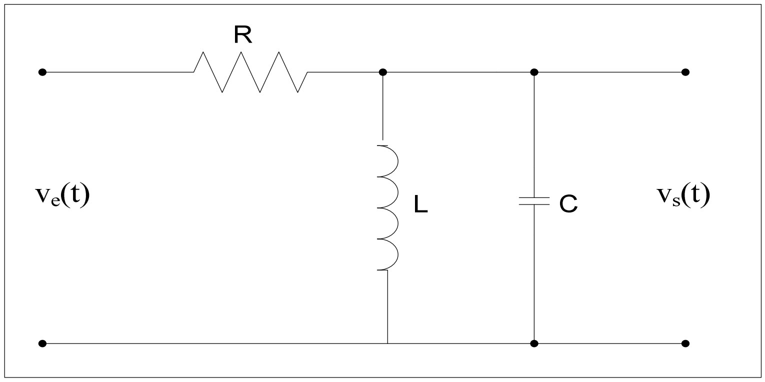
TD1 : Rappel sur la transformée de Laplace

Problème 1

On donne le circuit suivant :



a) Trouver le modèle mathématique (MM) du système sous la forme d'une équation différentielle qui relie l'entrée $v_e(t)$ à $v_s(t)$.
b) Quelle est l'expression de ce modèle si $v_e(t) = \sin(t)$.

Solution :
a) Obtention du modèle mathématique (MM)

$$v_e(t) = Ri(t) + v_s(t)$$

Mais

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t)$$

où :

$$\begin{cases} i_L(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int v_s(t)dt \\ i_C(t) = C\dfrac{dv_s(t)}{dt} \end{cases}$$

En tenant compte de l'expression du courant i(t) on a :

$$v_e(t) = \frac{R}{L}\int v_s(t)dt + RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$$

En dérivant l'expression ci-dessus on obtient :

$$\frac{dv_e(t)}{dt} = \frac{R}{L}v_s(t) + RC\frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + \frac{dv_s(t)}{dt}$$

ou :

$$RC\frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + \frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{R}{L}v_s(t) = \frac{dv_e(t)}{dt}$$

b) L'expression du MM si $v_e(t) = \sin(t)$

Si $v_e(t) = \sin(t) \Rightarrow \dfrac{dv_e(t)}{dt} = \cos(t)$. Donc,

$$RC\frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + \frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{R}{L}v_s(t) = \cos(t)$$

Problème 2
Le MM d'un système est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2x(t)$$

Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \frac{dy(0)}{dt} = y^{'}(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Où : y(t) et x(t) sont la sortie et l'entrée respectivement du système.

a) Déterminer la fonction de transfert (FT), G(s) du système.
b) Déterminer la transformée de Laplace Y(s) si x(t) est un échelon unitaire.

Solution
a) Calcul de la fonction de transfert (FT)
Note : Pendant le calcul de la FT on suppose **toujours** que les conditions initiales sont nulles.
En tenant compte des propriétés **3 et 4** (voir table 3 en annexe) on a :

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = 2X(s)$$

D'où :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s + 3}$$

b) Calcul de la transformée de Laplace Y(s)
Selon l'énoncé x(t) est un échelon unitaire. Donc,

$$X(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{(voir N}^\text{o}\text{1, table1 en annexe)}$$

En tenant compte des propriétés **3 et 4** (voir table 3 en annexe) on a :

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - y^{'}(0)\right] + \left[4sY(s) - 4y(0)\right] + 3Y(s) = \frac{2}{s}$$

En tenant compte des conditions initiales on trouve:

$$\left[s^2Y(s) - s - 0\right] + \left[4sY(s) - 4\right] + 3Y(s) = \frac{2}{s}$$

Donc,

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4s + 3)} + \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 3}$$

Problème 3

On donne :

$$y(t) = \int_0^t A t dt$$

où : A est une constante.
Déterminer la transformée de Laplace Y(s).

Solution
Soit :

$$f(t) = At$$

En tenant compte de la relation **3** de la table1 et de la propriété **1** de la table 3 en annexe on a :

$$F(s) = \frac{A}{s^2}$$

En tenant compte de la propriété **6** de la table 3 en annexe :

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{A}{s^3}$$