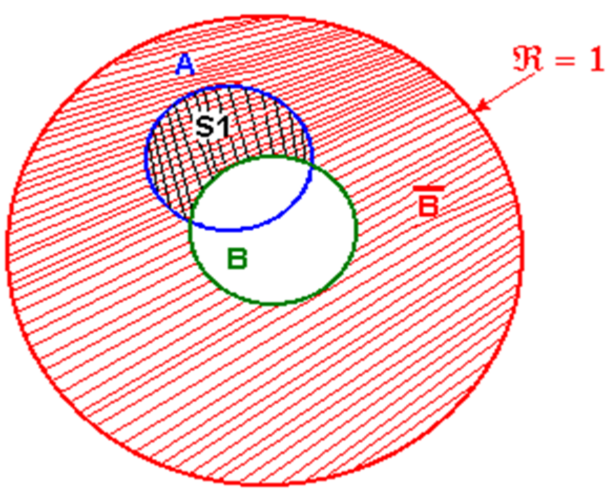
Notation

$\oplus$

Circuit électrique

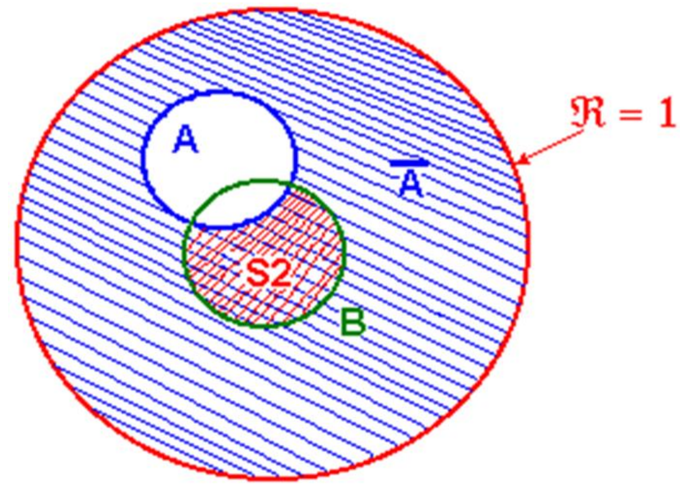


Représentation d'Euler



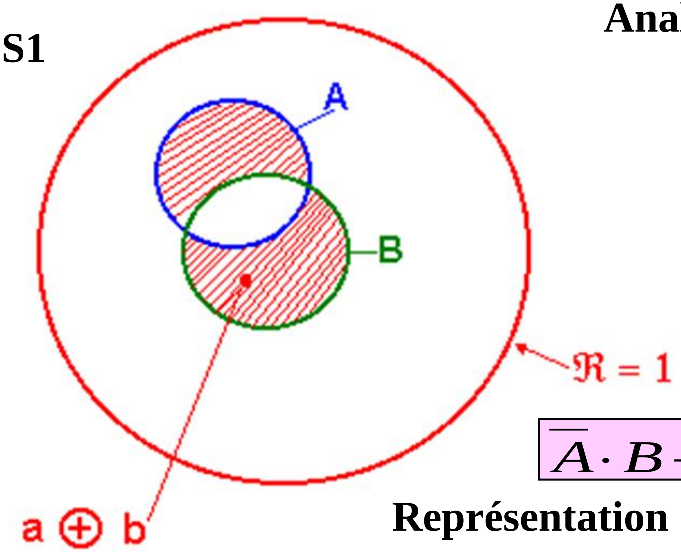
Analyse de la surface S1

$\boxed{A \cdot \overline{B}}$



Analyse de la surface S2

$\boxed{\overline{A} \cdot B}$



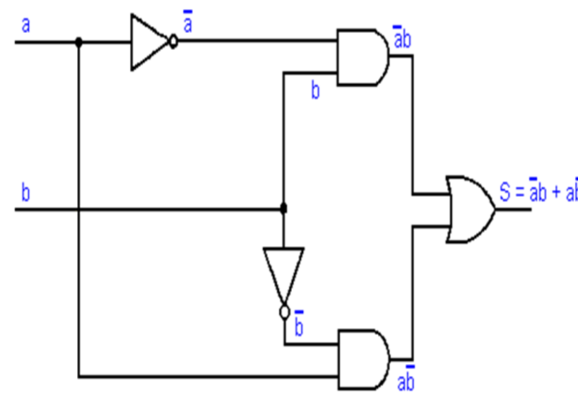
$\boxed{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}}$

Représentation de la fonction XOR

Chapitre III : Les portes logiques

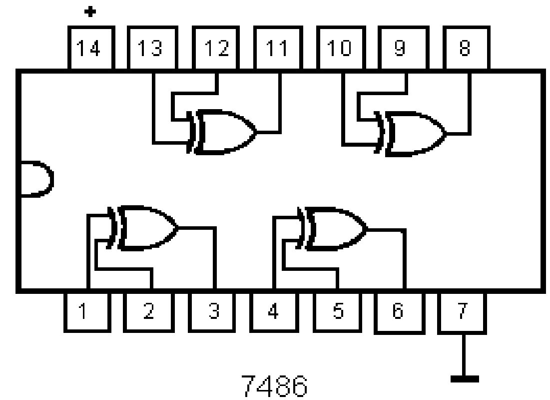
Chronogramme

Logigramme du CI « XOR »

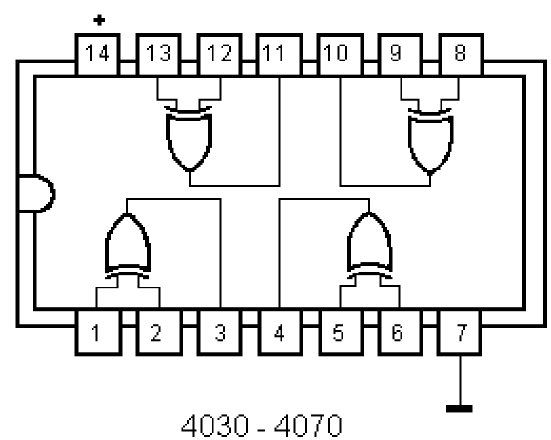


Circuit intégré logique

brochage TTL



brochage CMOS



Propriétés de XOR

$a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$	**Associativité**
$a\oplus b=b\oplus a$	**Commutativité**
$(a\oplus b)\oplus b=a$	**absorption**
$(a\oplus b)\oplus a=b$	**absorption**

$a\oplus b=c$ alors $b\oplus c=a$ et $c\oplus a=b$ **Rotation**

Différentes expressions de XOR

$$s = a \oplus b$$

$$s = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$$

$$s = \overline{a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}}$$

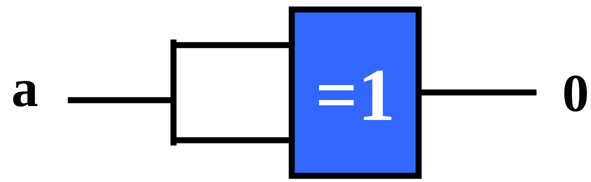
$$s = \left(\overline{a \cdot b}\right) \cdot \left(a + b\right)$$

$$s = \left(\bar{a} + \bar{b}\right) \cdot \left(a + b\right)$$

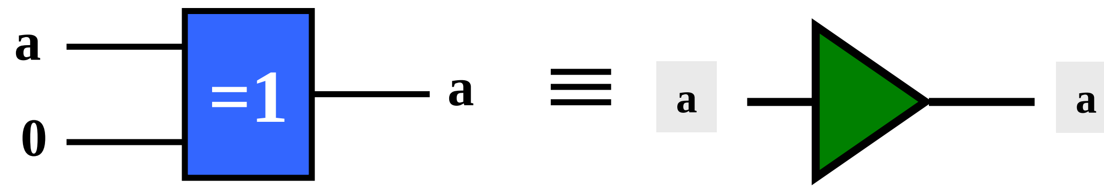
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XOR

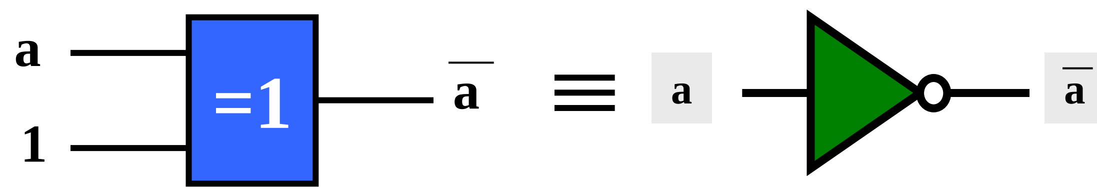
$$a \oplus a = 0$$



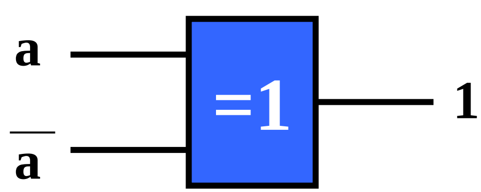
$$a \oplus 0 = a$$



$$a \oplus 1 = \overline{a}$$



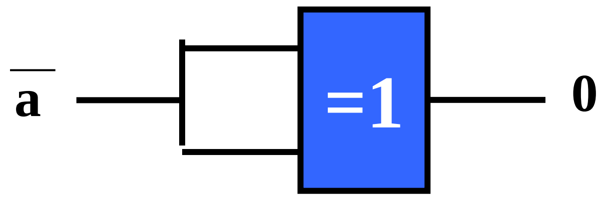
$$a \oplus \overline{a} = 1$$



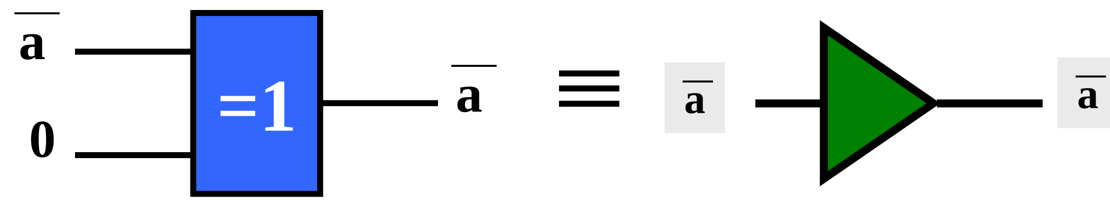
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XOR

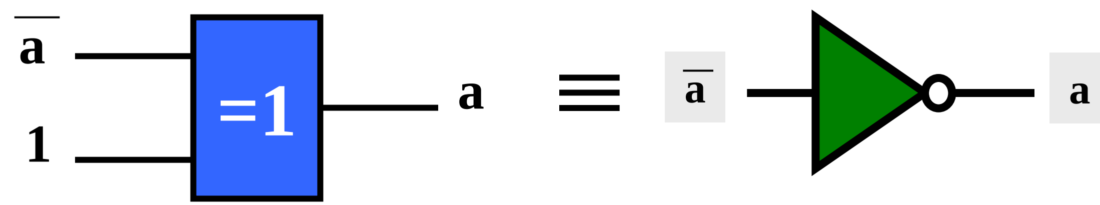
$$\overline{a} \oplus \overline{a} = 0$$



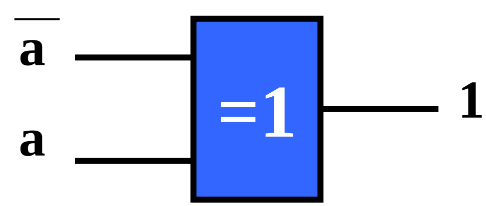
$$\overline{a} \oplus 0 = \overline{a}$$



$$\overline{a} \oplus 1 = a$$

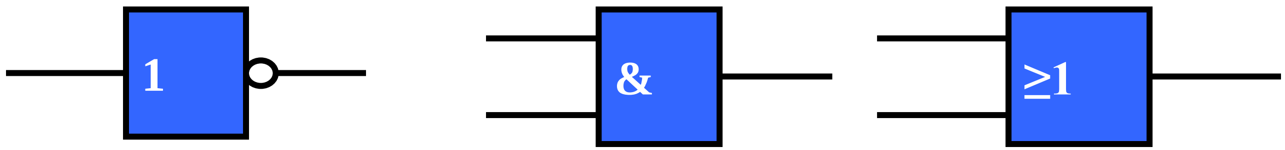


$$\overline{a} \oplus a = 1$$

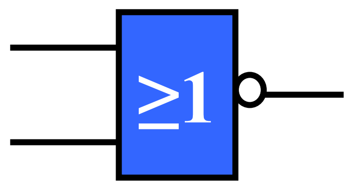


Chapitre III : Les portes logiques

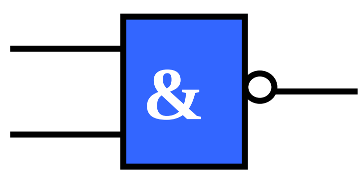
Exemple n°1 : Réalisation de XOR à partir des portes logiques de base NOT, AND et OR



Exemple n°2 : Réalisation de XOR à l'aide uniquement des portes universelles NOR



Exemple n°3 : Réalisation de XOR à l'aide uniquement des portes universelles NAND



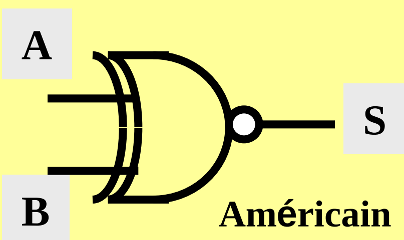
Chapitre III : Les portes logiques

4°) Porte NON OU$_{exclusif}$ (XNOR)

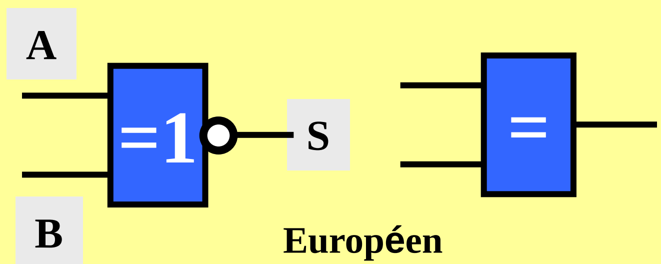
composite

Codage ou cryptographie

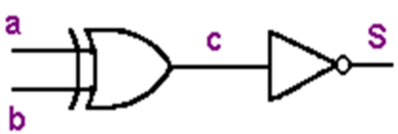
Symbole logique



Américain



Européen



Deux entrées au maximum

Table de vérité

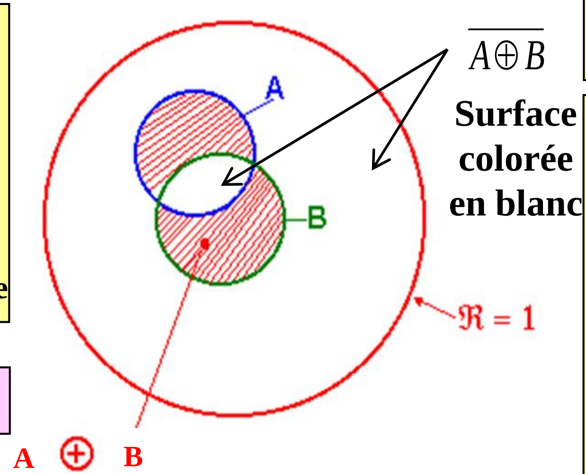
Entrée		sortie
A	B	XNOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Équation logique

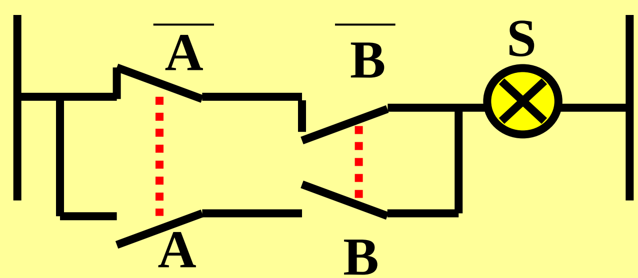
$$S = \overline{A \oplus B}$$
$$= A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

S se lit A fois B plus A barre fois B barre

Représentation d'Euler



Circuit électrique



Notation

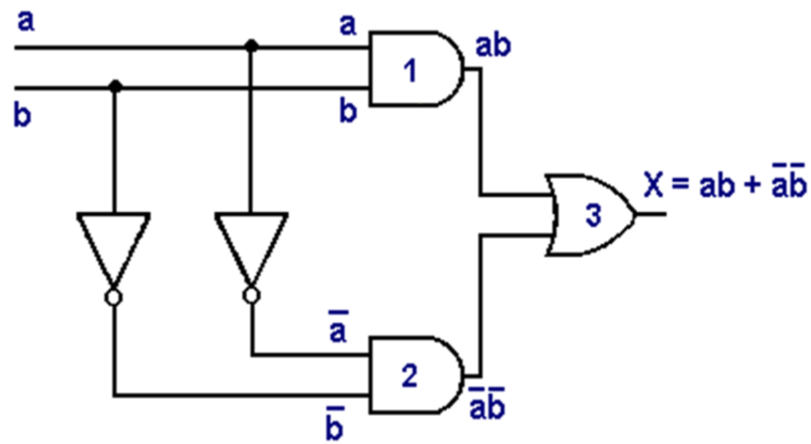
⊙

$$S = A \odot B$$

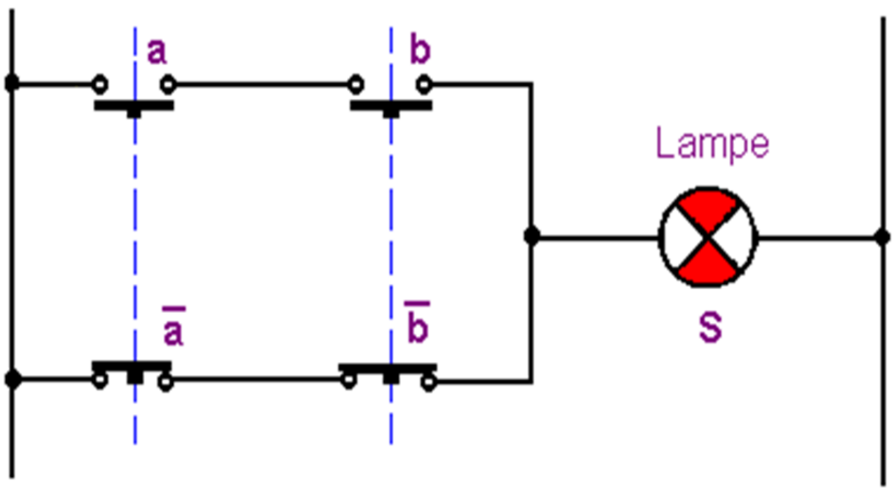
Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

Synoptique du CI « XNOR »

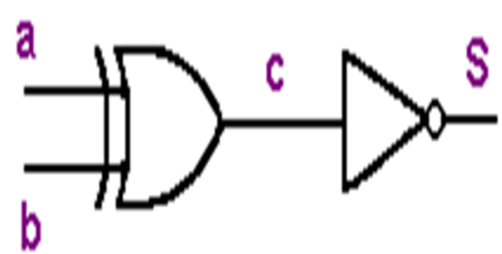


Circuit électrique



Circuit intégré logique

brochage TTL ou CMOS



Chapitre III : Les portes logiques

Différentes expressions de XNOR

$$s = \overline{a \oplus b}$$

$$s = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$s = \overline{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}$$

$$s = \left(\overline{\bar{a} \cdot b}\right) \cdot \left(\bar{a} + b\right)$$

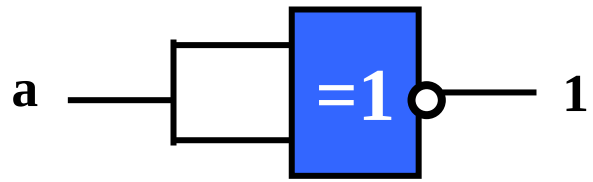
$$s = \left(a + \bar{b}\right) \cdot \left(\bar{a} + b\right)$$

$$S = a \odot b$$

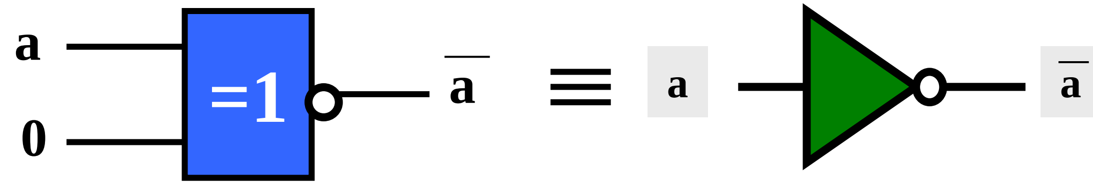
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XNOR

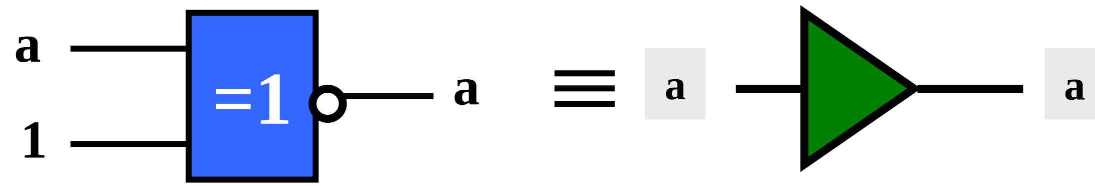
$$\overline{a \oplus a} = 1$$



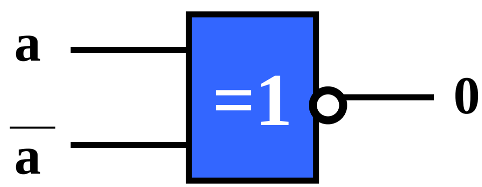
$$\overline{a \oplus 0} = \overline{a}$$



$$\overline{a \oplus 1} = a$$



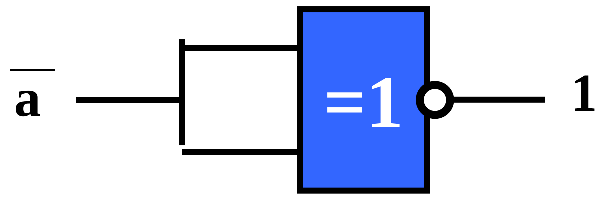
$$\overline{a \oplus \overline{a}} = 0$$



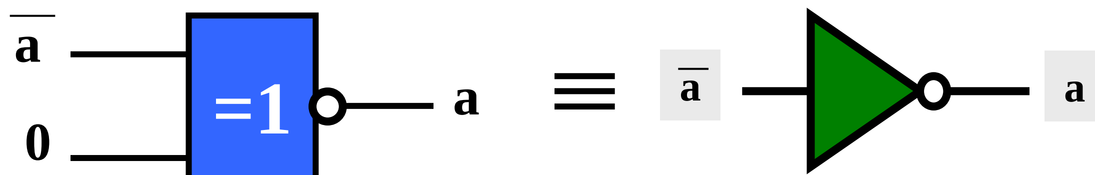
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XNOR

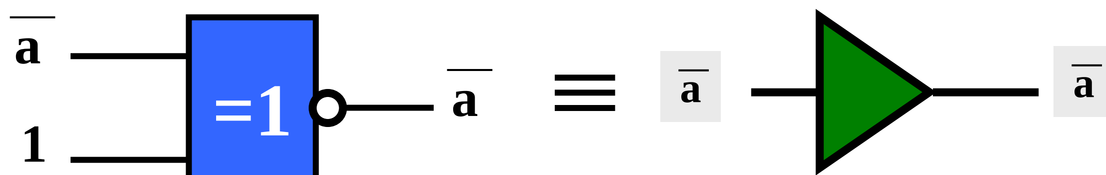
$$\overline{\overline{a} \oplus \overline{a}} = 1$$



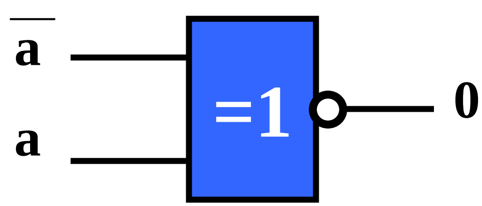
$$\overline{\overline{a} \oplus 0} = a$$



$$\overline{\overline{a} \oplus 1} = \overline{a}$$

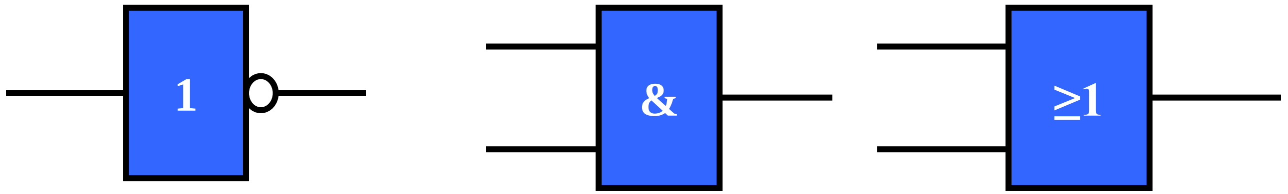


$$\overline{\overline{a} \oplus a} = 0$$

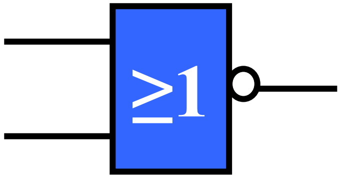


Chapitre III : Les portes logiques

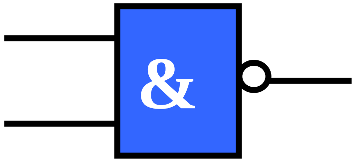
Exemple n°1 : Réalisation de XNOR à partir des portes logiques de base NOT, AND et OR



Exemple n°2 : Réalisation de XNOR à l'aide uniquement des portes universelles NOR

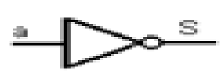
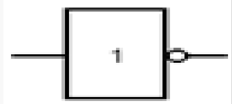
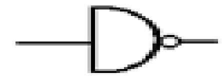
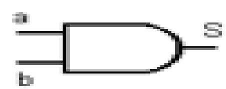
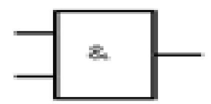
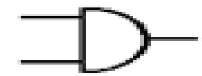
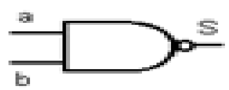
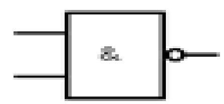
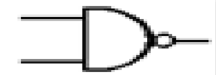
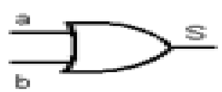
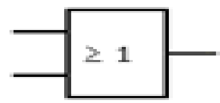
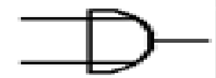
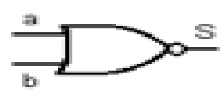
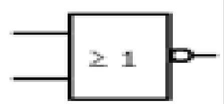
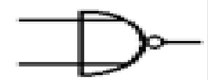
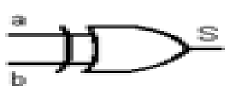
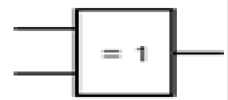
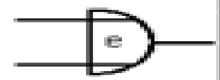
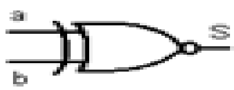
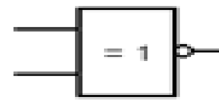
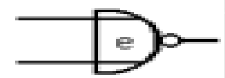


Exemple n°3 : Réalisation de XNOR à l'aide uniquement des portes universelles NAND



Chapitre III : Les portes logiques

SYMBOLES GRAPHIQUES : Résumé

FONCTION	EQUATION	SYMBOLES			TABLES DE VERITE		
		International	Français	Allemand	a	b	S
NON	$S = \overline{a}$				0 1		1 0
ET	$S = a . b$				0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 1
NAND	$S = \overline{a . b}$				0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 1 0
OU	$S = a + b$				0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1
NOR	$S = \overline{a + b}$				0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 0
OU Exclusif	$S = a \oplus b$				0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0
NOR Exclusif	$S = \overline{a \oplus b}$				0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 1

différentes représentations graphiques utilisées pour les fonctions logiques

II. Conséquences des théorèmes de DE Morgan

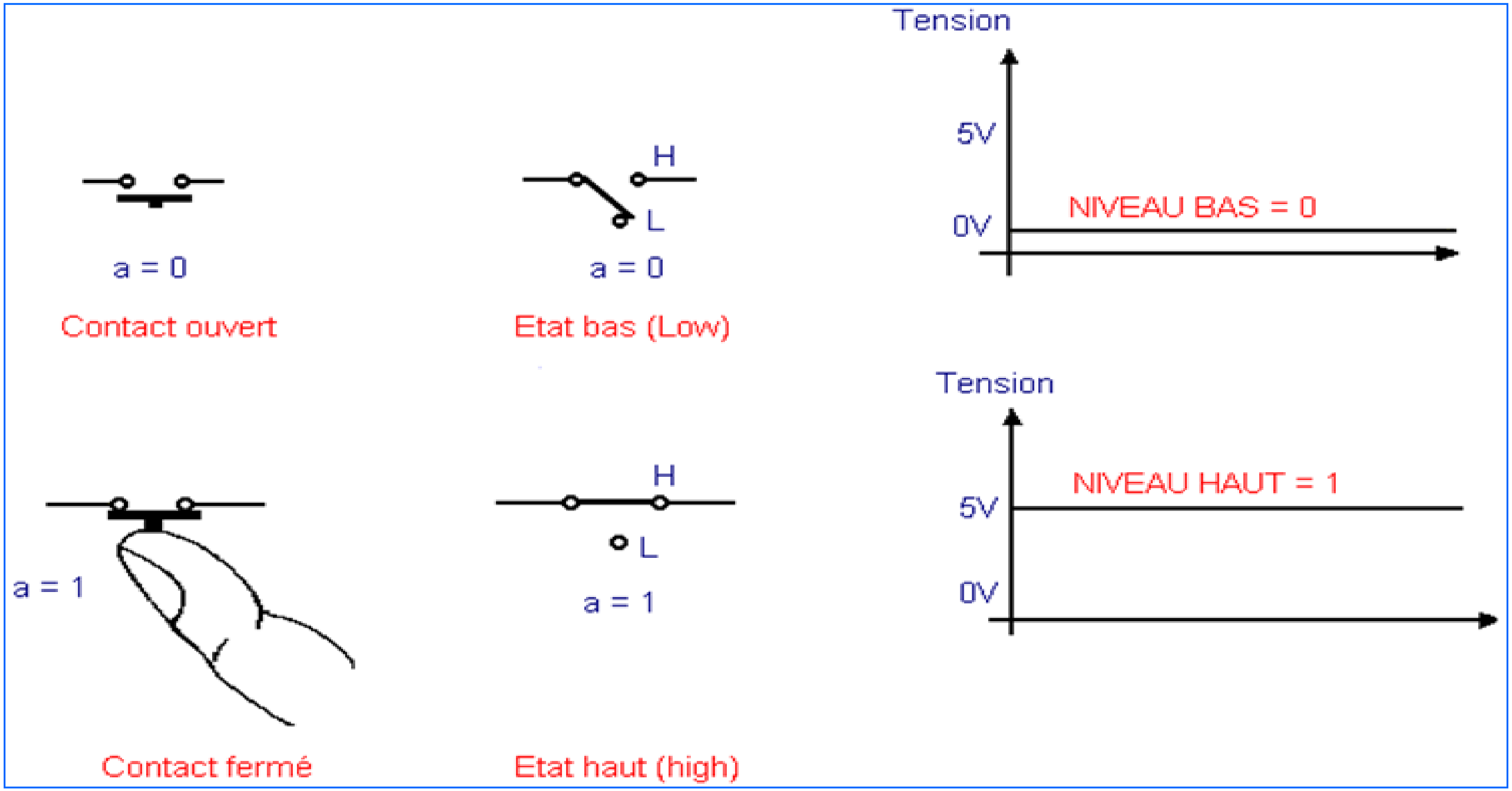
Chapitre III : Les portes logiques

1°) Logique positive et logique négative

2°) Conséquences des Théorèmes de DE Morgan

1°) Logique positive et logique négative

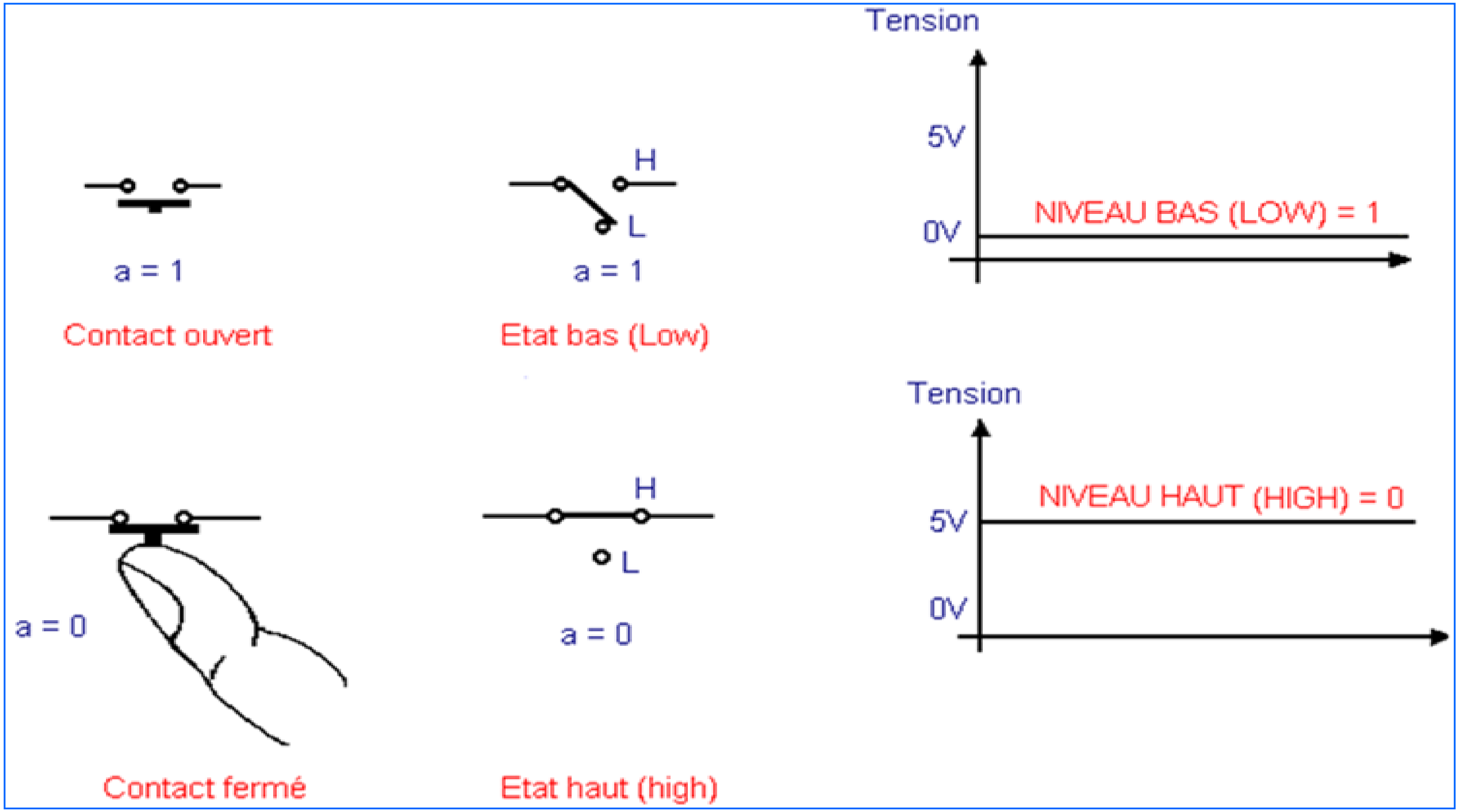
■ Logique positive :



Convention logique positive

Chapitre III : Les portes logiques

■ Logique négative:



Convention logique négative

Chapitre III : Les portes logiques

■ Principe de dualité

Entrée		Sortie
A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

convention logique positive
Entrée : L = 0, H = 1
Sortie : L = 0, H = 1

Entrée		Sortie
A	B	A.B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

convention logique négative
Entrée : L = 1, H = 0
Sortie : L = 1, H = 0

Entrée		Sortie
A	B	A.B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Mise en ordre

Entrée		Sortie
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Conclusion : ET de la LP se comporte comme un OU de la LN

■ Table de dualité :

Un circuit se comportant en logique positive comme un :	Se comporte en logique négative comme un :
ET	OU
NAND	NOR
OU	ET
NOR	NAND
OU Exclusif	NOR Exclusif
NOR Exclusif	OU Exclusif

Table de dualité des fonctions logiques

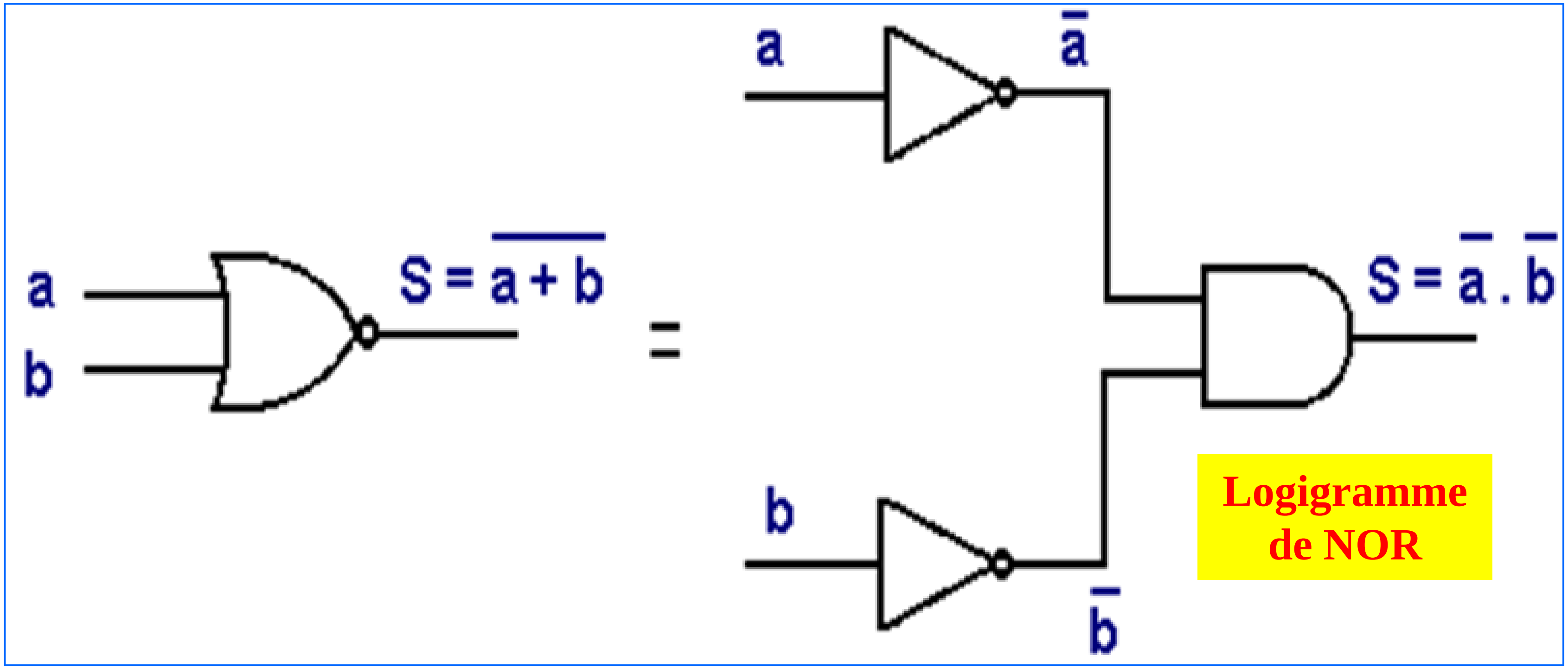
Chapitre III : Les portes logiques

2°) Conséquences des Théorèmes de DE Morgan

■ Conséquence n°1 :

► **Le théorème n°1 de De Morgan montre qu'une fonction NOR peut être fabriquée à partir des fonctions AND et NOT.**

$$\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

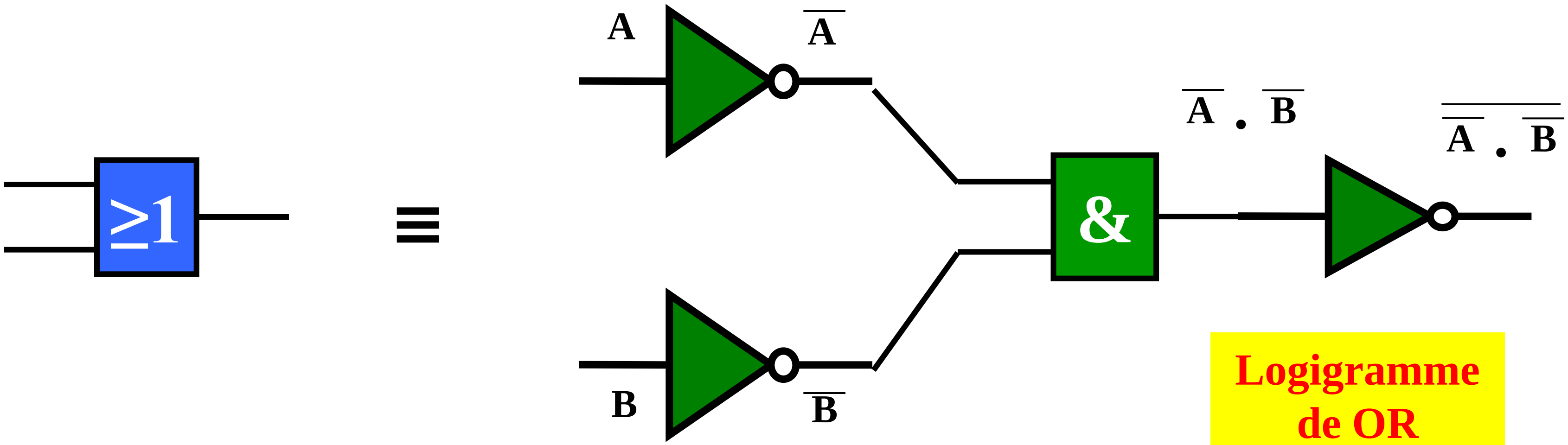


Chapitre III : Les portes logiques

De même :

► **Le théorème n°1 de De Morgan montre qu'une fonction OR peut être fabriquée à partir des fonctions AND et NOT.**

$$\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$



Logigramme de OR

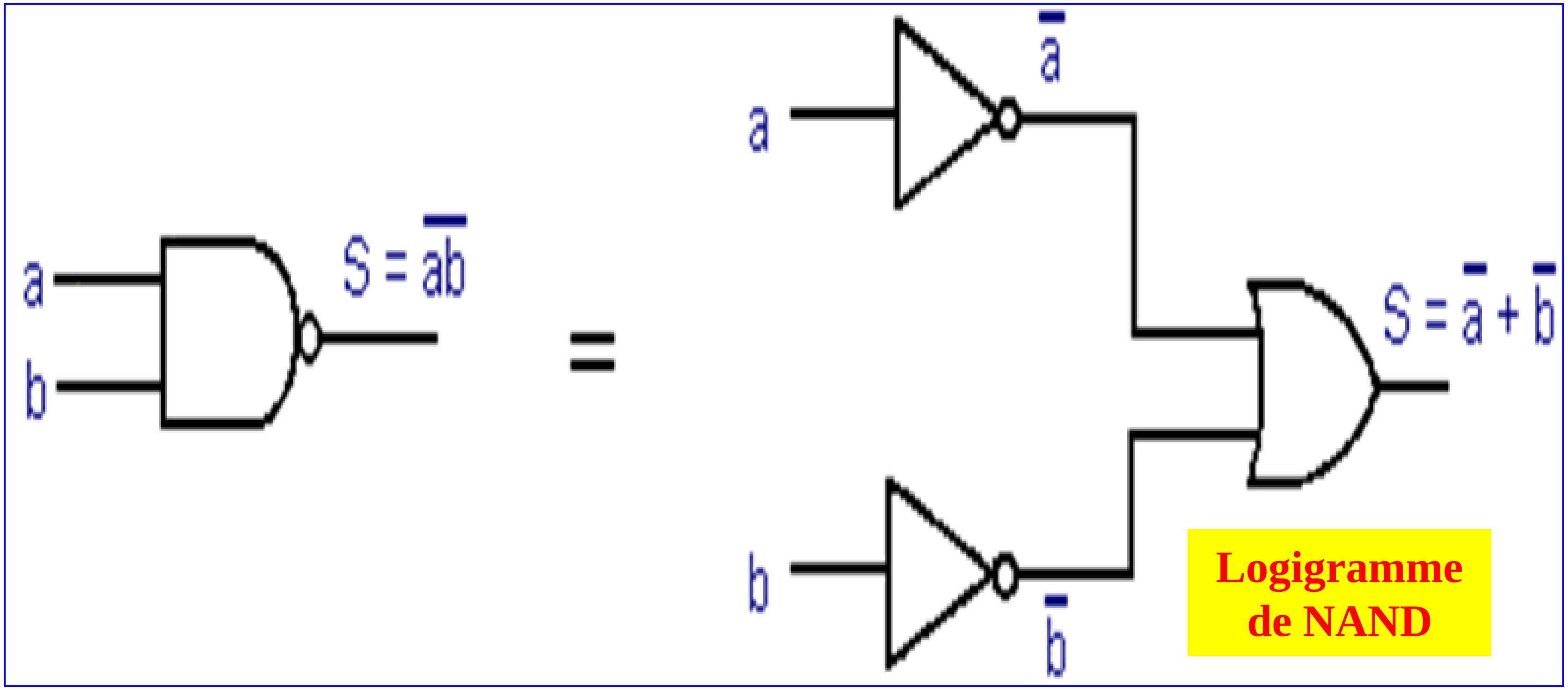
$$OR = \underbrace{A+B}_{définition} = \underbrace{\overline{\overline{A+B}}}_{double\,négation} = \underbrace{\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}}_{De\,Morgan}$$

Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°2 :

► **Le théorème n°2 de De Morgan montre qu'une fonction NAND peut être fabriquée à partir des fonctions OR et NOT.**

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$



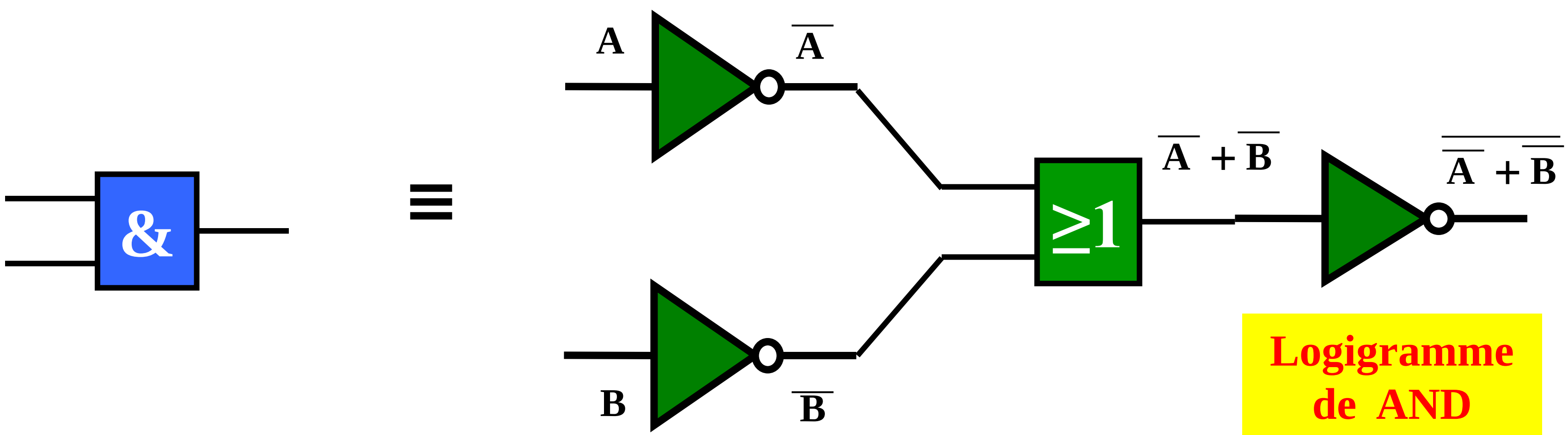
Logigramme de NAND

Chapitre III : Les portes logiques

De même :

► **Le théorème n°2 de De Morgan montre qu'une fonction AND peut être fabriquée à partir des fonctions OR et NOT.**

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$



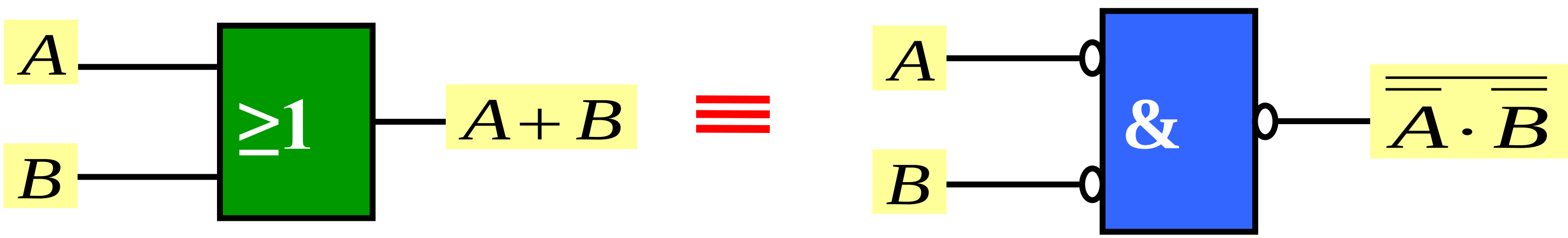
Logigramme de AND

$$AND = \underbrace{A \bullet B}_{définition} = \underbrace{\overline{\overline{A \bullet B}}}_{double\,négation} = \underbrace{\overline{\overline{A} + \overline{B}}}_{De\,Morgan}$$

Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°3 : Principe de dualité

► De même, à partir des deux théorèmes de De Morgan nous pouvons montrer qu'une porte **AND** en logique positive se comporte comme une porte **OR** en logique négative et vice versa.



OR en logique positive

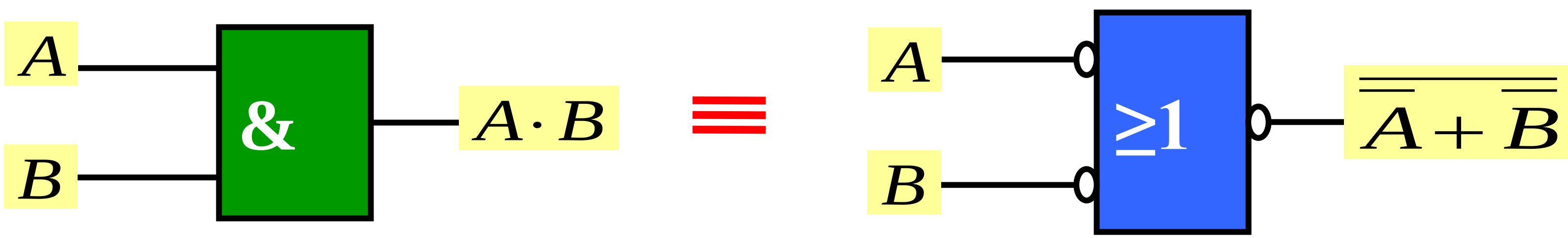
AND en logique négative

$$\underbrace{OR}_{LP} = \underbrace{A+B}_{définition} = \underbrace{\overline{\overline{A+B}}}_{double négation} = \overline{\overline{A}\bullet\overline{B}} = \underbrace{AND}_{LN}$$

Chapitre III : Les portes logiques

► De même, à partir des deux théorèmes de De Morgan nous pouvons montrer qu'une porte **AND** en logique positive se comporte comme une porte **OR** en logique négative et vice versa.

$$\underbrace{AND}_{LP} = \underbrace{A \cdot B}_{définition} = \underbrace{\overline{\overline{A \cdot B}}}_{double négation} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \underbrace{OR}_{LN}$$



AND en logique positive

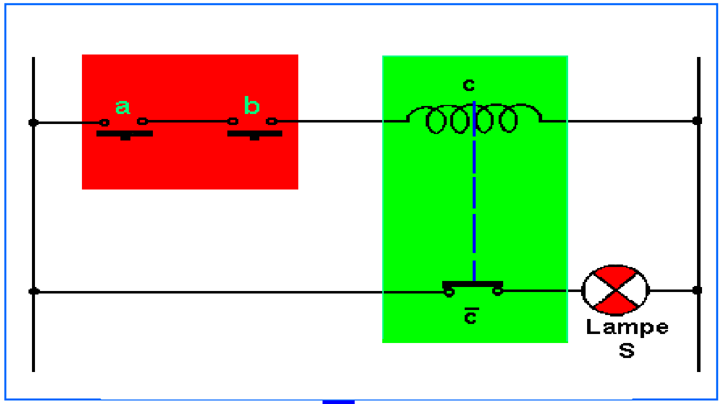
OR en logique négative

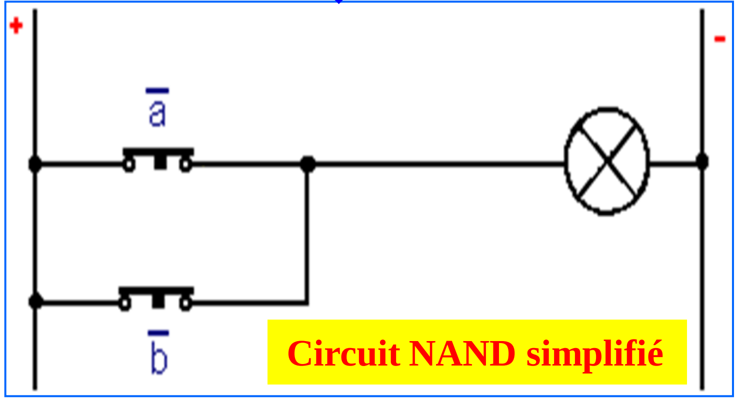
Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°4 : simplification des circuits électriques

► Exemple de NAND

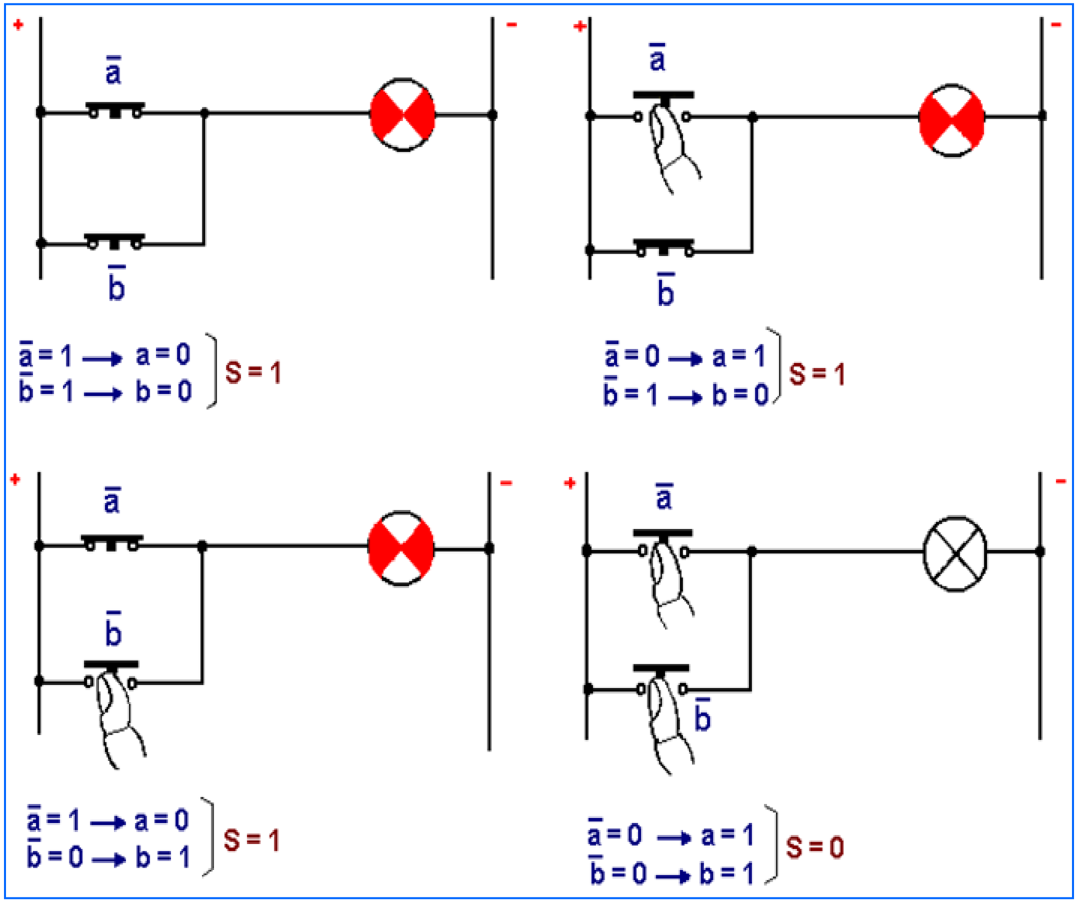
Circuit NAND





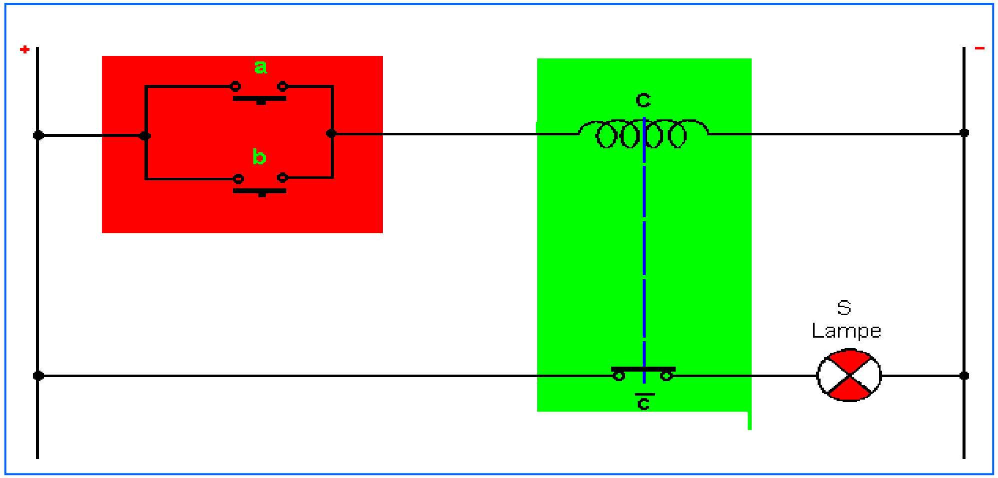
Circuit NAND simplifié

Fonctionnement de NAND simplifié

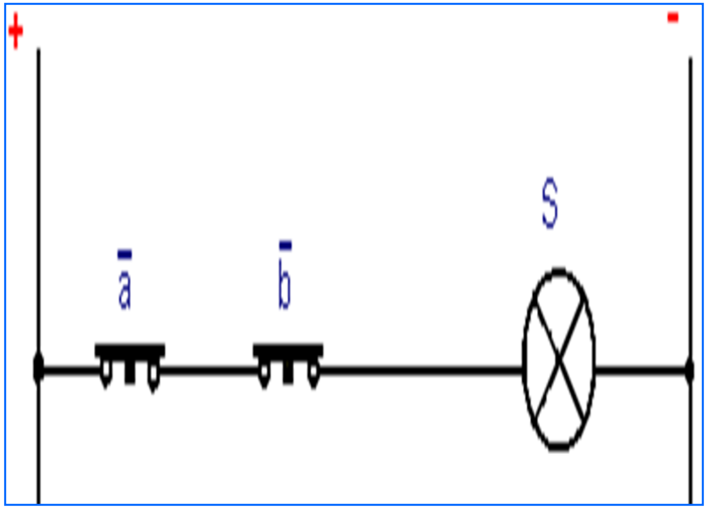


■ Conséquence n°4 : simplification des circuits électriques

► Exemple de NOR



Circuit NOR



Circuit NOR simplifié

IV. Identités Booléennes

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Propriétés des fonctions logiques : Identités Booléennes

2°) Matérialisation par des circuits électriques

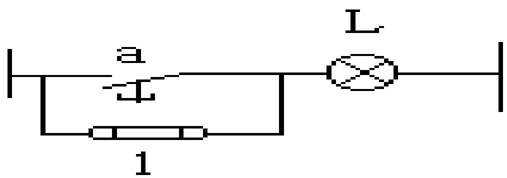
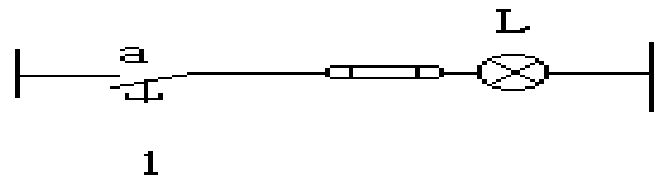
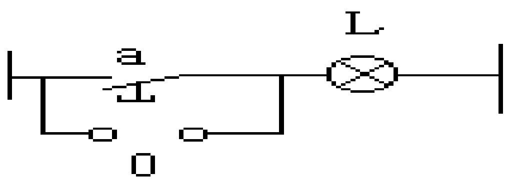
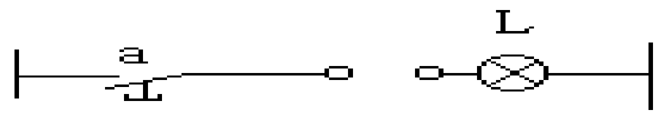
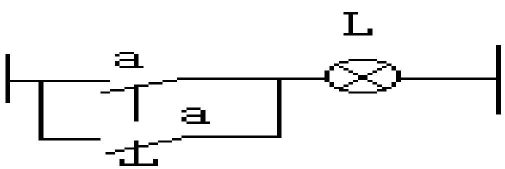
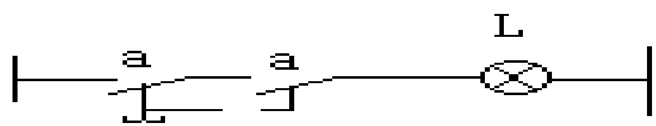
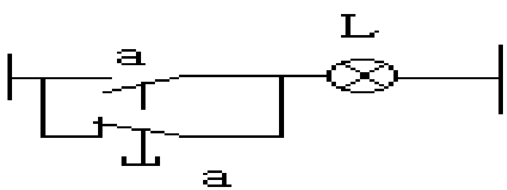
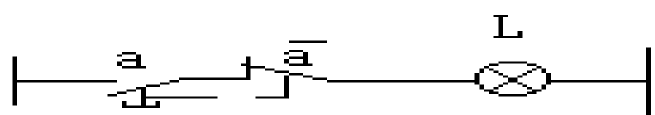
3°) Simplification algébrique

1°) Propriétés des fonctions logiques : Identités Booléennes

Propriétés		Théorèmes
Commutativité	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$	
Distributivité	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	
Eléments neutres	$a + 0 = a$ $a \cdot 1 = a$	Des bornes universelles
Complémentation	$a + \overline{a} = 1$ $a \cdot \overline{a} = 0$	De non contradiction
	$a + a = a$ $a \cdot a = a$	D'idempotence $1 + 1 = 1$ $1 \cdot 1 = 1$
Eléments absorbants	$a \cdot 0 = 0$ $a + 1 = 1$	Du tiers exclus $1 \cdot 0 = 0$ $0 + 1 = 1$
	$a + (a \cdot b) = a + a \cdot b = a$ $a \cdot (a+b)=a$	D'absorption
	$\overline{\overline{a}} = a$	D'involution
	$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$	D'inclusion
	$\overline{a + b + c} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ $\overline{a \cdot b \cdot c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$	De de Morgan
	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c$	
	$a \oplus a = 0$ $a \oplus \overline{a} = 1$	
	$a \oplus 0 = a$ $a \oplus 1 = \overline{a}$	

Chapitre III : Les portes logiques

2°) Matérialisation par des circuits électriques

Sommes logiques	Produits logiques
 $a + 1 = 1$	 $a \cdot 1 = a$
 $a + 0 = a$	 $a \cdot 0 = 0$
 $a + a = a$	 $a \cdot a = a$
 $a + \overline{a} = 1$	 $a \cdot \overline{a} = 0$

Chapitre III : Les portes logiques

Travaux Dirigés

Travaux dirigés

3°) Simplification algébrique

$$x = A\cdot B\cdot\left(\overline{\overline{A}+B\cdot C}\right)$$

$$x=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C$$

$$x=\left(\overline{A}+B\right)\cdot\left(A+\overline{B}\right)$$

$$x=A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot D+\overline{C}\cdot\overline{D}$$

$$x=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}+\overline{A\cdot B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C$$

$$x=A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\left(\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}}\right)$$

$$x=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$$

$$x=\overline{A}\cdot\overline{B\cdot C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A\cdot B\cdot C}$$

$$x=\overline{A}\cdot C\left(\overline{\overline{A}\cdot B\cdot D}\right)+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C$$

$$x=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{\overline{A\cdot B}\cdot C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$$

$$x=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$$

$$x=\overline{A\cdot B\cdot C}+\overline{A\cdot B}\cdot\overline{C}+\overline{A\cdot\overline{B}\cdot C}$$

$$x=\left(\overline{A}+B\right)\cdot\left(A+B+D\right)\cdot\overline{D}$$