Probabilités

UNIVERSITÉ INTERNATIONALE DE CASABLANCA

U.I.C

Chapitres:

1. *Dénombrements*
2. *Espaces Probabilisés.*
3. *Indépendance et Conditionnement.*
4. *Variables Aléatoires.*
5. *Lois discrétes Classiques.*
6. *Variables Aléatoires Continues.*

Chapitre 1: Dénombrements

- ***Arrangement avec répétition (avec remise)***
- ***Arrangement sans répétition (sans remise)***
- ***Combinaison sans répétition***

Arrangement avec répétition (avec remise)

Situation type:

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une, on relève son numéro puis on la repose **(avec remise)** dans l'urne.

On en tire ensuite une seconde, et on la repose **(avec remise)**. Ainsi de suite, un nombre p de fois. Au terme de ces tirages, on a donc une suite ordonnée de p entiers. Il existe n^p suites de tirages différentes.

Exemple:
Une urne contenant 4 boules , il 4^3 suites de tirages avec repetition avec remise de 3 boules.
Combien de suites de tirages avec repetition avec remise de 3 boules dans une urne de 5 boules?

Arrangement sans répétition (sans remise)

Situation type:

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une, on relève son numéro mais on ne la repose pas dans l'urne **(sans remise)**. On en tire ensuite une seconde, et on la garde aussi de côté **(sans remise)**. Ainsi de suite, un nombre p de fois. Au terme de ces tirages, on a donc une suite ordonnée de p entiers. Il existe :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements sans répétition de p éléments parmi n.

Exemple:

Une urne contenant 4 boules , il y'a 12 arrangements sans répétition sans remise de 2 boules.

Combien d'arrangements de 3 boules existent ils sans remise dans une urne de 6 boules?

Combinaisons sans répétition

Situation type:

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une poignée de p boules d'un seul coup et on relève leur numéro. Notez bien qu'il ne s'agit plus liste ordonnée puisque nous n'avons plus d'ordre de tirage. Il existe

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons sans répétition de p éléments parmi n.

Exemple:
Une urne contenant 4 boules , il y'a 4 arrangements sans répétition de 1 boule.
Combien d'arrangements de 3 boules existent ils sans répétition dans une urne de 5 boules?

Propriétés remarquables

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

$$0! = 1$$

$$A_n^0 = 1$$

$$A_n^1 = n$$

$$A_n^n = n!$$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Chapitre 2: Espaces Probabilisés.

Phénomène aléatoire: Expérience dont le résultat ne peut être prévue de façon certaine.

Espace échantillon: Ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire (S).

Évènement: Sous espace de S.

Probabilité empirique: probabilité fondée sur l'expérience.

0: événement impossible; 1 : événement certain.

Evènements incompatibles : Lorsque deux événements ont une intersection vide, c'est qu'il ne peuvent pas être réalisés au cours d'une même expérience. On les appelle alors événements incompatibles.

Précisons quelques notations :

- $A \cup B$: A ou B se réalisent
- $A \cap B$: A et B se réalisent
- $\overline{A}$: contraire (ou complémentaire) de A

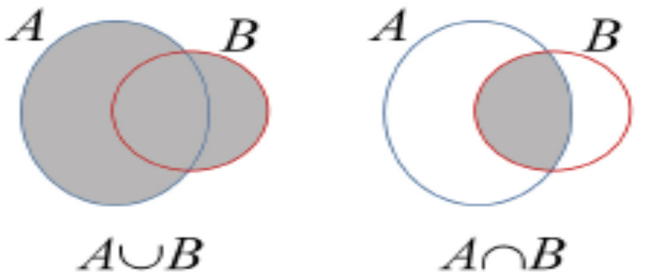

FIG. 1 – patatoïdes (diagrammes de Venn) pour l'union ou l'intersection

$$
\begin{aligned}
\overline{(\overline{A})} &= A \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Quelques règles…

P: A → R

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

pour chaque événement A appartenant à S

- $P(S) = 1$
- $P(\Phi) = 0$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
- Si A C B alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Pour toute suite dénombrable d 'évènements mutuellement exclusifs A_1, A_2, … c'est-à-dire incompatibles deux à deux :

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- E1 et E2 deux issues d'une expérience aléatoire; E1 et E2 incompatibles:

$$P(E_1 \text{ou } E_2) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

- E1 et E2 deux issues d'une expérience aléatoire; E1 et E2 compatibles:

$$P(E_1 \text{et } E_2) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \text{x } P(E_2)$$

- E1 et E2 deux issues d'une expérience aléatoire; E1 et E2 compatibles:

$$P(E_1 \text{ou } E_2) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Chapitre 3: Indépendance et Conditionnement.

Indépendence:

Deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur celle de l'autre. En terme mathématique, deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \bigcap B) = P(A).P(B)$$

Probabilités conditionnelles:

- Si A et B sont deux évènements, la probabilité conditionnelle de A étant donné B indique la probabilité que A se produise sachant que B s'est déjà produit, noté P(A | B) ou PB(A).

- Si la réalisation ou la non-réalisation de B n'affecte pas A (évènements indépendants) alors:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Sinon

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$