Exercice 1

Soit la différence centrée :

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

(a) Obtenir l'ordre de cette approximation en utilisant les développements de Taylor appropriés.

(b) Utiliser cette formule de différences pour obtenir une approximation de $f''(2,0)$ pour la fonction tabulée suivante, en prenant d'abord $h = 0,2$, ensuite $h = 0,1$.

Fonction tabulée			
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,8	1,587 7867	2,1	1,741 9373
1,9	1,641 8539	2,2	1,788 4574
2,0	1,693 1472		

(c) À partir des 2 approximations obtenues en b), obtenir une nouvelle approximation de $f''(2,0)$ qui soit plus précise. Préciser l'ordre de cette nouvelle approximation.

Solution :

(a) On montre que: $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!} + \frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!} + \mathcal{O}(h^6)$ et l'approximation est donc d'ordre 2.

(b) Pour $h = 0,2$, on obtient $f''(2,0) \simeq -0,251\,2575$ tandis que, pour $h = 0,1$, on obtient $f''(2,0) \simeq -0,250\,3200$.

(c) Une extrapolation de Richardson (avec $n = 2$) donne $f''(2,0) \simeq -0,250\,0075$ qui est une approximation d'ordre 4 puisque le deuxième terme de l'erreur obtenue en a) est de degré 4 en h.

Exercice 2

Le tableau suivant présente la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	2,00
10	1,89
20	1,72
30	1,44
35	1,21
40	1,01

(a) En vous servant au besoin plusieurs fois d'une formule aux différences appropriée, obtenir une approximation de l'accélération $a(t)$ (en m/s^2) en $t = 15s$ qui soit d'ordre 4.

(b) La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans la conduite cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{40}\int_0^{40} v(t)\,dt.$$

i. Calculer une approximation d'ordre 2 de la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau.

ii. Comment pourrait-on calculer la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau avec un *maximun* de précision (au moins d'ordre 4)? **Ne pas calculer cette approximation.**

Réponse :

(a) On utilise 2 fois la différence centrée d'ordre 2 avec $h = 5$ et $h = 15$. On utilise ensuite l'extrapolation de Richardson pour obtenir une aproximation d'ordre 4 $a(15) = v'(15) \simeq -0,0167\,9167$.

(b) i. On utilise la méthode des trapèzes dans les 3 premiers intervalles avec $h = 10$ et dans les 2 derniers avec $h = 5$:

$$\begin{aligned} v_{moy} &= \tfrac{1}{40}\textstyle\int_0^{40} v(s)ds = \tfrac{1}{40}(\int_0^{30} v(s)ds + \int_{30}^{40} v(s)ds); \\ &\simeq \tfrac{1}{40}(\tfrac{10}{2}(v(0) + 2(v(10) + v(20)) + v(30)) + \tfrac{5}{2}(v(30) + 2v(35) + v(40))). \end{aligned}$$

ii. Pour obtenir une approximation d'ordre 4, on peut utiliser le méthode de Simpson $\frac{3}{8}$ dans les 3 premiers intervalles et la méthode de Simpson $\frac{1}{3}$ dans les intervalles suivants .

Exercice :

Quelle serait l'erreur d'approximation si l'on utilisait la quadrature de Gauss à 3 points pour évaluer :

$$\int_0^3 (3x^5 + 7x^2 + x + 1)\,dx.$$

Solution:

La formule à 3 points est exacte pour les polynômes de degré 5.

Exercice

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx.$$

(a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 4 intervalles.

(b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2}?

(c) Calculer une approximation de I en appliquant la quadrature suivante:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \simeq \tfrac{1}{2}f(-1) + \tfrac{3}{2}f(\tfrac{1}{3})$$

(d) Sachant que le degré de précision de la méthode du trapèze composée est 1, est-il possible d'obtenir avec cette méthode (en utlisant un nombre suffisamment grand d'intervalles) une approximation qui soit meilleure que celle que l'on peut calculer par la quadrature de la question (c)? Discuter.

Solution :

(a) $I \simeq 3,143\,166\,33$

(b) $n = 33$

(c) $I \simeq 3,035\,419\,52$

(d) Oui.

Exercice

On considère la table de différences divisées suivante:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
1,9	0,94 630			
		-0,127 975		
1,5	0,99 749		?	
		-0,314 725		?
2,3	0,74 571		?	
		-0,795 824		
2,7	0,42 738			

(a) Completer la table.

(b) En vous servant de la table de différences divisées, calculer une approximation de $f(1,8)$ en utilisant le polynôme de Newton passant par les 3 premiers points.

(c) Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (b).

(d) Sachant que $f(x) = \sin(x)$, calculer une borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation en $x = 1,8$.

(e) Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en (b), ou le polynôme de Lagrange passant par $f(x)$ en $x = 1{,}5;\ 1{,}9$ et $2{,}3$? Justifier votre reponse.

Solution :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$
1,9	0,94 630			
		-0,127 975		
1,5	0,99 749		-0,466 875	
		-0,314 725		0,082 448
2,3	0,74 571		-0,400 917	
		-0,795 824		
2,7	0,42 738			

(b) $f(1,8) \simeq p_2(1,8) = 0,973\,104$.

(c) $|E_2(1,8)| \simeq 0,123\,672 \times 10^{-2} \Rightarrow p_2(1,8) = 0,\boxed{97}3\,104$ possède 2 chiffres significatifs.

(d) $E_2(1,8) \leq \frac{|\cos(2,3)|}{3!}|(1,8-1,9)(1,8-1,5)(1,8-2,3)|$.

(e) On obtient le même résultat car le polynôme de degré 2 qui passe par les points d'abscisses $x = 1,5;\ 1,9$ et $2,3$ est unique.

Exercice

On considère le système non-linéaire

$$\begin{cases} y - \sin(\pi x) = 0 \\ y + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions et leur position position approximative sur l'intervalle $[-1\,,\,1]$.

(b) Donner le système d'équations *linéaires* à résoudre à la première itération de la *méthode de Newton*, pour l'approximation initiale $(x_0, y_0) = (1/2, 1)$ (ne pas résoudre le système linéaire).

(c) Est-ce que la méthode de Newton va converger rapidement vers la racine $(1, 0)$ de ce système d'équations non linéaires? *Justifier* votre réponse.

(d) Déterminer et identifier graphiquement le lieu des approximations initiales $(x^0\,,\,y^0)$ pour lesquelles la méthode de Newton ne fonctionne pas.

Solution

(a) Il s'agit de trouver graphiquement sur l'intervalle $[-1\,,1]$, les intersections de la courbe $y = \sin(\pi x)$ et la parabole $y = 1-x^2$. On trouve 3 intersections $(-1\,,\,0)$ $(1\,,\,0)$ et proche de $(1/2\,,\,1)$.

(b) Le vecteur résidu et la matrice jacobienne s'écrivent:

$$\vec{R}(x,y) = \begin{pmatrix} y - \sin(\pi x) \\ y + x^2 - 1 \end{pmatrix} \quad J(x,y) = \begin{pmatrix} -\pi\cos(\pi x) & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Il faut résoudre le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice jacobienne est inversible en la solution $[1 \quad 0]^T$ donc la méthode de Newton converge á l'ordre 2.

(d) Pour une approximation initiale (x^0, y^0) donnée, la méthode de Newton ne fonctionne pas si dét$(J(x^0, y^0)) = 0$. Il s'agit de trouver graphiquement l'intersection entre la droite $y = 2x_0$ et la courbe $y = -\pi\cos(\pi x^0)$.