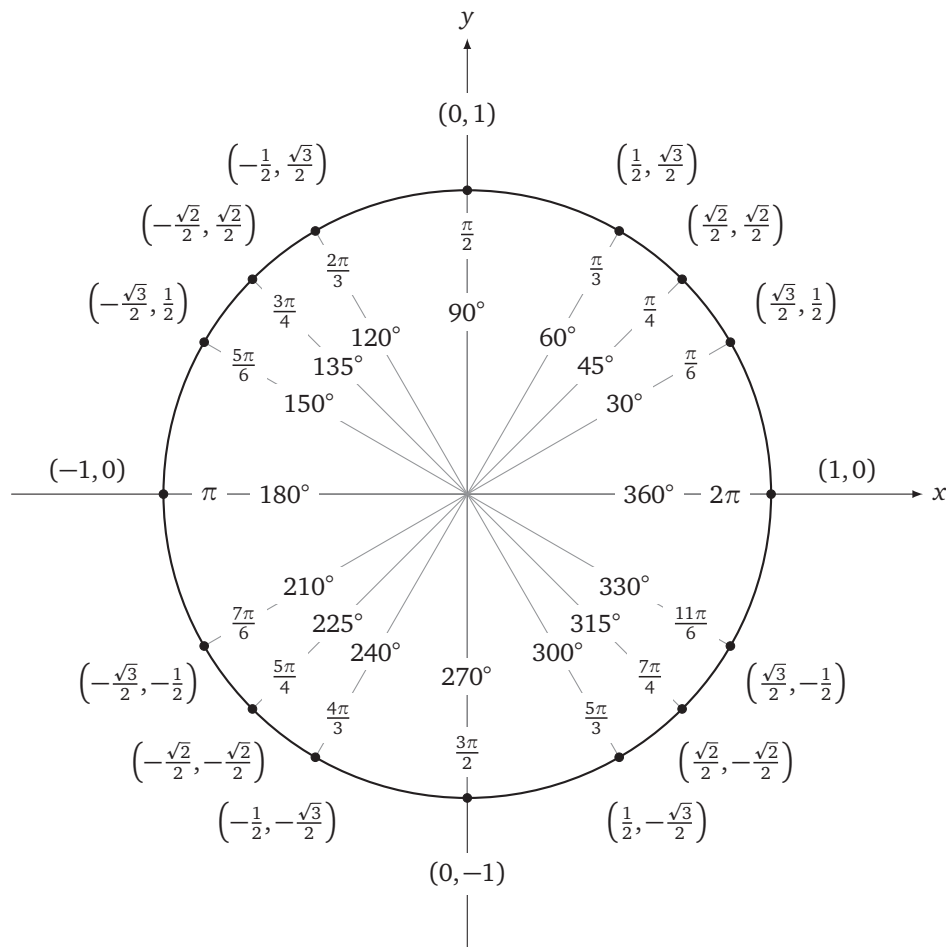
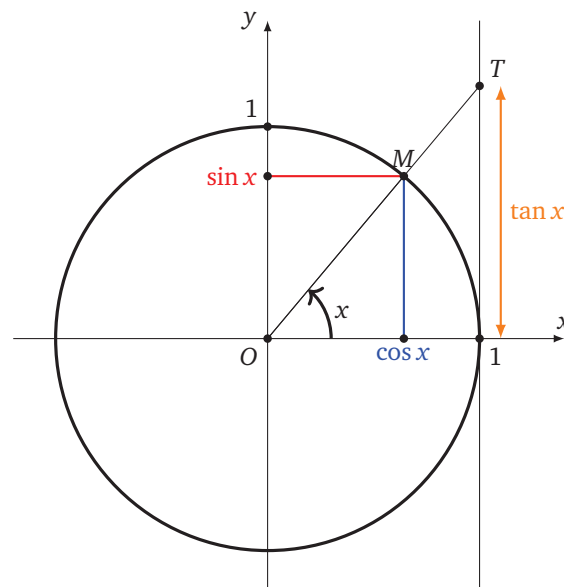


### 3. Formules de trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

#### 3.1. Le cercle trigonométrique



Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de 0 à  $2\pi$  (en radian) et de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées.



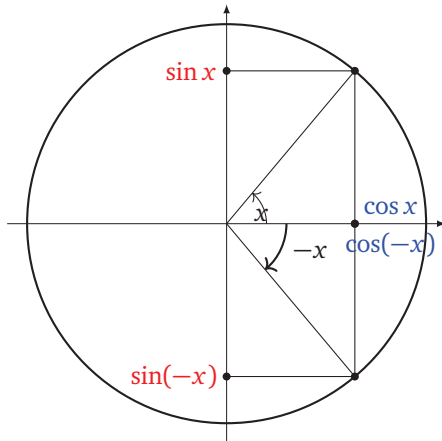
Le point  $M$  a pour coordonnées  $(\cos x, \sin x)$ . La droite  $(OM)$  coupe la droite d'équation  $(x = 1)$  en  $T$ , l'ordonnée du point  $T$  est  $\tan x$ .

Les formules de base :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$



Nous avons les formules suivantes :

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

On retrouve graphiquement ces formules à l'aide du dessin des angles  $x$  et  $-x$ .

Il en est de même pour les formules suivantes :

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

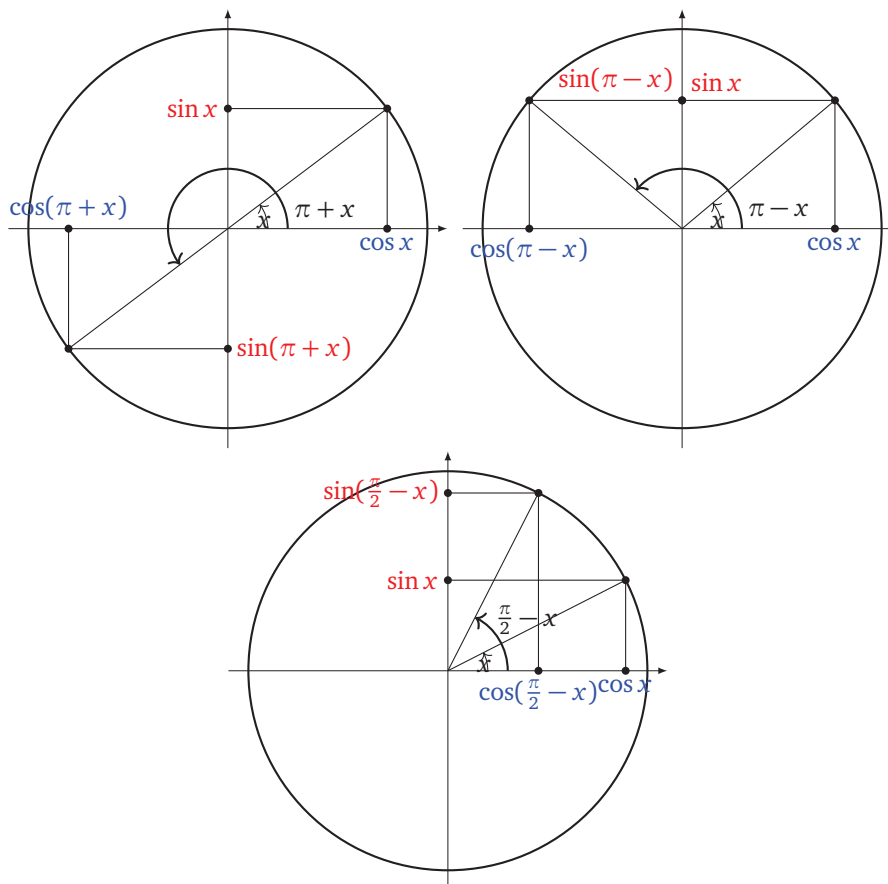
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

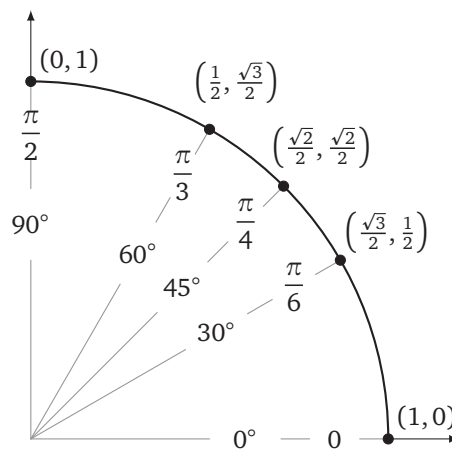
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



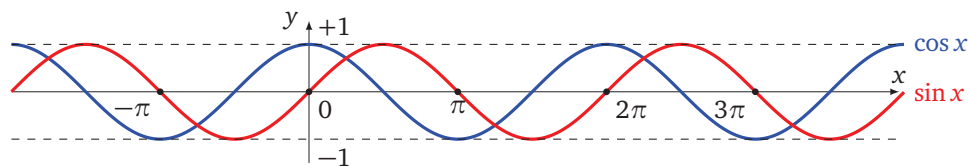
$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Valeurs que l'on retrouve bien sur le cercle trigonométrique.

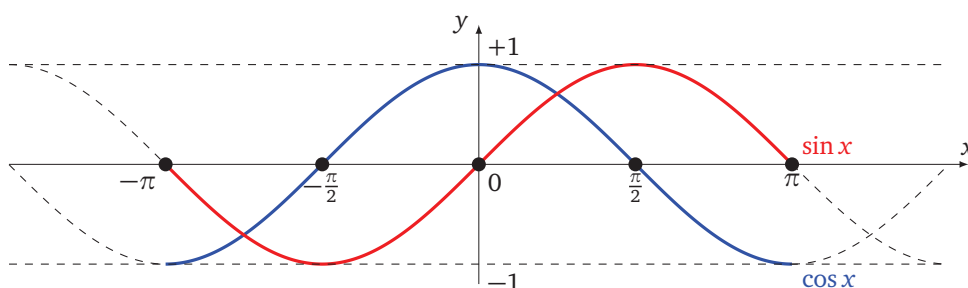


### 3.2. Les fonctions sinus, cosinus, tangente

La fonction cosinus est périodique de période  $2\pi$  et elle paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de  $2\pi$  mais elle impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



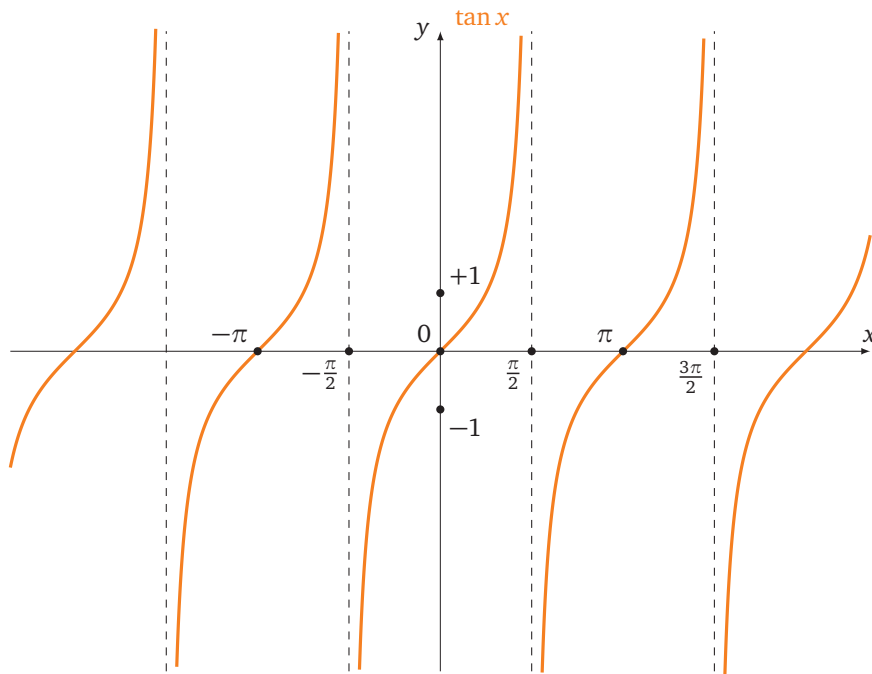
Voici un zoom sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .



Pour tout  $x$  n'appartenant pas à  $\{\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$  la tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction  $x \mapsto \tan x$  est périodique de période  $\pi$  ; c'est une fonction impaire.



Voici les dérivées :

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

### 3.3. Les formules d'additions

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

On en déduit immédiatement :

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Il est bon de connaître par cœur les formules suivantes (faire  $a = b$  dans les formules d'additions) :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cdot \cos a \\ \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}\end{aligned}$$

### 3.4. Les autres formules

Voici d'autres formules qui se déduisent des formules d'additions. Il n'est pas nécessaire de les connaître mais il faut savoir les retrouver en cas de besoin.

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]\end{aligned}$$

Les formules précédentes se reformulent aussi en :

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

Enfin les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de  $\tan \frac{x}{2}$ .

$$\text{Avec } t = \tan \frac{x}{2} \quad \text{on a} \quad \begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de certaines intégrales par changement de variable, en utilisant en plus la relation  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ .

#### Mini-exercices.

1. Montrer que  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .
2. Montrer la formule d'addition de  $\tan(a+b)$ .
3. Prouver la formule pour  $\cos a \cdot \cos b$ .
4. Prouver la formule pour  $\cos p + \cos q$ .
5. Prouver la formule :  $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + (\tan \frac{x}{2})^2}$ .
6. Montrer que  $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} + 2}$ . Calculer  $\cos \frac{\pi}{16}$ ,  $\cos \frac{\pi}{32}, \dots$
7. Exprimer  $\cos(3x)$  en fonction  $\cos x$  ;  $\sin(3x)$  en fonction  $\sin x$  ;  $\tan(3x)$  en fonction  $\tan x$ .

## 4. Formulaire : trigonométrie circulaire et hyperbolique

*Propriétés trigonométriques : remplacer cos par ch et sin par i · sh.*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a - b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(a - b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} 2a &= 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 \\ &= 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a \\ &= \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a\end{aligned}$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(a + b) + \operatorname{ch}(a - b)]$$

$$\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(a + b) - \operatorname{ch}(a - b)]$$

$$\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(a + b) + \operatorname{sh}(a - b)]$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

Avec  $t = \tan \frac{x}{2}$  on a

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

Avec  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$  on a

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \operatorname{th} x &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

*Dérivées : la multiplication par i n'est plus valable*

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

## 5. Formules de développements limités

Développements limités usuels (au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$



## 6. Formulaire : primitives

$C$  désigne une constante arbitraire. Les intervalles sont à préciser.

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

$$\int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t + C$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cotan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C$$

$$\int \tan t dt = -\ln |\cos t| + C$$

$$\int \cotan t dt = \ln |\sin t| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2+\alpha} \right| + C$$

$$\int \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t + C$$

$$\int \operatorname{sh} t dt = \operatorname{ch} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{coth} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{Arctan} e^t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{t}{2} \right| + C$$

$$\int \operatorname{th} t dt = \ln (\operatorname{ch} t) + C$$

$$\int \operatorname{coth} t dt = \ln |\operatorname{sh} t| + C$$