静态电磁场

1 静电场 Electrostatic Field

*研究**电介质**（绝缘材料）中静止的电荷产生的静电场*

源为标量源电荷体密度ρ，所以场是**有散无旋场**

描述静电场的量：

- 电场强度$\boldsymbol{E}$
- 电位移$\boldsymbol{D}$
  - 为表述介质特性而引入

描述静电场的方程（3个）：

$$
\begin{array}{ll}
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho & \oiint_{S} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \\
\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 & \oint_{l} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \\
\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} & \text{(介质的成分方程，}\epsilon\text{为介电常数)}
\end{array}
$$

$\boldsymbol{E}$ 无旋，将 $\boldsymbol{E}$ 用电位的负梯度表示：$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$

在均匀介质区域中电位满足泊松方程：$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon$

介质中的电场能量对应电容

常见工程问题：高压设备的绝缘强度分析

2 恒定电(流)场 Steady Current Field

*分析**导体**内恒定电流密度与电场如何分布*

导体中的电场由**导体表面上的电荷**所产生，为标量源

但源分布在表面上，场域内无源，所以为**无散无旋场**

描述恒定电流场的量：

- 电场强度$\boldsymbol{E}$
- 电流密度$\boldsymbol{J}$

描述恒定电流场的方程组（3个）：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{J} &= 0 \\
\boldsymbol{J} &= \sigma \boldsymbol{E} \qquad (\text{导体的成分方程；}\sigma\text{为电导率})
\end{aligned}
$$

可设：$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$ 电位满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$

导体中的<u>功率损耗</u>对应什么电路参数？电阻

常见工程问题：导体内的功率损耗与发热

当然，导体中的电流$\boldsymbol{J}$会在导体内和周围空间产生磁场。但磁场与电场**不耦合**，不相互为源，可以分开独立分析。导体表面上的电荷会在导体<u>外介质</u>中产生静电场，在此不关注。

3 恒定磁场 Magnetostatic Field

*研究**磁性媒质**中<u>恒定电流产生的磁场</u>*

源为矢量源电流面密度$\boldsymbol{J}$，所以场是**有旋无散场**

描述恒定磁场的量：

- 磁场强度$\boldsymbol{H}$
- 磁通密度$\boldsymbol{B}$

描述恒定磁场的方程组（3个）：

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \quad && \oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i_{\boldsymbol{J}} \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 && \oiint_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \\
&\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} && (\text{磁媒质的成分方程，}\mu\text{为磁导率})
\end{aligned}
$$

并有磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等于矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

矢量磁位满足泊松方程：$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$

<u>磁场能量</u>对应什么电路参数？电感

常见工程问题：磁芯或磁路设计分析；电感储能不易

4 边值问题

时变电磁场

Maxwell方程组

共7个方程，5个未知量，通常是给定电流i与电荷密度ρ

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \end{cases}$$

- $\boldsymbol{E}$ 电场强度 electric field intensity
- $\boldsymbol{H}$ 磁场强度 magnetic field intensity
- $\boldsymbol{D}$ 电位移、电通量密度 electric displacement, electric flux density
- $\boldsymbol{B}$ 磁通密度（磁密）magnetic flux density
- $\boldsymbol{J}$ 电流密度 current density
- $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 位移电流密度 displacernent current density

材料成分关系方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases}$$

- ρ 电荷密度 charge density
- ϵ 介电常数 permittivity
- σ 电导率 conductivity
- μ 磁导率 permeability

5 准静态电磁场（低频、低时变）

时变但部分场量具有静态场的特性

当 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t << \boldsymbol{J}$ 时，

位移电流可忽略，即忽略 $\boldsymbol{H}_i$，式 (1) 变为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \cancel{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}\ (1) & \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ (2) & \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\ (3) & \\ \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0\ (4a) & \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho\ (4b) \\ \text{导体区域} & \text{介质区域} \end{array}$$

与恒定磁场相同，叫**磁准静态场**。对此，

- 若$\boldsymbol{J}$已知，可先求得磁场，再由式(2)求感应电场；由式(4b)求库仑电场。
- *若$\boldsymbol{J}$未知*，$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，求导体中感应电流，忽略位移电流的问题称为**涡流问题**。需联立方程求解，已知导体电流。

典型工程问题：导体内的涡流损耗发热，电磁炉

当 $\partial B/\partial t$ 产生的感应电场$\boldsymbol{E}_i$远小于库仑电场$\boldsymbol{E}_c$时，

忽略感应电场 $\boldsymbol{E}_i$，式 (1) 变为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\ (1) & \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\cancel{\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}\ (2) & \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\ (3) & \\ \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0\ (4a) & \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho\ (4b) \\ \text{导体区域} & \text{介质区域} \end{array}$$

与静电场相同，叫**电准静态场**（$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$）。对此，

- 若$\boldsymbol{J}$已知，可由电荷求出电场，再由式 (1) 与式 (3) 求磁场。
- 若$\boldsymbol{J}$未知，需联立方程求解，已知导体电流。

利用快速变化的电场产生磁场的典型应用：粒子回旋加速器

6 时变电磁场（高频---电磁波）

介质中的电磁波

原则上是完整的Maxwell方程组。但在远离发射天线的远场区，

可忽略传导电流产生的磁场 $\boldsymbol{H}_J$ 与电荷产生的电场 $\boldsymbol{E}_C$，

只分析磁场 $\boldsymbol{H}_i$ 与电场 $\boldsymbol{E}_i$ 的相互产生、分析能量的向外辐射，远场区方程为：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \ (1)$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ (2)$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \ (3)$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \ (4)$$

场强满足波动方程，电场与磁场对偶

工程问题：天线设计与电磁波传输分析；微波炉原理