Université Internationale de Casablanca

CLASSES PRÉPARATOIRES INTÉGRÉES 2ème année

S3 - ALG3. Noyau image d'applications linéaires

Exercice 1. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$. *On appelle* $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\beta' = (f_1, f_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$

1. *Montrer que* f *est une application linéaire,*
2. *Donner une base et la dimension de* $ker(f)$ *et une base et la dimension de* $Im(f)$.

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$.

1. *Montrer que* f *est une application linéaire,*
2. *Donner une base de* $ker(f)$,
3. *En déduire* $dim(Im(f))$,
4. *Donner une base de* $Im(f))$.

Exercice 3. *On considère l'application* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$.

1. *Montrer que* h *est une application linéaire.*
2. *Montrer que* h *est ni injective ni surjective.*
3. *Donner une base de son noyau et une base de son image.*

Exercice 4. *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3).$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$

1. *Calculer* $f(e_1)$, $f(e_2)$ *et* $f(e_3)$,
2. *Déterminer les coordonnées de* $f(e_1)$, $f(e_2)$ *et* $f(e_3)$ *dans la base canonique,*
3. *Calculer une base de* $ker(f)$ *et une base de* $Im(f)$.

Exercice 5. *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z).$$

1. *Montrer que* f *est une application linéaire,*
2. *Donner une base de* $ker(f)$, *en déduire* $dim(Im(f))$,
3. *Donner une base de* $Im(f)$.

Exercice 6. *Soit* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
Soit f *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie pour tout* $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. *Montrer qu'il existe un vecteur* $a \in \mathbb{R}^3$, *non nul, tel que* $ker(f) = Vect(a)$, *déterminer un vecteur qui convient,*
2. *Soit* $b = e_1 + e_2$ *et* $c = e_2 - e_3$
   (a) *Calculer* $f(b)$ *et* $f(c)$,
   (b) *En déduire que* $\{b, c\}$ *est une base de* $Im(f)$,
   (c) *Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant* $Im(f)$.

(d) *A-t-on* $ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 7. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :*

$$\begin{cases} f(e_1) = -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) = 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ déterminer $fof(x)$,*
2. *En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.*

Exercice 8. *Exercice 13. Soit l'application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :*

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. *Montrer que f est une application linéaire,*
2. *Déterminer une base de $ker(f)$,*
3. *Déterminer une base de $Im(f)$.*

Exercice 9. *Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) = e_2 - 3e_3 \\ f(e_3) = -2e_2 + 2e_3 \end{cases} \tag{2}$$

1. *Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. Déterminer l'image par f du vecteur x.*
2. *Soient*
$$E = \{x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = 2x\} \quad et \quad F = \{x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = -x\}$$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$,
3. *Déterminer une base de E et une base de F.*
4. *Y a-t-il* $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 10. *Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\begin{cases} f(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \\ f(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 + -e_2 + 2e_3) \\ f(e_3) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3) \end{cases} \tag{3}$$

Soient

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = -x\} \quad et \quad F = \{x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = x\}$$

1. *Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$*
2. *Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à F.*
3. *Que peut-on en déduire sur les dimensions de E et de F ?*
4. *Déterminer $E \cap F$*
5. *A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?*
6. *Calculer $f^2 = fof$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}*