Série 3 : Transfert de chaleur par conduction

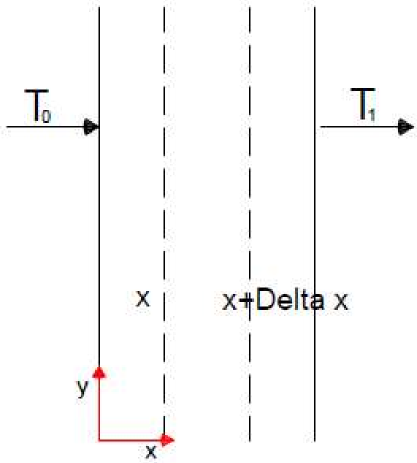
Exercice 1 :

1/ e est négligeable devant L et l => la variation selon y et z est négligeable devant la variation selon x.

- ⇨ Donc le problème pourra être étudié en une seule direction (x).

2/ le régime est permanant + sans source interne :

$$\Delta T = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0$$



$$Ll\varphi_x - Ll\varphi_{x+\Delta x} + 0 = 0$$
$$\Rightarrow \varphi_x = \varphi_{x+\Delta x} \Rightarrow est\ cte$$
$$\varphi_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow \varphi'_x = 0 = -\lambda \frac{d^2T}{dx^2}$$
$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

3/

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = C_1 x + C_2$$
$$CAL : T(x=0) = T_0 = C_2$$
$$T(x=e) = T_1 = C_1 e + T_0 \Rightarrow C_1 = \frac{T_1 - T_0}{e}$$
$$\Rightarrow T(x) = \left(\frac{T_1 - T_0}{e}\right) x + T_0$$

4/ on a d'après la question 3/ :

$$T(x) = \left(\frac{T_1 - T_0}{e}\right)x + T_0$$

En plus :

$$\varphi_x = -k\frac{dT}{dx}$$

$$\varphi_x = -k\left(\frac{T_1 - T_0}{e}\right) \quad ,d'ou \quad \phi = S\varphi_x$$

$$\phi = Llk\left(\frac{T_1 - T_0}{e}\right)$$

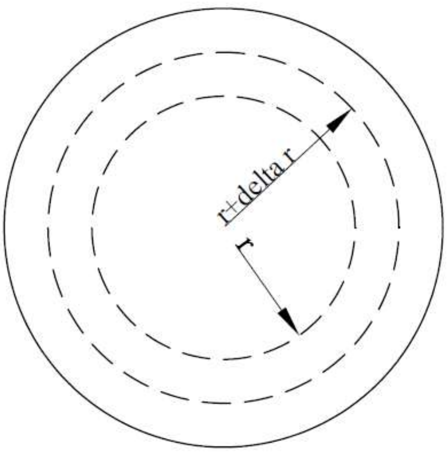
Exercice 2 :

1/ avec source interne et en régime permanent :

$$\Delta T + \frac{S_e}{k} = 0$$

Le cylindre est de longueur infini => la variation selon z est négligeable.

Milieu homogène => la variation selon thêta est négligeable T(r, theta, z)=T(r)



Flux entrant – flux sortant + source = 0

$$2\pi rLq_r\big|_r - 2\pi(r+\Delta r)Lq_r\big|_{r+\Delta r} + 2\pi rL\Delta rS_e = 0$$

$$\Delta r << r$$

$$\Rightarrow 2\pi rLq_r\big|_r - 2\pi rLq_r\big|_{r+\Delta r} + 2\pi rL\Delta rS_e = 0$$

$$\Rightarrow \frac{rLq_r\big|_r - rLq_r\big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -rS_e$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(r) = rq_r$$

$$f(r+\Delta r) = rq_r\big|_{r+\Delta r}$$

$$\lim_{\Delta r \to x0} \frac{rLq_r\big|_r - rLq_r\big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -rS_e$$

$$-\frac{d}{dr}(rq_r) = -rS_e$$

$$\frac{d}{dr}(rq_r) = rS_e \Rightarrow \int d(rq_r) = \int rS_e dr$$

$$rq_r = \frac{1}{2}r^2S_e + C_1$$

$$q_r = \frac{1}{2}rS_e + \frac{C_1}{r}$$

$$quand\ r \to 0,\ q_r \to \infty \Rightarrow ce\ qui\ est\ il\text{logique}$$

$$d''ou \quad C_1 = 0$$

$$\Rightarrow q_r = \frac{1}{2}rS_e$$

3/

$$\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$$

$$q_r = -\lambda\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2}rS_e$$

4/

$$dT = -\frac{1}{2}\frac{rS_e}{\lambda}$$

$$\int dT = -\frac{1}{2}\frac{S_e}{\lambda}\int rdr$$

$$T(r) = -\frac{1}{4}\frac{S_e}{\lambda}r^2 + C_2$$

Cherchons la valeur de C_2 :

$$T(r=R) = -\frac{1}{4}\frac{S_e}{\lambda}R^2 + C_2 = T_0$$

$$C_2 = T_0 + \frac{1}{4}\frac{S_e}{\lambda}R^2$$

$$T(r) = T_0 + \frac{1}{4}\frac{S_e}{\lambda}R^2\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

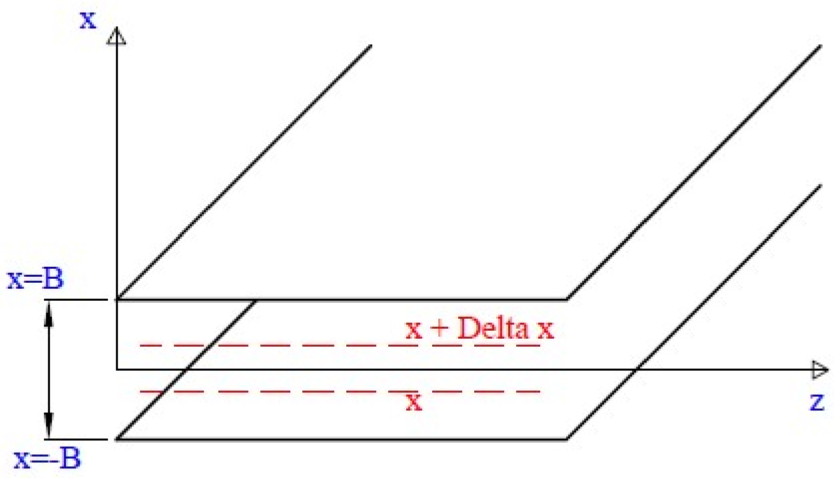
5/

En r = 0, T est maximale

$$T_{max} = T(r=0) = T_0 + \frac{1}{4}\frac{S_e}{\lambda}R^2$$

Exercice 3 :

1/



$$\Delta T + \frac{1}{\lambda}S_v - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

T ne dépend que de X (la variation de T selon y et z est négligeable devant celle selon x).

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{S_v}{\lambda}=0$$

Volume différentiel de largeur w, de longueur L et d'épaisseur Δx :

$$q_x LW\big|_x - q_{x+\Delta x} LW\big|_{x+\Delta x} + S_v LW\Delta x = 0$$
$$\Rightarrow \frac{q_x - q_{x+\Delta x}}{\Delta x} + S_v = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{dq}{dx} + S_v = 0$$

2/

$$qx = -\lambda\frac{dT}{dx} \quad , \quad et\ on\ sait\ que\ \vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$$
$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}+\frac{S_v}{\lambda}=0$$

3/

$$\frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{S_v}{\lambda}=-4\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\frac{x^2}{B^4}$$

$$\Rightarrow\frac{dT}{dx}=\frac{-4}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\frac{x^3}{B^4}+C_1$$

$$\Rightarrow T(x)=\frac{-1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\frac{x^4}{B^4}+C_1x+C_2$$

$en\ x=-B:$

$$T(x=-B)=\frac{-1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2-C_1B+C_2=T_0 \quad (A)$$

$en\ x=B:$

$$T(x=B)=\frac{-1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2+C_1B+C_2=T_0 \quad (B)$$

$$(A)+(B): 2T_0=2C_2-\frac{2}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2$$

$$C_2=T_0+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2$$

$cherchons C_1:$

$$C_1B=T_0-T_0-\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\Rightarrow C_1=0$$

$$donc: T(x)=\frac{-1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\frac{x^4}{B^4}+T_0+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2$$

$$\Rightarrow T(x)=\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\left(1-\left(\frac{x}{B}\right)^4\right)+T_0$$

Il faut qu'il soit en K.

4/la température est maximale lorsque x=0,

$$T(x)=\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2\left(1-\left(\frac{x}{B}\right)^4\right)+T_0$$

$$x=0\Rightarrow T(x=0)=\frac{1}{3}\frac{\mu}{\lambda}V_{max}^2+T_0$$

5/

$$on\ a:\quad Br=\frac{\mu V_{\max}2}{kT_0}$$

$$\Rightarrow[Br]=\frac{kg.m^{-1}.s^{-1}.m^{2}.s^{-2}}{W.m^{-1}.K^{-1}.K}$$

$$\Rightarrow[Br]=\frac{kg.m^{2}.s^{-3}}{W}$$

$$\Rightarrow[Br]=\frac{kg.m^{2}.s^{-3}}{kg.m^{2}.s^{-3}}$$

Donc Br est un nombre adimensionnel (sans unité).

6/

a/ Calculons le nombre de Brinkman pour les deux fluides :

On prend T_0 = 20 °C,

Br_{eau} = 0.033

Br_{huile} = 6.66

b/ l'élévation de température pour les deux fluides :

Eau : T_{max} = 0,030*20+20 = 20,2 °C

Huile : T_{max} = 6,66*20+20 = 64,4 °C

c/ On peut conclure que plus Br est élevé, plus l'élévation de température est importante.