Algèbre linéaire

Exercices

Soit $T : V^3 \longrightarrow V^3$ une application linéaire telle que

$$[T]_C = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$$

a) Donner une base de $Ker(T)$, le noyau de T.

b) Y a-t-il une relation entre les colonnes de A ? Si oui, donner cette relation. Si non, dire pourquoi il n'y en a pas.

c) Donne une base de $\mathrm{Im}\,(T)$, l'image de T.

d) Est-ce que le vecteur colonne $[3 \quad 2 \quad 3]^t$ appartient à l'image de A ? Si oui, l'écrire selon la base donnée en c).

e) Soit le système d'équations linéaires

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (*).$$

Sans résoudre le système (*), donner le nombre de solution(s) qu'il possède, et donner la ou les solutions(s).

$$[T]_C = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad C = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

a) $\operatorname{Ker}(T) = \{ \vec{u} \in V^3 \mid T(\vec{u}) = \vec{0} \}$

Il suffit de répondre $AX = 0$, ou encore de résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne, une fois échelonné

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

i.e. $y = -2z$ et $x = z$

Ainsi $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_C = z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_C \quad z \in \mathbb{R}$

Donc le vecteur $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ engendre $\operatorname{Ker}(T)$ et puisqu'il est libre (car non nul) il en constitue une base.

b) Puisque T est singulière (car $\operatorname{Ker}(T) \neq \{\vec{0}\}$), son rang n'est pas maximal et donc les colonnes de A sont liées. La relation entre les colonnes de T, notées C_1, C_2 et C_3, est

$C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$ (cette relation est donnée par le noyau de T).

c) Par le théorème de la dimension,

$$\dim \operatorname{Im}(T) = 3 - \dim \operatorname{Ker} T = 3 - 1 = 2$$

Or l'image de T est engendrée par les colonnes d'une de ses matrices. Il suffit de de choisir parmi les colonnes de A, 2 colonnes libres.
Les 2 premières colonnes, $[1\ 1\ 1]^t$ et $[2\ 1\ 2]^t$, forment un système libre et constituent donc une telle base.
<u>Rép.</u> : Base de $\operatorname{Im}(T) = \{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ 2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\}$

d) Vérifions si $[3\ 2\ 3]^t$ s'écrit selon la base donnée en c).
Voyons s'il existe deux nombres réels tels que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

L'équation (*) donne le système :

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases}$$

La solution est. $c_1 = c_2 = 1$

<u>Rép.</u>
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im}(A)$$

e) D'après d), on a $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}$, donc

l'équation (*) possède donc au moins une solution.

D'après a), $\ker T \neq \{\vec{0}\}$, donc $\det[T]_C = \det A = 0$

Donc l'équation (*) possède une infinité de solutions, ces solutions sont

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Obtenir les valeurs propres de A

b) Est-ce que A est diagonalisable? Si non, justifier. Si oui, donner la matrice P qui diagonalise A et donner la matrice diagonale.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\{-\lambda(3-\lambda)+2\}$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

<u>Rép.</u> : <u>Valeurs propres</u> $\lambda = 1$ (double) $\lambda = 2$ (simple)

b) A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont réelles (c'est le cas ici)
et
pour chaque valeur propre,
mult. géo. = mult. alg.

Par définition, multiplicité géométrique de $\lambda = \dim E_\lambda$
$= \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$

Pour $\lambda = 1$, la matrice $A - I = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ est de rang 2,

puisque ses 2 premières colonnes sont libres. Par le théorème de la dimension, $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 3 - 2 = 1$.

Ainsi $\lambda = 1$ est une valeur propre de mult algébrique 2 mais de multiplicité géométrique 1. Donc <u>A n'est pas diagonalisable</u>

Soit A une matrice 3×3 et B un vecteur colonne 3×1.
Si l'équation $AX = B$ a pour solutions
$x = 2 + t$, $y = 4 - 2t$, $z = 5 + 3t$ où $t \in \mathbb{R}$,

alors

i) base de $Ker(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$,

ii) A est une matrice inversible.

i) Vrai, car si un système d'équations linéaires (n équations à n inconnues) possède une infinité de solutions, alors $\det A = 0$ et les solutions apparaissent sous la forme $X_p + X_*$, où X_p est une solution particulière et X_* est la solution générale de l'équation $AX = 0$, et donc est élément de $\mathrm{Ker}(A)$

ii) Faux, car (voir i)) $\det A = 0$

i) Vrai, car si un système d'équations linéaires (n équations à n inconnues) possède une infinité de solutions, alors $\det A = 0$ et les solutions apparaissent sous la forme $X_p + X_*$, où X_p est une solution particulière et X_* est la solution générale de l'équation $AX = 0$, et donc est élément de $Ker(A)$

ii) Faux, car (voir i)) $\det A = 0$

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Donner le polynôme caractéristique de A.

b) Vérifier que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ est un vecteur propre de A.

c) Donner les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité algébrique.

d) Pour chaque valeur propre de A, donner une base du sous-espace propre qui lui est associé.

e) Est-ce que A est diagonalisable? Si non, justifier. Si oui, donner une matrice P qui diagonalise A ainsi que la matrice diagonale D associée.

f) Soit $T : V^3 \longrightarrow V^3$ une application linéaire telle que

$$[T]_C = A \quad \text{où} \quad C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$$

Donner une interprétation géométrique de T.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$

b) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2-2 \\ 2-1-2 \\ 2-2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est bien un vecteur propre de A et il est associé à la valeur propre -1.

c) Puisque -1 est une valeur propre de A, $p_A(\lambda)$ est divisible par $(\lambda+1)$. En factorisant $p_A(\lambda)$, on obtient

$p_A(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1)$

$= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

<u>Rép:</u>

valeur propre	$\lambda = -1$	$\lambda = 1$
mult. algébrique	simple	double

d) $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) =$ sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

• pour $\lambda = -1$:
Puisque λ est de mult. alg. 1, elle est de mult. géo 1 et donc le vecteur non nul $[1 \ 1 \ 1]^t$ en constitue une base

• pour $\lambda = 1$:
il suffit de résoudre $(A - I)X = 0$
i.e $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ce qui entraîne $x - y - z = 0$, de sorte que

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puisque les vecteurs colonnes $[1 \ 1 \ 0]^t$ et $[1 \ 0 \ 1]^t$ sont libres, ils forment une base de E_1

Rép.: Base de $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Base de $E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

c) A est diagonalisable, puisque toutes ses valeurs propres sont réelles et pour chacune, multiplicité géométrique égale multiplicité géométrique ($\dim E_{-1} = 1$, $\dim E_1 = 2$).

Soit V^3 et sa base usuelle où $C=\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

Soit une application linéaire $T : V^3 \to V^3$ telle que

$$T\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right) = (x+y+3z)\vec{\imath} + (x+2y+z)\vec{\jmath} + (x+y+3z)\vec{k}.$$

a) Donner $[T]_C$ la matrice représentative de T dans la base de C.

b) Quelle est la dimension de $Ker(T)$?

c) Donner une base de $\operatorname{Im}(T)$ et le rang de T.

d) Le vecteur $-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$ appartient à l'image de T, puisque $T\left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}\right)=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$.
Sachant cela, résoudre le système (*) d'équations linéaires.

$$(*)\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$T(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = (x+y+3z)\vec{i} + (x+2y+z)\vec{j} + (x+y+3z)\vec{k}$$

a) $$[T]_C = \left[\,[T(\vec{i})]_C \;\; [T(\vec{j})]_C \;\; [T(\vec{k})]_C\,\right]$$

On
$$T(\vec{i}) = T(1\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}) = 1\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$$
$$T(\vec{j}) = T(0\vec{i}+1\vec{j}+0\vec{k}) = 1\vec{i}+2\vec{j}+1\vec{k}$$
$$T(\vec{k}) = T(0\vec{i}+0\vec{j}+1\vec{k}) = 3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

<u>Rép.</u>: $$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $\mathrm{Ker}(T) = \{ \vec{u} \in V^3 \mid T(\vec{u}) = \vec{0} \}$

$$T(\vec{u}) = \vec{0} \iff (x+y+3z)\vec{i} + (x+2y+z)\vec{j} + (x+y+3z)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+3z = 0 \\ x+2y+z = 0 \\ x+y+3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+3z = 0 \\ \quad\ \ y-2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = 2z \quad \text{et} \quad x = -5z$$

Donc $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(T) \iff \vec{u} = -5z\vec{i} + 2z\vec{j} + z\vec{k} \quad z \in \mathbb{R}$

$\iff \vec{u} = z(-5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \quad z \in \mathbb{R}$

Ainsi $\mathrm{Ker}(T) = [-5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}]$, sous-espace de V^3 engendré par $-5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et puisque ce vecteur est non nul, il est libre et constitue donc une base de $\mathrm{Ker}(T)$. Donc $\underline{\dim \mathrm{Ker}(T) = 1}$.

c) Par le théorème de la dimension :

$$\dim \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{rang}(T) = \dim V^3$$

ou encore $\qquad 1 + \mathrm{rang}(T) = 3$

ce qui entraîne $\qquad \mathrm{rang}(T) = 2$.

Puisque l'image de T est engendrée par les colonnes de $[T]_c$ et que $\mathrm{rang}(T) = 2$, il suffit de choisir 2 colonnes libres parmi les colonnes de $[T]_c$.
Les 2 premières colonnes sont libres et peuvent donc être choisies

<u>Rép</u> : $\mathrm{Rang}(T) = 2$ et base de $\mathrm{Im}(T)$: $\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\}$

d) Notons $A = [T]_C$. Puisque le rang de A n'est pas maximal, $\det A = 0$. Ceci entraîne que le système d'équations linéaires

$$AX = B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

possède soit aucune solution soit une infinité de solutions.

Puisque $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = B$, le système possède une infinité de solutions X_* qui sont de la forme $X_* =$ solution particulière $+ X$ où $X \in \operatorname{Ker} A$

Donc
$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

d) Notons $A = [T]_C$. Puisque le rang de A n'est pas maximal, $\det A = 0$. Ceci entraîne que le système d'équations linéaires

$$AX = B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

possède soit aucune solution soit une infinité de solutions.

Puisque $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = B$, le système possède une infinité de solutions X_* qui sont de la forme $X_* =$ solution particulière $+ X$ où $X \in \operatorname{Ker} A$

Donc $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Soit $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ une base de V^3 telle que

$$\vec{b}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b}_2 = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{b}_3 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

La base orthonormale, obtenue à partie de B par le procédé de Gram-Schmidt, est

$$B'' = \left(\frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}, \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}, \frac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3} \right).$$

a) Donner la matrice de transition de B à B'', ${}_{B''}P_B$.

b) Donner la matrice de transition de C à B'', ${}_{B''}P_C$.

c) Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Donner $[\vec{u}]_{B''}$.

d) Soit $W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$. Exprimer $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ où $\vec{w}_1 \in W$ et $\vec{w}_2 \in W^{\perp}$

a) ${}_{B''}P_{B} = \left[[\vec{b}_1]_{B''} \; [\vec{b}_2]_{B''} \; [\vec{b}_3]_{B''} \right]$

Puisque B'' est une base orthonormale, par le théorème 9,

$$\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{b}_1'')\vec{b}_1'' + (\vec{u}\cdot\vec{b}_2'')\vec{b}_2'' + (\vec{u}\cdot\vec{b}_3'')\vec{b}_3''$$

quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de V^3.

Ainsi donc $\vec{b}_1 = 3\vec{b}_1''$, $\vec{b}_2 = -3\vec{b}_1'' + 3\vec{b}_2''$ et

$$\vec{b}_3 = 2\vec{b}_1'' + \vec{b}_2'' + \vec{b}_3''$$

<u>Réponse</u> $${}_{B''}P_{B} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) On sait que ${}_{B''}P_{C} = {}_{C}P_{B''}^{-1}$. Or B'' et C étant des bases orthonormales, il s'ensuit que ${}_{C}P_{B''}^{-1} = {}_{C}P_{B''}^{t}$. La matrice ${}_{C}P_{B''}$ est immédiate puisque les vecteurs de B'' sont déjà décomposés selon la base C;

$$ {}_{C}P_{B''} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. $$

<u>Réponse</u> :
$$ {}_{B''}P_{C} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} $$

c) On peut trouver $[\vec{u}]_{B''}$, soit en utilisant le théorème :

soit en utilisant la matrice de transition ${}_{B''}P_C$

<u>Réponse</u> : $[\vec{u}]_{B''} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Puisque $[\vec{u}]_{B''} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix}$, il s'ensuit que

$$\vec{u} = \frac{5}{3}\vec{b}_1'' + \frac{1}{3}\vec{b}_2'' + \frac{1}{3}\vec{b}_3''$$

Or $W_2 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = [\vec{b}_1'', \vec{b}_2'']$ et $\vec{b}_3'' \in W_2^{\perp}$, ainsi

$$\vec{u} = \underbrace{\frac{5}{3}\vec{b}_1'' + \frac{1}{3}\vec{b}_2''}_{\in W_2} + \underbrace{\frac{1}{3}\vec{b}_3''}_{\in W_2^{\perp}}$$

Donc $\vec{w}_1 = \dfrac{5\vec{b}_1'' + \vec{b}_2''}{3} = \dfrac{11\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}}{9}$

et $\vec{w}_2 = \dfrac{\vec{b}_3''}{3} = \dfrac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{9}$

<u>Réponse</u>: $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \dfrac{11\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}}{9} + \dfrac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{9}$

Soit $U = \left\{ \vec{u} \in V^3 \;\middle|\; \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où} \quad x - 4y + 3z = 0 \right\}$.

a) Donner une base de U et sa dimension.

b) Soit $U^{\perp}$ le complément orthogonal de U. Donner une base de $U^{\perp}$.

c) Soit $\vec{u} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 7\vec{k}$. Calculer $proj_U\,\vec{u}$.

$U = \{ \vec{u} \in V^3 \mid \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ où } x - 4y + 3z = 0 \}$

a) $\vec{u} \in U$ ssi $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où $x = 4y - 3z$

ssi $\vec{u} = (4y - 3z)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $y, z \in R$

ssi $\vec{u} = y(4\vec{i} + \vec{j}) + z(-3\vec{i} + \vec{k})$ $y, z \in R$

ssi $\vec{u} \in [4\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{i} - \vec{k}]$

Les vecteurs $4\vec{i} + \vec{j}$ et $3\vec{i} - \vec{k}$ ne sont pas parallèles, le système $\{ 4\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{i} - \vec{k} \}$ est donc libre.

<u>Réponse</u>: Base de $U = \{ 4\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{i} - \vec{k} \}$.

b) $U^{\perp} = \{ \vec{v} \in V^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall \vec{u} \in U \}$

Or $\vec{u} \in U$ ssi $\vec{u} = \ell_1 (4\vec{i} + \vec{j}) + \ell_2 (3\vec{i} - \vec{k})$, de sorte que $\vec{v} \in V^3$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ deviennent

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \ell_1 (4x + y) + \ell_2 (3x - z) = 0 .$$

Cette dernière équation étant vraie quels que soient les nombres réels ℓ_1 et ℓ_2, il s'ensuit que

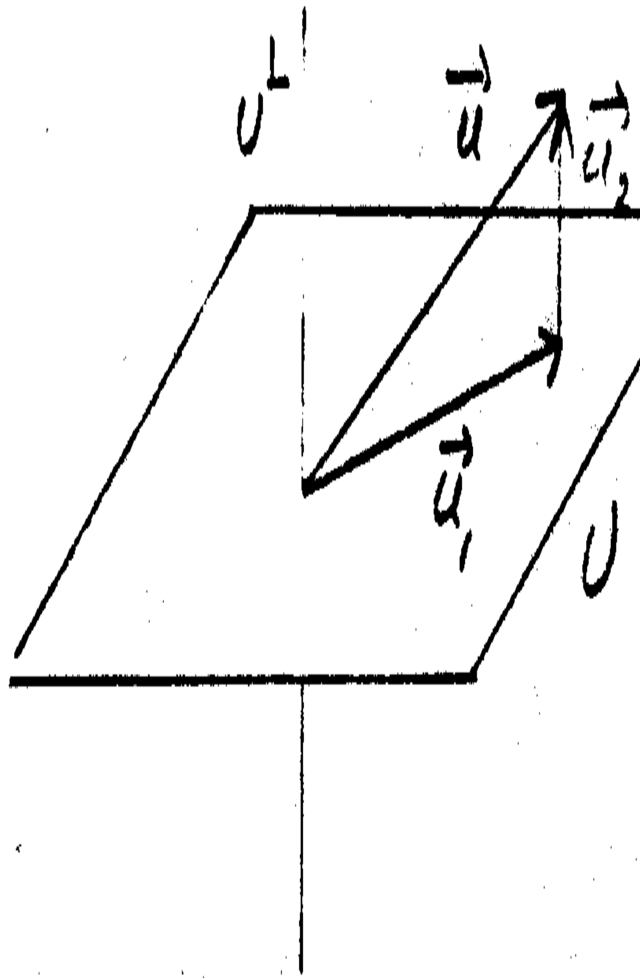
$$y = -4x \quad \text{et que} \quad z = 3x .$$

donc $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} - 4x\vec{j} + 3x\vec{k} = x(\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k})$

Le vecteur $\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, étant non nul, est libre.

Réponse: Base de $U^{\perp} = \{ \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k} \}$.

c)



$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_U \vec{u} &= \vec{u}_1 \\ &= \vec{u} - \vec{u}_2 \\ &= \vec{u} - \mathrm{proj}_{U^{\perp}} \vec{u} \end{aligned}$$

Soit $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, une base de $U^{\perp}$, alors

$$\text{proj}_{\perp} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{78}{26} \vec{b} = 3\vec{b}$$

$$= 3\vec{i} - 12\vec{j} + 9\vec{k}$$

Ainsi $\text{proj}_{U} \vec{u} = \vec{u} - \text{proj}_{\perp} \vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{k}$

<u>Réponse</u>: $\text{proj}_{U} \vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{k}$