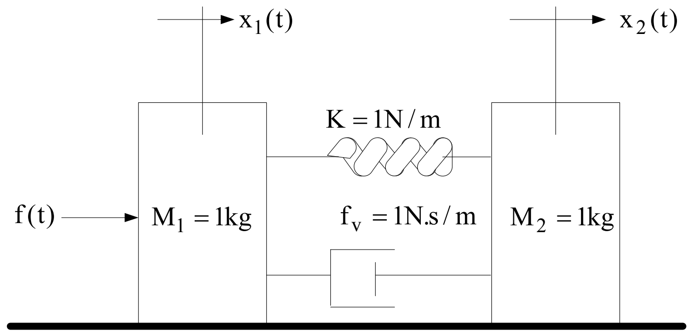
Problème 2.1

On donne le système suivant:



Déterminer la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}$$

Solution

Le système d'équations qui correspond au système est :

$$\begin{bmatrix} (M_1 s^2 + f_v s + K) \rightarrow -(f_v s + K) \\ -(f_v s + K) \rightarrow (M_2 s^2 + f_v s + K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Si on remplace les paramètres du circuit par leur valeur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} (s^2 + s + 1) \rightarrow -(s+1) \\ -(s+1) \rightarrow (s^2 + s + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

On isole $X_2(s)$ du système d'équations ci-dessus :

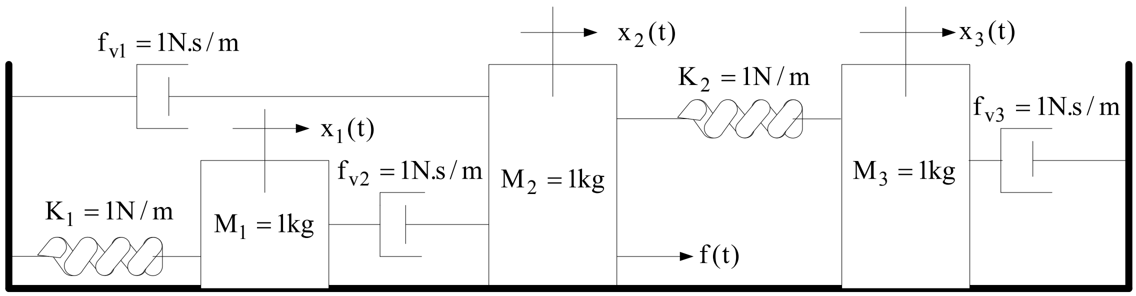
$$X_2(s) = \frac{F(s)(s+1)}{s^2(s^2 + 2s + 2)} \qquad (3)$$

En tenant compte de (3) on obtient :

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

Problème 2.2

On donne le système suivant:



Déterminer la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{F(s)}$$

Solution

Le système d'équations qui correspond au système est :

$$\begin{bmatrix} (M_1 s^2 + f_{v2} s + K_1) \rightarrow -(f_{v2} s) \rightarrow -(0) \\ -(f_{v2} s) \rightarrow (M_2 s^2 + (f_{v1} + f_{v2}) s + K_2) \rightarrow -(K_2) \\ -(0) \rightarrow -(K_2) \rightarrow (M_3 s^2 + f_{v3} s + K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

En tenant compte des valeurs des paramètres, on obtient :

$$\begin{bmatrix} (s^2 + s + 1) \rightarrow -(s) \rightarrow -(0) \\ -(s) \rightarrow (s^2 + 2s + 1) \rightarrow -(1) \\ -(0) \rightarrow -(1) \rightarrow (s^2 + s + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

On isole $X_3(s)$ du système d'équations ci-dessus :

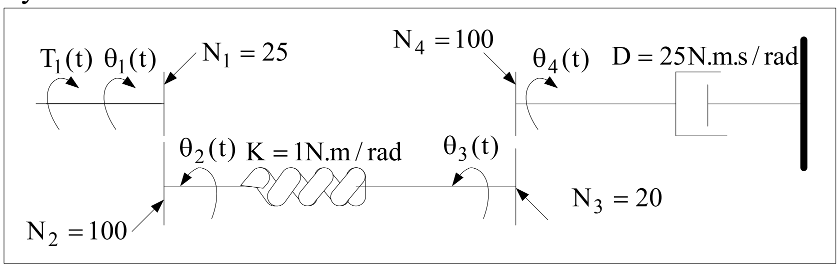
$$X_3(s) = \frac{F(s)}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 3)} \qquad (3)$$

En tenant compte de (3) on obtient :

$$G(s) = \frac{1}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 3)}$$

Problème 2.3

On donne le système suivant:



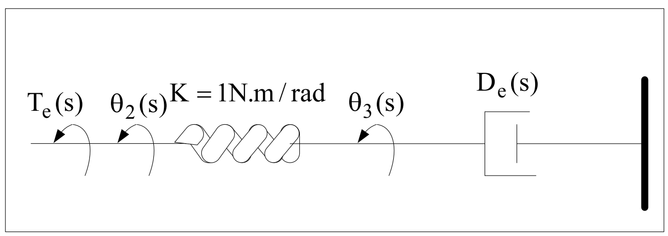
Déterminer la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\theta_4(s)}{T_1(s)}$$

Solution

Le système a 2 degrés de liberté.

Déterminons le système équivalent sans engrenage :



où:

$$T_e(s) = \frac{N_2}{N_1} T_1(s) = \frac{100}{25} T_1(s) = 4T_1(s) \text{ et } D_e(s) = \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 D = \left(\frac{20}{100}\right)^2 25 = 1 N.m.s/rad$$

On a :

$$\theta_4(s) = \frac{N_3}{N_4}\theta_3(s) = \frac{20}{100}\theta_3(s) = \frac{1}{5}\theta_3(s)$$

D'où :

$$G(s) = \frac{\theta_4(s)}{T_1(s)} = \frac{\theta_3(s)}{5T_1(s)}$$

Déterminons $\theta_3(s)$

Le système d'équations correspondant au système équivalent est :

$$\begin{bmatrix} (K) \to -(K) \\ -(K) \to (D_e s + K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2(s) \\ \theta_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_e(s) \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1) \to -(1) \\ -(1) \to (s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2(s) \\ \theta_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4T_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

On isole θ_3(s) du système d'équations ci-dessus :

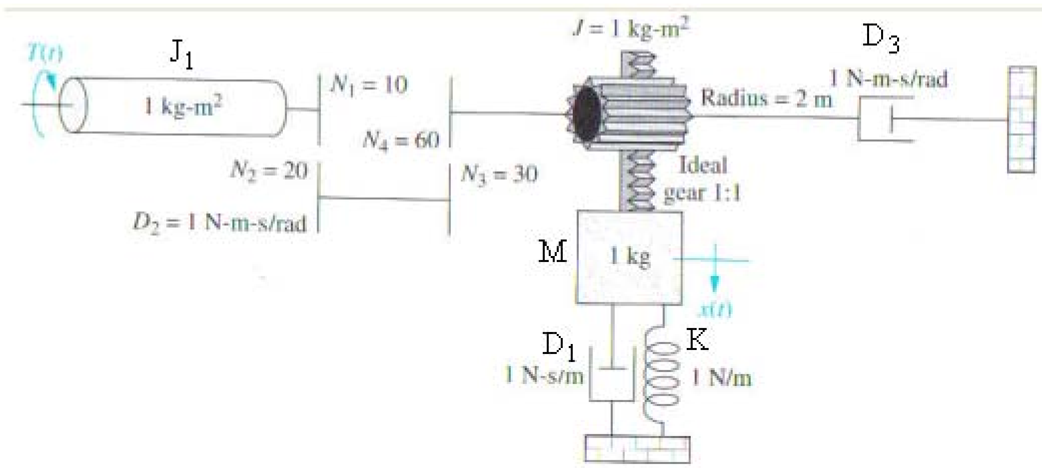
$$\theta_3(s) = \frac{4T_1(s)}{s} \qquad (2)$$

En tenant compte de (2) on obtient :

$$G(s) = \frac{0,8}{s}$$

Problème 2.4

On donne le système suivant:



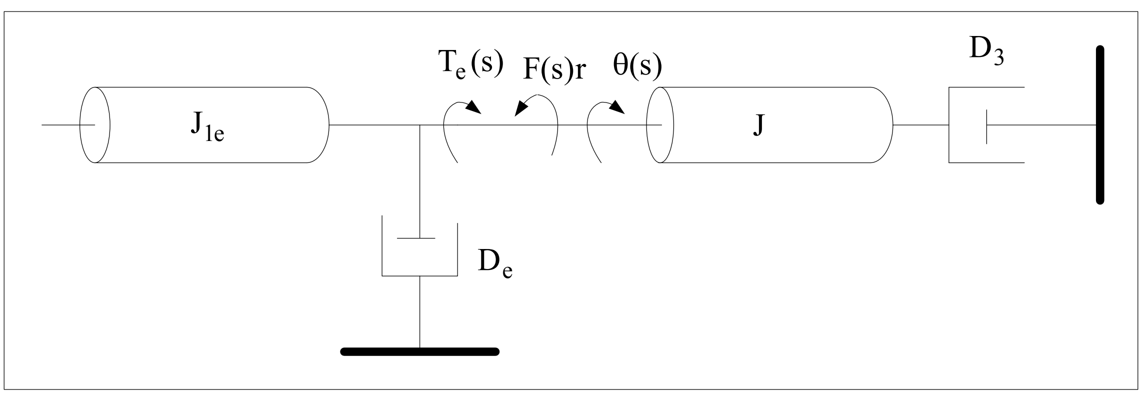
Déterminer la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{X(s)}{T(s)}$$

Solution

La partie rotationnelle du système a un degré de liberté. Déterminons le schéma équivalent sans engrenage.

On reflète J_1 et D_2 et $T(t)$ sur l'axe où se trouvent J et D_3. On obtient :



où :

$$T_e = \left(\frac{N_4}{N_3}\frac{N_2}{N_1}\right)T(s) = \left(\frac{60}{30}\frac{20}{10}\right)T(s) = 4T(s)$$

$$J_{1e} = \left(\frac{N_4}{N_3}\frac{N_2}{N_1}\right)^2 J_1 = \left(\frac{60}{30}\frac{20}{10}\right)^2 1 = 16\text{kg.m}^2$$

$$D_e(s) = \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 D = \left(\frac{60}{30}\right)^2 1 = 4\text{N.m.s / rad}$$

Déterminons X(s)

L'équation qui décrit la dynamique de la partie en rotation du système est :

$$(J + J_{1e})s^2\theta(s) + (D_3 + D_e)s\theta(s) + F(s)r = T_e(s) \qquad (1)$$

où : F(s) est la force agissant sur la partie en translation du système

En tenant compte des valeurs des paramètres on a :

$$(17s^2 + 5s)\theta(s) + 2F(s) = 4T(s) \qquad (2)$$

L'équation qui décrit la dynamique de la partie en translation du système est :

$$Ms^2X(s) + D_1sX(s) + KX(s) = F(s) \quad (3)$$

En tenant compte des valeurs des paramètres on a :

$$(s^2 + s + 1)X(s) = F(s) \qquad (4)$$

En tenant compte de (4), l'équation. (2) devient :

$$(17s^2 + 5s)\theta(s) + (2s^2 + 2s + 2)X(s) = 4T(s) \quad (5)$$

D'autre part :

$$\theta(s) = \frac{X(s)}{r} = \frac{X(s)}{2} \qquad (6)$$

En tenant compte de (6), l'équation. (5) devient :

$$(10{,}5s^2 + 4{,}5s + 2)X(s) = 4T(s)$$

D'où :

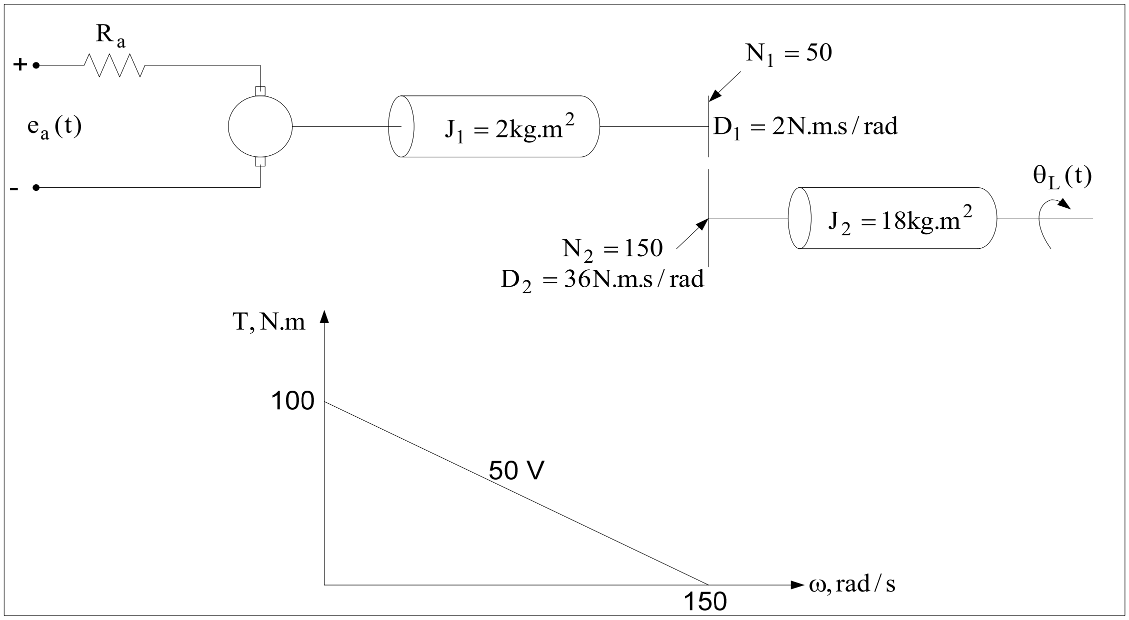
$$X(s) = \frac{4T(s)}{10{,}5s^2 + 4{,}5s + 2}$$

La fonction de transfert est :

$$G(s) = \frac{4}{10{,}5s^2 + 4{,}5s + 2}$$

Problème 2.5

On donne le système suivant:



Déterminer la fonction de transfert :

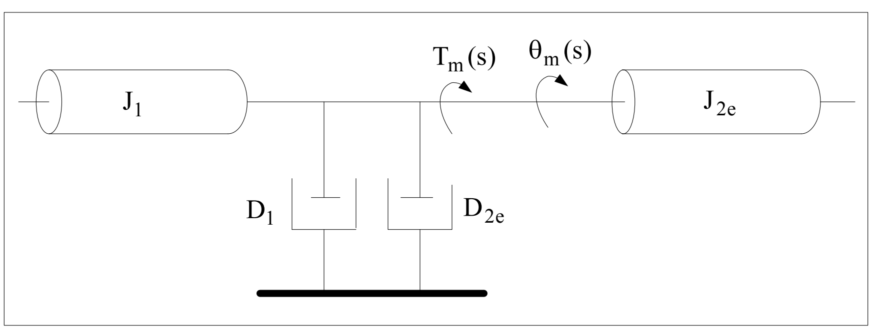
$$G(s) = \frac{\theta_L(s)}{E_a(s)}$$

Solution

Le système a 1 degré de liberté.

Déterminons le système mécanique équivalent sans engrenage :

On reflète J_2 et D_2 sur l'axe du moteur ou se trouve J_1 et D_1. On obtient le schéma équivalent de la partie rationnelle du système suivant :



où:

$$J_{2e} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 = \left(\frac{50}{150}\right)^2 18 = 2kg.m^2$$

$$D_{2e}(s) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 D_2 = \left(\frac{50}{150}\right)^2 36 = 4\text{N.m.s/rad}$$

On a :

$$\theta_L(s) = \frac{N_1}{N_2}\theta_m(s) = \frac{50}{150}\theta_m(s) = \frac{1}{3}\theta_m(s)$$

D'où :

$$G(s) = \frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{\theta_m(s)}{3E_a(s)}$$

Déterminons $\theta_m(s)/E_a(s)$

Calcul de J_m et D_m

$$J_m = J_1 + J_{2e} = 2 + 2 = 4\text{kg.m}^2 \qquad (1)$$

$$D_m = D_1 + D_{2e} = 2 + 4 = 6\text{N.m.s/rad} \qquad (2)$$

Calcul de K_b et k_t/R_a

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_v} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{mrb}}{e_a} = \frac{100}{50} = 2 \qquad (4)$$

Note : La vitesse à vide ω_v, le couple moteur T_{mrb} quand le rotor est bloqué, ainsi que la tension d'alimentation e_a du moteur sont donnés sur la caractéristique couple – vitesse ci-dessus.

La fonction de transfert $G_m(s)$ est :

$$G_m(s) = \frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} \qquad (5)$$

Donc, la fonction de transfert recherchée est :

$$G(s) = \frac{1}{3}\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{1}{3}G_m(s) = \frac{K_t/(R_a J_m)}{3s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]}$$

En tenant compte des valeurs des paramètres on a :

$$G(s) = \frac{0,5}{s(3s+5)}$$