



Exposé

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

email : nasser_baghdad @ yahoo.fr

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

Sommaire

Chapitre I : Technologies des circuits logiques : TTL et CMOS

Chapitre II : Les bases de numération

Chapitre III : Les portes logiques

Chapitre IV : Les fonctions binaires

Chapitre V : Les circuits combinatoires

Chapitre VI : Les circuits séquentiels

ELECTRONIQUE NUMERIQUE

Chapitre. III

Les portes logiques

Chapitre III : Les portes logiques

I. Les portes logiques de base

II. Théorèmes de DE Morgan

III. Les portes logiques dérivées

IV. Conséquences des théorèmes de DE Morgan

V. Les identités Booléennes

Chapitre III : Les portes logiques

I. Les portes logiques de base

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Porte ET (AND)

2°) Porte OU_{inclusif} (OR)

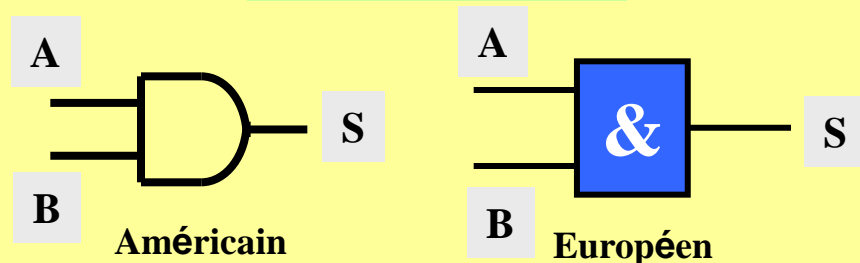
3°) Porte NON (NOT)

4°) Porte OUI (YES)

Chapitre III : Les portes logiques

1° Porte ET (AND)

Symbole logique



Deux entrées au minimum

Équation logique

$$S = A \cdot B$$

S se lit A fois B

Notation



Représentation d'Euler

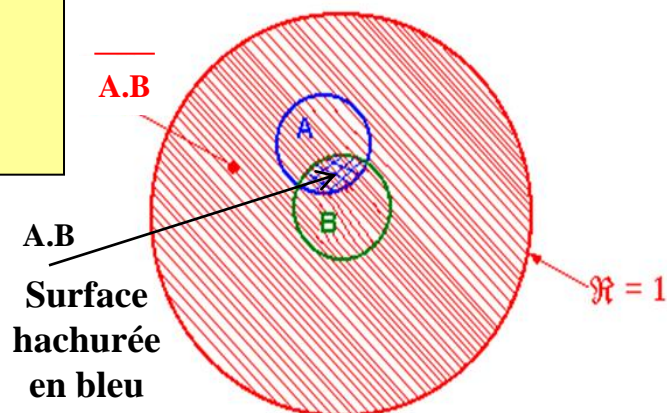
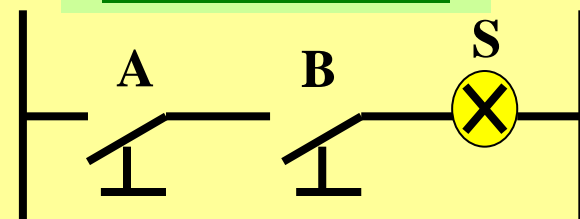


Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	A ET B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Circuit électrique



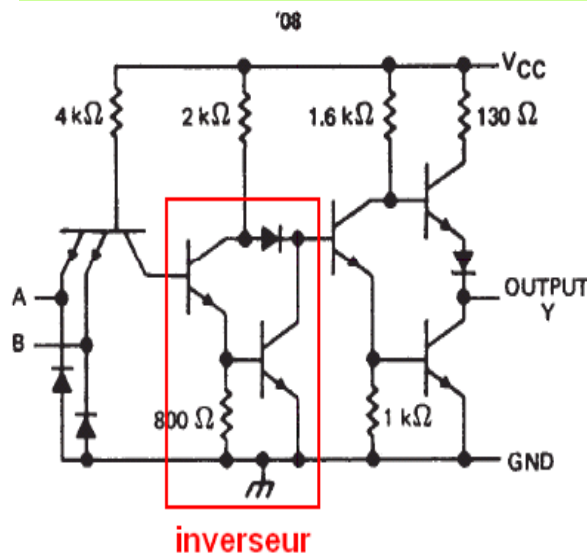
Interrupteur normalement ouvert

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme



Synoptique du CI « AND »

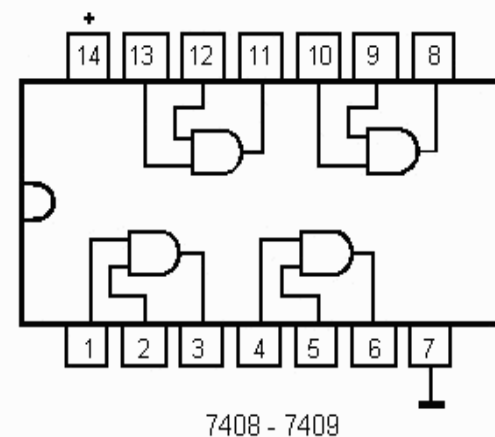


Propriétés de AND

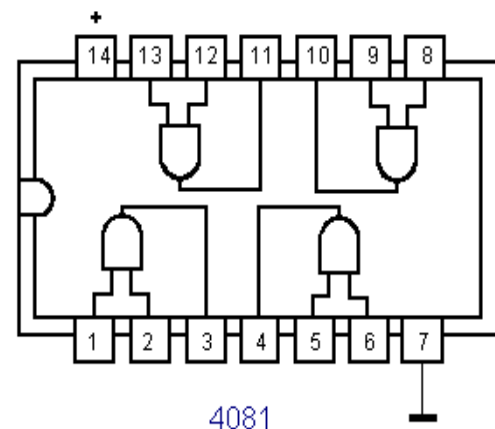
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$	Associativité
$A \cdot B = B \cdot A$	Commutativité
$A \cdot A = A$	Idempotence
$A \cdot 1 = A$	Élément neutre
$A \cdot 0 = 0$	

Circuit intégré logique

brochage TTL



brochage CMOS



Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction **ET**

$$S = A \text{ ET } B$$

Je vais au cinéma ce soir si Ali **et** Samir viennent avec moi.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Ali ne vient pas : $A = 0$

Ali vient : $A = 1$

Samir ne vient pas : $B = 0$

Samir vient : $B = 1$

Pas de sortie cinéma : $S = 0$

Sortie cinéma : $S = 1$

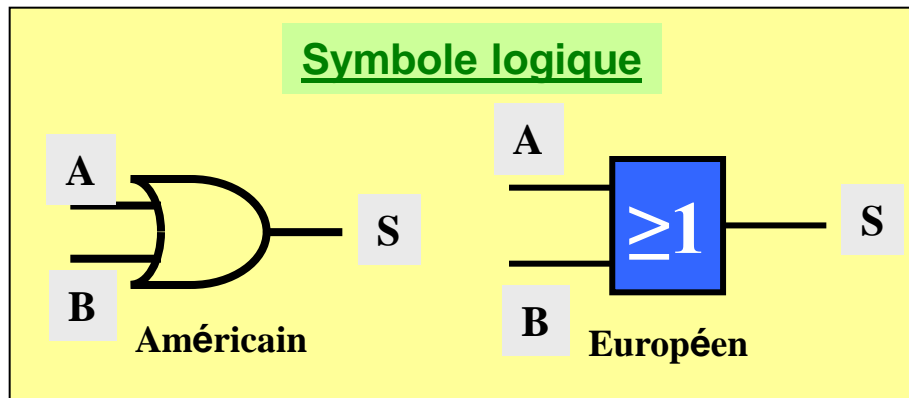
Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	A ET B
ne vient pas	ne vient pas	pas de cinéma
ne vient pas	vient	pas de cinéma
vient	ne vient pas	pas de cinéma
vient	vient	cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

2° Porte OU_{inclusif} (OR)

Symbole logique



Deux entrées au minimum

Équation logique

$$S = A + B$$

S se lit A plus B

Notation

" + "

Représentation d'Euler

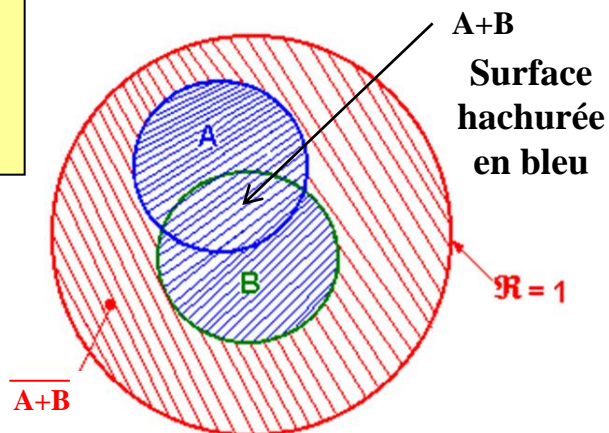
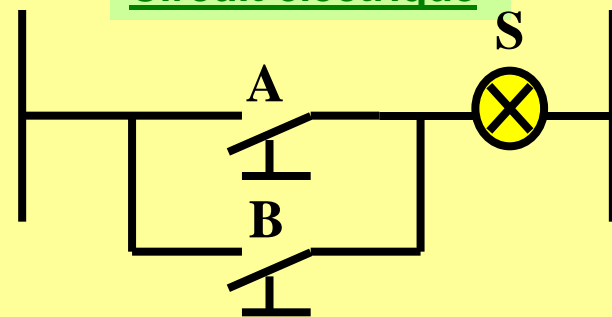


Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	A OU B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Circuit électrique



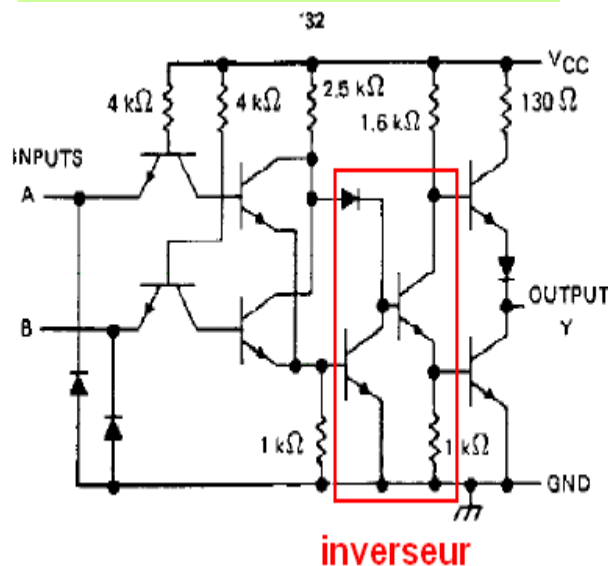
Interrupteur normalement ouvert

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

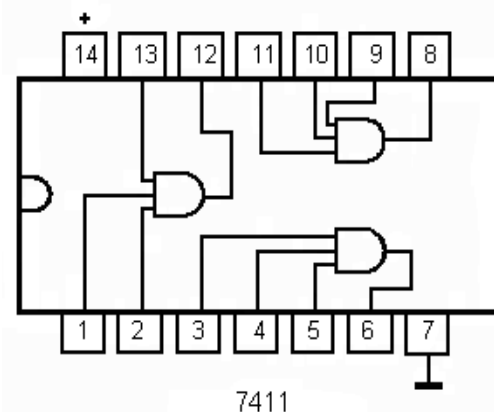


Synoptique du CI « OU »

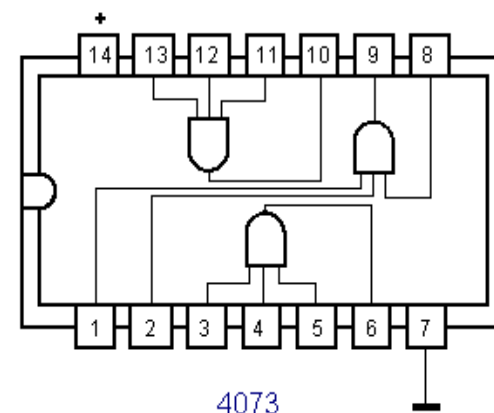


Circuit intégré logique

brochage TTL



brochage CMOS



Propriétés de OU

$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$	Associativité
$A+B = B+A$	Commutativité
$A+A = A$	Idempotence
$A + 0 = A$	Élément neutre
$A + 1 = 1$	

Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction **OU**

$$S = A \text{ OU } B$$

Je vais au cinéma ce soir si Ali **ou** Samir viennent avec moi.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Ali ne vient pas : $A = 0$

Ali vient : $A = 1$

Samir ne vient pas : $B = 0$

Samir vient : $B = 1$

Pas de sortie cinéma : $S = 0$

Sortie cinéma : $S = 1$

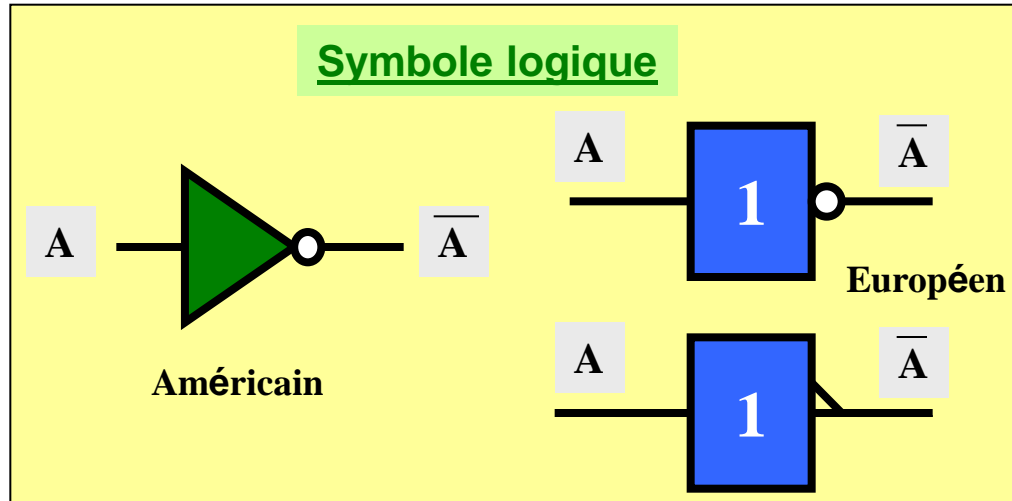
Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	A ET B
ne vient pas	ne vient pas	pas de cinéma
ne vient pas	vient	cinéma
vient	ne vient pas	cinéma
vient	vient	cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

3° Porte NON (NOT)

Symbole logique



Une seule entrée

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	$S = \overline{A}$
0	1
1	0

Équation logique

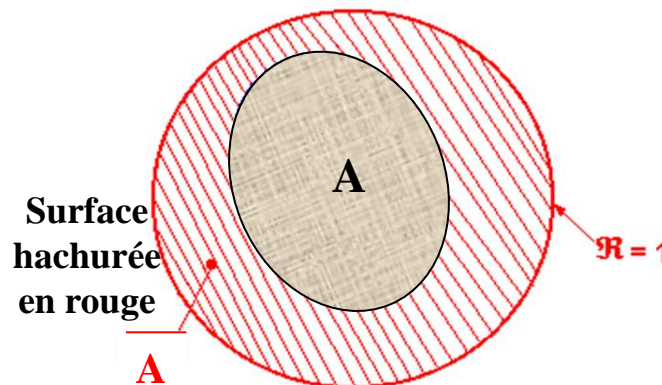
ou

$$S = \overline{A}$$
$$S = \overline{A}$$

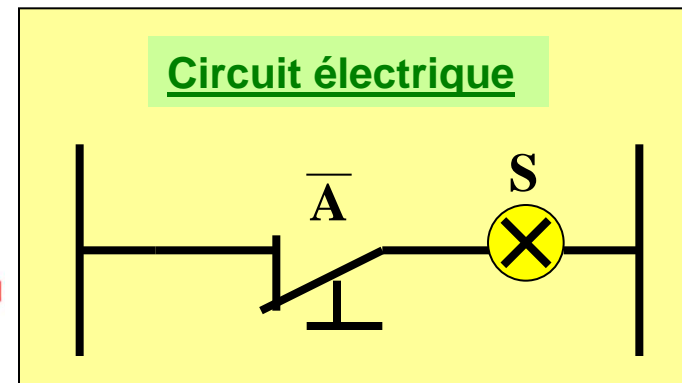
S se lit A barre

Complément de A
Négation de A

Représentation d'Euler



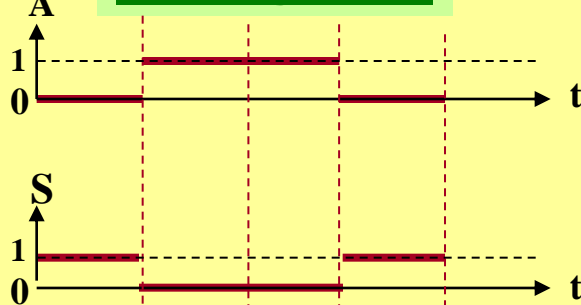
Circuit électrique



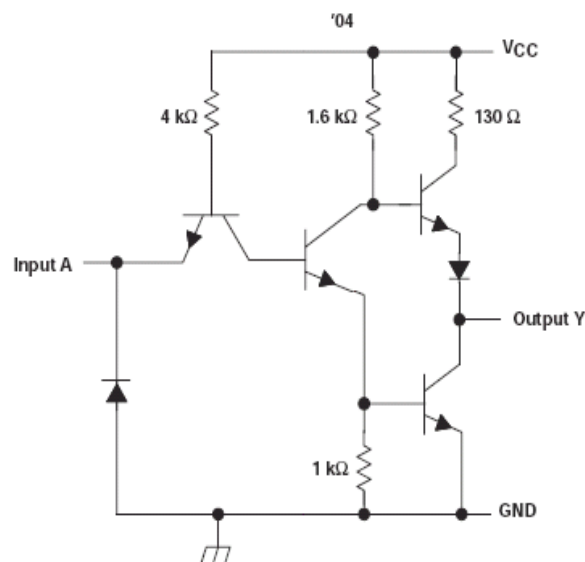
Interrupteur normalement ouvert

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

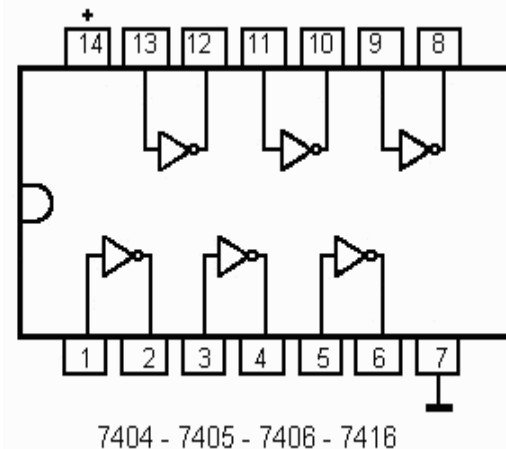


Synoptique du CI « NOT »

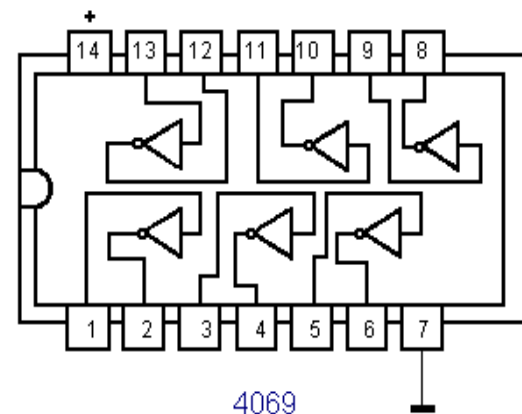


Circuit intégré logique

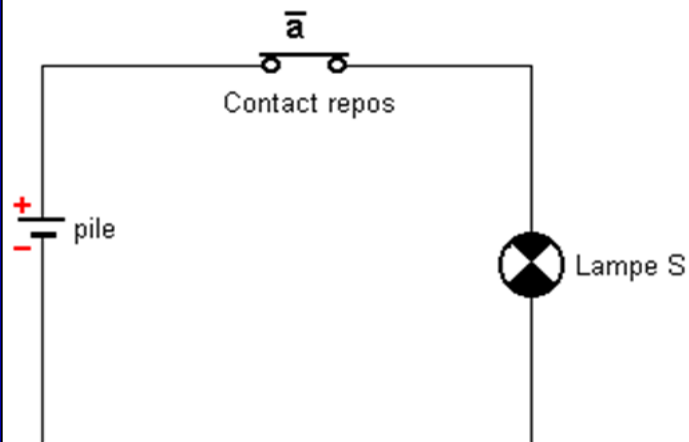
brochage TTL



brochage CMOS



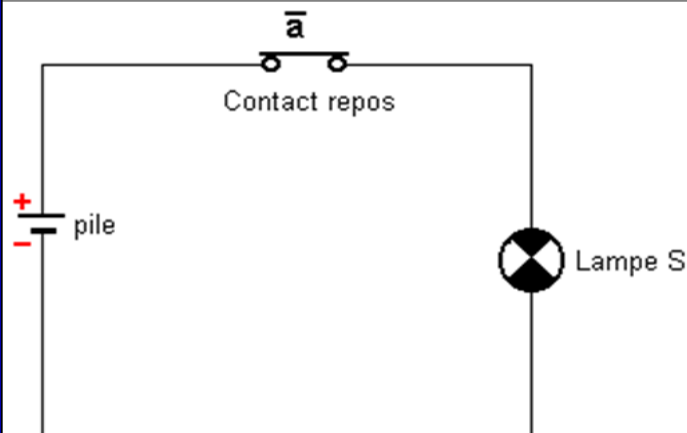
Circuit électrique



Propriétés de NOT

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A \\ \overline{A + A} &= 1 \\ \overline{A \cdot A} &= 0 \end{aligned}$$

Chapitre III : Les portes logiques



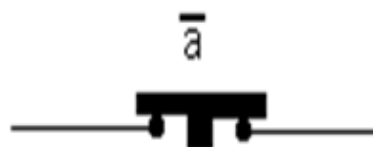
Montage fonction NOT

\bar{a}	S
0	0
1	1

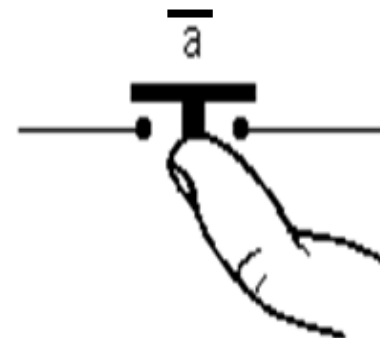
Table de vérité de la fonction NOT

Illustration de l'état logique

BOUTON POUSSOIR - CONTACT REPOS
 Convention LOGIQUE POSITIVE



$\bar{a} = "1"$ relaché
 Mais CONDUCTEUR



$\bar{a} = "0"$ appuyé
 Mais ISOLANT

Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction **NON**

$$S = \overline{A}$$

Je ne vais **pas** au cinéma ce soir Amina vient.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Amina ne vient pas : $A = 0$

Amina vient : $A = 1$

Pas de sortie cinéma : $S = 0$

Sortie cinéma : $S = 1$

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	$S = \overline{A}$
ne vient pas	cinéma
vient	pas de cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

4° Porte OUI (YES)

« Buffer ou Tampon »

Dispositif d'adaptation

Symbole logique

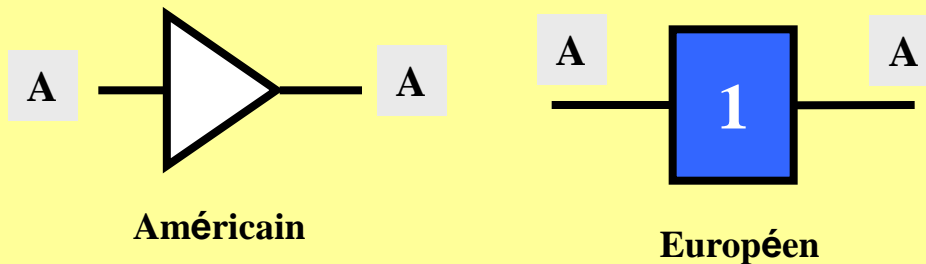
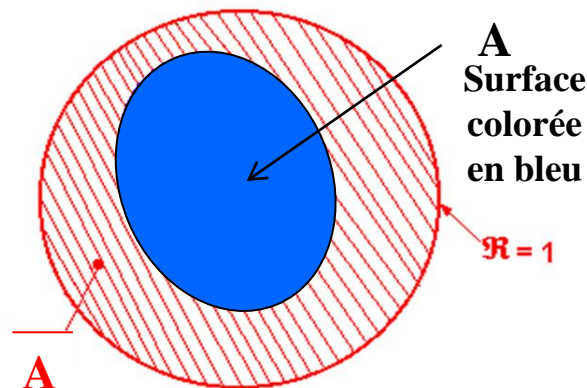


Table de vérité

Entrée	Sortie
A	S = A
0	0
1	1

Représentation d'Euler

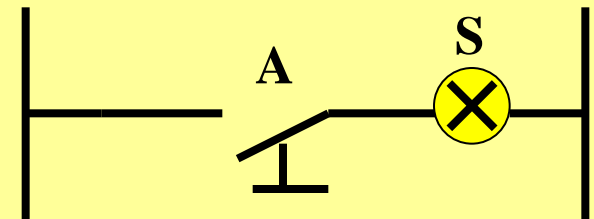


Équation logique

$$S = A$$

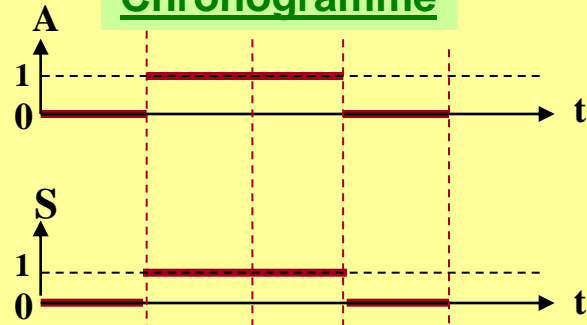
S se lit A

Circuit électrique

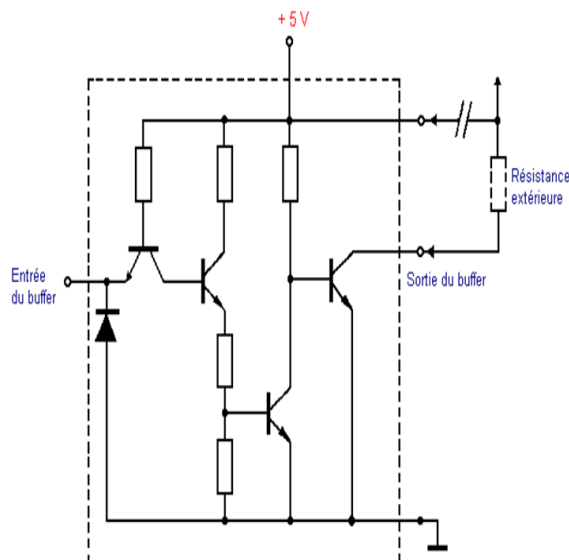


Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

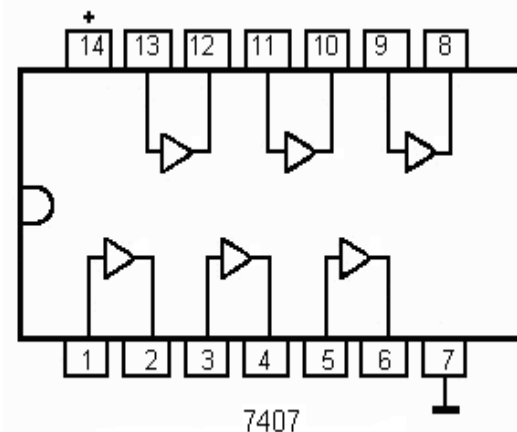


Synoptique du CI « YES »

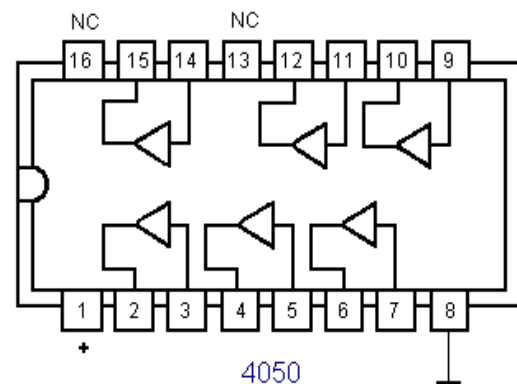


Circuit intégré logique

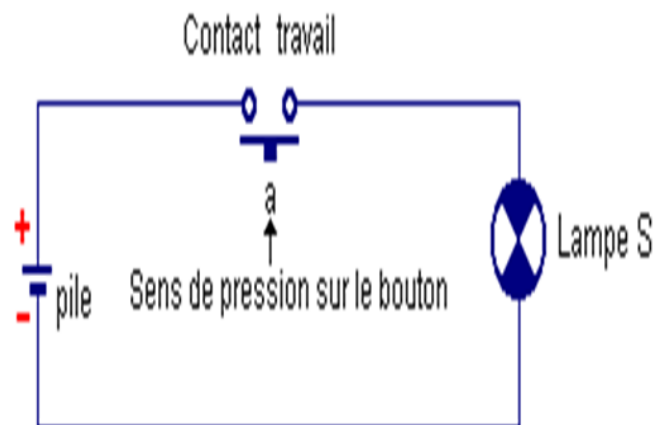
brochage TTL



brochage CMOS



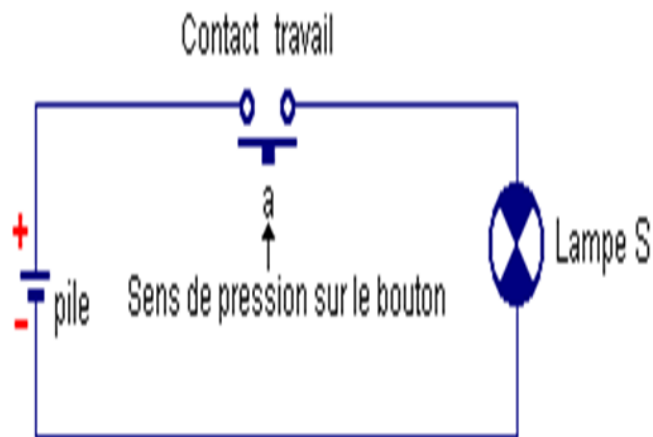
Circuit électrique



Propriétés de YES

$$\begin{aligned} A &= A \\ A + A &= A \\ A \cdot A &= A \end{aligned}$$

Chapitre III : Les portes logiques

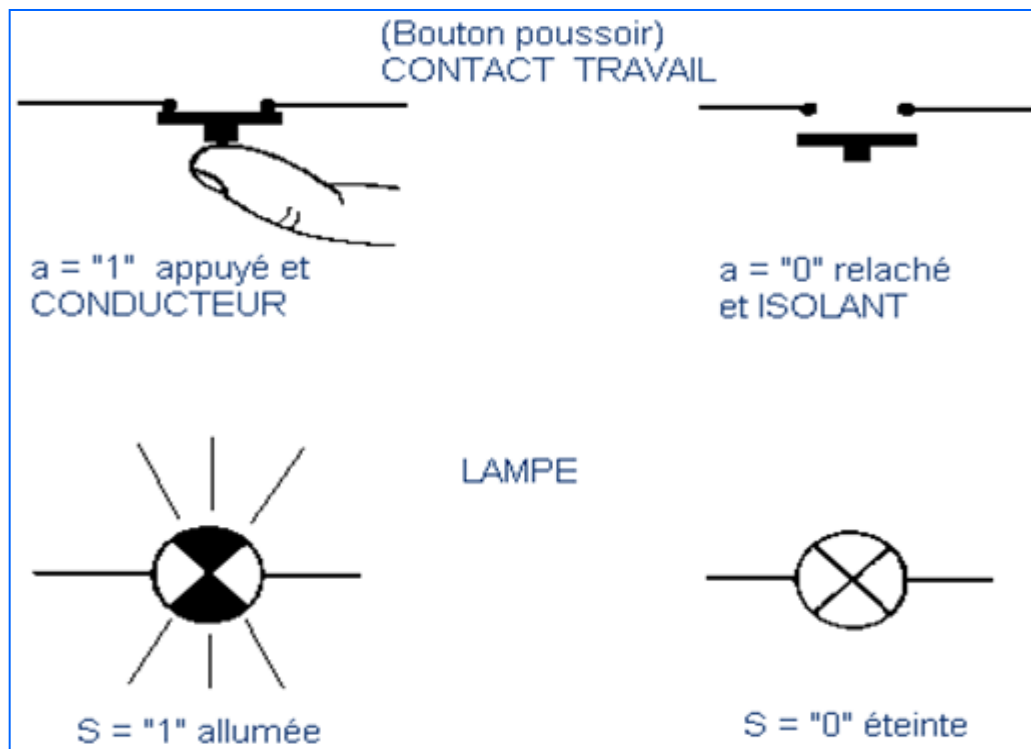


Montage fonction YES

a	S
0	0
1	1

Table de vérité de la fonction YES

Illustration de l'état logique



Chapitre III : Les portes logiques

Illustration logique :

La fonction YES

$$S = A$$

Je ne vais au cinéma ce soir que si Amina vient.

Variable logique

Une variable logique peut prendre deux états.

Amina ne vient pas : $A = 0$

Amina vient : $A = 1$

Pas de sortie cinéma : $S = 0$

Sortie cinéma : $S = 1$

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	$S = A$
ne vient pas	pas de cinéma
vient	cinéma

Chapitre III : Les portes logiques

Remarque :

- Les opérateurs AND et OR sont distributives

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

Distribution

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

Propriétés
d'absorption

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$(A + B) \cdot (A + \underline{B}) = A$$

Conséquence de
la distribution

$$A + \underline{A} \cdot B = A + B$$

$$\underline{A} + A \cdot \underline{B} = \underline{A} + \underline{B}$$

II. Théorèmes de De Morgan

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Théorèmes de De Morgan

2°) Notions sur les ensembles (algèbre logique)

3°) Représentation d'Euler

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Théorèmes de De Morgan

- De Morgan a exprimé deux théorèmes qui peuvent s'énoncer comme suit :

Théorèmes :

$$\underline{1^{er} \text{ Théorème}} : \quad \overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

$$\underline{2^{ème} \text{ Théorème}} : \quad \overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

- Ils expriment la règle d'inversion de la logique positive vers la logique négative et vice versa.

Généralisation à n entrées :

$$\underline{1^{er} \text{ Théorème}} : \quad \overline{A + B + C + \dots} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \dots$$

$$\underline{2^{ème} \text{ Théorème}} : \quad \overline{A \bullet B \bullet C \bullet \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots$$

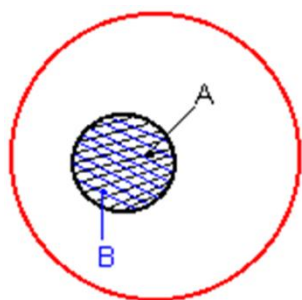
Double négation (ou double complémentation) :

$$A \bullet B = \overline{\overline{A \bullet B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \bullet B$$

$$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}} = A + B$$

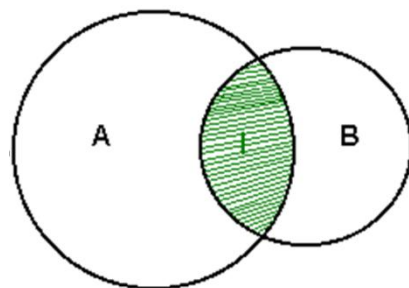
Chapitre III : Les portes logiques

2°) Notions sur les ensembles (algèbre logique)

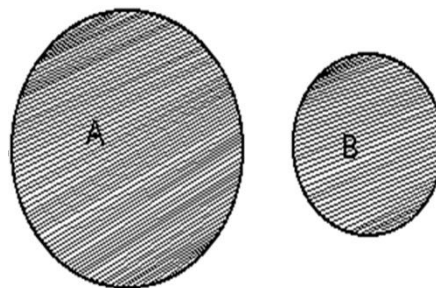


$R = 1$

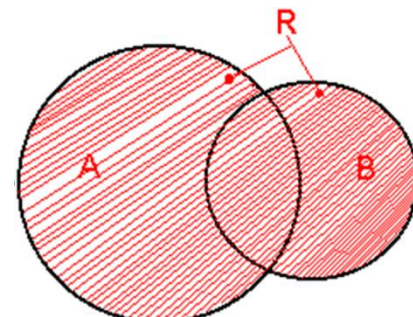
deux variables égales
 $A = B$



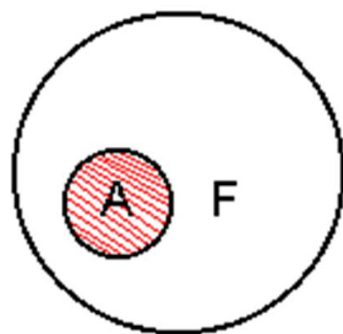
Intersection
de deux ensembles
 $A \cap B$



Ensembles
Disjoints
 $A \neq B$



Réunion
de deux ensembles
 $A \cup B$



Ensemble inclus
dan un autre ensemble
 $A \subset B$

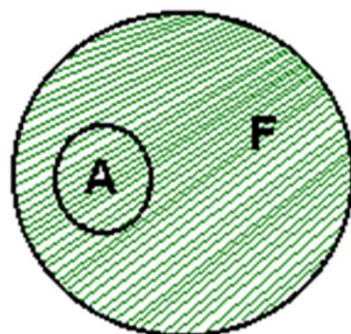


Illustration
 $A \cdot F = A$

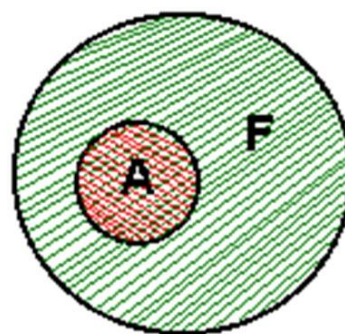
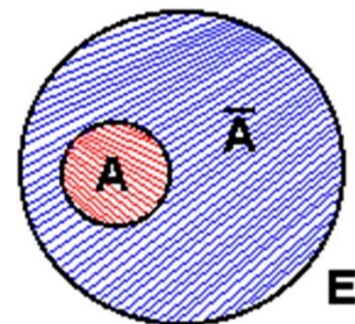


Illustration
 $A + F = F$



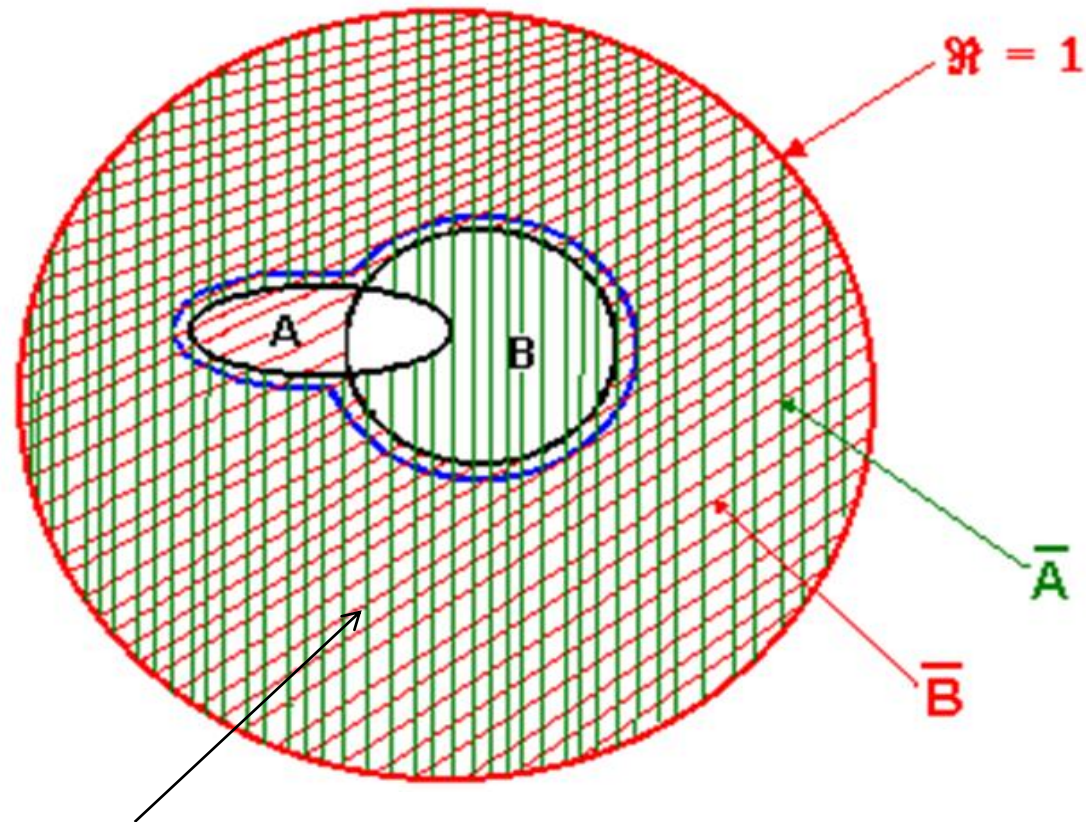
Complément
d'un ensemble
 \bar{A}

Chapitre III : Les portes logiques

3°) Représentation d'Euler

1^{er} Théorème de DE Morgan

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

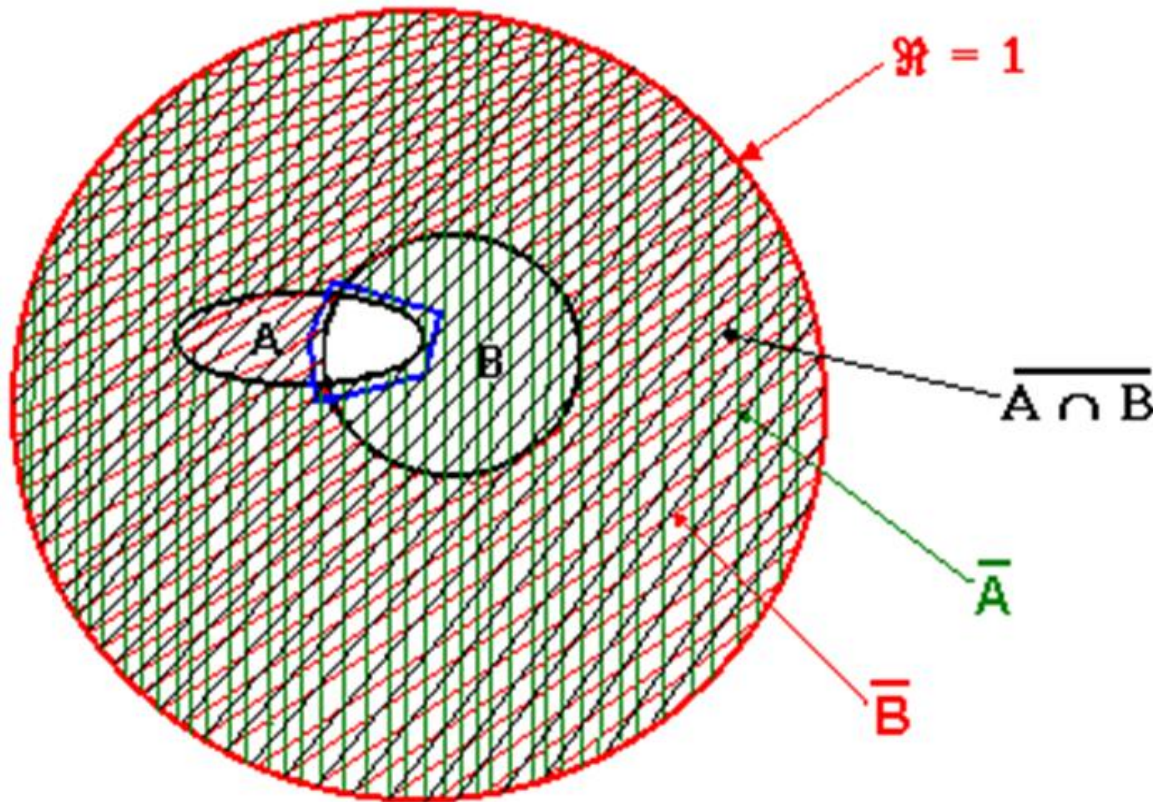


$\overline{A} \cap \overline{B}$ Surface doublement hachurée

Chapitre III : Les portes logiques

2^{ème} Théorème de DE Morgan

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



$\overline{A \cap B}$ partie hachurée en noir

Chapitre III : Les portes logiques

III. Les portes logiques dérivées

Chapitre III : Les portes logiques

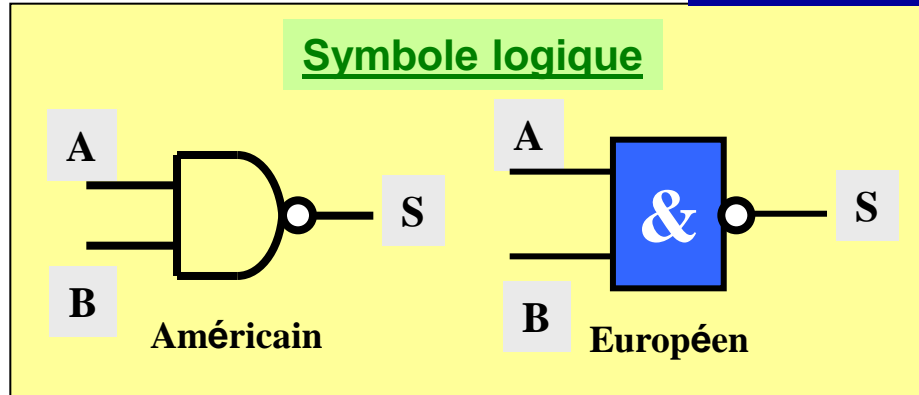
- 1°) Porte NON ET (NAND)
- 2°) Porte NON Ou_{inclusif} (NOR)
- 3°) Porte OU_{exclusif} (XOR)
- 4°) Porte NON OU_{exclusif} (XNOR)

Chapitre III : Les portes logiques

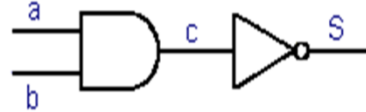
1° Porte NON ET (NAND)

Universelle
(ou complète)

Symbole logique



Deux entrées au minimum



Équation logique

$$S = \overline{A \cdot B}$$

S se lit A fois B le tout barre

Représentation d'Euler

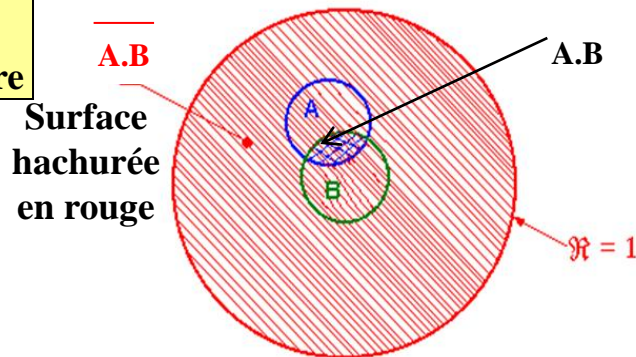


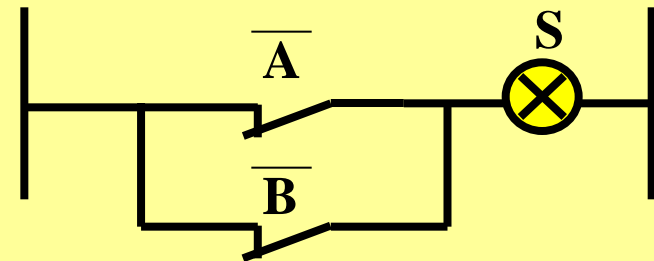
Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

De Morgan

$$S = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Circuit électrique



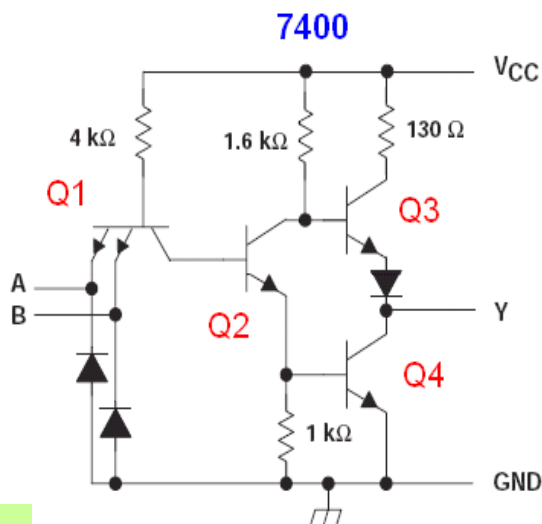
Interrupteur normalement fermé

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme

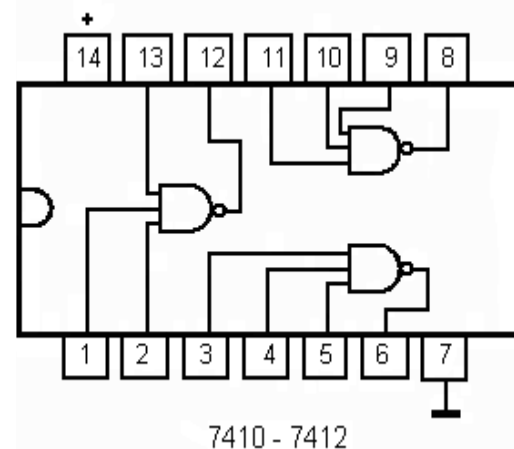


Synoptique du CI « NAND »

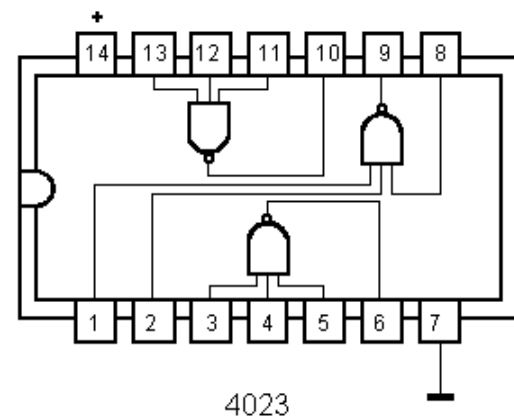


Circuit intégré logique

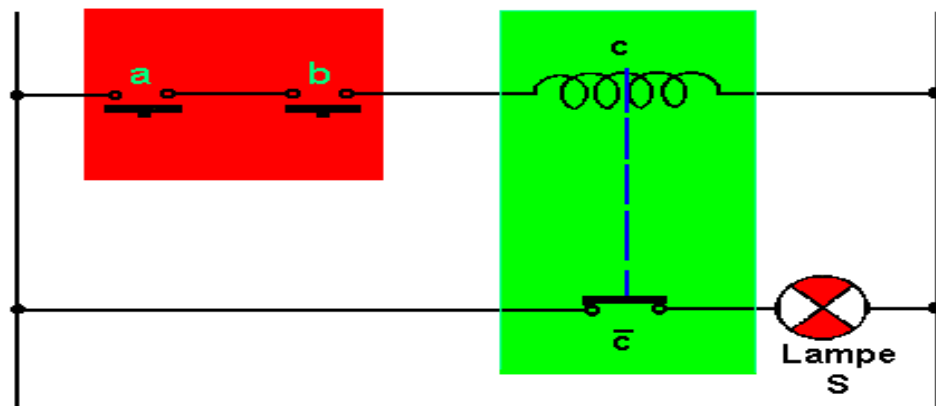
brochage TTL



brochage CMOS



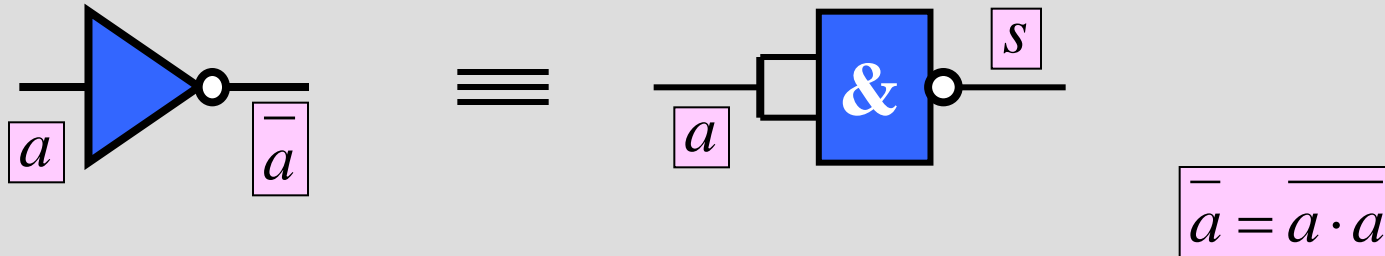
Circuit électrique



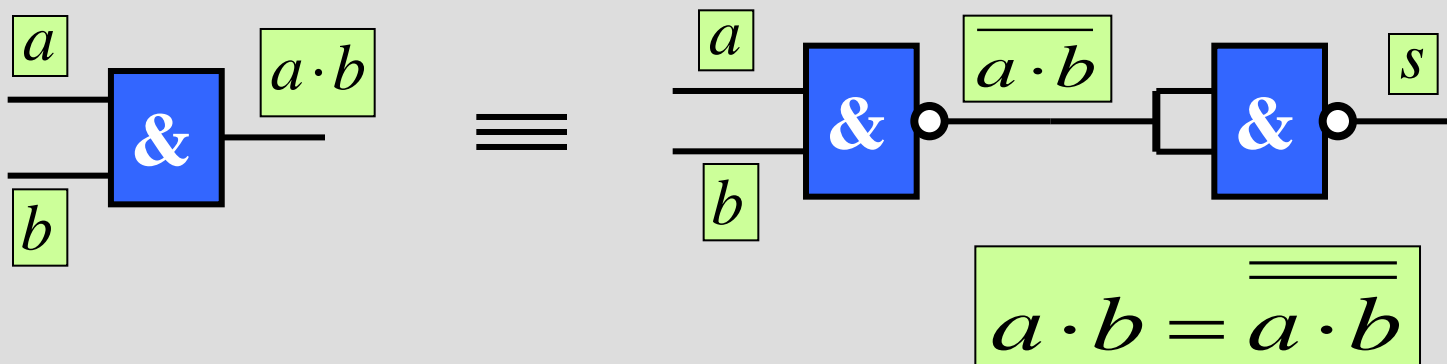
Chapitre III : Les portes logiques

Universalité de la porte NON-ET (NAND)

Fonction NON

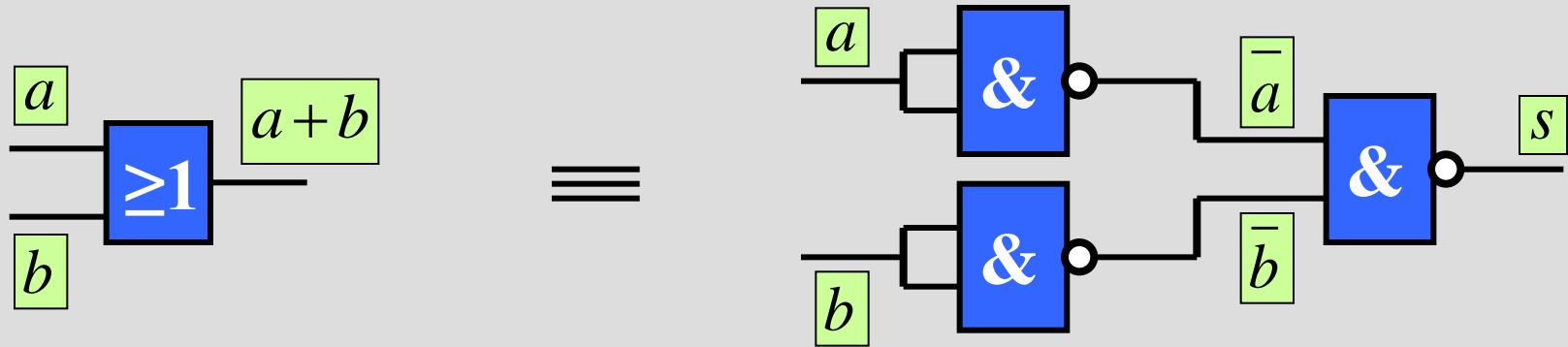


Fonction ET



Chapitre III : Les portes logiques

Fonction OU



$$a + b = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$$

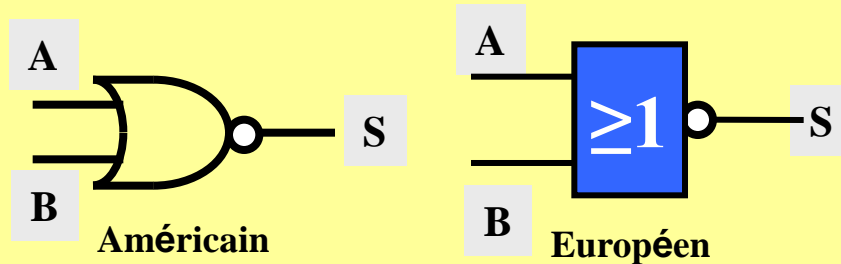
L'opérateur logique NAND est universel car on peut réaliser avec n'importe quel circuit logique.

Chapitre III : Les portes logiques

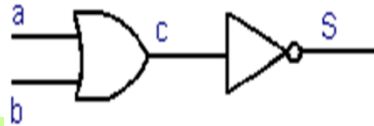
2° Porte NON OU inclusif (NOR)

Universelle
(ou complète)

Symbole logique



Deux entrées au minimum



Équation logique

$$S = \overline{A + B}$$

S se lit A plus B le tout barre

De Morgan

$$S = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Représentation d'Euler

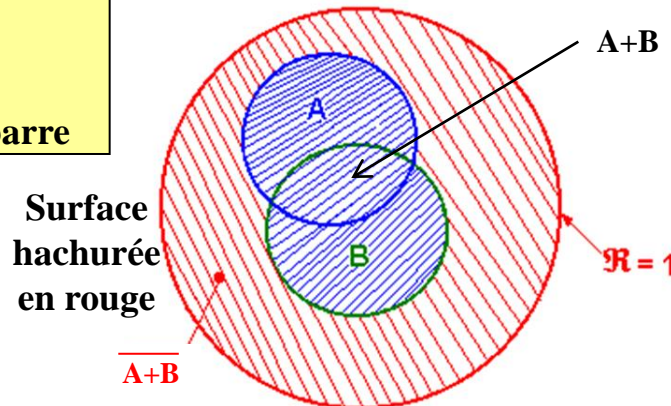
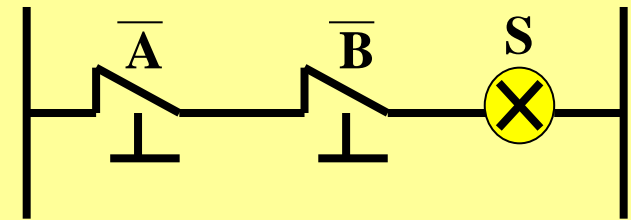


Table de vérité

Entrée		sortie
A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Circuit électrique



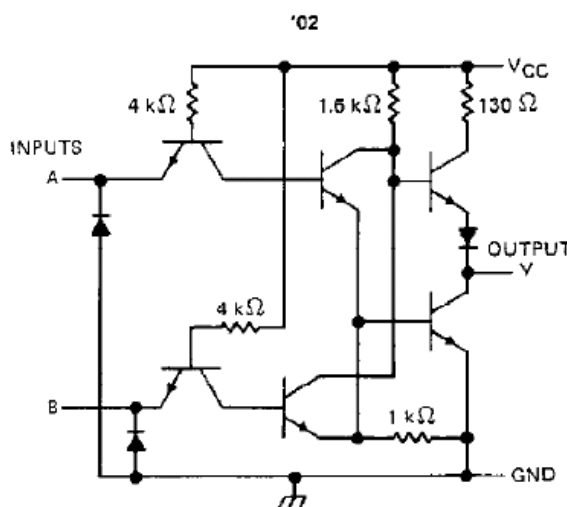
Interrupteur normalement fermé

Chapitre III : Les portes logiques

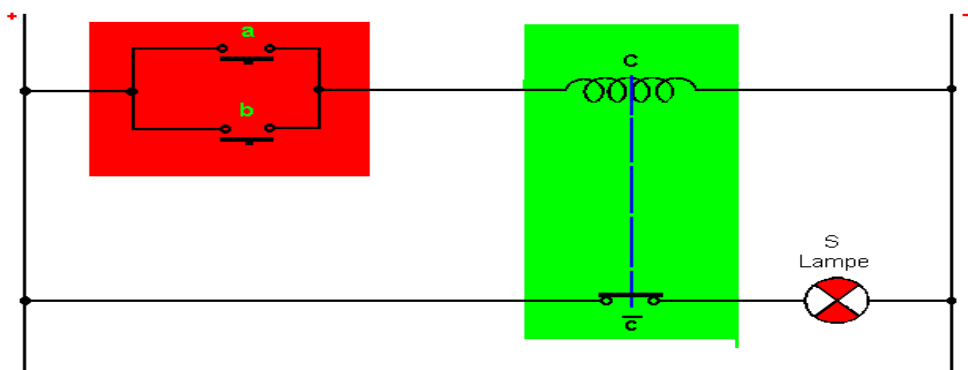
Chronogramme



Synoptique du CI « NOR »

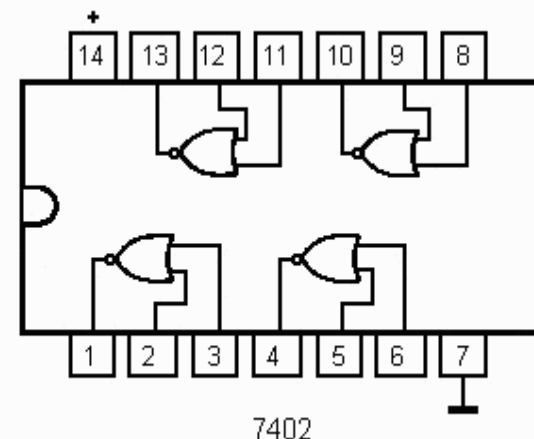


Circuit électrique

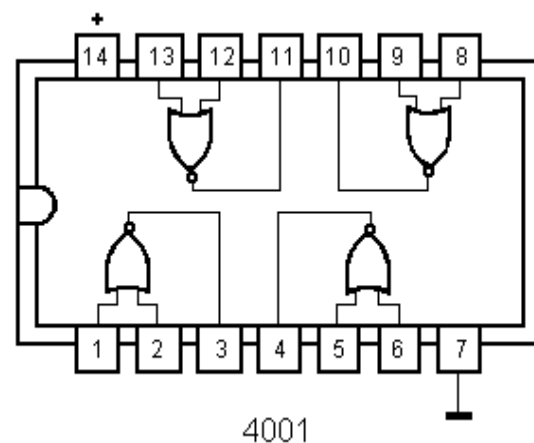


Circuit intégré logique

brochage TTL



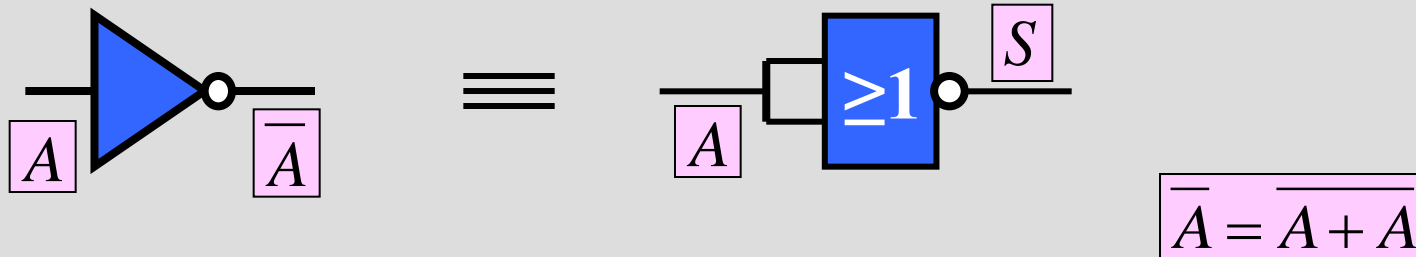
brochage CMOS



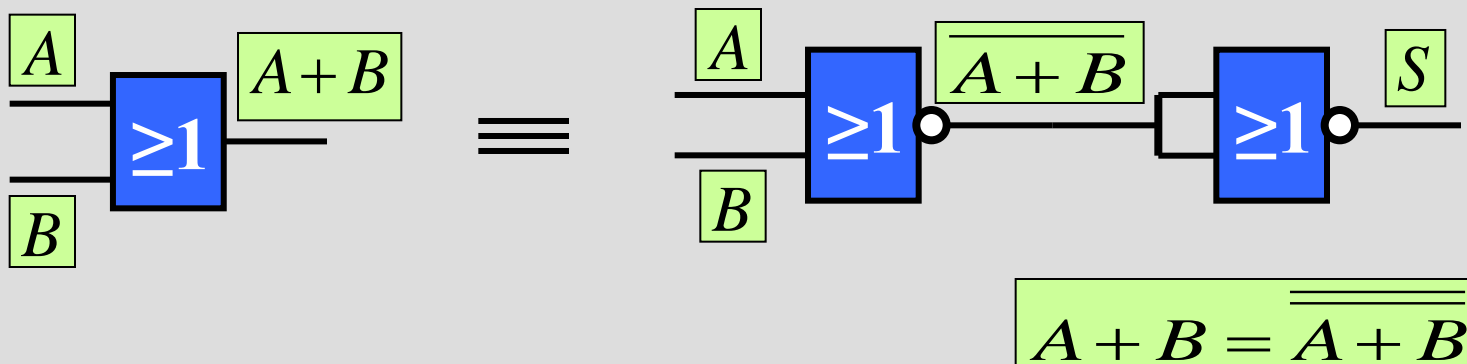
Chapitre III : Les portes logiques

Universalité de la porte NON-OU (NOR)

Fonction NON

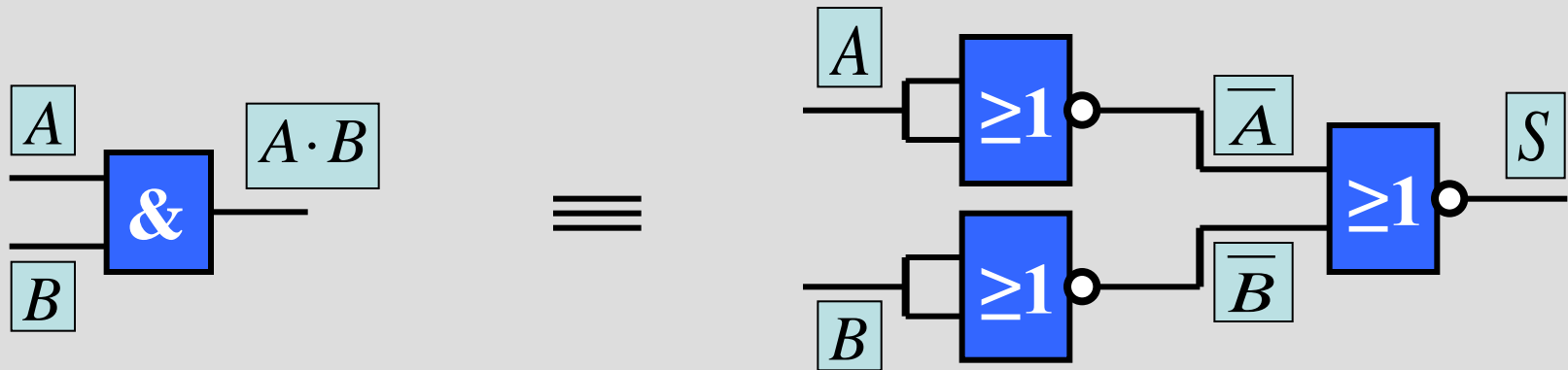


Fonction ET



Chapitre III : Les portes logiques

Fonction OU



$$A \cdot B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

L'opérateur logique NOR est universel car on peut réaliser avec n'importe quel circuit logique.

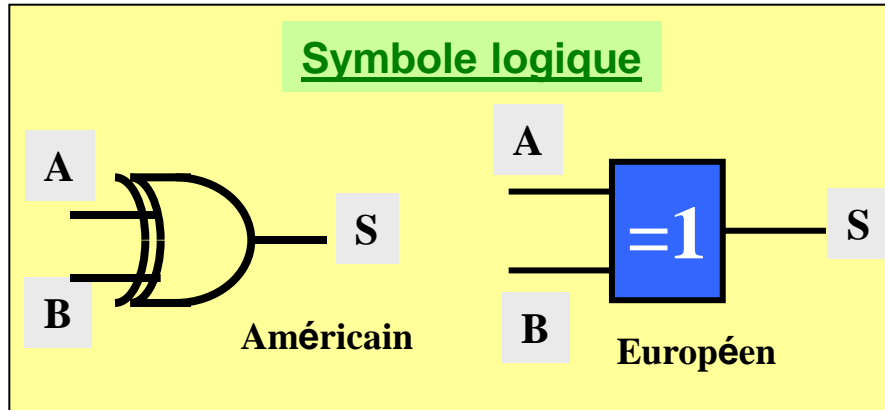
Chapitre III : Les portes logiques

3° Porte OU_{exclusif} (XOR)

composite

Codage ou cryptographie

Symbole logique



Deux entrées au maximum

Équation logique

$$S = A \oplus B$$
$$= \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

S se lit A barre fois B plus A fois B barre

Notation



Représentation d'Euler

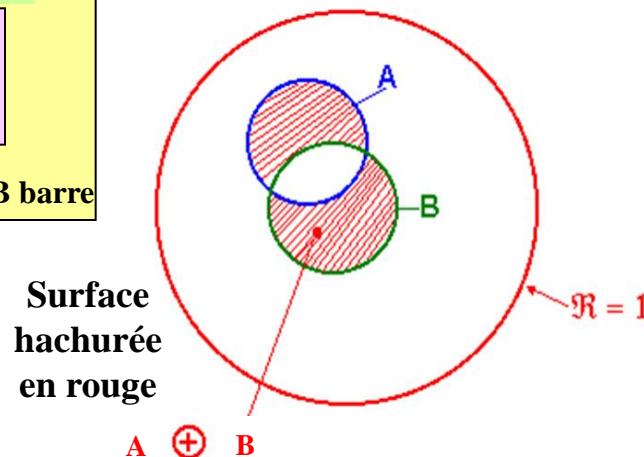
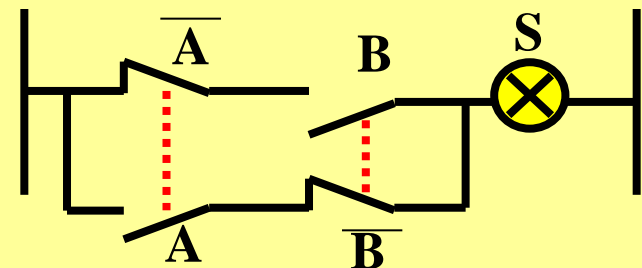


Table de vérité

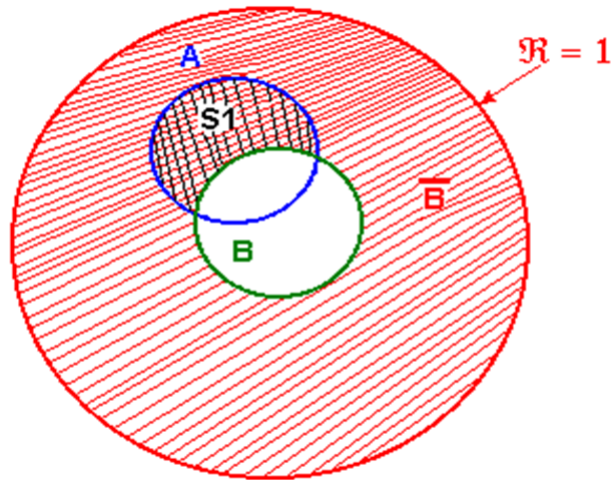
Entrée		sortie
A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Circuit électrique



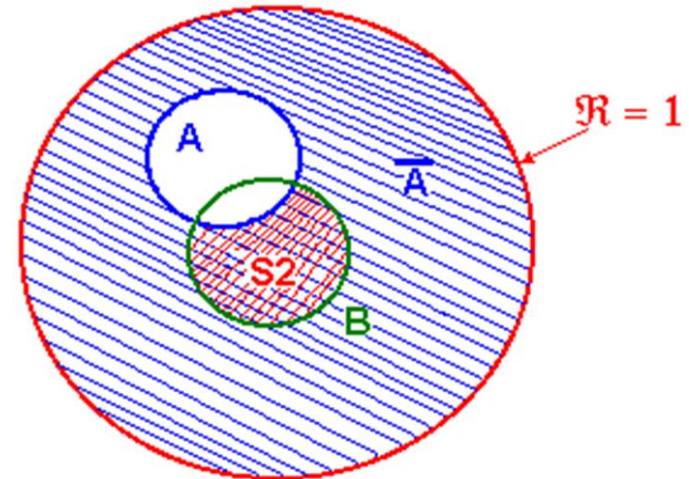
Chapitre III : Les portes logiques

Représentation d'Euler



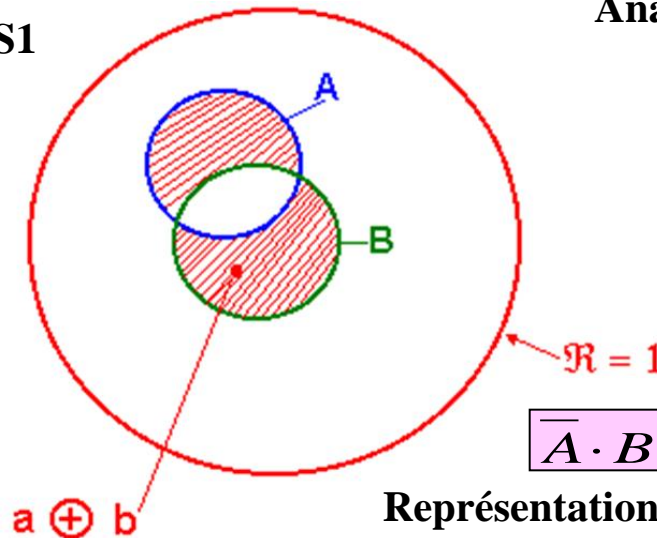
Analyse de la surface S1

$$A \cdot \overline{B}$$



Analyse de la surface S2

$$\overline{A} \cdot B$$

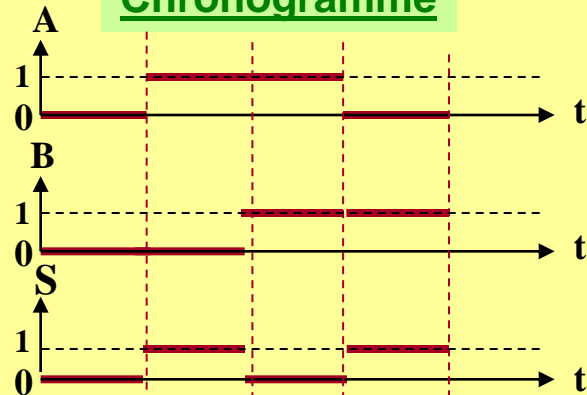


Représentation de la fonction XOR

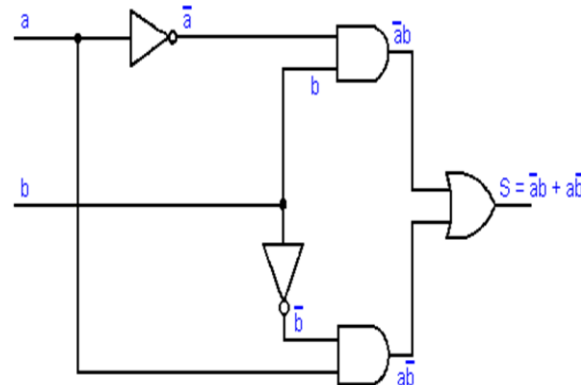
$$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

Chapitre III : Les portes logiques

Chronogramme



Logigramme du CI « XOR »



Propriétés de XOR

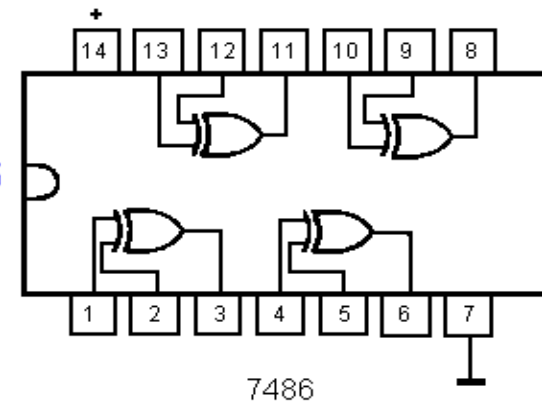
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	Associativité
$a \oplus b = b \oplus a$	Commutativité
$(a \oplus b) \oplus b = a$	absorption
$(a \oplus b) \oplus a = b$	absorption

$$a \oplus b = c \quad \text{alors} \quad b \oplus c = a \quad \text{et} \quad c \oplus a = b$$

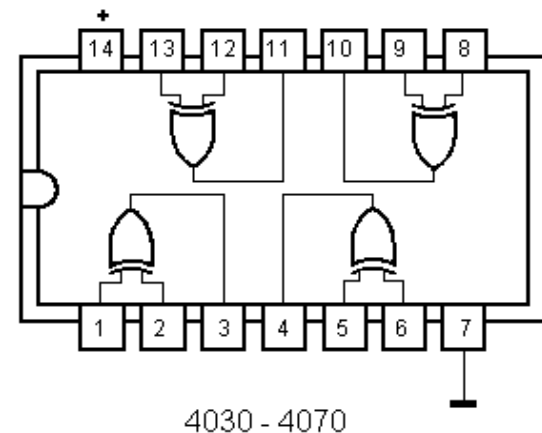
Rotation

Circuit intégré logique

brochage TTL



brochage CMOS



Chapitre III : Les portes logiques

Différentes expressions de XOR

$$s = a \oplus b$$

$$s = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$$

$$s = \overline{a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}}$$

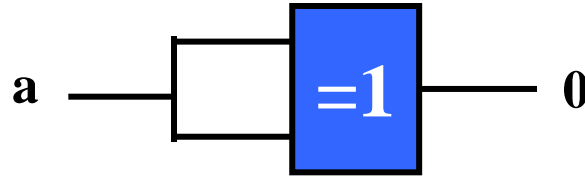
$$s = (\overline{a \cdot b}) \cdot (a + b)$$

$$s = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (a + b)$$

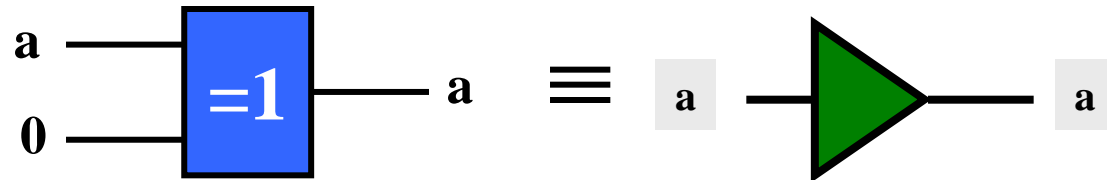
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XOR

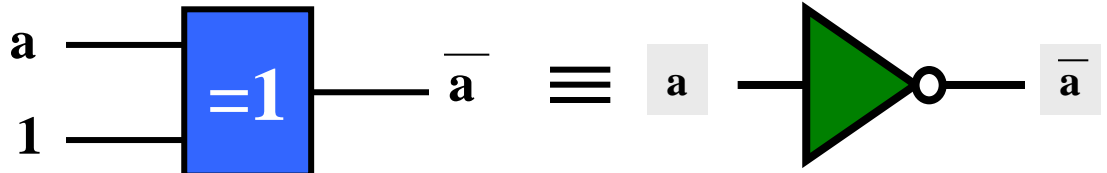
$$a \oplus a = 0$$



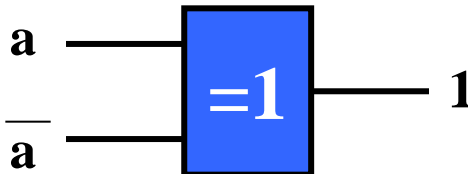
$$a \oplus 0 = a$$



$$a \oplus 1 = \bar{a}$$



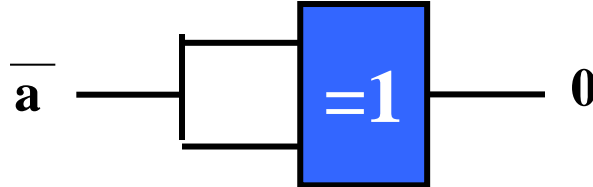
$$a \oplus \bar{a} = 1$$



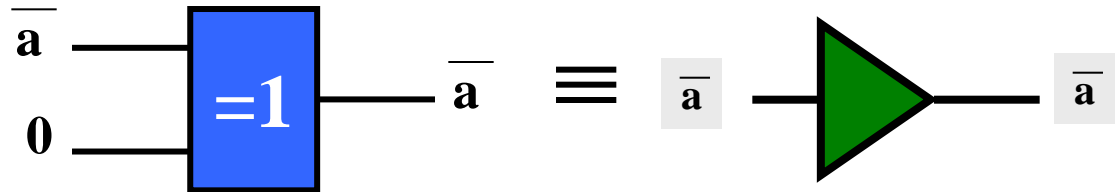
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XOR

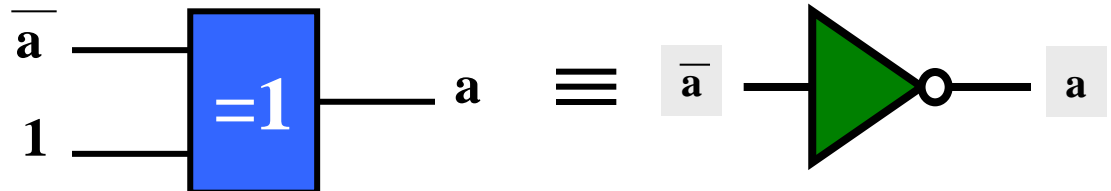
$$\overline{a} \oplus \overline{a} = 0$$



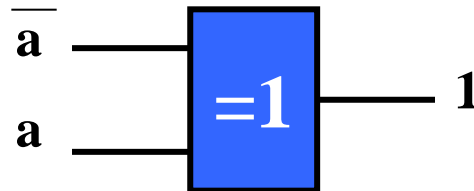
$$\overline{a} \oplus 0 = \overline{a}$$



$$\overline{a} \oplus 1 = a$$

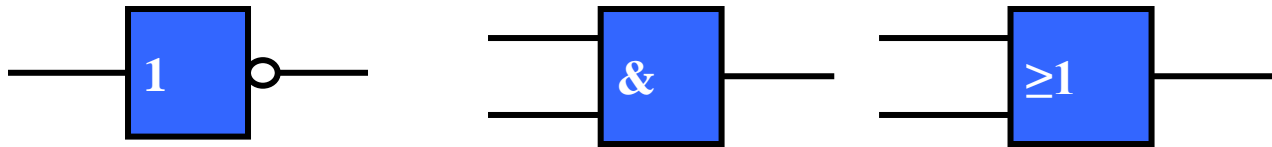


$$\overline{a} \oplus a = 1$$

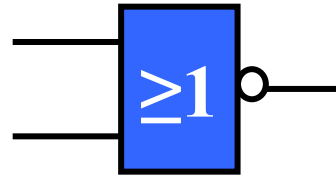


Chapitre III : Les portes logiques

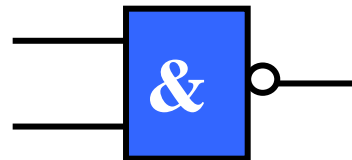
Exemple n°1 : Réalisation de XOR à partir des portes logiques de base NOT, AND et OR



Exemple n°2 : Réalisation de XOR à l'aide uniquement des portes universelles NOR



Exemple n°3 : Réalisation de XOR à l'aide uniquement des portes universelles NAND



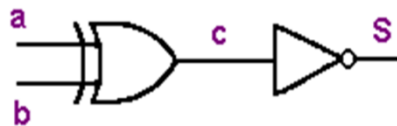
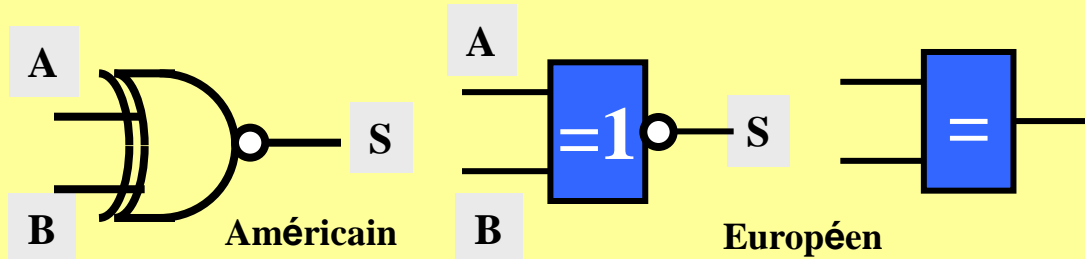
Chapitre III : Les portes logiques

4° Porte NON OU exclusif (XNOR)

composite

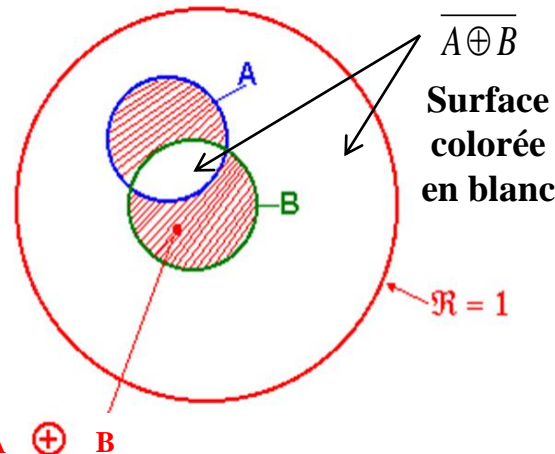
Codage ou cryptographie

Symbole logique



Deux entrées au maximum

Représentation d'Euler



Équation logique

$$S = \overline{A \oplus B}$$
$$= A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

S se lit A fois B plus A barre fois B barre

Notation

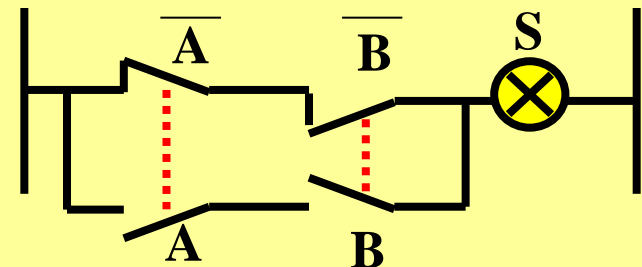


$$S = A \odot B$$

Table de vérité

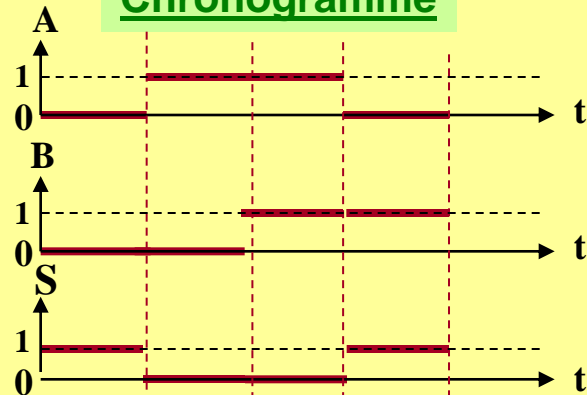
Entrée		sortie
A	B	XNOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Circuit électrique

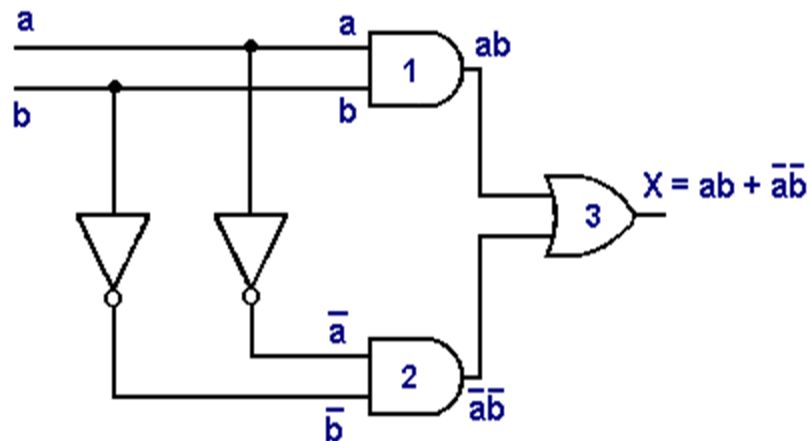


Chapitre III : Les portes logiques

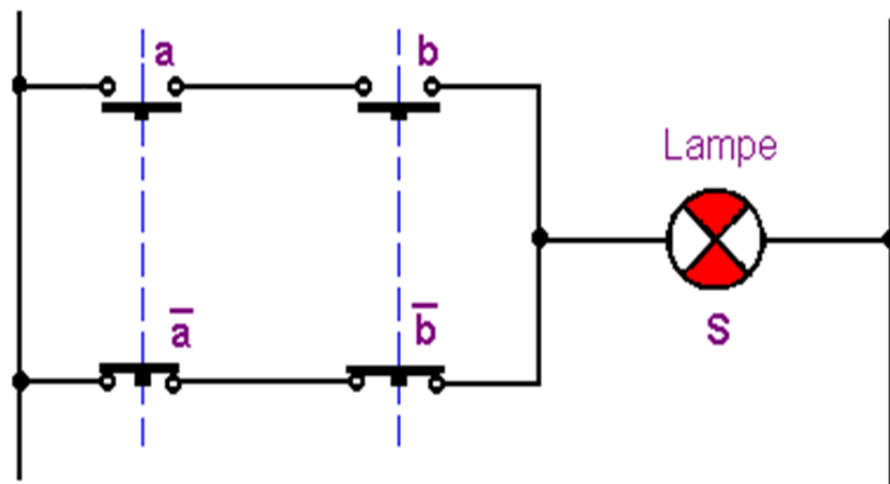
Chronogramme



Synoptique du CI « XNOR »

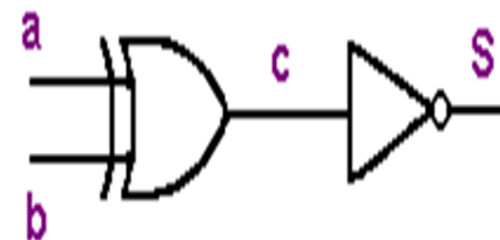


Circuit électrique



Circuit intégré logique

brochage TTL ou CMOS



Chapitre III : Les portes logiques

Différentes expressions de XNOR

$$s = \overline{a \oplus b}$$

$$s = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$s = \bar{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}$$

$$s = (\overline{\bar{a} \cdot b}) \cdot (\bar{a} + b)$$

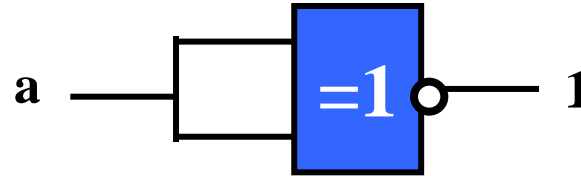
$$s = (a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b)$$

$$S = a \odot b$$

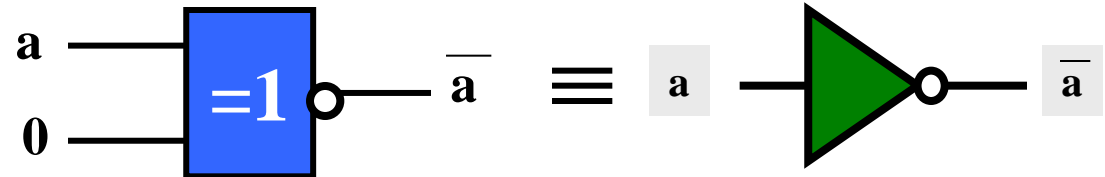
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XNOR

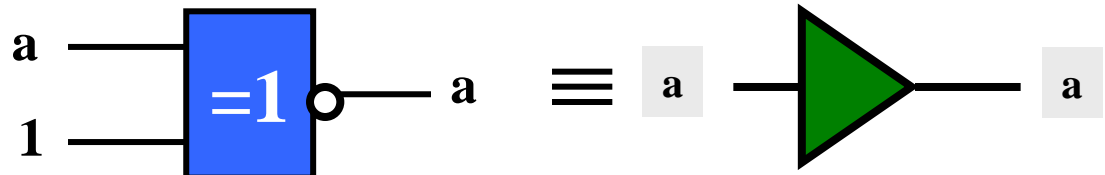
$$\overline{a \oplus a} = 1$$



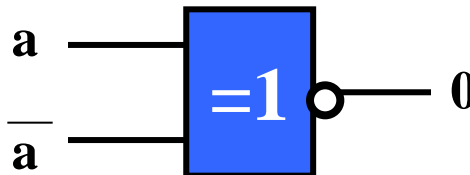
$$\overline{a \oplus 0} = \overline{a}$$



$$\overline{a \oplus 1} = a$$



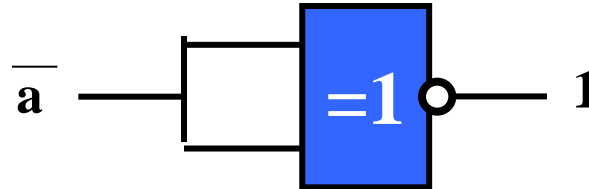
$$\overline{a \oplus \overline{a}} = 0$$



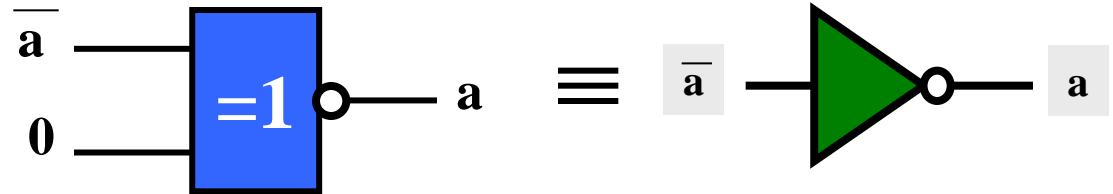
Chapitre III : Les portes logiques

Quelques propriétés mathématiques supplémentaires de XNOR

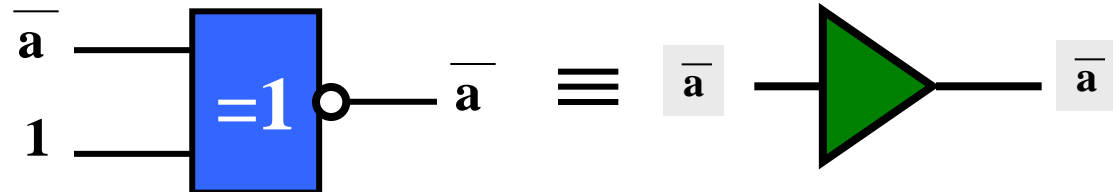
$$\overline{\overline{a}} \oplus \overline{\overline{a}} = 1$$



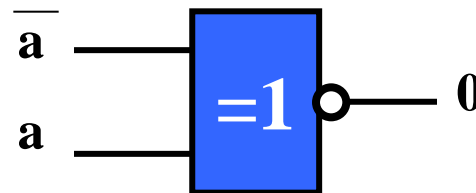
$$\overline{\overline{a}} \oplus 0 = a$$



$$\overline{\overline{a}} \oplus 1 = \overline{\overline{a}}$$

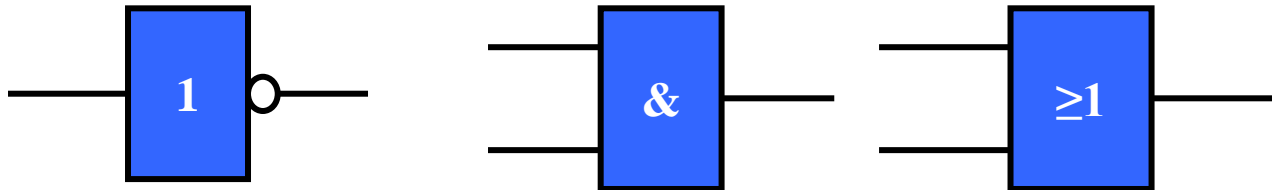


$$\overline{\overline{a}} \oplus a = 0$$

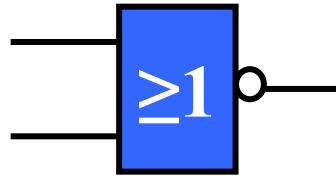


Chapitre III : Les portes logiques

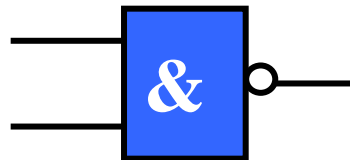
Exemple n°1 : Réalisation de XNOR à partir des portes logiques de base NOT, AND et OR



Exemple n°2 : Réalisation de XNOR à l'aide uniquement des portes universelles NOR










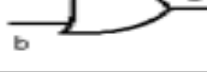
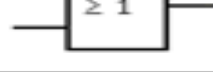
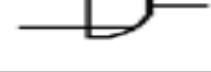
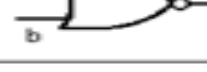
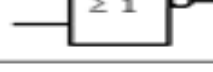
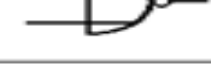
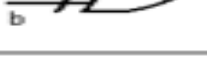
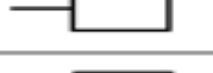
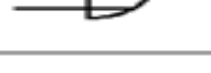

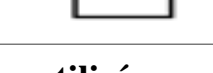
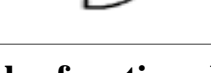


Exemple n°3 : Réalisation de XNOR à l'aide uniquement des portes universelles NAND



Chapitre III : Les portes logiques

SYMBOLES GRAPHIQUES : Résumé

FONCTION	EQUATION	SYMBOLES			TABLES DE VERITE	
		International	Français	Allemand	a	S
NON	$S = \overline{a}$				a	S
					0	1
ET	$S = a \cdot b$				a	b
					0	0
NAND	$S = \overline{a \cdot b}$				1	0
					1	1
OU	$S = a + b$				a	b
					0	0
NOR	$S = \overline{a + b}$				1	0
					1	1
OU Exclusif	$S = a \oplus b$				a	b
					0	0
NOR Exclusif	$S = \overline{a \oplus b}$				1	0
					1	1

différentes représentations graphiques utilisées pour les fonctions logiques

II. Conséquences des théorèmes de DE Morgan

Chapitre III : Les portes logiques

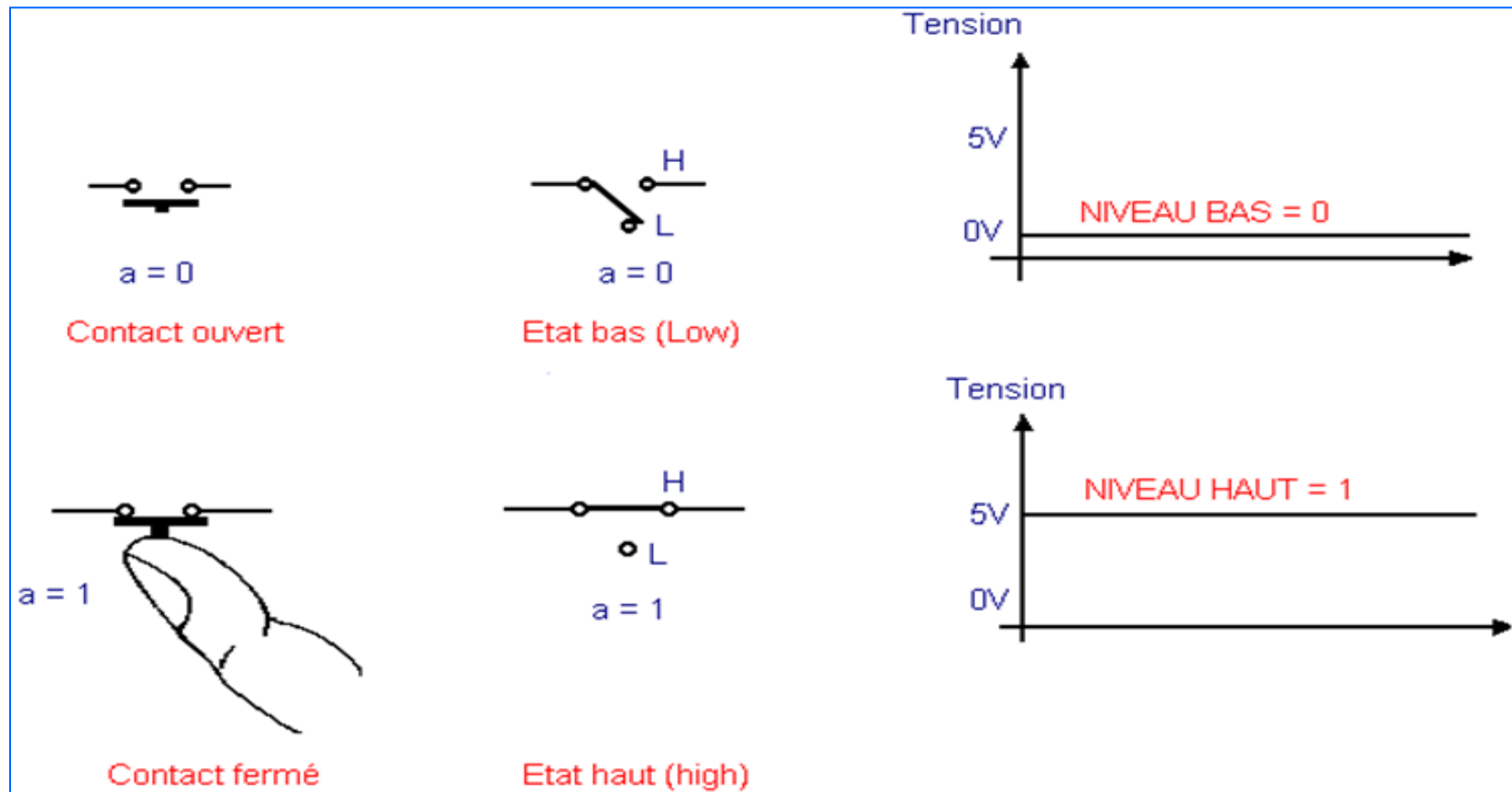
1°) Logique positive et logique négative

2°) Conséquences des Théorèmes de DE Morgan

Chapitre III : Les portes logiques

1°) Logique positive et logique négative

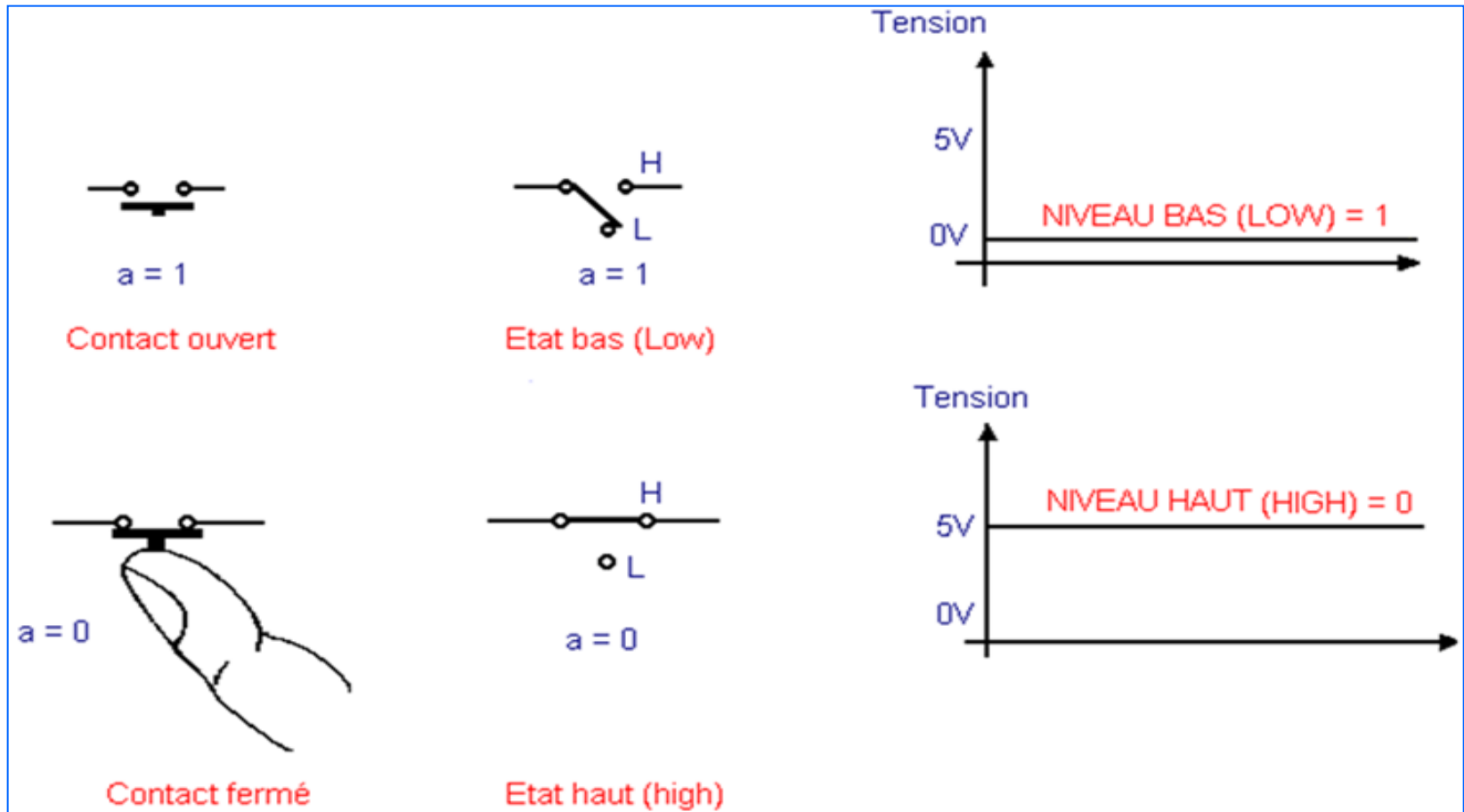
■ Logique positive :



Convention logique positive

Chapitre III : Les portes logiques

■ Logique négative:



Convention logique négative

Chapitre III : Les portes logiques

■ Principe de dualité

Entrée		Sortie
A	B	$A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

convention logique positive

Entrée : L = 0, H = 1

Sortie : L = 0, H = 1

Entrée		Sortie
A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

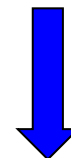


Entrée		Sortie
A	B	$A.B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

convention logique négative

Entrée : L = 1, H = 0

Sortie : L = 1, H = 0



Entrée		Sortie
A	B	$A.B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Mise en ordre

Conclusion : ET de la LP se comporte comme un OU de la LN

Chapitre III : Les portes logiques

■ Table de dualité :

Un circuit se comportant en logique positive comme un :	Se comporte en logique négative comme un :
ET	OU
NAND	NOR
OU	ET
NOR	NAND
OU Exclusif	NOR Exclusif
NOR Exclusif	OU Exclusif

Table de dualité des fonctions logiques

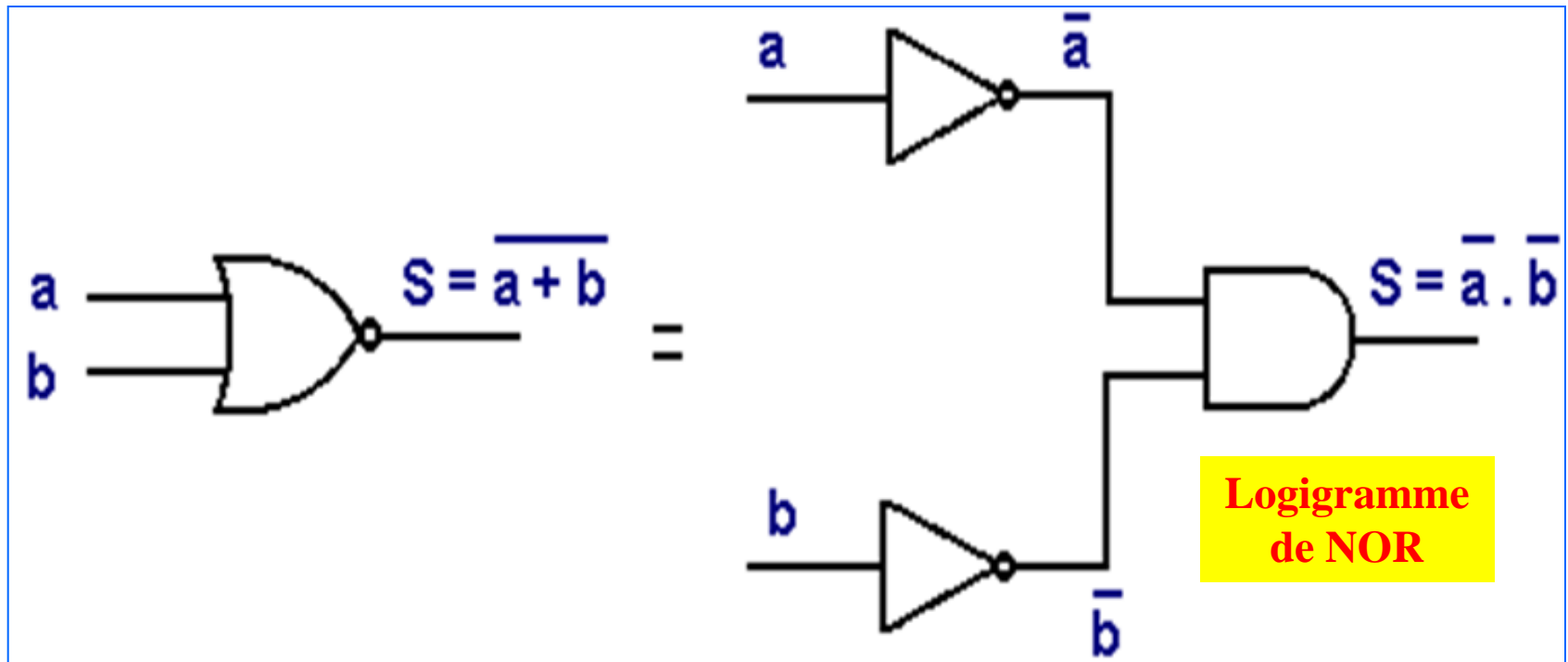
Chapitre III : Les portes logiques

2°) Conséquences des Théorèmes de DE Morgan

■ Conséquence n°1 :

► Le théorème n°1 de De Morgan montre qu'une fonction NOR peut être fabriquée à partir des fonctions AND et NOT.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

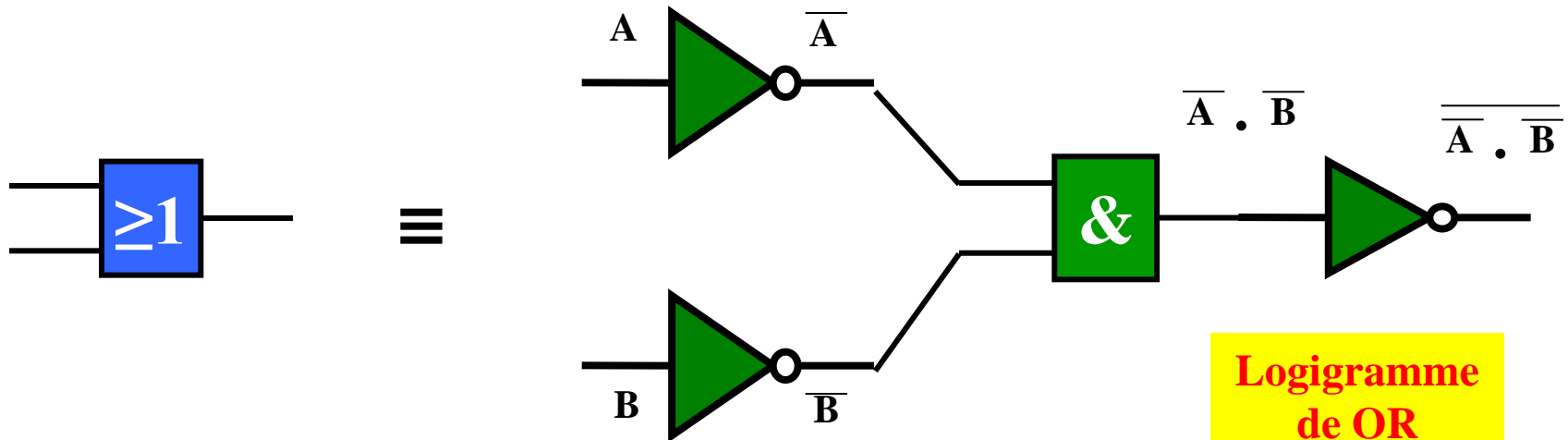


Chapitre III : Les portes logiques

De même :

► Le théorème n°1 de De Morgan montre qu'une fonction OR peut être fabriquée à partir des fonctions AND et NOT.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$



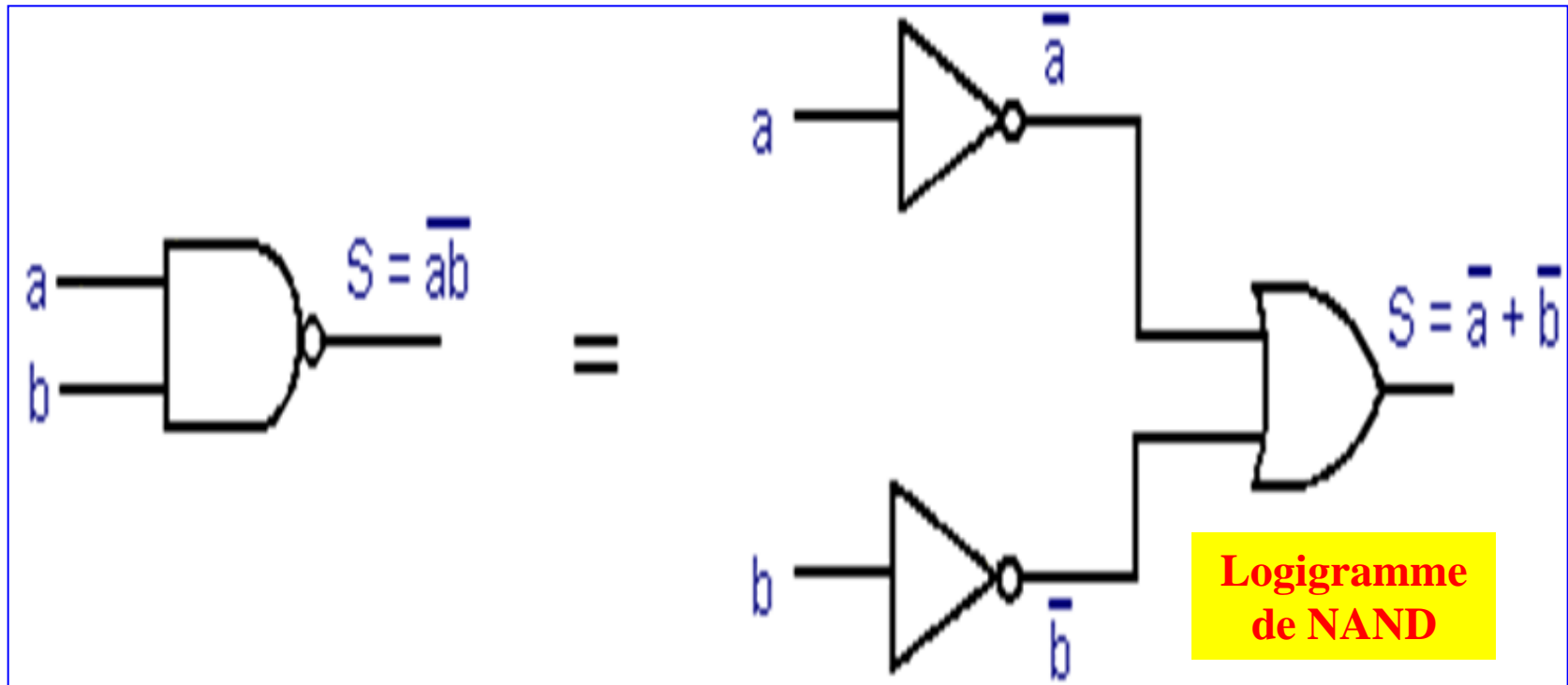
$$OR = \underbrace{A + B}_{\text{définition}} = \underbrace{\overline{\overline{A + B}}}_{\text{doublenégation}} = \underbrace{\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}}_{\text{De Morgan}}$$

Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°2 :

► Le théorème n°2 de De Morgan montre qu'une fonction NAND peut être fabriquée à partir des fonctions OR et NOT.

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

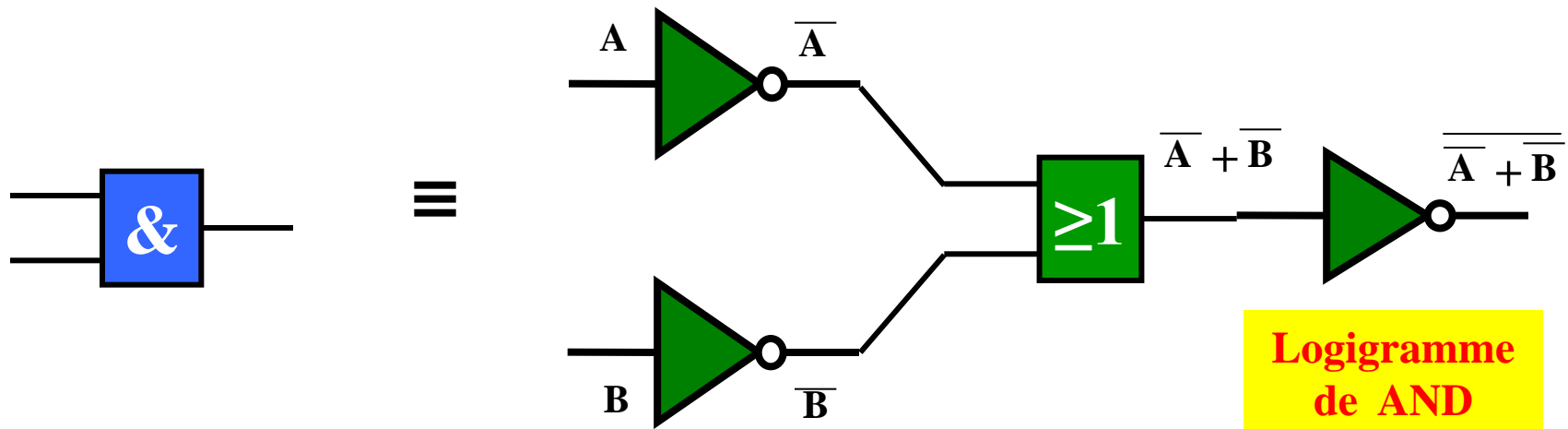


Chapitre III : Les portes logiques

De même :

► Le théorème n°2 de De Morgan montre qu'une fonction AND peut être fabriquée à partir des fonctions OR et NOT.

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

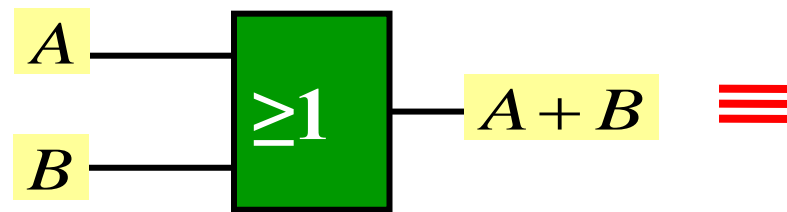


$$AND = \underbrace{A \bullet B}_{\text{définition}} = \underbrace{\overline{\overline{A \bullet B}}}_{\text{double négation}} = \underbrace{\overline{\overline{A} + \overline{B}}}_{\text{De Morgan}}$$

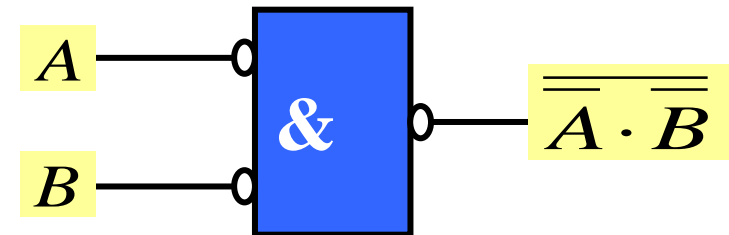
Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°3 : Principe de dualité

► De même, à partir des deux théorèmes de De Morgan nous pouvons montrer qu'une porte **AND** en logique positive se comporte comme une porte **OR** en logique négative et vice versa.



OR en logique positive



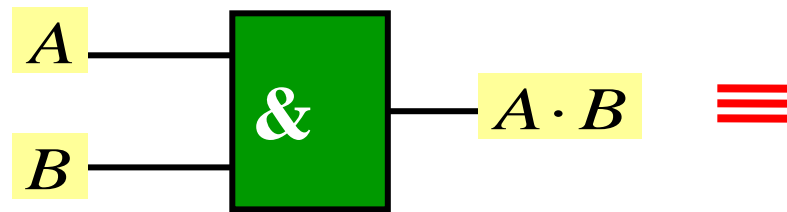
AND en logique négative

$$\underbrace{OR}_{LP} = \underbrace{A + B}_{\text{définition}} = \underbrace{\overline{\overline{A + B}}}_{\text{double négation}} = \overline{\overline{A}} \bullet \overline{\overline{B}} = \underbrace{AND}_{LN}$$

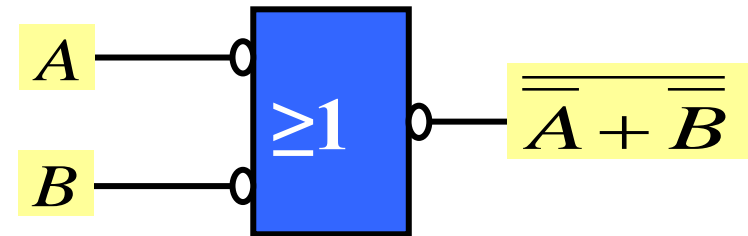
Chapitre III : Les portes logiques

► De même, à partir des deux théorèmes de De Morgan nous pouvons montrer qu'une porte **AND** en logique positive se comporte comme une porte **OR** en logique négative et vice versa.

$$\underbrace{AND}_{LP} = \underbrace{A \cdot B}_{\text{définition}} = \underbrace{\overline{\overline{A \cdot B}}}_{\text{double négation}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \underbrace{OR}_{LN}$$



AND en logique positive



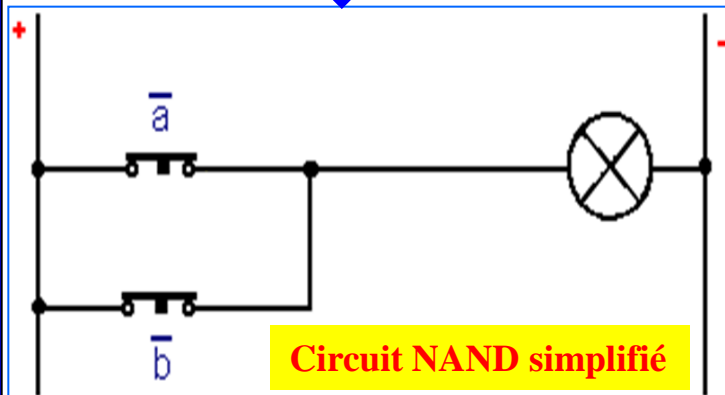
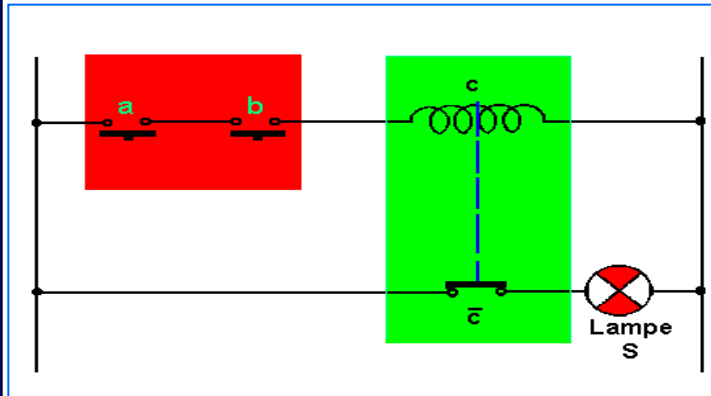
OR en logique négative

Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°4 : simplification des circuits électriques

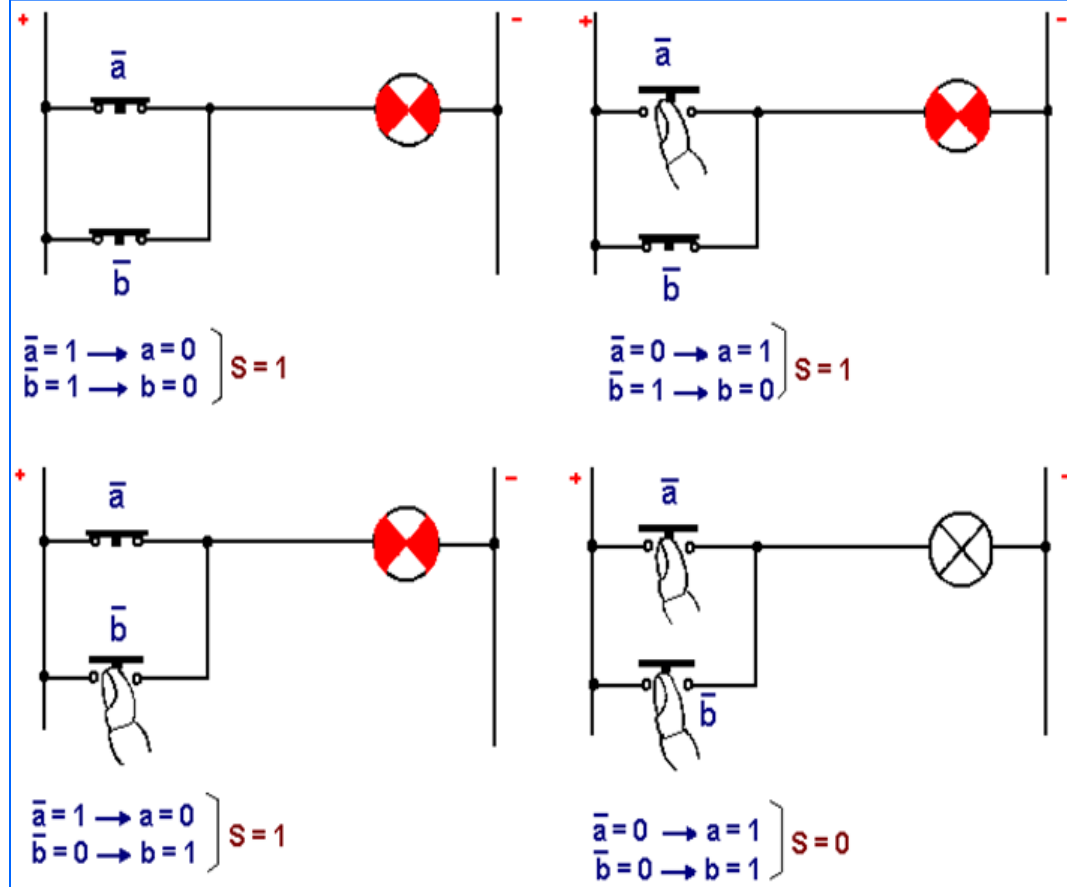
► Exemple de NAND

Circuit NAND



Circuit NAND simplifié

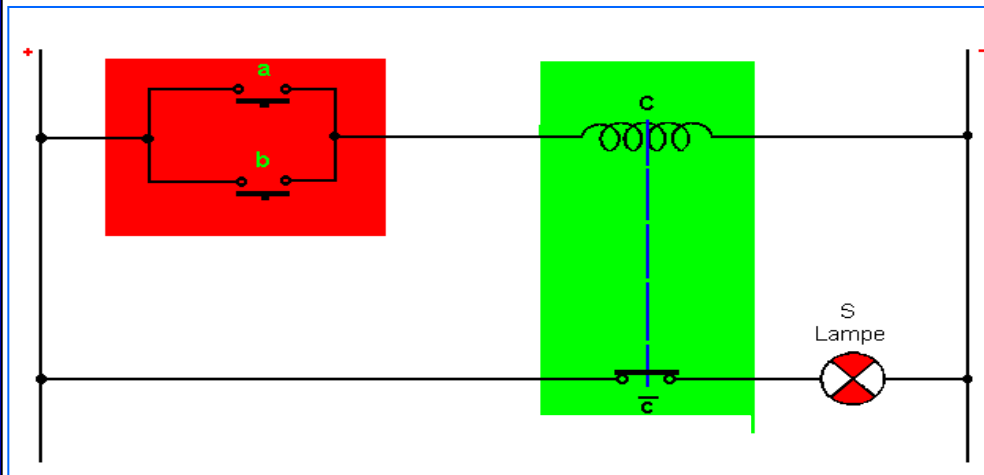
Fonctionnement de NAND simplifié



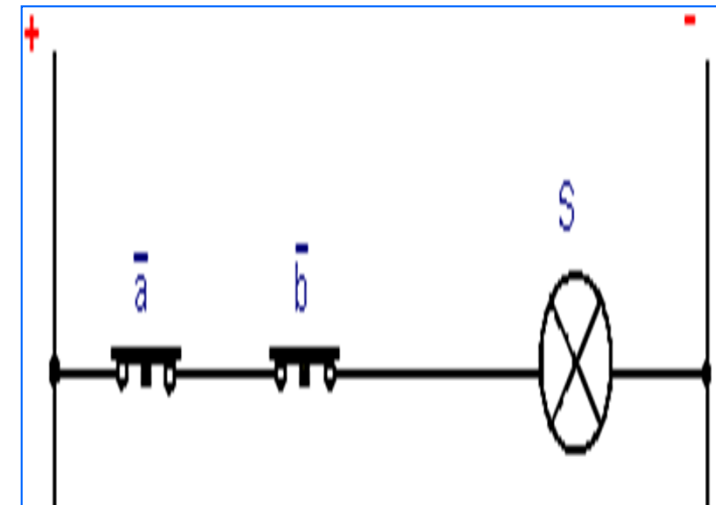
Chapitre III : Les portes logiques

■ Conséquence n°4 : simplification des circuits électriques

► Exemple de NOR



Circuit NOR



**Circuit NOR
simplifié**

IV. Identités Booléennes

Chapitre III : Les portes logiques

- 1°) Propriétés des fonctions logiques : Identités Booléennes
- 2°) Matérialisation par des circuits électriques
- 3°) Simplification algébrique

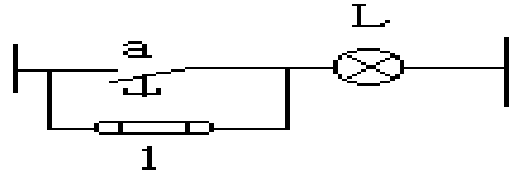
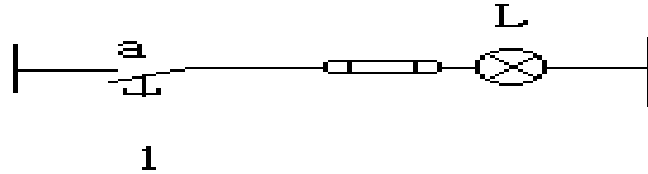
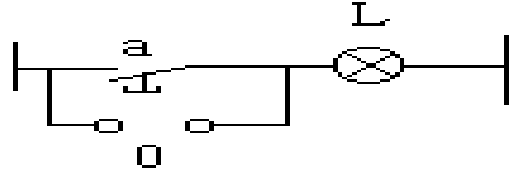
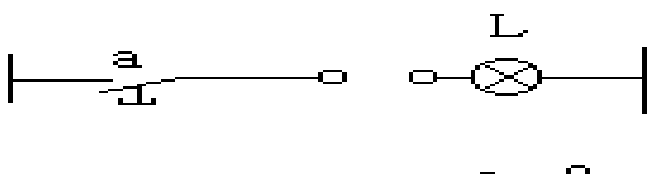
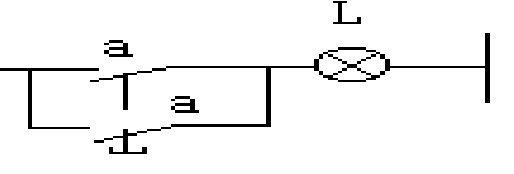
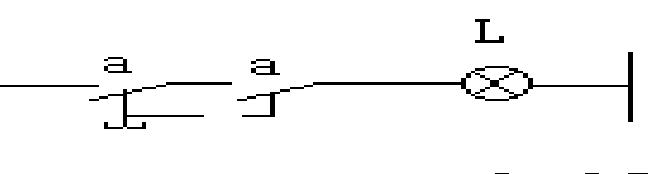
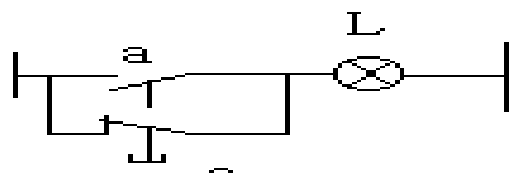
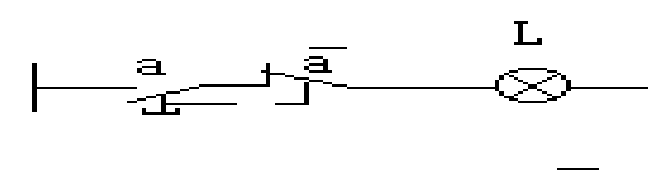
Chapitre III : Les portes logiques

1°) Propriétés des fonctions logiques : Identités Booléennes

Propriétés		Théorèmes
Commutativité	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$	
Distributivité	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	
Eléments neutres	$a + 0 = a$ $a \cdot 1 = a$	Des bornes universelles
Complémentation	$a + \bar{a} = 1$ $a \cdot \bar{a} = 0$	De non contradiction
	$a + a = a$ $a \cdot a = a$	D'idempotence $1 + 1 = 1$ $1 \cdot 1 = 1$
Eléments absorbants	$a \cdot 0 = 0$ $a + 1 = 1$	Du tiers exclus $1 \cdot 0 = 0$ $0 + 1 = 1$
	$a + (a \cdot b) = a + a \cdot b = a$ $a \cdot (a + b) = a$	D'absorption
	$\bar{\bar{a}} = a$	D'involution
	$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a$	D'inclusion
	$\overline{a + b + c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ $\overline{a \cdot b \cdot c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	De de Morgan
	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c$	
	$a \oplus a = 0$ $a \oplus \bar{a} = 1$	
	$a \oplus 0 = a$ $a \oplus 1 = \bar{a}$	

Chapitre III : Les portes logiques

2°) Matérialisation par des circuits électriques

Sommes logiques	Produits logiques
 $a + 1 = 1$	 $a . 1 = a$
 $a + 0 = a$	 $a . 0 = 0$
 $a + a = a$	 $a . a = a$
 $a + \bar{a} = 1$	 $a . \bar{a} = 0$

Chapitre III : Les portes logiques

Travaux Dirigés

Travaux dirigés

3°) Simplification algébrique

$$x = A \cdot B \cdot (\overline{\overline{A} + B \cdot C})$$

$$x = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$$

$$x = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$$

$$x = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot D + \overline{C} \cdot \overline{D}$$

$$x = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} + \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{A \cdot B \cdot C}$$

$$x = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot (\overline{\overline{A \cdot C}})$$

$$x = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$x = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A \cdot B \cdot C}$$

$$x = \overline{A} \cdot C (\overline{\overline{A \cdot B \cdot D}}) + \overline{A \cdot B \cdot C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$x = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{\overline{A \cdot B \cdot C}} + \overline{A \cdot B \cdot C}$$

$$x = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{A \cdot B \cdot C}$$

$$x = \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{A \cdot \overline{B} \cdot C}$$

$$x = (\overline{A} + B) \cdot (A + B + D) \cdot \overline{D}$$