Aide mémoire d'analyse numérique

A. Ramadane, Ph.D.

Équations algébriques non linéaires

- Problème « de racine »: chercher r t.q. $f(r) = 0$
- Borne supérieure de l'erreur pour la méthode de la bissection: $|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$
- Problème de point fixe: chercher r t.q. $r = g(r)$
- Algorithme de point fixe: pour x_0 donné, $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Développement pour l'analyse de convergence de la méthode de points fixes:

$$e_{n+1} := x_{n+1} - r = g'(r)e_n + \frac{1}{2}g''(r)e_n^2 + \frac{1}{6}g'''(r)e_n^3 + \cdots$$

- Méthode de Newton: pour x_0 donné,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Une racine r de la fonction $f(x)$ est de *multiplicité* m si $f(x) = (x-r)^m h(x)$ pour une fonction $h(x)$ qui vérifie $h(r) \neq 0$ ou encore si:

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(r) \neq 0$$

- Taux de convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une racine de *multiplicité* m: $1 - \frac{1}{m}$

Systèmes d'équations algébriques

- La factorisation matricielle de Crout:

$$A = LU = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \ddots & \vdots \\ \ell_{31} & l_{32} & \ell_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La résolution des systèmes linéaires:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow LU\vec{x} = P\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ)\ L\vec{y} = P\vec{b}; \\ 2^\circ)\ U\vec{x} = \vec{y}. \end{cases}$$

Note: On peut utiliser le vecteur de permutation $\vec{O}$ plutôt que la matrice de permutation P.

- Normes vectorielles:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$$

- Normes matricielles:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

- Conditionnement matriciel: $\mathrm{cond}\, A = \|A\| \|A^{-1}\|$

- Bornes de l'erreur: pour le résidu $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^\star$ et la perturbation E sur la matrice A,

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\, A} \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \leq \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^\star\|}{\|\vec{x}\|} \leq \mathrm{cond}\, A \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \qquad \text{et} \qquad \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^\star\|}{\|\vec{x}^\star\|} \leq \mathrm{cond}\, A \frac{\|E\|}{\|A\|}$$

- Matrice à diagonale strictement dominante A:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- La méthode de Newton: pour $\vec{x}^k$ donné, résoudre

$$J(\vec{x}^k)\vec{\delta}x = -\vec{R}(\vec{x}^k) \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}^k) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^k) \\ f_2(\vec{x}^k) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^k) \end{pmatrix}$$

puis $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \vec{\delta}x$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$