Mathématiques appliquées à la gestion II

Yassir El-Azizi *Ing*, *Ph D*

1.3 Méthode d'INVERSION DE MATRICE

NOTATIONS MATRICIELLE

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

est équivalent à

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \binom{x}{y}$ du système est donnée par

$$X = A^{-1}Y.$$

1.3 Méthode d'INVERSION DE MATRICE

EXEMPLE

Résolvons le système $\begin{cases} x+y = 1 \\ x+t^2y = t \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1$.

Premier cas. $t \neq +1$ et $t \neq -1$. Alors $t^2 - 1 \neq 0$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et la solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $t \neq \pm 1$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right)\right\}$.

Deuxième cas. $t = +1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 1 \end{cases}$ et les deux équations sont identiques. Il y a une infinité de solutions : $\mathcal{S} = \{(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Troisième cas. $t = -1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = -1 \end{cases}$, les deux équations sont clairement incompatibles et donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

2.1 système linéaire de dim. 3

SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS A TROIS INCONNUES

Le principe de résolution d'un système de trois équations à trois inconnues consiste à former un système équivalent de trois équations dont deux ne contiennent que deux inconnues.

Exemple 1.

Résoudre :

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x - 4y + 6z = 22. \end{cases}$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE SUBSTITUTION

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x - 4y + 6z = 22. \end{cases}$$

De la première équation, tirons l'expression de y en fonction de x et de z :

$$2x - 3z - 1 = y \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 3z - 1,$$

et remplaçons y par cette expression dans les deux autres équations. On obtient :

$$\begin{cases} 3x + 2(2x - 3z - 1) - 2z = -4, \\ -x - 4(2x - 3z - 1) + 6z = 22\,; \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} 3x + 4x - 6z - 2 - 2z = -4, \\ -x - 8x + 12z + 4 + 6z = 22\,; \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 7x - 8z = -4 + 2 = -2\,, \\ -9x + 18z = 22 - 4 = 18. \end{cases}$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE SUBSTITUTION

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x - 4y + 6z = 22. \end{cases}$$

Cette dernière équation peut être simplifiée en divisant ses deux membres par 9
On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 7x - 8z = -2 \\ -x + 2z = 2. \end{cases}$$

Entre les deux dernières équations, éliminons z par addition :

$$\begin{array}{c|l} 1 & 7x - 8z = -2, \\ 4 & -x + 2z = 2 \end{array} \qquad \begin{cases} \;\;7x - 8z = -2 \\ -4x + 8z = \;\;8 \end{cases}$$
$$\overline{3x \qquad = \;\;6}$$

On en tire : $x = 2$.
L'équation : $-x + 2z = 2$ donne alors :

$$2z = 2 + x = 2 + 2 = 4, \qquad \text{soit :} \quad z = 2.$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE SUBSTITUTION

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x - 4y + 6z = 22. \end{cases}$$

L'équation :

$$2x - y - 3z = 1 \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 3z - 1,$$

donne enfin :

$$y = 4 - 6 - 1 = -3.$$

Ne pas oublier de remplacer x, y, z, par : $2, -3, 2$ dans le système (I), pour vérifier.

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE COMBINAISON LINÉAIRE

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x - 4y + 6z = 22. \end{cases}$$

Eliminons z par addition entre les deux dernières équations

$$\begin{array}{c|l} 3 & 3x + 2y - 2z = -4, \\ 1 & -x - 4y + 6z = 22 \end{array} \quad \begin{cases} 9x + 6y - 6z = -12 \\ -x - 4y + 6z = 22 \end{cases}$$
$$\overline{8x + 2y \qquad = \quad 10}$$

Eliminons z par addition entre la première et la dernière équation.

$$\begin{array}{c|l} 2 & 2x - y - 3z = 1, \\ 1 & -x - 4y + 6z = 22 \end{array} \quad \begin{cases} 4x - 2y - 6z = 2 \\ -x - 4y + 6z = 22 \end{cases}$$
$$\overline{3x - 6y \qquad = \quad 24}$$

ou : $\quad x - 2y \qquad = \quad 8$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE COMBINAISON LINÉAIRE

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x - 4y + 6z = 22. \end{cases}$$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} 8x + 2y = 10 \\ +x - 2y = 8. \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, ces deux équations, on obtient : $9x = 18$ ou $x = 2$.

L'équation : $x - 2y = 8$ donne alors :

$$2 - 2y = 8 \qquad \text{ou} \qquad y = -3.$$

Enfin une des équations du système (I), la première par exemple, donne la valeur de z :

$$4 + 3 - 3z = 1, \qquad z = 2.$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\quad \begin{cases} ax + by + cz = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (1') \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (1'') \end{cases}$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\begin{cases} ax+by+cz=d & (1)\\ a'x+b'y+c'z=d' & (1')\\ a''x+b''y+c''z=d'' & (1'')\end{cases}$$

Nous allons démontrer les formules de Cramer par analyse et synthèse. Supposons donc d'abord que le système (S) a une solution (x,y,z). On effectue les opérations $c'(1)-c(1')$, $c''(1)-c(1'')$, $c''(1')-c'(1'')$ qui font disparaître z. On obtient les trois équations :

$$\begin{cases} (ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c & (2)\\ (ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=dc''-d''c & (2')\\ (a'c''-a''c')x+(b'c''-b''c')y=d'c''-d''c' & (2'')\end{cases}$$

Si nous multiplions l'équation (2) par $-b''$, l'équation (2') par b', l'équation (2'') par $-b$, et additionnons le tout, y disparaît à son tour et nous obtenons

$$(a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc'')x=d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-d'bc''.$$

Ainsi, à condition que l'on ait $a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc''\neq 0$, il vient

$$x=\frac{d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-d'bc''}{a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc''}.$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\quad \begin{cases} ax+by+cz=d & (1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (1') \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (1'') \end{cases}$$

Nous allons démontrer les formules de Cramer par analyse et synthèse. Supposons donc d'abord que le système (S) a une solution (x,y,z). On effectue les opérations $c'(1)-c(1')$, $c''(1)-c(1'')$, $c''(1')-c'(1'')$ qui font disparaître z. On obtient les trois équations :

$$\begin{cases} (ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c & (2) \\ (ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=dc''-d''c & (2') \\ (a'c''-a''c')x+(b'c''-b''c')y=d'c''-d''c' & (2'') \end{cases}$$

Si nous multiplions l'équation (2) par $-b''$, l'équation (2') par b', l'équation (2'') par $-b$, et additionnons le tout, y disparaît à son tour et nous obtenons

$$(a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc'')x=d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-d'bc''.$$

Ainsi, à condition que l'on ait $a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc''\neq 0$, il vient

$$x=\frac{d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-d'bc''}{a'b''c-ab''c'+ab'c''-a''b'c+a''bc'-a'bc''}.$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\begin{cases} ax+by+cz=d & (1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (1') \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (1'') \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\ ,\ \Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}\ ,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

On obtiendrait de même

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\ ,\ \Delta=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}\ ,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}\ ,\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} ax+by+cz=d & (1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (1') \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (1'') \end{array}\right.$$

Réciproquement, soit Δ défini par (1). On suppose $\Delta \neq 0$. Soient x, y et z définis par (1) et (2). On a

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \frac{a}{\Delta}(d'b''c-db''c'+db'c''-d''b'c+d''bc'-d'bc'') \\ &+\frac{b}{\Delta}(ad'c''-ac'd''-a'dc''+a'cd''+a''c'd-a''cd') \\ &+\frac{c}{\Delta}(ab'd''-ab''d'-a'bd''+a'b''d+a''bd'-a''b'd). \end{aligned}$$

Si on développe le tout, on observe que tous les termes contenant d' et d'' disparaissent. Il reste

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \frac{1}{\Delta}(dab'c''-dab''c'-da'bc''+da''bc'+da'b''c-da''b'c) \\ &= \frac{d}{\Delta}(ab'c''-ab''c'-a'bc''+a'b''c+a''bc'-a''b'c)=\frac{d}{\Delta}\times\Delta=d. \end{aligned}$$

Un calcul analogue montrerait que $a'x+b'y+c'z=d'$ et $a''x+b''y+c''z=d''$. Par conséquent x, y et z donnés par (1) et (2) sont bien solutions du système (S). Le théorème 4.7 de TLM1 est donc démontré.

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Considérons un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} ax+by+cz=d & (1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (1') \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (1'') \end{array}\right.$$

Réciproquement, soit Δ défini par (1). On suppose $\Delta \neq 0$. Soient x, y et z définis par (1) et (2). On a

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \frac{a}{\Delta}\left(d'b''c - db''c' + db'c'' - d''b'c + d''bc' - d'bc''\right) \\ &+\frac{b}{\Delta}\left(ad'c'' - ac'd'' - a'dc'' + a'cd'' + a''c'd - a''cd'\right) \\ &+\frac{c}{\Delta}\left(ab'd'' - ab''d' - a'bd'' + a'b''d + a''bd' - a''b'd\right). \end{aligned}$$

Si on développe le tout, on observe que tous les termes contenant d' et d'' disparaissent. Il reste

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \frac{1}{\Delta}\left(dab'c'' - dab''c' - da'bc'' + da''bc' + da'b''c - da''b'c\right) \\ &= \frac{d}{\Delta}\left(ab'c'' - ab''c' - a'bc'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c\right) = \frac{d}{\Delta} \times \Delta = d. \end{aligned}$$

Un calcul analogue montrerait que $a'x+b'y+c'z=d'$ et $a''x+b''y+c''z=d''$. Par conséquent x, y et z donnés par (1) et (2) sont bien solutions du système (S). Le théorème 4.7 de TLM1 est donc démontré.

2.1 système linéaire de dim. 3

MÉTHODE DE CRAMER

Exemple

Résoudre le système suivant par la méthode de Cramer

$$\begin{cases} 3x-7y-2z=38 \\ 2x+3y+5z=39 \\ 4x-3y+2z=58 \end{cases}$$

2.1 système linéaire de dim. 3

$$\begin{cases} 3x-7y-2z= 38 \\ 2x+3y+5z= 39 \\ 4x-3y+2z= 58 \end{cases}$$

2.1 système linéaire de dim. 3

$$\begin{cases} 3x-7y-2z= 38 \\ 2x+3y+5z= 39 \\ 4x-3y+2z= 58 \end{cases}$$

Matrice des signatures

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Pour savoir si la méthode de Cramer est applicable, il faut calculer le déterminant de la matrice des coefficients.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(6+15)+7(4-20)-2(-6-12)$$

$$= 63-112+36=-13$$

Puisque le déterminant est non nul, le système admet une solution unique et la méthode de Cramer est applicable.

2.1 système linéaire de dim. 3

$$\begin{cases} 3x-7y-2z= 38 \\ 2x+3y+5z= 39 \\ 4x-3y+2z= 58 \end{cases}$$

Matrice des signatures

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

La valeur de chacune des variables est un rapport de déterminants. Le déterminant du dénominateur est toujours celui de la matrice des coefficients. Le déterminant du numérateur pour une variable particulière est obtenu en substituant la colonne des constantes à la colonne des coefficients de cette variable.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 38 & -7 & -2 \\ 39 & 3 & 5 \\ 58 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{-13}, y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 38 & -2 \\ 2 & 39 & 5 \\ 4 & 58 & 2 \end{vmatrix}}{-13}, z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 38 \\ 2 & 3 & 39 \\ 4 & -3 & 58 \end{vmatrix}}{-13}$$

2.1 système linéaire de dim. 3

$$\begin{cases} 3x-7y-2z= 38 \\ 2x+3y+5z= 39 \\ 4x-3y+2z= 58 \end{cases}$$

Matrice des signatures

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant associé à la variable x.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 38 & -7 & -2 \\ 39 & 3 & 5 \\ 58 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 38\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 39 & 5 \\ 58 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 39 & 3 \\ 58 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 38(6+14)+7(78-290)-2(-117-174)$$

$$= 798-1\,484+582=-104$$

2.1 système linéaire de dim. 3

$$\begin{cases} 3x-7y-2z=38 \\ 2x+3y+5z=39 \\ 4x-3y+2z=58 \end{cases}$$

Matrice des signatures

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant associé à la variable y.

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 3 & 38 & -2 \\ 2 & 39 & 5 \\ 4 & 58 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 39 & 5 \\ 58 & 2 \end{vmatrix} - 38\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 39 \\ 4 & 58 \end{vmatrix}$$

$$= 3(78-290) - 38(4-20) - 2(116-156)$$

$$= -636 + 608 + 80 = 52$$

2.1 système linéaire de dim. 3

$$\begin{cases} 3x-7y-2z= 38 \\ 2x+3y+5z= 39 \\ 4x-3y+2z= 58 \end{cases}$$

Matrice des signatures

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant associé à la variable z.

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 38 \\ 2 & 3 & 39 \\ 4 & -3 & 58 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & 39 \\ -3 & 58 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 39 \\ 4 & 58 \end{vmatrix} + 38\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(174+117)+7(116-156)+38(-6-12)$$

$$= 773-280-684=-91$$

On substitue les valeurs calculées dans les rapports de déterminants.

$$x=\frac{-104}{-13}=8, y=\frac{52}{-13}=-4, z=\frac{-91}{-13}=7$$

La solution du système d'équations est le triplet (8 ; –4 ; 7).