**Université de Rennes 1** **Année 2006/2007**

# Outils Mathématiques 4: Exercices

## Fonctions de plusieurs variables et calcul vectoriel

**A savoir**

1. Définition du graphe $G(f)$ d'une fonction $f$
2. Courbes de niveau.
3. Représentation graphique de $G(f)$ en utilisant des courbes de niveau.
4. Produit scalaire, vectoriel et mixte.

## 1. Fonctions partielles. courbes de niveau.

**Exercice 1.1.** Soit $k \in \mathbb{R}$; l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \text{tel que}\ \ f(x, y) = k\}$ est la *courbe de niveau* $k$ de la fonction $f$.

Trouver les courbes de niveaux $0, 1, -1, 2$ et $3$ des fonctions de deux variables $g_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $g_2 = \dfrac{y}{x}$.

**Exercice 1.2.** Soit $f$ une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $P = (a, b)$ un point intérieur de $D$. Les fonctions: $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement $a$ et $b$, sont appelées les fonctions partielles associées à $f$ au point $P$.

Trouver les fonctions partielles aux points $(0, 0)$ et $(1, 2)$ de $g_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g_2(x, y) = xy$ et $g_3(x, y) = x^2 y - 1$.

**Exercice 1.3.** Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et tracer les courbes de niveau $\{(x, y) \in \mathcal{D}_f;\ \text{tel que}\ f(x, y) = k\}$ pour les valeurs de $k$ indiquées :

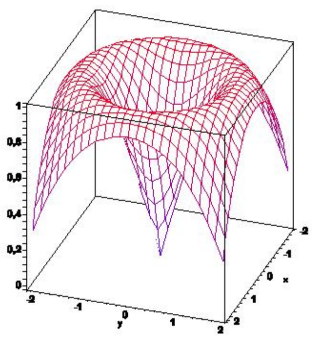
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}, \qquad k = 0, -1$$
$$f(x, y) = \frac{xy - x + y}{xy}, \qquad k = 1, 2$$
$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2}, \qquad k = 2$$
$$f(x, y) = x - y - |x - y|, \qquad k \in \mathbb{R},$$

Pour la dernière question, traiter séparément $k = 0$ et $k > 0$ et $k < 0$.

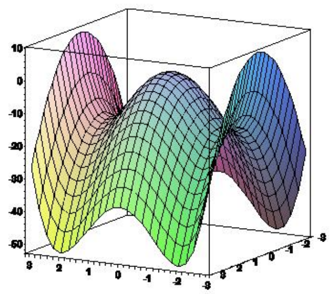
**Exercice 1.4.** (a) Soit $f_1(x, y) = x^2 + y^2$. Déterminer les courbes de niveaux $z = a$ du graphe $G(f_1)$ de $f_1$ et l'intersection de $G(f_1)$ avec le plan $P \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $y = 0$. Représenter graphiquement $G(f_1)$.

(b) Soit $f_2(x, y) = x^2 - y^2$. Déterminer les courbes de niveaux de $G(f_2)$ et l'intersection de $G(f_2)$ avec le plan $x = 0$; le plan $y = 0$. Représenter graphiquement $G(f_2)$.

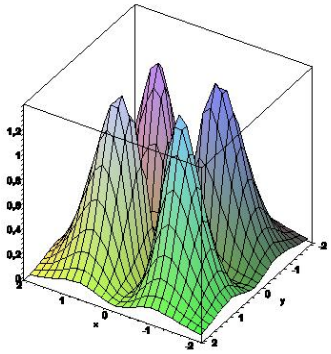
**Exercice 1.5.** Associer un des graphes à la fonction $z = f(x, y)$ représentée par ses courbes de niveau



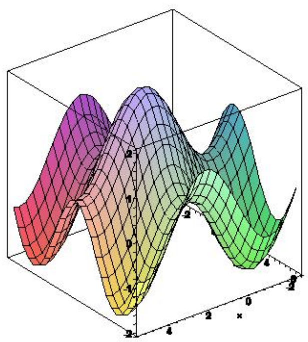
(a)



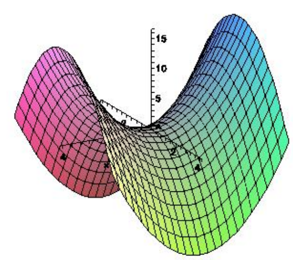
(b)



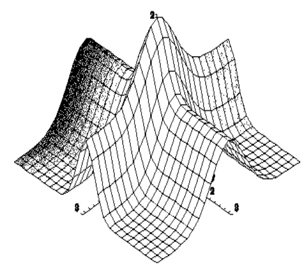
(c)



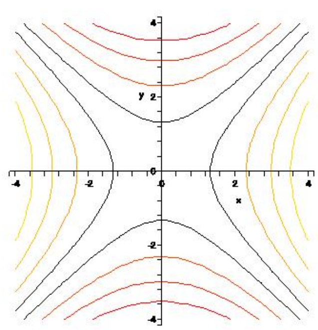
(d)



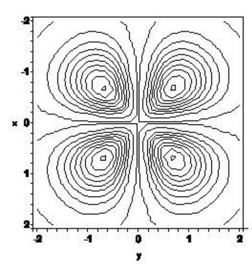
(e)



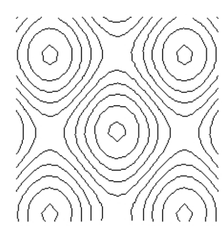
(f)



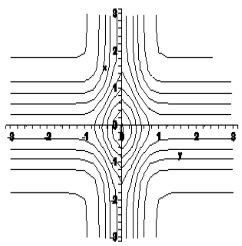
(1) $z = x^2 - y^2$

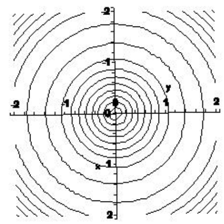


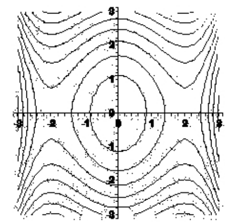
(2) $z = \frac{15x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$



(3) $z = \sin(x) + \sin(y)$







(4) $z = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$ (5) $z = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$ (6) $z = y^4 - 8y^2 - 4x^2$

## 2. Calcul vectoriel

**Exercice 2.1.** L'espace à trois dimensions est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\vec{A} \wedge \vec{B},\ \vec{B} \wedge \vec{A},\ \vec{A}.\vec{B},\ \vec{A}.(\vec{A} \wedge \vec{B}),\ \|\vec{A}\|,\ \|\vec{A}+\vec{B}\|,\ (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C},\ \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

**Exercice 2.2.** L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2. Calculer les normes de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, puis les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

**Exercice 2.3.** L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Etablir l'identité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}.$$

Indication : calculer les coordonnées des deux membres.

**Exercice 2.4.** Soients $A$ et $B$ deux points de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\vec{AM}.\vec{BM} = 0$. (Indication : introduire le point $I$ milieu de $[AB]$.)

3. Représenter ces deux ensembles sur un dessin.

4. Que se passe-t-il lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 2.5.** Trouver l'angle $\theta$ entre les vecteurs joignant l'origine aux points $P_1(1,2,3)$ et $P_2(2,-3,-1)$.

**Exercice 2.6.** Soit $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ et $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$ deux vecteurs issus d'un même point $P$ et soit

$$\vec{c} = \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}\vec{\imath} + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}\vec{\jmath} + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\vec{k}$$

Montrer que $\|c\| = \|a\|\|b\|\sin\theta$, où $\theta$ est le plus petit angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

**Exercice 2.7.** Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions.

1. Etablir l'identité
$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 + \|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = 2(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2).$$

2. Montrer que pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que
$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2.$$
(le théorème de Pythagore)

---

---

**Exercice 2.1.** *(Travail personnel)* Dessiner les surfaces $S_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$ en déterminant les courbes de niveaux et l'intersection de $S$ avec des plans appropriés pour:

(a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\}$; (b) $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

**Exercice 2.2.** *(Travail personnel)* Déterminer les courbes de niveaux du graphe $G(f)$ de $f(x,y) = xy$ et l'intersection de $G(f)$ avec le plan $y = x$, le plan $y = -x$. Représenter graphiquement $G(f)$.

**Exercice 2.3.** *(Travail personnel)* Dessiner la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ en déterminant les courbes de niveaux et l'intersection de $S$ avec des plans appropriés pour $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$.

**Exercice 2.4.** *(Travail personnel)* Calculer le volume du parallélépipède construit sur les côtés $AM$, $AN$ et $AP$ où
$A = (2,1,-1)$, $M = (3,0,2)$, $N = (4,-2,1)$ et $P = (5,-3,0)$.

**Exercice 2.5.** *(Travail personnel)* L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$.

**Exercice 2.6.** *(Travail personnel)* Démontrer que pour $U$ et $V$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ on a toujours :
(1) $||U - V|| \geq ||U|| - ||V||$.
(2) $U.V = \frac{1}{4}\big(||U + V||^2 - ||U - V||^2\big)$

# Continuité et différentiabilité

## 3. Limites et continuité

**A savoir**

1. Définition de la continuité d'une fonction à deux variables en un point.
2. Méthode pour démontrer la continuité d'une fonction: coordonnées polaires.
3. Méthode pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.
4. Propriétés des fonctions continues: somme, produit, quotient, composée.

**Exercice 3.1.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$. Etudier la limite quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$ de la restriction de $f$ à la droite d'équation $y = ax$, $a$ donné. Montrer que $f$ n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 3.2.** Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la limite quand $(x,y)$ tend vers l'origine de la restriction de $f$ à la droite d'équation $y = ax$, $a$ donné. Montrer que la restriction de $f$ à toute droite passant par l'origine est continue.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de $f$ à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que $f$ n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 3.3.** Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites:

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les fonctions suivantes:

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{\sin y}{x};$$

Montrer qu'en $(0,0)$

- Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe.
- Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent.
- (B) et (C) peuvent exister sans être égales.
- Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

**Exercice 3.4.** Décider si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point $P$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $P = (0,0)$; (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 + xy} + 3$, $P = (0,0)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + (y+1)^3}{x^2 + (y+1)^2}$, $P = (0, -1)$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2(y-2) - (y-2)^2(x-1)}{(x-1)^4 + (y-2)^2}$, $P = (1, 2)$.

---

---

**Exercice 3.1.** *(Travail personnel)*
Étudier les limites suivantes :

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2y^2}, \qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x - y^2}{x^2+y^2}, \qquad (c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+2x}{x^2+y^2}.$$

**Exercice 3.2.** *(Travail personnel)* Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = f(0,0) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)$$

bien que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

**Exercice 3.3.** *(Travail personnel)* Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables. Pour étudier la limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y)$ tend vers $(a,b)$ je fixe $x$ et je fais tendre $y$ vers $b$, puis j'étudie la limite lorsque $x$ tend vers $a$. Vrai ou faux?

**Exercice 3.4.** *(Travail personnel)* Décider si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point $P$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $P = (0,0)$; (b) $f(x,y) = \dfrac{x+5}{(x+5)^2 + y^2} - 1$, $P = (-5, 0)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^7 + x^4y + x^3y}{x^6 + x^3y + y^2}$, $P = (0,0)$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{(x+1)^3(y+2) - (y+2)^3(x+1)}{(x+1)^2 + (y+2)^2}$, $P = (-1, -2)$

(e) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^4 + y^2}$, $P = (0,0)$.

**Exercice 3.5.** *(Travail personnel)* (a) Etudier la continuité de la fonction suivante:

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin\frac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0; \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

(b) Décider si la fonction $g$ suivante définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ peut être prolongée par continuité en une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}, \qquad \text{si} \quad y \neq 0.$$

## 4. Différentiabilité

**A savoir**

1. Définition de la dérivée partielle d'une fonction à deux variables; Interprétation géométrique.
2. Définition du gradient.
3. Définition de la dérivée directionnelle; Interprétation géométrique.
4. Rapport entre dérivée directionnelle et partielle.
5. L'insuffisance de la notion de dérivée partielle (directionnelle) pour la dérivabilité d'une fonction.
6. Si $f$ est différentiable en $X_0$ alors $f$ est nécessairement continue en $X_0$.
7. On dit que $f$ *est de classe* $C^1$ sur $D$ si $f$ admet dérivées partielles premières continues en tout point de $D$.
8. Si $f$ est de classe $C^1$ sur $D, alors$ $f$ est différentiable en tout point de $D$.
9. Définition du plan tangent au graphe d'une fonction $f(x,y)$.

**Exercice 4.1.** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Est-elle continue en $(0,0)$? Calculer les dérivées partielles premières. Est-elle de classe $C^1$ ?

**Exercice 4.2.** Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes sur leur domaine de définition:

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$; (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

**Exercice 4.3.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) La fonction $f$ est-elle continue?

(b) La dérivée directionnelle $f_v(0,0)$ existe-t-elle pour tout vecteur $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? En déduire que $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(c) Calculer les dérivées partielles de $f$ en $(0,0)$.

(d) Montrer en utilisant la définition de la différentiabilité d'une fonction que $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

**Exercice 4.4.** Soit l'application définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $f$ possède en $(0,0)$ des dérivées partielles dans toutes les directions mais n'est pas différentiable en ce point.

**Exercice 4.5.** (a) Montrer que la fonction $f$ de 4.2 (a) est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit $f$ la fonction de 4.2 (b). Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Trouver la dérivée directionnelle de $f$ en $(0,1)$ dans la direction $(1,1)$ en utilisant: (i) la définition; (ii) le gradient de $f$.

**Exercice 4.6.** Soit $f$ l'application définie par $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2x^3+3xy^2}{x^2+y^2} & \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées directionnelles en $(0,0)$ dans toutes les directions, puis $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)$. $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ ?

**Exercice 4.7.** Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v}(1,-2)$ au point $A(2,1)$.

**Exercice 4.8.** Trouver la dérivée partielle de $z = ye^x$ en $P = (0,3)$ suivant la direction
a) $\theta = 30°$, b) $\theta = 120°$. (On peut utiliser la formule: $\frac{dz}{dr} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$.)

**Exercice 4.9.** Trouver les différentielles de $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ et de $Z = x\sin y - y\sin x$.

**Exercice 4.10.** On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2+1}$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de $f$.
2. Déterminer la norme de $\nabla f(x,y)$. Montrer qu'elle est constante le long du cercle $x^2+y^2 = r^2$, où $r$ est un réel strictement positif fixé.
3. Trouver le maximum de la dérivée directionnelle $f'_v(3,4)$ avec $\|v\| = 1$.

**Exercice 4.11.** La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts). Si $E = 200$ volts et $R = 8$ ohms, quelle est la modification de la puissance si $E$ décroît de 5 volts et $R$ de 0.2 ohms ?

**Exercice 4.12.** Soit la formule $R = E/C$. Trouver l'erreur maximale et le pourcentage d'erreur si $C = 20$ avec une erreur possible de $0,1$ et $E = 120$ avec une erreur possible de $0,05$.

**Exercice 4.13.** Soit $z = f(x,y)$ une fonction continue de $x$ et $y$ ayant les dérivées partielles $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ continues. Supposons que $y$ soit une fonction dérivable de $x$. Alors, $z$ est une fonction dérivable de $x$.

1. Trouver $\dfrac{dz}{dx}$ avec $z = f(x,y) = x^2+2xy+4y^2$, $y = e^{3x}$.
2. Trouver a) $\dfrac{dz}{dx}$ et b) $\dfrac{dz}{dy}$, avec $z = f(x,y) = xy^2+x^2y$, $y = \ln x$.

**Exercice 4.14.**
Soit $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (le laplacien de $f$)

(a) Calculer $\Delta f$ pour $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^\alpha$. Déterminer les valeurs de $\alpha$ telles que $\Delta f = 0$.

(b) Calculer $\Delta f$ pour $f(x,y) = \ln\left((x^2+y^2)^k\right)$. Déterminer les valeurs de $k$ telles que $\Delta f = 0$.

## Dérivées partielles d'ordre supérieurs

**Exercice 4.15.** Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes en spécifiant le domaine de définition $D$ :

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = y\ln x; \qquad \text{(b)} \quad g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Le lemme de Schwarz s'applique-t-il sur $D$?

**Exercice 4.16.** Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calculer les dérivées partielles premières $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$ .
(b) Montrer que

$$f''_{xy}(0,0) = +1 \quad \text{et} \quad f''_{yx}(0,0) = -1.$$

Pourquoi ceci ne contredit-il pas le lemme de Schwarz?

**Exercice 4.17.** Calculer $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ et $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial y^2}$ où $f(x,y) = y^3 \ln x$.

---

---

**Exercice 4.1.** *(Travail personnel)* Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est différentiable en $(0,0)$. Calculer les dérivées partielles secondes en $(0,0)$. Conclusion?
**Exercice 4.2.** *(Travail personnel)* Pour chaque application préciser l'existence et le calcul éventuel des dérivées partielles en tout point; sont-elles de classe $C^1$ ?

(a) $\begin{cases} f(x,y) = x \text{ si } |x| > |y| \\ f(x,y) = y \text{ sinon} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x,y) = 1 - e^{1-(x^2+y^2)} \text{ lorsque } x^2+y^2 \geq 1 \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) \text{ lorsque } xy \neq 0 \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

**Exercice 4.3.** *(Travail personnel)* Trouver $\dfrac{dz}{dt}$ lorsque $z = x^2 + 3xy + 5y^2$; $x = \sin t$ et $y = \cos t$.

**Exercice 4.4.** *(Travail personnel)*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.Déterminer toutes les applications f telles que $\Delta F = r$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

2. Soit $g : (x,y) \mapsto g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de $g$ en fonction de celles de $f$

3. On pose $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$ et $g = f \circ \phi$. Exprimer le Laplacien de $g$ en coordonnées polaires.

**Exercice 4.5.** *(Travail personnel)* Résoudre, à l'aide du changement de variables $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$, $y = \dfrac{u}{v}$, l'équation aux dérivées partielles:

$$2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

**Exercice 4.6.** *(Travail personnel)* Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f$ au(x) point(s) donnés pour:

(a) $f(x,y) = y^2(x^3-1)$ et le point $(1,1)$;

(b) $f(x,y) = x^2+y^2$ et les points $(0,0)$ et $(1,1)$. Représenter graphiquement le graphe et les plans tangents.

**Exercice 4.7.** *(Travail personnel)* Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

(a) Soit $P = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $S$ tel que $z_0 > 0$. Exprimer $S$ comme graphe d'une fonction dans un voisinage de $P$. Déterminer l'équation du plan tangent à $S$ au point $P$.

(b) Même question pour un $P$ qui vérifie $x_0 < 0$.

(c) Montrer que le plan tangent vérifie dans les deux cas $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0) = 0$.

**Exercice 4.8.** *(Travail personnel)* Déterminer toutes les fonctions $f$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$; (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$; (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y$; (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$;

**Exercice 4.9.** *(Travail personnel)* On considère l'application définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \sqrt{\ln(2x+3y+1)}.$$

(a) Trouver le domaine de définition puis le domaine de continuité de $f$ (faire un dessin)..

(b) Calculer les dérivées partielles et trouver leurs domaines d'existence.

**Exercice 4.10.** *(Travail personnel)* Calculer les dérivées partielles premières des fonctions données:

a) $f_1(x,y) = 3xy + e^y$ b) $f_2(x,y) = y\sin(2xy+1)$, c) $f_3(x,y) = e^{\sin(2x)+xy}$,

d) $f_4(x,y) = \sqrt{x^2+\cos y+1}$, e) $f_5(x,y) = \ln(x^2y^2)$.

**Exercice 4.11.** *(Travail personnel)* Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Déterminer la dérivée directionnelle $f_v(0,0)$ pour tout vecteur $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Calculer les dérivées partielles de $f$ en $(0,0)$.

(c) Montrer en utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction que $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

**Exercice 4.12.** *(Travail personnel)* Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes en spécifiant le domaine de définition: $(a)$ $f(x,y) = y^x$; (b) $f(x,y) = \ln\frac{1}{x^2+y^2}$.

Le lemme de Schwarz s'applique-t-il sur le domaine de définition?

# Extrema

## 5. Fonctions implicites

**Exercice 5.1.** Soit $f(x, y) = x^2 + 1 + xe^y - y$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction $\phi$ telle que, dans un voisinage du point $(0, 1)$, les relations $f(x, y) = 0$ et $y = \phi(x)$ soient équivalentes.

(b) Calculer $\phi(0)$, $\phi'(0)$ et $\phi''(0)$.

(c) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de $\phi$ au voisinage de 0.

(d) Représenter $\Gamma = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ au voisinage du point $(0, 1)$.

**Exercice 5.2.** (a) Montrer que l'équation $y^3 + x + y = 0$ définit une fonction implicite $y = \phi(x)$ au voisinage de l'origine $(0, 0)$.

(b) Calculer $\phi(0)$, $\phi'(0)$, $\phi''(0)$ et $\phi'''(0)$.

(c) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de $\phi$ au voisinage de 0.

(d) Représenter $\Gamma = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ au voisinage du point $(0, 0)$.

**Exercice 5.3.** On considère la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3xy$.

a) Dire pourquoi il n'existe pas de fonction $\phi(x, y)$ définie dans un voisinage $U$ de $(0, 0)$,non-identiquement nulle, telle que $\phi(0, 0) = 1$ et $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$.

b) Montrer que l'équation $F(x, y, z) = 0$ définie une fonction implicite $z = \psi(x, y)$ au voisinage du point $P_0 = (1, 1, 1)$.

   Calculer les dérivées partielles premières de $\psi$ en $P_0$.

## 6. Développement limité

**Exercice 6.1.** Ecrire le développement limité à l'ordre 2 pour la fonction $f$ au voisinage du point indiqué. En déduire l'équation du plan tangent.

(a) $f(x, y) = xy + x^2 + 4y^2$, en $(1, 2)$;

(b) $f(x, y) = x^2y + 3xy + y^4$, en $(1, 2)$;

(c) $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$, en $(0, 0)$.

**Exercice 6.2.** Soit $f(x, y) = e^x \cos y$.

(a) Trouver le développement limité d'ordre 0, 1 et 2 de $f$ au voisinage du point $(0, \pi/3)$.

(b) Donner des valeurs approchées de $f(-\frac{1}{10}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{50})$ en utilisant les approximations de (a).

---

---

**Exercice 6.1.** *(Travail personnel)*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$.

(a) Trouver le développement à l'ordre 2 de $f(x, y)$ autour de $(1, 2)$.

(b) Trouver l'équation du plan tangent au graphe de $f$ en $(1, 2)$.

(c) Trouver les points du graphe de $f$ qui admettent un plan tangent horizontal, c.à.d. parallèle au plan $x0y$.

(d) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'équation $f(x, y) = 0$ peut être écrit (localement) comme $y = \psi(x)$. (Plus précisément: Pour chaque $(x_0, y_0)$ qui vérifie $f(x_0, y_0) = 0$ on peut trouver un voisinage $V$ de $x_0$ et une fonction $\psi : V \to \mathbb{R}$ tel que $f(x, \psi(x)) = 0$, pour $x \in V$.)

**Exercice 6.2.** *(Travail personnel)* (a) Détermier le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $g(x) = e^x$ au voisinage du point 1 et de $h(y) = \sin(y)$ au voisinage de $\pi$.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = e^x \sin(y)$ au voisinage du point $P_0 = (1, \pi)$.

(c) Calculer $f(P_0)$, $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$, $f_{xx}(P_0)$, $f_{xy}(P_0)$ et $f_{yy}(P_0)$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $f(x, y) = e^x \sin(y)$ au voisinage de $P_0$.

## 7. Extrema

**Exercice 7.1.** Chercher les points critiques des fonctions suivantes:

(a) $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y$;

(b) $f(x, y) = xy^2(1 + x + 3y)$;

**Exercice 7.2.** Chercher les points critiques de

$$f(x, y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right), \qquad \text{pour} \qquad x > 0$$

et décider s'il s'agit d'un minimum, maximum local (relatif) ou d'un point selle.

**Exercice 7.3.** Une boîte rectangulaire ouverte au-dessus a un volume de $32m^3$. Trouver les dimensions de la boîte pour que sa surface totale soit minimale

**Exercice 7.4.**

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Admet-elle des extrema absolus (globaux)?

2. Même question pour

$$\begin{array}{llll} (a) & f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 & (b) & f(x,y) = xe^y + ye^x \\ (c) & f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)} & (d) & f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3 \\ (e) & f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy & (f) & f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1 \end{array}$$

**Exercice 7.5.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Déterminer les extrema relatifs (locaux) de la fonction $f$.

2. La fonction $f$ possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$ ?

3. Représenter le segment de droite $L$ défini par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0,\ y = x + 1\}.$$

   Déterminer les extrema absolus de la restriction de $f$ à $L$ et préciser en quels points de $L$ ils sont atteints.

**Exercice 7.6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de $f$.

2. $f$ possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?

3. Représenter $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$
   Justifier l'existence d'un maximum absolu M et d'un minimum absolu m pour la restriction de $f$ à $T$. Les déterminer.

**Exercice 7.7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.

1. Déterminer les extrema locaux de $f$.
2. Montrer que $f(x, y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de $f$ et les points où il est atteint. Y a-t-il un minimum global?

**Exercice 7.8.** Trouver la plus petite distance de l'origine $(0, 0)$ à l'hyperbole $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

**Exercice 7.9.** Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ et $F(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$.
(a) Trouver les points critiques de $F$.
(b) Trouver des paramétrisations pour les deux morceaux réguliers du bord $\Gamma$ de $D$.
(c) Trouver les maxima et les minima globaux de la fonction $F$ restreinte au bord $\Gamma$ de $D$.
(d) Trouver les maxima et les minima globaux de la fonction $F$ restreinte à $D$.

**Exercice 7.10.** Soit $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
(a) Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que la restriction de $f$ à la droite d'équation $y = tx$ admet un minimum en 0.
(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $C_\lambda$ la parabole d'équation $y = \lambda x^2$.
Pour quelles valeurs de $\lambda$ la restriction de $f$ à $C_\lambda$ admet-elle un minimum en 0? un maximum en 0?
(c) Le point $(0, 0)$ est-il un extremum de $f$?

---

---

**Exercice 7.1.** *(Travail personnel)* Trouver le point du plan $2x - y + 2z = 16$, le plus proche de l'origine.

**Exercice 7.2.** *(Travail personnel)*
(a) Déterminer les points critiques de la fonction de 2 variables: $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.
(b) Déterminer les points critiques de la fonction $f$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
(c) Quels sont les maxima et les minima de la fonction $f$ restreint au disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

**Exercice 7.3.** *(Travail personnel)*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}.$$

(a) Montrer que $f$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Donner le développement de Taylor de $f$ à l'ordre 2 à l'origine.
(c) Déterminer les extrema de $f$.

**Exercice 7.4.** *(Travail personnel)* On considère la fonction $f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion:* on pourra utiliser les symétries de la fonction f(x,y) pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x, y) \to 0$ quand $x^2 + y^2 \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

## 8. Différentielles totales. Opérateurs gradient, divergence et rotationnel.

**Exercice 8.1.** Déterminer si les formes différentielles suivantes sont des formes différentielles exactes (ou totales)?

a) $2(x + y)dx + 2(x - 3)dy$, b) $\cos(x)dx + \sin(y)dy$, c) $(x + y)dx + (x - y)dy$

**Exercice 8.2.** Soit $f$ une fonction et $\vec{V}$ un champ de vecteurs, tous deux de classe $C^2$ dans un ouvert de l'espace. Le champs vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\text{rot}} V)$ est égale à :

$$\textbf{a)}\, \overrightarrow{\nabla} f \wedge \vec{V}, \quad \textbf{b)}\, \overrightarrow{\text{rot}}\ (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}), \quad \text{ou } \textbf{c)}\, \vec{0}.$$

**Exercice 8.3.** Pour le champ de vecteurs $\vec{B} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + 3yz^2\vec{k}$, trouver $\text{div}\vec{B}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$.

**Exercice 8.4.** Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, si oui déterminer leurs potentiels scalaires.
a) $\vec{V}(x,y) = (y,x)$, b) $\vec{V}(x,y) = (3x^2y+2x+y^3, x^3+3xy^2-2y)$, c) $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$.

**Exercice 8.5.** A tout point $M$ de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}(M) = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\parallel \overrightarrow{OM} \parallel}$. En posant $\rho = \parallel \overrightarrow{OM} \parallel$, montrer que la divergence de ce champ de vecteurs est égale à $\dfrac{1}{\rho}$.

**Exercice 8.6.** Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est donné par $\vec{V}(\vec{x}) = f(r)\vec{x}$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et $f$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradients et calculer son potentiel.

**Exercice 8.7.** Soit le champ de vecteurs défini dans $\mathbb{R}^3$ par:
$\vec{V}(x,y,z) = (yz + x^2y^3, xz + x^3y^2, f(x,y))$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver les applications $f$ pour que $\vec{V}$ soit un champ de gradients. Calculer alors les potentiels de $\vec{V}$.

**Exercice 8.8.** Montrer que l'expression

$$\omega = \frac{xdx}{x^2+y^2} + y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$$

est la différentielle totale d'une fonction $f$ que l'on déterminera.

---

---

**Exercice 8.1.** *(Travail personnel)* Déterminer si les formes différentielles suivantes sont des formes différentielles totales?

a) $(\sin y - y\cos x)dx + (x\cos y - \sin x)dy$, b) $(x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$.

**Exercice 8.2.** *(Travail personnel)* Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, si oui déterminer leurs potentiels scalaires:
1) $\vec{V}(x,y) = (y+\dfrac{1}{x}, x+\dfrac{1}{y})$ 2) $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y)$ 3) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy)$

**Exercice 8.3.** *(Travail personnel)* On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Montrer en passant en coordonnées polaires que $\omega$ est est la forme différentielle totale d'une fonction $U(\rho,\theta)$ et donner l'équation des courbes $U = Cte$.

# Intégration

## 9. Intégrales curvilignes

**Exercice 9.1.** Calculer la longueur de chacun des arcs de courbes suivant:

1) $x = y^2$ avec $0 \leq y \leq 1$;

2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ avec $0 \leq t \leq t_0$;

3) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ avec $a > 0$ et $0 \leq \rho \leq a$ (cardioïde):

**Exercice 9.2.** Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$$

où $C$ est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$, $t$ variant de 0 à $2\pi$.

**Exercice 9.3.** Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C xy\,dx + (x + y)\,dy$$

où $C$ est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$, $t$ variant de 0 à $2\pi$.

**Exercice 9.4.** Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz}{x^2 + y^2}$$

lorsque:

1) $C$ est le segment de droite allant de $A = (1, 1, 1)$ à $B = (2, 2, 2)$.

2) $C$ est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, $t$ variant de 0 à $2\pi$.

**Exercice 9.5.** Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy$$

lorsque:

1) $\Gamma$ est le segment de droite allant de $A = (1, 0)$ à $B = (0, 1)$.

2) $\Gamma$ est l'arc de cercle de centre $(0, 0)$, de rayon 1 et d'extrémités $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$.

**Exercice 9.6.** Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est nulle lorsque $\Gamma$ est un arc de simple fermé.

Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ limité en $A$ par la droite d'équation $y = x$ et en $B$ par l'axe des $x \geq 0$, $\Gamma_2$ est le segment de droite allant de $B$ à $O$ et $\Gamma_3$ est le segment de droite allant de $O$ à $A$.

Calculer une primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2\,dx + x^2y\,dy$ pour $i = 1, 2, 3$.

**Exercice 9.7.** Déterminer une fonction $u(x, y)$ telle que: $du = \dfrac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2}$

**Exercice 9.8.** Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ avec:

$$P(x,y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2+y^2)}{x^2 y} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x,y); x > 0,\ y > 0\}$, $\omega$ est une forme différentielle totale.

2) Déterminer $u$ dans $D$, telle que $du = \omega$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$ lorsque $\Gamma$ est l'arc défini par: $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Exercice 9.9.**

1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0; y \geq 0$ parcourue une fois dans le sens direct.
2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

**Exercice 9.10.** Calculer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y+z)\overrightarrow{i} + (x+z)\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine $O$ au point $C = (1,1,1)$,

1. le long de la droite $(OC)$.
2. le long de la courbe $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x+yz)\overrightarrow{i} + (y+xz)\overrightarrow{j} + (z+xy)\overrightarrow{k}$.

## 10. Intégrales doubles

**Exercice 10.1.** Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double:

$$\int_0^4 \left(\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy\right) dx$$

**Exercice 10.2.** Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double:

$$\int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\right) dx$$

**Exercice 10.3.** Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double:

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx$$

**Exercice 10.4.** Déterminer l'aire de la partie $D$ du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

**Exercice 10.5.** **a**) Calculer $\displaystyle\iint_D (x-y)\ dxdy$ où $D$ est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

**Exercice 10.6.** Calculer $\displaystyle\iint_D xy\; dxdy$ où $D$ est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

**Exercice 10.7.** Soit $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1] \times [0,1]$ deux triangles égaux $T_1$ et $T_2$. Montrer qu'en général,

$$\iint_{T_1} f(x,y)\; dxdy \neq \iint_{T_2} f(x,y)\; dxdy.$$

Puis, en utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que $\displaystyle\iint_{T_1} xy\; dxdy = \iint_{T_2} xy\; dxdy.$

**Exercice 10.8.** Soit $D$ le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y)| \quad 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$I = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\; dxdy.$$

**Exercice 10.9.** Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

**Exercice 10.10.** Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.

**Exercice 10.11.** Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y}\, dxdy$. avec $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ et $a > 0$. Calculer $I$ à l'aide du changement de variables $\begin{cases} x = tu \\ y = (1-t)u \end{cases}$

**Exercice 10.12.** *Aire en coordonnées polaires.* Soit $D$ le domaine limité par $r = p(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$; et le segment $\begin{cases} \theta = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{cases}$

Montrer que l'aire de $D$ est égale à $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\theta)\, d\theta$.
Trouver l'aire **a**) de la cardioïde : $r = a(1 + cos(\theta))$., **b**) de l'escargot : $r = a\theta$, $(a > 0)$.
Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des $x, y$.
Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des $r, \phi$.

**Exercice 10.13.** Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens direct.
Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\int\int_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dxdy$

**Exercice 10.14.** Calculer l'intégrale curviligne $I$ le long de la courbe fermée $\gamma$ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, orientée dans le sens direct avec

$$I = \int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

**Exercice 10.15.** Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, définie comme la limite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}dx$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons le quart de disque : $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et le carré : $C_n = \{0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$.

1. Calculer les intégrales $J_n = \int\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ et $J_{2n} = \int\int_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.
2. Considérons l'intégrale $K_n = \int\int_{C_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$. Montrer que $K_n = I_n^2$.
3. D'après un dessin de $D_n,\ C_n$ et $D_{2n}$ expliquer pourquoi $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.
4. Quelle est la limite $n \to +\infty$ de $J_n$ et de $J_{2n}$ ? et de $K_n$ ? Trouver $I$.

## 11. Intégrales triples

**Exercice 11.1.** Calculer l'intégrale triple:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$$

**Exercice 11.2.** Soit $D$ le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + z \leq 1\}$. Représenter graphiquement $D$. Calculer ensuite de deux manières différentes l'intégrale triple

$$\iiint_D x\, dx\, dy\, dz$$

(a) en intégrant "par piles", (b) en intégrant "par couches".

**Exercice 11.3.** Représenter graphiquement et calculer le volume limité par les surfaces de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2x^2 + y^2$ et $z = 4 - y^2$.

**Exercice 11.4.** Calculer l'intégrale triple:

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

où $V$ est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon $R$.

**Exercice 11.5.** Calculer l'intégrale triple:

$$\iiint_V (x+y+z)^2\, dx\, dy\, dz$$

où $V$ est la partie commune au paraboloïde $\{2az \geq x^2 + y^2\}$ et à la boule $\{3a^2 \geq x^2 + y^2 + z^2\}$.

**Exercice 11.6.** Calculer l'intégrale triple:

$$\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

où $V$ est le domaine limité par le demi l'ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et par le plan d'équation $z = 0$.

**Exercice 11.7.** Calculer l'intégrale triple:

$$\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

où $V$ est le domaine limité par le cône d'équation $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ et le plan $z = h$.

**Exercice 11.8.** Calculer l'intégrale triple:

$$\iiint_V dx\, dy\, dz$$

où $V$ est le domaine limité par la surface d'équations $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ et $x^2+y^2 = z^2$ et contenant le point $(0,0,R)$.

---

---

**Exercice 11.1.** *(Travail personnel)* Calculer la longueur de chacun des arcs de courbes suivant:

1) $y = 1 - \ln(\cos x)$ avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$;

2) $y = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a})$ avec $a > 0$ et $0 \leq x \leq x_0$, (chaînette);

3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ avec $a > 0$, (astroïde);

4) $\rho = ae^{k\theta}$ avec $a > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{R}$ (spirale logarithmique);

5) $(y-z)^2 = 3a(y+a)$ et $9x^2 + 8y^2 = 8z^2$ avec $0 \leq x \leq x_0$.

**Exercice 11.2.** *(Travail personnel)* Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma y^2\, dx - \frac{1}{2-x^2}\, dy$$

lorsque:

1) $\Gamma$ est l'arc de cercle de centre $(0,0)$, de rayon 1 et d'extrémités $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.

2) $\Gamma$ est contour $ACB$ réunion des deux segments: $\{(x,y); x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$ et $\{(x,y); y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$

**Exercice 11.3.** *(Travail personnel)* Calculer les intégrales suivantes par deux méthodes (i) en utilisant l'ordre d'intégration indiqué (ii) en inversant cet ordre

$$(a) \quad \int_1^2 \int_0^y ydxdy \qquad (b) \quad \int_0^1 \int_0^{x^2} dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} ydydx$$

**Exercice 11.4.** *(Travail personnel)* Considérons la forme différentielle suivante:

$$\omega(x,y) = (2xy + y^2 - 1)\, dx + (2xy + x^2)\, dy,$$

et soit $\vec{V}$ le champ vectoriel qui correspond à $\omega$.

1. Exprimer l'intégrale curviligne correspondant à la circulation du champ $\vec{V}$ le long du segment de droite reliant les points $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$ (orienté de $A$ vers $B$), puis calculer cette intégrale.

2. Déterminer si $\omega$ est exacte. Le champ $\vec{V}$ est-il un champ de gradients ? Si c'est le cas, déterminer $f$ telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$.

3. Calculer le travail du champ $\vec{V}$ le long de la courbe $\Gamma$ de paramétrisation $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^4 t\ ; \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

**Exercice 11.5.** *(Travail personnel)* Trouver le centre de gravité de la surface plane délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

**Exercice 11.6.** *(Travail personnel)* Soit l'ensemble $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.

1. Déterminer l'aire de $D$ en utilisant le changement de variables : $\left\{\begin{array}{l} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{array}\right.$.

2. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D 12\cos(9x^2 + 4y^2)\ dxdy.$$

**Exercice 11.7.** *(Travail personnel)*

1. Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. On considère le domaine limité par l'astroïde $\gamma(t) = (cos^3(t), sin^3(t))$. Calculer son aire.

3. La cardioïde est la courbe définie en coordonnées polaires par $r(\theta) = 1 + cos(\theta)$. Calculer son aire.

**Exercice 11.8.** *(Travail personnel)* Calculer l'intégrale triple:

$$\iiint_V \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}\, dx\, dy\, dz$$

où $V$ est limité par les plans de coordonnées et par le plan d'équation $x + y + z = 1$.

**Exercice 11.9.** Calculer le volume du corps limité par le plan $xOy$, le cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

# 12. Intégrales de Surface

## 1) Surfaces paramétrées

**Exercice 12.1.** Représenter graphiquement les surfaces de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$S_1 \;:\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases} , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad S_2 \;:\begin{cases} x = u^2 \\ y = v \\ z = u \end{cases} , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 12.2.**

1. Donner une paramétrisation du cylindre infini, d'axe $Oy$ et rayon $R > 0$.
2. Paramétrer la sphère centrée à l'origine et de rayon $R > 0$. Donner l'expression du verseur normal extérieur en tout point (a) en coordonnées cartésiennes, (b) en coordonnées sphériques (longitude et latitude).

**Exercice 12.3.** On considère une lamelle sphérique de rayon $R$ et densité surfacique $d_0$ (constante).

1. Calculer la masse da la lamelle
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
3. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

**Exercice 12.4.** On considère une balle de rayon $R$ et densité volumique $d_0$ (constante).

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

**Exercice 12.5.** Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\Sigma$ la surface de $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma = \left\{(x, y, f(x,y)) \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrer que, pour tout point $(x,y)$, le vecteur unitaire normal à $\Sigma$ au point $(x, y, f(x,y))$ est $\vec{n}(x,y) = \frac{(-f'_x, -f'_y, 1)}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}}$.

**Exercice 12.6.**

1. Calculer l'intégrale sur la surface

   $$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = x^3, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi\}$$

   de la fonction définie par $f(x,y) = 3x^3 \sin y$.
2. Calculer l'intégrale sur la surface définie par

   $$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 3\}$$

   de la fonction définie par $f(x,y) = x + 1$.

**Exercice 12.7.** Trouver l'équation du plan tangent en $A \equiv (1,0,1)$ à la surface $\Sigma$ paramétrée par
$S\ :\begin{cases} x = u - v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}, \qquad u \geq 0, \quad v \geq 0.$
Déterminer ensuite une équation cartésienne de cette surface.

**Exercice 12.8.** Calculer le flux à travers la surface limité par l'ellipse d'équations $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$

(avec $a > 0$ et $b > 0$)

1. du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : $\vec{V}(x,y,z) = (1,2,3)$
2. du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : $\vec{W}(x,y,z) = (z,y,x^2)$.

## 2) Théorèmes de Stokes et Ostrogradski

**Exercice 12.9.** Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,-z)$ à travers la demi-sphère $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$

**Exercice 12.10.** Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ (après avoir préciser le sens du parcours) d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

1. directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

**Exercice 12.11.** On considère l'intégrale $\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, où $C$ est le cercle d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes. Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

**Exercice 12.12.** Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ : 1) Directement 2) A l'aide le la formule d'Ostrogradski.

**Exercice 12.13.** On considère la boîte cylindrique $S$ composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$ et de deux disques de rayon $R$ aux niveau $z = 0$ et $z = h$ ($R > 0$ et $h > 0$). Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

1. Déterminer si $\vec{V}$ est un champ de gradient.
2. Déterminer si $\vec{V}$ est le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.
3. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers $S$ directement.
4. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers $S$ en utilisant la formule d'Ostrogradski.

**Exercice 12.14.** On considère la boite cylindrique $S$ composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$ ($a > 0$ et $b > 0$) et des deux disques de rayon $a$ aux niveaux $z = 0$ et $z = b$.
On définit le champ de vecteurs $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\vec{v}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

1. Déterminer si $\vec{v}$ est un champ de gradients.
2. Calculer directement le flux de $\vec{v}$ à travers $S$.
3. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers $S$ en utilisant la formule d'Ostrogradski.