

Variables aléatoires

Définition: variable aléatoire

Considérons un processus aléatoire d'univers Ω . On appelle variable aléatoire une fonction de l'espace Ω dans \mathbb{R} .

En considérant $X(\Omega)$ comme un nouvel univers et $X(\omega)$ comme la réalisation correspondant à ω , on obtient une loi de probabilité sur les sous-ensembles de $X(\Omega)$. Elle est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire.

***Exemple :** Considérons une grille de loto remplie et le processus aléatoire correspondant au tirage. Ω est l'ensemble des 6-uplets d'entiers entre 0 et 49.*

Si X est le nombre de bons numéros, $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et la loi de probabilité de X correspond aux probabilités d'avoir aucun, un, ... bons numéros.

On pourrait raisonner de même en prenant pour X le gain réalisé.

Fonction de Répartition

Définition : *fonction de répartition*

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F_X définie pour t dans \mathbb{R} , par

$F_X(t) = P(X \leq t)$. C'est une fonction croissante, tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Autrement dit deux variables aléatoires ayant même fonction de répartition, ont même loi.

VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

- *X est une variable discrète si elle prend un nombre fini ou infini de valeurs distinctes généralement des entiers 0, 1, 2, 3, 4, ...*
- *Exemples (comptages)*
- *nombre de défauts de surface ;*
- *nombre de versions d'un dessin de définition pendant une année;*
- *nombre de pièces non conformes dans un lot de 500 ;*
- *nombre de pièces en attente devant une machine;*

Fonction de masse $p_X(x) = P_X(X = x)$

- *$p_X(x) \geq 0$*
- *Fonction de répartition $F_X(u) = \sum p_X(x)$ Pour tout $x \leq u$.*
- *Distributions importantes Binomiale - Poisson – Hypergéométrique seront étudiées dans un autre chapitre.*

- *Moyenne* : $E [X] = \mu = \sum x p_X (x)$
premier moment par rapport à l'origine – centre de masse
- *Variance* :
$$Var [X] = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 p_X (x) = \sum x^2 p_X (x) - \mu^2$$
- *Écart type* : $ET [X] = \sigma = \sqrt{Var [X]}$

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

- *L'espace de la variable aléatoire X est un intervalle sur les nombres réels*
- *sa fonction de répartition $F_X(x)$ est dérivable*

La dérivée de $F_X(x)$ notée f_X est la densité de X

- *Exemples :(mesures)*
 - ✓ *volume d'un réservoir d'eau*
 - ✓ *temps requis pour finaliser une conception*
 - ✓ *tension d'un câble métallique*

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt$
- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \mu$

$$VAR[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu)^2 f_X(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt \right) - \mu^2$$

Espérance mathématique:

- *X va discrète $p_X(x)$: fonction de masse de X*
- *X va continue $f_X(x)$: densité de X*
- *h fonction de R dans R, $h : R \rightarrow R$*
- *espérance mathématique de h = $E(h(X))$*
- *Cas particuliers*
- *$h(X) = X$: moyenne μ*
- *$h(X) = X^2$ 2 ème moment par rapport à l'origine 0*
- *$h(X) = (X - \mu)^2$ variance*
- *$h(X) = X^k$ k - ième moment par rapport à l'origine*
- *$h(X) = (X - \mu)^k$ k-ième moment par rapport à la moyenne μ .*

Propriétés:

- $E(a + bX) = a + b E(X)$
- $Var(a + bX) = b^2 var(X)$
- $ET(a + bX) = |b| ET(X)$
- *Variable centrée-réduite*

$$Z = (X - E(X)) / ET(X)$$

✓ $Alors E(Z) = 0$

✓ $ET(Z) = 1$

Exemple : soumission pour la réalisation d'un travail d'ingénierie

X v.a. « nombre de jours requis pour le travail »

Vous estimez vos « probabilités »

x	< 3	3	4	5	6	total
-----	-----	---	---	---	---	-------

$p(x)$	0	1/8	4/8	2/8	1/8	1
--------	---	-----	-----	-----	-----	---

$Y = \text{profit net} = \varphi(X)$ dépend du nombre de jours X
pour réaliser le travail

x		3	4	5	6
$Y = \varphi(x)$		10K\$	3K\$	0,7K\$	-1,5K\$

Profit net moyen = ?

$$E(Y) = 10K\$ * 1/8 + 3K\$ * 4/8 + 0,7K\$ * 2/8 + (-1,5K\$) * 1/8 = 2,73K\$$$

Critère de décision :

si $E(\text{profit net } Y) = \text{profit net moyen} \geq 0$ on accepte le travail.