Université Internationale de Casablanca

Exercice 1. *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 235$

Exercice 2. *Montrer (par récurrence) que* $P(x) = det(A - xI)$ *est un polynôme de degré* n.

Exercice 3. *Calculer les valeurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. *Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. *Calculer les valeurs et vecteurs propres des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

Exercice 6. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$f(x, y) = (5x - 3y, 6x - 4y).$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique* (e_1, e_2)
2. *Déterminer les valeurs propres* λ_1 *et* λ_2 *de la matrice* A
3. *Déterminer les vecteurs propres* u_1 *et* u_2 *associés à* λ_1 *et* λ_2 *(respectivement).*
4. *Montrer que* (u_1, u_2) *est une base de* $\mathbb{R}^2$
5. *Donner la matrice* D *de* f *dans la base* (u_1, u_2).
6. *Donner la matrice de passage de la base* (e_1, e_2) *à la base* (u_1, u_2).
7. *Calculer* A^k, $k \in \mathbb{R}$.
8. *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 4y(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

On pose $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

(a) *Montrer que*

$$\begin{cases} X'(t) = \lambda_1 X(t) \\ Y'(t) = \lambda_2 Y(t) \\ X(0) = X_0 \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{2}$$

(b) *Résoudre le problème (2)*

(c) *En déduite la solution du problème (1).*

Exercice 7. *Le but de l'exercice est de calculer M^k pour la matrice M définie par :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de M.*
2. *Déterminer les vecteurs propres de M associés aux valeurs propres.*
3. *Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*
4. *On pose $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.*

Exercice 8. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les valeurs propres de A*
2. *Calculer les vecteurs propres associés*
3. *Montrer que les vecteurs propres constituent une base de $\mathbb{R}^3$*
4. *Donner la matrice P de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres*
5. *Calculer $P^{-1}AP$.*

Exercice 9. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer A^2 et vérifier que*

$$A^2 = A + 2I$$

2. *En déduire que A est inversible et donner son inverse.*

Exercice 10. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.*

1. *Démontrer que $\lambda \neq 0$*
2. *Démontrer que six est un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} associée à la valeur propre $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}$.*

Exercice 11. *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \end{cases} \tag{3}$$

1. Déterminer matrice A telle que
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$
2. Calculer les valeurs propres de A
3. Calculer les vecteurs propres associées
4. Montrer que ces deux vecteurs propres constituent une base de $\mathbb{R}^2$
5. Donner la matrice P de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.
6. Expliciter les suites $(V_n)_{n\geq 0}$ et $(W_n)_{n\geq 0}$ données par
$$\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$
7. Montrer que
$$\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$
où D est la matrice diagonale des valeurs propres de A.
8. Étudier les suites numériques $(V_n)_{n\geq 0}$ et $(W_n)_{n\geq 0}$ (Exprimer les en fonction de n, convergence limites)
9. En déduite $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n)$