### UNIVERSITÉ INTERNATIONALE DE CASABLANCA

Nous innovans pour votre réussite!

# École d'ingénierie

## Examen final en Algèbre linéaire

Durée (2h:00 mn)

CPI2

Prof.: A.Ramadane

03-06-2016



# NIVERSITÉ INTERNATIONALE DE CASABLANCA

#### Exercice 1: (5 points)

Soit B= $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$  une base de V<sup>3</sup> telle que

Soit  $\overrightarrow{b_1} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\overrightarrow{b_2} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$  et  $\overrightarrow{b_3} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  des vecteurs de  $\vee^3$ 

- á) Trouver la base orthonormale B", obtenue à partir de B par le procédé de Gram-
- b) Donner la matrice de transition de B à B", B", B", PB
- c) Donner la matrice de transition de C à B'',  $_{B''}P_{C}$ . Avec  $C=(\vec{t},\vec{j},\vec{k})$
- d) Soit  $\vec{U} = \vec{t} + \vec{j} 4\vec{k}$ , Donner  $[\vec{U}]_{B}$ .
- a) Soit  $W = [\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}]$ . Exprimer  $\overrightarrow{U}$  sous la forme  $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2}$  où  $\overrightarrow{W_1} \in \mathbb{W}$  et  $\overrightarrow{W_2} \in \mathbb{W}$

#### Exercice 2: (5 points)

Soit  $V^{3}$  et sa base usuelle C =  $(\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$  , soit une application linéaire

$$T: V^3 \longrightarrow V^3$$
 telle que

$$T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x+y+3z)\vec{i} + (x+2y+z)\vec{j} + (x+y+3z)\vec{k}$$

- a) Donner [T]<sub>C</sub> la matrice représentative de T dans la base de C
- b) Quelle est la dimension de Ker(T)
- c) Donner une base de Im(T) et le rang de T.
- d) Montrer que le vecteur  $-8\vec{i} + 16\vec{j} 8\vec{k}$  appartient à l'image de T.

Résoudre le système 
$$\begin{cases} x+y+3z=-8\\ x+2y+z=16\\ x+y+3z=-8 \end{cases}$$



| www.uic.ac.ma |

#### Exercice 3: (5 points)

Soit la matrice 
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
, a est un réel

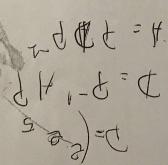
- a) Discuter, selon les valeurs a, du rang de A.
- b) Lorsque a =-2, le vecteur [1 0 -1]<sup>t</sup> est un vecteur propre de A. Diagonaliser la matrice A, donne la matrice orthogonale P qui diagonalise A et expliquer le lien entre A et la matrice D.

#### Exercice 4: (5 points)

a) Calculer 
$$A^{1000}$$
 et  $e^A$ ; avec  $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ ; avec  $0! = 1$  et  $A^0 = Id$ 

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
 (Indication: Diagonaliser la matrice, A = P<sup>t</sup> D P)

b) Donner des objectifs de la diagonalisation





# Université Internationale

LAUREATE SOMED EDUCATION HOLDING • Zénith Millénium, Bâtiment 6, Lot Attawfiq, Sidi Mâarouf Casablanca • Tél : 05 29 02 37 00 • Fax : 05 22 78 61 04 Capital social: 111, 830,000.00 dhs • Taxe professionnelle 37983111 • N°RC 214245 • N°IF 40192279

| www.uic.ac.ma |