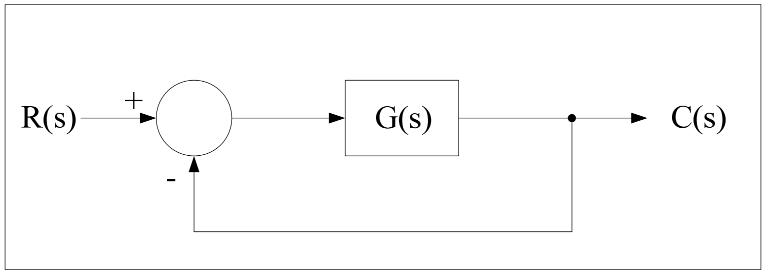
Pb. 6.15
Un système a le schéma bloc suivant :



On donne :

$$G(s) = \frac{8}{s(s^6 - 2s^5 - s^4 + 2s^3 + 4s^2 - 8s - 4)}$$

Étudier la stabilité du système.

Solution

1) Dénominateur $D_{bf}(s)$ de la FT en boucle fermée
La fonction de transfert (TF) du système en boucle fermée est :

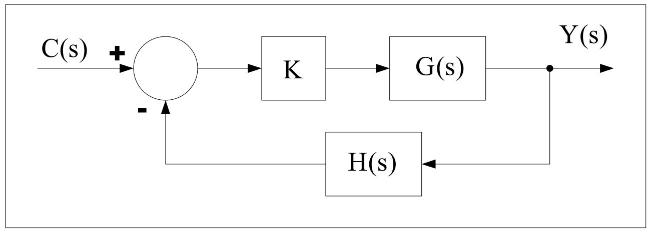
$$G_{bf}(s) = \frac{8}{s^7 - 2s^6 - s^5 + 2s^4 + 4s^3 - 8s^2 - 4s + 8}$$

Donc,

$$D_{bf}(s) = s^7 - 2s^6 - s^5 + 2s^4 + 4s^3 - 8s^2 - 4s + 8$$

Les coefficients de $D_{bf}(s)$ n'ont pas le même signe. La condition nécessaire de la stabilité n'est pas remplie. Donc, le système ne peut pas être stable.

Pb. 6.19
Un système a le schéma bloc suivant :



On donne :

$$K=507,\ G(s)=\frac{1}{s^4+3s^3+10s^2+30s+169}\ \text{ et }\ H(s)=\frac{1}{s}$$

Localiser les pôles du système en boucle fermée dans le plan complexe.

Solution

1) Dénominateur $D_{bf}(s)$ de la FT en boucle fermée
La fonction de transfert (TF) du système en boucle fermée est :

$$G_{bf}(s)=\frac{507}{s^5+3s^4+10s^3+30s^2+169s+507}$$

Donc,

$$D_{bf}(s)=s^5+3s^4+10s^3+30s^2+169s+507$$

2) Construction de la table de Routh

On obtient la table de Routh suivante :

s^5	1	10	169
s^4	3	30	507
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{60}$ 5	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	$\cancel{15}$ 5	$\cancel{507}$ 169	$\cancel{0}$ 0
s^1	-144/5	0	0
s^0	169	0	0

3) Interprétation de la table

Au cours de la construction de la table on a obtenu une ligne de zéros, la ligne $\mathbf{s^3}$. On élimine les zéros de cette ligne par la procédure suivante :

a) On forme l'équation auxiliaire P(s) en utilisant les éléments de la ligne immédiatement en dessus de la ligne de zéros, donc $\mathbf{s^4}$ dans ce cas. On trouve :

$$P(s) = 3s^4 + 30s^2 + 507$$

b) On calcul la dérivée suivante :

$$\frac{P(s)}{ds} = 12s^3 + 60s$$

c) On remplace les zéros de la ligne $\mathbf{s^3}$ par les coefficients de $\frac{\mathrm{P(s)}}{\mathrm{ds}}$ et on continue la construction de la table

3) Interprétation de la table

Comme on a eu **une ligne des zéros** au cours de la construction de la table de Routh et que l'équation auxiliaire est un **polynôme pair** (degré 4) pour localiser les pôles de la FT en boucle fermée on localise d'abord les racines de P(s) qui sont aussi les racines de $D_{bf}(s)$ et ensuite les autres racines de $D_{bf}(s)$.

Localisation des racines de P(s)

De la ligne $\mathbf{s^4}$ (ligne immédiatement en dessus de la ligne des zéros) à la ligne $\mathbf{s^0}$ on a deux changements de signe. Donc, le nombre $\mathbf{n_p}$ des racines de P(s) dans le DPD est égal à 2. Comme P(s) est un **polynôme pair** toutes ses racines sont **symétriques** par rapport à l'origine du plan complexe. Donc le nombre des racines de P(s) dans le DPG est aussi égal à 2. Le nombre $\mathbf{n_j}$ des racines de P(s) sur l'axe $\mathbf{j\omega}$ est :

$\mathbf{n_j = i-2n_p}$ = 4 **-2.2 = 0**, où **i** est le degré de P(s).

Localisation des autres racines de D_{bf}(s)

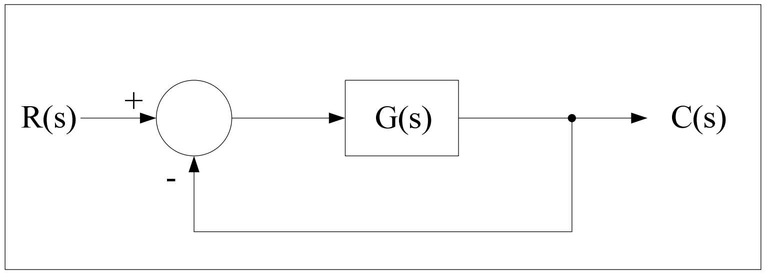
De la ligne $\mathbf{s^5}$ (première ligne de la table de Routh) à la ligne $\mathbf{s^4}$ on aucun changement de signe. Donc, le nombre $\mathbf{n_a}$ des autres racines de $D_{bf}(s)$ dans le DPD est égal à 0. Le nombre $\mathbf{n_a}$ des autres racines de $D_{bf}(s)$ dans le DPG est :

$\mathbf{n_a = n\text{-}i\text{-}n_a = 5\text{-}4\text{-}0 = 1}$, où **n** est le degré de $D_{bf}(s)$.

En résumé on a :

2 pôles dans le DPD
3 pôles dans le DPG
0 pôle sur $j\omega$.

Pb. 6.26
Un système a le schéma bloc suivant :



On donne :

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s-2)}{(s^2+3)}$$

Déterminer les valeurs de K pour lesquelles le système reste stable en boucle fermée :

Solution

1) Dénominateur $D_{bf}(s)$ de la FT en boucle fermée
La fonction de transfert (TF) du système en boucle fermée est :

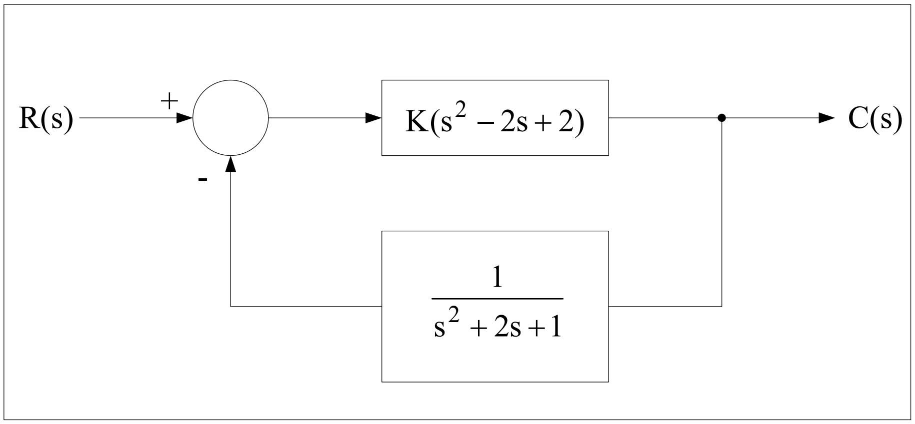
$$G_{bf}(s) = \frac{K(s+2)(s-2)}{(K+1)s^2 + (3-4K)}$$

Donc,

$$D_{bf}(s) = (K+1)s^2 + (3-4K)$$

Le coefficient de **s** de $D_{bf}(s)$ est nul. La condition nécessaire de la stabilité n'est pas remplie. Donc, le système ne peut pas être stable. Dans ce cas le mieux qu'on peut faire c'est rendre le système marginalement stable.

Pb. 6.31
Un système a le schéma bloc suivant :



a) Utiliser le critère de Routh pour déterminer les valeurs de K pour lesquelles le système reste stable en boucle fermée.
b) Déterminer la fréquence d'oscillations quand le système est à la limite de la stabilité.

. **Note** : Supposer K>0.

Solution

1) Dénominateur $D_{bf}(s)$ de la FT en boucle fermée
La fonction de transfert (TF) du système en boucle fermée est :

$$G_{bf}(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)(s^2 + 2s + 1)}{(K+1)s^2 + 2(1-K)s + (2K+1)}$$

Donc,

$$D_{bf}(s) = (K+1)s^2 + 2(1-K)s + (2K+1),$$

2) Construction de la table de Routh
On obtient la table de Routh suivante :

s^2	$K+1$	$2K+1$
s^1	$2(1-K)$	0
s^0	$2K+1$	0

3) Interprétation de la table

D'après le critère de Routh pour assurer la stabilité du système il ne faut pas avoir de changement de signe dans la première colonne de la table.

Selon l'énoncé **K>0**. Dans ce cas l'analyse de la table montre que pour assurer la stabilité du système l'élément de la première colonne de ligne $\mathbf{s^1}$ doit être positif. Donc, la condition suivante doit être remplie :

$$2(1-K) > 0 \Rightarrow K < 1$$

Conclusion : Le système reste stable en boucle fermée pour les valeurs suivantes de K :

$$0 < K < 1$$

b) Calcul de la fréquence d'oscillations

On cherche la valeur du gain critique, Kc (valeur de K qui donne une ligne de zéros dans la table de Routh). Dans ce cas c'est la ligne $\mathbf{s^1}$ qui est une ligne de zéros quand K=1.

On forme l'équation auxiliaire P(s) en utilisant les coefficients de la ligne immédiatement en-dessus de la ligne de zéros tout en remplaçant K par la valeur trouvée précédemment. Dans ce cas c'est la ligne $\mathbf{s^2}$ qui est immédiatement en dessus de la ligne de zéros. En utilisant les coefficients de cette ligne on trouve :

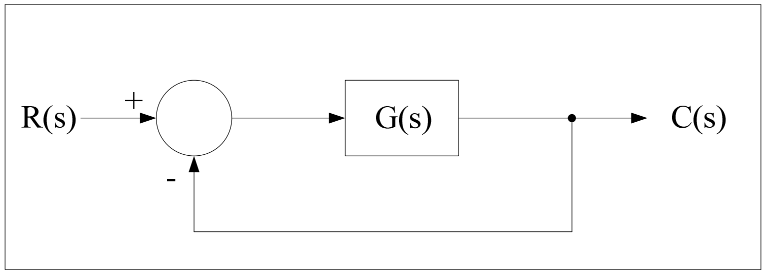
$$P(s) = (K+1)s^2 + (2K+1)\Big|_{K=1} = 2s^2 + 3$$

La valeur de la fréquence d'oscillations est la racine positive de P(s) :

$$2s^2 + 3 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{3/2}$$

Donc la fréquence d'oscillations est égale à $\sqrt{3/2}$ rad/s.

Pb. 6.36
Un système a le schéma bloc suivant :



On donne :

$$G(s) = \frac{Ks(s+2)}{(s^2 - 4s + 8)(s+3)}$$

Déterminer les valeurs de K pour lesquelles le système reste stable.

Solution

Valeurs de K pour lesquelles le système reste stable

1) Dénominateur $D_{bf}(s)$ de la FT en boucle fermée
La fonction de transfert (TF) du système en boucle fermée est :

$$G_{bf}(s) = \frac{Ks(s+2)}{s^3 + (K-1)s^2 + (2K-4)s + 24}$$

Donc,

$$D_{bf}(s) = s^3 + (K-1)s^2 + (2K-4)s + 24$$

2) Construction de la table de Routh

On obtient la table de Routh suivante :

s^3	1	2K-4
s^2	K-1	24
s^1	$(2K^2 - 6K - 20)/(K-1)$	0
s^0	24	0

3) Interprétation de la table

D'après le critère de Routh pour assurer la stabilité du système il ne faut pas avoir de changement de signe dans la première colonne de la table. Donc les conditions suivantes doivent être remplies :

$$K - 1 > 0 \Rightarrow K > 1 \quad (1)$$

$$\frac{2K^2 - 6K - 20}{K - 1} > 0 \quad (2)$$

Comme le dénominateur (K-1) de la condition (2) est déjà vérifié par la condition (1). La condition (2) peut s'écrire sous :

$$2K^2 - 6K - 20 > 0 \Leftrightarrow 2(K - 5)(K + 2) > 0 \quad (3)$$

La condition (3) peut s'écrire sous la forme des sous conditions (4) et (5):

$$K - 5 < 0 \Rightarrow K < 5 \text{ et } K + 2 < 0 \Rightarrow K < -2 \quad (4)$$

où

$$K - 5 > 0 \Rightarrow K > 5 \text{ et } K + 2 > 0 \Rightarrow K > -2 \quad (5)$$

De la condition (4) on déduit que :

$$K < -2 \quad (6)$$

De la condition (5) on déduit que :

$$K > 5 \quad (7)$$

La condition (6) ne peut pas avoir d'intersection avec la condition (1). Donc cette condition est à rejeter.
En tenant compte des conditions (1) et (7) on conclut que le système reste stable en boucle fermée quand :

$$K>5$$