Propagation des ondes électromagnétique

Plan

- Le phénomène de propagation
- Propagation libre et guidée
- Les structures de guidage
- Les différents types de fibre optique
- Retard sur une ligne de transmission
- Déphasage introduit par un câble
- Modèle électrique d'une ligne
- Grandeurs caractéristiques d'un câble coaxial
- L'équation des télégraphistes
- Les solutions de l'équation des télégraphistes
- La ligne adaptée
- Répartition de la tension sur une ligne adaptée
- Impédance d'entrée d'une ligne adaptée
- Coefficient de réflexion sur la ligne de transmission
- Outils d'analyse : ABAQUE DE SMITH

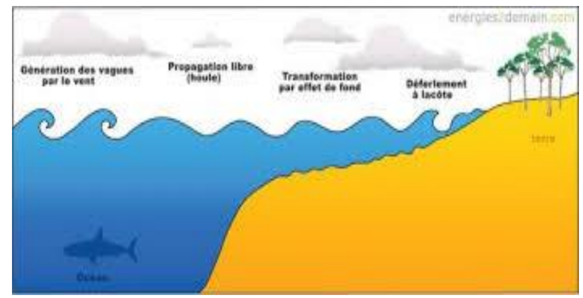
Introduction

I. Propagation d’une onde dans un milieu matériel

Concept d’onde

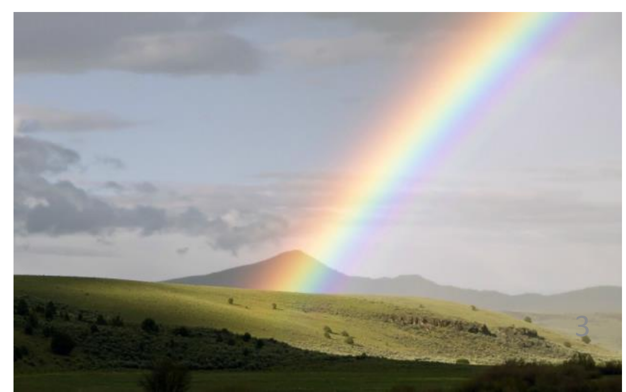
Le concept d’onde permet de parler en terme physico-mathématiques de phénomènes aussi divers que :

Les vagues à la surface de l’eau



Onde sonore (ondes sonores considérées comme des ondes de pression se propageant dans l’air)

La lumière (de nature électromagnétique, combinaison de deux champ, électrique et magnétique, dont le couplage est régi par les équation de Maxwell)



I. Propagation d’une onde dans un milieu matériel

Une particule n’occupe à chaque instant qu’un seul point de l’espace. Les équations du mouvement de la particule sont des équations différentielles par rapport au temps.

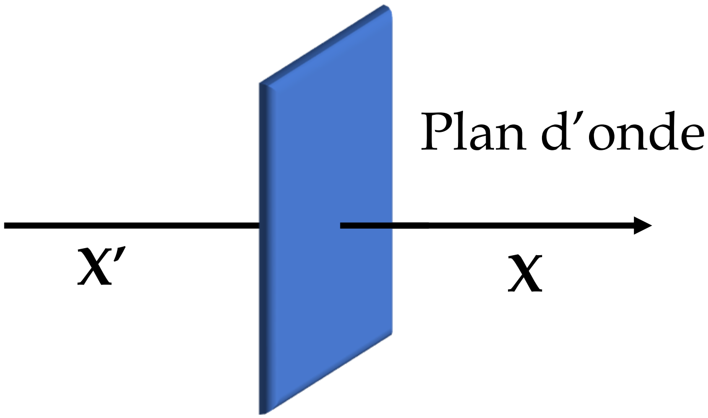
Alors qu’une onde est caractérisée par son amplitude S(r,t) et sa fréquence, définie en tout point de l’espace-temps. A chaque instant l’onde est présente en plusieurs point de l’espace.

Le lieu des points où l’amplitude S(r,t) de l’onde prend simultanément une même valeur est la surface d’onde.

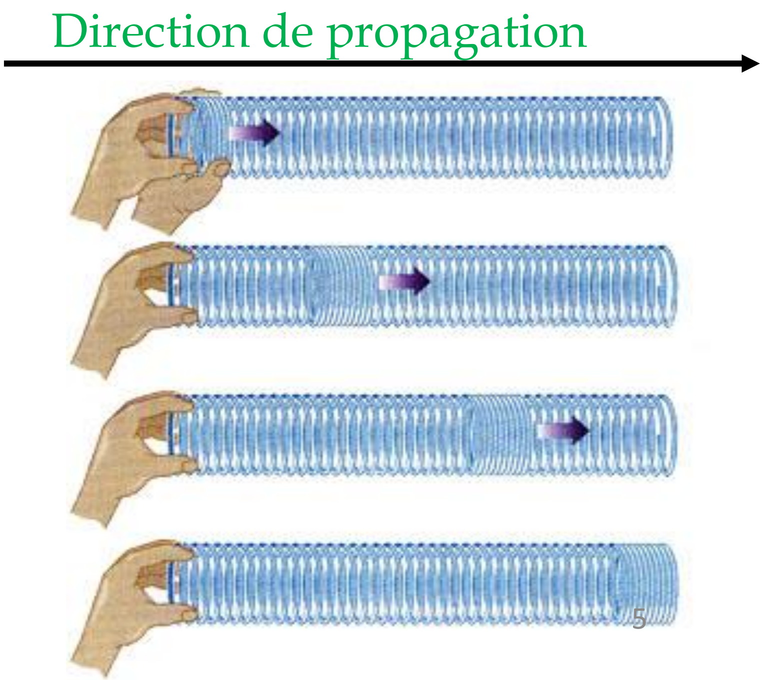
La surface d’onde se déplace en bloc au cours du temps. Ce déplacement est régit par des équations dites équations de propagation.

Les équations de propagation font intervenir les dérivées de l’amplitudes S(r,t) par rapport aux à l’espace et à celle du temps.

II. Différents types d'ondes

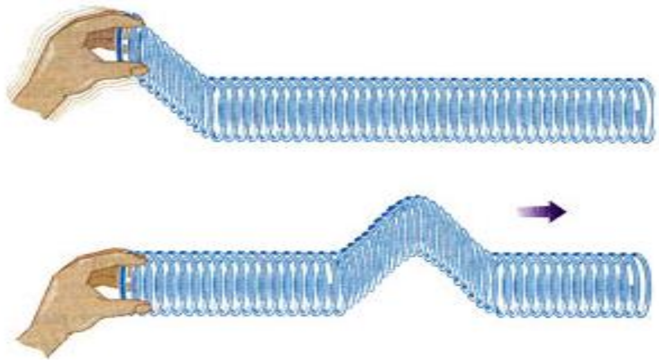


a. **Les ondes planes**: La grandeur S(r , t) qui se propage possède à chaque instant la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation Plan d'onde



b. **Les ondes longitudinales:** la grandeur S(r,t) a une seule composante qui est la direction de propagation.

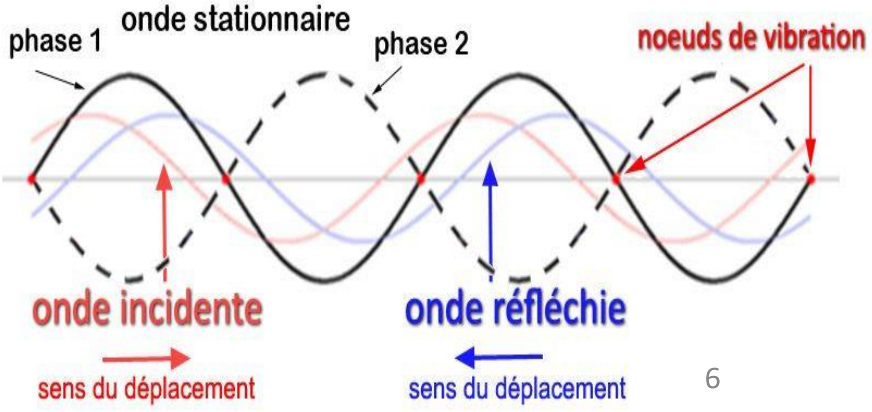
II. Différents types d’ondes



c. **Les ondes transversales :** La grandeur physique n’a pas de composante selon la direction de propagation

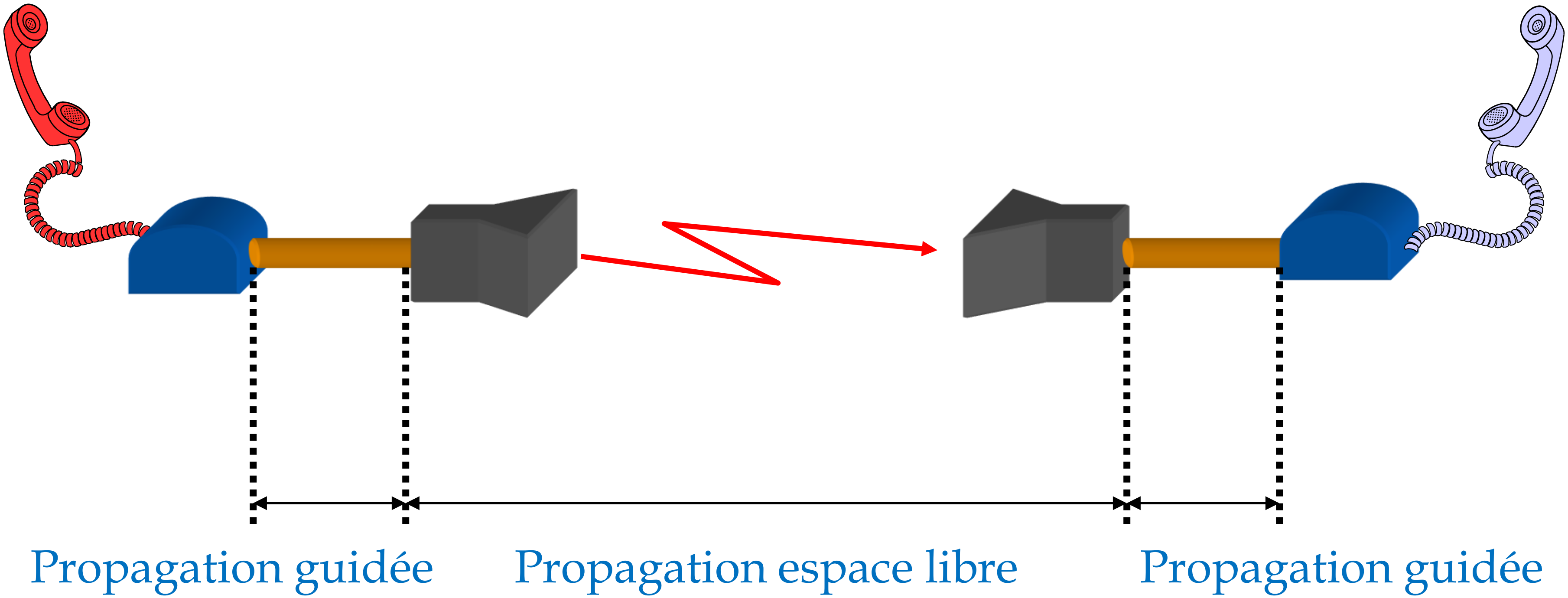
d. **Les ondes progressives:** la grandeur physique S se propage dans un milieu physique. Il n’y a pas d’ondes dans le sens opposé

e. **Les ondes stationnaires:** est le phénomène résultant de la superposition de deux ondes de même amplitude de même fréquence se propageant dans des sens opposées.



III. Types de propagation des ondes

On distingue deux types de propagation :



III. Types de propagation des ondes

Propagation filaire

Réseau Téléphonique Commuté (RTC)

Réseau par courant porteur (PLC)

Câble

Fibre optique

Propagation hertzienne

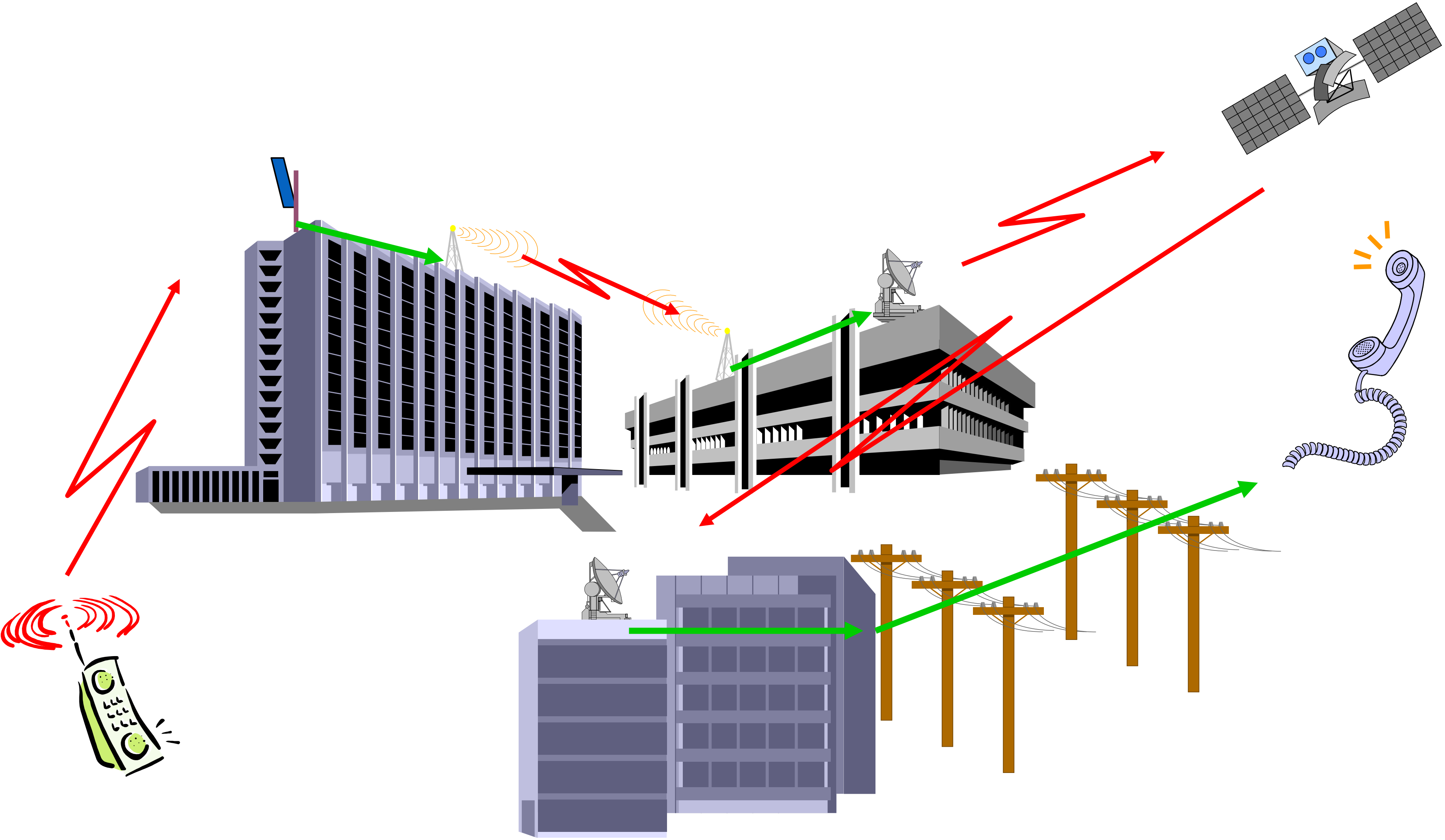
Liaison satellite

Téléphonie mobile (GSM, DCS, GPRS, UMTS)

Réseaux locaux sans fil (WLAN, UWB)

Boucle Locale Radio (WiMax)

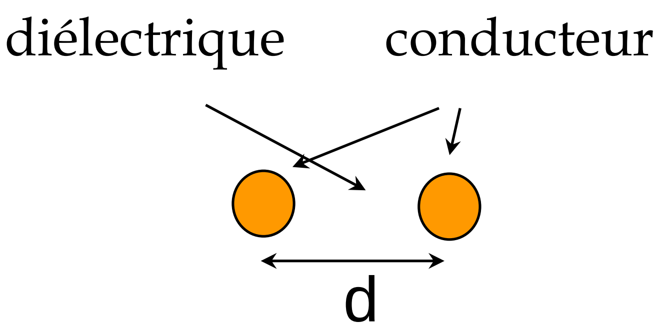
III. Types de propagation des ondes

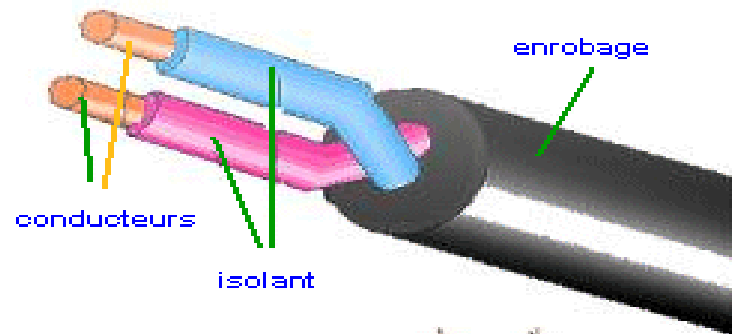


IV. Les principaux types de lignes

Pour guidée une onde électromagnétique plusieurs technique sont utilisé:

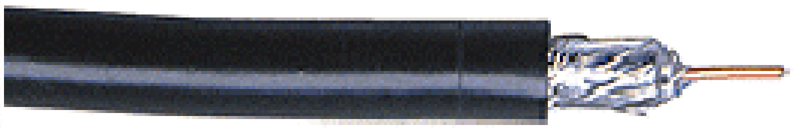
1. Ligne bifilaire

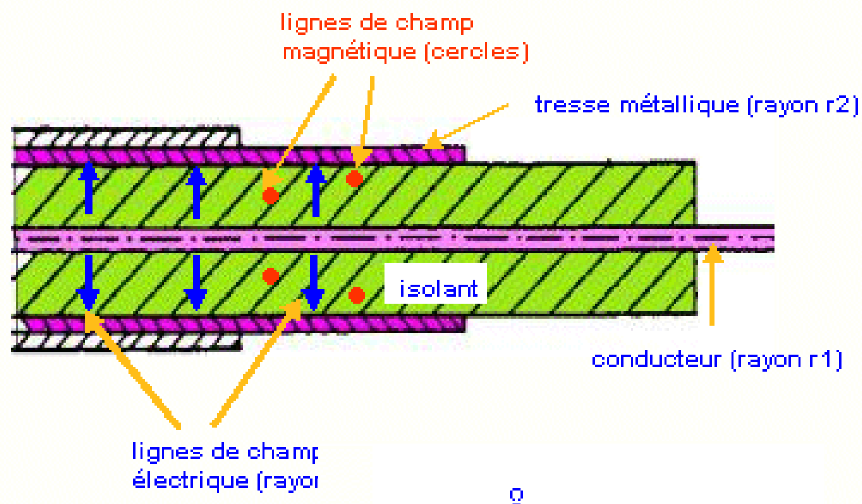




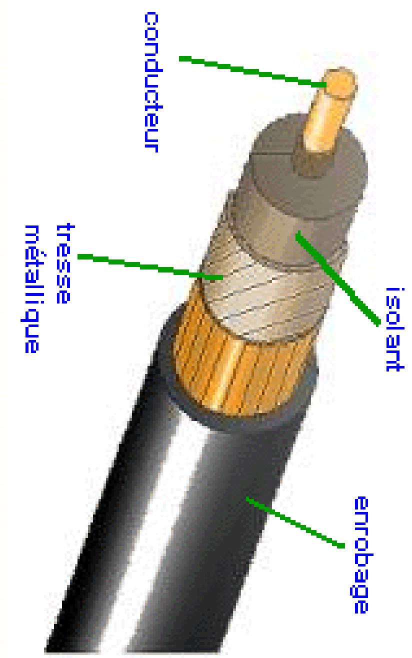
Exemple : caractéristiques d'une ligne bifilaire UTP données par le fabricant
tension de service : 300 V
type de l'isolant : polyoléfine
impédance caractéristique : Zc = 100 ohms
Capacité entre conducteurs pour 1 mètre de ligne : C = 56 pF/m
atténuation : 6,6 dB pour 100 m à10 MHz
vitesse de propagation du signal :v = 180 000 km/s = c/1,7

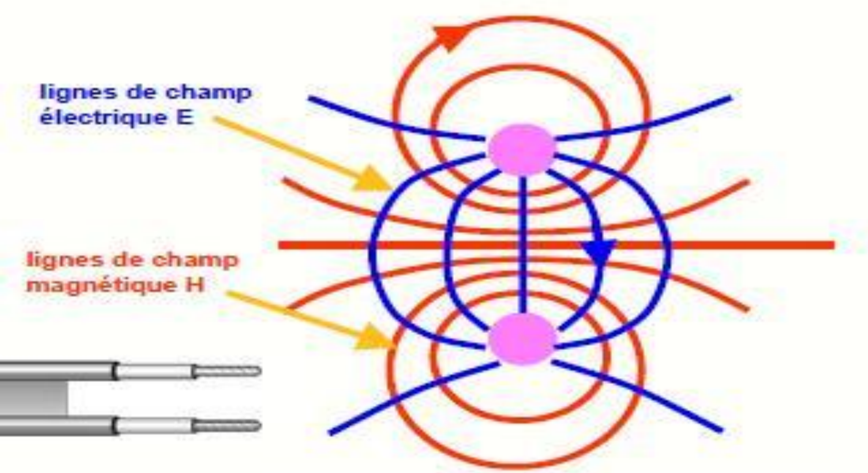
2. Câble coaxial





il est constitué d'un conducteur central et d'une tresse périphérique isolant
ces deux conducteurs sont séparés par un diélectrique isolant
l'onde OEM se propage entre le conducteur central et la tresse
les lignes de champ électrique E sont des rayons
les lignes de champ magnétique H des cercles





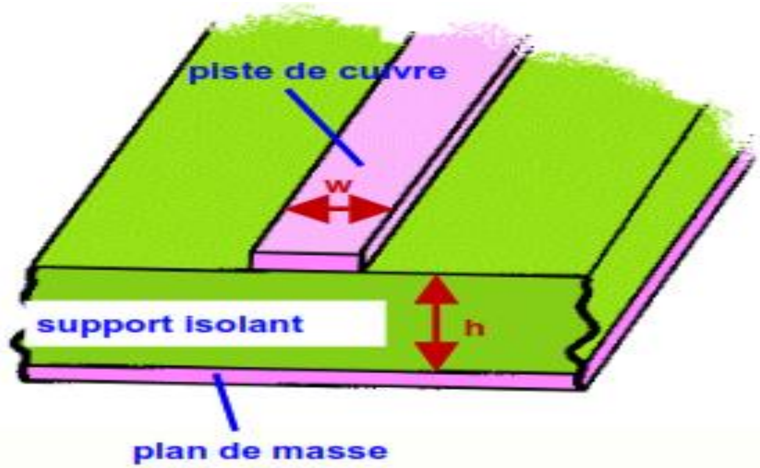
Onde OEM autour d'une ligne bifilaire

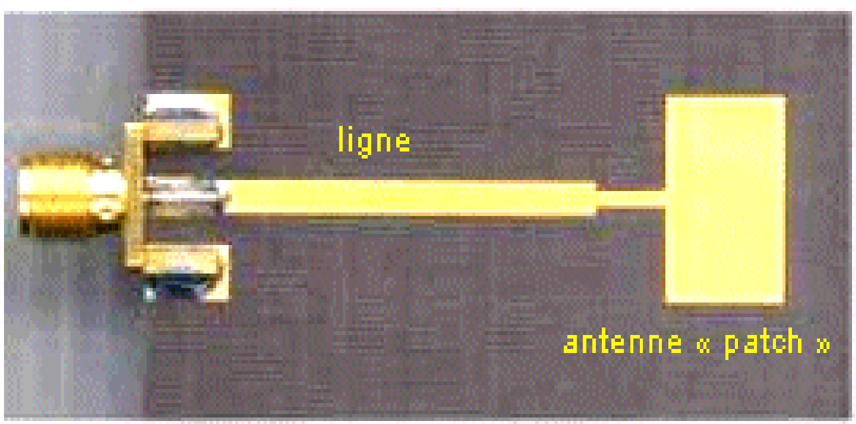
Exemple :
entre l'antenne TV et le poste de télévision ;
dans le réseau câblé urbain ;
dans certains câbles sous-marins et liaisons téléphoniques

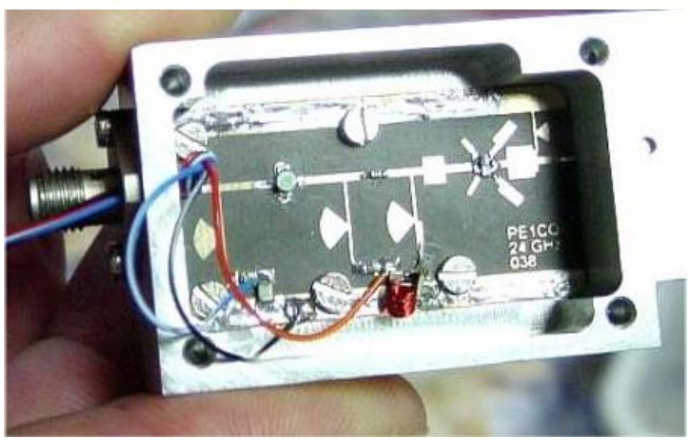
3. Lignes Micro-ruban (Microstrip line)

La ligne imprimée ou microstrip est très utilisée pour relier entre eux des composants RF sur un circuit imprimé, dès que la longueur de la piste est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du signal transporté:

- elle est constitué d'une piste en cuivre et d'un plan de masse
- ces deux conducteurs sont séparés par un diélectrique isolant (époxy, téflon)
- l'onde OEM se propage au-dessus du plan de masse autour de la piste

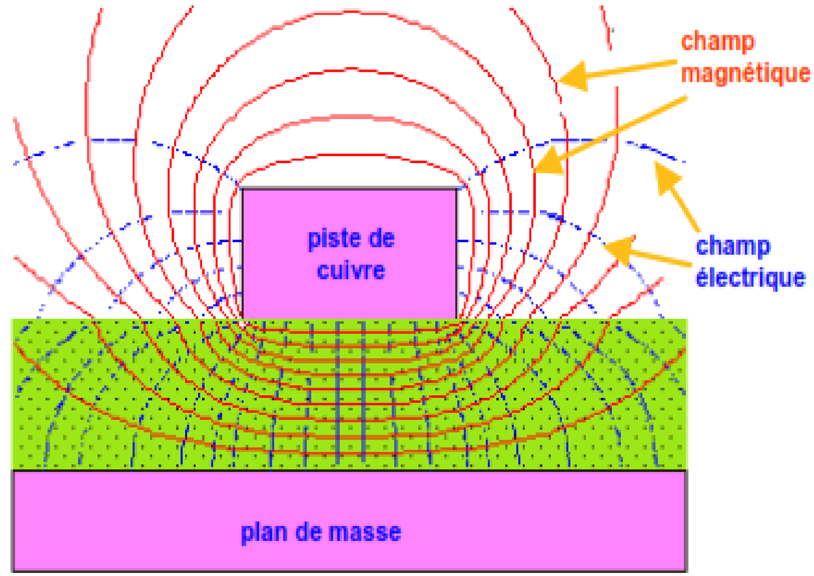






3. Lignes Micro-ruban (Microstrip line)

- les lignes de champ électrique E vont de la piste au plan de masse
- les lignes de champ magnétique entourent la piste



Exemple :

ligne imprimée sur époxy d'épaisseur standard h =1,6 mm

- largeur de la piste : w = 2,5 mm
- impédance caractéristique : Zc = 50 ohms
- Capacité entre conducteurs pour 1 mètre de ligne : C = 120 pF/m
- l'atténuation reste acceptable jusqu'à 2 GHz
- vitesse de propagation du signal :

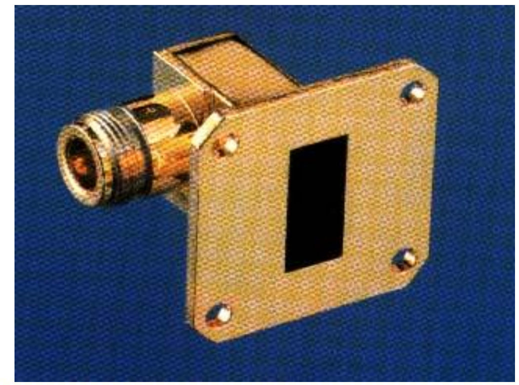
  v = 160 000 km/s = c/1,9

Avantages :

- Peu coûteuses
- Pertes acceptables
- Transmission : pour des faibles distances et faibles puissances.

4. Guides d’ondes métalliques

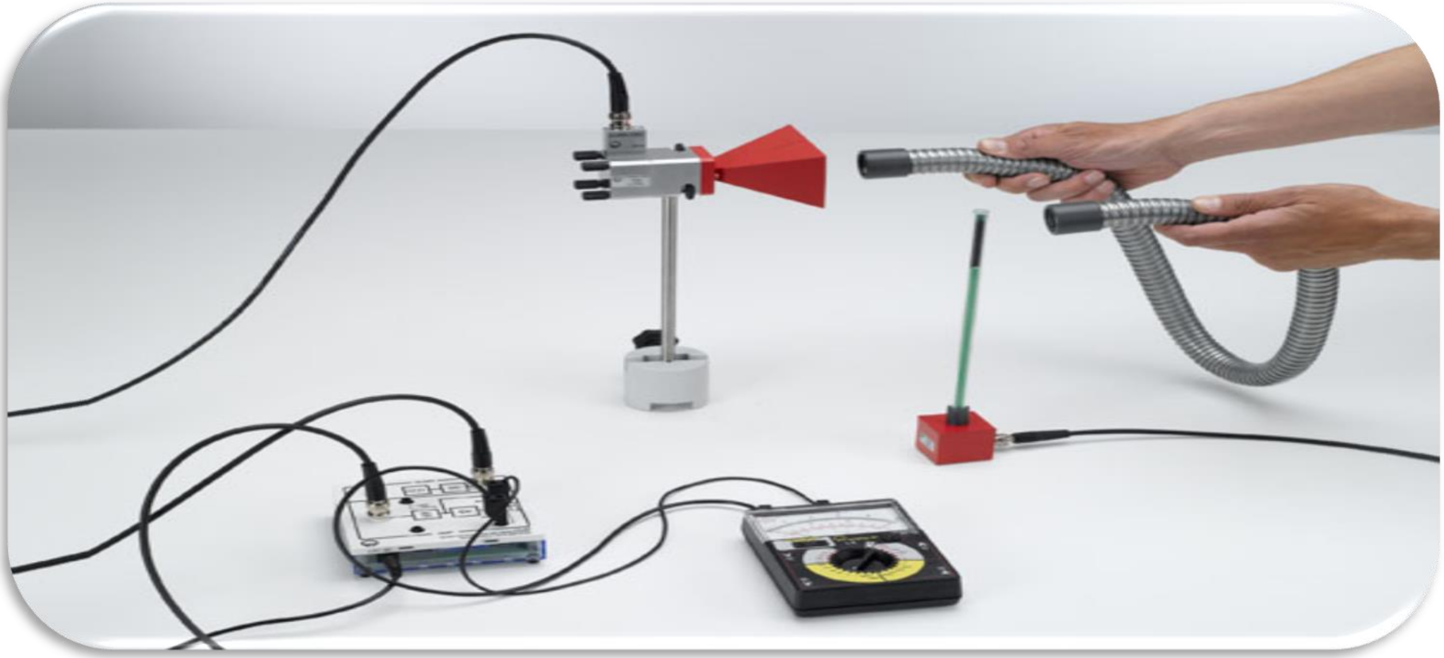
Le guide d’onde est un conducteur métallique creux de section rectangulaire, circulaire ou elliptique dans lequel se propage l’OEM :



le passage d’une ligne à un guide et inversement se fait à l’aide d’une antenne placée au bon endroit
l’air étant un très bon diélectrique, les pertes liées à l’isolant sont très faibles
pour un bon guide, les surfaces internes sont parfaitement polies, ce qui pose des problèmes de fabrication
les guides de grande longueur restent d’un prix très élevé

Tube métallique (diélectrique=air)
Pertes très faibles
Dimensions transverses de l’ordre de la longueur d’onde

4. Guides d'ondes métalliques

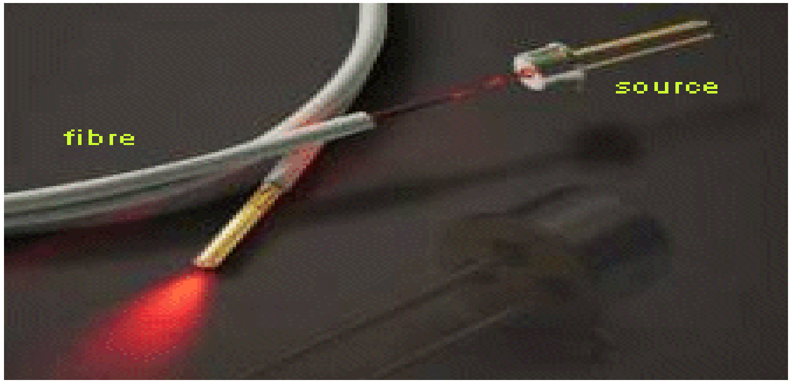


Utilisés lorsque :
- les puissances à transmettre sont élevées
- les distances à parcourir dépassent quelques décimètres.

5. Les guides d'ondes diélectriques

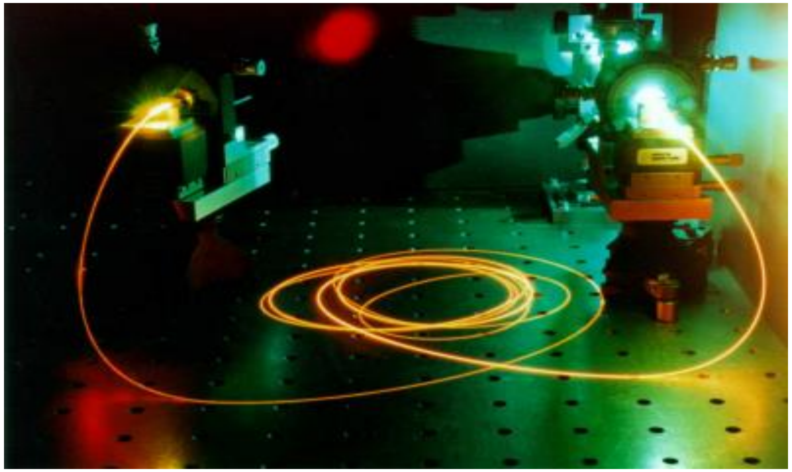
Il existe un autre type de guide d'onde, entièrement isolant, appelé guide d'onde diélectrique dans lequel l'onde électromagnétique se propage dans le verre ou le plastique : la fibre optique.

- Une fibre optique est un fil en verre ou en plastique très fin, qui a la propriété d'être un excellent guide de la lumière.



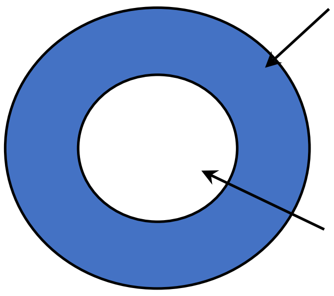
- Inventée dans les années 1960

- Ce guide d'ondes a d'abord été exploité dans le domaine médical pour réaliser des diagnostics in vivo (dans le corps du malade), et pour le traitement de certaines pathologies par effet thermique, tels que :
  i. pulvériser un calcul rénal,
  ii. découper une tumeur ou réparer une rétine.



5. Les guides d'ondes diélectriques

La partie centrale (cœur) est un diélectrique, entourée par un autre diélectrique (gaine) de permittivité légèrement plus faible.
La propagation s'effectue par réflexions successives à l'interface des 2 diélectriques.
Aux fréquences optiques,



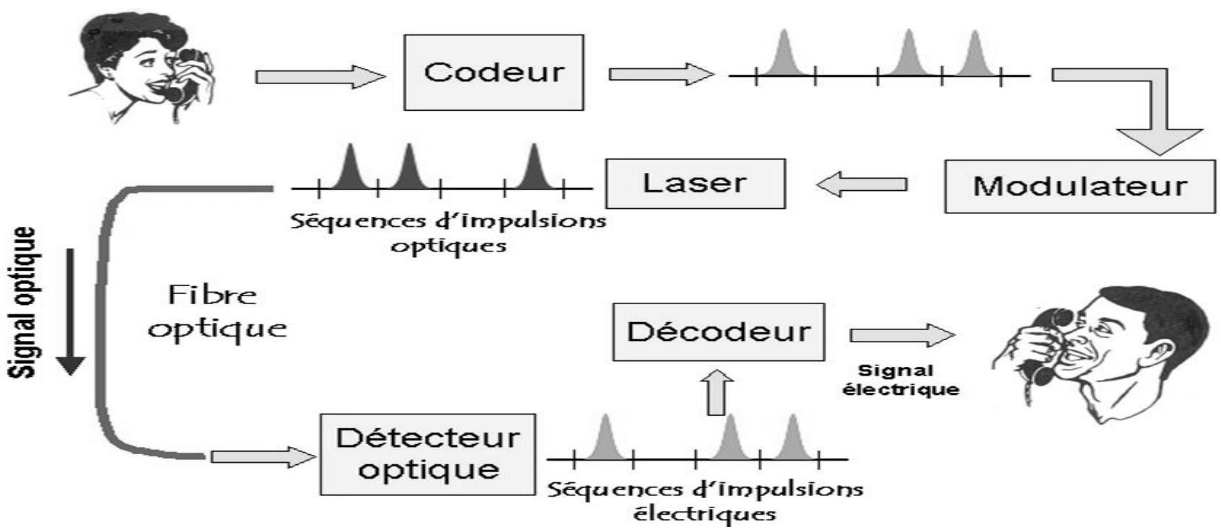
fibres optiques

- les applications de la fibre optique se sont rapidement développées, et se sont étendues à des domaines très divers, tels que les capteurs, **le câblage** et la **connectique** en **électronique** et **optoélectronique**, la **décoration**, ou le **transport** d'**informations**.

5. Les guides d'ondes diélectriques

Caractéristique fibre optique :

- l'onde électromagnétique qui s'y propage est de très haute fréquence (longueur d'onde comprise entre 0,4 et 1,5 microns)
- les dimensions du cœur varient entre le micron pour les fibres monomodes et plusieurs dizaines de microns pour les fibres multimodes
- la fibre a de nombreux avantages par rapport au câble coaxial: bande passante très large, pertes faibles, coût très bas



Principe de communication par fibre optique

5. Les guides d’ondes diélectriques

Les différents types de fibres optiques

❖ Les fibres multimodes :

- Propagent plusieurs modes qui ont des parcours différents, d’où distorsion de phase et déformation du signal transmis.
- à cause de leur diamètre plus grand, l’injection de lumière et le raccordement sont plus simples.

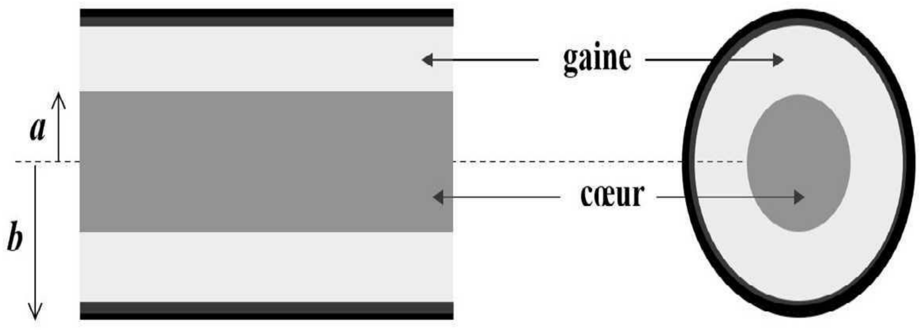
Les deux catégories de fibre optique multimodes

- ✓ **Multimode à saut d'indice;**
- ✓ **Multimode à gradient d'indice.**

Les différents types de fibres optiques

Description physique de la fibre à saut d'indice

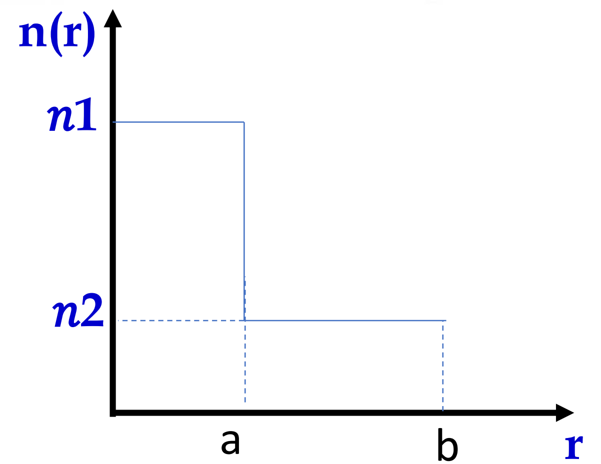
Le cœur de la fibre est constituée d'un matériau de silice amorphe légèrement dopé, d'indice ***n*1**.
Il est entouré d'une gaine optique en silice légèrement dopée de manière à ce que son indice ***n*2** soit très légèrement inférieur à celui du cœur.



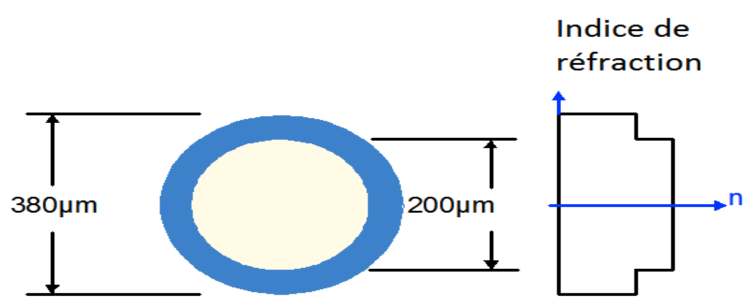
Coupe longitudinale

Coupe transversale

l'indice de réfraction reste constant dans le cœur et varie de manière brusque lorsqu'on passe du cœur à la gaine.



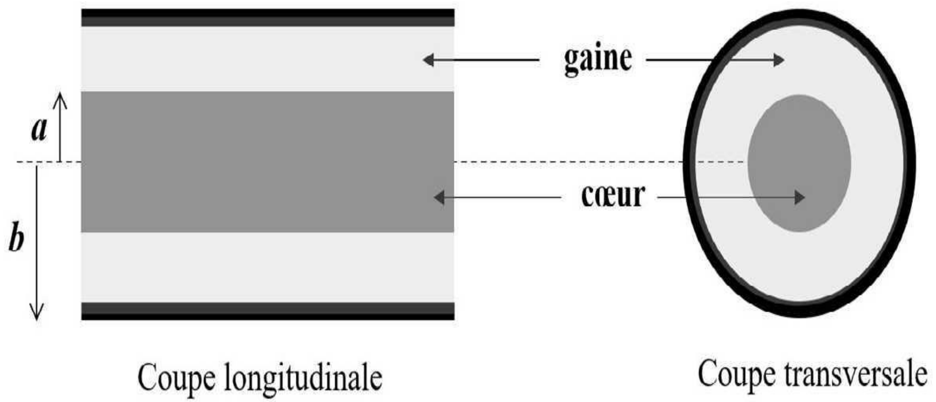
Profil d'indice



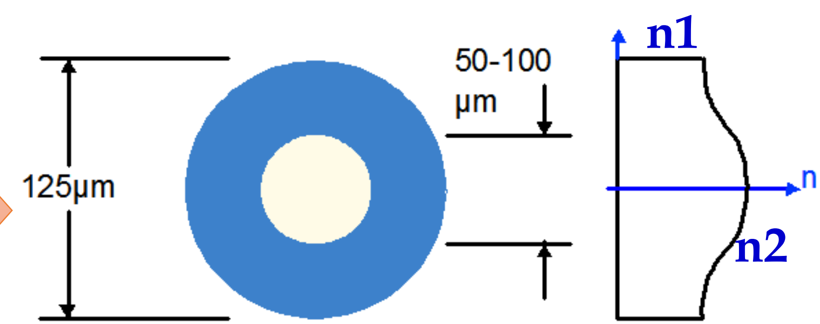
Les différents types de fibres optiques

Description physique de la fibre à gradient d'indice

est une fibre dans laquelle l'indice décroît graduellement dans la direction transversale de la fibre, du centre du cœur vers la gaine, jusqu'à atteindre la valeur de l'indice de réfraction ***n*1** de la gaine.



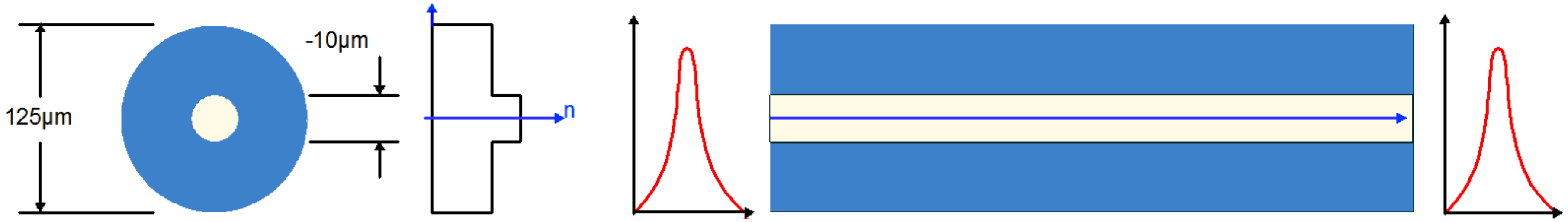
Le cœur se caractérise par un indice variable qui augmente progressivement de **n1** à l'interface gaine cœur jusqu'à **n2** au centre de la fibre.



Les différents types de fibres optiques

❖ Les fibres monomodes:

- ne propagent que le mode fondamental et le parcours de l'OEM par réflexions successives à l'intérieur de la fibre, est unique et bien défini
- les signaux sont transmis sans déformations, ce qui est intéressant pour des signaux analogiques



Fibre monomode

La fibre monomode possède un cœur très fin, de la taille d'un cheveux !
L'atténuation sur ce type de fibre est quasi nulle, c'est ce qui en fait sa force.

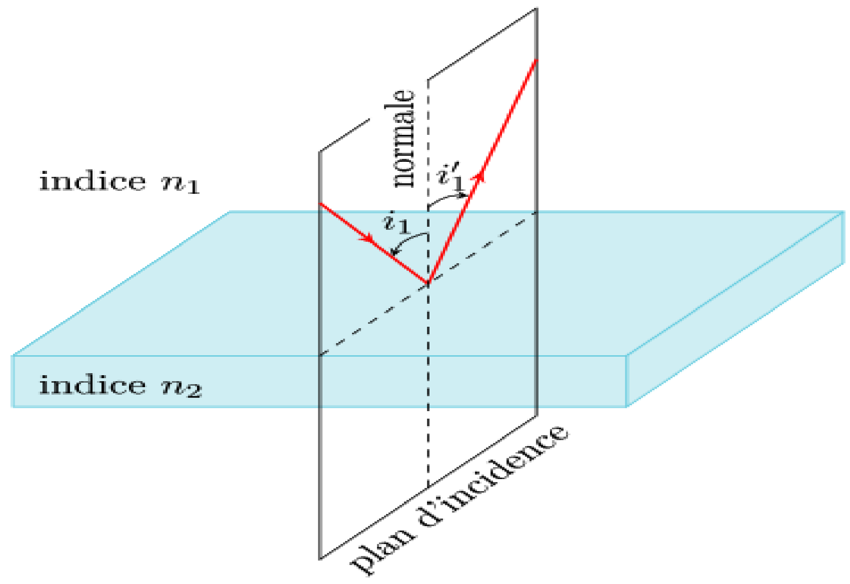
<u>Débit</u>: environ 100 Gbit/s
<u>Portée maximale</u>: environ 100 Km
<u>Affaiblissement</u>: 0,5 dB/Km

Lois de réflexion et de réfraction

Réflexion

On parle de réflexion lorsqu'un rayon lumineux change brutalement sa direction tout en restant dans le même milieu de propagation. L'expérience montre les lois de réflexion suivantes :

i. Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale à la surface sont dans le même plan appelé plan d'incidence.
ii. Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux $i_1 = i_1'$



Si le milieu d'incidence est le plus réfringent, il existe un angle d'incidence limite au-delà duquel il n'y a plus de lumière réfractée : il y a réflexion totale.

Réfraction

On parle de réfraction lorsqu'il y a un changement de la direction de propagation de la lumière quand celle-ci traverse un dioptre et change donc de milieu transparent.

Définition

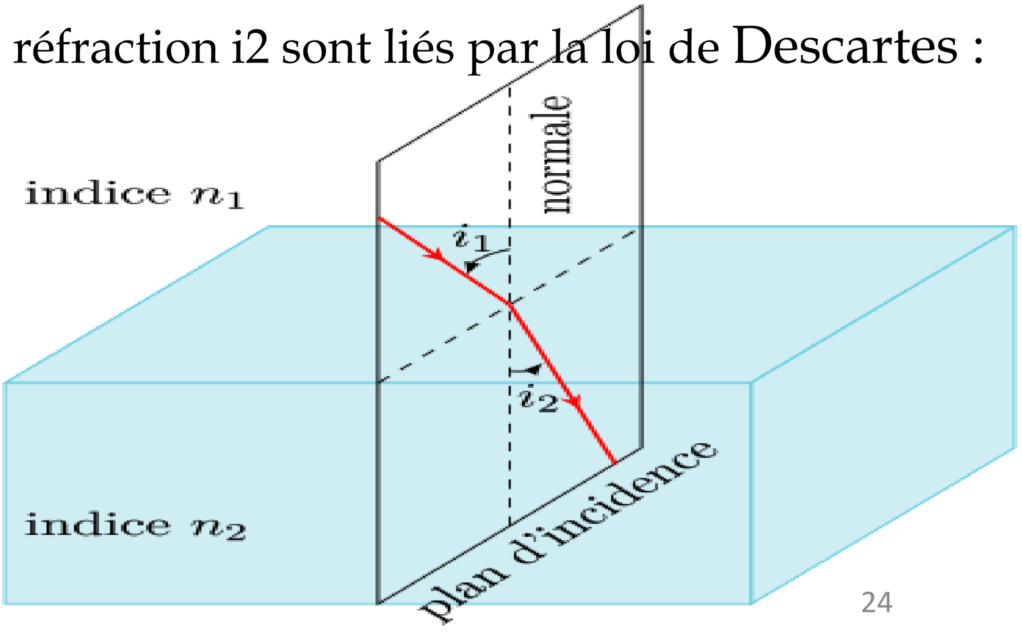
Dioptre : surface de séparation entre deux milieux transparents.

L'expérience montre que la réfraction obéit aux lois suivantes :

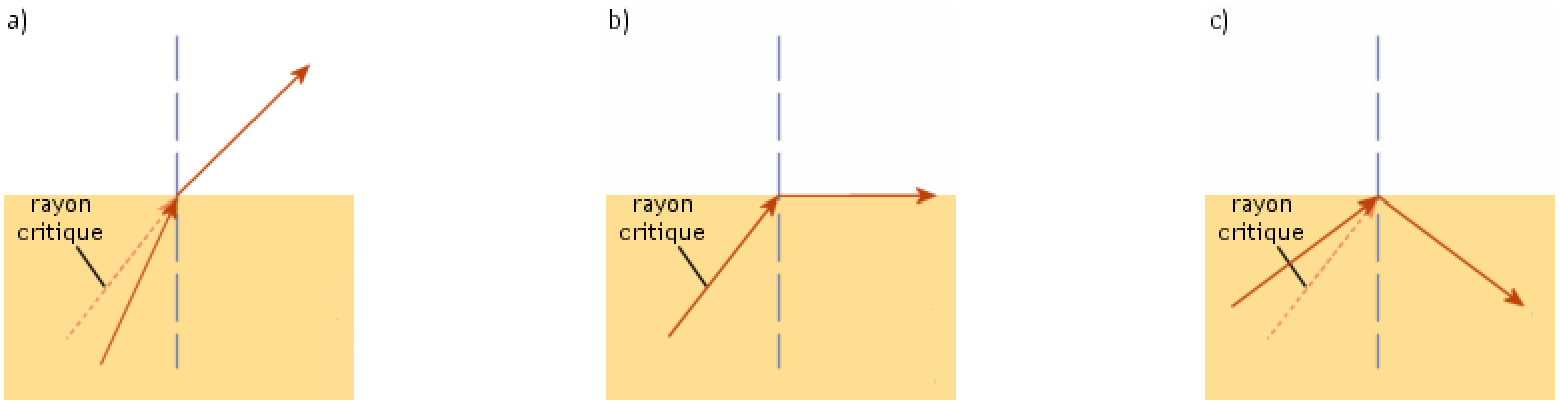
i. Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface sont dans le même plan d'incidence.
ii. Les angles d'incidence i1 et de réfraction i2 sont liés par la loi de Descartes :

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

Passage du milieu n_1 au milieu n_2



Réfraction



Dans la situation a), on assiste à un cas de réfraction basique, dans lequel on retrouve un rayon incident, puis un rayon réfracté.

Dans la situation b), cette fois-ci l'angle d'incidence est dit critique. Il s'agit de l'angle de réfraction maximal qui vaut 90°.

Dans la situation c), on retrouve un rayon dont l'angle d'incidence est supérieur à l'angle du rayon critique. Il s'agit d'un cas de **réflexion totale interne**.

La Réflexion Totale Et Son Application À La Fibre Optique

Angle d'incidence limite

Prenons par exemple le passage d'un rayon lumineux de l'air dans l'eau étant donné que l'eau est un milieu plus réfringent que l'air, le rayon réfracté va donc se rapprocher de la normale.

Plus l'angle d'incidence est grand, plus la déviation du rayon lumineux est importante. Pour un angle d'incidence de 90°, c'est-à-dire lorsque le rayon incident rase la surface de l'eau, l'angle de réfraction atteint sa valeur maximum: **c'est l'angle limite de réfraction.**

déterminer la valeur de l'angle limite de réfraction?

En considérant que l'indice de réfraction de l'air, n1 vaut 1 et celui de l'eau, n2 vaut 4/3.

Exercice 1 :

Un faisceau de lumière blanche tombe sur le diamant avec un angle d'incidence i=45.

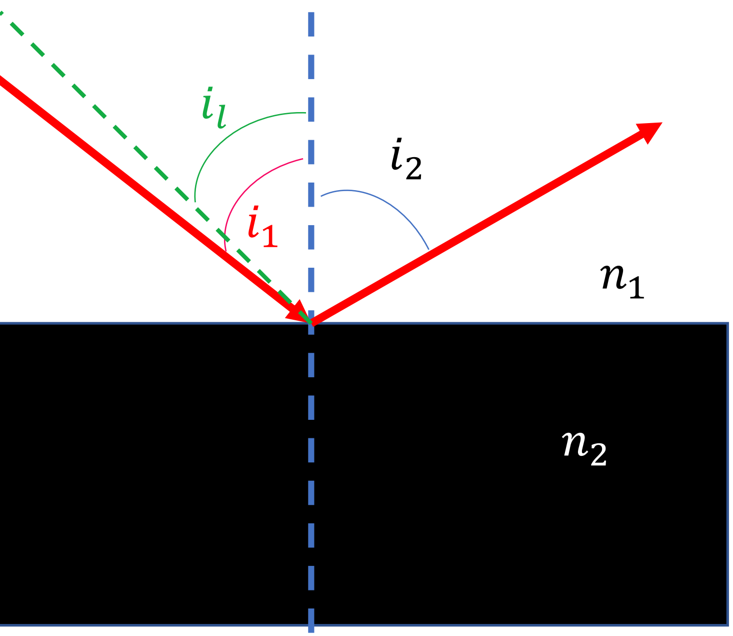
Le diamant a un indice nR=2,435 pour le rouge de longueur d'onde 486 nm et un indice nJ=2,417 pour le jaune de longueur d'onde 589 nm. Déterminer l'angle que le rayon rouge et le rayon jaune forment à l'intérieur du diamant.

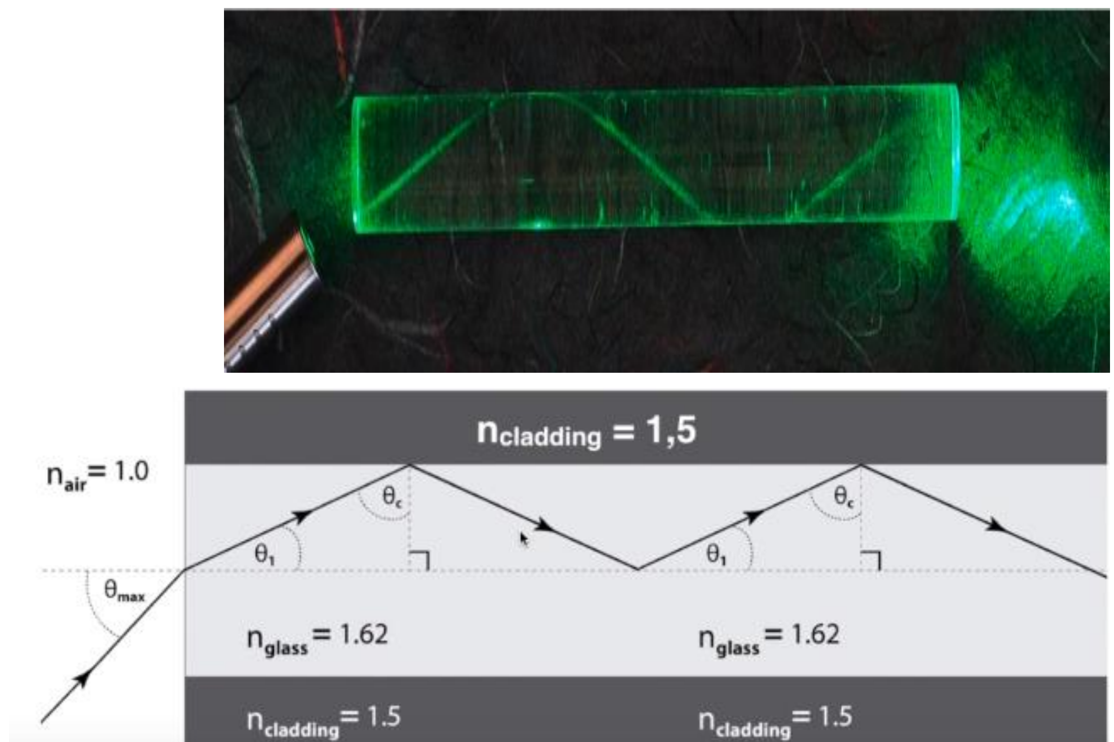
La Réflexion Totale Et Son Application À La Fibre Optique

Phénomène de réflexion totale si :

- ❖ L'indice de réfraction du second milieu traversé est inferieur à celui du 1^er^ milieu traversé : $n_1 > n_2$.

- ❖ Si l'angle d'incidence i_1 est supérieur à une certain valeur appelé « angle d'incidence limite » noté i_l.



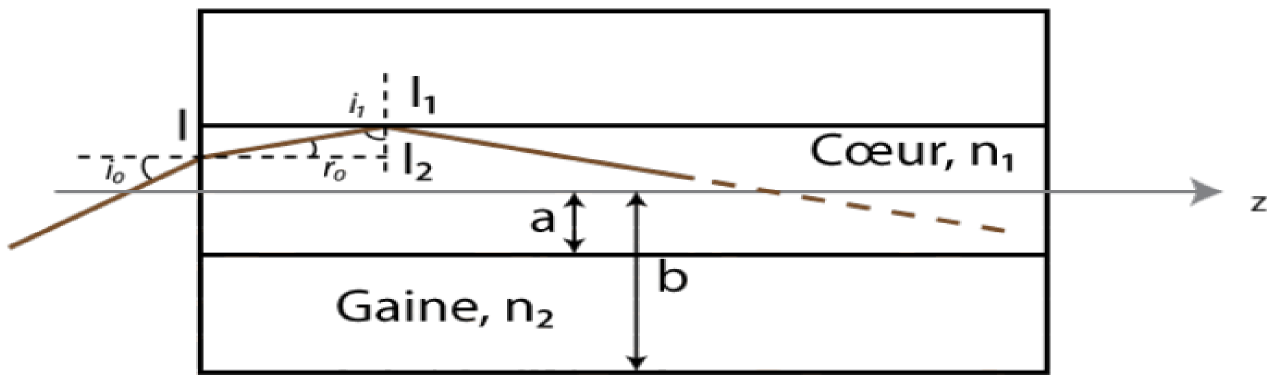


Phénomène de réflexion totale dans une fibre optique

La Réflexion Totale Et Son Application À La Fibre Optique

Exercice 1 : La fibre optique à saut d'indice :

Pour guider la lumière dans une direction donnée, on réalise des fibres optiques, longs fils cylindriques dont l'indice diminue quand on s'éloigne de l'axe. La lumière suit la direction moyenne de l'axe grâce au phénomène de réflexion totale, à condition que le faisceau incident ait une ouverture angulaire convenable. Dans le modèle qui suit, on considère que la fibre est constituée d'un cœur cylindrique de rayon a, d'indice n1 = 1, 510 et d'une gaine de rayon extérieur b, d'indice n2 = 1, 495.



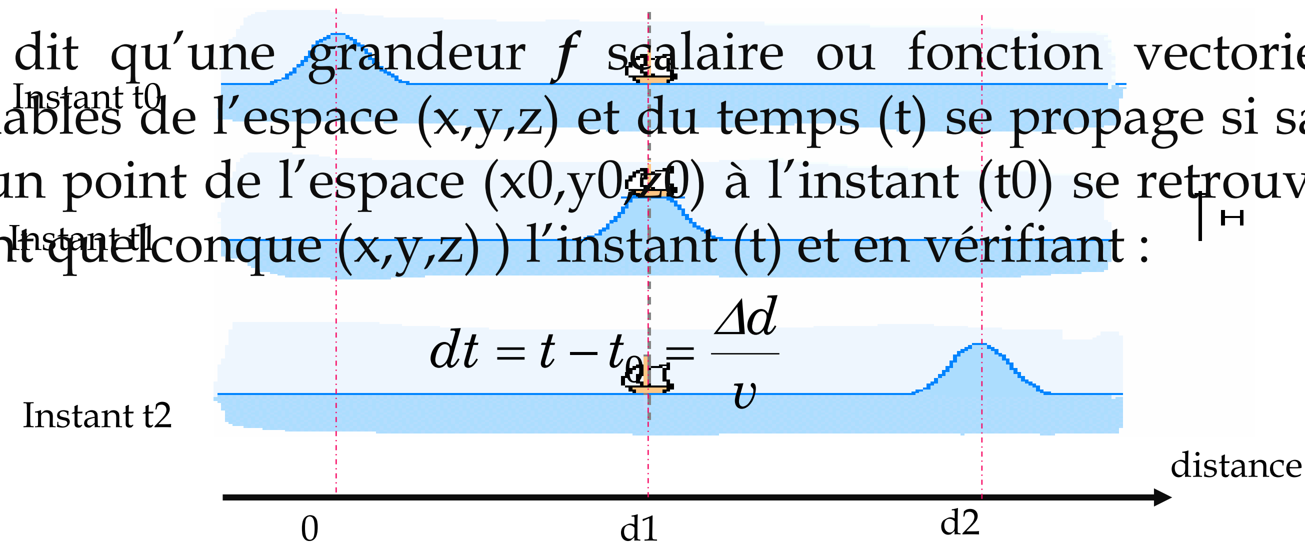
1. Un rayon incident se propage dans l'air dans un plan axial de la fibre et arrive en I, à une distance (OI < a) de l'axe, sur une extrémité de la fibre, sous un angle d'incidence i_0. On note i_1 l'angle que fait le rayon avec la normale séparant la gaine du cœur. Déterminer la condition sur i_1 tel qu'il y a guidage dans la fibre.
2. Exprimer la relation entre i_0 et i_1.
3. En déduire la condition sur i_0, de la forme $\sin(i_0) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, permettant le confinement du rayon dans la fibre.

VI.Phénomène de propagation d'onde

La **propagation des ondes** est un phénomène physique dont découlent l'évolution et la progression d'une onde au sein d'un milieu, ou encore certains mouvements d'une particule dans l'espace et le temps.

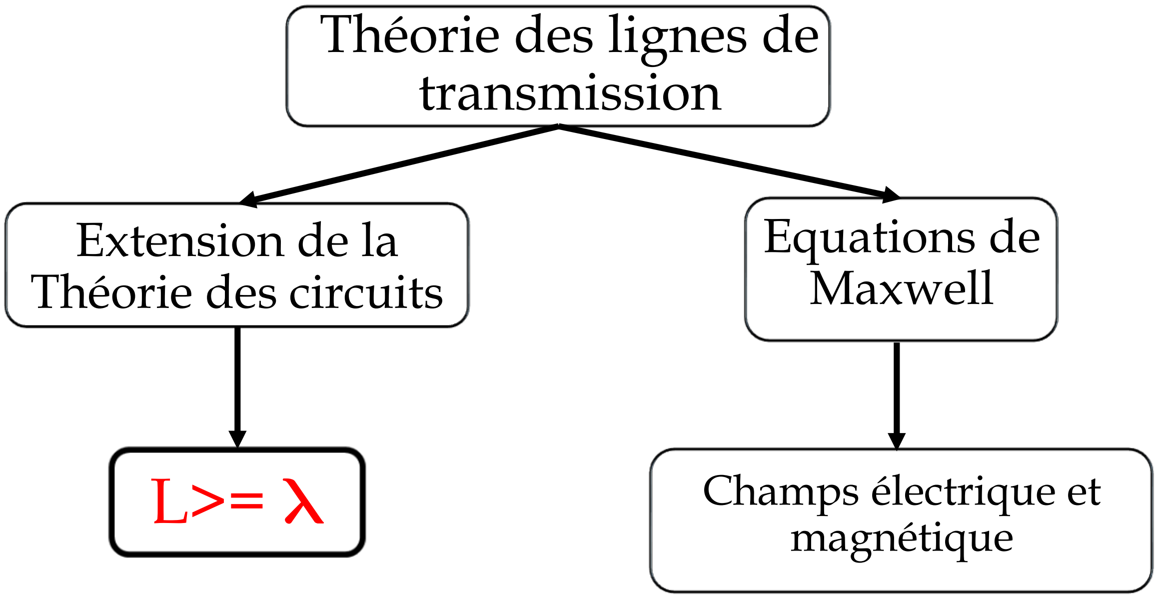
On dit qu'une grandeur f scalaire ou fonction vectorielle des variables de l'espace (x,y,z) et du temps (t) se propage si sa valeur en un point de l'espace (x0,y0,z0) à l'instant (t0) se retrouve en un point quelconque (x,y,z)) l'instant (t) et en vérifiant :

$$dt = t - t_0 = \frac{\Delta d}{v}$$



Théorie de lignes de transmission

Théorie de lignes de transmission



La méthode des lignes de transmission permet d'analyser des circuits à hautes fréquences en termes familiers à l'analyse de circuits : tension, courant, impédance.

Les différences entre basse et haute fréquence

- Une des différences principales entre l’analyse des circuits électriques et l’analyse des circuits avec des lignes de transmission est la taille électrique.
  - ✓ Aux basses fréquences, les éléments du circuit sont regroupés car les ondes de tension et de courant affectent en même temps tout le circuit.
  - ✓ Aux hyperfréquences, la tension et le courant n'affectent pas tout le circuit en même temps.

Le circuit doit être décomposé en sections unitaires dans lesquelles les éléments du circuit sont considérés comme étant regroupés.

***Note* :**

les dimensions du circuit sont comparables à la longueur d’onde selon la formule: $\lambda = c/f$

V. La ligne de transmission – Analyse par la théorie des circuits

La démarche est la suivante :

i. Construction d'un modèle de la ligne de propagation.

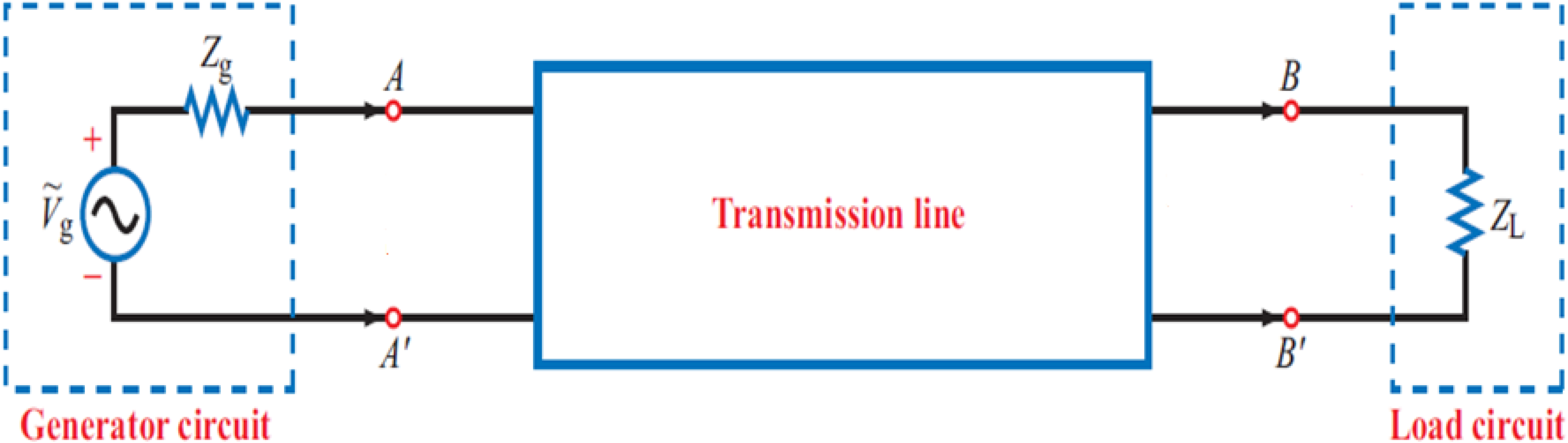
ii. Etablissement des équations différentielles couplées régissant la propagation d'une onde de tension ou de courant sur la ligne.

iii. Résolution des équations différentielles couplées en régime harmonique : ondes progressives et régressives, vitesse de phase, longueur d'onde.

iv. utilisations des outils d'analyse : abaque de Smith, paramètres S.

V. La ligne de transmission – Analyse par la théorie des circuits

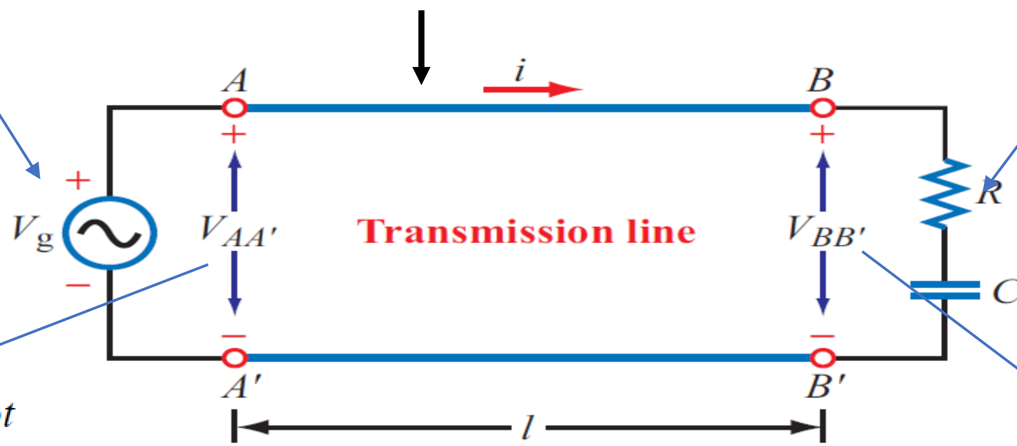
Ligne de transmission est un réseau à deux ports connectant un circuit générateur à l'extrémité d'envoi à une charge à l'extrémité réceptrice.



Les lignes de transmission :

- Deux fils parallèles (bifilaire),
- Câble coaxial
- Ligne Microstrip
- Fibre optique
- Guide d'ondes
- Etc…

V. La ligne de transmission – Analyse par la théorie des circuits



Au niveau de la source (x = 0), on écrit :

$$V_{AA'} = V_g(t) = V_0 \cos \omega t$$

Au niveau de la charge (x = l), on écrit :

$$V_{BB'}(t) = V_{AA'}(t - l/c)$$
$$= V_0 \cos [\omega(t - l/c)]$$
$$= V_0 \cos(\omega t - \phi_0),$$

Retarder par l/c

A t = 0, et pour f = 1 kHz ,

Si : (1) l = 5 cm:

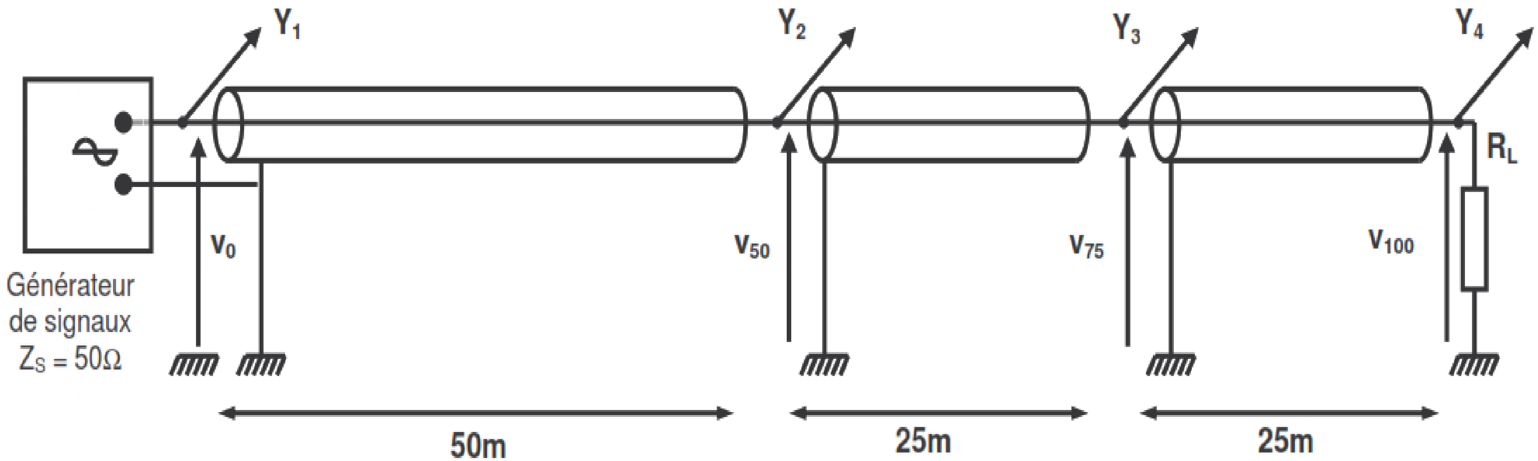
$$V_{BB'} = V_0 \cos(2\pi f l/c) = 0.999999999998\ V_0$$

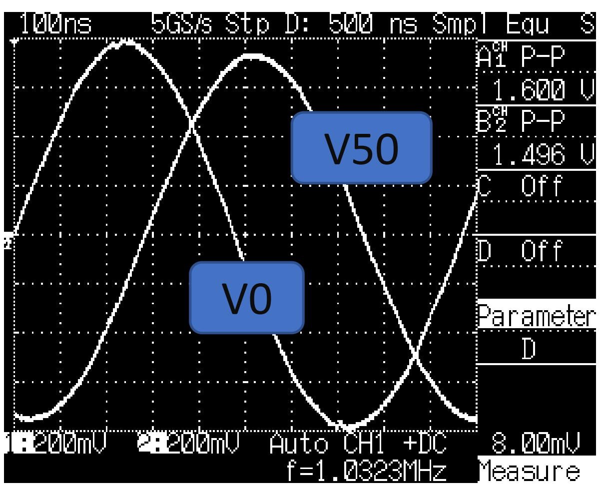
(2) Mais si l = 20 km:

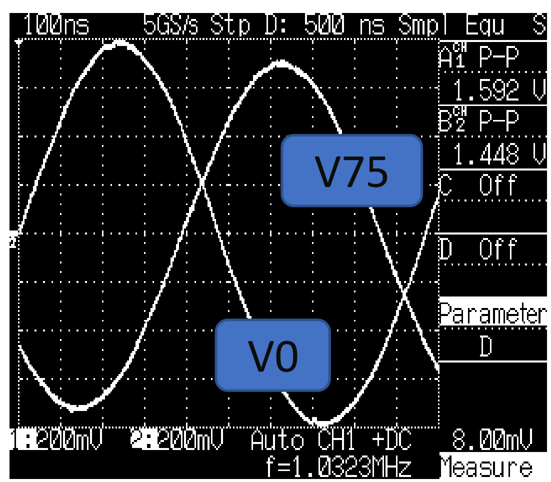
$$V_{BB'} = 0.91\, V_0$$

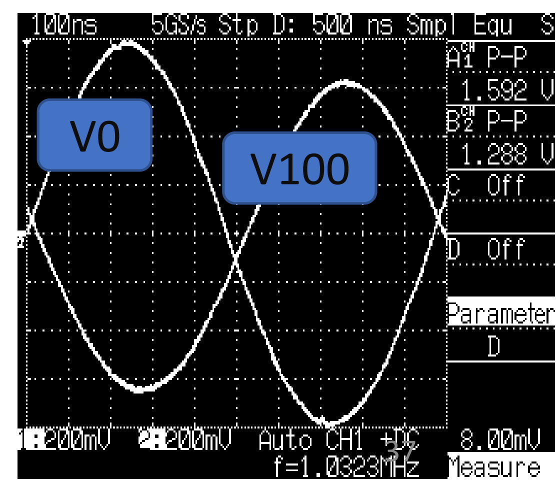
V. La ligne de transmission – Analyse par la théorie des circuits

On dispose d'un câble coaxial de longueur totale 100m, formé par l'assemblage d'un tronçon de 50m et de 2 tronçons de 25m, comme représenté sur la figure ci-dessous :

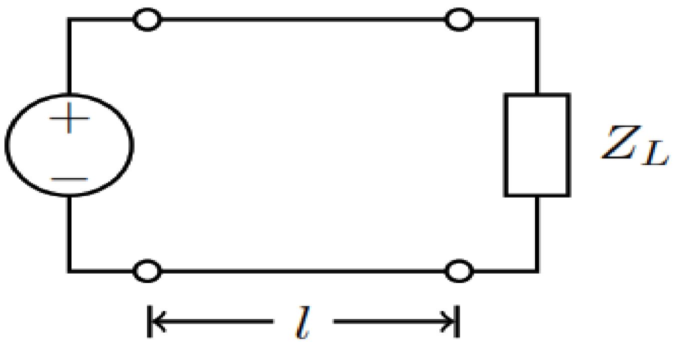






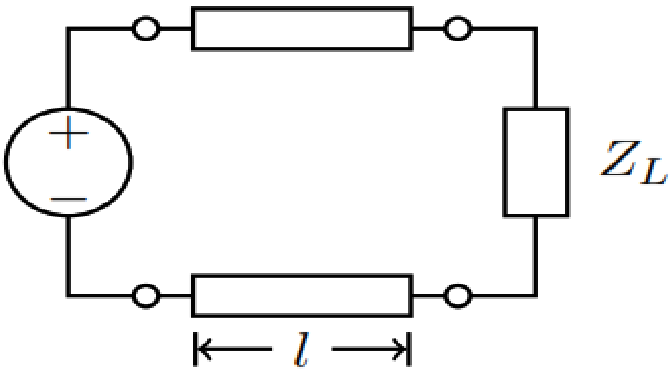


V. La ligne de transmission – Analyse par la théorie des circuits



En théorie de circuits, on peut négliger la distance entre la source et la charge. Lorsque la langueur d'onde est supérieur au dimension de la ligne.

$$\lambda >> l$$



En hyperfréquences, on ne peut pas négliger la distance entre la source et la charge.

$$\lambda \approx l \quad ou \quad \lambda < l$$

On modélise par une ligne de transmission.

Modèle électrique de la ligne de transmission

VII.Modélisation de la ligne de transmission

En basse fréquence : la ligne peut être modélisée par une simple résistance.

Augmentation de la fréquence : on voit l'apparition d'un phénomène de filtrage passe-bas. Ce phénomène peut être modélisé par une capacité en parallèle sur la ligne. Cette capacité traduit physiquement le fait que l'on dispose de deux conducteurs.

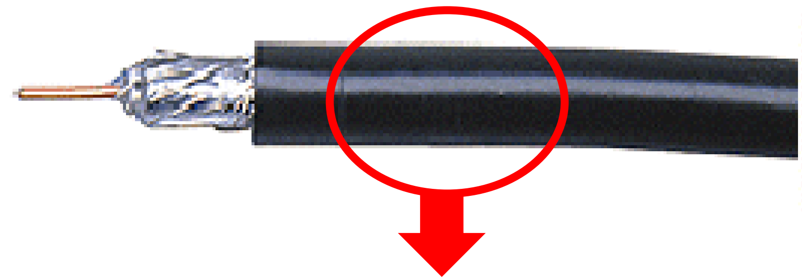
Augmentation de la fréquence, on se retrouve dans le cas de l'expérience précédente : la tension mesurée au bout de la ligne n'est pas du tout égale à la tension appliquée en entrée. Il se produit un phénomène de propagation.

Ce phénomène est du au comportement **inductif** de la ligne, on doit ainsi faire apparaître une inductance dans notre modèle.

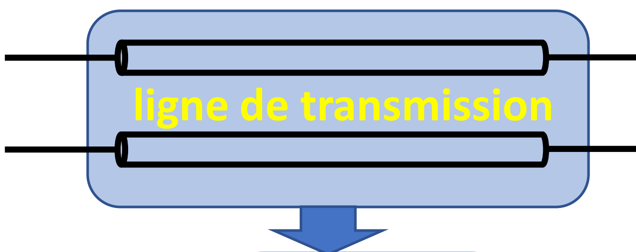
diélectrique séparant les deux conducteurs n'est pas parfait, un courant de fuite pourra circuler entre ceux-ci. Ce courant engendrera des pertes, il est donc nécessaire d'ajouter au modèle de résistance parallèle.

VII.Modélisation de la ligne de transmission

Pour modéliser une ligne, on considère qu'elle est formée d'une infinité de tronçons de longueur infiniment petite dx en cascade :



Le câble pourra alors être considéré comme la mise en cascade d'un grand nombre de cellules R,L,C élémentaires :



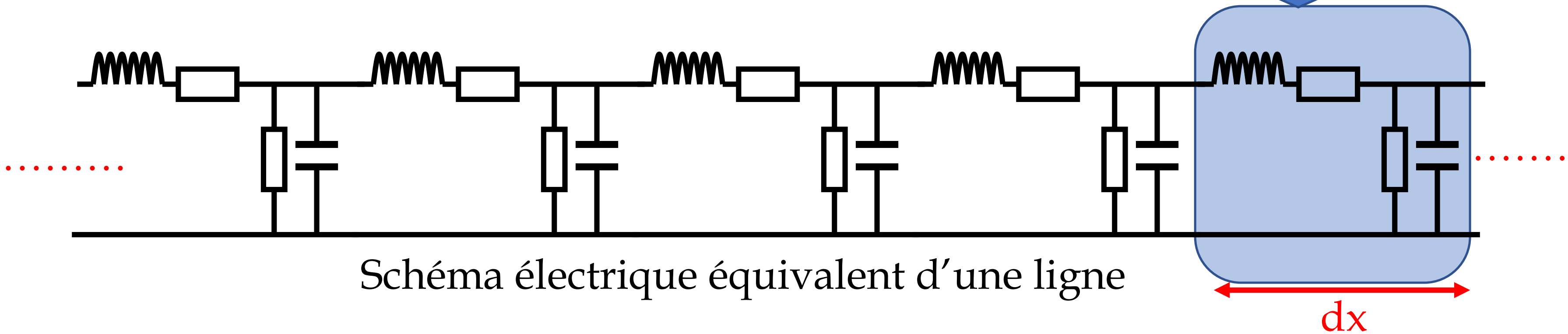
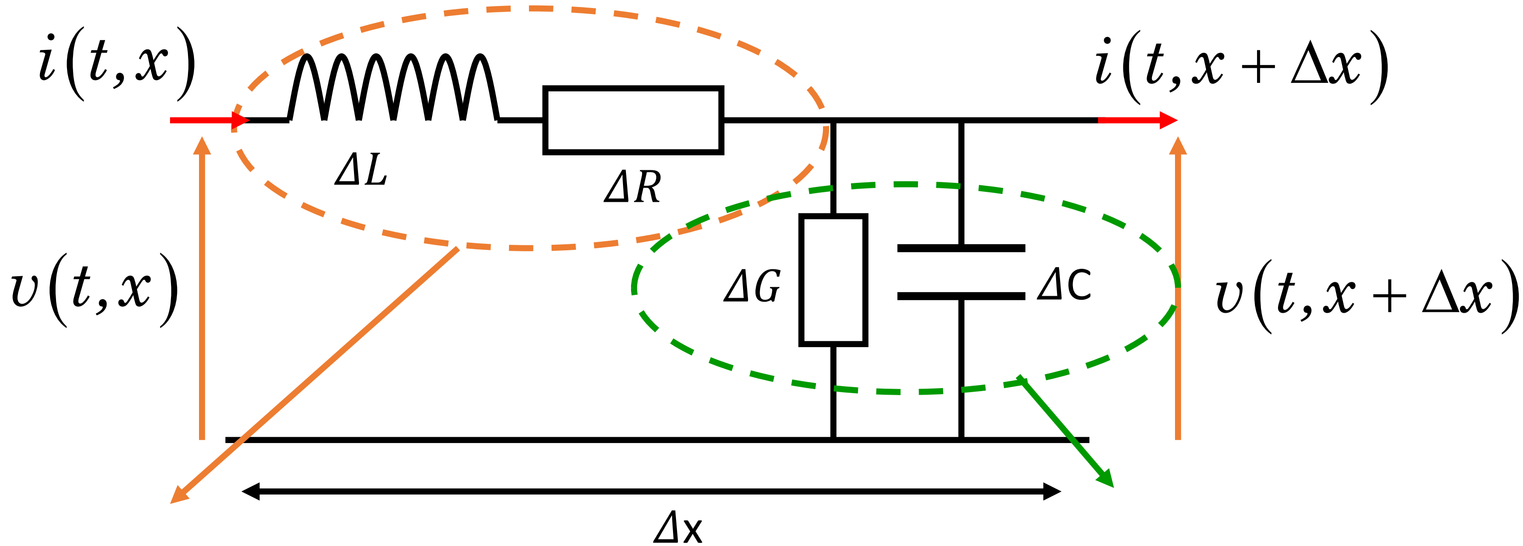


Schéma électrique équivalent d'une ligne

VII.Modélisation de la ligne de transmission

Une section d'épaisseur **dx** de la ligne peut être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



$$\begin{cases} \Delta L = L\Delta x \\ \Delta R = R\Delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta C = C\Delta x \\ \Delta G = G\Delta x \end{cases}$$

Pertes dans les conducteurs
L : inductance linéique H/m
R : résistance linéique Ω/m

Pertes dans les diélectriques
G : conductance linéique Ω-1/m
C : capacité linéique F/m

VII.Modélisation de la ligne de transmission

Paramètres d'une ligne de transmission

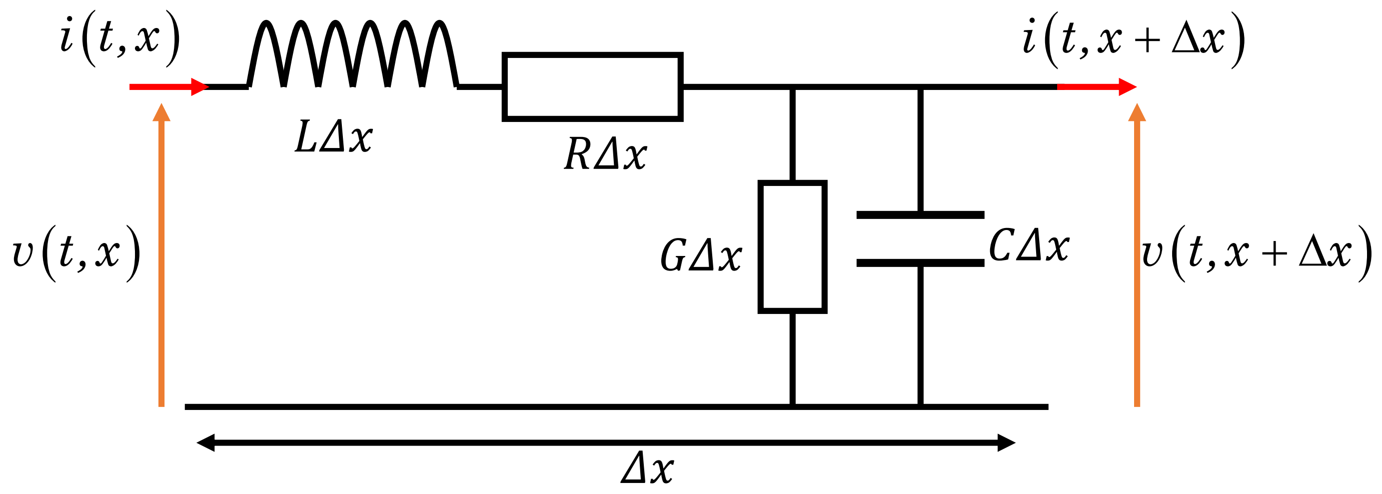
On définit pour la ligne de transmission 4 grandeurs

- R = résistance en série [/m]. Représente les pertes du conducteur.
- L = inductance série [H/m] de la ligne.
- G = conductance parallèle [S/m]. qui sépare les conducteurs, en S/m,
- C = représente la capacitance parasite [F/m], puisque les deux conducteurs sont sépares par un diélectrique.

Dans une ligne sans pertes, R = G = 0.

Ces quatre éléments R, L, C et G sont appelés paramètres primaires de la ligne de propagation.

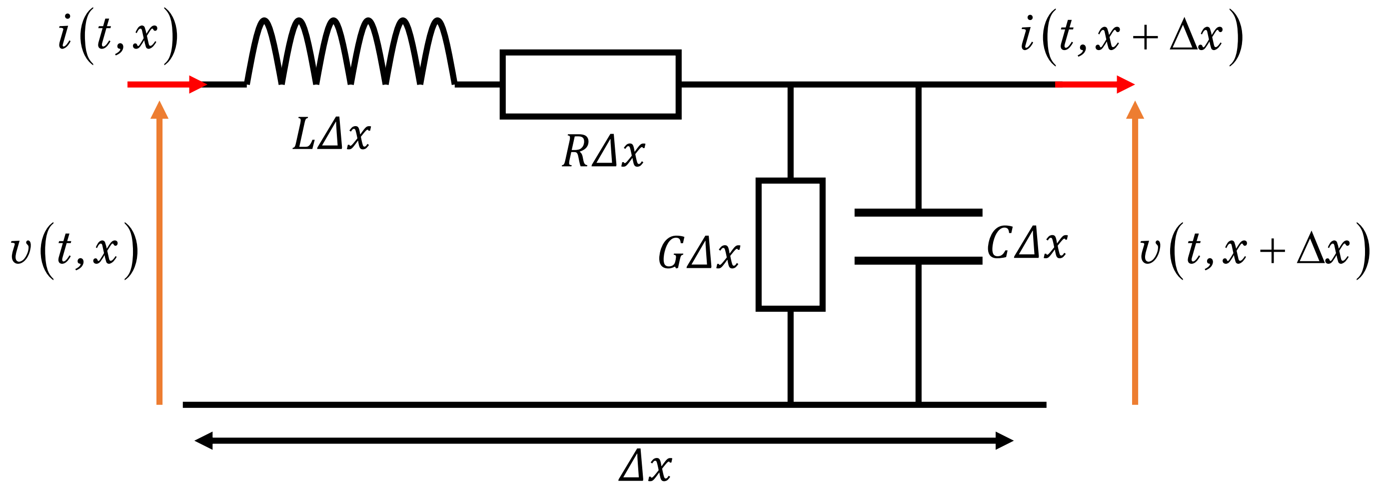
1. Équation des télégraphistes



Question 1 :
Trouvez deux équations aux dérivées partielles décrivent la tension $v(x,t)$ et l'intensité $i(x,t)$.

1. Équation des télégraphistes

Equation de la tension



La loi des mailles donne :

$$v(x) = L\Delta x\frac{\partial i(x)}{\partial t} + R\Delta x i(x) + v(x+\Delta x)$$

en divisant tous les termes par Δx et les réarranger, nous obtenons

$$\frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{\Delta x} = L\frac{\partial i(x)}{\partial t} + Ri(x)$$

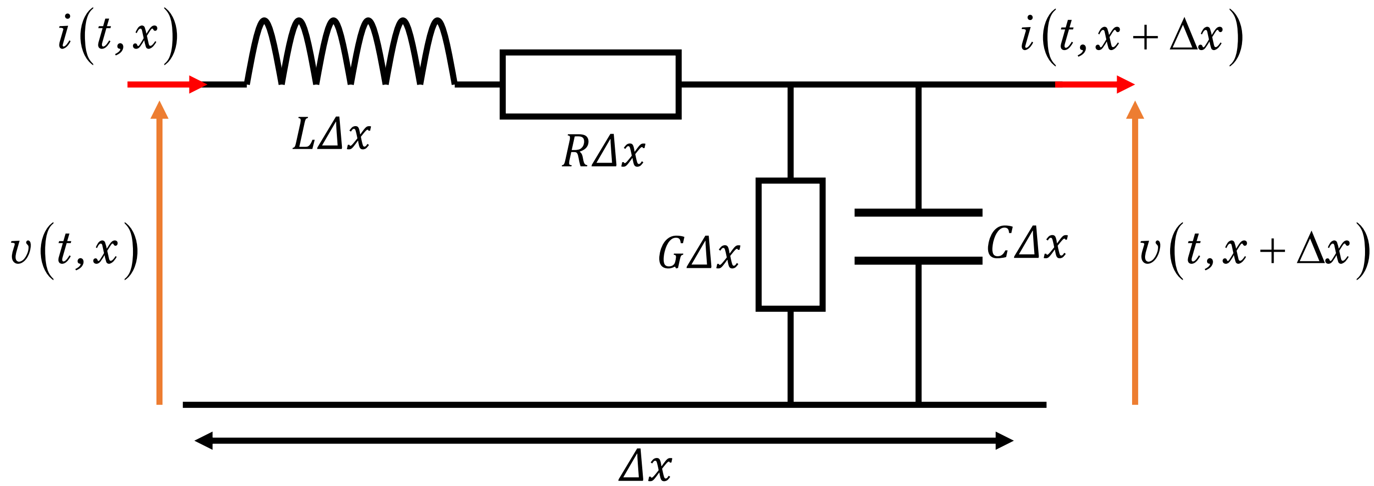
a. En régime qlq:

Quand $\Delta x \to 0$, l'équation devient une équation différentielle de 1^er ordre :

$$\frac{dv(x)}{dx} = -Ri(x) - L\frac{\partial i(x)}{\partial t}$$

1. Équation des télégraphistes

Equation du courant



La loi des nœuds donne :

$$i(x) = C\Delta x \frac{\partial v}{\partial t} + G\Delta x V(x) + i(x+\Delta x)$$

En divisant tous les termes par Δx et les réarranger, nous obtenons

$$\frac{i(x) - i(x+\Delta x)}{\Delta x} = C\frac{\partial v}{\partial t} + GV(x)$$

a. En régime qlq:

Quand $\Delta x \to 0$, l'équation devient une équation différentielle de 1er ordre :

$$\boxed{\frac{di(x)}{dx} = -C\frac{\partial v}{\partial t} - GV(x)}$$

1. Équation des télégraphistes

Les équations de la tension et le courant sont représenté dans deux domaines

$$\frac{dv(x)}{dx} = -Ri(x) - L\frac{\partial i(x)}{\partial t}$$

$$\frac{di(x)}{dx} = -C\frac{\partial v}{\partial t} - GV(x)$$

Le phaseur est un nombre qui contient de l'information a propos de l'amplitude et la phase d'une quantité (tension ou courant dans notre cas).

(on parle aussi d'analyse dans le domaine fréquentiel)

$$\begin{cases} v(t) = \bar{V}\,cos(wt+\varphi) \\ i(t) = \bar{I}\,cos(wt+\varphi) \end{cases}$$

Equation d'Euler

$$\begin{cases} V = \bar{V}.e^{j\omega t} \\ I = \bar{I}.e^{j\omega t} \end{cases}$$

1. Équation des télégraphistes

On obtient deux équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dV(x)}{dx} = -(R + j\omega\, L)I(x) \\ \dfrac{dI(x)}{dx} = -(G + j\omega\, C)V(x) \end{cases}$$

Question :

- Déduire une équation aux dérivées partielles variée par $v(x)$ (ou ne figure pas $i(x)$.
- Déduire une équation aux dérivées partielles variée par i(x) (ou ne figure pas v(x).

Équations différentielles de second ordre

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V(x)}{dx^2} - \left[(R + j\omega L)(G + j\omega C)\right]V(x) = 0 & \text{(a)} \\ \dfrac{d^2I(x)}{dx^2} - \left[(R + j\omega L)(G + j\omega C)\right]I(x) = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

1. Équation des télégraphistes

On pose :

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

On peut réécrire les équations (a) et (b) de la forme suivante :

$$\frac{d^2\bar{I}(x,w)}{dx^2} - \gamma^2\bar{I}(x,w) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2\bar{V}(x,w)}{dx^2} - \gamma^2\bar{V}(x,w) = 0 \qquad (2)$$

Question : trouvez la solution des équations (1) et (2) :

Intégrons l'équation (1, 2). L'équation caractéristique s'écrit :

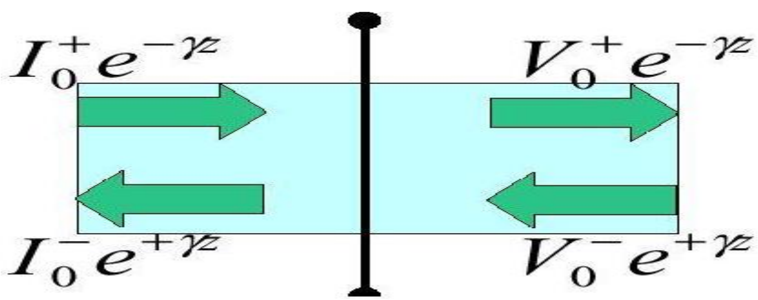
$$r^2 = \gamma^2 \quad \Longrightarrow \quad r_{1,2} = \pm\,\gamma$$

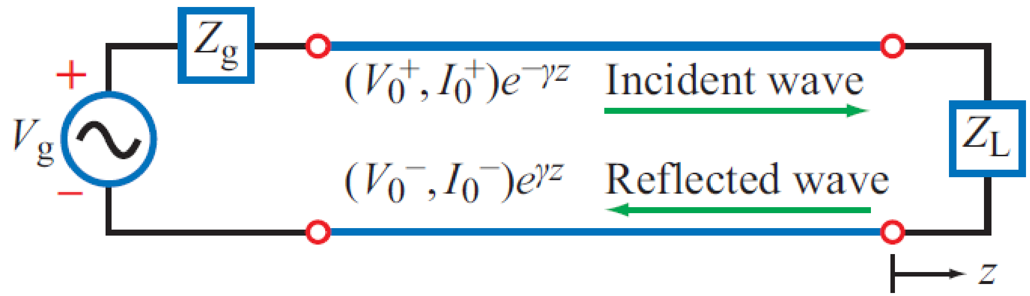
1. Équation des télégraphistes

Formulation en ondes progressives et régressives

$$V(x) = V_0^+ e^{-\gamma x} + V_0^- e^{\gamma x} \qquad\qquad I(x) = I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{\gamma x}$$

Le terme $e^{-\gamma x}$ représente la propagation de l'onde dans le sens croissant de x, et le terme $e^{\gamma x}$ représente la propagation de l'onde dans le sens négatif de x





la présence de deux ondes sur la ligne se propageant dans des directions opposées produit une onde stationnaire

où

Constant de phase

Constant de propagation complex

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Constant d'atténuation

1. Équation des télégraphistes

Formulation en ondes progressives et régressives

$$V(x) = V_0^+ e^{-\gamma x} + V_0^- e^{\gamma x}$$

Si on se concentre sur l'onde progressive de la tension :

$$V_p^+ = V_0^+ e^{-\gamma x}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$V_p^+ = \underbrace{V_0^+ e^{-\alpha x}}_{\text{L'amplitude}} \; \overbrace{e^{-j\beta x}}^{\text{La phase}}$$

Alpha est un paramètre qui nous donne des informations concernant la réduction de l'amplitude. En Nepers/m

1 Nepers/m = 8,68 dB/m

Beta est un paramètre qui control la variation de la phase de l'onde le long de la ligne de transmission . En rad/m

1. Équation des télégraphistes

Somme de deux termes :

- ✓ L'un dont l'amplitude diminue quand x augmente (déplacement générateur vers récepteur) = onde incidente.
- ✓ L'autre dont l'amplitude diminue quand x diminue (déplacement récepteur vers générateur) = onde réfléchie.

2. Caractéristiques des ondes : Impédance caractéristique, Exposant de propagation, Coefficient de réflexion

a. Constant de propagation

C'est un paramètre de propagation exprimé ici sous forme complexe :

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + \beta j$$

Le calcul des parties réelle α et imaginaire β de l'exposant de propagation s'effectue en partant de :

$$\gamma = \alpha + \beta j$$

Question : exprimez les paramètres d'atténuation et de phase en fonction de R, C, L et G?

En égalant les parties réelles des carrés des deux membres, on obtient en effet :

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC$$

Et en égalant les carrés du module, on obtient :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\left(G^2 + \omega^2 C^2\right)}$$

2. Caractéristiques des ondes : Impédance caractéristique, Exposant de propagation, Coefficient de réflexion

a. Constant de propagation

Et en déduit, par addition et soustraction :

- Coefficient d'atténuation :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[RG - \omega^2 LC + \sqrt{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\left(G^2 + \omega^2 C^2\right)}\right]}$$

- Coefficient de phase :

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\left(G^2 + \omega^2 C^2\right)} - RG + \omega^2 LC}$$

2. Caractéristiques des ondes : Impédance caractéristique, Exposant de propagation, Coefficient de réflexion

b. Impédance caractéristique

L'impédance caractéristique d'une ligne de transmission est le rapport entre les amplitudes de tension et de courant d'une onde unique se propageant le long de la ligne.

$$\bar{I}(\omega, x) = \bar{I}_{0+} e^{-\gamma x} + \bar{I}_{0-} e^{\gamma x}$$

$$\bar{V}(\omega, x) = \bar{V}_{0+} e^{-\gamma x} + \bar{V}_{0-} e^{\gamma x}$$

L'expression des constants est :

$$V_{0+} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega c}} I_{0+}$$

Trouver l'expression des Constantes V_{0+} et V_{0-} en fonction de I_{0+}et I_{0-}

$$V_{0-} = -\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega c}} I_{0-}$$

b. Impédance caractéristique

On remplace les constants par ses expressions dans l'équation de tension, on obtient :

$$\bar{I}(\omega,x) = \bar{I}_{0+}e^{-\gamma x} + \bar{I}_{0-}e^{\gamma x}$$

$$\bar{V}(\omega,x) = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega c}}\left(\bar{I}_{0+}e^{-\gamma x} - \bar{I}_{0-}e^{\gamma x}\right)$$

L'impédance caractéristique :

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega c}}$$

b. Impédance caractéristique

On écrit le rapport tension sur courant en tout point de la ligne :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{I}(\omega)} = \frac{\bar{V}_{0+}e^{-\gamma x} + \bar{V}_{0-}e^{\gamma x}}{\bar{I}_{0+}e^{-\gamma x} + \bar{I}_{0-}e^{\gamma x}}$$

➢ **Situation pour une onde progressive seule :**

Si seule une onde progressive existe (termes en $\boldsymbol{e^{-\gamma x}}$), nous obtenons :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{I}(\omega)} = \frac{\bar{V}_{0+}e^{-\gamma x}}{\bar{I}_{0+}e^{-\gamma x}} = \frac{\bar{V}_{0+}}{\bar{I}_{0+}} = \bar{Z}_c$$

➢ **Situation pour une onde régressive seule**

Si seule une onde régressive existe (termes en $\boldsymbol{e^{\gamma x}}$), nous obtenons :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{I}(\omega)} = -\frac{\bar{V}_{0-}e^{\gamma x}}{\bar{I}_{0-}e^{\gamma x}} = -\frac{\bar{V}_{0-}}{\bar{I}_{0-}} = -\bar{Z}_c$$

b. Impédance caractéristique

On en conclut que l'impédance Z_c correspond à la valeur de l'impédance qu'il faut connecter au bout d'une ligne afin qu'elle se comporte comme une ligne semi infinie, c'est-à-dire pour que seule une onde (**progressive** ou **régressive**) se propage. On nomme cette impédance « **l'impédance caractéristique** » de la ligne.

Impédance caractéristique en fonction des paramètres linéiques de la ligne :

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Dans le cas général, l'impédance caractéristique d'une ligne est **complexe**.

Pour la ligne de transmission sans perte :

$$(R << L), (G << C)$$

On a alors une impédance caractéristique réelle, qui s'écrit :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

2. Caractéristiques des ondes : Impédance caractéristique, Exposant de propagation, Coefficient de réflexion

c. Coefficient de réflexion

on peut définir le coefficient de réflexion comme étant le rapport de l'onde réfléchie sur l'onde incidente :

$$\Gamma = \frac{V_{réfléchie}}{V_{incidente}}$$

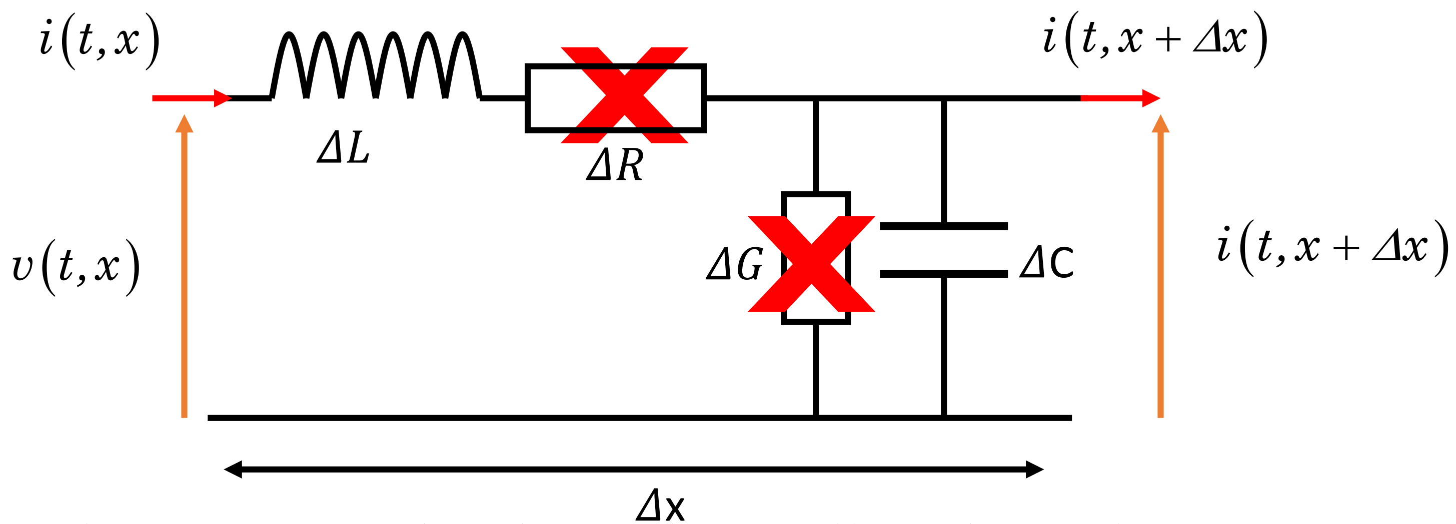
Ce coefficient de réflexion dépend de la longueur de la ligne.

$$\Gamma(x) = \frac{\bar{V}_0^- e^{\gamma x}}{\bar{V}_0^+ e^{-\gamma x}} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(x) = \Gamma(0) e^{2\gamma x}$$

$$\Gamma(0) = \frac{\bar{V}_0^-}{\bar{V}_0^+}$$

Exercice 1: impédance caractéristique et coefficient de réflexion

Ligne sans pertes



1. Trouver les équations de télégraphistes d'une ligne de transmission sans pertes?
2. Trouvez l'expression de la constant de propagation?
3. Déduire l'expression de l'atténuation et de la phase?
4. Déduire l'impédance caractéristique de la ligne?
5. Déduire l'expression de la vitesse de propagation et la longueur d'onde?

Les équations se simplifient :

$$v(t, x + \Delta x)$$

Exercice 1: impédance caractéristique et coefficient de réflexion

Ligne sans pertes

La constante de propagation se simplifie à :

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$
$$\alpha = 0$$

L'impédance caractéristique d'un ligne sans pertes est :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On obtient aussi :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

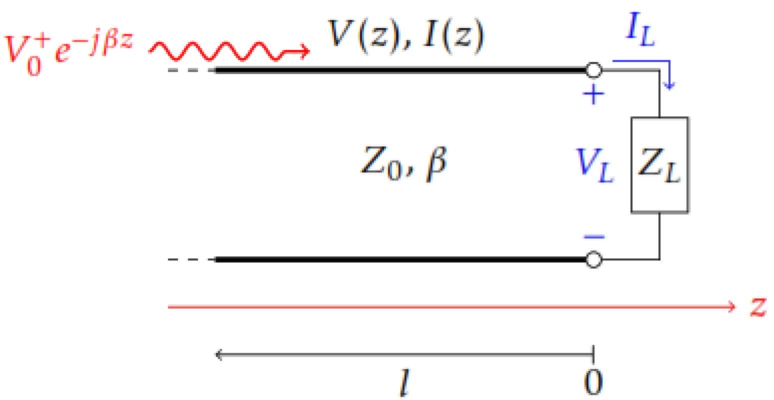
Exercice 2: impédance caractéristique et coefficient de réflexion

Considérons une ligne de transmission, qui a les paramètres linéiques suivants : R=0,5 $\boldsymbol{\Omega}$/m, L= 0,2 µH/m; C=100 picoF/m, G=0,1 s/m, f=1 Ghz. Et la valeur instantanée de la tension est $v(t=0, x=0)=8{,}66\ V$, la phase initiale est $\Phi_0 = 30°$.

1. En rappelant les équations de variation de la tension et du courant de la ligne de transmission?
2. Calculer la constant de propagation de la ligne de transmission?
3. Calculer l'amplitude de la tension ?
4. Calculer la tension instantanée à $\boldsymbol{t}$=100 ns, à l'emplacement $\boldsymbol{x}$= 1 m ?
5. Calculer l'amplitude de la tension à $\boldsymbol{x}$ = 1 m ?
6. Calculer l'impédance caractéristique de la ligne?

Exercice 3: impédance caractéristique et coefficient de réflexion

On applique une onde $V_0^+ e^{-j\beta z}$ a la ligne, à z<0, comme le montre la figure à cotée. L'onde provient d'une source de tension, située à un point $z < 0$. La ligne de transmission est terminée (branchée) par une charge Z_L. Cette charge peut représenter une antenne, ou un transistor, ou tout simplement une impédance.



Ligne de transmission terminée par une charge

1. Donner l'expression de la tension et le courant aux bornes de la charge puis aux bornes du générateur?
2. Donner l'expression de l'impédance de la charge en fonction de l'impédance caractéristique?
3. Trouver l'expression de coefficient de réflexion en fonction de Z_L et Z_0?
4. Trouver l'expression de l'impédance vue du générateur en fonction de coefficient de réflexion puis en fonction de l'impédance caractéristique et de la charge.
5. Réécrire les équations de la tension et du courant en fonction du coefficient de réflexion ?

Exercice 3: impédance caractéristique et coefficient de réflexion

le courant et la tension total sur la ligne sont :

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z} \qquad V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

La tension et le courant à la charge sont relies par l'impédance de la charge, donc à z = 0, il faut que :

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0$$

et si on résout pour V_0^-

$$V_0^- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^+$$

Le rapport entre l'onde réfléchie et l'onde incidente est appelé le coefficient de réflexion :

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

On peut réécrire les équations en fonction du coefficient de réflexion :

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left[e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right] \qquad V(z) = V_0^+\left[e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right]$$

Exercice 4: impédance caractéristique et coefficient de réflexion

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique R_c, alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g. Cette ligne est terminée par une charge d'impédance Z_t, on désignera par L, l'origine étant sur la terminaison.

1. En rappelant les équations générales des lignes sans pertes (expressions des tensions et courants le long de la ligne), exprimer Z(l), impédance "ramenée" par la ligne a l'abscisse L, en fonction de R_c, Z_t et L.

$$Z(l) = R_c \frac{Z_t + jR_c \tan(\beta l)}{R_c + jZ_t \tan(\beta l)}$$

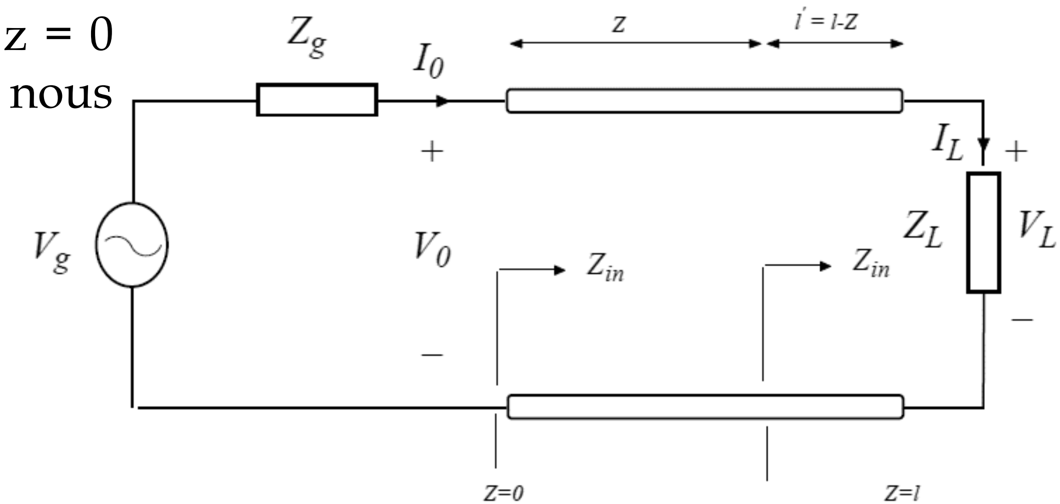
2. Examiner les cas particuliers pour lesquels Z_t vaut 0 (court-circuit) et ∞ (circuit ouvert): quelle remarque peut-on faire sur ces valeurs particulières de Z(l)? En fonction de la valeur de L, quels sont les dipôles équivalents obtenus?

Plan du chapitre

1. L'impédance ramenée
2. Puissance transmise
3. Rapport d'onde stationnaire
4. Abaque de Smith

Lignes sans perte : impédance ramenée d'un tronçon de ligne

la ligne de transmission s'étendre de z = 0 au générateur à z = L à la charge. nous avons besoin de V_0 et I_0.
comme mentionné ci-dessus,



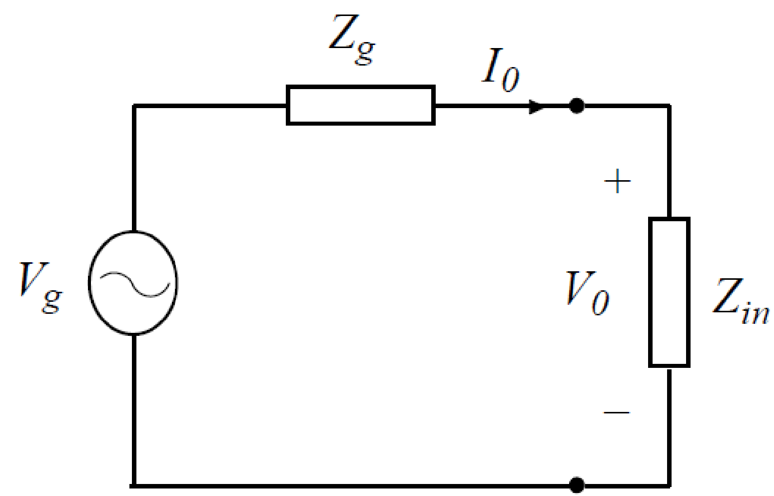
$$\begin{cases} V(\omega,x) = \left(V_0^+ e^{j\beta x} + V_0^- e^{-j\beta x}\right) \\ I(\omega,x) = \dfrac{1}{Z_c}\left(V_0^+ e^{j\beta x} - V_0^- e^{-j\beta x}\right) \end{cases}$$

Impédance au point d'abscisse x=0 :

$$Z(x=0) = Z_l = Z_c \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-}$$

Impédance en un point d'abscisse x :

$$Z(x) = \frac{V(\omega,x)}{I(\omega,x)} = Z_c \frac{V_0^+ e^{j\beta x} + V_0^- e^{-j\beta x}}{V_0^+ e^{j\beta x} - V_0^- e^{-j\beta x}}$$



D'où :

$$Z_{in}(x) = Z_c \frac{Z_l + jZ_c\, tan(\beta x)}{Z_c + jZ_l\, tan(\beta x)}$$

Lignes sans perte : impédance ramenée d'un tronçon de ligne

$$Z_{in}(x) = Z_c \frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta x)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta x)}$$

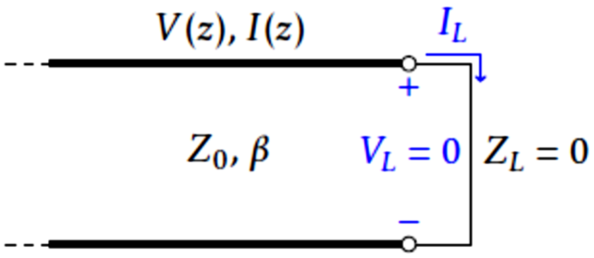
Cas spéciaux :

1) Une ligne :
   - charges;
   - circuit ouvert,
   - court-circuit,

2) longueur de ligne :
   - ligne de transmission quart d'onde $\lambda/4$
   - ligne de transmission demi-onde $\lambda/2$
   - Ligne de transmission infinie.

Lignes sans perte : impédance ramenée d'un tronçon de ligne

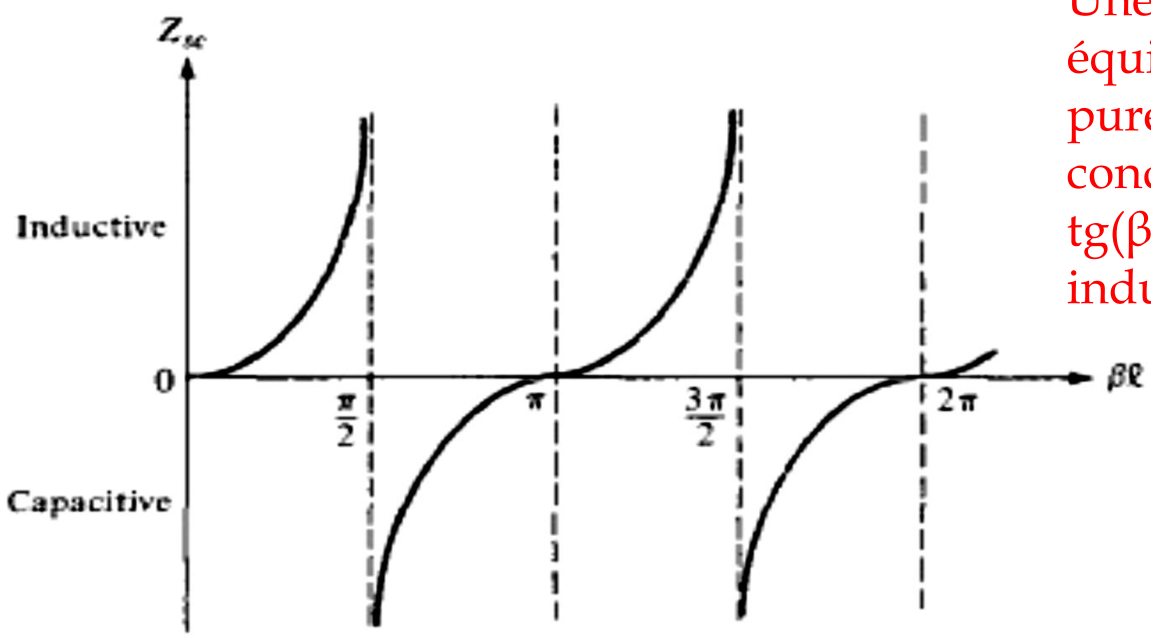
Cas spéciaux :



1. Ligne court-circuitée $Z_L = 0$

$$Z_{cc} = Z_{in}\big|_{Z_L=0} = jZ_c \tan(\beta x)$$

Cette impédance est une réactance pure, qui peut être capacitive ou inductive en fonction de la valeur de x.

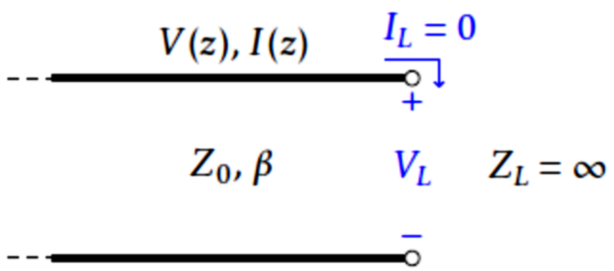


Une ligne court circuitée est donc équivalente à une impédance purement imaginaire, c'est-à-dire un condensateur aux endroits tel que tg(βx) est négative ou à une inductance quand tg(βx) est positive.

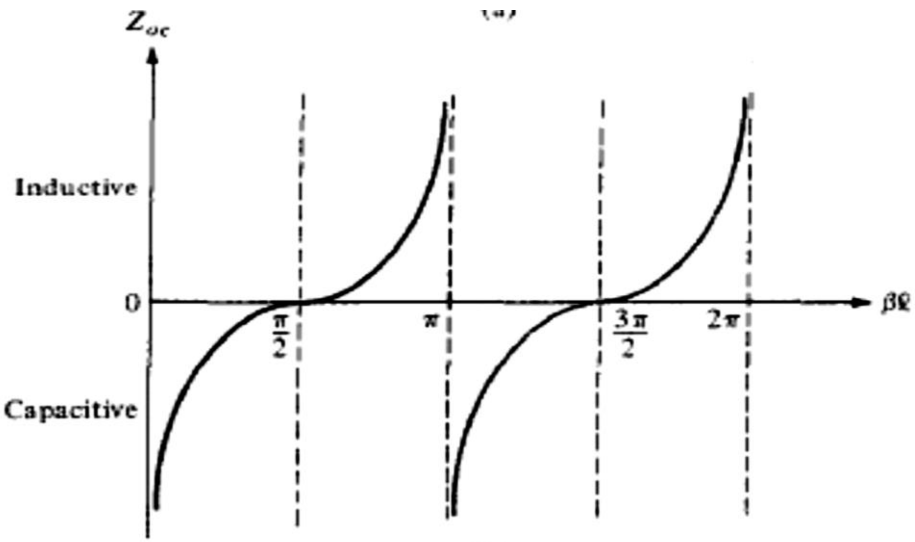
Lignes sans perte : impédance ramenée d'un tronçon de ligne

Cas spéciaux :

2. Ligne ouverte $Z_L = \infty$



$$Z_{co} = \lim_{Z_L \to \infty} Z_{in} = -j\,cotan(\beta x)$$



(b)

$$Z_{co} Z_{cc} = \left[-j\,cotan(\beta x)\right]\left[j\,tan(\beta x)\right]$$
$$= Z_c^2$$

$$\frac{Z_{cc}}{Z_{co}} = \frac{\left[j\,tan(\beta x)\right]}{\left[-j\,cotan(\beta x)\right]}$$
$$= -tan^2(\beta x)$$

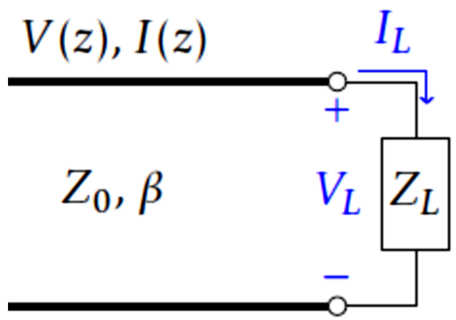
Une ligne terminée par un circuit ouvert est donc équivalente à une impédance purement imaginaire, c'est à-dire un condensateur aux endroits tel que cotg(β x) est positive ou à une inductance quand cotg(β x) est négative.

Lignes sans perte : impédance ramenée d'un tronçon de ligne

Cas spéciaux :

3. Ligne chargée $Z_L = Z_c$

$$\Rightarrow \quad Z_{in} = Z_c$$



Dans ce cas on dit que la charge est adaptée à ligne

4. LT quart d'onde $\lambda/4$

$$Z_{in} = \frac{Z_c^2}{Z_L}$$

Ce type de ligne permet de transformer un court-circuit en circuit ouvert, ou vice versa. Ce type de ligne est aussi utilise pour l'adaptation d'impédance

5. LT demi onde $\lambda/2$

$$Z_{in} = Z_L$$

L'impédance de la ligne n'affecte pas l'impédance à l'entrée.

Lignes sans perte : ROS (Rapport d'onde stationnaire)

On observera les phénomènes suivants :

- une partie de l'énergie n'est plus absorbée par la charge :
  - on a une perte de la puissance transmise à la charge ;
- les tensions et les courants ne sont plus constants le long de la ligne :
  - on a des « ondes stationnaires », ce qui induit plus de pertes dans la ligne ;

Le rapport d'ondes stationnaires (ROS) exprime la qualité de l'adaptation d'une charge (antenne), à une ligne de transmission (coaxiale ou bifilaire).

Lignes sans perte : ROS (Rapport d'onde stationnaire)

La tension maximale/ minimale a lieu lorsque

$$V_{max} = V_0^+ \left(1+|\Gamma|\right)$$

$$V_{min} = V_0^- \left(1-|\Gamma|\right)$$

ce qui donne

$$ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

- **Si la charge est adaptée à la ligne,**

$\boldsymbol{\Gamma = 0}$ ⇒ $ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = 1$

- **Si la charge n'est pas adaptée à la ligne,**

$\boldsymbol{\Gamma = 1}$ ⇒ $ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \infty$

Lignes sans perte : Calcule de la puissance

On peut calculer la puissance moyenne transportée par la ligne de transmission :

$$P = \frac{1}{2} Re\left(V(z) I(z)^* \right)$$

$$= \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_c} Re\left(1 - \Gamma^* e^{-2j\beta z} + \Gamma e^{2j\beta z} - \left|\Gamma\right|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_c}\left(1 - \left|\Gamma\right|^2 \right)$$

Γ= 0 La puissance maximale est fournie à la charge $P_m = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2Z_c}$

Γ = 1 Aucune puissance n'est délivrée à la charge $P_m = 0$

Lignes sans perte :

Exemple

Une ligne de transmission sans pertes de longueur de 30 m et d'une impédance caractéristique Z_c=50 Ohm, fonctionnant à une fréquence de 2 Mhz et terminée par une charge Z_L=60+j40. trouver:

1. Le coefficient de réflexion;
2. La valeur de ROS;
3. L'impédance d'entrée.

Abaque de Smith : Méthode d'analyse

Méthode d'analyse des lignes de Transmission

Méthode Analytique

Méthode géométrique

- Simple;
- Facile à utilisé;

Abaque de Smith : utilités

L'abaque de Smith sert, entre autres, à

- Calculer l'impédance ramenée
- Calculer l' admittance correspondant à une impédance,
- Calculer le coefficient de réflexion
- Calculer le Rapport d'onde stationnaire
- Trouver les cellules d'adaptation d'impédance
- dimensionner un circuit d'adaptation d'impédance

Analyseurs de réseau

L’analyseur de réseaux est l’outil principal de mesure aux hautes fréquences. Il permet de mesurer les ondes transmises et réfléchies sur un dispositif sous test.

Abaque de Smith : description

Relation entre le coefficient de réflexion et l'impédance au point x

$$\Gamma(x) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = |\Gamma| e^{j\theta}$$

avec

$$Z_L = Z_c \frac{1 + |\Gamma| e^{j\theta}}{1 - |\Gamma| e^{j\theta}}$$

Tous les deux sont complexe

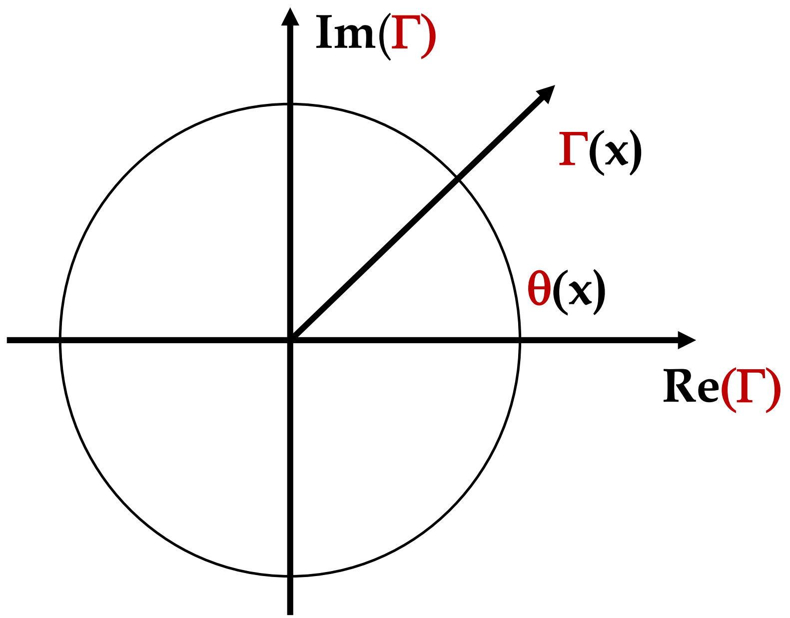
Par l'utilisation de l'impédance réduite $\boldsymbol{z_l = \frac{Z_L}{Z_c}}$

$$\Gamma(x) = \frac{z_l - 1}{z_l + 1} = |\Gamma| e^{j\theta}$$

On pose

$$\Gamma(x) = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

$$z_l = r_l + jx_l$$



Abaque de Smith : description

$$r_l + jx_l = \frac{(1+\Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1-\Gamma_r) - j\Gamma_i}$$

les parties réelles et imaginaires sont

$$r_l = \frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \qquad x_l = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2}$$

On écrit ces équations sous une autre forme :

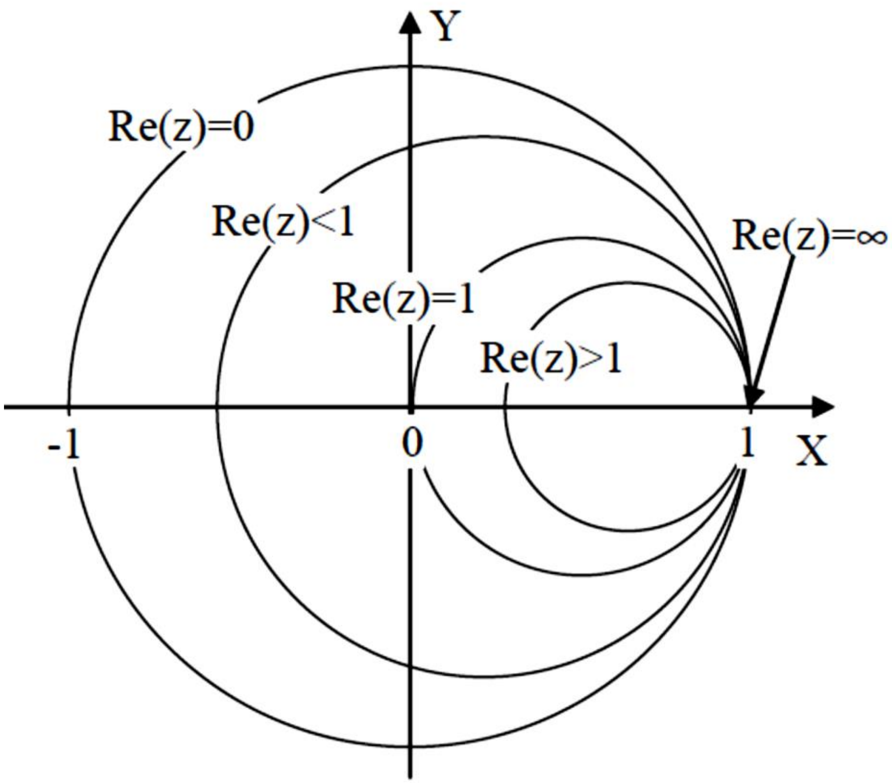
$$\left(\Gamma_r - \frac{r_l}{1+r_l}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r_l}\right)^2 \qquad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_l}\right)^2 = \frac{1}{x_l}$$

Cercles de résistance **Cercles de réactance**

Abaque de Smith : description

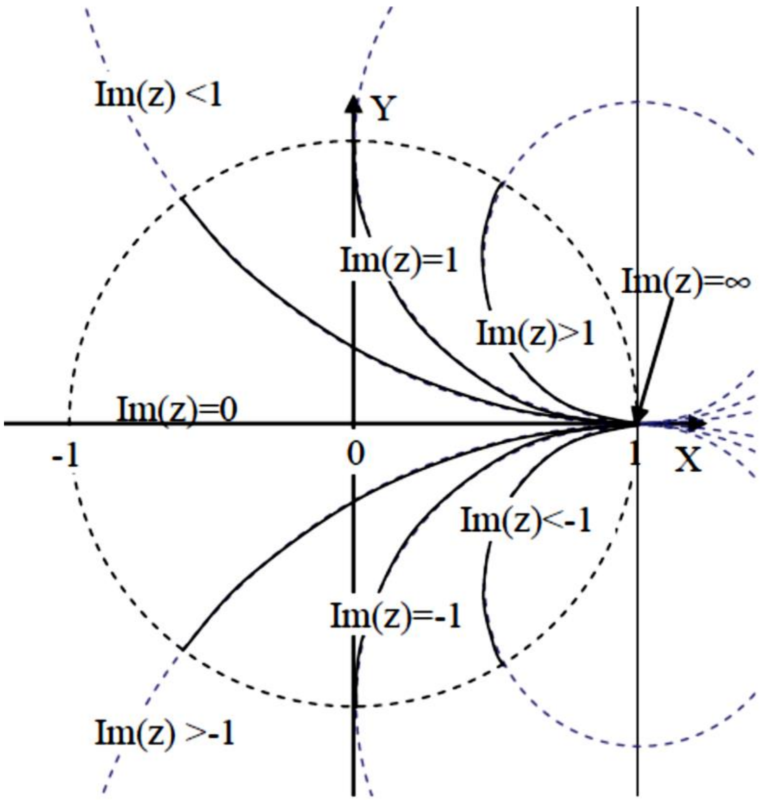
Cercles de résistance

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_l}{1+r_l}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r_l}\right)^2$$

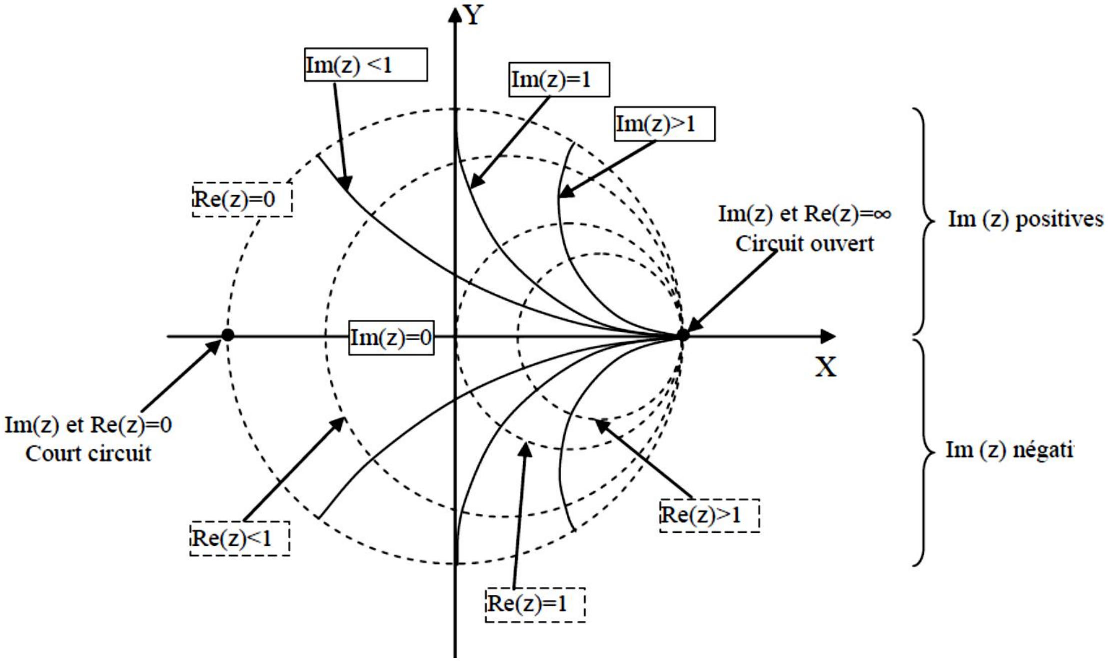


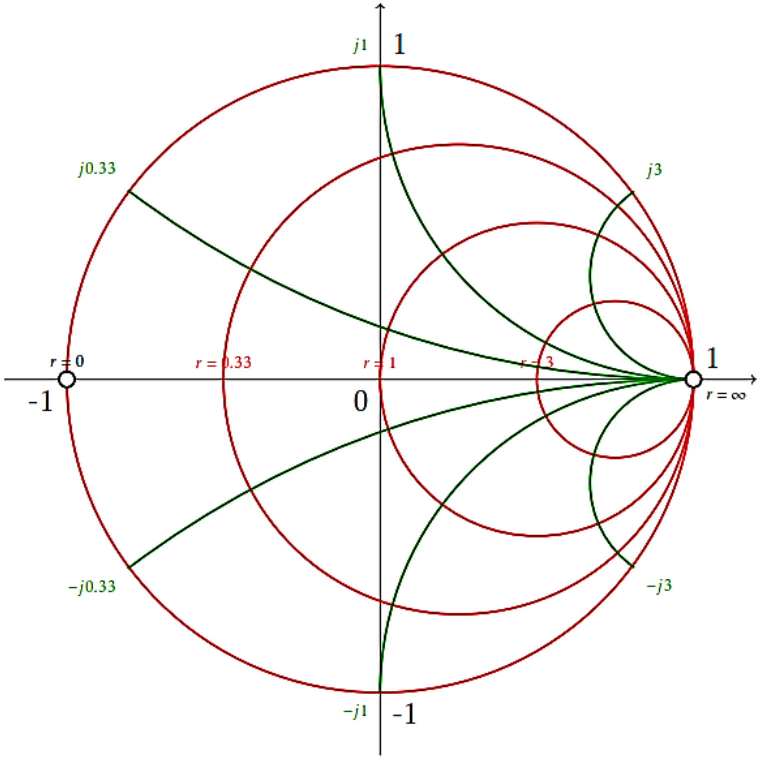
Cercles de réactance

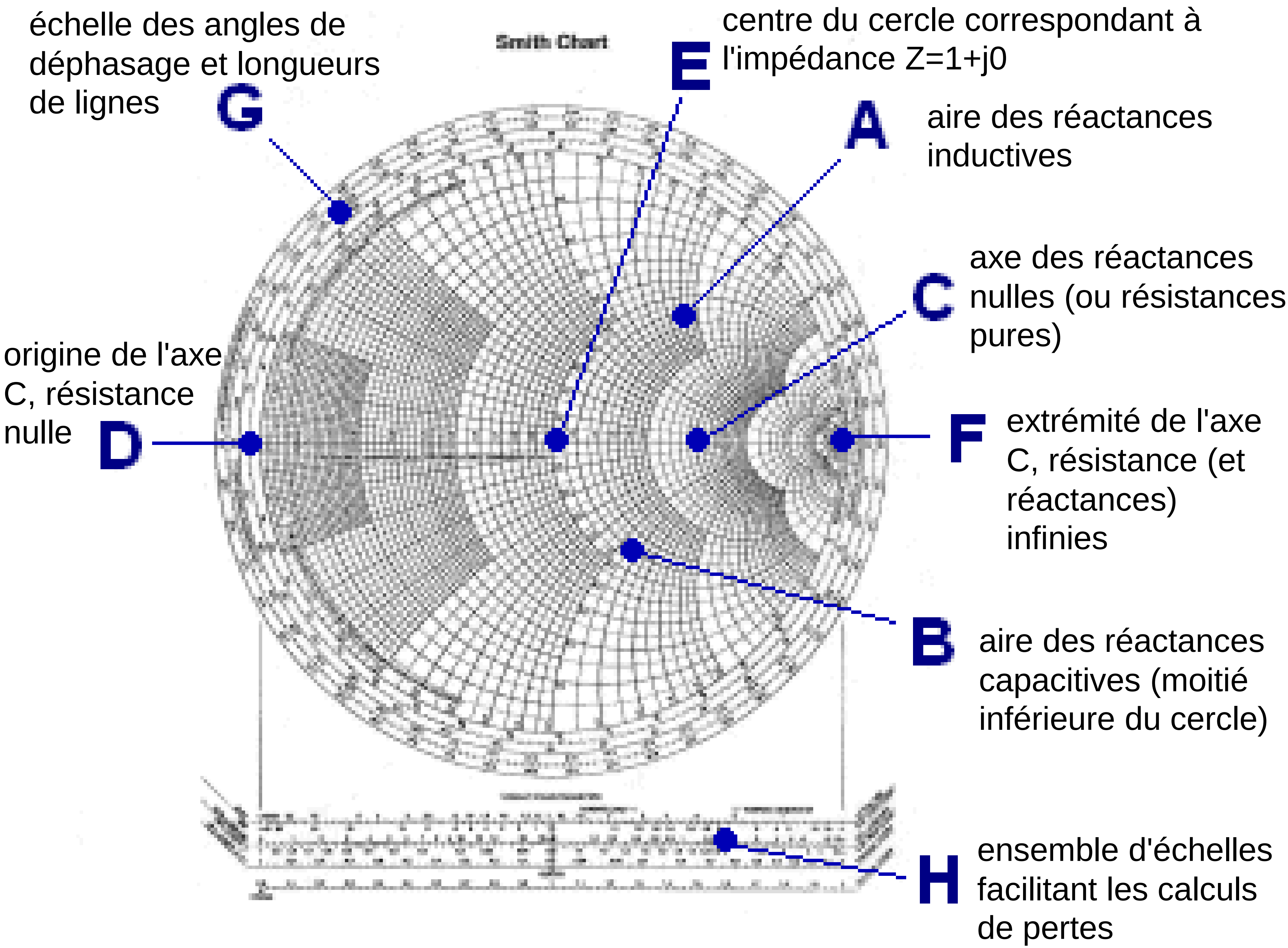
$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_l}\right)^2 = \frac{1}{x_l}$$



Abaque de Smith : description






Smith Chart
G
échelle des angles de déphasage et longueurs de lignes
E
centre du cercle correspondant à l'impédance Z=1+j0
A
aire des réactances inductives
C
axe des réactances nulles (ou résistances pures)
D
origine de l'axe C, résistance nulle
F
extrémité de l'axe C, résistance (et réactances) infinies
B
aire des réactances capacitives (moitié inférieure du cercle)
H
ensemble d'échelles facilitant les calculs de pertes

Abaque de Smith : exemple d'utilisation

$Z_0 = 50\ \Omega$

$Z_L = 25 - j100\ \Omega$

$z_L = Z_L / Z_0$

$z_L = 0.5 - j2\ \Omega$