Chapitre VIII

TECHNIQUES AVANCÉES DE PLANIFICATION

Le chapitre précédent était orienté vers la présentation de techniques de planification largement diffusées. Ce chapitre a une vocation nettement plus académique dans la mesure où les approches qu'il présente sont d'un usage encore limité. Elles s'appuient sur une modélisation de problèmes de production qui permet d'utiliser les outils de la recherche opérationnelle. L'orientation retenue est celle d'une mise en évidence des mécanismes de modélisation permettant de définir des problèmes de gestion de processus productifs, qui soient suffisamment proches de ceux rencontrés dans la réalité et susceptibles d'être résolus par ces outils. S'il est faux de réduire, comme certains l'ont tenté, la gestion de production à la recherche opérationnelle, il est tout aussi stupide d'en négliger les potentialités, ce qui peut être dû à une méconnaissance des techniques de modélisation présentées ci-après. La conjonction de progrès réalisés en modélisation et ses techniques de mise en œuvre, conjugués avec ceux réalisés en puissance de traitement et baisse des coûts, observés en informatique, changent fondamentalement l'accessibilité de ses approches (ce qui sera développé à la page 1132).

Table des matières

Index thématique

On commencera par traiter les approches s'appuyant sur la programmation linéaire (section I) avant de présenter assez sommairement, quelques-unes qui utilisent la programmation dynamique (section II, page 562). Une présentation des fondements de la programmation linéaire et de ses dépassements récents est faite au €, ce qui permet ici de se concentrer sur les approches modélisatrices. Certaines de ces modélisations concernent des problèmes de transport ; on se contentera alors de les évoquer en les situant dans le cadre général de modélisation proposé ici et en renvoyant leur étude plus détaillée au chapitre XIII. Ajoutons qu'une discussion approfondie des techniques de modélisation économique de gestion sera faite au § II-2.2, page 652, du chapitre X ; dans ce chapitre X et les deux suivants, il s'agira de modéliser des problèmes associés à des décisions de routine pour permettre d'établir des solutions optimales à appliquer. Dans ce chapitre VIII, il s'agit surtout d'aider à la formulation de problèmes complexes pour lesquels des solutions analytiques n'existent pas mais pour lesquelles existent des outils généraux de résolution numérique, du moins pour des problèmes de taille limitée.

SECTION I QUELQUES APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE À LA DÉFINITION DU PROGRAMME OPTIMAL DE PRODUCTION

La modélisation de problèmes de production relatifs à des décisions stratégiques, tactiques ou opérationnelles, sous une forme permettant l'appel aux outils de programmation linéaire, offre des opportunités intéressantes d'aide à la résolution de problèmes complexes mais celles-ci doivent être considérées comme l'une des composantes d'un mécano d'outils créé pour résoudre un problème. Par exemple, son utilisation pour calibrer les ressources en hommes et équipements d'un système productif devra être complétée[1] par une simulation permettant de vérifier la robustesse aux aléas, de la solution trouvée. Par ailleurs, son utilisation est difficilement envisageable dans la prise de décision en temps réel. Mais son usage s'avère judicieux pour préparer certaines décisions appliquées de manière routinière.

Le «portefeuille de modèles» disponibles dans ce domaine est conséquent et beaucoup de modèles ne diffèrent que par le changement de quelques hypothèses ou modalités de représentation du réel. Pour cette raison, on a choisi de présenter de manière structurée ces approches, en mettant en évidence les classes de problèmes traités, et la façon de créer un modèle par mécano de modèles élémentaires en utilisant les principes qui permettent de prendre en compte des conditions logiques et des structures non linéaires dans la programmation linéaire (cf. § II-2, page 1135, du chapitre XVI). C'est plus cet apprentissage de la modélisation par cette approche, que l'exhaustivité des outils disponibles, qui est recherché dans cette section.

On commencera par quelques remarques sur la modélisation des processus de production (§ I-1). On examinera ensuite (§ I-2, page 531) une série de problèmes de production se posant au cours d'une période et considérés comme indépendants de ce qui se passe au cours des autres périodes; on parlera alors de **modélisation mono-période** des processus productifs. On verra enfin (§ I-3, page 555) la généralisation de ces approches avec la présentation de la **modélisation multi-périodes** des processus productifs.

I-1 La modélisation des processus de production par la programmation linéaire

Dans tous les cas, le problème que l'on rencontre est celui de la définition du niveau de détail pertinent pour préparer une décision, ce qui revient à raisonner sur un niveau d'agrégation acceptable à la fois dans l'espace (celui des ressources ou celui des produits) et dans le temps. La distinction opérée entre les modèles mono-période et les modèles multi-périodes oblige à introduire une nouvelle caractérisation des ressources (§ I-1.1). Les simplifications que l'on est amené à opérer par rapport à l'espace des ressources et des produits obligent à s'interroger sur le degré d'homogénéité des concepts manipulés dans la représentation retenue de la réalité (§ I-1.2, page 530). On introduira ensuite, au fur et à mesure, les éléments d'une représentation cartographique des processus tels qu'ils peuvent être décrits

1. Voir V. Giard & C. Triomphe (1995, [200]).

Table des matières
Index thématique

dans une approche s'appuyant sur la programmation linéaire. Ce type de représentation est plus fruste que d'autres comme la modélisation à des fins simulatoires (cf. chapitre III, § I-2.1, page 148) et celle tournant autour de la modélisation des processus notamment dans le cadre du BPR et des ERP (cf. chapitre XIV, § III, page 957) mais leur usage n'est pas le même et son intérêt est lié à celui de l'appel à ces techniques de programmation linéaire.

I-1.1 Les ressources dans la modélisation par la programmation linéaire

Toutes les ressources productives, sauf les ressources informationnelles qui sont en dehors de nos préoccupations (à l'exception des gammes opératoires), sont nécessairement soit stockables, soit non stockables.

- Une **ressource stockable** est une ressource qui, lorsqu'elle n'est pas consommée au cours d'une période, peut l'être au cours de la période suivante[1]. Les produits, lorsqu'ils ne sont pas périssables, appartiennent à cette catégorie. Une ressource stockable se décrit par une quantité physiquement observable correspondant à un décompte d'objets ou, lorsqu'il y en a trop, à une mesure (poids ou volume ou …) associée à l'ensemble physique étudié.
- Une **ressource non stockable** est une ressource qui offre potentiellement des prestations datées qui seront ou non utilisées. D'une manière générale, les hommes et les machines offrent ce type de prestation qui, lorsqu'elle n'est pas utilisée au cours d'une période, ne peut être stockée pour être utilisée au cours de la période suivante et doit donc être considérée comme définitivement perdue[2]. Intrinsèquement, le fait qu'une ressource soit non stockable est indépendant du découpage temporel et reste vrai lorsque l'on découpe la période de référence en périodes plus courtes. Il résulte de ces diverses considérations qu'une ressource non stockable se décrit par une quantité immatérielle, presque toujours une durée d'utilisation *continue* possible de la ressource visée au cours de la période de référence. On verra ultérieurement que la production consommant généralement plusieurs ressources, le gaspillage de certaines ressources non stockables est à peu près inévitable.

Une **denrée périssable** est, par nature, une ressource stockable, puisqu'il est possible de définir des périodes suffisamment courtes pour que l'altération du produit ne soit pas perceptible. Réciproquement, tout objet physique se dégrade si l'on retient une période «suffisamment longue». La caractéristique «périssable» est donc très largement liée au découpage temporel retenu par l'observateur. Cela étant, lorsque l'analyse est conduite exclusivement sur une seule période, il n'est pas aberrant de traiter une denrée périssable comme une ressource non stockable.

1. Cette propriété se traduit en modélisation par les équations de conservation temporelle des stocks (voir § I-3.1.1, page 556); celles-ci n'existent pas pour les ressources non stockables. La littérature d'ordonnancement appelle **ressource consommable** ce que l'on a appelé ressource stockable et **ressource renouvelable**, ce que l'on a appelé ressource non stockable.

2. L'heure de travail de Durand, disponible aujourd'hui entre 9 heures et 10 heures, est définitivement perdue si aucun travail n'est demandé à Durand au cours de cette période (du fait d'un retard de livraison de composants, par exemple). On peut demander à Durand d'effectuer une heure supplémentaire, mais Durand sera resté une heure de plus pour effectuer globalement le même travail au cours de la journée.

Table des matières

Index thématique

On représentera graphiquement par des triangles les ressources consommées par une production, que ces ressources soient stockables ou non.

I-1.2 Production de biens et de services

Un centre de production (ou un poste de travail ou un atelier ou …) est un lieu géographique de consommation de ressources stockables et non stockables en vue d'effectuer la production d'un bien ou d'un service. On représentera graphiquement par des rectangles ces centres de production.

Le *niveau de détail* retenu fait qu'un centre de production peut être lui-même constitué de plusieurs centres de production amenés à traiter des productions éventuellement hétérogènes. Dans ce cas, le centre de production est une «boîte noire» et ce qui se passe à l'intérieur est en dehors du champ de l'étude: on se contente alors d'utiliser des gammes de production grossières caractérisées par de simples rapports de proportionnalité entre une production et les consommations de facteurs que cette production nécessite.

L'usage de *gammes «grossières»* implique que l'on fasse abstraction des gammes détaillées. Cette agrégation ne pose pas de problème pour l'ensemble des opérations élémentaires effectuées au niveau d'un centre de production «élémentaire» alors que l'agrégation d'informations provenant de *plusieurs* centres de production élémentaires pose le problème de la définition du potentiel productif de la «boîte noire», du fait des problèmes induits par l'ordonnancement. En effet, l'analyse des problèmes d'équilibrage de chaîne (cf. chapitre IX) et d'ordonnancement (cf. chapitre V) montre un certain nombre de points importants.

- Si l'on est en présence d'une *production homogène* effectuée sur une ligne *de postes de travail*, le débit de la ligne est contraint par le poste qui a le temps opératoire le plus long. Ceci implique que, structurellement, les capacités des autres postes ne peuvent pas être saturées. La description de la «boîte noire» passe alors par l'utilisation d'une ressource non stockable fictive résumant l'ensemble des ressources et dont la disponibilité, sur la période de référence retenue, est celle du poste critique de la chaîne.
- Si l'on est en présence d'une *production hétérogène* effectuée sur une ligne de postes de travail (dont certains peuvent être «sautés», pour certaines productions), la structure est alors de type flow shop (voir définition en page 362). Dans ce cas, on sait que la durée d'exécution d'un ensemble d'ordres de fabrication varie en fonction de l'ordonnancement retenu et qu'il est impossible d'éviter que plusieurs postes de travail (et, à la limite, tous) soient en rupture de charge à un moment ou à un autre. La détermination du potentiel productif de la «boîte noire» n'est plus indépendante de la structure du portefeuille de commandes et de la qualité de l'ordonnancement. On ne peut donc que proposer une valeur approximative de la disponibilité de la «boîte noire» sur la période de référence.
- Si l'on est en présence d'une production *hétérogène* effectuée sur une structure de type *job shop* (voir définition en page 362), on se trouve dans une situation encore moins prévisible que dans le cas précédent. L'introduction de gammes alternatives dans le centre de production complique encore plus

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

la détermination d'une valeur approximative de la disponibilité de la «boîte noire».

La production x_i (valeur entière ou non) du produit i, effectuée par un centre de production au cours d'une période, correspond à un flux, mesuré par une quantité continue ou discrète, qui ira alimenter un stock de produits intermédiaires ou de produits finis. Cette production nécessite la consommation de ressources repérées par l'indice j, à raison de a_{ij} unités de j, pour 1 unité produite de i. La production x_i induit donc le *prélèvement* du flux $a_{ij}x_i$, dans le stock de la ressource j, si cette ressource est stockable, et, dans le cas d'une ressource non stockable, elle induit la *consommation* du flux de prestations $a_{ij}x_i$. En général, les différentes quantités produites ne sont pas toutes prédéterminées; dans le cas contraire, le degré de liberté réside dans le choix de l'une des gammes alternatives de production de chaque produit i.

On peut ajouter que, parmi les différentes typologies utilisées pour analyser les systèmes productifs, il sera fait appel (§ I-3.1.3, page 559) à la distinction entre production à la commande et production pour stock.

I-2 Modélisation mono-période des processus productifs

Il faut distinguer le cas d'un centre de production unique ou traité comme tel (§ I-2.1) de celui d'un réseau de centres de production (§ I-2.2, page 548).

I-2.1 Centre de production unique

On peut considérer que l'on est en présence d'un centre de production unique dans deux cas de figure:

- le centre de production est effectivement unique,
- le centre de production est composé de plusieurs centres de productions élémentaires traités comme autant de ressources stockables et *indépendantes* les uns des autres, en ce sens[1] que tous les problèmes d'ordonnancement de la production entre ces centres sont implicitement ignorés; cette indépendance implique:
  - qu'il ne saurait y avoir de rupture de charge de travail d'un centre en raison du séquencement des opérations et d'éventuels goulots d'étranglement en amont de ce centre,
  - que les capacités disponibles définies pour les ressources non stockables sont utilisables en totalité.

Au cours d'une même période, plusieurs productions de biens ou de services peuvent être effectuées par ce centre de production unique. Ces productions peuvent être indépendantes, c'est-à-dire liées uniquement par la rareté des ressources productives. On distinguera alors le cas de gammes uniques pour chaque produit (§ I-2.1.1) du cas de gammes multiples (§ I-2.1.2, page 534). On trouve également le cas de productions liées, obtenues lorsqu'une même unité de ressource est utilisée à la production de plusieurs unités de biens ou de prestations de service. On distinguera alors le cas de gammes liées par des contraintes

1. Cette définition n'exclut pas le cas des productions liées de biens ou de prestations de service qui seront analysées au § I-2.1.3, page 540, et au § I-2.1.4, page 544.

spatiales, que l'on rencontre dans la fabrication de certains biens (§ I-2.1.3, page 540), de celui de gammes liées par des contraintes spatio-temporelles, que l'on rencontre généralement dans la production de certaines prestations de services (§ I-2.1.4, page 544). Enfin, on examinera le cas particulier d'un centre de production unique dédié à la fabrication d'un produit unique dont on cherche à déterminer la meilleure gamme (§ I-2.1.5, page 545).

I-2.1.1 Productions indépendantes faisant appel à des gammes uniques

I-2.1.1.1 Le problème posé

La production du système productif est effectuée au cours d'une période unique (hypothèse qui sera levée au § I-3):

- chaque produit i (i variant de 1 à n), dont on doit déterminer la quantité à produire x_i (positive ou nulle):
  - fait appel à une gamme de production *unique* qui est décrite par la consommation de a_{ij} unités de la ressource j, pour 1 unité de i;
  - doit être produit en une quantité x_i devant être supérieure ou égale à une quantité minimale $x_{\min_i}$ (pouvant être nulle ou positive) et inférieure à une quantité maximale $x_{\max_i}$ (pouvant être infinie), ce qui conduit aux inéquations suivantes:

$$x_i \geq x_{\min_i} \;;\; x_i \leq x_{\max_i}$$ *relation 81*

- chaque ressource j (ressources stockables ou non stockables) est disponible en quantité b_j (offre); la consommation de cette ressource $\sum_i a_{ij} x_i$ par l'ensemble des productions (demande) ne peut excéder les disponibilités (demande ≤ offre), on a donc:

$$\sum_i a_{ij} x_i \leq b_j \text{, pour } j = 1, \ldots, J \; \textit{(demande ≤ offre)}$$ *relation 82*

Cette relation «*demande d'une ressource ≤ offre de cette ressource*» est générale et revêt diverses formes (ici, la demande du facteur productif dépend des productions retenues et l'offre est fixée). On verra ultérieurement des cas de figure où l'offre du facteur considéré est variable et dépend des valeurs qui seront retenues pour d'autres variables de commande du problème[1].

De très nombreuses solutions respectent cet ensemble de contraintes. La recherche de la meilleure de ces solutions implique l'usage d'un critère qui conduit à l'introduction d'une fonction-objectif. Dans le cas étudié, cette fonction est habituellement la marge globale résultant du programme de production retenu. Celle-ci revêt alors la forme simplifiée d'une combinaison linéaire des productions dont les coefficients de pondérations m_i sont des marges unitaires des produits i:

1. Polyvalence de certaines ressources (§ I-2.1.2.3, page 539) mais aussi, dans la modélisation dynamique, présence variable, selon les périodes, de ressources non stockables en fonction d'un ensemble de services à retenir (§ I-3.1.2, page 558).

Table des matières
Index thématique

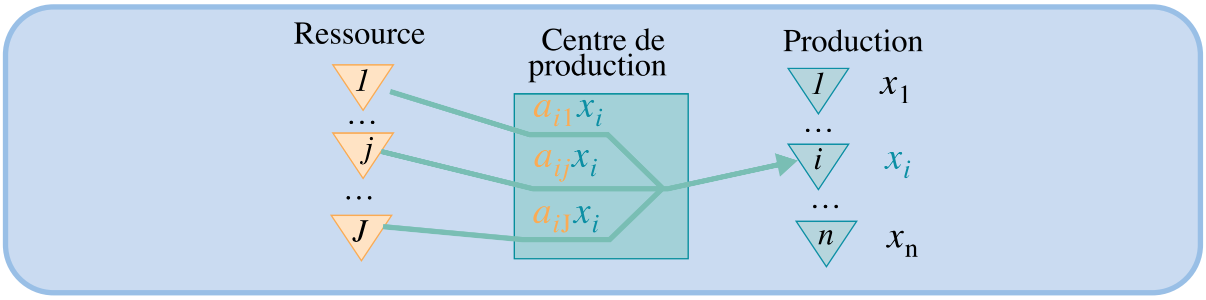
$$Max\ z, \text{ avec } z = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \ldots \qquad \textit{relation 83}$$

Les points de suspension indiquent la possibilité de compléter la fonction-objectif par d'autres éléments de coûts, si l'on souhaite «compliquer» le problème analysé pour permettre une représentation plus fine de la réalité.

La figure 154 décrit sommairement le problème posé, étant entendu que seuls les flux générés par la production de *i* sont décrits.

FIGURE 154

Productions multiples avec ressources multiples, gammes uniques, sur un seul centre de production et une seule période



I-2.1.1.2 Exemple d'application

Table des matières
Index thématique

Gamma SA fabrique plusieurs centaines de produits et cherche à définir un programme optimal de production pour satisfaire les demandes de février 2003. On se limitera ici à la fabrication de 4 de ces produits qui nécessitent l'intervention de 5 ateliers; les données techniques de fabrication sont fournies dans le tableau 133.

TABLEAU 133

Gammes opératoires et disponibilité des ressources

Ressource j		Consommation a_{ij} de la ressource j pour produire une unité du produit $i = 1$	produit $i = 2$	produit $i = 3$	produit $i = 4$	Disponibilités b_j de la ressource
Ressources non stockables	Emboutissage	0,03 h	0,15 h	0,05 h	0,10 h	400 heures
	Fraisage	0,06 h	0,12 h	0,00 h	0,10 h	400 heures
	Assemblage	0,05 h	0,10 h	0,05 h	0,12 h	500 heures
	Finition	0,04 h	0,20 h	0,03 h	0,12 h	450 heures
	Conditionnement	0,02 h	0,06 h	0,02 h	0,05 h	400 heures
Ressources stockables Tôles de 2 mm		0,0 m^2	0,5 m^2	0,0 m^2	0,3 m^2	500 m^2

Les contraintes de production minimales et maximales sont données dans le tableau 134, ainsi que les données de coûts variables directs et les prix de vente.

D'un point de vue économique, le problème posé est celui de la détermination du programme de production de chaque produit qui maximise la marge globale et respecte les contraintes de disponibilité des ressources et de satisfaction de la demande:

TABLEAU 134
Contraintes de productions et marges unitaires des produits

	Produit $i = 1$	Produit $i = 2$	Produit $i = 3$	Produit $i = 4$
Production minimale $x_{\min_i}$	1000	0	500	100
Production maximale $x_{\max_i}$	6000	500	3000	1000
Prix de vente unitaire ($ lidurien)	50	125	80	100
Coût variable direct unitaire ($ lidurien)	30	75	55	70
Marge unitaire sur coût variable direct m_i ($ lidurien)	20	50	25	30

- maximiser la marge z:
  $Max\ z$, avec $z = (20x_1 + 50x_2 + 25x_3 + 30x_4)$
- sous contraintes de disponibilité d'heures de centres de production :
  $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}10x_4 \leq 400$ (emboutissage)
  $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}00x_3 + 0{,}10x_4 \leq 400$ (fraisage)
  $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}12x_4 \leq 500$ (assemblage)
  $0{,}04x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}12x_4 \leq 450$ (finition)
  $0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}05x_4 \leq 400$ (conditionnement)
- sous contrainte de disponibilité de tôles:
  $0{,}5x_2 + 0{,}3x_4 \leq 500$
- sous contraintes de productions minimales et maximales:
  $1000 \leq x_1 \leq 6000$
  $0 \leq x_2 \leq 500$
  $500 \leq x_3 \leq 3000$
  $100 \leq x_4 \leq 1000$

Les résultats du programme linéaire sont les suivants: $x_1^* = 5500$, $x_2^* = 500$, $x_3^* = 3000$, $x_4^* = 100$. La marge totale réalisée avec ce plan de production est 213000 dollars liduriens. On a donc fabriqué le maximum des produits 2 et 3 que l'on pouvait vendre durant la période. Le produit 4 n'est fabriqué que parce qu'une production minimale lui est imposée. Le programme utilise intégralement les capacités d'emboutissage et de fraisage, les capacités résiduelles sont de 13 heures pour l'atelier d'assemblage, 28 heures dans celui de la finition et 195 heures dans celui du conditionnement. Il reste 220 m² de tôle de 2 mm.

I-2.1.2 Productions indépendantes faisant appel à des gammes alternatives

Par rapport au problème introduit au § I-2.1.1, on se donne maintenant la possibilité d'utiliser des gammes alternatives pour fabriquer un ou plusieurs des produits considérés, tout en considérant que l'on est toujours en présence d'un centre de production unique, mobilisant plusieurs ressources. On verra à la page

Table des matières
Index thématique

548 une autre formulation qui repose sur une cartographie des flux faisant intervenir explicitement plusieurs centres de production.

I-2.1.2.1 Le problème posé

Ce type de problème, connu dans la littérature anglo-saxonne de la recherche opérationnelle sous le nom de *process selection problem*, se caractérise normalement par:

- un niveau de production imposé pour différents produits (hypothèse qui sera levée à la page 539);
- plusieurs filières de production possibles pour au moins un produit; les filières de production d'un produit diffèrent par les procédés techniques utilisés ou par les ressources consommées (machines de performances techniques ou économiques différentes, appel à des heures supplémentaires, autres qualifications de personnel, sous-traitance, etc.) mais, dans tous les cas, le résultat physique final est le même;
- les coûts unitaires et facteurs utilisés dépendent de la filière retenue;
- le problème posé est celui de la détermination, pour chaque produit, de la quantité fabriquée par chaque filière, qui minimise le coût de production; si le prix de vente est constant, ce critère est équivalent à celui de la maximisation de la marge sur coût variable (ce dernier étant le seul possible si le problème consiste également à définir les niveaux de production, comme on le verra au § I-2.1.2.4, page 539);
- cette définition du programme optimal doit tenir compte des dotations disponibles des différents facteurs productifs utilisés dans les filières retenues.

Table des matières

Index thématique

Posons:

- x_{ij_i} = quantité du produit i ($i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$) fabriqué par la filière j_i ($j_i = 1, 2, \ldots, J_i$) de ce produit au cours de la période considérée,
- d_i = production requise pour le produit i,
- b_k = montant de la ressource k ($k = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$) disponible au cours de la période,
- a_{ij_ik} = nombre d'unités du facteur productif k utilisé pour produire une unité du produit i par la filière productive j_i,
- c_{ij_i} = coût variable unitaire d'une unité du produit i par la filière j_i.

Le problème posé consiste à:

- trouver les valeurs positives ou nulles des x_{ij_i} qui minimisent le coût total de production de la période:

$$Min\ z, \text{ avec } z = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \sum_{j_i=1}^{\mathrm{J}_i} \mathrm{c}_{ij_i} x_{ij_i} \qquad \textit{relation 84}$$

- sous contraintes:
  - de production à réaliser:

$$\sum_{j_i=1}^{J_i} x_{i j_i} = d_i \text{, pour } i = 1, 2, \ldots, n \qquad \textit{relation 85}$$

- de respect de la dotation de facteurs disponibles :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j_i=1}^{J_i} a_{i j_i k} x_{i j_i} \leq b_k \text{, pour } k = 1, 2, \ldots, K \qquad \textit{relation 86}$$

I-2.1.2.2 Exemple d'application

Reprenons l'exemple du § I-2.1.1.2, page 533, en supposant maintenant :

- que les niveaux de production sont fixés aux valeurs maximales (respectivement 3000, 500, 1000 et 2000) ; il n'y a donc plus aucune latitude dans le niveau de production du mois de février 2003 (ce qui caractérisait le problème précédent) ;
- qu'en plus des heures disponibles, **Gamma SA** a désormais la possibilité de sous-traiter les opérations d'emboutissage et de fraisage à un coût variable unitaire de 20 % supérieur au coût interne (par exemple, pour le produit 1, le coût unitaire de sous-traitance est de 36 dollars liduriens contre 30, en coût unitaire interne) ; les opérations d'assemblage, de finition et d'empaquetage sont nécessairement effectuées dans les ateliers de **Gamma SA** qui refuse de sous-traiter ces opérations qui constituent l'essentiel de sa valeur ajoutée ;
- un appel aux heures supplémentaires est possible dans l'atelier de finition, à concurrence de 100 heures, ce qui a pour effet d'accroître les coûts variables unitaires de 1 $ pour les produits 1 et 3, de 2 $ pour le produit 2 et de 1,50 $ pour le produit 4 ;
- que la limitation sur la tôle de 2 mm ne porte que sur la fabrication interne.

L'analyse de ces données montre qu'il y a 4 filières de production pour chacun des 4 produits ($J_i = 4$, quel que soit le produit i). On notera donc x_{ij} au lieu de $x_{i j_i}$, le nombre d'unités du produit i fabriquées par la filière j_i (voir tableau 135).

Table des matières
Index thématique

TABLEAU 135
Variables du problème avec explicitation des filières de production

Emboutissage & fraisage		Interne		Externe	
Finition en heures		Normales	Supplémentaires	Normales	Supplémentaires
Filière de production j		1	2	3	4
Produit i	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

Les coûts unitaires de production des différents produits pour chacune des filières sont donnés dans le tableau 136.

Le problème est alors de minimiser la fonction-objectif z suivante qui décrit la recherche du programme de production ayant le plus faible coût :

TABLEAU 136
Coûts unitaires de production par filière (en $ lidurien)

Emboutissage & fraisage		Interne		Externe	
Finition en heures		Normales	Supplémentaires†	Normales‡	Supplémentaire†
Filière de production j		1	2	3	4
Produit i	1	30	31	36	37
	2	75	77	90	92
	3	55	56	66	67
	4	70	71,5	84	85,5

†. Entraîne un accroissement de coût de 1 $, par rapport au coût de base (fabrication interne en heures normales), pour les produits 1 et 3, de 1,50 $ pour le produit 4 et de 2 $ pour le produit 2.

‡. Entraîne un accroissement de coût de 20 %, par rapport au coût de base (fabrication interne en heures normales)

Min z, avec $z = (30x_{11} + 31x_{12} + 36x_{13} + 37x_{14} + 75x_{21} + 77x_{22} + 90x_{23} + 92x_{24} + 55x_{31} + 56x_{32} + 66x_{33} + 67x_{34} + 70x_{41} + 71{,}5x_{42} + 84x_{43} + 85{,}5x_{44})$

Les contraintes sur les *heures normales* disponibles deviennent alors :

$$\sum_{j=1}^{2}(0{,}03x_{1j}+0{,}15x_{2j}+0{,}05x_{3j}+0{,}10x_{4j})\le 400 \text{ (emboutissage)}$$

$$\sum_{j=1}^{2}(0{,}06x_{1j}+0{,}12x_{2j}\qquad\qquad +0{,}10x_{4j})\le 400 \text{ (fraisage)}$$

$$\sum_{j=1}^{4}(0{,}05x_{1j}+0{,}10x_{2j}+0{,}05x_{3j}+0{,}12x_{4j})\le 500 \text{ (assemblage)}$$

$$0{,}04(x_{11}+x_{13})+0{,}2(x_{21}+x_{23})+0{,}03(x_{31}+x_{33})+0{,}12(x_{41}+x_{43})\le 450$$

(finition en heures normales)

$$\sum_{j=1}^{4}(0{,}02x_{1j}+0{,}06x_{2j}+0{,}02x_{3j}+0{,}05x_{4j})\le 400 \text{ (conditionnement)}$$

La contrainte pesant sur les *heures supplémentaires* de l'atelier de *finition* est :

$$0{,}04(x_{12}+x_{14})+0{,}2(x_{22}+x_{24})+0{,}03(x_{32}+x_{34})+0{,}12(x_{42}+x_{44})\le 100$$

La contrainte de disponibilité de tôle devient :

$$0{,}5(x_{21}+x_{22})+0{,}3(x_{41}+x_{42})\le 500$$

Les contraintes de niveau de production sont maintenant :

$$\sum_{j=1}^{4}x_{1j} = 3000\ ;\ \sum_{j=1}^{4}x_{2j} = 500\ ;\ \sum_{j=1}^{4}x_{3j} = 1000\ ;\ \sum_{j=1}^{4}x_{4j} = 2000$$

Table des matières
Index thématique

Le plan de production optimal trouvé est le suivant: $x_{11}^* = 3000$, $x_{23}^* = 300$, $x_{24}^* = 200$, $x_{31}^* = 1000$, $x_{41}^* = 1666{,}67$, $x_{43}^* = 333{,}33$, les autres variables étant nulles ($x_{12}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = x_{32}^* = x_{33}^* = x_{34}^* = x_{42}^* = x_{44}^* = 0$). Les implications concrètes de cette programmation sur les centres de production sont données dans le tableau 137. Le coût minimal obtenu avec ce programme est de

TABLEAU 137
Programme de production

Centres de production		Production du produit 1	2	3	4
Emboutissage et fraisage	Production interne	3000	0	1000	1667
	Sous-traitance	0	500	0	333
Assemblage		3000	500	1000	2000
Finition en heures	Normales	3000	300	1000	2000
	Supplémentaires	0	200	0	0
Conditionnement		3000	500	1000	2000

335066,67 dollars liduriens. L'utilisation des capacités productrices de la main-d'œuvre de **GAMMA SA** est donnée au tableau 138. La totalité des 500 m² disponibles de tôle de 2 mm est utilisée pour fabriquer le produit 4 (qui requiert 500 m² au total). De ce fait, le produit 2 est totalement sous-traité (ainsi que le reste de la production requise pour le produit 4). L'analyse des variables duales montre que le mètre carré supplémentaire de tôle de 2 mm permet de diminuer le coût de production de 9,30 \$, tandis que l'heure supplémentaire dans l'atelier de finition permet[1] d'économiser 10 \$.

TABLEAU 138
Utilisation des ressources découlant du programme de production

Ateliers	Heures normales disponibles	Heures normales programmées	Heures normales inutilisées	Heures supplémentaires disponibles	Heures supplémentaires programmées	Heures supplémentaires inutilisées
Emboutissage	400,0	306,7	93,3	0	0	0
Fraisage	400,0	346,7	53,3	0	0	0
Assemblage	500,0	490,0	10,0	0	0	0
Finition	450,0	450,0	0,0	100	40	60
Conditionnement	400,0	210,0	190,0	0	0	0

Il faut ajouter que la solution trouvée conduit à des valeurs fractionnaires de x_{43}^* et de x_{41}^* . Arrondir la solution trouvée conduit à ne pas respecter la contrainte disponibilité de tôle mais, en pratique, la précision des informations peut être telle que la solution proposée est acceptable. Si on choisit de tronquer les solutions fractionnaires plutôt que de les arrondir, on est certain de respecter les contraintes

1. Cette valeur se retrouve immédiatement en remarquant que cet atelier traite (1 / 0,2 =) 5 unités de produit 2 par heure et que le coût différentiel de l'heure supplémentaire (par rapport à l'heure normale) est de 2 \$/ heure, ce qui conduit bien au prix-fantôme de 2 x 5 = 10 \$ liduriens.

Table des matières
Index thématique

du type ≤ et cela est acceptable si les valeurs tronquées ne sont pas trop proches de 0. En toute rigueur, si l'on veut d'emblée aboutir des solutions entières, il faut déclarer les variables entières et utiliser un solveur de programmation linéaire entier (ou mixte). Dans ce cas, la solution trouvée est inchangée pour les productions des produits 1 et 3 ($x_{11}^* = 3000$, $x_{31}^* = 1000$) et, pour les autres produits, devient: $x_{41}^* = 1665$; $x_{43}^* = 335$; $x_{21}^* = 1$, $x_{23}^* = 299$ et $x_{24}^* = 200$, pour un coût minimal de 335075 (dégradation de l'optimum de 8,33 dollars liduriens). On peut remarquer que cette solution est voisine de la précédente et que l'on utilise x_{21}^*, juste pour saturer la contrainte, ce qui ne doit guère se justifier économiquement (le coût de lancement en production n'étant sans doute plus négligeable par rapport au coût variable direct).

I-2.1.2.3 Prise en compte de la polyvalence de certaines ressources

Pour faciliter le plein emploi des facteurs productifs on a souvent intérêt à utiliser des ressources polyvalentes. Dans l'exemple numérique du § I-2.1.2.2, on dispose de 950 heures dans les ateliers d'assemblage et de finition. Si certains ouvriers peuvent tenir indifféremment l'un ou l'autre poste, à concurrence par exemple de 150 heures, le reste des (950 – 150 =) 800 heures étant effectuées par des opérateurs spécialisés (par exemple: 450 en assemblage et 350 en finition), on modifiera le problème en créant deux variables supplémentaires, y_1 et y_2, volume horaire de polyvalents utilisés respectivement dans les ateliers d'assemblage et de finition. Les ressources de ces ateliers deviennent respectivement $450 + y_1$ et $400 + y_2$. Il en résulte les transformations suivantes du problème, ainsi que la création d'une nouvelle contrainte, celle d'une utilisation de la ressource polyvalente ne devant pas dépasser la dotation disponible:

$$\sum_{j=1}^{4}(0{,}05x_{1j}+0{,}10x_{2j}+0{,}05x_{3j}+0{,}12x_{4j})-y_1 \leq 450 \text{ (assemblage)}$$

$$0{,}04(x_{11}+x_{13})+0{,}2(x_{21}+x_{23})+0{,}03(x_{31}+x_{33})+0{,}12(x_{41}+x_{43})-y_2 \leq 350$$

(finition en heures normales)

$y_1 + y_2 \leq 150$ (polyvalents)

Dans ces conditions, les polyvalents seront complètement utilisés à raison de 40 heures en assemblage et 110 heures en finition, ce qui permet de diminuer de 10 heures l'appel aux heures supplémentaires affectées à l'atelier de finition. Cette diminution, conformément à la remarque faite sur la variable duale de cette contrainte, permet d'économiser 10 x 10 = 100 dollars liduriens (d'où un coût minimal de 334975) et seule la fabrication du produit 2 est affectée. Dans la formulation discrète on obtient: $x_{21}^* = 1$, $x_{23}^* = 349$ et $x_{24}^* = 150$.

I-2.1.2.4 Détermination simultanée des quantités à produire et des filières de production

Reprenons l'exemple du § I-2.1.2.2, page 536 (formulation avec explicitation de filière), en gardant toutes les données à l'exception de celles relatives au niveau de production désiré (on reprendra les bornes du problème du § I-2.1.1.2 fournies

Table des matières
Index thématique

dans le tableau 134, page 534) et en transformant la fonction-objectif pour maximiser une marge sur coût variable (on reprendra pour cela les prix de ventes unitaires du tableau 134[1]). On a alors à maximiser :

Max z, avec $z = (20x_{11} + 19x_{12} + 14x_{13} + 13x_{14} + 50x_{21} + 48x_{22} + 35x_{23} + 33x_{24} + 25x_{31} + 24x_{32} + 14x_{33} + 13x_{34} + 30x_{41} + 28{,}5x_{42} + 16x_{43} + 14{,}5x_{44})$

Les contraintes de production deviennent, compte tenu de l'introduction, des filières de production :

$$1000 \le \sum_{j=1}^{4} x_{1j} \le 6000\ ;\ 0 \le \sum_{j=1}^{4} x_{2j} \le 500\ ;\ 500 \le \sum_{j=1}^{4} x_{3j} \le 3000\ ;$$

$$100 \le \sum_{j=1}^{4} x_{4j} \le 1000$$

Le plan de production optimal trouvé est le suivant : $x^*_{11} = 5500$, $x^*_{13} = 260$, $x^*_{21} = 500$, $x^*_{31} = 3000$, $x^*_{41} = 100$ et la nouvelle marge optimale est de 216640 dollars liduriens pour la période, ce qui correspond à une augmentation de 3 640 dollars réalisée grâce à la souplesse introduite par la sous-traitance (les heures complémentaires n'étant pas mobilisées). On notera que ce programme de production n'utilise que 280 m² de tôle de 2 mm, sur les 500 disponibles. Les conséquences de ce nouveau programme sont résumées dans les tableaux 139 et 140.

TABLEAU 139
Programme de production

Centres de production		Production du produit 1	2	3	4
Emboutissage et fraisage	Production interne	5 500	500	3 000	100
	Sous-traitance	260	0	0	0
Assemblage		5 760	500	3 000	100
Finition en heures	Normales	5 760	500	3 000	100
	Supplémentaires	0	0	0	0
Conditionnement		5 760	500	3 000	100

I-2.1.3 Productions liées de produits faisant appel à des gammes alternatives

I-2.1.3.1 Le problème posé

Le cas de figure modélisé ici se rencontre lorsque :

- la production
  - peut s'effectuer en faisant appel à un nombre fini de gammes possibles, chaque gamme permettant de fabriquer *simultanément* plusieurs produits, en quantité variable selon la gamme considérée,

1. ⇒ 50 – 30 = 20 pour x_{11} ; 50 – 31 = 19 pour x_{12} ; etc.

Table des matières
Index thématique

TABLEAU 140

Utilisation des ressources découlant du programme de production

Ateliers	Heures normales			Heures supplémentaires		
	disponibles	programmées	inutilisées	disponibles	programmées	inutilisées
Emboutissage	400,0	400,0	0,0	0	0	0
Fraisage	400,0	400,0	0,0	0	0	0
Assemblage	500,0	500,0	0,0	0	0	0
Finition	450,0	432,4	17,6	100	0	100
Conditionnement	400,0	210,2	189,8	0	0	0

- chaque gamme alternative utilise une seule ressource stockable (qui peut être simultanément utilisée par d'autres gammes),
- plusieurs ressources stockables différentes peuvent être utilisées mais chaque gamme ne fait appel qu'à une seule de ces ressources;

- un nombre minimal d'unités doit être fabriqué pour chaque produit, au cours de la période considérée.

On trouve cette classe de problèmes principalement dans les problèmes de découpe:

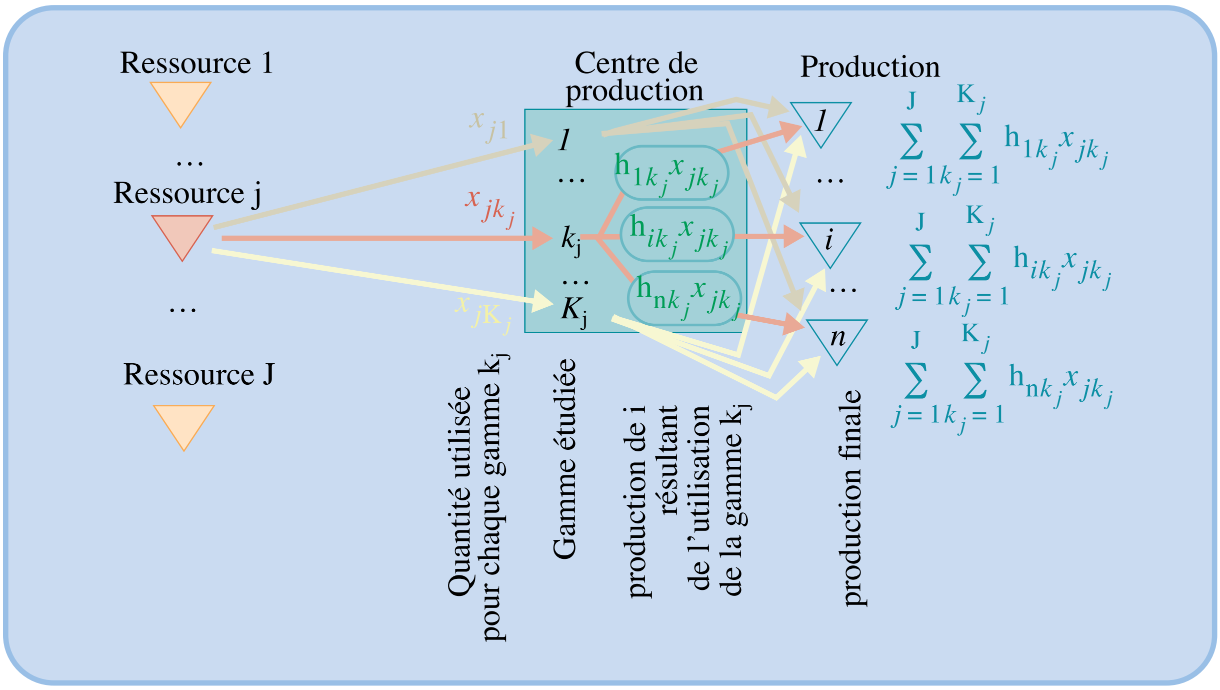
- dans un espace à une dimension avec la découpe de bobines de grande largeur (plusieurs largeurs de bobine pouvant être utilisées), en bobines de largeur plus faible destinées à satisfaire les demandes de clients du système;
- dans un espace à deux dimensions, avec la découpe de feuilles (verre ou film pour plaques de radiologie ou coupon de tissus ou etc.) en objets de formes variables.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 155

Productions liées avec gammes alternatives utilisant chacune une seule ressource et un centre unique de production (période unique)



La structure du problème posé est décrite dans la figure 155 de la page 541, avec une explicitation de la seule ressource j pour ne pas trop compliquer la représentation du problème. Elle se définit par les caractéristiques suivantes :

- il existe K_j gammes de production possibles utilisant exclusivement la ressource j ;
- le programme de production à déterminer se définit par les quantités x_{jk_j} de la ressource j utilisant la gamme k_j (k_j variant de 1 à K_j), les valeurs x_{jk_j} étant entières ;
- selon la gamme k_j, l'utilisation d'une unité de la ressource j permet de produire h_{ik_j} unités du produit i ; l'utilisation de x_{jk_j} unités de la ressource j permet donc de produire $h_{ik_j}x_{jk_j}$ unités du produit i ; l'obtention de ces K_j gammes résulte souvent d'une recherche par tâtonnement mais elle peut s'appuyer sur une démarche itérative complétant progressivement un ensemble initial de gammes ne fabriquant chacune qu'un seul produit[1] ;
- la production totale du produit i, quelles que soient la ressource j utilisée et la gamme k_j retenue pour cette ressource j, est donc $\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik_j}x_{jk_j}$; cette production doit être supérieure ou égale à la demande d_i, c'est-à-dire que les n contraintes suivantes doivent être satisfaites :

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik_j}x_{jk_j} \geq d_i \text{ , pour } i = 1, \ldots, n \qquad \textit{relation 87}$$

- des contraintes sur les ressources disponibles (similaires à celles de la relation 82, page 532) peuvent être introduites, si nécessaire.

La fonction-objectif du problème consiste à minimiser une somme pondérée des quantités x_{jk_j} de ressource j utilisant la gamme k_j, où les coefficients de pondération c_j peuvent être des coûts unitaires ou des coefficients de conversion permettant de décrire la consommation totale en une même unité (longueur, poids, etc.) :

$$\mathit{Min}\ z, \text{ avec } z = \sum_{j=1}^{J} c_j \sum_{k_j=1}^{K_j} x_{jk_j} + \ldots \qquad \textit{relation 88}$$

I-2.1.3.2 Exemple d'application

On n'illustrera ici que le problème unidimensionnel. **Velinor** possède une usine qui fabrique une large gamme de papiers d'emballage ; au début du processus de fabrication, on part de grandes bobines de papier de 4 mètres de large ou de 3 mètres de large et d'un même diamètre pour fabriquer des rouleaux de feuilles de papier d'emballage qui existent en 3 largeurs : 90 cm, 48 cm et 120 cm. Les grandes bobines de 4 m de large sont donc coupées en plusieurs petites bobines correspondant à l'une de ces spécifications. Par exemple, on peut, à partir d'une

1. Voir Scharage (1991, [374]), p. 286-289.

Table des matières
Index thématique

grande bobine de 4 m, obtenir 8 petites bobines de 48 cm ou 3 de 120 cm, mais bien d'autres combinaisons sont envisageables (comme 2 petites bobines de 90 cm + 2 petites bobines de 48 cm + 1 petite bobine de 120 cm).

Le problème de détermination des gammes est exogène à celui du plan de production optimal qu'il précède nécessairement. La recherche des gammes possibles est celle de tous les jeux de valeurs entières positives ou nulles n_1, n_2, n_3 (correspondant aux coefficients h_{ik_j}), qui sont tels que $120n_1 + 90n_2 + 48n_3 \leq 400$ (en ne s'attachant ici qu'au cas des grandes bobines de 4 m) et que la largeur résiduelle de la grande bobine après découpe $\{400 - (120n_1 + 90n_2 + 48n_3)\}$ reste inférieure à celle de la plus petite bobine (48 cm) : $400 - (120n_1 + 90n_2 + 48n_3) < 48$. Les divers plans de coupe de notre exemple sont donnés dans les tableaux 141 et 142.

TABLEAU 141

Nombre h_{ik_1} de petites bobines i produites par les gammes alternatives de production utilisant des grandes bobines de 4 mètres (j = 1)

		Gamme (plan de coupe) k_1 pour une bobine de 4 mètres ($j = 1$)											
		$k_1 =$ 1	$k_1 =$ 2	$k_1 =$ 3	$k_1 =$ 4	$k_1 =$ 5	$k_1 =$ 6	$k_1 =$ 7	$k_1 =$ 8	$k_1 =$ 9	$k_1 =$ 10	$k_1 =$ 11	$k_1 =$ 12
Bobines de	120 cm ($i = 1$)	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	90 cm ($i = 2$)	0	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4
	48 cm ($i = 3$)	0	3	1	5	3	2	0	8	6	4	2	0
Largeur de la bobine résiduelle		40	16	22	40	46	4	10	16	22	28	34	40

TABLEAU 142

Nombre h_{ik_2} de petites bobines i produites par les gammes alternatives de production utilisant des grandes bobines de 3 mètres (j = 2)

		Gamme (plan de coupe) k_2 pour une bobine de 3 mètres ($j = 2$)							
		$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$k_2 = 5$	$k_2 = 6$	$k_2 = 7$	$k_2 = 8$
Bobines de	120 cm ($i = 1$)	2	1	1	1	0	0	0	0
	90 cm ($i = 2$)	0	2	1	0	3	2	1	0
	48 cm ($i = 3$)	1	0	1	3	0	2	4	6
Largeur de la bobine résiduelle		12	0	42	36	30	24	18	12

Les besoins de la clientèle varient d'une semaine sur l'autre. Supposons que, pour la semaine à venir, les demandes soient de 200 petites bobines de 120 cm de large, 500 petites bobines de 90 cm et 300 petites bobines de 48 cm. Le problème

Table des matières
Index thématique

posé est celui de la définition du programme de production qui minimise le nombre de grandes bobines à utiliser, pondéré par la largeur de la bobine ou, ce qui revient au même, qui minimise l'importance de la surproduction et des chutes de papier[1].

Si le problème posé est celui de la recherche du nombre minimal de bobines pondérées par leurs longueurs, la fonction-objectif est alors: *Min z*, avec $z = 4\sum_{k_1=1}^{12} x_{1k_1} + 3\sum_{k_2=1}^{8} x_{2k_2}$, sous contraintes que la demande soit satisfaite (les excédents étant écoulés la semaine suivante):

$$x_{1,1} + 2x_{1,2} + 2x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} + x_{1,7} + 2x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \geq 200$$

$$x_{1,3} + x_{1,5} + 2x_{1,6} + 3x_{1,7} + x_{1,9} + 2x_{1,10} + 3x_{1,11} + 4x_{1,12} + 2x_{2,2} + x_{2,3} + 3x_{2,5} + 2x_{2,6} + x_{2,7} \geq 500$$

$$3x_{1,2} + x_{1,3} + 5x_{1,4} + 3x_{1,5} + 2x_{1,6} + 8x_{1,8} + 6x_{1,9} + 4x_{1,10} + 2x_{1,11} + x_{2,1} + x_{2,3} + 3x_{2,4} + 2x_{2,6} + 4x_{2,7} + 6x_{2,8} \geq 300$$

L'une des solutions optimales de ce problème est $x^*_{1,6} = 100$, $x^*_{1,7} = 1$, $x^*_{1,8} = 10$, $x^*_{1,10} = 2$, $x^*_{1,12} = 24$, $x^*_{2,1} = 1$, $x^*_{2,2} = 97$, $x^*_{2,7} = 3$. Cette solution conduit à produire 200 petites bobines de 120 cm de large, 500 petites bobines de 90 cm et 301 petites bobines de 48 cm, ce qui correspond exactement à la demande sauf pour les bobines de 48 cm (excédent de 1 petite bobine).

I-2.1.4 Productions liées de prestations de service faisant appel à des gammes alternatives

Le problème posé est en réalité une variante du problème précédent (§ I-2.1.3), dont l'originalité tient surtout à la définition des gammes qui intègrent, implicite-

1. Si l'on désire formuler le problème en un problème de minimisation des chutes et productions inutiles, on notera w_{jk_j} la chute non récupérable réalisée avec le plan de coupe k_j qui est donnée en dernière ligne des tableaux 141 et 142. Au cumul des largeurs de chutes inutilisables $\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j} w_{jk_j}x_{jk_j}$ il faut ajouter la surproduction, c'est-à-dire le cumul des largeurs des petites bobines excédentaires: $\sum_{i=1}^{n} a_i\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik}x_{k_j} - d_i\right]$, la largeur a_i correspondant à la spécification i. Dans ces conditions, la fonction-objectif devient: *Min z*, avec

$$z = \left\{\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K} w_{jk_j}x_{jk_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik}x_{k_j} - d_i\right]\right\} = \left\{\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j}\left(w_{jk_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i h_{ik_j}\right)x_{jk_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right\},$$

les contraintes restant les mêmes. En réalité, ces deux formulations sont équivalentes, à la constante additive près $\sum_{i=1}^{n} a_i d_i$ qui correspond au cumul des largeurs des petites bobines demandées (ce qui est évident car le cumul des largeurs des grandes bobines utilisées se décompose en cumul des largeurs des petites bobines demandées, cumul des largeurs des petites bobines excédentaires et cumul des largeurs des chutes), car $\sum_{j=1}^{J}\sum_{k_j=1}^{K_j}\left(w_{jk_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i h_{ik_j}\right)x_{jk_j}$ n'est rien d'autre que le cumul des largeurs des petites bobines produites et des chutes.

Table des matières
Index thématique

ment, un ensemble de *contraintes spatio-temporelles*. Certains problèmes de transport se caractérisent par une liste cohérente de prestations à exécuter. Chaque prestation est caractérisée, du point de vue qui nous intéresse ici, par une exécution effectuée entre une heure h_i de départ d'une origine *i* et une heure h_j d'arrivée à une destination *j*, différente de *i*; les autres caractéristiques de cette prestation importent peu ici. Chaque prestation est effectuée par un seul véhicule (avion, train, camion ou autocar) ou un seul opérateur (conducteur, pilote, hôtesse, contrôleur, etc.). Au cours d'une période, par exemple la journée, une même ressource élémentaire (véhicule ou opérateur) peut prendre en charge plusieurs prestations, à la double condition que chaque prestation ait comme origine la destination de la prestation précédente, et que son heure de départ soit postérieure à l'heure d'arrivée de la prestation précédente. Une gamme se définit alors comme une liste *cohérente* de prestations que peut prendre en charge une même ressource élémentaire. Il s'agit d'exécuter au moindre coût de toutes les prestations par un ensemble de ressources élémentaires utilisant, chacune, une gamme différente, ce qui revient à choisir les gammes à utiliser dans un ensemble de gammes possibles toutes différentes. Ce problème de transport est analysé en détail au chapitre XIII, § II-2, page 921.

I-2.1.5 Détermination de la gamme optimale associée à la production d'un produit unique

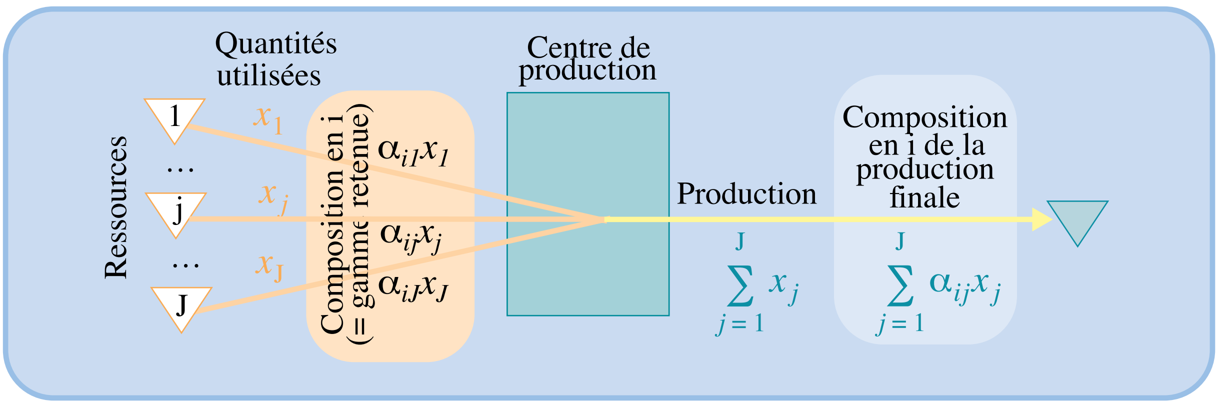
La quantité à fabriquer étant définie, le seul degré de liberté réside dans la détermination d'une gamme optimale ou d'une combinaison optimale de gammes en cas de restriction sur les ressources.

I-2.1.5.1 Le problème posé

Ce problème se pose lorsqu'un produit fabriqué (aliment, acier…) est un mélange de plusieurs matières premières *j*, utilisées en quantité x_j pour obtenir la quantité demandée $\sum_{j=1}^{J} x_j = d$ (voir figure 156). Les matières premières *j* se carac-

FIGURE 156

Gamme d'un mélange



térisent chacune par un coût unitaire c_j et une quantité disponible différente b_j. Le dosage des matières premières *j* dans le mélange définit la gamme utilisée. On s'intéresse alors à un ensemble de n spécifications *i* caractérisant les composants de base des matières premières *j* et le produit fini (par exemple, teneurs en lipides,

Table des matières
Index thématique

protides, vitamines, etc. des composants d'un aliment ou teneur en métaux et impuretés de minéraux utilisés dans un alliage). La teneur α_{ij} du composant j utilisé en quantité x_j fait que le mélange final reçoit une quantité $\alpha_{ij}x_j$ du composant de base i. Le produit final doit respecter, pour chaque spécification i, des normes définies par des intervalles de valeurs[1] $\alpha_{\min_i} \leq \dfrac{\sum_{j=1}^{J} \alpha_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{J} x_j} \leq \alpha_{\max_i}$,

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{j=1}^{J} (\alpha_{ij} - \alpha_{\max_i})x_j \leq 0 \quad et \quad \sum_{j=1}^{J} (\alpha_{\min_i} - \alpha_{ij})x_j \leq 0\text{, } pour\ i = 1, \ldots, n \qquad \textit{relation 89}$$

Il faut que la production finale soit égale à la demande d :

$$\sum_{j=1}^{J} x_j = \mathrm{d} \qquad \textit{relation 90}$$

Dans cette relation 90, la demande d peut être remplacée par 1 si l'on cherche une composition optimale qui restera stable tant que les structures de coûts ne varient pas et qu'aucune contrainte ne pèse sur les ressources disponibles (par rapport aux demandes).

Le problème peut se compliquer :

- par la prise en compte de contraintes de disponibilité de matières premières, on est alors conduit à introduire des contraintes de même nature que celles de la relation 82, page 532 mais qui se simplifient ici ($x_j \leq b_j$) ;
- par l'impossibilité d'utiliser complètement certaines ressources j, dans le processus de production non en raison de l'abondance de la ressource mais de l'élimination nécessaire de certains éléments indésirables que celle-ci contient (déchets, etc.) : lorsque seulement un pourcentage β_j (inférieur à 100 %) de la ressource j peut être utilisé dans le mélange final, il convient de remplacer, dans les relations 89 et 90, les x_j par des $\beta_j\, x_j$; l'exemple du § I-2.1.5.2 traite ce cas de figure ;
- par le désir de limiter a priori à ν le nombre de composants utilisés, lorsque le nombre de contraintes est élevé ; dans ce cas, il faut créer :
  - autant de variables binaires δ_j qu'il y a de composants j, δ_j valant 1 si et seulement si $x_j > 0$, ce qui s'obtient en introduisant, pour chaque composant j, les deux contraintes présentées dans le tableau 350 de la page 1137 (chapitre XVI),
  - ajouter la contrainte $\sum_j \delta_j \leq \nu$.

Le problème posé a conduit à utiliser un ratio comportant, au dénominateur, une somme des variables. Deux remarques peuvent être faites à ce propos :

1. On suppose, dans cette formulation, que la totalité des matières premières utilisées est intégrée dans le produit fini (pas de résidus ou d'impuretés) ; on examinera à la fin de ce paragraphe comment lever cette hypothèse.

Table des matières
Index thématique

- lorsque le ratio intervient dans des contraintes avec en dénominateur $\sum_j q_j x_j$, il est possible de se ramener au cas présenté ci-dessus ($\sum_j x_j$) en remplaçant les x_j par $x_j' = q_j x_j$ et divisant par q_j les coefficients des x_j intervenant aux numérateurs des contraintes et de la fonction-objectif;
- lorsque le ratio intervient dans la fonction-objectif, $Max\ [\sum_i c_j x_i / \sum_i q_j x_i]$, avec des contraintes «classiques» ($\sum_i a_{ij} x_i \leq b_j$), on se ramène à la formulation standard[1] en créant la variable additionnelle $\omega = 1 / \sum_i q_j x_i$ et les variables $x_j' = \omega x_j$; dans ces conditions:
  - la fonction-objectif devient $Max\ [\sum_i c_i x_i']$,
  - les contraintes sont multipliées par ω pour devenir $\sum_i a_{ij} x_i' - b_j \omega \leq 0$,
  - et la contrainte $\sum_i q_i x_i' = 1$ doit être ajoutée.

I-2.1.5.2 Exemple d'application

Un producteur d'alliages spéciaux reçoit la commande de 1 tonne d'un alliage spécial comportant 4 métaux, avec les spécifications suivantes: teneur en métal A ≥ 23 %, teneur en métal B ≤ 15%, teneur en métal C ≤ 4%, teneur en métal D comprise entre 35% et 65%. L'alliage ne doit comporter aucun autre métal. Le producteur a à sa disposition 6 minerais différents ayant des teneurs variables des métaux demandés (voir tableau 143).

TABLEAU 143
Composition et prix des minerais disponibles

Minerais j	Poids de métal (en tonne) pour 1 tonne de minerais						Coût / tonne ($ lidurien)
	A ($i = 1$)	B ($i = 2$)	C ($i = 3$)	D ($i = 4$)	Impuretés ($1-\beta_j$)	Total	
1	0,25	0,10	0,10	0,25	0,30	1,00	230
2	0,40	0,00	0,00	0,30	0,30	1,00	200
3	0,20	0,10	0,00	0,30	0,40	1,00	180
4	0,00	0,15	0,05	0,20	0,60	1,00	100
5	0,20	0,20	0,00	0,40	0,20	1,00	270
6	0,08	0,05	0,10	0,17	0,60	1,00	120

Le problème posé est celui de la définition du mélange de minerais qui minimise le coût de production de 1 tonne (d'où l'on déduit par simple multiplication le mélange optimal pour une production de d tonnes). Soit x_j le nombre de tonnes

1. Voir Williams (1993, [444]), p. 26 à 27. Le dénominateur doit être positif, quelle que soit la solution trouvée; pour cela, il suffit que les coefficients q_i soient tous positifs; par ailleurs, la généralisation à la minimisation et aux autres contraintes (= et ≥) est immédiate).

de minerai j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) utilisé pour produire une tonne d'alliage (dans le mélange retenu). On cherche à déterminer les valeurs de x_j qui minimisent le coût de production d'une tonne. La fonction-objectif est donc *Min* z, avec $z = (230x_1 + 200x_2 + 180x_3 + 100x_4 + 270x_5 + 120x_6)$

Il faut que l'alliage respecte les spécifications du client, on aura donc:

$0{,}25x_1 + 0{,}40x_2 + 0{,}20x_3 + 0{,}20x_5 + 0{,}08x_6 \geq 0{,}23$ (teneur en métal A)

$0{,}10x_1 + 0{,}10x_3 + 0{,}15x_4 + 0{,}20x_5 + 0{,}05x_6 \leq 0{,}15$ (teneur en métal B)

$0{,}10x_1 + 0{,}05x_4 + 0{,}10x_6 \leq 0{,}04$ (teneur en métal C)

$0{,}25x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}20x_4 + 0{,}40x_5 + 0{,}17x_6 \geq 0{,}35$ (teneur en métal D)

$0{,}25x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}20x_4 + 0{,}40x_5 + 0{,}17x_6 \leq 0{,}65$ (teneur en métal D)

Il faut également que la combinaison retenue donne exactement 1 tonne de l'alliage cherché. En tenant compte des déchets (1 tonne du minerai 1 contient 0,7 tonne de métal, etc.), on doit respecter la contrainte suivante:

$$0{,}7x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}6x_3 + 0{,}4x_4 + 0{,}8x_5 + 0{,}4x_6 = 1$$

La composition optimale est de 0,9714 tonne du minerai 2 et 0,8 tonne du minerai 4 pour fabriquer une tonne d'alliage ($x_2^* = 0{,}9714$ et $x_4^* = 0{,}8$), les autres minerais n'étant pas utilisés. Le coût de la tonne d'alliage est alors de 274,30 dollars liduriens. Seule la contrainte portant sur le métal C est contraignante et la variable duale qui lui est associée est de 285,7.

I-2.2 Cas de plusieurs centres de production isolés

On examinera le cas de la production à étage (§ I-2.2.1) et celui de l'assignation de clients à des centres de production ou de distribution (§ I-2.2.2, page 552).

I-2.2.1 Production à étages

I-2.2.1.1 Cartographie des flux

La représentation de la production dans un système productif s'effectue habituellement en effectuant une cartographie des flux, qui correspond à un graphe dont les nœuds sont les centres de production retenus et les arcs, les flux traités par ces centres de production. On peut introduire une seconde catégorie de nœuds pour représenter les stocks, mais ceci ne présente de réel intérêt opérationnel que dans deux cas de figure:

- Il est souhaité de faciliter la représentation de la *concentration* de plusieurs flux d'un même produit ou celle de l'*éclatement* d'un flux en plusieurs flux (cas du ramassage ou de la desserte en distribution), ce qu'illustre la figure 157 (où les rectangles représentent des centres de production). Dans ce dernier cas, la structure est qualifiée de stock à étages et l'on doit utiliser des **équations spatiales de conservation des flux**[1] qui stipulent qu'au cours de la période considérée, la somme de ce qui rentre dans un stock est égale à la somme de ce qui est prélevé sur ce stock, ce qu'illustre la figure 157 (où

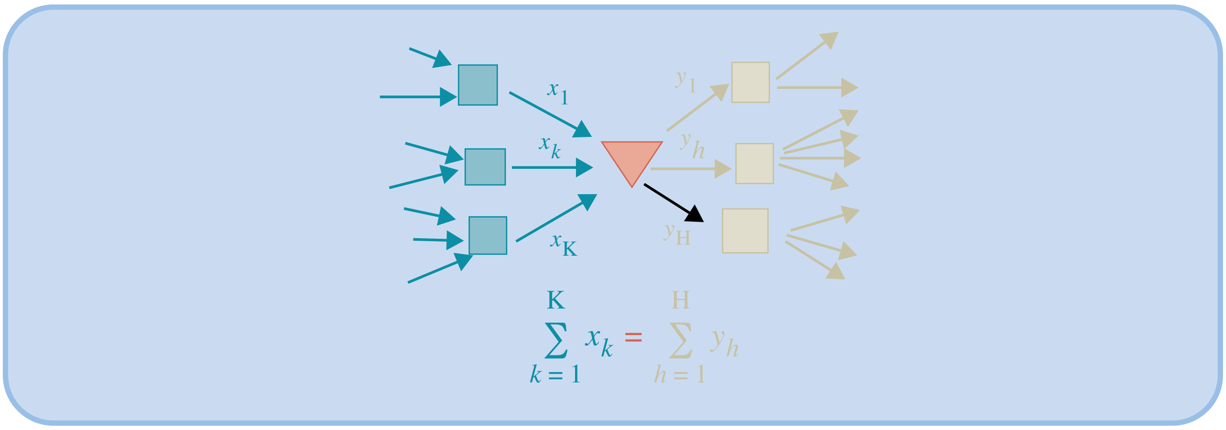
1. Les équations spatiales de conservation des flux ne doivent pas être confondues avec les équations dynamiques de conservation des stocks présentées à la page 556.

Table des matières
Index thématique

l'équation spatiale de conservation n'est mentionnée que pour un seul stock). Pour la description du fonctionnement de stocks à étages sur plusieurs périodes, il est possible d'utiliser des équations de conservation de stock combinant les équations spatiales et les équations dynamiques;

FIGURE 157

Équation spatiale de conservation des flux



- pour permettre une description dynamique du fonctionnement du système, dans le cadre d'un modèle multi-périodes, ce qui conduira à l'utilisation d'*équations dynamiques de conservation des stocks* (voir page 556).

Table des matières
Index thématique

Dans la représentation de la circulation de flux, on est dans une configuration de stocks à étages dès lors que des flux transitent entre plusieurs stocks clairement identifiés. Si les articles situés dans deux stocks successifs sont physiquement identiques c'est que le flux entre les deux stocks est associé à une opération de transport et l'on parle de stocks de distribution. Dans le cas contraire, le flux entre les deux stocks est associé à une opération de production et l'on parle de stocks de fabrication.

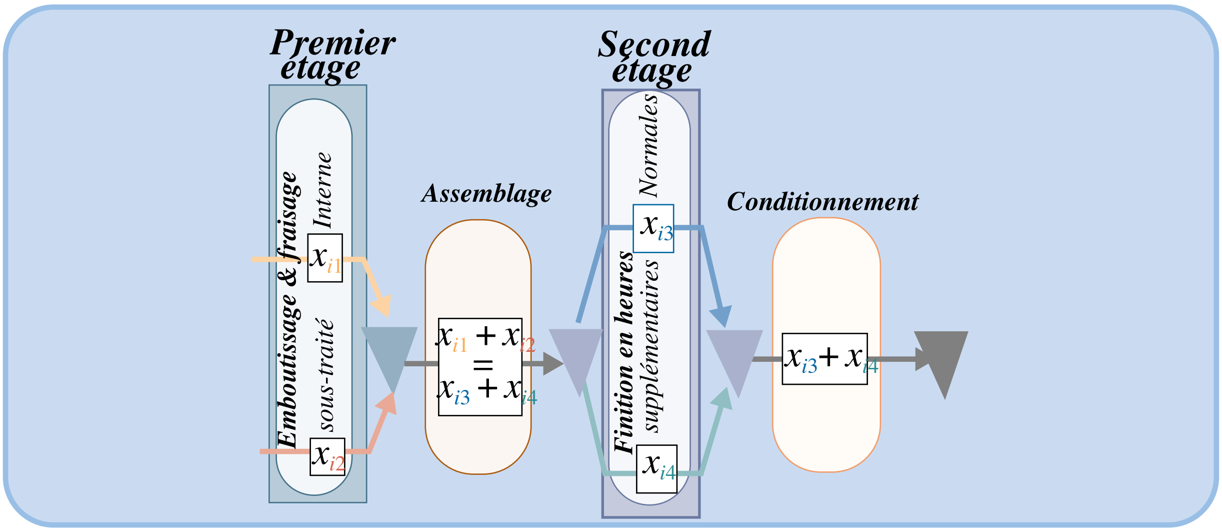
I-2.2.1.2 Application au cas de plusieurs productions indépendantes fabriquées par des gammes alternatives utilisant plusieurs ressources

Dans les exemples traités aux § I-2.1.1 et § I-2.1.2, on avait considéré comme un tout, un système productif composé en réalité de 5 ateliers. L'introduction de gammes alternatives (au § I-2.1.2) rend la décomposition intéressante car l'explicitation des différentes filières pose rapidement un problème combinatoire important que l'on évite lorsque l'on fait appel à la formulation de stocks à étages. Dans la cartographie des flux utilisée ici, la dissociation des flux allant entre deux stocks d'encours successifs s'effectue sur la base de critères techniques (gamme alternative) et économiques (coût différent d'exécution de l'opération). L'existence de plusieurs flux possibles entre deux stocks successifs implique des décisions à prendre sur le plan opérationnel, contrairement à ce qui se passe lorsque le flux est unique. Pour cette raison, on ne considère comme «*étage*» que les parties de la cartographie correspondant à des *alternatives décisionnelles*. Dans l'exemple du § I-2.1.2.2, on obtient la cartographie des flux de la figure 158.

Cette formulation présente plusieurs avantages: simplification de l'analyse formelle du problème (pas d'explicitation de toutes les filières), interprétation immédiate des résultats (pas de calculs intermédiaires pour retrouver la charge de

FIGURE 158

Cartographie des flux (formulation à étages)

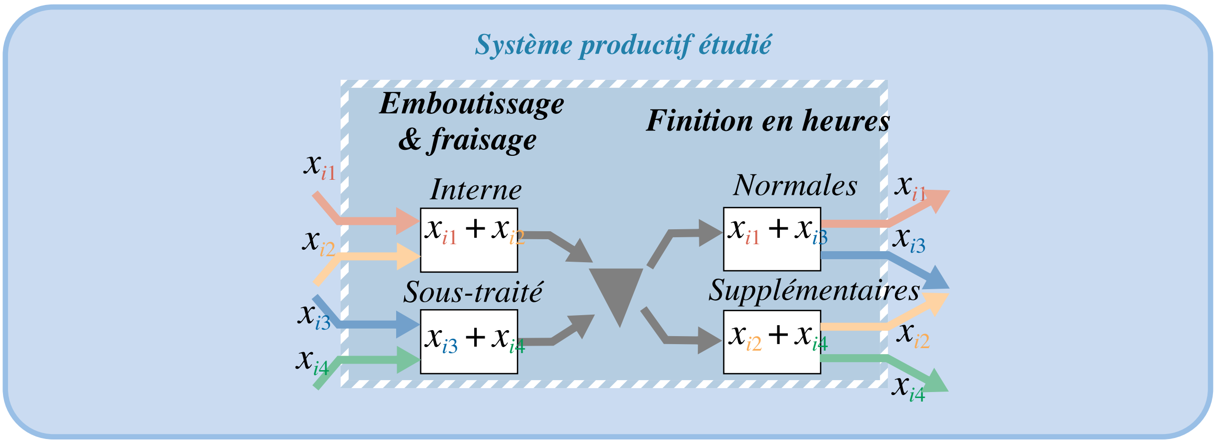


travail de chaque poste) et meilleure maintenance du modèle (l'introduction d'une variante technico-économique dans un atelier n'oblige pas à «recalculer» toutes les filières). En contrepartie, l'augmentation du nombre de contraintes qui en résulte, comme on va le voir, conduit à un accroissement du temps de calcul.

Pour bien comprendre la différence avec la formulation utilisée au § I-2.1.2, il faut se reporter à la figure 159 qui fournit la cartographie des flux associés à cette première formulation et utilise la définition des variables du tableau 135 de la page 536. Les stocks intermédiaires des produits i correspondent aux en-cours après opérations d'emboutissage et de fraisage effectuées en interne ou en sous-traitance et les x_{ij} correspondent à des flux qui traversent le système *de bout en bout*, ce qui s'explique par le fait que l'on considère être en présence d'un centre de production unique.

FIGURE 159

Cartographie des flux avec explicitation des filières



Dans la formulation de stocks à étages, les contraintes du problème deviennent:

- Étage 1:

$$0{,}03x_{11} + 0{,}15x_{21} + 0{,}05x_{31} + 0{,}10x_{41} \leq 400 \text{ (emboutissage «interne»)}$$

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

$0{,}06x_{11} + 0{,}12x_{21} \qquad\qquad + 0{,}10x_{41} \leq 400$ (fraisage «interne»)

$0{,}5x_{21} + 0{,}3x_{41} \leq 500$ (tôles)

- Étage 2:

$\sum_{j=1}^{2}(0{,}05x_{1j} + 0{,}10x_{2j} + 0{,}05x_{3j} + 0{,}12x_{4j}) \leq 500$ (assemblage[1])

$0{,}04x_{13} + 0{,}2x_{23} + 0{,}03x_{33} + 0{,}12x_{43} \leq 450$ (finition en heures normales)

$0{,}04x_{14} + 0{,}2x_{24} + 0{,}03x_{34} + 0{,}12x_{44} \leq 100$ (finition en heures supplémentaires)

$\sum_{j=3}^{4}(0{,}02x_{1j} + 0{,}06x_{2j} + 0{,}02x_{3j} + 0{,}05x_{4j}) \leq 400$ (conditionnement)

- Équations de conservation des flux:

$x_{i1} + x_{i2} = x_{i3} + x_{i4}$, pour $i = 1,\ldots,4$

(conservation des flux entre les étages 1 et 2)

- Équations de production à réaliser[2]:

$x_{13} + x_{14} = 3000$ (production imposée pour le produit 1)

$x_{23} + x_{24} = 500$ (production imposée pour le produit 2)

$x_{33} + x_{34} = 1000$ (production imposée pour le produit 3)

$x_{43} + x_{44} = 2000$ (production imposée pour le produit 4)

La fonction-objectif consiste à minimiser le coût total de production ou, ce qui revient au même, à minimiser le supplément de coût, par rapport au coût minimal défini en retenant pour chaque étage la solution la moins onéreuse (sans se préoccuper des contraintes liées aux ressources disponibles). Les coûts c_{ij} correspondant à des accroissements de coûts par rapport aux solutions de base, il en résulte que les c_{i1} et les c_{i3} sont nuls et que les c_{i2} et c_{i4} sont définis comme des variations par rapport aux c_{i1} et c_{i3}. L'accroissement de coût z que l'on cherchera à minimiser s'ajoutera donc (voir tableau 136, page 537) à une somme de $30 \times 3000 + 75 \times 500 + 55 \times 1000 + 70 \times 2000 = 322500$. On aura donc:

Min z, avec $z = \{(6x_{12} + 15x_{22} + 11x_{32} + 14x_{42}) + (1x_{14} + 2x_{24} + 1x_{34} + 1{,}5x_{44})\}$

La solution optimale conduit à un accroissement minimal de coût égal à 12562, en arrondissant les productions trouvées, ce qui conduit au coût total de production de 322500 + 12562 = 335062. Les conséquences sont identiques à celles trouvées précédemment (voir tableau 137, page 538), avec:

1. Cette contrainte pouvant encore s'écrire, compte tenu des équations de conservation des stocks (voir la figure 158, page 550): $\sum_{j=3}^{4}(0{,}05x_{1j} + 0{,}10x_{2j} + 0{,}05x_{3j} + 0{,}12x_{4j}) \leq 500$

2. On a retenu arbitrairement ici des équations du type $x_{i3} + x_{i4} = d_i$ mais on aurait pu tout aussi bien utiliser des équations du type $x_{i1} + x_{i2} = d_i$.

- pour le premier étage en interne $x_{11}^* = 3000$, $x_{31}^* = 1000$, $x_{41}^* = 1667$ et en externe $x_{22}^* = 500$, $x_{42}^* = 333$;
- pour le second étage en heures normales $x_{13}^* = 3000$, $x_{23}^* = 300$, $x_{33}^* = 1000$, $x_{43}^* = 2000$ et en heures supplémentaires $x_{24}^* = 200$.

On peut généraliser la démarche à un nombre quelconque K_i d'étages pour le produit i (plus il y a d'étages[1], plus cette formulation est intéressante). Pour ce faire, on note $x_{ij_{k_i}}$ la production de l'alternative j_{k_i} de l'étage k_i du produit i, production qui conduit à l'accroissement de coûts $\mathrm{c}_{ij_{k_i}}$ par rapport à la première des alternatives ($j_{k_i} = 1$). On a à donc à optimiser z:

$$Min\ z\text{, avec } z = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \sum_{k_i=1}^{\mathrm{K}_i} \sum_{j_{k_i}=1}^{\mathrm{J}_{k_i}} \mathrm{c}_{ij_{k_i}} x_{ij_{k_i}} \qquad \textit{relation 91}$$

Par ailleurs, il faut introduire de nouvelles équations de conservation des stocks entre les étages $k_i = 1$ et $k_i = 2$ (entre les étages $k_i = 2$ et $k_i = 3, \ldots,$ entre les étages $k_i = \mathrm{K}_i - 1$ et $k_i = \mathrm{K}_i$):

$$\sum_{j_{k_i}=1}^{\mathrm{J}_{k_i}} x_{ij_{k_i}} = \sum_{j_{k_i+1}=1}^{\mathrm{J}_{k_i+1}} x_{ij_{k_i+1}}\text{, pour } k_i = 1, \ldots, \mathrm{K}_i - 1 \qquad \textit{relation 92}$$

Table des matières

Index thématique

I-2.2.2 Assignation de «clients» à un centre de production ou de distribution

I-2.2.2.1 Le problème posé

Dans sa version la plus simple, le problème posé est celui de la détermination du centre de production ou de distribution i (parmi n centres possibles) qui traitera la demande du client j (sachant qu'il y a m clients), étant entendu qu'un client n'est servi que par un centre mais qu'un centre peut servir plusieurs clients. L'éclairage économique de cette assignation est donné par le coût c_{ij} de satisfaction de la totalité de la demande du client j par le centre i. Pour résoudre ce problème, il faut utiliser une variable binaire x_{ij} qui prendra la valeur 1 si le centre i traite la demande du client j et la valeur 0, dans le cas contraire (voir tableau 144).

Le problème posé est celui de la minimisation du coût de fonctionnement du système:

$$Min\ z\text{, avec } z = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \sum_{j=1}^{\mathrm{m}} c_{ij} x_{ij} + \ldots \qquad \textit{relation 93}$$

L'obligation que le client soit servi par un seul centre se traduit par le jeu des m contraintes suivantes:

1. correspondant à chaque fois à autant d'alternatives décisionnelles.

TABLEAU 144
Variables binaires du problème d'affectation

		client				
		1	…	j	…	m
Centre de production	1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1m}
	…	…	…	…	…	…
	i	x_{i1}	…	x_{ij}	…	x_{im}
	…	…	…	…	…	…
	n	x_{n1}	…	x_{nj}	…	x_{nm}

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{, pour chaque client } j \qquad \textit{relation 94}$$

Si l'on accepte qu'un client soit servi par plusieurs centres de production, la variable x_{ij} est alors continue et comprise entre 0 et 1 ; comme elle représente la part de la demande du client j qui est satisfaite par le centre de production i, la relation 94 reste valable.

Normalement, il existe une contrainte de capacité Q_i sur le centre i *(sinon, la solution du problème est triviale)*. Pour en tenir compte, il faut introduire la relation 95, dans laquelle q_j représente la production totale demandée par le client j :

$$\sum_{j=1}^{m} q_j x_{ij} < Q_i \text{, pour chaque centre } i \qquad \textit{relation 95}$$

Implicitement, dans cette formulation, le coût de fonctionnement d'un centre est proportionnel à sa production. Dans la réalité, la fonction de coûts est plus complexe : il y a des charges fixes qui varient par palier et le coût variable direct n'est pas constant. Les développements du § II-2.3.2, page 1142, du chapitre XVI permettent de prendre facilement en compte cet accroissement de complexité du problème.

I-2.2.2.2 Exemple d'application

La société **KOKOLA** désire s'implanter en Lidurie pour produire sa boisson pétillante bien connue de tous et qui est actuellement importée de Poldavie. Une étude préliminaire a sélectionné 5 sites possibles qui peuvent ou non être tous retenus et qui doivent desservir 10 dépôts régionaux (chaque dépôt devant être desservi en totalité par la même usine, les 5 premiers dépôts se trouvant dans le site des usines envisagées). Le tableau 145 de la page 554 fournit les coûts quotidiens d'acheminement.

Le problème posé est donc de minimiser la fonction de coût z suivante :

$z = 1900x_{12} + 1600x_{13} + 2300x_{14} + 2380x_{15} + 2740x_{16} + 3560x_{17} + 2220x_{18} + 3400x_{19} + 2380x_{1,10} + 2300x_{21} + 1700x_{23} + 2400x_{24} + 2280x_{25} + 2440x_{26} + 3760x_{27} + 2020x_{28} + 3500x_{29} + 2580x_{2,10} + 2600x_{31} + 2300x_{32} + 1700x_{34} + 2980x_{35} + 2940x_{36} + 3960x_{37} + 2720x_{38} + 2800x_{39} + 2680x_{3,10} + 3100x_{41} + 2800x_{42} + 1500x_{43} + 3480x_{45} + 3240x_{46} + 4260x_{47} + 3220x_{48} + 2300x_{49} + 2880x_{4,10} + 2700x_{51} + 2200x_{52} + 2300x_{53} + 3000x_{54} + 2440x_{56} + 3560x_{57} + 1620x_{58} + 4100x_{59} + 2580x_{5,10}$

Table des matières
Index thématique

FIGURE 160
Carte de la Lidurie

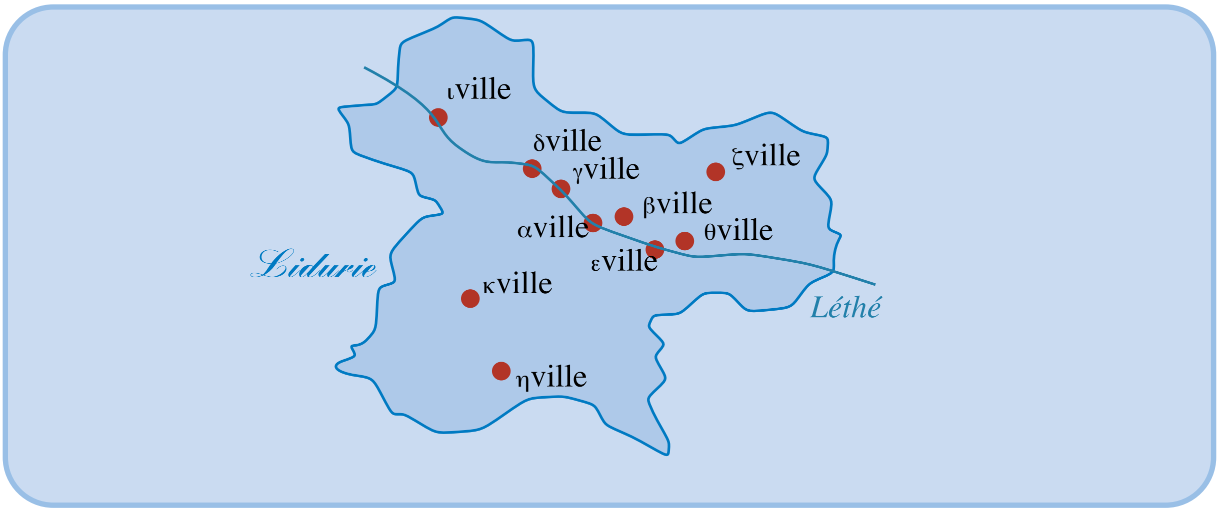


TABLEAU 145
Coûts d'acheminement entre usines et dépôts + demandes des dépôts et capacité des usines

		Dépôt										Capacité de l'usine
		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	
Usine	αville	0	1900	1600	2300	2380	2740	3560	2220	3400	2380	7000
	βville	2300	0	1700	2400	2280	2440	3760	2020	3500	2580	12000
	γville	2600	2300	0	1700	2980	2940	3960	2720	2800	2680	5000
	δville	3100	2800	1500	0	3480	3240	4260	3220	2300	2880	8000
	εville	2700	2200	2300	3000	0	2440	3560	1620	4100	2580	6500
production demandée par le dépôt		5000	4000	2500	3000	4200	1600	2900	1800	1500	2200	

Sous contrainte du respect :

- des capacités productives :
  - $5000x_{11} + 4000x_{12} + 2500x_{13} + 3000x_{14} + 4200x_{15} + 1600x_{16} + 2900x_{17} + 1800x_{18} + 1500x_{19} + 2200x_{1,10} \leq 7000$
  - $5000x_{21} + 4000x_{22} + 2500x_{23} + 3000x_{24} + 4200x_{25} + 1600x_{26} + 2900x_{27} + 1800x_{28} + 1500x_{29} + 2200x_{2,10} \leq 12000$
  - $5000x_{31} + 4000x_{32} + 2500x_{33} + 3000x_{34} + 4200x_{35} + 1600x_{36} + 2900x_{37} + 1800x_{38} + 1500x_{39} + 2200x_{3,10} \leq 5000$
  - $5000x_{41} + 4000x_{42} + 2500x_{43} + 3000x_{44} + 4200x_{45} + 1600x_{46} + 2900x_{47} + 1800x_{48} + 1500x_{49} + 2200x_{4,10} \leq 8000$
  - $5000x_{51} + 4000x_{52} + 2500x_{53} + 3000x_{54} + 4200x_{55} + 1600x_{56} + 2900x_{57} + 1800x_{58} + 1500x_{59} + 2200x_{5,10} \leq 6500$

Table des matières
Index thématique

- de satisfaction des demandes: $\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1$, pour $j = 1$ à 10, les variables x_{ij} étant binaires (un dépôt n'étant servi que par une usine[1]).

La solution de ce problème est donnée au tableau 146 et conduit à un coût de 12700 dollars liduriens. Si la formulation retenue permet qu'un dépôt soit servi par plusieurs usines (voir tableau 147), l'économie réalisée est alors de 216,30 dollars liduriens.

TABLEAU 146

Affectation des dépôts aux usines (dépôt servi par une seule usine)

		Dépôt										Capacité résiduelle de l'usine
		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	
Usine	αville	5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2000
	βville	0	4000	0	0	0	1600	2900	0	0	2200	1300
	γville	0	0	2500	0	0	0	0	0	0	0	2500
	δville	0	0	0	3000	0	0	0	0	1500	0	3500
	εville	0	0	0	0	4200	0	0	1800	0	0	500

TABLEAU 147

Affectation des dépôts aux usines (dépôt pouvant être servi par plusieurs usines)

		Dépôt										Capacité résiduelle de l'usine
		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	
Usine	α−ville	5000	0	0	0	0	0	0	0	0	2000	0
	β−ville	0	4000	0	0	0	1600	2400	0	0	200	3800
	γ−ville	0	0	2500	0	0	0	0	0	0	0	2500
	δ−ville	0	0	0	3000	0	0	0	0	1500	0	3500
	ε−ville	0	0	0	0	4200	0	500	1800	0	0	0

I-3 Modélisation multi-périodes des processus productifs

On examinera successivement le fonctionnement de systèmes productifs traitant des flux de production sur plusieurs périodes (§ I-3.1), le cas de productions de prestations liées par des contraintes spatio-temporelles (§ I-3.2, page 561) et des problèmes d'ordonnancement (§ I-3.3, page 561).

I-3.1 Fonctionnement d'un système productif produisant des flux de production sur plusieurs périodes

La définition d'un programme de production sur plusieurs périodes implique tout d'abord que soient dupliquées toutes les variables de commande, ou une partie d'entre elles, autant de fois qu'il y a de périodes. Ensuite, la distinction

1. Dans le cas d'une possibilité de partage entre plusieurs usines, que l'on envisagera dans un second temps, les variables x_{ij} sont alors continues et il faut ajouter le jeu de contraintes suivant: $x_{ij} \leq 1, \forall i, j$.

proposée entre ressources stockables et ressources non stockables conduit à introduire (§ I-3.1.1) une version dynamique de conservation des stocks pour les ressources stockables. Une nouvelle catégorie de problèmes se rencontre dans les modèles multi-périodes: les dotations de ressources non stockables peuvent résulter de la combinaison des valeurs prises par des variables de commande qui offrent, chacune, une certaine disponibilité sur un ensemble de périodes (§ I-3.1.2, page 558). Enfin, la prise en compte de plusieurs périodes rend nécessaire la reprise de la distinction entre production pour stock et production à la commande (§ I-3.1.3, page 559).

I-3.1.1 Introduction des équations dynamiques de conservation des stocks pour les ressources stockables

Dans la description du fonctionnement d'un système productif sur plusieurs périodes, il n'y a *indépendance temporelle* entre les périodes qu'à la double condition:

- d'avoir, à la fin de chaque période, une *reconstitution à l'identique des stocks de ressources stockables*, puisque, par définition, les ressources non stockables non utilisées ne sont pas transférables sur la période suivante; pour qu'il en soit ainsi, il faut que la consommation de chaque ressource stockable durant la période soit compensée *à l'identique*
  - soit par un approvisionnement externe (on est alors en présence d'un système ouvert),
  - soit par une production interne au système, qui porte alors sur une partie des ressources stockables;
- d'avoir une indépendance entre les demandes des périodes (la levée de cette hypothèse sera examinée au § I-3.1.3, page 559).

En règle générale, à un niveau de découpage temporel suffisamment fin, ces conditions ne sont pas réunies. En effet, la production de certains postes de travail alimente des stocks de ressources pour d'autres postes de travail et, à supposer qu'aucune production ne s'effectue à cheval sur deux périodes, il n'y a aucune raison que les rythmes de consommation et de production soient identiques dans tout le système. L'*interdépendance temporelle* est assurée par des **équations de conservation temporelle des stocks**[1], à raison d'une par ressource stockable j et par période t, qui ne sont rien d'autre qu'une application du bon vieux principe de conservation:

$$s_{j,\,t+1} = s_{jt} + x_{jt} - \mathrm{d}_{jt}, \text{ pour } j = 1, \ldots, \mathrm{J} \text{ et } t = 1, \ldots, \mathrm{T} - 1 \qquad \textit{relation 96}$$

Dans cette équation, valable pour une ressource stockable j quelconque:

- s_{jt} est le stock de *début* de période t (laquelle est délimitée par les «dates ponctuelles» t et t+1), avant toute livraison ou consommation,
- x_{jt} est la quantité, livrée en début de période, du bien considéré dans ce stock (ce concept de livraison sera approfondi ci-après); le stock disponible après cette livraison est donc $s_{jt} + x_{jt}$; on peut admettre que la livraison ne s'effectue

1. Cette équation est encore appelée plus simplement **équation de conservation** (ce qui est un peu ambigu puisqu'il existe une équation de spatiale conservation des flux, comme on l'a vu à la page 549) et parfois équation comptable (ce qui est, cette fois-ci, complètement ambigu). On la retrouvera sous une forme voisine dans l'une des utilisations classiques de la programmation dynamique (page 569).

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

pas « en une fois au début de la période » à condition qu'il soit certain que cela n'engendrera pas de rupture de stock ;
- d_{jt}, la demande exprimée tout au long de cette période ; pour éviter toute rupture de stock, il faut alors que cette demande n'excède pas le stock disponible après livraison.

La relation 96 repose sur le concept de stock détenu en *début* de période mais il est évident qu'il est tout aussi possible de définir une équation de conservation des stocks qui s'appuie sur le concept de stock défini en *fin* de période (qui est égal au stock disponible au début de la période suivante), ce qui donne :

$$s_{jt} = s_{j,\,t\text{-}1} + x_{jt} - d_{jt}, \text{ pour } j = 1, \ldots, J \text{ et } t = 2, \ldots, T \qquad \textit{relation 97}$$

La variable x_{jt}, utilisée dans les équations de conservation temporelle des stocks peut correspondre :
- à une livraison d'un montant prédéterminé, auquel cas on est en présence d'un paramètre et il serait judicieux de remplacer x_{jt} par b_{jt} pour être cohérent avec les notations antérieurement utilisées ;
- à une livraison en provenance d'un autre centre de production et correspond à une (ou des) production(s) effectuée(s) au cours de périodes antérieures dans un (ou plusieurs) autre(s) centre(s) ; dans ce cas, il convient de remplacer x_t par la (ou une somme de) variable(s) de commande appropriée(s).

Ces deux cas ne sont pas exclusifs.

Symétriquement, la demande d_{jt} peut être remplacée par une *somme de variables* correspondant à des livraisons du même bien, en réponse à des demandes provenant d'autres centres de production qui sont des centres de consommation de ce bien.

La version multi-périodes de la relation 82 de la page 532 est, en retenant la convention du stock de début de période (relation 96), en laissant ouverte la possibilité d'un approvisionnement prédéterminé b_{jt} et en notant x_{jt}, la livraison en provenance d'autres centres (x_{jt} devant être remplacé par les variables de commande appropriées) :

$$\sum_i a_{ij} x_{it} \le s_{jt} + b_{jt} + x_{jt}, \text{ pour } j = 1, \ldots, J \text{ et } t = 2, \ldots, T$$ *Version dynamique de la relation « Demande ≤ Offre » dans le cas de ressources stockables* *relation 98*

Cette relation 98 se combine à la relation 96 qui, pour être cohérente, doit distinguer les approvisionnements internes des approvisionnements externes, ce qui conduit à : $s_{j,\,t+1} = s_{jt} + x_{jt} + b_{jt} - d_{jt}$.

Dans certaines situations, l'existence de stocks positifs s_{jt} est pénalisée par l'introduction de coûts de possession du type $\sum_{t=2}^{T} c_{p_j} s_{jt}$, où c_{p_j} est le coût de possession d'une unité de j pendant une période[1].

1. Faire dépendre ce coût de la période implique seulement de remplacer c_{p_j} par $c_{p_{jt}}$.

I-3.1.2 Définition dynamique des ressources non stockables

Dans les problèmes multi-périodes, l'offre de certaines ressources non stockables (principalement celles de personnel) peut varier d'une période à une autre, pour faire face à une demande variable dans le temps. Ceci s'avère nécessaire lorsque l'on est en présence d'une production à la commande pour laquelle on ne dispose que d'un laps de temps très court, excluant tout lissage de la charge de travail par un report de la production sur une période ultérieure (cf. § I-3.1.3, page 559). Ce cas de figure se rencontre fréquemment dans les industries de service (personnel aux guichets de péage d'une autoroute ou aux caisses d'un supermarché, personnel d'un centre de tri, personnel hospitalier…). En général, dans ces problèmes, la disponibilité d'une ressource sur chaque période dépend de la juxtaposition de plusieurs décisions de mobilisation de ressources élémentaires présentes sur des plages de temps différentes.

Pour faciliter la suite de cette présentation, on raisonnera sur des services assurés par des opérateurs (ouvriers, anesthésistes, etc.). En pratique, on définit des services h qui sont assurés par n_h opérateurs. Chaque service h se caractérise par la présence ou l'absence, au cours de la période t, des opérateurs affectés à ce service, ce que l'on décrit par un tableau de coefficients g_{ht} qui valent 1, si le service h implique la présence de ces opérateurs durant la période t, et 0, dans le cas contraire (le tableau 148 illustre cette possibilité pour 5 services offerts retenus dans un centre productif).

TABLEAU 148
Services offerts

SERVICES	12H / 14H	14H / 16H	16H / 18H	18H / 20H	20H / 22H	22H / 24H	0H / 2H	2H / 4H	4H / 6H	6H / 8H	8H / 10H	10H / 12H
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Si les n_h opérateurs du service h sont présents au cours de la période t, c'est que le coefficient g_{ht} vaut 1; il s'ensuit que le nombre total d'opérateurs présents au cours de la période t est:

$$\text{effectif présent durant la période } t = \sum_h g_{ht} n_h \qquad \text{relation 99}$$

Par exemple, si l'on retient le jeu de données $n_1 = 3$, $n_2 = 0$, $n_3 = 10$, $n_4 = 5$ et $n_5 = 4$, les effectifs présents sont ceux du tableau 149.

Deux cas de figure se présentent donc dans l'analyse dynamique de l'offre de ressources non stockables:

- on peut, tout d'abord, être en présence d'une *prédétermination* de cette offre qui résulte:
  - soit de l'existence d'un service unique pour l'ensemble des périodes étudiées, avec une dotation de ressource connue à l'avance,

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

TABLEAU 149
Effectifs présents

12H / 14H	14H / 16H	16H / 18H	18H / 20H	20H / 22H	22H / 24H	0H / 2H	2H / 4H	4H / 6H	6H / 8H	8H / 10H	10H / 12H
3	3	3	3	10	15	15	15	9	4	4	4

- soit de l'existence de plusieurs services différents h dont les effectifs n_h sont prédéterminés, auquel cas, l'offre de ressource pour chaque période est alors prédéterminée et calculable par la relation 99 ;

- les effectifs n_h peuvent également être des variables de commande du problème étudié ; dans ce cas, la dotation de ressources de chaque période reste déterminée par la relation que nous venons de mettre en évidence mais elle n'est pas connue à l'avance.

Dans ces conditions, la version multi-périodes de la relation 82 de la page 532 pour ce type de ressources non stockables devient (n_h étant ou non des variables de commande) :

$\sum_i \mathrm{a}_{ij} x_{it} \leq \sum_h g_{ht} n_h$, *pour* $j = 1, \ldots, J$ et $t = 1, \ldots, \mathrm{T}$ *Version dynamique de la relation « Demande ≤ Offre » dans le cas de ressources non stockables* **relation 100**

La liaison avec les productions (= demande de ressource) peut être complexe lorsque les opérateurs présents sont utilisés par plusieurs centres de production (cas introduit au § I-2.1.2.3, page 539, avec la notion d'opérateur polyvalent, dans le cadre du modèle statique). On est en présence d'une double relation : la production décidée dans un centre pour une période induit l'effectif requis par le centre sur cette période et l'effectif globalement disponible au cours de cette période limite les effectifs affectés à chaque centre et donc la production possible de chaque centre. Ceci se traduit par l'usage de deux relations :

- la somme des opérateurs requis au cours d'une période doit rester inférieure ou égale aux opérateurs présents au cours de cette période (ce qui conduit à des relations similaires aux contraintes de la page 539),
- la production d'une période dans un centre de production est limitée par le nombre (éventuellement 0) d'opérateurs affectés à ce centre, durant la période[1].

I-3.1.3 Lissage de la production

Dans les problèmes multi-périodes, il convient de distinguer la production à la commande de la production pour stock. Dans le premier cas, la demande d_{it} de fourniture d'un bien ou d'une prestation i, à la période t, doit impérativement être satisfaite au cours de cette période. Dans le second cas, on dispose d'une certaine marge de manœuvre permettant de différer tout ou partie de la satisfaction de la demande sur une période ultérieure. Ce report est limité et la façon la plus simple

1. Les temps opératoires unitaires des produits ou services exécutés au cours de cette période influent sur le potentiel productif, mais ce sont des paramètres et non des variables de commande du système contrairement aux effectifs affectés aux centres de production.

de décrire cette restriction consiste à travailler sur la production cumulée $\sum_{t'=1}^{t} x_{it'}$ et sur la demande cumulée $\sum_{t'=1}^{t} d_{it'}$, pour toutes les périodes allant de 1 à T. Cette production cumulée est nécessairement comprise entre deux bornes décrites par :

- la relation 101 qui stipule que pour aucune période la production cumulée ne peut être supérieure à la demande cumulée (interdiction d'anticiper la demande[1]) :

$$\sum_{t'=1}^{t} x_{it'} \leq \sum_{t'=1}^{t} d_{it'}, \text{ pour } t = 1, \ldots, T \qquad \textit{relation 101}$$

- la relation 102 qui limite le report maximal possible à $\sum_{t'=1}^{t} x_{it'} - X_{min_{it}}$ et, ce faisant, le retard maximal possible de satisfaction d'une demande (sous l'hypothèse implicite de satisfaction des demandes dans leur ordre d'arrivée) :

$$\sum_{t'=1}^{t} x_{it'} \geq X_{min_{it}}, \text{ pour } t = 1, \ldots, T, \text{ avec } X_{min_{iT}} = \sum_{t'=1}^{T} x_{it'} \qquad \textit{relation 102}$$

Trois remarques pratiques doivent être faites.

- Cette possibilité de report autorise un certain lissage de la charge qui peut permettre, d'une part, de trouver une solution lorsque certaines ressources non stockables ne sont pas modulables (prestations de machines, par exemple) et, d'autre part, de faciliter l'obtention d'économies lorsque certaines ressources non stockables sont modulables suivant les principes décrits au § I-3.1.2, page 558.
- La distinction entre production pour stock et production à la commande est moins nette qu'il ne le paraît. Prenons l'exemple du tri du courrier urgent arrivant progressivement dans un centre de tri entre 17 et 20 heures. La totalité de ce courrier devant être traitée avant 21 heures, heure de coupure pour acheminement vers les autres centres de tri, on peut estimer que l'on est en présence d'une production à la commande. Mais dans la mesure où ce qui importe est que tout soit traité avant 21 heures, il est logique, dans une approche multi-périodes avec un découpage temporel assez fin, de considérer que l'on est en présence d'une production pour stock. La finesse du découpage temporel et l'éloignement plus ou moins grand de la date de livraison sont des éléments essentiels pour déterminer si l'on peut ou non considérer que l'on est en production pour stock.
- En cas de recherche d'une solution associée à un régime de croisière, le découpage temporel retenu couvre normalement une « macro-période » de référence (journée ouvrable, par exemple). Si l'on est en production pour stock, il faut considérer que l'on dispose, au début de la première période

1. Hypothèse qu'il peut être judicieux de lever dans certains problèmes.

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

élémentaire, d'un stock initial S et qu'à la fin de la dernière période élémentaire, on devra «rendre» ce stock pour bien rester en régime de croisière. Dans ces conditions, la relation 101 se transforme en relation 103, tandis que la relation 102, inchangée, assure la restitution à l'identique du stock initial:

$$\sum_{t'=1}^{t} x_{it'} \leq \sum_{t'=1}^{t} \mathrm{d}_{it'} + s \text{, pour } t = 1, \ldots, \mathrm{T} \qquad \textit{relation 103}$$

I-3.2 Cas particulier des prestations liées par des contraintes spatio-temporelles

Nous avions introduit, page 544, le cas de productions liées faisant appel à des gammes alternatives qui intégraient implicitement un ensemble de contraintes spatio-temporelles. L'ensemble de ces gammes alternatives était supposé connu, le problème posé étant celui de la sélection d'un sous-ensemble de ces gammes minimisant un coût de production. Il est évident que l'explicitation de ces gammes alternatives peut s'avérer un problème rapidement insoluble pour des raisons de combinatoire faisant intervenir des contraintes de temps et / ou d'espace.

Une autre série de problèmes liés à l'exécution d'un ensemble de prestations de transport et visant à définir directement des gammes à utiliser, sans passer par leur explicitation systématique préalable est celle des tournées. Dans sa version la plus simple (cf. page 906), le temps n'intervient pas vraiment et le problème peut être considéré comme appartenant à la classe des problèmes «mono-période» et être considéré comme relevant de la détermination de la gamme optimale d'un produit (§ I-2.1.5, page 545). Une formulation plus réaliste de ces problèmes de tournées oblige à tenir compte de l'existence de fenêtre de temps pour la collecte ou la livraison de marchandises (ou de personnes) dans un centre. Dès lors, ce problème fait appel à un découpage temporel et devient de nature «multi-périodes» en raison de la contrainte d'exécution de ces prestations sur un sous-ensemble de périodes, propre à chaque point desservi. L'analyse de ces problèmes de transport est effectuée à la section II, page 904, du chapitre XIII.

I-3.3 Problèmes d'ordonnancement

Dans les systèmes productifs faisant appel à plusieurs centres productifs (ou catégories de ressources), le problème de l'ordonnancement se pose nécessairement lorsque l'on travaille dans le cadre d'un découpage temporel assez fin et donc dans un contexte multi-périodes. Les caractéristiques de ce problème varient avec le type de système productif: orienté «projet», ateliers spécialisés ou ligne de production ou d'assemblage.

La programmation linéaire permet de formuler de manière élégante le problème de l'ordonnancement d'un projet et, à défaut d'être numériquement efficace, elle permet de dépasser certaines simplifications habituellement retenues. On peut considérer cette formulation comme relevant de la création d'une gamme de production s'inscrivant dans une perspective «multi-périodes». Ce problème est traité au § III-2.1.3, page 319, du chapitre IV.

Son extension à l'ordonnancement dans les systèmes productifs organisés en ateliers spécialisés (problème traité au chapitre V) est immédiate mais d'un intérêt opérationnel souvent limité, en raison de la dimension du programme linéaire obtenue ; cela étant, des problèmes additionnels se posent souvent, comme celui du temps de réglage d'une machine dépendant de l'ordonnancement des opérations sur cette machine (qui formellement se ramènent à des problèmes de tournée) ; ces problèmes importants en pratique ne seront pas traités ici.

L'ordonnancement sur ligne d'assemblage ou de production, dans le cas d'une production diversifiée par le biais d'options sera analysé au § I-2, page 599, et au § II-2, page 614, du chapitre IX.

SECTION II APPLICATION DES MÉTHODES GÉNÉRALES DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE À LA PROGRAMMATION DE LA PRODUCTION ET À LA GESTION DES STOCKS

La programmation dynamique, déjà utilisée au chapitre III, chapitre IV-2.1.2, est une technique puissante de résolution de certains problèmes combinatoires relatifs à la définition d'une séquence optimale de décisions. Ici, cette séquence de décisions est relative à un calendrier de production ou d'approvisionnement (variable de commande), qui, combiné avec un échéancier de demandes, fournit une évolution du stock.

La programmation dynamique repose sur l'utilisation d'un principe très simple, dit principe d'optimalité. La compréhension de ce principe est plus simple à partir d'un exemple de transport que d'un exemple de stock. Les applications de cette approche aux problèmes de transport restent limitées car elles ne permettent pas de décrire les contraintes rencontrées habituellement. On présentera donc ici la méthode générale de la programmation dynamique avant d'en faire l'application.

II-1 Présentation de la méthode de la programmation dynamique

II-1.1 Exemple introductif

La **CGTA**, **C**ompagnie **G**énérale des **T**ransports d'**A**lphaville, est chargée par un client d'effectuer une livraison à Omégaville, distante de près de 1 500 km d'Alphaville. Plusieurs itinéraires sont possibles, et le choix du meilleur itinéraire n'est pas a priori évident. Un itinéraire sera repéré par trois villes étapes par lesquelles le camion est tenu de passer. Graphiquement, le problème est décrit à la figure 161.

Le coût du transport entre deux villes *i* et *j* est donné dans le tableau 150 de la page 563 ; il est également porté sur l'arc reliant ces deux villes dans la carte de la figure 161. On ne se préoccupera pas ici de l'unité monétaire dans laquelle ces coûts sont exprimés, car il est évident que les données chiffrées d'un exemple ont intérêt à être les plus simples possibles pour ne pas masquer la démarche suivie par des difficultés de calcul.

Ce problème posé est assez simple et il serait facile de trouver directement lequel de ces 14 itinéraires possibles est le moins coûteux pour la **CGTA**. Dans la pratique, ce type de problème est plus complexe et l'énumération des itinéraires possibles est loin d'être évidente. La démarche de la programmation dynamique est une démarche récurrente qui permet à la fois d'éviter la recherche explicite de

Table des matières
Index thématique

FIGURE 161

Application de la programmation dynamique au problème de transport

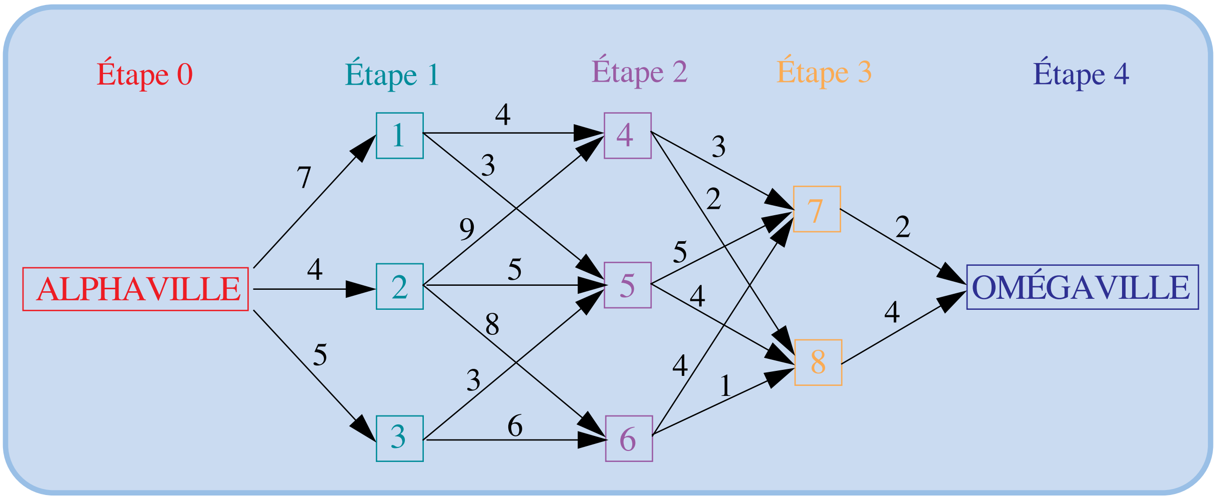


TABLEAU 150

Coûts de transport entre les villes

Villes		Coût de transport	Villes		Coût de transport
i	*j*	c_{ij}	*i*	*j*	c_{ij}
α	1	7	4	7	3
α	2	4	4	8	2
α	3	5	5	7	5
1	4	4	5	8	4
1	5	3	6	7	4
2	4	9	6	8	1
2	5	5	7	ω	2
2	6	8	8	ω	4
3	5	3			
3	6	6			

tous les itinéraires possibles et, en même temps, de diminuer le nombre de calculs à effectuer.

II-1.2 Résolution par la programmation dynamique du problème posé

La méthode est simple : elle consiste à se placer fictivement à Omégaville, c'est-à-dire au point d'arrivée, et à remonter progressivement vers Alphaville, c'est-à-dire le point de départ, en calculant pour chaque ville possible d'une étape n ($n = 3$, puis $n = 2, \ldots$, puisque l'on remonte en arrière) le coût le plus faible possible du transport entre cette ville et Omégaville. Ce calcul est relativement facile, car il suffit seulement de comparer autant de valeurs qu'il y a d'itinéraires possibles entre la ville i de l'étape n et les villes possibles de l'étape $n + 1$. Disons, pour fixer les idées, que la recherche du coût minimum du transport entre la ville 2 et Omégaville s'effectue en comparant trois coûts seulement: celui de l'itinéraire passant par la ville 4, celui de l'itinéraire passant par la ville 5 et celui de l'itinéraire passant par la ville 6. Le calcul de chacun de ces trois coûts est simple. Par exemple le coût correspondant à l'itinéraire optimal de la ville 2 à Omégaville et passant par la ville 4 est la somme du coût du transport entre la ville 2 et la ville 4, c'est-à-dire c_{24} et du coût de transport minimal entre la ville 4 et Omégaville. Ce dernier coût aura été calculé à l'étape de calcul précédente.

Ce raisonnement récurrent est intuitivement évident. Il revient à dire que, quel que soit l'itinéraire choisi pour aller d'Alphaville à une ville i, le choix de l'itinéraire pour se rendre de la ville i à Omégaville est nécessairement optimal, c'est-à-dire que les décisions restant à prendre constituent une politique optimale pour quitter la ville i. En remontant progressivement en arrière, on détermine alors la séquence de décisions optimales qui constituent la politique optimale à suivre. Ce type de raisonnement est connu sous le nom de **principe d'optimalité** (mis en évidence par Bellman) qui peut s'énoncer[1] comme suit «une politique optimale est nécessairement composée de sous-politiques optimales», c'est-à-dire que si la politique optimale implique que l'on passe par l'état i d'une étape décisionnelle, et par l'état j d'une autre étape décisionnelle, la politique optimale pour se rendre de i à j (sans se préoccuper du problème initial) est la même que celle du problème initial.

Pour être en mesure de systématiser le raisonnement, il faut introduire les variables suivantes:

- $f_n(i)$ = coût minimum pour se rendre de la ville i, qui est l'une des villes possibles de l'étape n, à Omégaville.
- $g_n(i)$ = numéro de la ville de l'étape $n + 1$, qui donne ce coût minimal $f_n(i)$ lorsqu'à l'étape n on doit partir de la ville i.

Reprenons notre exemple numérique, à l'étape $n = 3$, le camion passe par la ville $i = 7$ ou la ville $i = 8$. Comme il n'existe qu'un seul chemin pour se rendre des villes 7 ou 8 à Omégaville, le coût minimal n'est autre que le coût $c_{7\omega}$ et $c_{8\omega}$ et la décision qui génère ces coûts n'est autre que le choix de se rendre à Omégaville, dernière et unique étape du voyage: $f_3(7) = 2$; $g_3(7) = \omega$ et $f_3(8) = 4$; $g_3(8) = \omega$.

La décision commence seulement à comporter un degré de liberté à l'étape $n = 2$. Supposons tout d'abord que le camion passe par la ville 4. Les villes 7 et 8 constituent les villes étapes suivantes possibles. Si le camion passe par la ville 7, le coût du transport est la somme de $c_{4,7} = 3$ et de $f_3(7) = 2$, coût minimal du transport jusqu'à Omégaville lorsque l'on part de la ville 7; ce coût est donc de 5. Si, au contraire, le camion passe par la ville 8, le coût de transport sera la somme de $c_{4,8} = 2$ et de $f_3(8) = 4$, coût minimal du transport jusqu'à Omégaville lorsque l'on part de la ville 8; ce coût est égal à 6. En définitive, le coût minimal est de 5 lorsque l'on part de la ville 4, et la première décision à prendre pour atteindre ce coût, est

1. Bellman, à qui l'on doit ce principe l'énonce comme suit: « une politique est optimale si, à une période donnée, quelles que soient les décisions précédentes, les décisions qui restent à prendre constituent une politique optimale en regard du résultat des décisions précédentes».

Table des matières
Index thématique

de se rendre dans la ville 7; c'est-à-dire en reprenant nos conventions, on aura $g_2(4) = 7$. Le raisonnement que l'on vient de tenir se résume comme suit:

$$f_2(4) = \underset{4,\,7}{Minimum}[\{c_{4,7}+f_3(7)\},\{c_{4,8}+f_3(8)\}] = \{c_{4,7}+f_3(7)\} \rightarrow g_2(4) = 7$$

D'une façon générale, si l'on part de la ville *i* d'une étape *n,* pour se rendre dans une des villes *j* de l'étape *n* + 1, on retiendra la ville *j* qui minimise la somme du coût de transport entre *i* et *j* et du coût de transport minimal entre *j* et Omégaville. La démarche récurrente est donc décrite par la relation 104.

$$f_n(i) = \underset{j}{Minimum}\{c_{ij} + f_{n+1}(j)\},\ pour \begin{cases} n = N-1, N-2, \ldots, 0 \\ j = \text{ville de l'étape } n+1 \end{cases} \qquad \textit{relation 104}$$

On peut calculer de la même façon que pour la ville 7 le coût minimal et donc la décision optimale à prendre, lorsque le camion se trouve dans les villes 5 et 6.

$$f_2(5) = \underset{j\,=\,7,\,8}{Minimum}\{c_{5j} + f_3(j)\}$$

$$= Minimum[\{c_{5,7}+f_3(7)\},\{c_{5,8}+f_3(8)\}] = Minimum(5+2, 4+4) = 7$$

d'où $f_2(5) = 7$ et $g_2(5) = 7$

$$f_2(6) = \underset{j\,=\,7,\,8}{Minimum}\{c_{6j} + f_3(j)\}$$

$$= Minimum[\{c_{6,7}+f_3(7)\},\{c_{6,8}+f_3(8)\}] = Minimum(4+2, 1+4) = 5$$

d'où $f_2(6) = 5$ et $g_2(6) = 8$.

Les calculs peuvent se poursuivre de cette manière, jusqu'à ce que le point de départ soit atteint. Il est préférable cependant de systématiser les calculs dans un tableau du type du tableau 151, ce qui conduit au tableau 152 de la page 566.

TABLEAU 151
Définition du tableau de calcul d'application du principe de la programmation dynamique

		Décisions possibles: se rendre à l'étape n + 1 suivante dans la ville			Décision optimale	
		...	j	...	Coût minimal	Aller à:
État du système à l'étape *n*: être dans la ville	...	...	...	...		
	i	...	Coût minimal pour aller de *i* à Omégaville en passant par *j* $c_{ij} + f_{n+1}(j)$	...	$f_n(i)$	$g_n(i)$
	...	...	...	...		

En définitive, le coût minimal du transport pour la **CGTA** est de 15. L'itinéraire à emprunter consiste à se rendre tout d'abord dans la ville 3, information que l'on trouve dans le tableau de calcul relatif à l'étape 0. Le tableau de l'étape 1, nous indique ensuite que si l'on part de la ville 3, il faut se rendre ensuite dans la ville 5. Le tableau de l'étape 2 indique que lorsqu'on part de la ville 5, la ville étape suivante est la ville 7. Tandis que le tableau de l'étape 3 nous indique qu'en partant de la ville 7, il ne reste plus qu'à se rendre à Omégaville, ce qui est évident à la lecture de la carte ! En résumé, l'itinéraire optimal consiste à passer par les villes 3, 5 et 7.

TABLEAU 152
Application du principe de la programmation dynamique

Étape 3		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j = ω	Décision optimale	
			$f_3(i)$	$g_3(i)$
Partir de la ville i	7	2	2	ω
	8	4	4	ω

Étape 2		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j		Décision optimale	
		7	8	$f_2(i)$	$g_2(i)$
Partir de la ville i	4	3 + 2	2 + 4	5	7
	5	5 + 2	4 + 4	7	7
	6	4 + 2	1 + 4	5	8

Étape 1		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j			Décision optimale	
		4	5	6	f_1 (i)	g_1 (i)
Partir de la ville i	1	4 + 5	3 + 7		9	4
	2	9 + 5	5 + 7	8 + 5	12	5
	3		3 + 7	6 + 5	10	5

Étape 0 (point de départ)		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j			Décision optimale	
		1	2	3	$f_0(\alpha)$	g_0 (α)
Partir de la ville i	α	7 + 9	4 + 12	5 + 10	15	3

L'économie de la méthode suivie est double :

- Elle ne nécessite pas l'explicitation des 14 itinéraires possibles (indépendamment des risques d'oubli dans des itinéraires plus complexes).
- Chaque calcul de coût d'itinéraire entraîne 4 additions, ce qui au total fait 14 x 4 = 56 additions ; la programmation dynamique n'a nécessité que 16 additions et, de ce point de vue, l'économie de travail est évidente.

Ajoutons enfin que certains itinéraires entre Alphaville et Omégaville auraient pu être caractérisés par moins de trois villes étapes. Si l'on définit, par exemple, un itinéraire possible passant par la ville 1 et une nouvelle ville, la ville 9, on aurait alors répété cette ville 9 à l'étape 2 et à l'étape 3, avec un coût de transport nul entre ces deux étapes, pour se ramener au problème précédent[1].

Table des matières
Index thématique

II-2 Application de l'algorithme général de la programmation dynamique à la planification de la production et à la gestion des stocks

Examinons maintenant l'application de l'algorithme général de la programmation dynamique à la planification de la production et des approvisionnements. Des algorithmes plus performants existent pour résoudre certaines classes de problèmes, mais ils ne seront présentés qu'au § II-3, page 575. On présentera tout d'abord un exemple (§ II-2.1) sur lequel s'appuiera notre présentation, puis nous verrons la transposition au cas des stocks de la méthode introduite avec le problème de transport (§ II-2.2, page 569), pour trouver (§ II-2.3, page 572) la résolution numérique du problème posé: on examinera, dans un dernier paragraphe (§ II-2.4, page 573), une propriété importante pour les problèmes de planification que la programmation dynamique permet de mettre en évidence.

II-2.1 Exemple introductif

FORMICUBE est un fabricant de mobilier de cuisine de luxe. La demande prévisionnelle, notée d_t, de l'élément suspendu à deux portes, référencé ***X11*** au catalogue, au cours de la période t, est celle du tableau 153. Cette demande est volontairement sous-estimée pour que la présentation des calculs détaillés soit d'une longueur acceptable. On conviendra que cette demande s'exprime en totalité en fin de période, immédiatement après la livraison (ou la production de la période). Si l'on souhaite adopter la convention d'une demande s'exprimant ponctuellement en début de période, il faut alors adopter celle d'une livraison en début de la même période (ou à la fin de la période précédente) et s'il y a production, celle-ci doit s'effectuer au cours de la période antérieure. Le passage d'une convention à l'autre dans la définition d'un problème est évident, aussi a-t-on privilégié celle qui s'adapte le plus facilement à la fois aux problèmes de production et d'approvisionnement externe.

TABLEAU 153
Demande de la référence X11

t	1	2	3	4	5
d_t	2	5	4	2	4

La fabrication du ***X11*** nécessite un certain nombre de réglages indépendants du nombre d'unités à fabriquer. Le coût de lancement c_c correspondant à ces dépenses fixes de réglage et à des dépenses administratives est de l'ordre de 150 dollars liduriens.

Le coût direct de la main-d'œuvre dépend de la main-d'œuvre disponible et donc des productions décidées pour les autres références. Une certaine allocation des ressources est effectuée par le bureau du planning, en fonction des urgences

1. *Note de la page précédente*. Ce problème de détermination de l'itinéraire le plus court concerne des réseaux qualifiés d'«acycliques» parce qu'il est impossible d'avoir un cycle, c'est-à-dire de trouver, pour un nœud quelconque, un itinéraire ramenant à ce nœud. L'algorithme général de résolution de ce cas (voir Wagner [435], p. 232-233) conduit à une séquence de calculs identique à celle entraînée par la méthode suggérée ici. Ajoutons que la recherche de l'itinéraire le plus court, dans le cas de réseaux comportant des cycles, est plus longue; voir sur ce point Wagner [435], p. 227-231.

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

et, il faut bien le dire, d'un certain arbitraire. Cette allocation est néanmoins susceptible d'être révisée au vu des résultats obtenus pour l'ensemble des références produites par le même atelier (ou le même poste de travail), ce qui rend cet arbitraire relativement défendable car le surcroît de coût d'obtention d'une solution globalement optimale par rapport à une solution approchée risque fort de ne pas être compensé par l'accroissement d'économie qu'il procure (autrement dit: le mieux est souvent l'ennemi du bien!). Cette allocation tient compte des possibilités d'heures supplémentaires, des congés déposés, etc. et l'on se limitera à 2 coûts directs de production, le premier de 200 dollars liduriens et le second de 250 dollars liduriens.

Comme il ne peut y avoir d'heures supplémentaires que si les heures normalement disponibles sont totalement utilisées, on ne produira au second niveau de coût (250 dollars liduriens) qu'après avoir épuisé les possibilités de production du premier niveau de coût. Compte tenu de ces précisions, les productions maximales prévisionnelles sont données au tableau 154.

TABLEAU 154
Structure des coûts d'approvisionnement de la référence X11

Période t	1	2	3	4	5
Production maximale à 200 dollars liduriens	2	2	3	3	3
Production maximale à 250 dollars liduriens	3	3	3	3	3

Il est possible de produire pendant une période un article qui ne sera utilisé qu'à la période suivante, mais ceci conduit à un stockage et donc à un certain coût. Le coût de possession à utiliser est normalement proportionnel au seul coût direct de main-d'œuvre, puisque la décision que l'on prend n'a d'incidence que sur ce poste. Ce dernier point est particulièrement important dans l'analyse du problème concret que l'on étudie. En effet, il serait stupide de préférer produire maintenant à 250 dollars liduriens une unité que l'on aurait pu produire 3 périodes avant à 200 dollars liduriens, si la main-d'œuvre disponible ainsi économisée n'a pu être utilisée ailleurs. On supposera ici que l'on aura toujours l'utilisation de la main-d'œuvre normalement disponible (niveau 1 de coût), tandis que l'appel aux heures supplémentaires peut être exactement modulé en fonction des besoins exprimés.

En toute rigueur, le coût de stockage n'est pas le même pour un article produit à 200 dollars liduriens et un article produit à 250 dollars liduriens mais, pour simplifier notre exemple numérique, nous retiendrons un même coût de stockage dans les 2 cas, soit 10 dollars liduriens par unité stockée par période. Cette valeur est obtenue en utilisant un taux de possession de 24% par an (soit 2% par mois), valeur retenue par **FORMICUBE** comme rentabilité marginale de ses actifs circulants, compte tenu de l'importance de ses charges fixes. Ce taux de possession de 4% par mois correspond à un taux d'opportunité. En l'appliquant à 250 dollars liduriens de coût direct main-d'œuvre, on retrouve 5 dollars liduriens; en y ajoutant un coût de stockage estimé à 5 dollars par mois, on retrouve le coût de possession mensuel de 10 dollars liduriens.

Table des matières
Index thématique

Par ailleurs, les capacités de stockage sont limitées. On verra du reste dans la pratique que, même si des contraintes de stockage sont faibles ou inexistantes, on a intérêt à en poser dans la formulation du problème pour réduire les calculs à effectuer dans la recherche de la solution optimale. On s'interdira ici d'avoir un stock de plus de 2 unités. Ajoutons enfin que l'on s'interdit également toute rupture de stock.

II-2.2 Formulation du problème posé en un problème de programmation dynamique

Pour formuler correctement le problème, il faut préalablement avoir défini un certain nombre de variables et de paramètres.

II-2.2.1 Variables et paramètres utilisés

Les variables décrivant le système physique sont les suivantes:

- t = indice de la période, la période joue le même rôle que l'étape n dans le problème de transport;
- T = horizon de planification = nombre total de périodes prises en compte dans les calculs (ce nombre correspond au nombre total d'étapes dans le problème de transport);
- q_t = production de la période t, disponible ponctuellement à la fin de la période t; q_t est la variable de commande;
- R_t = stock physique au début de la période t, R_t est la variable d'état, et correspond donc à la notion de ville-étape possible i d'une étape n donnée, dans le problème de transport.

Dans la mesure où les unités stockées ne subissent aucune dégradation, on a la relation 105 liant les variables d'état et de commande, laquelle est une adaptation de la relation 96 de la page 556:

$$R_t = R_{t-1} + q_{t-1} - d_{t-1} \qquad \textit{relation 105}$$

Cette relation signifie tout simplement que le stock au début de la période t est égal à celui de la période précédente augmenté de la production de la période précédente, et diminué de la demande de la période précédente. Cette équation n'a pas d'équivalent dans le problème de transport où la variable de commande d'une étape consistait à choisir la variable d'état de l'étape suivante[1]. Ajoutons que, par hypothèse, le stock résiduel à la fin de l'horizon économique est nul, ce que l'on écrira $R_{t+1} = 0$.

Introduisons maintenant les variables spécifiques de la programmation dynamique:

- $f_t(R_v)$ = coût minimal pour les périodes t à T, lorsque le stock au début de la période t est R_t, cette fonction de coût est l'équivalent de la fonction $f_n(i)$ du problème de transport.

1. C'est cette simplicité des relations entre variables d'état et de commande qui permet d'introduire assez facilement le raisonnement de la programmation dynamique et fait préférer une présentation préalable de cette démarche sur un exemple de transport.

Table des matières
Index thématique

- $g_t(R_t)$ = production (ou approvisionnement) optimal livré en fin de période t lorsque le stock de début de période t est R_t, c'est la valeur de q_t qui permet d'obtenir le coût minimal $f_t(R_t)$. Cette fonction, qui prend la valeur prise par la variable de commande à la période t, est l'équivalent de la fonction $g_n(i)$ qui donnait le numéro de la ville de l'étape suivante (= variable de commande) qui permettait de minimiser le coût $f_n(i)$ lorsque l'on se trouvait dans la ville i de l'étape n.
- $C_t(q_t, R_t)$ = coût de production (ou d'approvisionnement) de q_t unités durant la période t, et de stockage durant la période t; ce coût est l'équivalent du coût de transport. En effet, la décision de produire q_t, mène de l'état R_t de stock au début de la période t à un état $R_{t+1} = R_t + q_t - d_t$ à la période suivante. Le coût de passage de l'état R_t à l'état R_{t+1} est de même nature que le coût de transport c_{ij} de la ville i de l'étape n, à la ville j de l'étape $n + 1$.

II-2.2.2 Formulation du programme dynamique

Dans le problème de transport, on revenait progressivement de la ville d'arrivée à celle de départ. De même, dans le problème de stock, on reviendra progressivement de la période finale à la période initiale. Dans le problème de transport, la recherche de la décision optimale à prendre pour une étape n, lorsque l'on savait partir d'une ville i, consistait à comparer le coût de transport entre cette ville i et Omégaville pour toutes les villes étapes possibles de l'étape suivante $n + 1$. De même, dans le problème de stock, lorsque l'on sait que le stock de début de période est R_t, la recherche de la décision optimale passe par la comparaison des coûts de production et de stockage associés à toutes les productions possibles durant la période t, ce qui est relativement facile dans la mesure où le coût associé à un stock $R_{t+1}(= R_t + q_t - d_t)$ a déjà été calculé au cours de l'itération de calcul précédente. On peut formaliser comme suit cette recherche de la production optimale pour la période t, sachant que le stock de début de période est R_t défini par la relation récurrente 105:

$$f_t(R_t) = \underset{qt}{Minimum}\{C_t(q_t, R_t) + f_{t+1}(R_{t+1})\} \qquad \textit{relation 106}$$

Se pose maintenant la question de savoir quelles sont les valeurs possibles de R_t et q_t. Deux cas de figure doivent être distingués selon que des contraintes pèsent ou non sur les capacités de production et/ou de stockage:

- En l'absence de toute contrainte de capacité de production et de stockage (ce qui n'est pas le cas de notre exemple numérique), le stock initial R_t peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 (pas de stock en début de période t) et la somme des demandes entre t et t + T (stock initial suffisant pour satisfaire toutes les demandes prévues de la période considérée à la fin de l'horizon économique). Si l'on acceptait d'envisager un stock initial supérieur à cette valeur, le stock résiduel à la fin de la période T ne serait pas nul, contrairement à la contrainte que l'on s'est fixée. La quantité produite au cours de la période t doit être suffisante pour qu'il n'y ait pas de rupture de stock en fin de période c'est-à-dire que q_t doit être au moins égale à zéro ou $d_t - R_t$, c'est-à-dire à la demande de la période diminuée du stock de début de

Table des matières
Index thématique

période (si cette différence est positive). Par ailleurs, il est évident que la quantité livrée ne doit pas conduire à un stock résiduel positif en fin d'horizon économique. Elle est donc au plus égale au cumul des demandes de la période t à la période T, diminué du stock initial de la période t.

En résumé, on a:

*En l'**absence de contrainte** de capacité de production et de stockage, R_t varie de*

$$0 \text{ à } \sum_{i=t}^{T} d_i \text{ et } q_t \text{ varie de Maximum } \{0, d_t - R_t\} \text{ à } \sum_{i=t}^{T} d_i - R_t \qquad \textit{relation 107}$$

Examinons maintenant le cas de contraintes de capacité de production et de stockage. On notera R_t^{max} le stockage maximal de la période t, c'est-à-dire la valeur maximale autorisée pour R_t. La livraison et la demande de la période t, étant réputées se produire en fin de période, n'auront aucune incidence sur le stockage effectif durant la période t. On notera de même q_t^{max} la production maximale de la période. Les domaines de variation possibles de R_t et q_t sont plus complexes à définir que dans le cas précédent:

- Le stock initial R_t le plus faible possible est le stock nul, à moins que ce stock nul n'entraîne une rupture de stock au cours de la période t, ce qui se produit si la quantité demandée d_t est supérieure à la production maximale q_t^{max}. S'il en est ainsi, il est bien évident que le stock initial minimal est $d_t - q_t^{max}$, faute de quoi le stock initial de la période suivante serait négatif. Le stock initial maximum est égal au cumul des demandes de la période considérée jusqu'à la fin de l'horizon économique, à moins que la contrainte de stockage du début de période ne vienne limiter cette valeur.
- La quantité minimale q_t livrée en fin de période t, est nulle, à moins que cette livraison n'amène une rupture de stock, auquel cas il faut livrer $d_t - R_t$ pour éviter cette rupture de stock. La quantité maximale est nécessairement la plus faible des trois grandeurs suivantes:
  - la somme des demandes des périodes t à T, diminuée de R_t,
  - la capacité de production maximale q_t^{max},
  - la quantité qui sature la capacité de stockage du début de la période suivante, ce qui correspond à la valeur $R_{t+1}^{max} + d_t - R_t$, compte tenu de l'équation 105 de conservation du système.

En résumé, on a:

***Si limitation** R_t^{max} du stockage R_t varie de Maximum(0, $d_t - q_t^{max}$), à*

$$\textit{Minimum}\left(\sum_{i=t}^{T} d_i, R_t^{max}\right) \qquad \textit{relation 108}$$

Si limitation R_t^{max} *de la production,* q_t *varie de Maximum*$(0, d_t - R_t)$*, à Minimum*

$$\left(\sum_{i=t}^{T} d_i - R_t, q_t^{max}, R_{t+1}^{max} + d_t - R_t\right) \quad \textbf{\textit{relation 109}}$$

L'utilisation récurrente de ces relations peut conduire éventuellement à avoir une borne inférieure pour R_t ou q_t, qui soit supérieure à la borne supérieure. S'il en est ainsi, le problème posé n'a pas de solution tant que certaines contraintes n'auront pas été modifiées. Ajoutons enfin qu'il est facile d'adapter ces relations lorsqu'il est possible de différer une partie de la demande[1].

II-2.3 Résolution numérique de l'exemple introductif

Le tableau 155 de la page 573, formellement identique au tableau 152 de la page 566, illustre l'utilisation de l'algorithme de la programmation dynamique en tenant compte des diverses contraintes de capacités de production et de stockage. Les colonnes 2 à 5 donnent les composantes de l'équation de conservation. En pratique, dans l'élaboration manuelle d'un tel tableau, on vérifie sur les colonnes 2 et 5 que le stock de départ n'est ni négatif ni supérieur à la capacité de stockage. Quant aux valeurs prises par q_t, si la valeur la plus faible possible n'est pas zéro, cela se retrouve immédiatement à la colonne 5 (stock R_{t+1} négatif), et la valeur la plus forte se détermine en colonne 4 pour le total des demandes ou la production maximale de la période et en colonne 5 si ces valeurs conduisent à un stock trop important au début de la période suivante. La solution optimale et ses conséquences sont résumées dans le tableau 156.

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 156
Solution optimale du problème de planification

Période *t*	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	4	- 4	0
4	0	3	- 2	1
5	1	3	- 4	0
Coût total : 4360 dollars lidurients				

1. Si le montant maximal des demandes différées en début de période *t* est noté R_t^{min} valeur nécessairement négative ou nulle, on a alors :

R_t varie de *Maximum*$(R_t^{min}, d_t - q_t^{max} + R_{t+1}^{min})$ à *Minimum*$\left(\sum_{i=t}^{T} d_i, R_t^{max}\right)$

q_t varie de *Maximum*$(0, d_t - R_t + R_{t+1}^{min})$ à *Minimum*$\left(\sum_{i=t}^{T} d_i - R_t, q_t^{max}, R_{t+1}^{max} + d_t - R_t\right)$

TABLEAU 155
Application de la programmation dynamique au problème de planification de la production

Horizon 5

R_5	$g_5(R_5) = q_5$	$-d_5$	R_6	$f_5(R_5)$
0	4	- 4	0	1000
1	3	- 4	0	760
2	2	- 4	0	570

Horizon 4

R_4	$g_4(R_4) = q_4$	$-d_4$	R_5	$f_4(R_4)$
0	3	- 2	1	1510
1	2	- 2	1	1320
2	0	- 2	0	1020

Horizon 3

R_3	$g_3(R_3) = q_3$	$-d_3$	R_4	$f_3(R_3)$
0	4	- 4	0	2510
1	3	- 4	0	2270
2	4	- 4	2	2040

Horizon 2

R_2	$g_2(R_2) = q_2$	$-d_2$	R_3	$f_2(R_2)$
0	5	- 5	0	3810
1	4	- 5	0	3570
2	3	- 5	0	3330

Horizon 1

R_1	$g_1(R_1) = q_1$	$-d_1$	R_2	$f_1(R_1)$
0	2	- 2	0	4360

Table des matières

Index thématique

II-2.4 Horizon de planification et stabilité du programme d'approvisionnement

Le problème que l'on va mettre en évidence n'est pas lié à la programmation dynamique mais à l'usage de techniques de planification glissante, qu'elles soient optimales ou non. Reprenons notre exemple et faisons maintenant varier l'horizon de planification entre 3 et 5 mois (tableau 157). La quantité commandée le mois 3 varie en fonction de l'horizon de planification :

- elle est de 4 pour un horizon de 3 mois,
- elle est de 6 pour un horizon de 4 mois,

TABLEAU 157
Variation de l'horizon de planification

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	4	- 4	0
Coût total : 2850 dollars liduriens				

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	6	- 4	2
4	2	0	- 2	0
Coût total : 3370 dollars liduriens				

- elle est de nouveau de 4 pour un horizon de 5 mois.

Cet exemple montre que le programme de production ou d'approvisionnement n'est pas stable et dépend de l'horizon de planification retenu.

Cette observation n'est pas sans conséquence sur l'appréciation que l'on peut porter sur les techniques de planification glissante (présentées au § IV-2, page 494, chapitre VI) qui sont largement répandues dans les entreprises. Supposons, par exemple, que **FORMICUBE** utilise une planification glissante à 3 mois de sa production. Dans notre exemple, le mois 1, elle prévoit de produire 4 unités de la référence ***X11*** au cours du mois 3, lors de l'élaboration au mois 1 de son plan trimestriel glissant. Au début du mois 2, l'entreprise ne dispose d'aucun stock de cette référence, la connaissance de la demande du mois 4 conduit à un programme identique à celui trouvé au mois 1 avec un horizon de 4 périodes[1]. En conséquence, le service chargé de la planification révisera en hausse la production prévue pour le mois d'après ($t = 3$). Mais au début du mois 3, cette production doit être révisée en baisse et doit passer de 6 unités à 4[2].

On peut donc conclure que l'adoption de techniques de planification glissante n'a aucune raison de fournir systématiquement une solution optimale. Cependant, on peut faire deux remarques :

- En présentant les techniques de MRP, on a vu que l'existence de nomenclatures à étages et des délais d'obtention conduisait à ne plus pouvoir garantir

1. La production du mois 1 étant la même pour une planification à 3 mois et à 4 mois, la programmation proposée pour les mois 2 à 4 est nécessairement la même que celle que l'on obtient dans le cadre d'une planification à 3 mois réalisée à la fin du mois 1.
2. La production des 2 premiers mois étant la même pour une planification à 3, 4 ou 5 mois, la programmation proposée pour les mois 3 à 5 est nécessairement la même que celle que l'on obtient dans le cadre d'une planification à 3 mois réalisée à la fin du mois 2.

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

la cohérence des décisions en cas de modifications du programme de production des produits finis pendant l'horizon gelé. Cette observation reste valable ici, ce qui conduit à relativiser les modifications du plan de production de périodes allant au-delà de l'horizon gelé. Les risques de modification sont plus faibles pour la première période que pour les périodes suivantes si les différentes données (demandes, capacités…) ne varient pas trop de période à période, elles sont en outre d'autant plus faibles que l'horizon de planification est éloigné.

- Les modifications de programmation du mois en cours, suggérées par la solution optimale, peuvent amener des gains faibles par rapport aux problèmes pratiques qu'elles créent. Dans notre exemple, le maintien d'un programme de 6 unités le mois 4 entraîne une majoration de coût de 10 dollars liduriens par rapport à la solution optimale. Un arbitrage doit être trouvé entre les coûts associés à une modification de la programmation, et un accroissement de coûts de production et de stockage.

II-3 Utilisation d'un algorithme spécifique pour le cas de coûts convexes de livraison et de stockage

Le coût de production introduit dans l'exemple numérique précédent n'était ni convexe, ni concave, ce qui nécessite l'utilisation de l'algorithme général de la programmation dynamique. Pour situer le problème et ses implications, il faut rappeler la définition des fonctions convexes et concaves. Une fonction de coût total sera dite convexe si chaque unité additionnelle coûte au moins autant que la précédente, cette situation est dite encore de rendement d'échelle décroissant. Au contraire, une fonction de coût de production sera dite concave si chaque unité additionnelle coûte au plus ce que coûte l'unité précédente[1]. Cette situation est connue sous le nom de rendement d'échelle croissant. Dans l'application de ces définitions, il convient de ne pas oublier le coût associé à une production nulle.

Dans notre exemple, pour la période 1, on avait: C(0) = 0, C(1) = 150 + 200 = 350, C(2) = 350 + 200 = 550, C(3) = 550 + 250 = 800… D'où les variations successives de coût de production: 350, 200, 250. Or, si au départ on peut envisager que la fonction soit concave (200 < 350), la propriété définissant ce type de fonction n'est plus respectée ensuite (250 > 200). La fonction de coût total n'est donc ni convexe ni concave. Il en est de même pour la fonction de coût de production des périodes suivantes. Par contre, si nous supprimons le coût de lancement (150 dollars liduriens), la fonction de coût de production devient convexe, les différentes variations successives étant (pour la première période) 200 = 200, 250 > 200, 250 = 250, 250 = 250. La fonction de coût de stockage, de 10 dollars liduriens / unité / mois, satisfait à la fois les conditions requises pour les fonctions concaves et pour les fonctions convexes, les inégalités imposées n'étant pas strictes. On pourra donc indifféremment considérer cette fonction de coût comme convexe ou comme concave.

1. Mathématiquement, si pour toute quantité q positive ou nulle, la fonction de coût totale C(q) est dite *convexe* si $C(q+1)-C(q) \geq C(q)-C(q-1)$ (ce qui s'écrit aussi $\{C(q+1)+C(q-1)\}/2 \geq C(q)$); elle est dite *concave* si $C(q+1)-C(q) \leq C(q)-C(q-1)$ (ce qui s'écrit aussi $\{C(q+1)+C(q-1)\}/2 \leq C(q)$).

Si l'on reprend notre exemple, en supprimant le coût de lancement, les fonctions de coût de production et de stockage sont alors l'une et l'autre des fonctions convexes, et on a intérêt à utiliser l'algorithme présenté au § II-3.1, de préférence à l'algorithme général.

Une dernière modification sera apportée à cet exemple: le coût de possession sera proportionnel au coût de la main-d'œuvre. L'application du taux mensuel de 4% donne 8 dollars liduriens / unité / mois pour les articles produits à 200 dollars liduriens et 10 dollars liduriens pour les autres.

II-3.1 Algorithme à utiliser dans le cas de fonctions de coûts convexe

L'algorithme général de la programmation dynamique partait de la dernière période pour remonter progressivement vers la première période (on parle alors d'algorithme «rétrograde» ou de type «*backward*»). Les algorithmes à utiliser dans le cas convexe ou dans le cas concave partent au contraire de la période actuelle pour s'éloigner ensuite progressivement dans le temps (on parle alors d'algorithme de type «*forward*»).

On démontre[1] que la procédure à suivre est la suivante:
- Satisfaire la demande de la première période en utilisant les moyens de production les plus avantageux de la période, et calculer les capacités de production résiduelles.
- Satisfaire la demande de la seconde période en utilisant les moyens de production les plus avantageux de la période 2 ou de la période précédente, puis modifier en conséquence les capacités de production résiduelles utilisées pour satisfaire la demande de cette seconde période.
- Satisfaire la demande de la troisième période en utilisant les moyens de production les plus avantageux de la période 3 ou des périodes précédentes, puis modifier en conséquence les capacités de production résiduelles utilisées pour satisfaire la demande de cette troisième période.
- …

Pour faire rapidement les calculs manuels, on a intérêt à faire appel au tableau II-3.1 de la page 576 qui explicite la période de production et le coût des unités demandées à chaque période constitutive de l'horizon économique. Comme on s'interdit ici tout report de demande (hypothèse qui peut être levée au prix de modifications mineures[2]), seule la partie du tableau située au-dessus de la diago-

1. Il s'agit d'un algorithme proposé initialement par Land (1958, [270]). Voir Wagner (1975, [435]), p. 307 et sq. Le lecteur trouvera également dans Johnson et Montgomery (1974, [245]) p. 191 à 195 une démonstration de l'optimalité de l'algorithme dans le cas de rupture de stock interdite (seul cas présenté ici) en «transcrivant» le problème de programmation dynamique en un problème de programmation linéaire qui est formellement identique à celui du problème classique d'assignation de dépôts à des usines (analysé au § I-2.2.2, page 552) dans lequel on a n centres de production (chacun s'apparentant, dans notre problème, à un potentiel de production au même coût de production, pour une période donnée) et m dépôts (chacun s'apparentant, dans notre problème à une demande totale d'une période) et où les coûts de transport entre usines et dépôts (s'apparentant, dans notre problème, au coût de production et de stockage) conditionnent les assignations de dépôts aux usines car on cherche à satisfaire les demandes au moindre coût. Cette analogie est flagrante dans le rapprochement du tableau 157, page 574 et du tableau 144, page 553. L'algorithme classique de résolution de ce problème de transport est beaucoup plus simple et rapide que l'algorithme du simplexe (présenté page 1117) classiquement utilisé pour résoudre les problèmes généraux de programmation linéaire.

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

nale nord-ouest sud-est du tableau peut être remplie. Initialement, le premier nombre de la dernière colonne n'est pas barré, et correspond aux capacités de production initiales, celles-ci seront rectifiées au fur et à mesure de leur utilisation. De même en dernière ligne, le premier nombre barré de chaque colonne correspond à la demande d_t. Par ailleurs, avant d'amorcer les calculs, il faut calculer les coûts unitaires (c.u.) de production et de stockage (par exemple le 280 qui se trouve dans la 2e ligne de la 4e période de consommation est la somme de 250 dollars liduriens de production et de 3 x 10 = 30 dollars liduriens de stockage). Dans la diagonale, se trouvent les coûts unitaires de production; les autres coûts unitaires de production et de stockage se calculent simplement en ajoutant au coût unitaire situé immédiatement à gauche, le coût de stockage de la période considérée, ce qui fait qu'en définitive le tableau de base est très rapidement élaboré.

L'application de l'algorithme conduit aux choix décrits dans le tableau 158, mis à jour au fur et à mesure en rectifiant simultanément la capacité résiduelle et la demande restant à satisfaire pour chaque production décidée.Le programme de production optimal est alors celui décrit au tableau 159.

TABLEAU 158
Planification dans le cas de coûts convexes

Période de production	Niveau de coût	Période de « **consommation** »										Capacité de production **résiduelle**		
		1		2		3		4		5				
		c.u.	Prod	c.u.	Prod	c.u.	Prod	c.u.	Prod	c.u.	Prod			
1	1	200	2	208		216		224		232		~~2~~	0	
	2	250		260		270		280		290		3		
2	1			200	2	208		216		224		~~2~~	0	
	2			250	3	260		270		280		~~3~~	0	
3	1					200	3	208		216		~~3~~		
	2					250	1	260		270		~~3~~	2	
4	1							200	2	208	1	~~3~~	~~1~~	0
	2							250		260		3		
5	1									200	3	~~3~~	0	
	2									250		3		
Demande restant à satisfaire		~~2~~ 0		~~5~~ ~~3~~ 0		~~4~~ ~~1~~ 0		~~2~~ 0		~~4~~ ~~1~~ 0				

En définitive, l'application de cet algorithme est rapide et les calculs nécessaires pour trouver l'optimum sont moindres que ceux exigés par l'algorithme général[1]. Son application dans l'industrie est limitée parce que cette méthode suppose un coût de lancement nul ou négligeable et ne permet pas de tenir compte de la variabilité par saut de certaines charges fixes.

2. *Note de la page précédente*. Voir Wagner (1975, [435]) p. 312.

TABLEAU 159
Solution optimale du cas convexe

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	4	- 4	0
4	0	3	- 2	1
5	1	3	- 4	0
Coût total : 3608 dollars liduriens				

Reprenons maintenant notre exemple, avec des données plus réalistes, c'est-à-dire en travaillant maintenant sur une dizaine de références du catalogue, articles nécessitant tous à peu près le même temps de fabrication et ayant des coûts de lancement négligeables. Supposons, en outre, qu'il soit possible de faire appel à de la main-d'œuvre intérimaire. Le problème étant posé mensuellement, on supposera que l'embauche d'un intérimaire porte nécessairement sur une période mensuelle, avec un coût de 8000 dollars liduriens pour une capacité maximale de production de 35 unités (d'où un coût unitaire minimal de 229 dollars liduriens). Par ailleurs, les heures normales peuvent être considérées comme d'un coût variable unitaire nul, les ouvriers étant payés au mois, ce qui correspond à une charge fixe mensuelle de 25000 dollars liduriens pour une production mensuelle maximale de 125 unités (d'où le coût standard de 200 dollars liduriens utilisé avant). Le coût de stockage mensuel unitaire sera de nouveau choisi égal à 10 $ / unité / mois. Pour minimiser les calculs, on a intérêt à formuler le problème après avoir décidé de produire en heures normales, chaque mois, le maximum de la demande possible de ce mois. La capacité résiduelle de production en heures normales d'un mois sera donc $125 - d_t$ si d_t est inférieur à 125 meubles et 0, dans le cas contraire. On appellera demande résiduelle la partie de la demande du mois qui n'est pas satisfaite par la capacité de production en heures normales du mois considéré. Compte tenu de ces précisions, les données du problème sont celles du tableau 160. La solution optimale de ce problème est donnée au tableau 161.

Deux points doivent être notés : d'une part on ne fait pas appel à la main-d'œuvre intérimaire et, d'autre part, au cours de la troisième période, la politique optimale consiste à accroître le stock de début de période de 15. La programmation dynamique a permis ici un lissage de charge efficace, à un coût minime. Cette

1. *Note de la page précédente*. Lorsqu'il est possible de différer la demande d'une période et que les coûts associés à une demande différée sont eux-mêmes convexes, il faut modifier légèrement l'algorithme utilisé dans le cas convexe pour tenir compte de cette possibilité (qui n'altère pas l'analogie formelle de ce problème de programme de production avec celui de transport). Lorsque les demandes ne peuvent être différées, toute unité demandée au cours d'une période ne peut être produite au cours d'une période ultérieure ; c'est la raison pour laquelle la partie triangulaire inférieure gauche du tableau 158, est « neutralisée ». Dans le cas contraire, cette partie est utilisée et l'on y porte la somme du coût de production et du coût de report de la demande (ce dernier coût se substituant au coût de stockage). Notons que ce tableau doit être modifié si pour certaines périodes le coût associé à une demande différée varie (coût marginal non décroissant) en fonction des quantités déjà différées. Le lecteur intéressé par ce cas de figure trouvera un exemple numérique d'application dans Johnson et Montgomery (1975, [245]) p. 209-211.

Table des matières
Index thématique

TABLEAU 160
Données du second problème à coûts convexes

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="7">Capacité de production maximale du mois</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Heures normales†</td><td>totales</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td></tr>
<tr><td>résiduelles</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Heures supplémentaires (coût unitaire = 250)</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Heures en intérim</td><td>de la 1re unité : 8000</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>des unités suivantes : 0</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td><td>34</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Demande</td><td>totale</td><td>105</td><td>135</td><td>150</td><td>145</td><td>130</td><td>120</td><td>155</td></tr>
<tr><td>résiduelle</td><td>0</td><td>10</td><td>25</td><td>20</td><td>5</td><td>0</td><td>30</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stockage maximal</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>0</td></tr>
</table>

†. Le coût de ces heures est considéré comme nul parce que non affecté par les décisions étudiées.

TABLEAU 161
Solution optimale du second problème à coûts convexes

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	20	0	20
2	20	0	- 10	10
3	10	15	- 25	0
4	0	20	- 20	0
5	0	5	- 5	0
6	0	5	0	5
7	5	25	- 30	0
Coût total : 16600 dollars liduriens				

solution optimale n'a pu être obtenue qu'en utilisant l'algorithme général de la programmation dynamique, les fonctions de coût de production n'étant pas convexes. Elle aurait pu être trouvée «manuellement» sans faire appel à cet algorithme (ou du moins une solution non optimale d'un coût voisin), mais il n'en est pas de même pour des problèmes concrets de grande taille.

II-3.2 Propriétés spécifiques du cas convexe

L'analyse de l'algorithme optimal permet de mettre en évidence des propriétés intéressantes spécifiques du cas convexe[1], les unes portant sur la modification des contraintes, les autres sur la variation de la demande.

1. Voir Wagner (1975, [435]) p. 312-316. Voir également Hax et Candea (1984, [224]), p. 104-107.

II-3.2.1 Modification des contraintes

Deux résultats importants doivent être notés:

- *La production optimale q_t de la période ne peut décroître si certaines capacités de production ou de stockage de la période t ou d'une période ultérieure sont accrues.* Par exemple, si la capacité de production de la seconde période passe de 5 à 6, la 6e unité ne pouvant être produite qu'au coût unitaire de 250 dollars liduriens et non 200 dollars liduriens (sinon, il y aurait modification de la fonction de coût), on n'observera aucune modification du plan de production. Supposons maintenant que les coûts unitaires de cette seule période 2 ne sont pas de 200 et 250 dollars liduriens mais de 150 et 200 dollars liduriens, le programme optimal reste le même que celui précédemment trouvé. Si, en outre, la capacité de production passe de 5 à 6, la quantité produite au cours de cette période s'accroît d'une unité, tandis que celle de la période suivante est diminuée d'autant.
- *La production optimale q_t de la période t ne peut croître si certaines capacités de production ou de stockage d'une période antérieure sont accrues*. Cette seconde propriété est illustrée par le tout dernier exemple donné où l'accroissement de la capacité de production de la période 2 a provoqué une diminution de la production de la période 3.

II-3.2.2 Variations de la demande (théorèmes d'horizon de planification)

L'examen de l'algorithme permet de mettre en évidence deux propriétés importantes.

La livraison q_t d'une période t ne peut décroître si la demande d'une période quelconque (période t, période antérieure à t ou période postérieure à t) s'accroît. Illustrons cette propriété sur l'exemple utilisé pour illustrer l'algorithme du cas convexe et faisons passer de 2 à 3 la demande de la quatrième période. Il est évident en se reportant au tableau de calcul que l'accroissement d'une unité de la période 4 entraîne un accroissement d'une unité de la production de la période 5. Cette propriété implique que toute programmation de production (ou de livraison) associée à un échéancier de demande minimal constitue une programmation minimale, c'est-à-dire qu'elle ne peut être révisée qu'en hausse. Mais on peut tirer des conclusions encore plus fortes de l'examen de l'algorithme optimal, c'est ce que nous allons voir maintenant.

Pour p variant de 1 à T (T étant l'horizon de planification), la demande cumulée des périodes 1 à p est notée $D_p = \sum_{t=1}^{p} d_t$ et la livraison cumulée des périodes 1 à p, $Q_p = \sum_{t=1}^{p} q_t$. Supposons en outre que la demande cumulée à la période p soit susceptible d'être comprise entre deux bornes notées D_p^{min} et D_p^{max}. À chacun de ces deux échéanciers correspond un échéancier optimal de livraison. Notons de la même façon Q_p^{min} et Q_p^{max} les échéanciers cumulés correspondants. On peut alors démontrer le théorème suivant:

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

Toute programmation optimale correspondant à une demande D_p, telle que $D_p^{min} \leq D_p \leq D_p^{max}$, est telle que l'on a nécessairement $Q_p^{min} \leq Q_p \leq Q_p^{max}$.

Illustrons ce théorème pour en faire apprécier la portée, en reprenant notre exemple numérique et en modifiant les échéanciers de demande (tableau 162).

TABLEAU 162
Planification et précision des demandes à venir dans le cas convexe

t	Échéancier minimal				Échéancier maximal				Échéancier réalisé			
	d_t	D_t^{min}	q_t	Q_t^{min}	d_t	D_t^{max}	q_t	Q_t^{max}	d_t	D_t	q_t	Q_t
1	1	1	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2
2	4	5	3	5	5	8	5	8	5	7	5	7
3	2	7	3	8	5	13	5	13	4	11	4	11
4	2	9	3	11	2	15	3	16	2	13	3	14
5	5	14	3	14	5	20	4	20	4	17	3	17

Il résulte de ce théorème qu'il est possible de choisir une production optimale pour la période à venir, avec des informations approximatives sur les périodes éloignées. Il suffit en effet de disposer d'un ordre de grandeur, sous forme de fourchettes de valeurs, pour les périodes éloignées et de voir si la programmation de la période à venir est stable ou non (ce qu'illustre bien notre exemple). L'existence éventuelle d'une plage de valeurs assez large pour q_1 implique qu'il est alors souhaitable d'affiner les estimations prévisionnelles.

Ce théorème est dit « théorème d'horizon de planification », car passer de l'horizon de planification de n à $n + 1$ revient à faire passer d_{n+1} de la valeur 0 à sa valeur effective dans un problème ayant un horizon de $n + 1$ périodes. Reprenons une fois de plus notre exemple pour illustrer ce que l'on vient de dire en passant de n = 4 à n = 5 (tableau 163).

TABLEAU 163
Planification et allongement de l'horizon de planification dans le cas convexe

t	Échéancier initial				Échéancier final			
	d_t	D_t	q_t	Q_t	d_t	D_t	q_t	Q_t
1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	5	7	5	7	5	7	5	7
3	4	11	4	11	4	11	4	11
4	2	13	2	13	2	13	3	14
5	0	13	0	13	4	17	3	17

II-4 Utilisation d'un algorithme spécifique pour le cas de coûts concaves de production et de stockage

Le cas concave, qui est celui de rendements d'échelle croissants, se rencontre peu fréquemment en approvisionnement interne (les coûts marginaux étant en général plutôt croissants que décroissants) et assez souvent en approvisionnement externe (cas des rabais progressifs). Lorsque le coût unitaire est constant et qu'existe un coût de commande, la fonction de coût d'approvisionnement est concave et l'algorithme de résolution du problème est encore appelé « modèle dynamique de la quantité économique de commande » (*dynamic lot size-model* dans la littérature de recherche opérationnelle) ou encore **algorithme de Wagner-Whitin**, du nom de ses inventeurs[1].

II-4.1 Présentation de l'algorithme à utiliser dans le cas concave

Un entrepreneur général s'approvisionne en portes de dimension standard pour ses divers chantiers. Le coût d'une commande (livraison…) s'élève à 100 dollars liduriens et peut être considéré comme indépendant du nombre de portes achetées. Le prix unitaire d'achat est de 150 dollars liduriens pour les 20 premières portes, et de 120 dollars liduriens pour les portes suivantes. Le coût de possession mensuel d'une porte est de 6 dollars liduriens. Les besoins prévisionnels pour les 6 prochains mois sont de 10, 30, 15, 25, 30, 30.

L'algorithme utilisé est du type «*forward*» comme dans le cas convexe, c'est-à-dire qu'il ne part pas de l'horizon de planification pour remonter progressivement en arrière, comme dans le cas de l'algorithme général, car on montre que la propriété suivante est vérifiée, lorsque les demandes ne peuvent être différées[2].

Il existe toujours une politique optimale telle que la quantité optimale produite (ou achetée) au cours de la période t, soit l'une des valeurs suivantes: 0, ou d_t, ou

$$d_t + d_{t+1}\text{, ou } d_t + d_{t+1} + d_{t+2}\text{, ... ou } \sum_{i=t}^{t+n} d_i$$

Autrement dit, la livraison d'une période ne doit porter que sur une valeur correspondant exactement à la consommation d'une ou plusieurs périodes, et ne peut se produire qu'à condition que le stock de début de période (R_t) soit nul. Ceci implique que l'on ait [3]:

$$R_t \cdot q_t = 0 \qquad \textit{relation 110}$$

1. *Note de la page précédente*. Article publié en 1959 ([436]) ; il est cependant préférable de lire Wagner (1975, [435]) p. 314-323 qui est plus clair et plus général. Voir également Johnson et Montgomery (1975, [245]), p. 212-224 qui présentent d'autres algorithmes de résolution du problème.

2. Lorsqu'il est possible de différer la demande d'une période, et que les coûts associés à une demande différée sont eux-mêmes concaves, un algorithme relativement simple à mettre en œuvre peut être utilisé. Celui-ci est dû à Zangwill (1966, [453]), et un exemple numérique d'application de cet algorithme peut être trouvé dans Johnson et Montgomery (1975, [245]), p. 216-219. Cet algorithme repose sur une extension de la propriété utilisée en l'absence de rupture de stock. Si l'on note B_t le volume de demandes différées à la fin de la période *t*, après livraison et satisfaction (éventuelle) de la demande de la période, une condition nécessaire pour obtenir une politique optimale consiste à avoir toujours nulles, deux, des trois quantités suivantes: B_t, R_t et q_t. Autrement dit la demande d'une période est entièrement satisfaite par la livraison de la période, ou par le stock de début de période ou par une livraison d'une période ultérieure (demandes différées).

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

L'algorithme du cas concave est basé sur cette propriété. Modifions légèrement les notations du cas général pour introduire cet algorithme qui, contrairement à celui du cas convexe, fait appel à une présentation formalisée de programmation dynamique :

- $D_{it} = \sum_{j=i}^{t} d_j$ = demande cumulée de la période *i* à la période *t*,
- $C_i(D_{it})$ = Coût de production de D_{it} à la période *i*, et de stockage de la période *i* à la période *t*,
- f_t = coût minimal pour les périodes 1 à *t*, pour un stock résiduel nul à la fin de la période $t = \underset{i}{Minimum}(f_{i-1} + C_i(D_{it}))$, pour $i = 1$ à t, avec $F_0 = 0$,
- g_t = date optimale de dernière livraison lorsque l'horizon est *t*.

La récurrence du nouvel algorithme de programmation dynamique conduit à rechercher progressivement les valeurs de f_t, en passant de $t = 1$ à $t = T$, horizon de planification du problème. L'application de cet algorithme est faite dans le tableau 164 (sur deux pages).

TABLEAU 164
Application de l'algorithme du cas concave

Horizon *t*	Date *i* de dernière livraison	$D_{it} = \sum_{j=i}^{t} d_j$	Coût de production de D_{it}	Coût de stockage de D_{it}	$C_i(D_{it})$ Coût total de D_{it}	$f(i-1)$	$C_i(D_{it}) + f(i-1)$
1	1	10	1 600	0	1 600	0	1 600
1	$g(i = 1) = 1$	$f(i = 1) = 1\,600$					
2	1	40	5 500	180	5 680	0	5 680
2	2	30	4 300	0	4 300	1 600	5 900
2	$g(i = 2) = 1$	$f(i = 2) = 5\,680$					
3	1	55	7 300	360	7 660	0	7 660
3	2	45	6 100	90	6 190	1 600	7 790
3	3	15	2 350	0	2 350	5 680	8 030
3	$g(i = 3) = 1$	$f(i = 3) = 7\,660$					
4	1	80	10300	810	11110	0	11110
4	2	70	9 100	390	9 490	1 600	11090
4	3	40	5 500	150	5 650	5 680	11330
4	4	25	3 700	0	3 700	7 660	11360

3. *Note de la page précédente*. De nombreux auteurs définissent le stock résiduel en fin de période plutôt qu'en début de période ($\Rightarrow R_t = R_{t-1} + q_t - d_t$). Nous avons retenu la convention inverse pour mieux montrer l'analogie de raisonnement entre le problème de transport et le problème d'approvisionnement. Il résulte de cette autre convention que le programme optimal est tel que l'on a : $R_{t-1} \cdot q_t = 0$. Cette période $t-1$ qui se caractérise par un stock nul de fin de période est appelé **point de régénération**, ce qui signifie qu'au-delà de ce point (→ période *t*) le système doit générer de nouveau une livraison pour faire face à la demande. L'introduction de ce concept n'évite pas l'utilisation de la notion de période de production ou de livraison (qui se déduit par simple décalage d'une unité) et ne présente d'intérêt pratique que si l'on adopte cette convention d'écriture.

Table des matières
Index thématique

TABLEAU 164 (SUITE)
Application de l'algorithme du cas concave

Horizon t	Date i de dernière livraison	$D_{it} = \sum_{j=i}^{t} d_j$	Coût de production de D_{it}	Coût de stockage de D_{it}	$C_i(D_{it})$ Coût total de D_{it}	$f(i-1)$	$C_i(D_{it}) + f(i-1)$
4	$g(i = 4) = 2$	$f(i = 2) = 11090$					
5	1	110	13900	1530	15430	0	15430
5	2	100	12700	930	13630	1600	15230
5	3	70	9100	510	9610	5680	15290
5	4	55	7300	100	7400	7660	15060
5	5	30	4300	0	4300	11090	15390
5	$g(i = 5) = 4$	$f(i = 5) = 15060$					
6	1	140	17500	2430	19930	0	19930
6	2	130	16300	1650	17950	1600	19550
6	3	100	12700	1050	13750	5680	19430
6	4	85	10900	540	11440	7660	19100
6	5	60	7900	180	8080	11090	19170
6	6	30	4300	0	4300	15060	19360
6	$g(i = 6) = 4$	$f(i = 6) = 19100$					

Le programme d'approvisionnement optimal se déduit immédiatement de ce tableau : on voit à la dernière ligne que la dernière date de livraison du programme optimal est $t = 4$, ce qui implique qu'à la fin de la période 4 (juste avant que la demande ne s'exprime), on livre 85 portes, c'est-à-dire de quoi satisfaire les demandes des périodes 4 à 6. L'approvisionnement des 3 dernières périodes étant ainsi réglé, il faut maintenant chercher la politique optimale d'approvisionnement pour un horizon de T = 6 - 3 = 3 périodes. Sur ce tableau, on lit que la dernière livraison ayant permis de satisfaire la demande d_3, a été effectuée à la période 1 ; cette livraison couvre les besoins des demandes des périodes 1 à 3 et le programme optimal est alors totalement défini[1]. Le coût minimal associé à cette stratégie est 19 100 (c'est la valeur de f_6) et le programme optimal est fourni dans le tableau 165.

On peut présenter également les calculs dans le tableau 166 de la page 586 qui décompose les éléments de calcul de la recherche de la stratégie optimale : les coûts de livraison et de stockage du tableau sont ceux imputables à la seule demande d_t dans le coût $C_i(D_{it})$; le coût cumulé est égal à $f_{i-1} + C_i(D_{it})$ et s'obtient si $t > i$ à partir du coût cumulé pour l'horizon $t - 1$ situé immédiatement à sa gauche et des coûts de production et de stockage de d_t, situés immédiatement au-dessus ; pour $i = t$, ce coût est la somme du coût de production de d_i et le coût

1. Si l'on avait eu $g_3 = 3$ au lieu de $g_3 = 1$, il y aurait eu en période 3 une livraison correspondant à la demande de cette période, et l'on aurait continué la recherche du programme optimal défini sur un horizon T = 3 – 1 = 2 périodes.

Table des matières
Index thématique

TABLEAU 165
Programme de production correspondant au problème traité dans les tableaux 165 et 166

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	55	- 10	45
2	45	0	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	85	- 25	60
5	60	0	- 30	30
6	30	0	- 30	0
Coût total: 19100 dollars liduriens				

optimal f_{t-1} que l'on trouve en avant-dernière ligne du tableau (rappelons que par convention $f_0 = 0$).

Pour un horizon t donné, f_t est la valeur la plus faible des coûts cumulés de la colonne t et g_t prend la valeur de la ligne (= période de dernière livraison) où ce coût a été trouvé.

Il faut noter enfin que les structures concaves de coût excluent toute limitation sur les quantités produites ou stockées[1]. Plusieurs heuristiques ont été proposées pour résoudre plus rapidement ce type de problème. La plus connue est sans doute celle du coût moyen minimum et celle de Silver et Meal présentées à la page 492. De nombreuses études attestent les bonnes performances de cette heuristique, tant que les demandes ne présentent pas de variations importantes «par palier» (notamment plusieurs valeurs consécutives nulles).

II-4.2 Stabilité du programme de livraison et horizon de planification

Dans le cas concave général, on ne retrouve pas la propriété, observée dans le cas convexe, selon laquelle «lorsque l'horizon de planification T s'accroît, une livraison programmée q_T ne peut décroître». Pour s'en convaincre il suffit d'examiner les programmes d'approvisionnement optimaux de notre exemple pour les horizons de planification T = 4 et T = 5, où q_2 passe de 70 (tableau 167, page 586) à 0 (tableau 168 de la page 587).

Cependant, une propriété intéressante peut être montrée pour une classe de fonctions concaves bien particulières[2], celle des fonctions de coût de production linéaire, c'est-à-dire que le coût d'approvisionnement est $C(q_t) = a_t + b_t \cdot q_t$ et dans lesquelles on a $b_t \geq b_{t+1}$ (coût variable unitaire non croissant dans le temps). Dans ces conditions, on montre que les deux propriétés suivantes sont vraies:

1. Elles excluent également les demandes différées. Certains algorithmes existent pour traiter ces cas de figure, voir sur ce point Johnson et Montgomery (1974, [245]), p. 224.

2. Voir Wagner (17), p. 321.

Table des matières
Index thématique
Table des matières
Index thématique

TABLEAU 166

Seconde méthode d'application de l'algorithme de Wagner et Whitin

Date de la dernière livraison pour un horizon t			Horizon t = 1	2	3	4	5	6
Demandes de la période t			10	30	15	25	30	30
1	Coûts de	Livraison	1600	3900	1800	3000	3600	3600
		Stockage	0	180	180	450	720	900
		Cumul	1600	5680	7660	11110	15430	19930
2	Coûts de	Livraison		4300	1800	3000	3600	3600
		Stockage		0	90	300	540	720
		Cumul		5900	7790	11090	15230	19550
3	Coûts de	Livraison			2350	3150	3600	3600
		Stockage			0	150	360	540
		Cumul			8030	11330	15290	19430
4	Coûts de	Livraison				3700	3600	3600
		Stockage				0	180	360
		Cumul				11360	15140	19100
5	Coûts de	Livraison					4300	3600
		Stockage					0	180
		Cumul					15390	19170
6	Coûts de	Livraison						4300
		Stockage						0
		Cumul						19440
f_t			1600	5680	7660	11090	15140	19100
g_t			1	1	1	2	4	4

TABLEAU 167

Programme optimal de l'exemple du cas concave pour T = 4

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	10	- 10	0
2	0	70	- 30	40
3	40	0	- 15	25
4	25	0	- 25	0
Coût total: 11090 dollars liduriens				

Table des
Index

TABLEAU 168
Programme optimal de l'exemple du cas concave pour T = 5

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	55	- 10	45
2	45	0	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	55	- 25	30
5	30	0	- 30	0
Coût total : 15 140 dollars liduriens				

- si $g_t = t$ au cours de la recherche de la solution optimale, c'est-à-dire si pour un horizon t l'approvisionnement de la période t a intérêt à s'effectuer par une livraison en t, il est toujours optimal de considérer la programmation des $t - 1$ premières périodes comme indépendante de celle des périodes suivantes. Cette propriété présente, d'une part, un avantage au niveau des calculs en diminuant notablement l'aspect combinatoire du problème, et d'autre part, garantit que la programmation des premières périodes est optimale si l'on a la chance de voir vérifier assez vite cette propriété, ce résultat étant indépendant de la plus ou moins bonne qualité des informations des périodes postérieures à t. Ajoutons que le montant de la livraison effectuée en t est susceptible de varier jusqu'à ce que cette propriété soit de nouveau vérifiée à une période ultérieure ;
- si $t_2 \geq t_1$ on a alors toujours $g_{t2} \geq g_{t1}$, c'est-à-dire que la demande d'un mois est nécessairement satisfaite par la livraison qui satisfait la demande du mois précédent ou une livraison postérieure.

Reprenons notre exemple, en supposant maintenant que le coût unitaire des portes est constant (150 dollars liduriens). La première des deux propriétés ci-dessus fait que l'on doit chercher la solution optimale en cherchant :

$$f_t = \underset{i}{\text{minimum}}(f_{i-1} + C_i(D_{it})), \text{ pour } i = g_{t-1}..., t \qquad \textit{relation 111}$$

On effectuera l'intégralité des calculs pour mieux faire apprécier les gains réalisés, la partie foncée du tableau 169 de la page 588 correspondant aux calculs rendus inutiles du fait de la propriété de cette fonction de coût de production concave d'un type bien particulier les changements de couleurs correspondant aux différentes valeurs de g_t. Par exemple, pour $t = 4$ on a $g_t = 4$; les seules solutions à explorer pour un horizon $t = 5$ sont $f_3 + C_4(D_{4,5})$ et $f_4 + C_5(D_{5,5})$, il est inutile de calculer $C_1(D_{1,5})$, $f_1 + C_2(D_{2,5})$, $f_2 + C_3(D_{3,5})$. Par ailleurs, le coût de livraison ne comprendra ici que le coût de lancement, car le coût unitaire est le même à toutes les périodes (ce qui correspond à une dépense totale de 21 000 dollars liduriens pour les 6 mois, valeur à ajouter à f_6). Comme vous pouvez le constater, les calculs sont considérablement simplifiés dans ce cas. La solution optimale est obtenue pour l'échéancier de livraison suivant : 10, 45, 0, 25, 30, 30, ce qui correspond à un coût minimal total de 21 000 + 590 = 21 590

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 169

Adaptation de l'algorithme au cas des coûts de production linéaires

Date de la dernière livraison pour un horizon t		Horizon t : 1	2	3	4	5	6
Demandes de la période t		10	30	15	25	30	30
1	Coûts de Livraison	100					
	Coûts de Stockage	0	180	180	450	720	900
	Cumul		280	460	910	1 630	2 530
2	Coûts de Livraison		100				
	Coûts de Stockage		0	90	300	540	720
	Cumul		200	290	590	1 130	1 850
3	Coûts de Livraison			100			
	Coûts de Stockage			0	150	360	540
	Cumul			300	450	810	1 350
4	Coûts de Livraison				100		
	Coûts de Stockage				0	180	360
	Cumul				390	570	930
5	Coûts de Livraison					100	
	Coûts de Stockage					0	180
	Cumul					490	670
6	Coûts de Livraison						100
	Coûts de Stockage						0
	Cumul						590
f_t		100	200	290	390	490	590
g_t		1	2	2	4	5	6

TABLEAU 170

Programme optimal dans le cas de fonction de coût linéaire

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	10	- 10	0
2	0	45	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	25	- 25	0
5	0	30	- 30	0
6	0	30	- 30	0
Coût total : 21 590 dollars liduriens				

Table des matières

Index thématique