ANALYSE 4:
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Université Internationale de Casablanca
Classes Préparatoires Intégrées
Hassan EL AMRI

2018-2019

Distance

Définition 1.1

Soit E un ensemble. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}^+$ *telle que:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in E : \quad d(x, y) = d(y, x)$ *symétrie*
3. $\forall x, y, z \in E : \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *inégalité triangulaire*

Exemples de distances

Exemple 1.2

- $E = \mathbb{R}$ *et*

$$d(x, y) = |x - y|$$

- $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *et*

$$d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

- $E = \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, ...x_N)$ *et* $y = (y_1, y_2, ...y_N)$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2}$$

Norme

Définition 1.3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle norme sur E toute application $N : E \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que:

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:
$$N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$$
3. $\forall x, y \in E$:
$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

Exemples de normes

Exemple 1.4

- $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$
- $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $N(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- *D'une manière générale: Pour* $E = \mathbb{R}^N$ *on note* $x = (x_1, x_2, ...x_N)$
  1. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}$
  2. $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_N|$
  3. $||x||_\infty = \max_{i=1,N} |x_i|$

  sont des normes sur $\mathbb{R}^N$. *Elles vérifient pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq N\,||x||_\infty \leq N\,||x||_2$$

Définition 1.5

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$ *on note le produit scalaire (euclidien) de* x *et* y *par:*

$$x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_N y_N$$

Donc

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2} = \sqrt{x.x}$$

Boule ouverte boule fermée

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une de ses normes qu'on note $||.||$, en général la norme euclidienne (naturelle) $||.||_2$. Soient $a \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.

Boule ouverte boule fermée

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une de ses normes qu'on note $||.||$, en général la norme euclidienne (naturelle) $||.||_2$. Soient $a \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.

Définition 2.1

*On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| < r \right\}$$

Boule ouverte boule fermée

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une de ses normes qu'on note $||.||$, en général la norme euclidienne (naturelle) $||.||_2$. Soient $a \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.

Définition 2.1

*On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| < r\right\}$$

Définition 2.2

*On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B_f(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| \leq r\right\}$$

Boule ouverte boule fermée

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une de ses normes qu'on note $||.||$, en général la norme euclidienne (naturelle) $||.||_2$. Soient $a \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.

Définition 2.1

*On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| < r\right\}$$

Définition 2.2

*On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B_f(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| \leq r\right\}$$

Définition 2.3

*On appelle **sphère (cercle pour N=2)** de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$S(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| = r\right\}$$

Boule ouverte boule fermée

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une de ses normes qu'on note $||.||$, en général la norme euclidienne (naturelle) $||.||_2$. Soient $a \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$.

Définition 2.1

On appelle ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| < r \right\}$$

Définition 2.2

On appelle ***boule fermée*** *de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B_f(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| \leq r \right\}$$

Définition 2.3

On appelle ***sphère (cercle pour N=2)*** *de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$S(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, ||x-a|| = r \right\}$$

Ensemble ouvert

Définition 2.4

Une partie A de $\mathbb{R}^N$ est dite ouverte si

$$\forall a \in A, \quad \exists r > 0 \quad tel \quad que \quad : \quad B(a, r) \subset A$$

Ensemble ouvert

Définition 2.4

Une partie A de $\mathbb{R}^N$ est dite ouverte si

$$\forall a \in A, \quad \exists r > 0 \quad tel \quad que \quad : \quad B(a,r) \subset A$$

Exemple 2.5

1. $\mathbb{R}^N$ *est un ouvert,*
2. *L'ensemble $\emptyset$ est un ouvert,*
3. *Toute boule ouverte est un ouvert (exo).*
4. $A =]0,1]$ *n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, car $1 \in A$ mais il n'existe pas de réel $r > 0$ tel que*
$$]1-r, 1+r[\subset]0,1]$$

Définition 3.1

Soit F une partie de $\mathbb{R}^N$. On dit que F est fermé dans $\mathbb{R}^N$ si son complémentaire $A = \complement F = \complement_{\mathbb{R}^N}^{F}$ est ouvert.

Ensemble fermé, adhérence

Définition 3.1

Soit F une partie de $\mathbb{R}^N$. On dit que F est fermé dans $\mathbb{R}^N$ si son complémentaire $A = \complement F = \complement_{\mathbb{R}^N}^F$ est ouvert.

Théorème 3.2

Un ensemble F est fermé ***si et seulement*** *si toute suite convergente d'éléments de F admet sa limite dans F.*

Ensemble fermé, adhérence

Définition 3.1

Soit F une partie de $\mathbb{R}^N$. On dit que F est fermé dans $\mathbb{R}^N$ si son complémentaire $A = \complement F = \complement_{\mathbb{R}^N}^{F}$ est ouvert.

Théorème 3.2

Un ensemble F est fermé ***si et seulement*** *si toute suite convergente d'éléments de F admet sa limite dans F.*

Définition 3.3

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On appelle ***adhérence*** *de A le plus petit fermé (pour l'inclusion) contenant A. On la note $\bar{A}$.*

Ensemble fermé, adhérence

Définition 3.1

Soit F une partie de $\mathbb{R}^N$. On dit que F est fermé dans $\mathbb{R}^N$ si son complémentaire $A = \complement F = \complement_{\mathbb{R}^N}^F$ est ouvert.

Théorème 3.2

*Un ensemble F est fermé **si et seulement** si toute suite convergente d'éléments de F admet sa limite dans F.*

Définition 3.3

*Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On appelle **adhérence** de A le plus petit fermé (pour l'inclusion) contenant A. On la note $\bar{A}$.*

Exemple 3.4

L'adhérence de $]0,1[$ est $[0,1]$.
L'adhérence de $]0,1]$ est $[0,1]$.
L'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $B_f(a,r)$

Intérieur

Définition 3.5

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On appelle ***intérieur*** *de A le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A. On le note $\overset{\circ}{A}$.*

Intérieur

Définition 3.5

*Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On appelle **intérieur** de A le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A. On le note $\overset{\circ}{A}$.*

Exemple 3.6

L'intérieur de $[0,1]$ est $]0,1[$.
L'intérieur de $]0,1]$ est $]0,1[$.
L'intérieur de la boule fermée $B_f(a,r)$ est la boule ouvert $B(a,r)$

Propriétés des ouverts

Théorème 3.7

1. ***L'intersection d'un nombre fini*** *d'ouverts est un ouvert*
2. ***La réunion d'un nombre quelconque (même infini)*** *d'ouverts est un ouvert.*

Propriétés des ouverts

Théorème 3.7

1. ***L'intersection d'un nombre fini*** *d'ouverts est un ouvert*
2. ***La réunion d'un nombre quelconque (même infini)*** *d'ouverts est un ouvert.*
3. A *est ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{A} = A$
4. $\overset{\circ}{A} \subset A \quad et \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
5. $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
6. $\overset{\circ}{\overparen{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \quad et$

Propriétés des ouverts

Théorème 3.7

1. ***L'intersection d'un nombre fini*** *d'ouverts est un ouvert*
2. ***La réunion d'un nombre quelconque (même infini)*** *d'ouverts est un ouvert.*
3. *A est ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{A} = A$
4. $\overset{\circ}{A} \subset A \quad$ *et* $\quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
5. $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
6. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \quad$ *et* $\quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Théorème 3.7

1. ***L'intersection d'un nombre fini*** *d'ouverts est un ouvert*
2. ***La réunion d'un nombre quelconque (même infini)*** *d'ouverts est un ouvert.*
3. *A est ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{A} = A$
4. $\overset{\circ}{A} \subset A \quad et \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
5. $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
6. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \quad et \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$
7. $\complement \overset{\circ}{A} = \overline{\complement A} \quad et \quad \complement \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$

Propriétés des fermés

Théorème 3.8

1. ***La réunion d'un nombre fini*** *de fermés est un fermé*
2. ***L'intersection d'un nombre quelconque (même infini)*** *de fermés est fermée.*

Théorème 3.8

1. ***La réunion d'un nombre fini*** *de fermés est un fermé*
2. ***L'intersection d'un nombre quelconque (même infini)*** *de fermés est fermée.*
3. $A \subset \bar{A}\ , \qquad \forall A \subset \mathbb{R}^n$
4. *Si* $A \subset B$ *alors* $\bar{A} \subset \bar{B}$
5. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad , \qquad \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$
7. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \quad , \qquad \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$

Propriétés

Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont ouverts et fermés à la fois.

Propriétés

Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont ouverts et fermés à la fois.

Théorème 3.9

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $a \in \bar{A}$
2. *il existe une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* A *convergente vers* a*:* $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = a$
3. *Toute boule* $B(a, r)$ *de centre* a *et de rayon quelconque (non nul)* r *rencontre* A*:*
$$\forall r > 0,\ B(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Définition 4.1

On appelle fonction de plusieurs variables toute application

$$\begin{cases} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x) \end{cases} \quad (1)$$

Exemple 4.2

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier*

Définition 4.1

On appelle fonction de plusieurs variables toute application

$$\begin{cases} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Exemple 4.2

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier*
2. $f(x, y) = \frac{x}{y}$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Définition 4.1

On appelle fonction de plusieurs variables toute application

$$\begin{cases} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Exemple 4.2

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier*
2. $f(x, y) = \frac{x}{y}$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
3. $f(x, y, z) = \left(y + \frac{1}{z}\right) \log x$ *est une fonction de* 3 *variables définie sur* $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Définition 4.1

On appelle fonction de plusieurs variables toute application

$$\left\{\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x) \end{array}\right. \tag{1}$$

Exemple 4.2

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier*
2. $f(x, y) = \frac{x}{y}$ *est une fonction de deux variables définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
3. $f(x, y, z) = \left(y + \frac{1}{z}\right) \log x$ *est une fonction de 3 variables définie sur* $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Définition 4.3

Soit f une fonction de n variables. On appelle domaine de définition de f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels $f(x)$ existe.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad tel \quad que \quad f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4.4

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes:

1. $f_1(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$
2. $f_2(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
3. $f_3(x) = ln(cos(x))$

Exercice 4.4

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes:

1. $f_1(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$
2. $f_2(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
3. $f_3(x) = ln(cos(x))$

$$D_{f_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y\}$$

$$D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 < 1\} = B(O, 1)$$

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Définition 5.1

Soit f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ soit $x_0 \in \bar{D}$.

1. *On dit que f converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \ , \quad \forall x \in D, \ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{2}$$

2. *On dit que f converge vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si:*

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists \eta > 0 \ , \quad \forall x \in D, \ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow f(x) > \alpha \tag{3}$$

3. *On dit que f converge vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si:*

$$\forall \alpha < 0, \quad \exists \eta > 0 \ , \quad \forall x \in D, \ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow f(x) < \alpha \tag{4}$$

Exercice 5.2

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

1. *Donner le domaine de définition de f*
2. *f admet-elle une limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$?*

Solution.

1. Le domaine de définition est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \neq (0,0)\}$
2. Sur la première bissectrice $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ et sur la deuxième bissectrice $f(x,-x) = -\dfrac{1}{2}$
   La limite obtenue dépend du chemin suivi. Donc pas de limite.

■

Quelques propriétés

Théorème 5.3

Soit $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions définies sur deux domaines* D_1 *et* D_2 *tels que* $D_1 \cap D_2$ *contient une boule. Soit* $x_0 \in \overline{D_1 \cap D_2}$.

$$Si \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad et \ \lim_{x \to x_0} g(x) = l'$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l', \quad \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = ll'$$

et si $l' \neq 0$ *alors*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

Définition 5.4

Soit f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ soit $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \ , \quad \forall x \in D, \ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{5}$$

Exercice 5.5

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x + y$. Montrer que $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

c'est à dire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition 6.1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de n variables. Si on fixe les* $n-1$ *variables* $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ *on peut définir les n applications dites applications partielles :*

$f_i : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_i(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}$

Exemple 6.2

Dans le cas $n = 2$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *on a deux applications partielles* $f_1 : x \longrightarrow f_1(x) = f(x, y)$ *et* $f_2 : y \longrightarrow f_2(y) = f(x, y)$ *Par exemple, si* $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$$f_1 : x \longrightarrow f_1(x) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f_2 : y \longrightarrow f_2(y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Théorème 6.3

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue en* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, *les* n *applications partielles* f_i *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont continues en* x_{0i}.

Théorème 6.3

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue en* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, *les* n *applications partielles* f_i *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont continues en* x_{0i}.

Remarque 6.4

La réciproque de ce théorème est fausse comme le prouve l'exemple suivant :
Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ *pour tout* $(x, y) \neq (0, 0)$ *et* $f(0, 0) = 0$.
Au point $O(0, 0)$ *les deux fonctions partielles* $f_1(x) = f(x, 0)$ *et* $f_2(y) = f(0, y)$ *qui sont égales à* 0 *sont continues ; cependant* f *n'est pas continue en* $(0, 0)$ *: Si l'on pose* $y = tx$ *la limite en* $(O, 0)$ *est* $\dfrac{t}{1 + t^2} \neq f(0, 0)$ *pour* $(t \neq 0)$.

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}$

Définition 6.5

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $]a - r, a + r[\subset D$. *On dit que* f *est différentiable en* a *si:*

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}$

Définition 6.5

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $]a - r, a + r[\subset D$*. On dit que* f *est différentiable en* a *si:* $\exists l \in \mathbb{R}$ *tel que:* $\forall h \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $a + h \in D$ *on a :*

$$f(a+h) = f(a) + lh + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}$

Définition 6.5

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $]a - r, a + r[\subset D$. *On dit que* f *est différentiable en* a *si:* $\exists l \in \mathbb{R}$ *tel que:* $\forall h \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $a + h \in D$ *on a :*

$$f(a+h) = f(a) + lh + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le réel l *est appelé la dérivée de la fonction* f *au point* a. *On le note* $l = f'(a)$.

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}$

Définition 6.5

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a - r, a + r[\subset D$. On dit que f est différentiable en a si: $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a + h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + lh + h\varepsilon(h) \quad \textit{avec} \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le réel l est appelé la dérivée de la fonction f au point a. On le note $l = f'(a)$.
Et la fonction

$$\left\{ \begin{array}{c} f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ a \to f'(a) \end{array} \right. .$$

est appelée ***la fonction dérivée*** *de la fonction f.*

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}$

Définition 6.5

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a-r, a+r[\subset D$. On dit que f est différentiable en a si: $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + lh + h\varepsilon(h) \quad \textit{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le réel l est appelé la dérivée de la fonction f au point a. On le note $l = f'(a)$. Et la fonction

$$\begin{cases} f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad a \to f'(a) \end{cases}.$$

*est appelée **la fonction dérivée** de la fonction f. On a aussi pour tout $x \in D$:*

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

Remarque :

Remarque 6.6

- *Si une fonction f est dérivable en un point a alors*

Remarque :

Remarque 6.6

- *Si une fonction f est dérivable en un point a alors*
- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-lh}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

Remarque :

Remarque 6.6

- *Si une fonction f est dérivable en un point a alors*
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - lh}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l + \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = l = f'(a)$

Remarque 6.6

- *Si une fonction f est dérivable en un point a alors*
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-lh}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l + \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = l = f'(a)$
- *f est continue en a: En effet* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)\right) = f(a).$

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $B(a, r) \subset D$.

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}^n$

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
On dit que f est différentiable en a si:

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}^n$

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $B(a, r) \subset D$.
On dit que f *est différentiable en* a *si:* $\exists L \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall h \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $a + h \in D$ *on a :*

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $B(a, r) \subset D$.
On dit que f *est différentiable en* a *si:* $\exists L \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall h \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $a + h \in D$ *on a :*

$$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\| \, \varepsilon(h) \ , \quad \text{avec} \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Définition de la dérivée dans $\mathbb{R}^n$

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
On dit que f est différentiable en a si: $\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\| \varepsilon(h) \ , \quad \text{avec} \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le vecteur L est appelé dérivée de la fonction f au point a. On le note $L = f'(a)$.

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $B(a, r) \subset D$.

On dit que f *est différentiable en* a *si:* $\exists L \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall h \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $a + h \in D$ *on a :*

$$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\| \, \varepsilon(h) \ , \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le vecteur L *est appelé dérivée de la fonction* f *au point* a. *On le note* $L = f'(a)$.
On aura aussi $\forall x \in D$,

$$f(x) = f(a) + L.(x-a) + \|x-a\| \, \varepsilon(x-a), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

Définition 7.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$ *tel que* $\exists r > 0$ *vérifiant* $B(a,r) \subset D$.
On dit que f *est différentiable en* a *si:* $\exists L \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall h \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $a + h \in D$ *on a :*

$$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|\,\varepsilon(h)\ , \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le vecteur L *est appelé dérivée de la fonction* f *au point* a*. On le note* $L = f'(a)$.
On aura aussi $\forall x \in D$,

$$f(x) = f(a) + L.(x-a) + \|x-a\|\,\varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

$$\text{On note} \ : \quad f'(a) = \nabla f(a)$$

Remarque 7.2

Si une fonction f est dérivable en un point a alors :

Remarque 7.2

Si une fonction f est dérivable en un point a alors :

1. *On a*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} |\varepsilon(h)| = 0$$

Remarque 7.2

Si une fonction f est dérivable en un point a alors :

1. *On a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} |\varepsilon(h)| = 0$$

2. *f est continue en a: En effet*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (f(a) + L.(x-a) + \|x-a\| \, \varepsilon(x-a)) = f(a).$$

Exemples:

Exemple 7.3

On considère la fonction f définie par $f(x, y) = xy$

Exemple 7.3

On considère la fonction f *définie par* $f(x,y) = xy$
$f(a+h, b+k) = (a+h)(b+k) = ab + bh + ak + hk$

$$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Et puisque $\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$ *tend vers* 0 *quand* (h,k) *tend vers* $(0,0)$ *alors* f *est dérivable au point* (a,b) *et on :*

$$f'(a,b) = (b,a)$$

et

$$f'(a,b)(h,k) = bh + ak$$

$$f(a+h, b+k) = (a+h)(b+k)$$

$$\begin{aligned} &= ab + ak + bh + hk \\ &= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

- $$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

$$f(a+h,b+k)=(a+h)(b+k)$$

$$\begin{aligned} &= ab+ak+bh+hk \\ &= f(a,b)+bh+ak+\sqrt{h^2+k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

- $$= f(a,b)+bh+ak+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$
- $$avec \quad : \varepsilon(h,k)=\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$f(a+h,b+k) = (a+h)(b+k)$$

$$\begin{aligned} &= ab+ak+bh+hk \\ &= f(a,b)+bh+ak+\sqrt{h^2+k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

- $$= f(a,b)+bh+ak+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

- $$avec \quad : \varepsilon(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

- Conclusion

$$f'(a,b) = \nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Exemple 7.4

On considère la fonction f *définie par* $f(x,y) = \sin(xy)$

$f(a+h, b+k) = \sin(a+h)(b+k) = \sin(ab+bh+ak+hk)$

$$= \sin(ab) + (bh+ak+hk)\cos(ab) - \frac{1}{2}(bh+ak+hk)^2 \sin\theta_{(h,k)}$$

Exemple 7.4

On considère la fonction f définie par $f(x, y) = \sin(xy)$
$f(a+h, b+k) = \sin(a+h)(b+k) = \sin(ab+bh+ak+hk)$

$$= \sin(ab) + (bh+ak+hk)\cos(ab) - \frac{1}{2}(bh+ak+hk)^2 \sin\theta_{(h,k)}$$

Donc

$$f'(a,b).(h,k) = (bh+ak)\cos(ab) = (b\cos(ab))\, h + (a\cos(ab))\, k$$

et

$$f'(a,b) = (bcos(ab), acos(ab))$$

Exemple 7.5

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y + xy$

$$f(a+h,b+k) = (a+h)^2(b+k) + (a+h)(b+k)$$
$$= (a^2+2ah+h^2)(b+k) + (a+h)(b+k)$$
$$= a^2b + a^2k + 2abh + 2ahk + bh^2 + h^2k + ab + ak + bh + hk$$
$$= f(a,b) + (2ab+b)h + (a^2+a)k + bh^2 + h^2k + 2ahk$$
$$= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + bh^2 + h^2k + 2ahk$$
$$= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{bh^2+h^2k+2ahk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

$$Donc: \quad f'(a,b) = \nabla f(a,b) = (2ab+b, a^2+a) = (2ab, a^2) + (b,a)$$

On pose $h = rcos(\theta) = rc, \quad k = rsin(\theta) = rs$ *et on fait tendre* r *vers* 0*:*

$$\frac{bh^2+h^2k+2ahk}{\sqrt{h^2+k^2}} = r(bc^2 + rc^2s + 2acs) \to 0 \ quand \ r \to 0$$

Définition 7.6

Soit f une fonction diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On définit ***le gradient*** *et* ***la divergence*** *de f en a par:*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$div\ f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Soit $V(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3$. On définit la divergence et le rotationnel de V par:

$$div(V) = \nabla.V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$rot(V) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Théorème

Théorème 7.7

1. *Si* f *est diférentiable en* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *alors elle est continue en* a.
2. *Si* f *est diférentiable en* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *alors* f *admet des dérivées partielles en* a *et on a:*

$$f'(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Dérivée selon une direction

Définition 7.8

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$. *Soit* $\vec{u}$ *le vecteur directeur unitaire d'une droite dans* $\mathbb{R}^N$ *passant par* a.
Si $\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t}$ *admet une limite quant* t *tend vers* 0 *alors on dit que* f *admet une dérivée au point* a *selon la direction* $\vec{u}$. *On la note* $f'_{\vec{u}}(a)$.

$$f'_{\vec{u}}(a) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}$$

Dérivée selon une direction

Définition 7.8

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$. *Soit* $\vec{u}$ *le vecteur directeur unitaire d'une droite dans* $\mathbb{R}^N$ *passant par* a.
Si $\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t}$ *admet une limite quant* t *tend vers* 0 *alors on dit que* f *admet une dérivée au point* a *selon la direction* $\vec{u}$. *On la note* $f'_{\vec{u}}(a)$.

$$f'_{\vec{u}}(a) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}$$

Théorème 7.9

Si f *est différentiable en* a, *alors la la dérivée selon toute direction* $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *de* f *en* a *existe et on a:*

$$f'_v(a) = v.\nabla f(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Théorème 7.10

Si f est de classe C^1 dans un voisinage de a (c'est à dire les dérivées partielles existent et sont continues) alors f est différentiable en a.

Théorème 7.11

Soient f et g deux fonctions différentiables en un point a. Alors:

1. *$f+g$ est différentiable en a, et on a*

$$\nabla(f+g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a) \tag{6}$$

2. *fg est différentiable en a, et on a*

$$\nabla(fg)(a) = g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \tag{7}$$

3. *Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en a et on a:*

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g(a)^2} \tag{8}$$

Théorème 7.12

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *différentiable en* $a \in D$ *et* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *différentiable en* $f(a) \in f(D)$ *Alors* $\varphi o f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est différentiable en* a *et on a*

$$(\varphi o f)'(a) = \nabla(\varphi o f)(a) = \varphi'(f(a))f'(a) = \varphi'(f(a))\nabla f(a)$$

EXTREMUMS ET POINTS CRITIQUES

Définition d'un point critique

Définition 8.1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On dit que $a \in D$ est un point critique de f si

$$\nabla f(a) = O,$$

c'est à dire que: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, ..., N$

Définition d'un point critique

Définition 8.1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. On dit que* $a \in D$ *est un point critique de* f *si*

$$\nabla f(a) = O,$$

c'est à dire que: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, ..., N$

Pour $N = 2$, (a, b) *est un point critique de* f *si:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Définition d'un point critique

Définition 8.1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. On dit que* $a \in D$ *est un point critique de* f *si*

$$\nabla f(a) = O,$$

c'est à dire que: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = 1, ..., N$
Pour $N = 2$, (a, b) *est un point critique de* f *si:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Exemple 8.2

$f(x, y) = x(y - 1)$ $\nabla f(x, y) = (y - 1, x)$ *est nul pour* $y = 1$ *et* $x = 0$. *Le point* $(0, 1)$ *est un point critique de la fonction* f.

Définition 8.3

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$.
a *est un maximum local (relatif) de* f *si:* $\exists V$ *voisinage de* a *tel que*

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V$$

Définition 8.3

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$.
a *est un maximum local (relatif) de* f *si:* $\exists V$ *voisinage de* a *tel que*

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V$$

a *est un maximum (global) de* f *si:*

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in D$$

Définition 8.3

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$.
a *est un maximum local (relatif) de* f *si:* $\exists V$ *voisinage de* a *tel que*

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V$$

a *est un maximum (global) de* f *si:*

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in D$$

a *est un minimum local (relatif) de* f *si:* $\exists V$ *voisinage de* x_0 *tel que*

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in V$$

Définition 8.3

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in D$.
a est un maximum local (relatif) de f si: $\exists V$ *voisinage de a tel que*

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V$$

a est un maximum (global) de f si:

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in D$$

a est un minimum local (relatif) de f si: $\exists V$ *voisinage de* x_0 *tel que*

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in V$$

a est un minimum (global) de f si:

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in D$$

DEF: Extremum = maximum ou minimum

Développement limité de Taylor-Young

Théorème 8.4

Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de (a, b). On suppose que f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, continues au voisinage de (a, b). Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 *de la forme:*

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2\right)$$

$$+(h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

Définition 9.1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$ *une fonction dérivable en un point* $(a, b) \in D$. *On appelle plan tangent au graphe de* f *au point* (a, b) *le plan défini par :*

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Exemple 9.2

$f(x, y) = xy$

Remarque 9.3

Si on pose

$$\boxed{\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\ ,\quad \beta = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\ ,\quad \gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)}$$

alors Young-Taylor devient

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \nabla f(a,b).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2\right)$$

$$+\|(h,k)\|^2\varepsilon(h,k)$$

ou encore :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \nabla f(a,b).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$+(h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

Remarque 9.4

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fois différentiable. Soit* (a, b) *un point critique de* f. *On a donc* $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. *Donc*

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2\right) + \|(h, k)\|^2 \varepsilon(h, k)$$

La position de $f(a+h, b+k)$ *par rapport à celle de* $f(a, b)$ *ne dépend que du signe de* $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ *Si* $k \neq 0$ *alors*
$\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2 = k^2\left(\alpha(\frac{h}{k})^2 + 2\gamma \frac{h}{k} + \beta\right)$

Remarque 9.4

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fois différentiable. Soit* (a, b) *un point critique de* f. *On a donc* $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. *Donc*

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2\right) + \|(h, k)\|^2 \varepsilon(h, k)$$

La position de $f(a+h, b+k)$ *par rapport à celle de* $f(a, b)$ *ne dépend que du signe de* $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ *Si* $k \neq 0$ *alors*
$\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2 = k^2 \left(\alpha (\frac{h}{k})^2 + 2\gamma \frac{h}{k} + \beta\right)$
On pose $r = \frac{h}{k}$ $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2 = k^2 \left(\alpha r^2 + 2\gamma r + \beta\right)$. *On calcule*
$d = \alpha\beta - \gamma^2$.

Remarque 9.5

(suite) Si $d > 0$ *alors le polynôme* $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ *garde un signe constant: celui de* α *(et de* β*).*

Remarque 9.5

(suite) Si $d > 0$ *alors le polynôme* $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ *garde un signe constant: celui de* α *(et de* β*).*
Si $d > 0$ *et* $\alpha < 0$ *alors* $f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0$ *et donc*

$$f(a+h, b+k) \leq f(a,b), \quad \textit{pour } h \textit{ et } k \textit{ assez petits}$$

c'est à dire on a ***un maximum relatif.***

Remarque 9.5

(suite) Si $d > 0$ *alors le polynôme* $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ *garde un signe constant: celui de* α *(et de* β*).*
Si $d > 0$ *et* $\alpha < 0$ *alors* $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$ *et donc*

$$f(a+h, b+k) \leq f(a, b), \quad \textit{pour } h \textit{ et } k \textit{ assez petits}$$

c'est à dire on a ***un maximum relatif.***
Si $d > 0$ *et* $\alpha > 0$ *alors* $f(a+h, b+k) - f(a, b) \geq 0$ *et donc*

$$f(a+h, b+k) \geq f(a, b), \quad \textit{pour } h \textit{ et } k \textit{ assez petits}$$

c'est à dire on a un ***minimum relatif****.*

Théorème 9.6

On distingue les cas suivants :

- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta < 0$ *et* $\alpha > 0$, f *admet un minimum relatif au point* (a, b).
- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta < 0$ *et* $\alpha < 0$, f *admet un maximum relatif au point* (a, b).
- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta > 0$, f *n'admet pas d'extremum au point* (a, b), *on parle de* ***point col***, *ou* ***point selle***.
- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta = 0$ *on ne peut pas conclure.*

Théorème 9.6

On distingue les cas suivants :

- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta < 0$ *et* $\alpha > 0$, f *admet un minimum relatif au point* (a, b).
- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta < 0$ *et* $\alpha < 0$, f *admet un maximum relatif au point* (a, b).
- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta > 0$, f *n'admet pas d'extremum au point* (a, b), *on parle de* ***point col****, ou* ***point selle****.*
- *Si* $\gamma^2 - \alpha\beta = 0$ *on ne peut pas conclure.*

Le récapitulatif est donné dans le tableau suivant:

$\gamma^2 - \alpha\beta > 0$	$\gamma^2 - \alpha\beta < 0$		$\gamma^2 - \alpha\beta = 0$
Point Col	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	On ne peut
Point selle	Minimum	Maximum	rien dire

INTÉGRALE DE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Intégrales sur un "pavé" D de $\mathbb{R}^N$

Définition 10.1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N :\longrightarrow \mathbb{R}$, *on suppose ici que* D *est un produit d'intervalles de* $\mathbb{R}$:

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_i, b_i] \times \dots \times [a_N, b_N]$$

On appelle intégrale de f *sur* D *le nombre réel noté*

$$\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_i}^{b_i} \dots \left(\int_{a_N}^{b_N} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_N \right) \dots \right) dx_i \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

Exemple 10.2

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ D = [a,b] \times [c,d]\ f(x,y) = sin(x+y)$

$$\int_D sin(x+y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \sin(x+y)dy\right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\left[\cos(x+y)\right]_c^d\right) dx$$

$$= \int_a^b (\cos(x+d) - \cos(x+c))\, dx$$

$$= [-\sin(x+d) + \sin(x+c)]_a^b$$

$$= \sin(a+d) - \sin(b+d) + \sin(b+c) - \sin(a+c)$$

D défini par des inéquations:

Définition 10.3

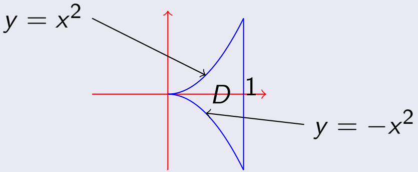
Si D est défini par des inéquations:

$$D = \{(x, y);\ \textit{tels que } a \leq x \leq b,\ \textit{et } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Alors $\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx$

Exemple 10.4

$$D = \left\{(x, y);\ \textit{tels que } 0 \leq x \leq 1,\ \textit{et } -x^2 \leq y \leq x^2\right\}$$



Suite de l'exemple

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy \right) dx$$

L'aire par exemple de D est le résultat obtenu quand on prend $f(x,y) = 1$:

$$Aire(D) = \int_D 1dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Aire et volume

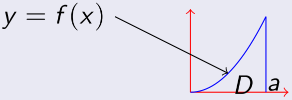
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, l'aire du domaine D est donnée par :

$$Aire(D) = \int_D 1 dxdy$$

Soit $D \subset \mathbb{R}^3$, le volume du domaine D est donné par:

$$Vol(D) = \int_D 1 dxdydz$$

Exemple 10.5



$$Aire(D) = \int_D 1 dxdy = \int_0^a \left(\int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_0^a f(x) dx$$

Formes différentielles

Définition 11.1

On appelle forme différentielle dans $U \subset \mathbb{R}$ toute quantité mathématique s'écrivant sous la forme

$$\omega(x) = f(x)dx$$

Définition 11.2

On appelle forme différentielle dans $U \subset \mathbb{R}^2$ toute quantité mathématique s'écrivant sous la forme (ici $x = (x_1, x_2)$)

$$\omega(x) = \begin{cases} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 & d^o\ 1 \\ ou & \\ \omega(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 & d^o\ 2 \end{cases}$$

Définition 11.3

On appelle forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^3$ toute quantité mathématique s'écrivant sous la forme (ici $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\omega(x) = \begin{cases} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + f_3(x)dx_3 \ , \ \color{red}{d^o \ 1} \\ ou \\ \omega(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 + f_2(x)dx_2 \wedge dx_3 + f_3(x)dx_3 \wedge dx_1 \ , \color{red}{d^o \ 2} \\ ou \\ \omega(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \ , \ \color{red}{d^o \ 3} \end{cases}$$

Définition 11.4

La quantité $dx_1 \wedge dx_2$ *s'appelle produit tensoriel de* dx_1 *et* dx_2. *Il vérifie*

$$\boxed{\begin{array}{c} (dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 = dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ \text{et} \\ dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1 \end{array}}$$

D'où

$$dx_1 \wedge dx_1 = 0$$

Théorème 11.5

Toute forme différentielle définie sur $U \subset \mathbb{R}^N$ *et de degré supérieur à* N ***est nulle.***
Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ *on a:* $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0$

Exemple 11.6

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^1(U)$.
$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$
est une forme différentielle de degré 1.

Définition 11.7

Une forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$,
$\omega(x) = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + ... + f_N(x)dx_N$ *est dite* ***exacte*** *si il existe une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(U)$ telle que*

$$\boxed{\omega(x) = df(x) \ , \forall x \in U}$$

c'est à dire telle que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x) \ , \forall i = 1, ..., N}$$

La fonction f est dite une ***primitive*** *de ω.*

Exercice 11.8

$\omega(x,y) = ydx + xdy$ définie dans $\mathbb{R}^2$ est-elle exacte?

Solution. On cherche $f(x,y)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \\ et \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f(x,y)(= yx + c(y) \\ et \\ x + c'(y) = x \end{cases}$$

c'est à dire $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = k = constante$

$$f(x,y) = xy + k \ , \ k \ constante \ quelconque$$

Exercice 11.8

$\omega(x,y) = ydx + xdy$ définie dans $\mathbb{R}^2$ est-elle exacte?

Solution. On cherche $f(x,y)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \\ et \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f(x,y)(= yx + c(y) \\ et \\ x + c'(y) = x \end{cases}$$

c'est à dire $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = k = constante$

$$f(x,y) = xy + k \ , \ k \ constante \ quelconque$$

On conclut que la forme différentielle $\omega(x,y) = ydx + xdy$ **est exacte dans** $\mathbb{R}^2$. ∎

Exercice 11.9

Exercice : $\omega(x,y) = xdx + ydy$ définie dans $\mathbb{R}^2$ est-elle exacte?

Forme différentielle fermée

Définition 11.10

Une forme différentielle $\omega(x) = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + ... + f_N(x)dx_N$ *est dite fermée si*

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\ , \forall i, j = 1, ..., N}$$

Exemple 11.11

Dans $\mathbb{R}^2$ *une forme différentielle* $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *est* ***fermée*** *si*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Exemple 11.12

Dans $\mathbb{R}^3$ *une forme différentielle* $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ *est* ***fermée*** *si*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)$$

Théorème 11.13

$$\boxed{\textit{Théorème de Schwarz :} \quad \omega \ \textit{exacte} \quad \Rightarrow \omega \quad \textit{fermée}}$$

Remarque 11.14

La réciproque est fausse. Étudier le cas de la FD suivante :

$$\omega(x,y) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

La forme différentielle ω est donc fermée.

Chemin

Définition 11.15

On appelle chemin dans $\mathbb{R}^2$ *toute application continue*

$$\gamma : t \in [0,1] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

Chemin

Définition 11.15

On appelle chemin dans $\mathbb{R}^2$ *toute application continue*

$$\gamma : t \in [0,1] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

$\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ *est aussi appelé* ***chemin****. C'est une courbe dans le plan d'extrémité les points* $\gamma(0)$ *et* $\gamma(1)$.

Chemin

Définition 11.15

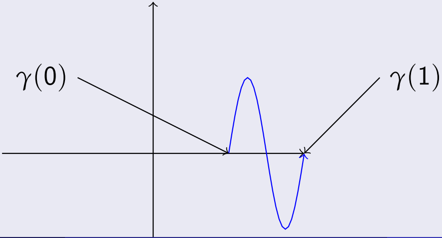
On appelle chemin dans $\mathbb{R}^2$ *toute application continue*

$$\gamma : t \in [0,1] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

$\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ *est aussi appelé* ***chemin****. C'est une courbe dans le plan d'extrémité les points* $\gamma(0)$ *et* $\gamma(1)$.

Exemple 11.16

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $x(t) = 1 + t$, *et* $y(t) = \sin(2\pi t)$



Intégrale d'une FD le long d'un chemin

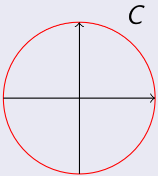
Définition 12.1

Soient ω *une FD exacte et* f *une primitive de* ω*. Si* $\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^2$ *est un arc paramétré (chemin) de* U *alors*

$$\int_\gamma \omega = f\left(\gamma(1)\right) - f\left(\gamma(0)\right)$$

Remarque 12.2

On en déduit que si le chemin est fermé, c'est dire $\gamma(1) = \gamma(0)$ *alors* $\int_\gamma \omega = 0$.
Le chemin défini par $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ *vérifie* $\gamma(0) = (1,0)$ *et* $\gamma(1) = (1,0)$



Exercice

Calculer $\int_C \omega$ pour $\omega(x,y) = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$.

$$\int_C \omega = \int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

Sur C

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2\pi t) & \Rightarrow \quad dx = -2\pi\sin(2\pi t)dt \\ et & \\ y(t) = \sin(2\pi t) & \Rightarrow \quad dy = 2\pi\cos(2\pi t)dt \end{cases}$$

$$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{2\pi\sin^2(2\pi t) + 2\pi\cos^2(2\pi t)}{1}dt$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\right) dt$$

$$= 2\pi$$

Elle n'est donc pas exacte, car si elle l'était, son intégrale sur le contour C serait nulle. **Pourtant elle est fermée.**

Exercice 12.3

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes, dans ce cas les intégrer (En trouver des primitives):

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$

Solution de 1: . Pour la première $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2$. On voit que ω_1 est fermée. En effet $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.
Cherchons une fonction $f(x,y)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $df = \omega_1$, c'est à dire telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \\ et \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \end{cases}$$

La deuxième identité donne $f(x,y) = x^2y + c(x)$. Reporté dans la première $2xy + c'(x) = 2xy$ et donc $c'(x) = 0$ qui veut dire que $c(x) = k$.

$$f(x,y) = x^2y + k$$

ω_1 est donc exacte. ■

Solution de 2 et 3. On voit que ω_2 n'est pas fermée. Elle n'a aucune chance d'être exacte (parce que exacte $\Rightarrow$ fermée).
On voit que ω_3 n'est pas fermée. Elle n'a aucune chance d'être exacte (parce que exacte $\Rightarrow$ fermée). ■

Solution de 4 . On vérifie facilement que f est fermée. Elle peut être exacte. Cherchons donc $f(x, y, z)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

La première équation donne $f(x, y, z) = xyz^2 + g(y, z)$
On remplace dans la deuxième : $xz^2 + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = xz^2 + z$.
C'est à dire $\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = z$. On l'intègre $g(y, z) = yz + c(z)$ et $f(x, y, z)$ devient $f(x, y, z) = xyz^2 + yz + c(z)$. On reporte dans la troisième équation:

$$2xyz + y + c'(z) = 2xyz + 2z + y$$

$$c'(z) = 2z \;\Rightarrow\; c(z) = z^2 + k$$

Conclusion: $f(x, y, z) = xyz^2 + yz + z^2 + k$

■

Exercices

En coordonnées polaires on a

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

1. Calculer dx et dy et fonction de dr et $d\theta$
2. Calculer $dx \wedge dy$

Définition: Différentielle extérieure d'une forme différentielle

DEF 1: Si $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est une fonction de classe C^1 (c'est à dire une forme différentielle de degré 0) sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, alors la différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 1 définie par:

$$\boxed{d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N}$$

Définition: Différentielle extérieure d'une forme différentielle

DEF 1: Si $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est une fonction de classe C^1 (c'est à dire une forme différentielle de degré 0) sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, alors la différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 1 définie par:

$$\boxed{d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N}$$

DEF 2: Soit $\omega = Pdx$ une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^2$ de degré 1. La différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 2:

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy}$$

Définition: Différentielle extérieure d'une forme différentielle

DEF 1: Si $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est une fonction de classe C^1 (c'est à dire une forme différentielle de degré 0) sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, alors la différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 1 définie par:

$$\boxed{d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N}$$

DEF 2: Soit $\omega = Pdx$ une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^2$ de degré 1. La différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 2:

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy}$$

DEF 3: Soit $\omega = Qdy$ une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^2$ de degré 1. La différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 2:

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy}$$

Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$ alors

$$d\omega = d(Pdx) + d(Qdy) = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$

c'est à dire

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Si $\omega = Pdx$ est une FD de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx$$

c'est à dire :$d\left(Pdx\right) = \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy$ de même pour les FD de la forme Qdy et Rdz

$$d\left(Qdy\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz;\ d\left(Rdz\right) = \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d\left(Pdx\right) = \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy \\[2ex] d\left(Qdy\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz \\[2ex] d\left(Rdz\right) = \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx \end{array}}$$

Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est une FD de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$ alors

Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est une FD de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$ alors

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega = & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}}$$

Dans $U \subset \mathbb{R}^2$ on a pour $\omega = Pdx + Qdy$

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Écrire $dx \wedge dy$ en fonction de $dr \wedge d\theta$

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \ , \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

C'est à dire

$$dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$$

Lemme de Poincaré

Pour toute forme ω définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ on a : $d\,(d\omega) = 0$

Par exemple si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$
$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ et donc d'après Schwarz :

$$d\,(df) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy = 0$$

Corollaire 1

1. Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Alors

$$rot(\nabla f) = 0$$

2. Soit V un champ de vecteurs de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Alors

$$div(rotV) = 0$$

Définition + corollaire 2

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ est dit **étoilé** (en $a \in U$)si

$$\forall x \in U \ , \quad [a, x] \subset U$$

Corollaire 2 : Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert étoilé en un point $a \in U$. Soit ω une FD de degré $p \geq 1$ de classe C^1 sur U. Alors on a l'équivalence suivante

$$\boxed{d\omega = 0 \Leftrightarrow \omega \ exacte.}$$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Écrire $dx \wedge dy$ en fonction de $dr \wedge d\theta$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Écrire $dx \wedge dy$ en fonction de $dr \wedge d\theta$

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \ , \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

C'est à dire

$$dx \wedge dy = rdr \wedge d\theta$$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y(r, \theta) = r \sin\theta \sin\varphi, \quad , z = r\cos\theta$$

Écrire $dx \wedge dy \wedge dz$ en fonction de $dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta\sin\varphi, \quad , z = r\cos\theta$$

Écrire $dx \wedge dy \wedge dz$ en fonction de $dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \ , \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

C'est à dire

$$dx \wedge dy = rdr \wedge d\theta$$

Formule de Green-Riemann

Soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une FD de degré 1, de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$
Soit D un domaine compact de U délimité par un lacet simple C, orienté dans le sens trigonométrique et C^1 par morceaux.
Alors

$$\boxed{\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x, y) = 3x, \quad Q(x, y) = x + y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3xdx + (x + y)dy.$$

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x, y) = 3x, \quad Q(x, y) = x + y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3xdx + (x + y)dy.$$

On pose pour $\theta \in [0 : 2\pi]$ $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x, y) = 3x, \quad Q(x, y) = x + y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3xdx + (x + y)dy.$$

On pose pour $\theta \in [0 : 2\pi]$ $\left\{ \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} dx = -\sin\theta d\theta \\ dy = \cos\theta d\theta \end{array} \right.$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x, y) = 3x, \quad Q(x, y) = x + y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3xdx + (x + y)dy.$$

On pose pour $\theta \in [0 : 2\pi]$ $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -\sin\theta d\theta \\ dy = \cos\theta d\theta \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-3\cos\theta\sin\theta + (\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin 2\theta + \cos^2\theta)\right) d\theta = \pi$$

Autre méthode:
$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ et donc, d'après le formule de Green-Riemann, il suffit de calculer $\int_{B(O,1)} 1dxdy$ qui n'est autre le volume de la boule unité.

Calculer le travail W de la force $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $(x = \cos t, y = \sin t, z = t)$ où $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Définition: Le travail d'une force $\vec{F} = (P, Q, R)$ le long d'un chemin H est donné par

$$\int_H \vec{F}.\vec{dl} = \int_H Pdx + Qdy + Rdz$$

Ici :

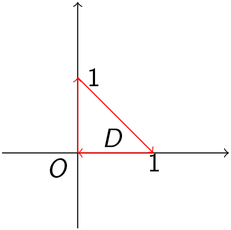
$$dx = -\sin tdt; dy = \cos tdt; dz = dt$$

et donc

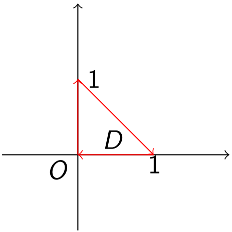
$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \sin t \cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) dt = \frac{\pi}{8}$$

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.



En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.

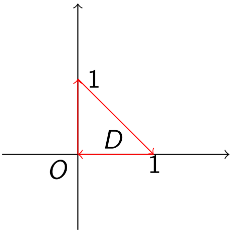


On cherche une forme différentielle de degré 1 telle que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy.$$

On peut choisir par exemple $P = 0$ et il reste $\frac{\partial Q}{\partial x} = xy$ c'est à dire:

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, | x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.

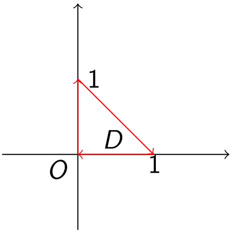


On cherche une forme différentielle de degré 1 telle que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy.$$

On peut choisir par exemple $P = 0$ et il reste $\frac{\partial Q}{\partial x} = xy$ c'est à dire: $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2y$.

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.



On cherche une forme différentielle de degré 1 telle que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy.$$

On peut choisir par exemple $P = 0$ et il reste $\frac{\partial Q}{\partial x} = xy$ c'est à dire: $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2 y$. Green-Riemann donne

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1 - x)dx = \frac{1}{24}$$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

C1: f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$,

C2: $\exists \beta \in]0,1[$ tel que

$$\lim_{t \mapsto 0} t^{\beta} |f(t)| = 0$$

C3: il existe une constante M positive telle que le produit $e^{-Mt} |f(t)|$ reste borné pour toutes les valeurs de t assez grandes (i.e. pour $t > t_0$ avec $t_0 \in \mathbb{R}^+$, t_0 dépendant de M et de f):

$$|f(t)| \leq Ce^{Mt}$$

Définition
On appelle transformée de Laplace d'une fonction f vérifiant les trois conditions C1, C2 et C3 ci dessus, la fonction F définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Remarque :
La fonction

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t} \end{cases} \tag{9}$$

n'admet pas de transformée de Laplace. Elle ne vérifie pas la condition C2.
De même pour la fonction

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{t^2} \end{cases} \tag{10}$$

Cette fonction ne vérifie pas la condition C3.

Exemple 1: La fonction d'Heaviside sur $\mathbb{R}^+$

$$U(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \geq 0 \\ 0 & si \;\; t < 0 \end{cases}$$

Exemple 1: La fonction d'Heaviside sur $\mathbb{R}^+$

$$U(t) = \begin{cases} 1 & si \ \ t \geq 0 \\ 0 & si \ \ t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(U)(p) = \int_0^{+\infty} U(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad , \quad si \quad \Re(p) > 0$$

Exemple 1: La fonction d'Heaviside sur $\mathbb{R}^+$

$$U(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \geq 0 \\ 0 & si \;\; t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(U)(p) = \int_0^{+\infty} U(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \quad , \quad si \;\; \Re(p) > 0$$

Exemple 2: $f(t) = U(t)e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - p)t}dt = \frac{1}{p-\alpha} \quad , \quad si \;\; \Re(p) > \Re(\alpha)$$

Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Exemple 1: La fonction d'Heaviside sur $\mathbb{R}^+$

$$U(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \geq 0 \\ 0 & si \;\; t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(U)(p) = \int_0^{+\infty} U(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \quad , \quad si \quad \Re(p) > 0$$

Exemple 2: $f(t) = U(t)e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - p)t}dt = \frac{1}{p - \alpha} \quad , \quad si \quad \Re(p) > \Re(\alpha)$$

En particulier la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{i\beta t}$ $(\beta \in \mathbb{R})$ est

$$F(p) = \frac{1}{p - i\beta}, \quad pour \quad \Re(p) > 0.$$

Exemple 3: $\alpha \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t^{\alpha} & si \;\; t \geq 0 \\ 0 & si \;\; t < 0 \end{cases}$

Exemple 3: $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad f(t) = \begin{cases} t^{\alpha} & si \;\; t \geq 0 \\ 0 & si \;\; t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt$$

Si on pose $u = pt$ et donc $dt = \frac{1}{p} du$, cette intégrale devient

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \quad , \quad si \;\; \Re(p) > 0.$$

1) Linéarité: Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions vérifiant les trois conditions C1, C2 et C3. Alors

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

2) Transformée d'une translation:
Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) & si\ t \geq a \\ 0 \quad si\ t < a \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{L}(f-a)(p) = \int_0^{+\infty} f(t-a) e^{-pt} dt$$

On pose $s = t - a$

$$\mathcal{L}(f_a)(p) = \int_0^{+\infty} f(s) e^{-p(a+s)} ds = e^{-ap} \mathcal{L}(f)(p)$$

$$\mathcal{L}(f_a)(p) = e^{-ap} \mathcal{L}(f)(p)$$

3) Transformée d'une homothétie :

Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. Soit $k > 0$. On pose $g(t) = f(kt)$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)e^{-pt}ds$$

On pose $s = kt$ donc $dt = \frac{1}{k}ds$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(s)e^{-\frac{p}{k}s}ds = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right)$$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right)$$

3) Transformée d'une homothétie :
Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. Soit $k > 0$. On pose $g(t) = f(kt)$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)e^{-pt}ds$$

On pose $s = kt$ donc $dt = \frac{1}{k}ds$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(s)e^{-\frac{p}{k}s}ds = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right)$$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right)$$

Théorème :
L'application $\mathcal{L}$ qui à une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3 associe sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est donc linéaire. Elle est injective (son noyau est réduit 0)

4) Transformée d'une dérivée :

Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. On suppose que f est continûment dérivable.

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

On fait une intégration par parties

$$\mathcal{L}(f')(p) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

4) Transformée d'une dérivée :

Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. On suppose que f est continûment dérivable.

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

On fait une intégration par parties

$$\mathcal{L}(f')(p) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

4) Transformée d'une dérivée :

Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. On suppose que f est continûment dérivable.

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

On fait une intégration par parties

$$\mathcal{L}(f')(p) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

Par récurrence on définit la transformée de Laplace des dérivées successives: Si :

(i): $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$

(ii): $\exists M > 0$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \left|f^{(k)}(t)\right| \leq Me^{at} \qquad \forall k \leq n$$

Alors

4) Transformée d'une dérivée :

Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. On suppose que f est continûment dérivable.

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

On fait une intégration par parties

$$\mathcal{L}(f')(p) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

Par récurrence on définit la transformée de Laplace des dérivées successives: Si :

(i): $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$

(ii): $\exists M > 0$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \left|f^{(k)}(t)\right| \leq Me^{at} \qquad \forall k \leq n$$

Alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$$

5) Transformée d'une primitive: Soit f une fonction vérifiant les conditions C1, C2 et C3. Soit h la fonction définie par

$$h(t) = \int_0^t f(s)ds$$

On a $h'(t) = f(t)$ et donc d'après ce qui précède

$$\mathcal{L}(h')(p) = p\mathcal{L}(h)(p) - h(0^+) = p\mathcal{L}(h)(p)$$

D'où

$$\mathcal{L}(f)(p) = p\mathcal{L}(h)(p)$$

Et donc

$$\mathcal{L}(h)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$$

6) Transformée primitive n^{eme}: D'une manière plus générale si h est une n^{eme} primitive de f (qui s'annule en 0 avec toutes ses dérivées) alors

$$\mathcal{L}(h)(p) = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}(f)(p)$$

Avec la convention $t_0 = t$ la fonction h peut s'écrire:

$$h(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} ... \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

Valeur initiale et valeur finale

Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f) = F$. Alors si les limites suivantes existent, elles vérifient:

1. $\lim\limits_{p \mapsto +\infty} F(p) = 0$
2. $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \mapsto 0} pF(p)$
3. $\lim\limits_{t \mapsto 0^+} f(t) = \lim\limits_{p \mapsto +\infty} pF(p)$

Exercices

Exercice 1:Donner les transformées de Laplace des fonctions

1. $f(t) = t$
2. $g(t) = \sin(\beta t)$
3. $h(t) = \cos(\beta t)$

Exercice 2 :Soit f vérifiant C1, C2 et C3. On note $F = \mathcal{L}(f)$. On pose $g_n(t) = t^n f(t)$

1. Calculer $\mathcal{L}(g_1), \mathcal{L}(g_2), ..., \; et \; \mathcal{L}(g_n), n > 0$.
2. Calculer $\mathcal{L}(te^{2t})$, $\mathcal{L}(t^2 e^{2t})$
3. f vérifiant C1, C2 et C3 et $\lim\limits_{t \mapsto 0} \dfrac{f(t)}{t}$ existe. On pose $F = \mathcal{L}(f)$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$. Montrer que

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_p^{+\infty} F(u)du$$