Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

Calcul I   Devoir # 1   Automne 2009   Solutionnaire

1. Considérons $f(x) = ln(1+x)$ avec $x > -1$.

a)

$$\begin{aligned}
f(x) = ln(1+x) \quad &\rightarrow \quad f(0) = ln(1+0) = 0 \\
f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad &\rightarrow \quad f'(0) = (1+0)^{-1} = 1 \\
f^{(2)}(x) = (-1)(1+x)^{-2} \quad &\rightarrow \quad f^{(2)}(0) = (-1)(1+0)^{-2} = -1 \\
f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} \quad &\rightarrow \quad f^{(3)}(0) = (-1)(-2)(1+0)^{-3} = 2! \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)(-2)...(-(n-1))(1+x)^{-n} \quad &\rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)(-2)..(-(n-1))(1+0)^{-n} \\
&\rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
T(x) &= ln(1+0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-0)^n \qquad (1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (2)
\end{aligned}$$

Notons que

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

b) Par le test de d'Alembert, (Test du quotient)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| \\
&= |x| \underbrace{<}_{\text{impose}} 1
\end{aligned}$$

Ainsi

$$-1 < x < 1$$

Analyse aux extrémités de l'intervalle.

* si $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \text{ (Qui converge par le test de Leibniz)}$$

* si $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n} \text{ (Qui diverge car c'est la série harmonique)}$$

En conclusion,
l'intervalle de convergence est : $-1 < x \leq 1$,
le rayon de convergence est : $R = 1$.

c) Puisque

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |P_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \text{ où } c \in [-1/2, 1/2] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}n!x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}\right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(1-\frac{1}{2})^{n+1}(n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Puisque la limite du reste tend vers 0 alors la série converge vers f(x).

d) Puisque $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{2}{100}$, il faut que $n = 50$. Ainsi

$$P_n(x) = \sum_{n=1}^{50} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

e) En substituant x par $4x^2$ dans la série (2), nous obtenons

$$\begin{aligned} S(x) &= 4x^2 - \frac{(4x^2)^2}{2} + \frac{(4x^2)^3}{3} - \frac{(4x^2)^4}{4} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 4^n x^{2n} \end{aligned}$$

2. Soit l'égalité:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x - \frac{\pi}{2})^n = (x - \frac{\pi}{2}) \sin(x) \tag{3}$$

En développant la fonction $f(x) = \sin(x)$ autour de $\frac{\pi}{2}$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^6 + \cdots \\ (x - \frac{\pi}{2})\sin(x) &= (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^5 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^7 + \cdots \end{aligned}$$

En substituant cette dernière expressions dans (3), nous obtenons:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x - \frac{\pi}{2})^n = (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^5 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^7 + \cdots \tag{4}$$

∗ si n est pair, i.e. $n = 2k$, avec $k = 1, 2, 3, ...$

$$C_n = C_{2k} = 0.$$

∗ si n est impair, i.e. $n = 2k + 1$, avec $k = 0, 1, 2, 3, ...$

$$C_n = C_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

3. a) Par une décomposition en fractions partielles:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

En analysant la suite des sommes partielles:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) \\ S_2 &= \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) \end{aligned}$$

Et puisque

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}$$

alors la série converge. Et sa somme est $\frac{1}{2}$.

b) Par la règle de l'Hôpital, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{3!\ n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{3!} = \infty$$

Et comme cette limite est différente de 0, la série diverge.

4. Puisque

$$5 \sum_{n=-1}^{\infty} (3-x)^{-n} = 36$$

En posant le changement de variables $n* = n+1$, nous avons:

$$5 \sum_{n^*=0}^{\infty} (3-x)^{-(n^*-1)} = 36$$

$$5(3-x) \sum_{n^*=0}^{\infty} (\frac{1}{3-x})^{n^*} = 36$$

En utilisant la série géométrique avec $a = 1$ et $r = \frac{1}{3-x}$, nous obtenons

$$5(3-x)(\frac{1}{1-\frac{1}{(3-x)}}) = 36 \quad \text{si} \quad |\frac{1}{3-x}| < 1.$$

Qui est équivalent à

$$5\frac{(3-x)^2}{(2-x)} = 36 \Rightarrow 5x^2 + 6x - 27 = 0$$

En résolvant, nous obtenons: $x_1 = \frac{9}{5}$ et $x_2 = -3$. Comme $x_2 < 0$, et que $|\frac{1}{3-x_1}| = \frac{5}{6} < 1$, on retient que $x_1 = \frac{9}{5}$

5. Considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k (x-1)^{2k}}{k} \text{et posons} \quad a_k = \frac{100^k (x-1)^{2k}}{k}.$$

Par le test de d'Alembert (test du quotient),

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty}|\frac{\frac{100^{k+1}(x-1)^{2k+2}}{k+1}}{\frac{100^k(x-1)^{2k}}{k}}| = \lim_{k\to\infty}|\frac{100(x-1)^2k}{k+1}| = 100(x-1)^2 \underbrace{<}_{impose} 1$$

On en déduit que

$$9/10 < x < 11/10.$$

Analyse aux bornes de l'intervalle

* si $x = 11/10$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100^k(11/10-1)^{2k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

qui diverge car c'est la série harmonique.

* si $x = 9/10$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100^k(9/10-1)^{2k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

qui diverge car c'est la série harmonique.

En conclusion, l'intervalle de convergence est:

$$9/10 < x < 11/10.$$

Et le rayon de convergence est:

$$R = \frac{1}{10}.$$

6. Puisque

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots \\
1 - e^{-x^2} &= x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \cdots \\
\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \cdots
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\frac{1-e^{-x^2}}{x^2})dx &= \Big[x - \frac{x^3}{2!3} + \frac{x^5}{3!5} - \frac{x^7}{4!7} + \cdots\Big]_0^1 \\
&= \underbrace{1 - \frac{1}{6}}_{\text{On retient 2 termes seulement}} + \frac{1}{30} - \frac{1}{4!7} + \cdots \\
&\simeq \frac{5}{6} \quad \text{puisque } |\frac{1}{30}| < \frac{5}{100}
\end{aligned}$$

7. a) Considérons $Z_1 = x_1 + y_1 i$ et $Z_2 = x_2 + y_2 i$. Alors

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= x_1x_2 + y_1x_2 i + x_1y_2 i - y_1y_2 \\ Re(Z_1Z_2) &= x_1x_2 - y_1y_2 \\ Z_1\overline{Z}_2 &= x_1x_2 + x_2y_1 i - x_1y_2 i + y_1y_2 \\ Re(Z_1\overline{Z}_2) &= x_1x_2 + y_1y_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Re(Z_1Z_2) + \frac{1}{2}Re(Z_1\overline{Z}_2) &= x_1x_2 \\ &= Re(Z_1)Re(Z_2) \end{aligned}$$

b) Posons $Z = x + iy$ alors $Re(1 - Z) = |Z| \Rightarrow (1 - x) = \sqrt{x^2 + y^2}$, alors

$$\begin{aligned} (1-x)^2 &= x^2 + y^2 \\ 1 - 2x + x^2 &= x^2 + y^2 \\ y^2 &= 1 - 2x \;\; \text{(qui est une parabole)} \end{aligned}$$

c) Nous avons

$$Z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}, k = 0, 1, 2$$

Par conséquent

$$Z_k = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}{3}}, k = 0, 1, 2$$

Ainsi, les 3 racines sont:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{12})} = \sqrt[6]{2}[cos(\frac{\pi}{12}) + sin(\frac{\pi}{12})\ i] \\ Z_1 &= \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{9\pi}{12})} = \sqrt[6]{2}[cos(\frac{9\pi}{12}) + sin(\frac{9\pi}{12})\ i] \\ Z_2 &= \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{17\pi}{12})} = \sqrt[6]{2}[cos(\frac{17\pi}{12}) + sin(\frac{17\pi}{12})\ i] \end{aligned}$$

d) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}\ i = \sqrt{40}\ e^{i(\pi + Arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \sqrt{40}\ e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})} = \sqrt{40}\ [cos(\frac{7\pi}{6}) + sin(\frac{7\pi}{6})\ i]$