Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Ecole d'ingénierie
Première année CPI

Statique et mécanique du point

Professeur Basma Benhadou

Année universitaire : 2017-2018

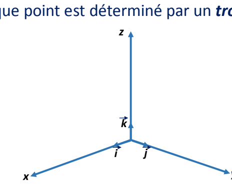
Partie III: Les repères

Systèmes de coordonnées

- Selon la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées :
    - Cartésiennes,
    - Cylindriques, ou
    - Sphériques.

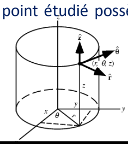
Systèmes de coordonnées cartésiennes

- Les coordonnées ***cartésiennes*** sont un système de coordonnées à ***trois dimensions***, dans lequel chaque point est déterminé par un ***trois distances***.



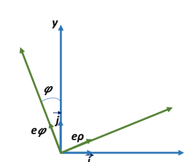
Systèmes de coordonnées cylindriques

- Les coordonnées ***cylindriques*** sont un système de coordonnées à ***trois dimensions***, dans lequel chaque point est déterminé par ***deux distances et un angle***.
- Ce système est utilisé lorsque la trajectoire du point étudié possède une symétrie axiale de révolution.



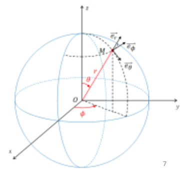
Systèmes de coordonnées cylindriques
Cas particulier: les coordonnées polaires

- Les coordonnées ***polaires*** sont un système de coordonnées à ***deux dimensions***, dans lequel chaque point du plan est déterminé par un ***angle*** et une ***distance***.



Systèmes de coordonnées sphériques

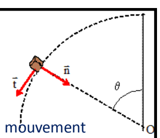
- Les coordonnées ***sphériques*** sont un système de coordonnées dans lequel chaque point est déterminé par une longueur et deux angles.



Systèmes de coordonnées

- ***Cartésienne:*** (x, y, z)
- ***Cylindrique:*** (ρ, φ, z)
- ***Polaire:*** (ρ, φ)
- ***Sphérique:*** (r, φ, Θ)

Repère Frenet



- Le repère de Frenet est utilisé lorsqu'un système est en mouvement selon une trajectoire circulaire.
- Ce repère a pour origine le centre de gravité du système et pour vecteurs unitaires :
  - $\vec{t}$, vecteur orienté selon la tangente à la trajectoire et orienté dans le même sens que le mouvement ;
  - $\vec{n}$, vecteur orienté selon la normale à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de celle-ci.

Partie III:
La Statique

Définitions

- **Statique:**

La statique est l'étude des forces appliquées sur un corps au repos.

- **Point matériel:**

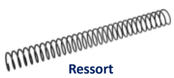
Un ***point matériel*** est un ***point*** de l'espace physique auquel on ***associe*** une grandeur scalaire positive , mesurable, appelée ***masse***.

Définitions

- **Mécanisme:**
- Un ***ensemble de pièces*** mécanique ***reliées*** entre elle par des liaisons en vue de réaliser une fonction bien déterminée.
- **Solide indéformable:**
- Une pièce mécanique peut être considérée comme système indéformables.

Définitions
Solide déformable

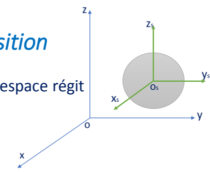
Certaines pièces mécaniques sont déformables.


Ressort


Goupille


Rondelle

Paramétrage de la position

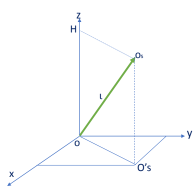


- On considère un solide indéformable S placé dans l'espace régit par le repère fixe $R_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Soit R_s (O_s, $\vec{x_s}$, $\vec{y_s}$, $\vec{z_s}$) un repère de centre o_s et lié à S.
- On suppose que o_s est le centre d'inertie de S.
- La détermination du vecteur position $\overrightarrow{OO_s}$ permet de la détermination de n'importe quel point de S par rapport à R_0.
- Déterminer la position de S ➔ Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OO_s}$

Position de S en coordonnées cartésiennes

- $\overrightarrow{OO_s} = OO_s\,\vec{x} + OO_s\,\vec{y} + OO_s\,\vec{z}$
- O'$_s$: la position de Os dans le plan (xoy)
- H : Projection de Os sur l'axe $\vec{oz}$
- $\overrightarrow{OO_s} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$

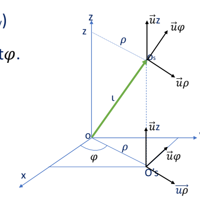
$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Position de S en coordonnées cylindriques

- Le rayon ρ du cylindre sur lequel il s'appuie.
- z sa cote par rapport au plan de référence (xOy)
- φ définit un demi plan perpendiculaire au plan (e_x,e_y)
- En plan (xOy) Os est repéré par les coordonnées ρ et φ.
- Le vecteur position : $\overrightarrow{OO_s} = \overrightarrow{OO'_s} + \overrightarrow{O'_sO_s} = \rho\vec{e\rho} + z\,\vec{ez}$

$\overrightarrow{OO_s} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



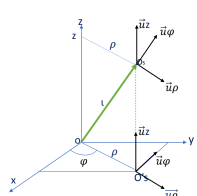
Position de S en coordonnées cylindriques

$\rho = \frac{x}{cos\varphi}$, $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $x = \rho cos\varphi$
- $y = \rho \sin\varphi$
- z = z

R_0 (O , $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)

$R_{cylindrique}$ (O , $\vec{u\rho}$, $\vec{u\varphi}$, $\vec{z}$)



Position de S en coordonnées sphérique

- OO_s = r est le rayon de la sphère.
- La projection OOs sur l'axe OZ donne la cote :

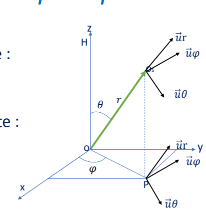
  Z = OH = r cosθ

  Et ρ = r sin θ
- La projection OOs sur l'axe XOY donne la cote :

  x = OP$cos\varphi$= r sinθ$cos\varphi$

  y = OPsinφ= r sinθsinφ

  z = r cosθ



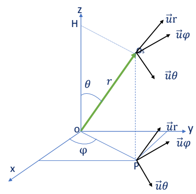
Position de S en coordonnées sphérique

Vecteur position: $\overrightarrow{OOs} = r\,\overrightarrow{ur}$

$R_0\,(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ φ

$R_{cylindrique}\,(O, \overrightarrow{u\rho}, \overrightarrow{u\varphi}, \vec{z})$ θ

$R_{sphérique}\,(O, \overrightarrow{ur}, \overrightarrow{u\theta}, \overrightarrow{u\varphi})$



Exercice

Partie IV: Cinématique

Cinématique

- la cinématique est ***l'étude des mouvements*** des corps en fonction ***du temps***, ***sans tenir compte des causes*** qui le produisent.
- L'étude du mouvement d'un corps est l'étude de ses ***positions successives*** par rapport à un ***repère de référence***.
- La notion ***de temps*** est aussi prise en considération.

Repère

Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un ***repère d'espace***. Cela consiste à choisir une origine O et une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le trièdre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère d'espace.

Référentiel

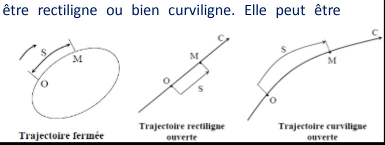
Un référentiel est un ***repère spatial*** muni d'un ***repère temporel*** (repère + horloge).

Un référentiel est un objet par rapport auquel on étudie le mouvement.

Référentiel = Repère d'espace + Repère de temps

Trajectoire

- Une trajectoire est la courbe formée par les positions successives occupées par un point mobile dans un repère.
- Une trajectoire peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.



Vecteur vitesse d'un point matériel

- La trajectoire d'un point dépend essentiellement d'un référentiel. Pour cela, les caractéristiques du mouvement doivent changer d'un référentiel à un autre.
- Parmi ces caractéristiques la vitesse. Notée $\vec{V}_{(M/R)}$.
- La vitesse instantanée et la vitesse moyennes seront notée de la même façon.

Systèmes de coordonnées

- Selon la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.
- Soient $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ un repère direct orthonormé de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et M la particule à repérer.

Système de coordonnées cartésiennes
Vecteur position

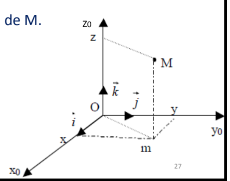
Dans R_0, la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que :

- x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

x = $\mathrm{Proj}_{/\overrightarrow{Ox_0}}\overrightarrow{OM}$

y = $\mathrm{Proj}_{/\overrightarrow{Oy_0}}\overrightarrow{OM}$

z = $\mathrm{Proj}_{/\overrightarrow{Oz_0}}\overrightarrow{OM}$



Système de coordonnées cartésiennes
Vecteur position

- Dans R_0, le **vecteur position** s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

- **Déplacement élémentaire:**

Le vecteur déplacement élémentaire MM' (M' est Très voisin de M) s'écrit:

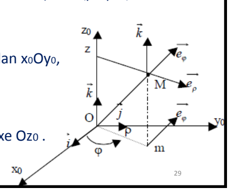
$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dM = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

Dans R_0, $d\vec{\imath} = d\,\vec{\jmath} = d\,\vec{k} = \vec{0}$

Systèmes de coordonnées cylindriques
Vecteur position

Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution, il est intéressant d'utiliser les coordonnées cylindriques de ce point (ρ, φ,z) définies comme suit:

- $\rho = |\overrightarrow{Om}|$ avec m est la projection de M sur le plan x_0Oy_0,
- φ = angle$(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$, ($\varphi$ = Arctan $\frac{y}{x}$) et
- z est la projection du vecteur position OM sur l'axe Oz_0 .



Systèmes de coordonnées cylindriques
Vecteur position

- Une nouvelle base orthonormée directe $(\overrightarrow{e\rho}, \overrightarrow{e\varphi}, \vec{k})$ est associée à ce système de coordonnées telle que :

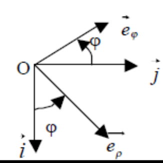
$$\overrightarrow{\mathbf{e}\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{e}\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

- avec :

$$\frac{d\overrightarrow{e\rho}}{d\varphi} = \overrightarrow{e\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e\varphi}}{d\varphi} = -\,\overrightarrow{e\rho}$$



Systèmes de coordonnées cylindriques
Vecteur position

- **Remarque 1:**

Quand le point M décrit tout l'espace, les intervalles de variation de ρ, φ, et z sont :

$$0 < \rho < +\infty \;;$$
$$0 < \varphi < 2\pi \;;$$
$$-\infty < z < +\infty$$

- **Remarque 2:**
- La base orthonormée directe ($\overrightarrow{e\rho}$, $\overrightarrow{e\varphi}$, $\vec{k}$) est une base mobile.
- la dérivée des vecteurs $\overrightarrow{e\rho}$, $\overrightarrow{e\varphi}$ est non nulle.

31

Systèmes de coordonnées cylindriques
Vecteur position

- Dans la base ($\overrightarrow{e\rho}$, $\overrightarrow{e\varphi}$, $\vec{k}$) , le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\,\overrightarrow{e\rho} + z\vec{k}$$

- **Déplacement élémentaire:**
- Le vecteur déplacement élémentaire MM' (M' très voisin de M) est:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\,d\varphi\,\overrightarrow{e\varphi} + z\,\vec{k}$$

32

Systèmes de coordonnées polaires
Vecteur position

- Si la trajectoire de M est plane, ce point peut être repéré par ses coordonnées polaires ρ et φ.
- Dans la base ($\overrightarrow{e\rho}$, $\overrightarrow{e\varphi}$) , le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e\rho}$$

- **Déplacement élémentaire:**
- Le vecteur déplacement élémentaire MM' (M' très voisin de M) est:

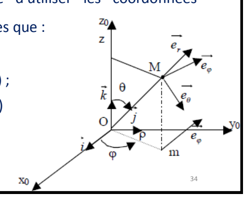
$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\,d\varphi\,\overrightarrow{e\varphi}$$

33

Systèmes de coordonnées sphériques
Vecteur position

- Lorsque le point mobile présente une symétrie sphérique autour d'un point O, origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de la particule à étudier telles que :

$$r = |\overrightarrow{OM}| \;;$$
$$\theta = \text{angle}\,(\overrightarrow{Oz_0}, \overrightarrow{OM}) \;;$$
$$\varphi = \text{angle}(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$$



34

Systèmes de coordonnées sphériques
Vecteur position

- **Remarque 1:**

Quand le point M décrit tout l'espace, les intervalles de variation de r, φ, et θ sont :

$$0 < r < +\infty \;;$$
$$0 < \varphi < 2\pi \;;$$
$$0 < \theta < \pi$$

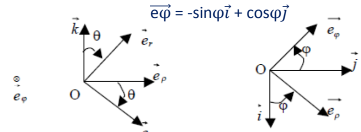
- **Remarque 2:**
- La base ($\overrightarrow{e\theta}$, $\overrightarrow{e\varphi}$) est une base mobile.
- La dérivée des vecteurs $\overrightarrow{e\theta}$, $\overrightarrow{e\varphi}$ est non nulle.

35

Systèmes de coordonnées sphériques
Vecteur position

- Une nouvelle base orthonormée directe ($\overrightarrow{er}$, $\overrightarrow{e\theta}$, $\overrightarrow{e\varphi}$) est associée à ce système de coordonnées telle que :

$$\overrightarrow{er} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{e\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{e\varphi} = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$$



36

Systèmes de coordonnées sphériques
Vecteur position

- Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

- **Déplacement élémentaire :**
- Le déplacement élémentaire de la particule M en coordonnées sphériques est donné par:

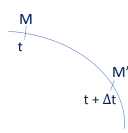
$$d\,\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + r d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

37

Exercice

38

Caractéristiques cinématiques
Vecteur vitesse



Vitesse moyenne

- Soient M et M' les positions du point mobile aux instants t et t + Δt avec Δt >0
- Le vecteur vitesse moyenne entre t et t + Δt est défini par :

$$V_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

- Ce vecteur a la même direction et le même sens que le vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$
- La vitesse s'exprime en $m.s^{-1}$

39

Caractéristiques cinématiques
Vecteur vitesse

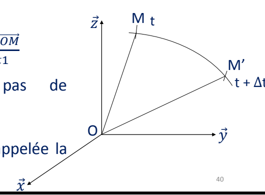
Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est le rapport entre la distance parcourue et la durée de trajet.

$$V_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t_2 - t_1}$$

La vitesse moyenne ne donne pas de renseignements sur la trajectoire du point.

Il faut déterminer une deuxième vitesse appelée la ***vitesse instantanée***.



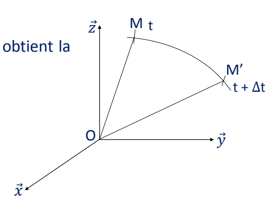
40

Caractéristiques cinématiques
Vecteur vitesse

Vitesse instantanée

Si on diminue l'intervalle de temps, on obtient la vitesse instantanée :

$$V_i = \lim_{\Delta t \Rightarrow 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$



41

Exercice

42

Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Soit un référentiel R(O, x, y, z) fixe muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\,(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}$$

$$\vec{V}_M = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

43

Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

- L'accélération instantanée du point M s'écrit :

$$\vec{\gamma}_M = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_M = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

44

Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

- Le vecteur position est:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e\rho} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,(\rho\,\overrightarrow{e\rho} + z\,\vec{k})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\,\frac{d\overrightarrow{e\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}_M = \dot{\rho}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e\varphi} + \dot{z}\,\vec{k}$$

45

Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

- Le vecteur accélération est :

$$\vec{\gamma}_M = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(\dot{\rho}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e\varphi} + \dot{z}\,\vec{k})}{dt}$$

$$\vec{\gamma}M = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{e\varphi} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

46

Vecteur vitesse en coordonnées polaires

- Le vecteur position est:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e\rho}$$

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,(\rho\,\overrightarrow{e\rho})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\,\frac{d\overrightarrow{e\rho}}{dt}$$

- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}_M = \dot{\rho}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e\varphi}$$

47

Vecteur accélération en coordonnées polaires

- Le vecteur accélération est :

$$\vec{\gamma}_M = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(\dot{\rho}\,\overrightarrow{e\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e\varphi})}{dt}$$

$$\vec{\gamma}M = \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e\rho}}_{\text{composante radiale}} + \underbrace{(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{e\varphi}}_{\text{composante orthoradiale}}$$

48

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

- Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{er}$$

- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,(r\overrightarrow{er})}{dt}$$

$$\vec{V}_M = \dot{r}\overrightarrow{er} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e\theta} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e\varphi}$$

Vecteur accélération en coordonnées sphériques

- Le vecteur accélération est :

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,(\dot{r}\overrightarrow{er} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e\theta} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e\varphi})}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_M = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\overrightarrow{er} + (2\,\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\cos\theta\,\sin\theta)\,\overrightarrow{e\theta} + (2\,\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta)\,\overrightarrow{e\varphi}$$

avec:

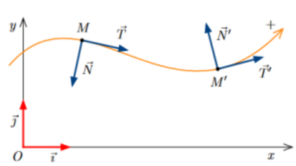
$$\frac{d\overrightarrow{er}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{er} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e\varphi}}{dt} = -\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{er} - \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e\theta}$$

Repère de Frenet

- Le Repère de Frenet est un repère qui se déplace avec le mobile M, les vecteurs de base varient par rapport au référentiel galiléen lors du déplacement du point mobile. Les caractéristiques du repère de Frenet



Repère de Frenet

- Dans un mouvement plan, un point peut être repéré par sa trajectoire en repère de Frenet. On définit deux vecteurs:
- $\overrightarrow{e_T}$: vecteur unitaire tangentiel à la trajectoire du point mobile, son sens est le sens positif de la trajectoire.
- $\overrightarrow{e_N}$: vecteur unitaire normal à $\overrightarrow{e_T}$, son sens est le sens positif de la trajectoire.
- $\overrightarrow{e_B}$: vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{e_T}$ et $\overrightarrow{e_N}$.
- $\overrightarrow{e_T} \perp \overrightarrow{e_N} \perp \overrightarrow{e_B}$ et $\overrightarrow{e_T} \wedge \overrightarrow{e_N} = \overrightarrow{e_B}$

Repère de Frenet
Abscisse curviligne

- L'abscisse curviligne s(t) est défini par la distance curviligne de A à M qu'occupe le point matériel.

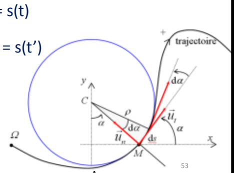
A l'instant t, M a la position: $\widehat{AM}$ = arc (AM) = s(t)

A l'instant t', M a la position : $\widehat{AM'}$ = arc (AM') = s(t')

- Le déplacement élémentaire:

$\widehat{MM'}$ = arc (AM') - arc (AM) = s(t') - s(t) = ds

ds est l'arc de cercle de centre C et de rayon ρ



Repère de Frenet
Abscisse curviligne

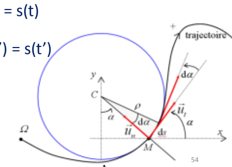
- L'abscisse curviligne s(t) est défini par la distance curviligne de A à M qu'occupe le point matériel.

A l'instant t, M a la position: $\widehat{AM}$ = arc (AM) = s(t)

A l'instant t', M a la position : $\widehat{AM'}$ = arc (AM') = s(t')

- Le déplacement élémentaire:

$\widehat{MM'}$ = arc (AM') - arc (AM) = s(t') - s(t) = ds



Repère de Frenet
vecteur vitesse

- Comme le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, son expression dans la base de Frenet est :

$$\vec{v} = v_T\, \overrightarrow{e_T} + 0\, \overrightarrow{e_N}$$

- $v_T > 0$ si le mobile se déplace dans le sens positif ;
- $v_T < 0$ si le mobile se déplace dans le sens contraire

Repère de Frenet
vecteur vitesse

- La norme du vecteur vitesse est donnée par :

$$\vec{v} = |v_T| = \lim_{t' \Rightarrow t} \frac{|s' - s|}{t' - t}$$

- La valeur algébrique de la vitesse :

$$v_T = \lim_{t' \Rightarrow t} \frac{s' - s}{t' - t} = \frac{ds}{dt}$$

Où s est l'abscisse curviligne.

Ainsi, dans la base de Frenet la vitesse est donnée par l'expression:

$$v_T = \frac{ds}{dt}\, \overrightarrow{e_T}$$

Repère de Frenet
vecteur accélération

- Le vecteur accélération dans la base de Frenet est déterminé à partir de ses coordonnées tangentielle a_T et normale a_N définies par :

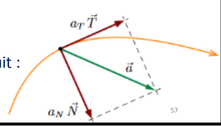
$$a = a_T\, \overrightarrow{e_T} + a_N\, \overrightarrow{e_N}$$

- Le vecteur accélération est obtenu par dérivation du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(v.\overrightarrow{e_T})}{dt}$$

- En appliquant la règle sur la dérivée d'un produit :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\, \overrightarrow{e_T} + v\, \frac{d\,\overrightarrow{e_T}}{dt}$$



Repère de Frenet
vecteur accélération

- On a : $\overrightarrow{e_N} \perp \overrightarrow{e_T}$

$$\overrightarrow{e_N} = \frac{d\overrightarrow{e_T}}{d\theta}$$

Et : $ds = R\, d\theta$

Alors :

$$\overrightarrow{e_N} = R\, \frac{d\overrightarrow{e_T}}{ds}$$

- L'expression générale du vecteur accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\, \overrightarrow{e_T} + \frac{v^2}{R}\, \overrightarrow{e_N}$$

Repère de Frenet
vecteur accélération

- L'expression générale du vecteur accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\, \overrightarrow{e_T} + \frac{v^2}{R}\, \overrightarrow{e_N}$$

- Sa norme est :

$$\mathbf{a_{(M/R)} = a_T{}^2 + a_N{}^2}$$

Repère de Frenet
Rayon de courbure

- Le rayon de courbure de la trajectoire est donné par:

$$\mathbf{R = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}}$$ **(démonstration faite en TD)**

Exercices

Etude des mouvements

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne

- Un mouvement est dit ***rectiligne***, si la trajectoire du point matériel est une ***droite***. Dans ce cas, le repère est réduit à une ***origine*** et ***un axe*** porté par la trajectoire du point.
- Le repère adapté pour décrire le mouvement du point est le repère ***cartésien***.

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne

- Un mouvement est dit ***rectiligne***, si la trajectoire du point matériel est une ***droite***. Dans ce cas, le repère est réduit à une ***origine*** et ***un axe*** porté par la trajectoire du point.
- Le repère adapté pour décrire le mouvement du point est le repère ***cartésien***.

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne

- Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$$

- Le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d(x\,\vec{\imath})}{dt} = \dot{x}\,\vec{\imath}$$

- Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{v})}{dt} = \frac{d(\dot{x}\,\vec{\imath})}{dt} = \ddot{x}\,\vec{\imath}$$

- L'équation horaire du mouvement:

$$\overrightarrow{OM}\,(t) = x\,(t)\,\vec{\imath}$$

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne

- Dans un mouvement rectiligne, le vecteur accélération et le vecteur vitesse sont constamment colinéaires et tangent à la trajectoire du point.

$$\forall\, t \text{ on a } \vec{v} /\!/ \vec{a}$$

- Remarque: la trajectoire ne suffit pas pour connaitre la nature exacte du mouvement. Il faut donner l'équation horaire x(t) pour pouvoir donner la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne uniforme

- Dans un mouvement rectiligne uniforme, le point matériel M se déplace à une vitesse constante tout au long de sa trajectoire.

$$V = V_0 = \text{constante}$$

- Dans ce cas:
- x est une fonction linéaire du temps.
- $\dot{x}$ est une constante du temps (positive ou négative selon le sens du point)
- $\ddot{x}$ est nulle.

67

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne uniforme

- Vecteur accélération:

$$\mathbf{a = 0}$$

- Le vecteur vitesse:

$$\frac{dx}{dt} = V_0 = \text{cte}$$

- L'équation horaire :

$$x(t) = V_0\, t + x_0$$

68

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne uniformément varié

- Dans un mouvement rectiligne uniformément varié, le point matériel M se déplace à une accélération constante tout au long de sa trajectoire.

$$a = a_0 = \text{constante}$$

- Dans ce cas:
- x est une fonction linéaire du temps.
- $\dot{x}$ est une fonction linéaire du temps.
- $\ddot{x}$ est une constante du temps (positive ou négative)

69

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne uniformément varié

- Vecteur accélération:

$$a = a_0 = \text{cte}$$

- Le vecteur vitesse:

$$v = at + V_0$$

- L'équation horaire :

$$x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 + V_0\, t + x_0$$

70

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne sinusoïdal

- Dans le cas d'un mouvement sinusoïdal, l'équation horaire est donnée par:

$$x\,(t) = x_m \cos\,(\,\omega t + \varphi\,)$$

- La vitesse est donnée par :

$$V(t) = \dot{x}\,(t) = -\,\omega\, x_m \sin\,(\,\omega t + \varphi\,)$$

- L'accélération est donnée par :

$$a(t) = \ddot{x}\,(t) = -\,\omega^2\, x_m \cos\,(\,\omega t + \varphi\,)$$

71

Etudes des mouvements
Mouvement rectiligne sinusoïdal

- L'équation différentielle du mouvement est donnée par:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

- ω : pulsation propre en rad/ s.
- x_m : amplitude maximale du mouvement d'oscillation .
- φ : la phase à l'instant t.

72

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire

- Un mobile décrit un ***mouvement circulaire*** si sa ***trajectoire*** est un ***cercle***.
- Le mouvement est ***circulaire uniforme*** si en plus la norme du ***vecteur vitesse reste constante.***

73

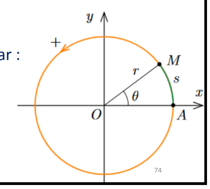
Etudes des mouvements
Mouvement circulaire

Abscisse angulaire

- Pour déterminer l'abscisse angulaire, on fixe une origine A sur la trajectoire circulaire d'un mobile.
- La position du point mobile M peut être repérée par :

$$\theta = \widehat{AOM}$$

Appelé abscisse angulaire.



74

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire

Abscisse angulaire

- Les coordonnées cartésiennes de la position du mobile sont :

$$x = \rho \cos\theta = r\cos\theta; \qquad y = \rho\sin\theta = r\sin\theta$$

- Où r est le rayon de la trajectoire circulaire.
- L'abscisse curviligne s est :

$$s = r\,\theta$$

- où l'angle θ est exprimé en radians

75

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire

Relation repère polaire et repère de Frenet

- Le vecteur unitaire orthoradiale $\overrightarrow{e_\theta}$ est perpendiculaire au rayon OM et est donc tangent à la trajectoire. Dans ce cas, en orientant la trajectoire dans le sens trigonométrique, il correspond au vecteur $\overrightarrow{e_T}$ de la base de Frenet. Le deuxième vecteur $\overrightarrow{e_N}$ de cette base est toujours tourné vers la concavité et est donc opposé au vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_T} \text{ et } \overrightarrow{e_N} = -\overrightarrow{e_\rho}$$

- Ce résultat n'est **vrai** que pour une trajectoire **circulaire**.

76

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire

Vitesse angulaire

- La vitesse angulaire est donnée par :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

- La dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps est, par définition, la vitesse angulaire de rotation du point mobile M sur le cercle :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

- La vitesse linéaire en fonction de ω est :

$$v = \mathbf{r}\,\boldsymbol{\omega}$$

77

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire uniforme

- Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse linéaire est constante. Il en suit que la vitesse angulaire est également constante :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$$

- L'abscisse angulaire est obtenue en intégrant la vitesse angulaire par rapport au temps :

$$\theta = \omega\, t + \text{cte}$$

- La constante d'intégration est déterminée en considérant l'abscisse angulaire initiale θ_0: $\theta\,(t = 0) = \theta_0 = \text{cte}$
- L'expression de l'abscisse angulaire à l'instant t :

$$\theta = \omega\, t + \theta_0$$

78

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire uniforme

- Le mouvement circulaire uniforme est périodique de période T. La période est le temps nécessaire pour décrire un tour complet et s'exprime en seconde (s).
- La vitesse linéaire peut s'exprimer en fonction de la période :

$$v = \frac{2\pi\, r}{T}$$

- La vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire uniforme

- Le mouvement circulaire uniforme est périodique de période T. La période est le temps nécessaire pour décrire un tour complet et s'exprime en seconde (s).
- La vitesse linéaire peut s'exprimer en fonction de la période :

$$v = \frac{2\pi\, r}{T}$$

- La vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- La fréquence est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire uniforme

- Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, $a_T = 0$ et l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet se réduit à :

$$\vec{a} = a_N\ \overrightarrow{e_N} = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_N} = r\,\omega^2\ \overrightarrow{e_N}$$

- L'accélération est orientée vers le centre du cercle, on dit qu'elle est ***centripète***.

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire uniformément varié

- Dans le cas d'un mouvement circulaire ***uniformément varié***, la norme du ***vecteur accélération*** reste ***constante***.
- L'accélération est donnée par:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cte$$

- La vitesse angulaire est obtenue en intégrant l'accélération par rapport au temps :

$$\dot{\theta} = \omega = \ddot{\theta}\,t + \dot{\theta}_0$$

- L'abscisse angulaire est obtenue en intégrant la vitesse angulaire par rapport au temps :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,t^2 + \dot{\theta}\,t + \theta_0$$

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire uniformément varié

- L'accélération est donnée par:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cte$$

- La vitesse angulaire est obtenue en intégrant l'accélération par rapport au temps :

$$\dot{\theta} = \omega = \ddot{\theta}\,t + \dot{\theta}_0$$

- L'abscisse angulaire est obtenue en intégrant la vitesse angulaire par rapport au temps :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,t^2 + \dot{\theta}\,t + \theta_0$$

Etudes des mouvements
Mouvement circulaire sinusoïdal

- Dans le cas d'un mouvement sinusoïdal, l'abscisse angulaire est donné par:

$$\theta\,(t) = \theta_m \cos\,(\,\omega t + \varphi\,)$$

- La vitesse est donnée par :

$$\dot{\theta}\,(t) = -\,\omega\,\theta_m \sin\,(\,\omega t + \varphi\,)$$

- L'accélération est donnée par :

$$\ddot{\theta}\,(t) = -\,\omega^2\,\theta_m \cos\,(\,\omega t + \varphi\,)$$

- L'équation différentielle du mouvement est donnée par:

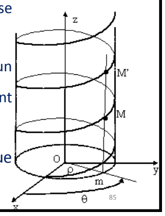
$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Etudes des mouvements
Mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal est un mouvement dont la trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre d'axe $\overrightarrow{OZ}$ et de base circulaire de rayon R.

Ce mouvement peut être considéré comme la composition d'un mouvement de translation suivant l'axe $\overrightarrow{OZ}$ et d'un mouvement de rotation autour de cet axe.

Le mobile M est repéré, en général, dans la base cylindrique par les coordonnées. (voir l'application en TD)



85

Exercices

86