Lois de probabilité discrètes

- Loi uniforme
  - X={1,2,…,n} : $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$

$$E(X)=\frac{n+1}{2} \qquad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

- Loi de bernoulli
  - X={0,1} : $P(X=1)=p$

$$E(X)=p \qquad V(X)=p(1-p)$$

- Loi binomiale

  L'évènement de probabilité p apparaît k fois en n essais

  => n épreuves de bernoulli, avec les combinaisons de k dans n

  - X={0,1,2, …, n) : $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

    $E(X)=n\times p \qquad V(X)=n\times p\times(1-p)$

- Loi géométrique

  L'évènement de probabilité p apparaît au $k^{ième}$ essai.

  => k épreuves de bernoulli, avec X=1 à la $k^{ième}$ *et 0 avant* :

$$P(X=k)=P(X_1=0;X_2=0;\ldots;X_k=1)=(1-p)^{k-1}p$$

$$E(X)=\frac{1}{p} \qquad V(X)=\frac{1-p}{P^2}$$

  - Loi sans mémoire : La probabilité de l'événement au $k^{ième}$ essai ne dépend pas de l'historique des évènements
    - Propriété ignorée par les joueurs !

- Loi de Poisson

  Le nombre moyen d'occurrence d'un événement X dans un temps *T* est k

  - X={0,1,...} :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$

    - λ = nombre moyen d'événement par unité de temps.

  - Relation avec la loi binomiale :

    - Si p<0.1 et n>50 : B(*n*,*p*)≈P(*np*)

Lois de probabilité continues

- Loi uniforme

$$x \in [0;a] \qquad f(x) = \frac{1}{a} \qquad F(x) = \frac{x}{a}$$

$$E(x) = \frac{a}{2} \qquad V(x) = \frac{a^2}{12}$$

- Loi exponentielle

Utilisée en fiabilité pour représenter une espérance de vie

$$x > 0 \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- $E(x) = 1/\lambda$ est souvent appelé MTBF (« mean time between failures ») et λ est le taux de défaillance
  - $P(X > x)$=probabilité d'attendre plus de x avant l'apparition d'un phénomène lorsque $1/\lambda$ est le temps moyen d'attente.
- Loi sans mémoire : le passé ne permet pas de prédire l'avenir.

Loi Gamma

Généralisation de la loi exponentielle utilisée dans les files d'attentes. P(X > x) = probabilité d'attendre plus de x minutes avant la k^{ième} apparition du phénomène étudié, avec 1/λ comme temps moyen d'attente entre deux apparitions du phénomène.

$$x>0 \qquad f(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda x} \qquad \Gamma(k)=\int_0^\infty y^{k-1}e^{-y}dy$$

$$E(x)=\frac{k}{\lambda} \qquad V(x)=\frac{k}{\lambda^2}$$

- Loi de Gauss (« normale »)

Loi fondamentale en statistique. Très souvent utilisée en modélisation.

$$\forall x \qquad f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

$$E(x)=m \qquad\qquad V(x)=\sigma^2$$

$$si \quad X\approx N(m;\sigma)\Rightarrow\frac{X-m}{\sigma}\approx N(0;1)$$

  - Loi limite de caractéristiques issues d'un échantillon de grande taille.
  - On a les convergences suivantes (souvent abusées dans les sondages !):
    - B(n;p)→N(np;np(1-p)) (np et n(1-p) supérieurs à 5)
    - P(λ)→N(λ; λ) (avec λ>18)

- Loi du Chi 2 (Khi-deux de Pearson)

$$Si \quad Z_1, Z_2, \ldots, Z_k \quad \approx N(0;1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \approx \chi^2_{(k)}$$

Dite « chi2 à k degrés de liberté »

- Loi de Student

$$Si \quad Z \approx N(0;1) \quad \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_k}{k}}} \approx t(k)$$

Dite « Student à k degrés de liberté »

- Loi de Fisher-Snédécor

$$\frac{\frac{\chi^2_k}{k}}{\frac{\chi^2_l}{l}} \approx F(k;l)$$

Dite « Fisher à k, l degrés de liberté »

Exemple 1

- Une machine tombe en panne selon la loi exponentielle avec un facteur λ =0.5/heure. Quelle est la probabilité que la machine tombe en panne entre la première et deuxième heure après le démarrage.

$$P(1hr \le T \le 2hr) = P(T \le 2hr) - P(T \le 1hr)$$
$$= \left(1 - e^{-0.5/hr \cdot 2hr}\right) - \left(1 - e^{-0.5/hr \cdot 1hr}\right) = 0.24$$

- La durée de vie d'un composant d'un système est supposée suivre une loi exponentielle de paramètre λ. Un grand nombre de ces composants sont testés et on a observé que 5% ne durent pas plus de 100 heures.

  Estimer la probabilité qu'un composant pris au hasard dure plus de 200 heures, ou T est la durée de la vie en heures

La probabilité de survie est $P(T>100)=1-(1-e^{-\lambda\times 100})=0.95=e^{-\lambda\times 100}$

Pour $T \ge 200$, $P(T \ge 200)$

$$= e^{-\lambda 200}$$
$$= (e^{(-\lambda 100)^2}$$
$$= (1 - .05)^2$$
$$= (0.95)^2 = 0.9025 \approx 0.9$$

Exemple 2

Le taux global de défaillance d’un processus est la somme des taux de chaque composant et ceux-ci suivent une loi de mortalité exponentielle. Les taux élémentaires sont donnés par des documents fournis par le designer.

Pour un taux de défaillance $\lambda = 12\ 10^{-6}\ h^{-1}$ et pour un fonctionnement continu pendant 208 jours par an, donnez la probabilité théorique que le processus fonctionne encore au bout de ces 208 jours.

t = 24 x 208 » 5000 heures

la probabilité théorique que le processus est fonctionnel encore est alors de $R(5000) = e^{-0.000012.x5000} = 0{,}9418$. Ceci signifie que la probabilité d'avoir une défaillance pendant la durée de fonctionnement de 5000 heures est de
f = 1 - 0,9418 = 0,0582 soit 5,8 %.