



Université Internationale  
de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Nous innovons pour votre réussite !

# **COURS**

## **TRANSFERTS THERMIQUES**

### Chapitre 2

### Conductivité thermique

FILIÈRE **CYCLE INGENIEUR**

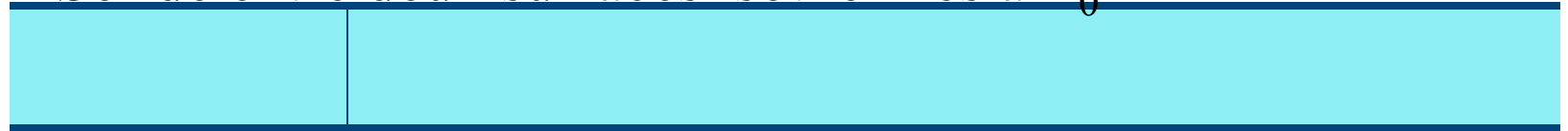
SESSION **S5**

# Sommaire

- Conductivité
  - gaz
    - théorie cinétique
    - relations empiriques
  - liquides et solides
- Loi de Fourier

## Profil transitoire de Température

Solide entre deux surfaces isothermes à  $T_0$



Plaque inférieure soudainement chauffée à  $T_1$



Profil après  $t$



Profil en état de régime



Loi de Fourier: interprétation macroscopique

$$\frac{Q}{A} = k \frac{(T_1 - T_0)}{Y} = -k \frac{T_0 - T_1}{Y - 0}$$

Loi de Fourier

$$q_y = -k \frac{dT}{dy}$$

Loi de Fourier,  $q$  est un vecteur, il a donc une grandeur et une orientation.

Ici,  $c'$  est un milieu isotrope, où  $k$  est le même pour les 3 orientations. Ce n'est pas toujours le cas, exemple: le bois.

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$
$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

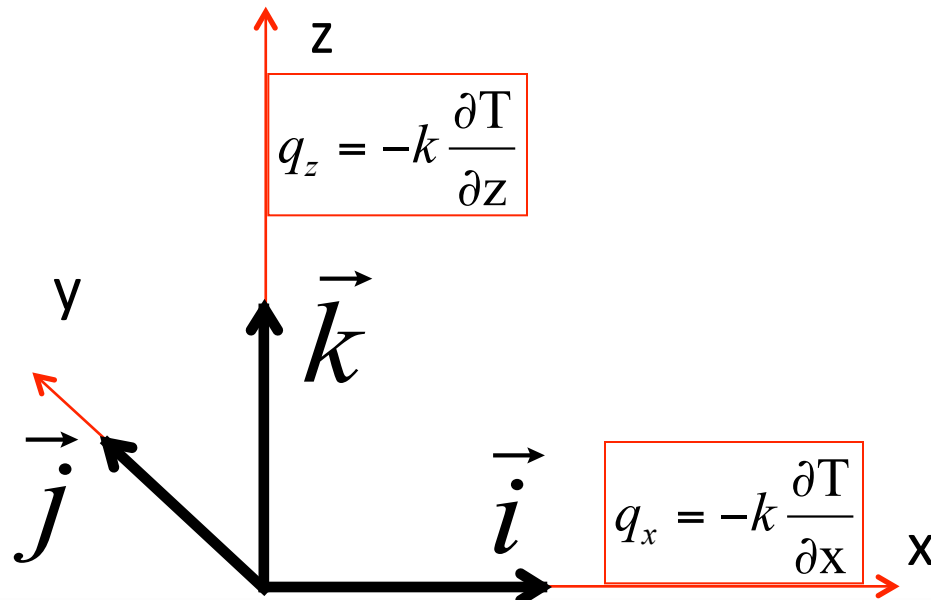
# Loi de Fourier, formulation vectorielle

Notation compacte

Notation complète, plus claire mais plus lourde

$$\vec{q} = -k(\vec{\nabla})T = -k\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)T$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$



## Exemple simple, calcul de la conductivité thermique



$T=10$

Par la loi de Fourier:

$$\frac{Q}{A} = -k \frac{T_1 - T_0}{\Delta Y}$$

$$\frac{10}{0.1} = -k \frac{20 - 10}{0.01}$$

$$k = \frac{0.01 \cdot 10}{0.1 \cdot 10} = 0.1 \frac{W}{m \cdot K}$$

Deux nombres importants:

Diffusivité thermique:

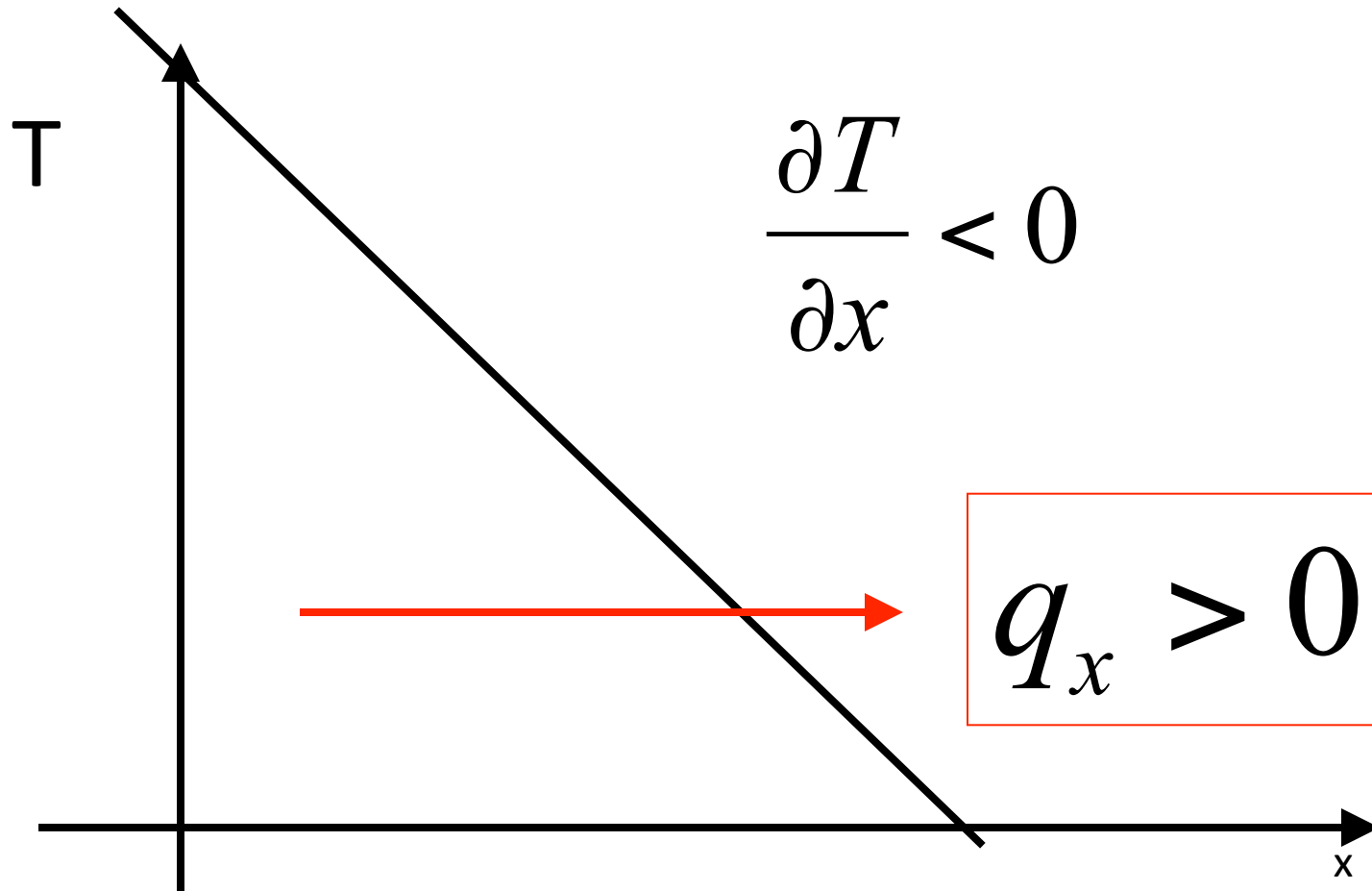
$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p}$$

Nombre de Prandtl:

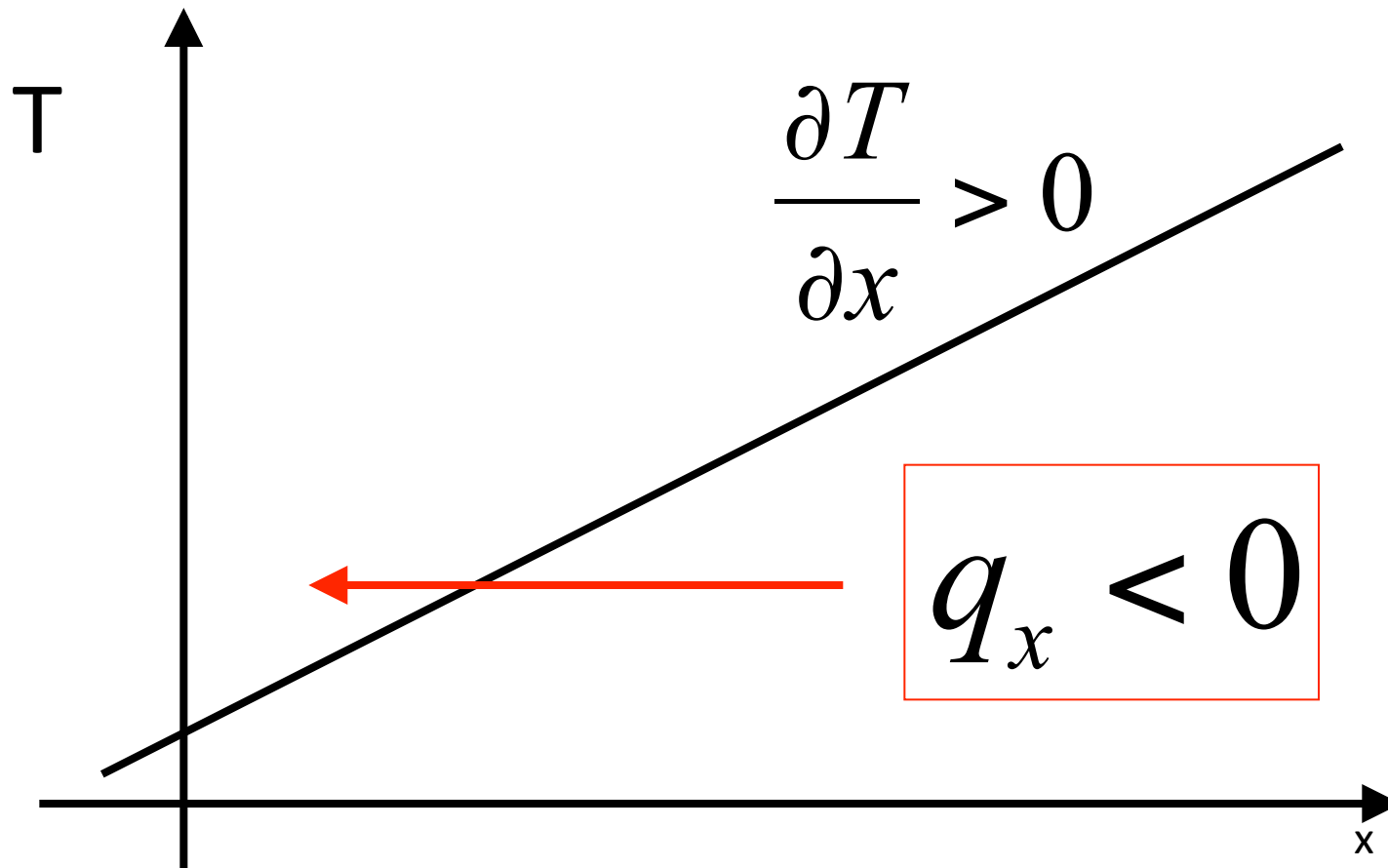
$$\text{Pr} = \frac{\hat{C}_p \mu}{k}$$



# Flux de chaleur, conduction



# Flux de chaleur, conduction



# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

## Méthodes empiriques: utilisation du graphe 9.2-1 de BSL

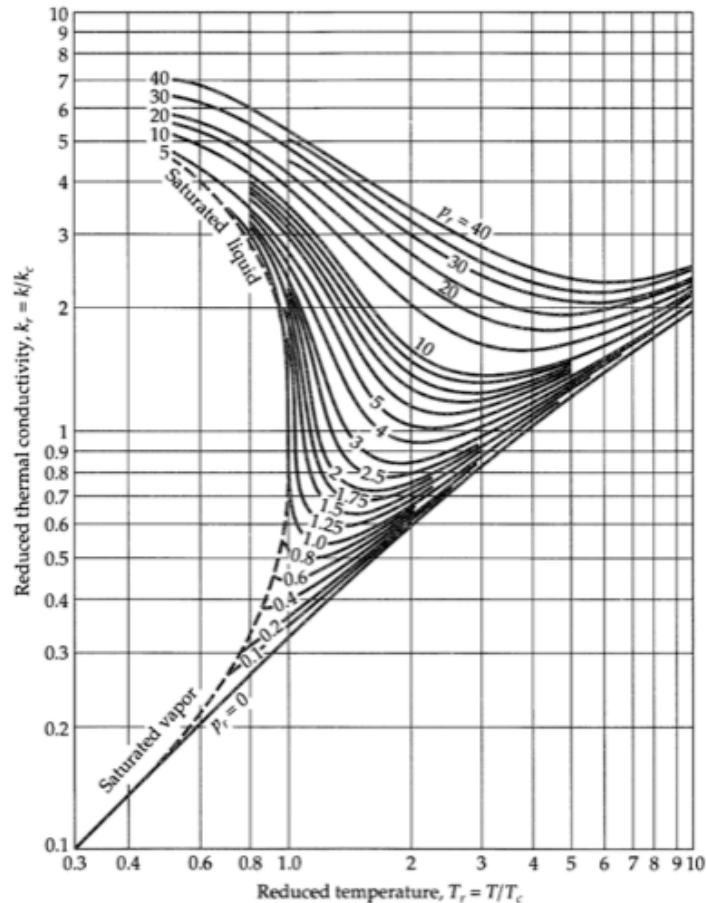
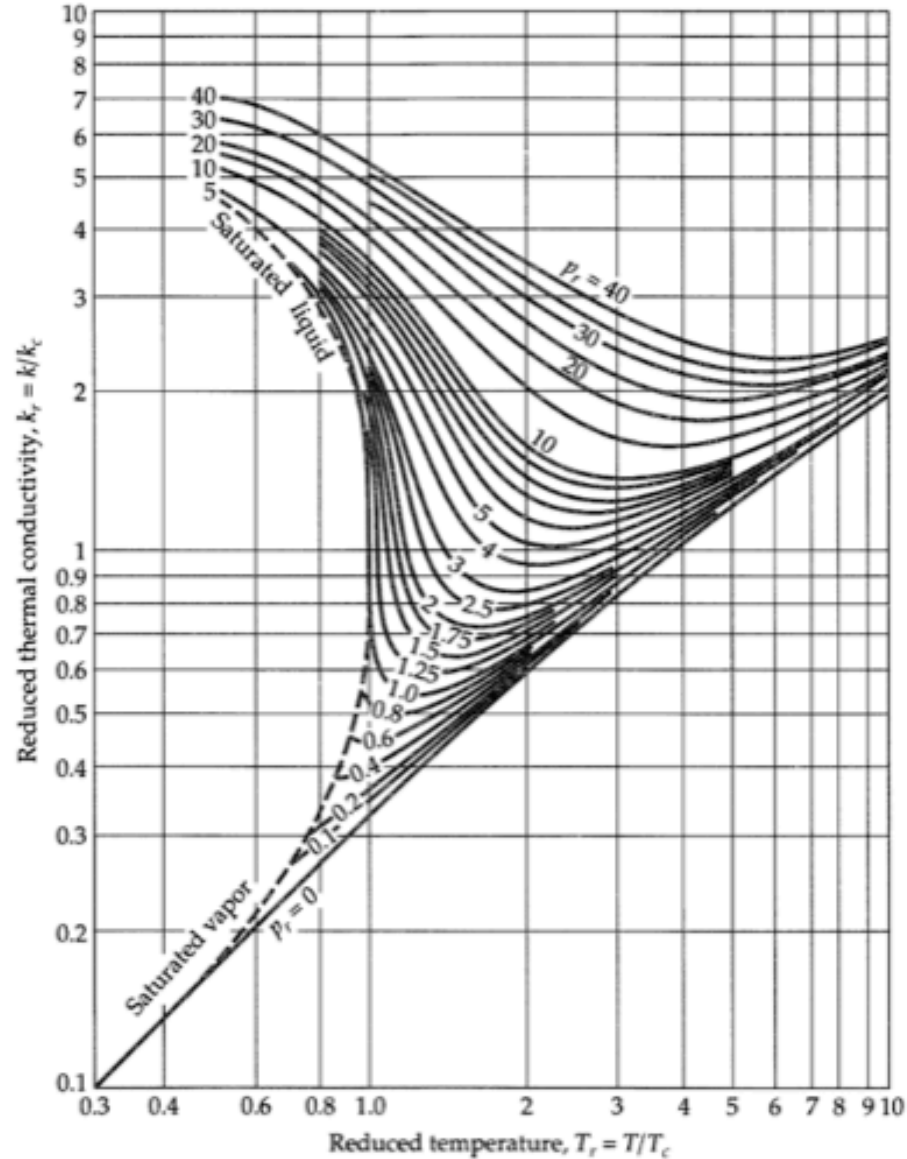


Fig. 9.2-1. Reduced thermal conductivity for monatomic substances as a function of the reduced temperature and pressure [E. J. Owens and G. Thodos, *AIChE Journal*, 3, 454–461 (1957)]. A large-scale version of this chart may be found in O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles Charts*, 2nd edition, Wiley, New York (1960).

On connaît la conductivité  $k$  d'un gaz en un point, et on connaît les propriétés critiques  $T_c$  et  $P_c$ . On évalue alors sur le graphique la valeur de  $k_R$  sur le graphe et ensuite la valeur de  $k_C$  sera évaluée en faisant simplement  $k_C = k / k_R$ . Par la suite il sera facile de déterminer la conductivité en tout autre point.



**Fig. 9.2-1.** Reduced thermal conductivity for monatomic substances as a function of the reduced temperature and pressure [E. J. Owens and G. Thodos, *AIChE Journal*, 3, 454–461 (1957)]. A large-scale version of this chart may be found in O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles Charts*, 2nd edition, Wiley, New York (1960).

# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

**Méthodes empiriques:** utilisation du graphe 9.2-1 de BSL

**Exemple:** Estimer la conductivité thermique de l'éthane à  $100.7^{\circ}\text{F}$  et  $191.1\text{ atm}$  à partir de la valeur expérimentale  $k=0.0159\text{ Btu/hr.ft.F}$  à  $100.7^{\circ}\text{F}$  et  $1\text{ atm}$ . Données  $T_c=32.4^{\circ}\text{C}$  et  $P_c=48.2\text{ atm}$

# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

**Méthodes empiriques:** utilisation du graphe 9.2-1 de BSL

**Exemple:** Estimer la conductivité thermique de l'éthane à 100.7<sup>0</sup>F et 191.1 atm à partir de la valeur expérimentale  $k=0.0159$  Btu/hr.ft.F à 100.7<sup>0</sup>F et 1 atm. Données  $T_c=32.4^0\text{C}$  et  $P_c=48.2\text{atm}$

**Réponse:** Une valeur mesurée de  $\kappa$  est connue. On calcule  $T_r$  et  $P_r$  dans les conditions de la valeur mesurée.

$$T_r = \frac{100.7}{1.8 * 32.4 + 32} = 1.115$$

$$P_r = \frac{1}{48.2} = 0.021$$

# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

**Méthodes empiriques:** utilisation du graphe 9.2-1 de BSL

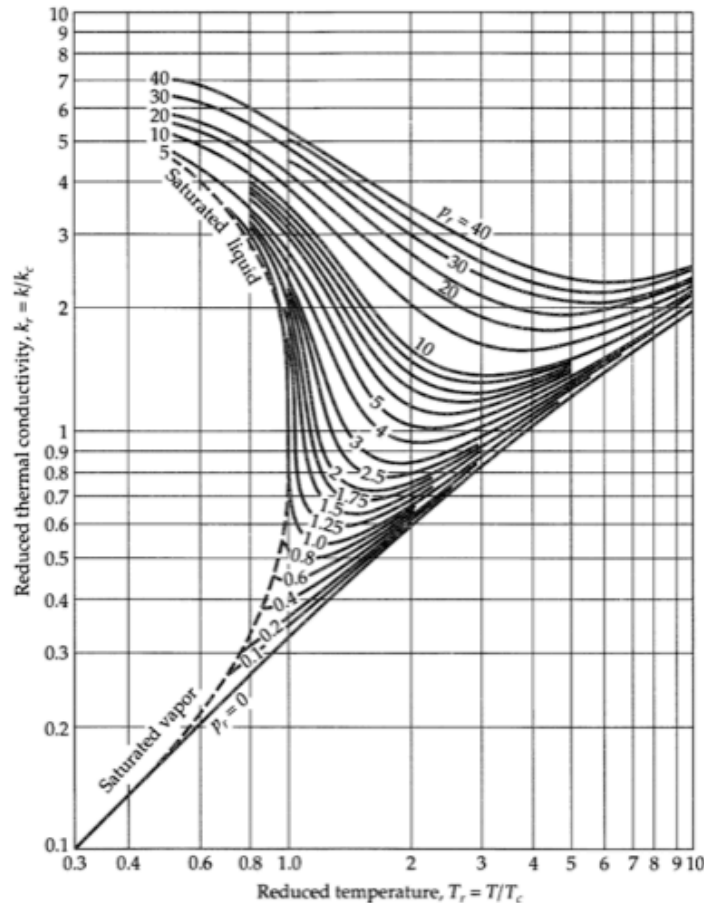


Fig. 9.2-1. Reduced thermal conductivity for monatomic substances as a function of the reduced temperature and pressure [E. J. Owens and G. Thodos, *AIChE Journal*, 3, 454-461 (1957)]. A large-scale version of this chart may be found in O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles Charts*, 2nd edition, Wiley, New York (1960).

$$T_r = 1.115 \quad P_r = 0.021$$

À partir du graphe, on a  $k_r = 0.36$

$$K_c = \frac{K}{K_r} = \frac{0.0159}{0.36} = 0.0442 \text{ Btu/hr.ft.F}$$

À 100.7°F ( $T_r = 1.115$ ) et 191.9 atm ( $P_r = 3.98$ ),  
On lit à partir du graphe  $k_r = 2.07$

$$K = K_r K_c = 2.07 * 0.0442 = 0.0914 \text{ Btu/hr.ft.F}$$

# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

## Méthodes empiriques: utilisation du graphe 9.2-1 de BSL

**Exemple1:** Estimer la conductivité thermique de l'éthane à  $T=190\text{ }^{\circ}\text{F}$  et  $P=100\text{ atm}$  à partir des valeurs expérimentales  $k=0.0159\text{ Btu/hr. ft. }^{\circ}\text{F}$  à  $1\text{ atm}$  et  $153^{\circ}\text{F}$ .

Données  $T_c=32.4^{\circ}\text{C}$  et  $P_c=48.2\text{ atm}$

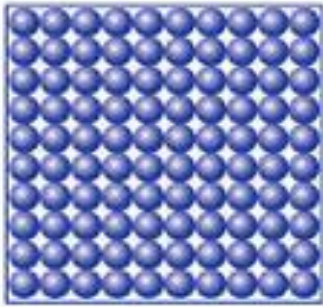
**Exemple2:** Calculez la conductivité thermique du tétrachlorométhane  $\text{CCl}_4$  (liquide saturé) à  $45\text{ degrés C}$  à partir des valeurs expérimentales  $k=0.09929\text{ W/m.k}$  à  $300\text{ K}$

Données  $T_c=556.4\text{ K}$ ,  $P_c=45\text{ atm}$

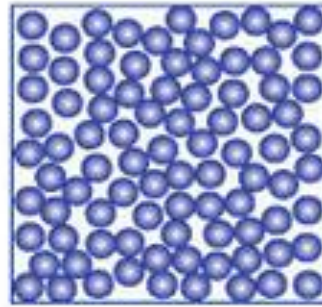


# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE DES GAZES

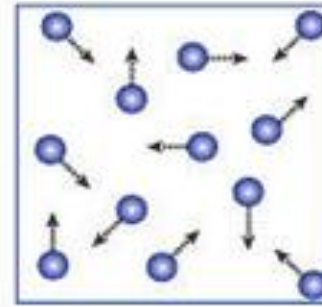
## Gazes, liquide et solide: différence



solide



liquide



gaz

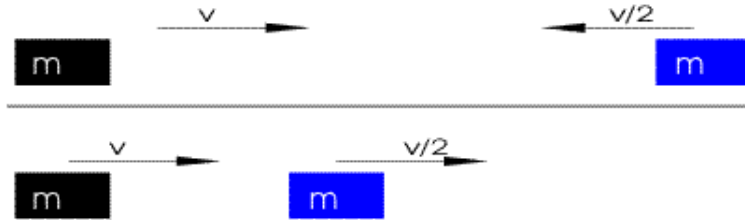
## Théorie cinétique

Méthode basée sur la théorie moléculaire. On considère alors le gaz comme constitué d'un grand nombre de particules. Les propriétés macroscopiques (densité, viscosité, pression, etc...) sont alors la conséquence du comportement microscopique des gaz.

**Attention!!!** *Les particules subissent uniquement des collisions élastiques*

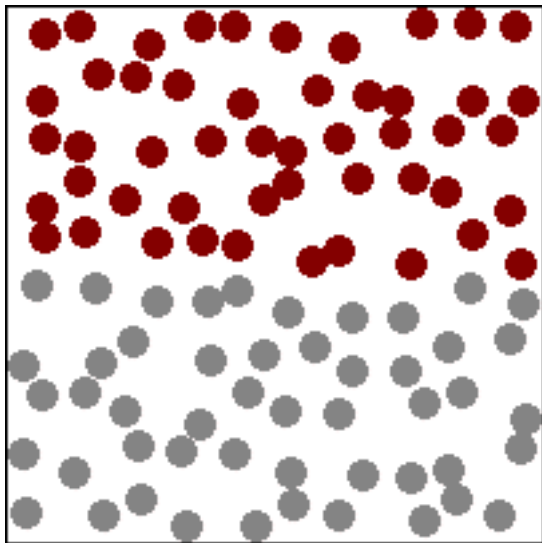
# Détermination de la conductivité thermique des gazes

## Collision élastiques



$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

Contrairement aux collision inélastiques, l'énergie cinétique est conservée dans le cas des collision élastiques.



- Concept relativement simple
- Molécules en mouvement aléatoire constant
- Se frappent les unes aux autres
- Échanges du momentum et de l'énergie

### Lors d'un passage vers une région + froide

- Transporte l'énergie cinétique
- Par collision avec les molécules de + faible énergie

# Détermination de la conductivité thermique des gazes

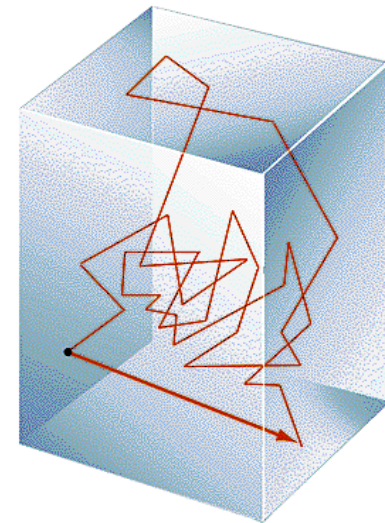
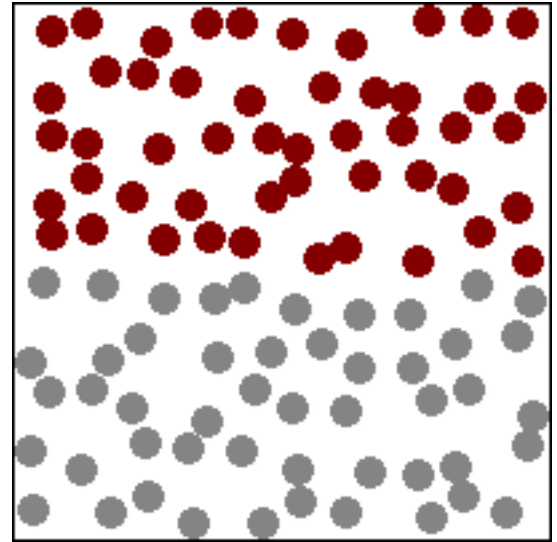
## Théorie cinétique des gazs

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad , \quad \frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\tilde{C}_v = \frac{3}{2} R$$

Libre parcours moyen  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$

Les molécules atteignant n'importe quel plan dans le gaz ont eu, en moyenne, leur dernière collision à une distance  $a$  du plan, où  $a = \frac{2}{3} \lambda$



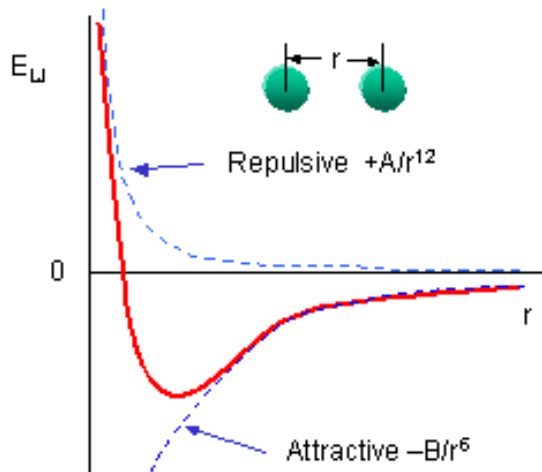
# DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE DES GAZES

Propriété : conductivité (collisions de sphères rigides)

$$k = \frac{1}{2} n k_B \bar{u} \lambda = \frac{1}{3} \rho \tilde{C}_v \bar{u} \lambda$$

$$k = \frac{1}{d^2} \sqrt{\frac{k_B^3 T}{\pi^3 m}}$$

Amélioration du modèle de collisions: attraction-répulsion sur une courte distance. (Lennard-Jones)



$$k = 1.9891 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} \text{ Cal cm}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$T [K]$$

$$\sigma [A^0]$$

# Détermination de la conductivité thermique des gazes

Table E.1 Lennard-Jones (6-12) Potential Parameters and Critical Properties

		Lennard-Jones parameters			Critical properties <sup>a,b</sup>				
Substance	Molecular Weight <i>M</i>	$\sigma$ (Å)	$\epsilon/\kappa$ (K)	Ref.	$T_c$ (K)	$p_c$ (atm)	$\hat{V}_c$ (cm <sup>3</sup> /g-mole)	$\mu_c$ (g/cm <sup>3</sup> · s × 10 <sup>6</sup> )	$k_c$ (cal/cm <sup>3</sup> · s · K × 10 <sup>6</sup> )
<b>Light elements:</b>									
H <sub>2</sub>	2.016	2.915	38.0	<i>a</i>	33.3	12.80	65.0	34.7	—
He	4.003	2.576	10.2	<i>a</i>	5.26	2.26	57.8	25.4	—
<b>Noble gases:</b>									
Ne	20.183	2.789	35.7	<i>a</i>	44.5	26.9	41.7	156.	79.2
Ar	39.948	3.432	122.4	<i>b</i>	150.7	48.0	75.2	264.	71.0
Kr	83.80	3.675	170.0	<i>b</i>	209.4	54.3	92.2	396.	49.4
Xe	131.30	4.009	234.7	<i>b</i>	289.8	58.0	118.8	490.	40.2
<b>Simple polyatomic gases:</b>									
Air	28.97 <sup>c</sup>	3.617	97.0	<i>a</i>	132. <sup>c</sup>	36.4 <sup>c</sup>	86.6 <sup>c</sup>	193.	90.8
N <sub>2</sub>	28.01	3.667	99.8	<i>b</i>	126.2	33.5	90.1	180.	86.8
O <sub>2</sub>	32.00	3.433	113.	<i>a</i>	154.4	49.7	74.4	250.	105.3
CO	28.01	3.590	110.	<i>a</i>	132.9	34.5	93.1	190.	86.5
CO <sub>2</sub>	44.01	3.996	190.	<i>a</i>	304.2	72.8	94.1	343.	122.
NO	30.01	3.470	119.	<i>a</i>	180.	64.	57.	258.	118.2
N <sub>2</sub> O	44.01	3.879	220.	<i>a</i>	309.7	71.7	96.3	332.	131.
SO <sub>2</sub>	64.06	4.026	363.	<i>c</i>	430.7	77.8	122.	411.	98.6
F <sub>2</sub>	38.00	3.653	112.	<i>a</i>	—	—	—	—	—
Cl <sub>2</sub>	70.91	4.115	357.	<i>a</i>	417.	76.1	124.	420.	97.0
Br <sub>2</sub>	159.82	4.268	520.	<i>a</i>	584.	102.	144.	—	—
I <sub>2</sub>	253.81	4.982	550.	<i>a</i>	800.	—	—	—	—
<b>Hydrocarbons:</b>									
CH <sub>4</sub>	16.04	3.780	154.	<i>b</i>	191.1	45.8	98.7	159.	158.
CH≡CH	26.04	4.114	212.	<i>d</i>	308.7	61.6	112.9	237.	—
CH <sub>2</sub> =CH <sub>2</sub>	28.05	4.228	216.	<i>b</i>	282.4	50.0	124.	215.	—
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30.07	4.388	232.	<i>b</i>	305.4	48.2	148.	210.	203.
CH <sub>3</sub> C≡CH	40.06	4.742	261.	<i>d</i>	394.8	—	—	—	—
CH <sub>3</sub> CH=CH <sub>2</sub>	42.08	4.766	275.	<i>b</i>	365.0	45.5	181.	233.	—
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	44.10	4.934	273.	<i>b</i>	369.8	41.9	200.	228.	—
<i>n</i> -C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.12	5.604	304.	<i>b</i>	425.2	37.5	255.	239.	—

Paramètres de Lennard-Jones pour quelques gazes

**Table E.2** Collision Integrals for Use with the Lennard-Jones (6-12) Potential for the Prediction of Transport Properties of Gases at Low Densities<sup>a,b,c</sup>

$\kappa T/\varepsilon$ or $\kappa T/\varepsilon_{AB}$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ (for viscosity and thermal conductivity)	$\Omega_{\mathfrak{D},AB}$ (for diffusivity)	$\kappa T/\varepsilon$ or $\kappa T/\varepsilon_{AB}$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ (for viscosity and thermal conductivity)	$\Omega_{\mathfrak{D},AB}$ (for diffusivity)
0.30	2.840	2.649	2.7	1.0691	0.9782
0.35	2.676	2.468	2.8	1.0583	0.9682
0.40	2.531	2.314	2.9	1.0482	0.9588
0.45	2.401	2.182	3.0	1.0388	0.9500
0.50	2.284	2.066	3.1	1.0300	0.9418
0.55	2.178	1.965	3.2	1.0217	0.9340
0.60	2.084	1.877	3.3	1.0139	0.9267
0.65	1.999	1.799	3.4	1.0066	0.9197
0.70	1.922	1.729	3.5	0.9996	0.9131
0.75	1.853	1.667	3.6	0.9931	0.9068
0.80	1.790	1.612	3.7	0.9868	0.9008
0.85	1.734	1.562	3.8	0.9809	0.8952
0.90	1.682	1.517	3.9	0.9753	0.8897
0.95	1.636	1.477	4.0	0.9699	0.8845
1.00	1.593	1.440	4.1	0.9647	0.8796
1.05	1.554	1.406	4.2	0.9598	0.8748
1.10	1.518	1.375	4.3	0.9551	0.8703
1.15	1.485	1.347	4.4	0.9506	0.8659
1.20	1.455	1.320	4.5	0.9462	0.8617
1.25	1.427	1.296	4.6	0.9420	0.8576
1.30	1.401	1.274	4.7	0.9380	0.8537
1.35	1.377	1.253	4.8	0.9341	0.8499
1.40	1.355	1.234	4.9	0.9304	0.8463
1.45	1.334	1.216	5.0	0.9268	0.8428
1.50	1.315	1.199	6.0	0.8962	0.8129

1.50	1.315	1.199	6.0	0.8962	0.8129
1.55	1.297	1.183	7.0	0.8727	0.7898
1.60	1.280	1.168	8.0	0.8538	0.7711
1.65	1.264	1.154	9.0	0.8380	0.7555
1.70	1.249	1.141	10.0	0.8244	0.7422
1.75	1.235	1.128	12.0	0.8018	0.7202
1.80	1.222	1.117	14.0	0.7836	0.7025
1.85	1.209	1.105	16.0	0.7683	0.6878
1.90	1.198	1.095	18.0	0.7552	0.6751
1.95	1.186	1.085	20.0	0.7436	0.6640
2.00	1.176	1.075	25.0	0.7198	0.6414
2.10	1.156	1.058	30.0	0.7010	0.6235
2.20	1.138	1.042	35.0	0.6854	0.6088
2.30	1.122	1.027	40.0	0.6723	0.5964
2.40	1.107	1.013	50.0	0.6510	0.5763
2.50	1.0933	1.0006	75.0	0.6140	0.5415
2.60	1.0807	0.9890	100.0	0.5887	0.5180

## Détermination de la conductivité thermique des gazes

**Exemple:** Calculer la conductivité thermique du Ne à 1atm et 373.2K.

La masse molaire de Ne est 20.183g/mol. Du table E.1 on trouve les paramètres de Lennard-Jones  $\sigma = 2.789 \text{ \AA}$  et  $\varepsilon/k = 35.7K$   
À T=373.2K , on a  $kT/\varepsilon = 373.2/35.7 = 10.45$

Du table E.2, on trouve  $\Omega_k = 0.821$  , d'ou  $\kappa = (1.9891 \times 10^{-4}) \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k}$

$$\kappa = (1.9891 \times 10^{-4}) \frac{\sqrt{373.2/20.183}}{(2.789)^2 (0.821)}$$
$$\kappa = 1.338 \times 10^{-4} \text{ cal/cm.s.K}$$



# Détermination de la conductivité thermique des gazes

## Gaz polyatomique

- ① On détermine d'abord la viscosité par la méthode décrite au chapitre 1 (transfert de quantité de mouvement), elle s'exprime en **g/cm.s**

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

- ② On utilise ensuite la relation approximée suivante (Eucken):

$$k = \left( \tilde{C}_p + \frac{5R}{4M} \right) \mu$$

# Détermination de la conductivité thermique des gazes

## Mélange de gazs

Formule de Wilke

$$k_{mix} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i k_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2$$

# Détermination de la conductivité thermique des gazes

## Mélange de gazs

Prédire la conductivité thermique des mélanges suivants à  $P = 1 \text{ atm}$  et  $T = 293 \text{ K}$  à partir des données des composantes pures à la même pression et température.

Species	$\alpha$	Mole fraction $x_\alpha$	Molecular weight $M_\alpha$	$\mu_\alpha \times 10^7$ (g/cm · s)	$k_\alpha \times 10^7$ (cal/cm · s · K)
CO <sub>2</sub>	1	0.133	44.010	1462	383
O <sub>2</sub>	2	0.039	32.000	2031	612
N <sub>2</sub>	3	0.828	28.016	1754	627

# Détermination de la conductivité thermique

## Questions de compréhension

1. Comparer les ordres de grandeurs de la conductivité thermique des gazs, liquides et solides
2. Sont les viscosités et les conductivités thermiques des gazs liés?  
Si oui, comment?
3. Quelle est la relation entre la chaleur spécifique molaire à volume et à pression constantes pour les gazs parfaits?

# Problèmes (fortement) suggérés

- Chapitre 9 du Transport phenomena:
  - 9A1, 9A4, 9A11