CSDN公开课

计算机视觉原理及实战：

5. 视觉几何基础与位姿估计

主讲人: *Roland*

哈尔滨工业大学

目录 Contents

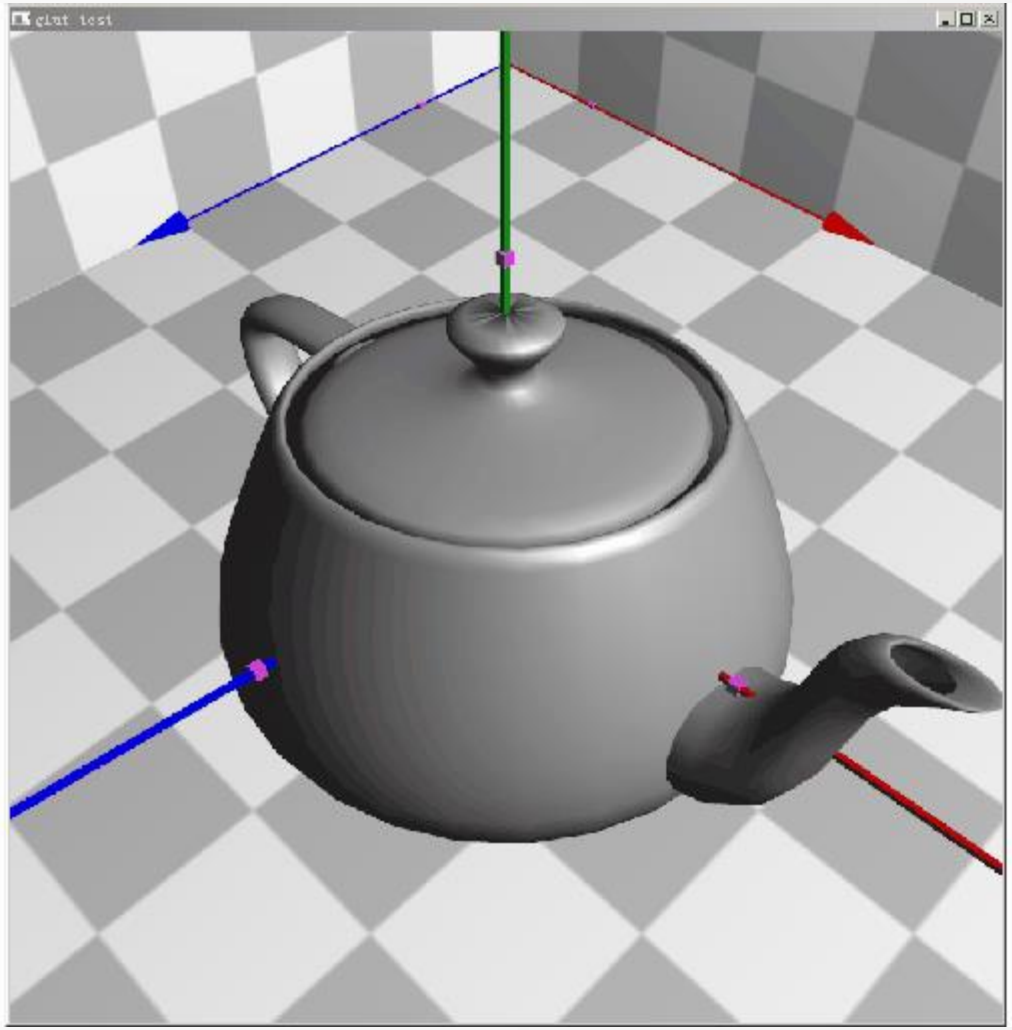
不 止 于 代 码

座标变换

- 座标系与座标变换
- 线性摄像机模型

- 不同座标系及座标变换关系

当茶壶旋转时，其上的点在固定座标系坐标值变化



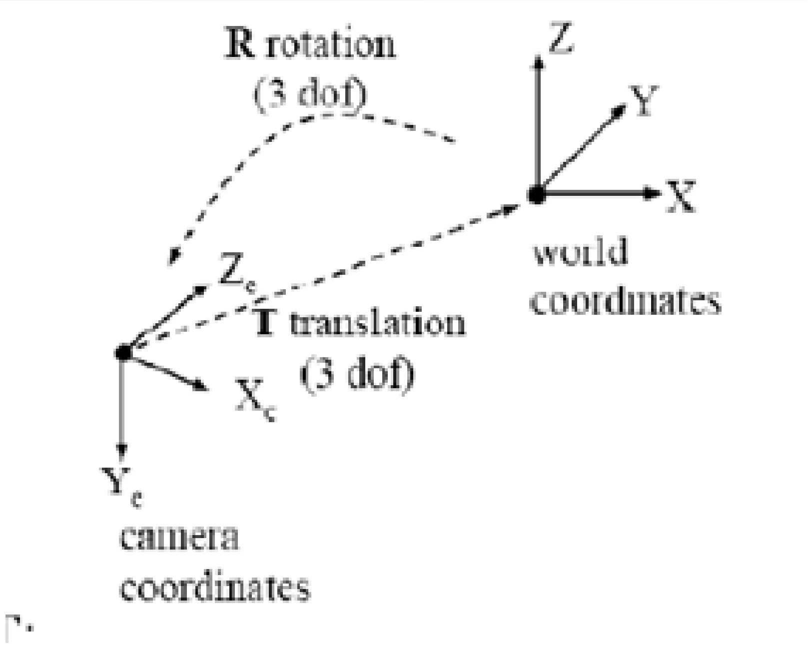
- 任意两个三维座标系之间的变换关系

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

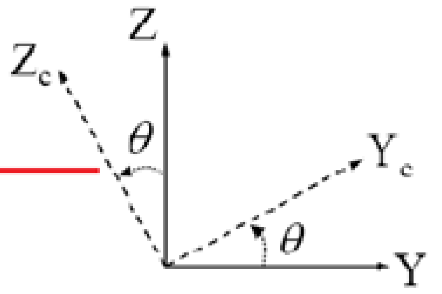
R满足旋转矩阵正交性约束

坐标系变换及旋转矩阵生成示意图



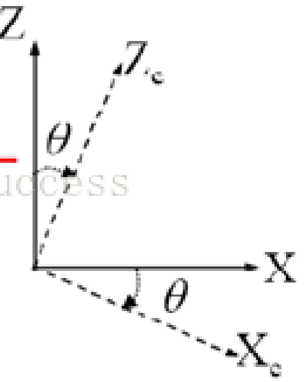
绕X轴旋转 r1

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



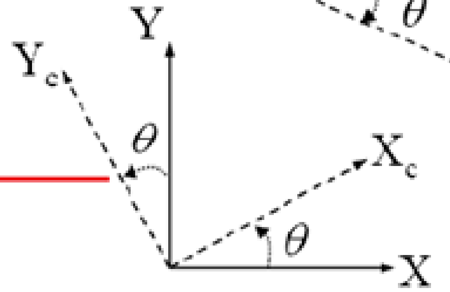
绕Y轴旋转 r2

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



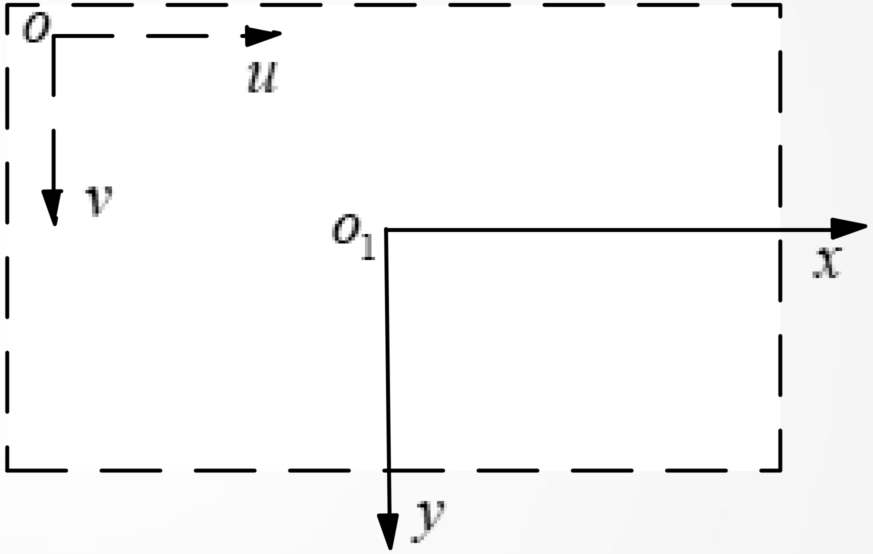
绕Z轴旋转 r3

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



➢ 像素座标系：

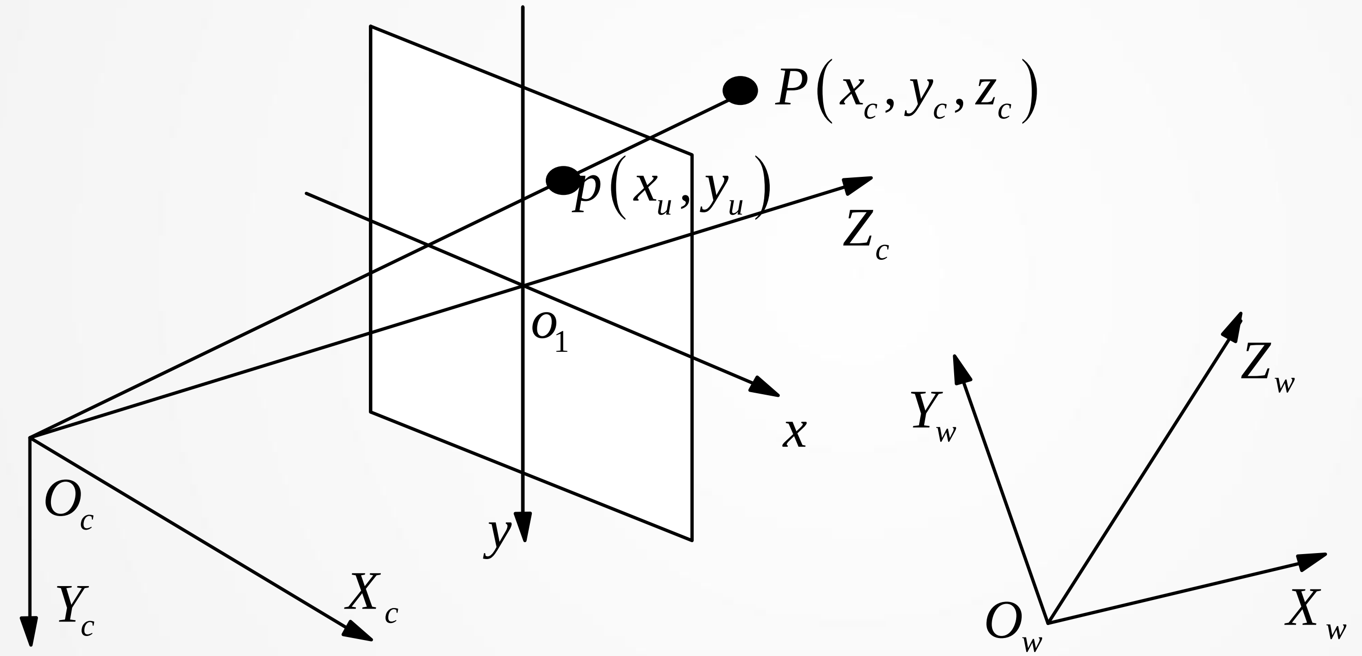
➢ 图像座标系：



二者变换关系：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 摄像机坐标系$O_cX_cY_cZ_c$ (camera frame)



1.1坐标系与坐标变换

- 世界坐标系$O_wX_wY_wZ_w$
- 手端坐标系或平台坐标系$O_eX_eY_eZ_e$
- 目标坐标系$O_tX_tY_tZ_t$

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

考虑简化的针孔模型

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

加入相机坐标系与世界坐标系变换关系，得到

$$z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

令

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

内参

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$$

外参

$$z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

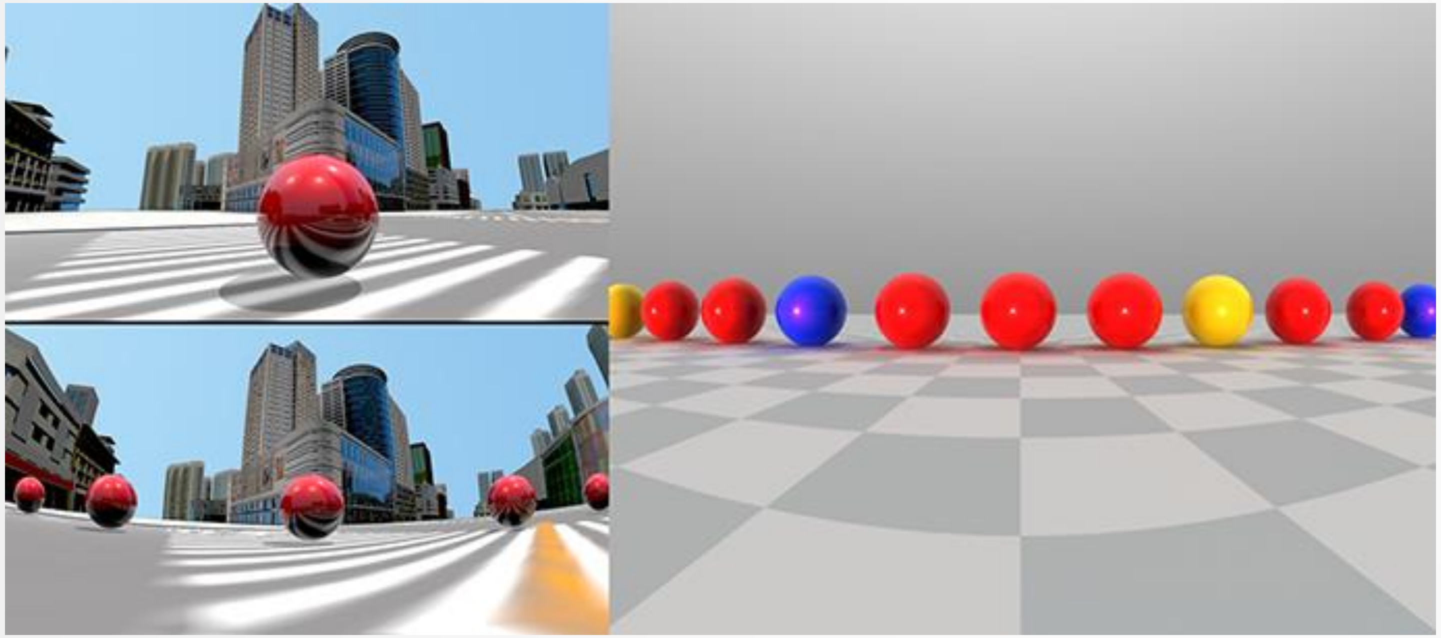
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$$

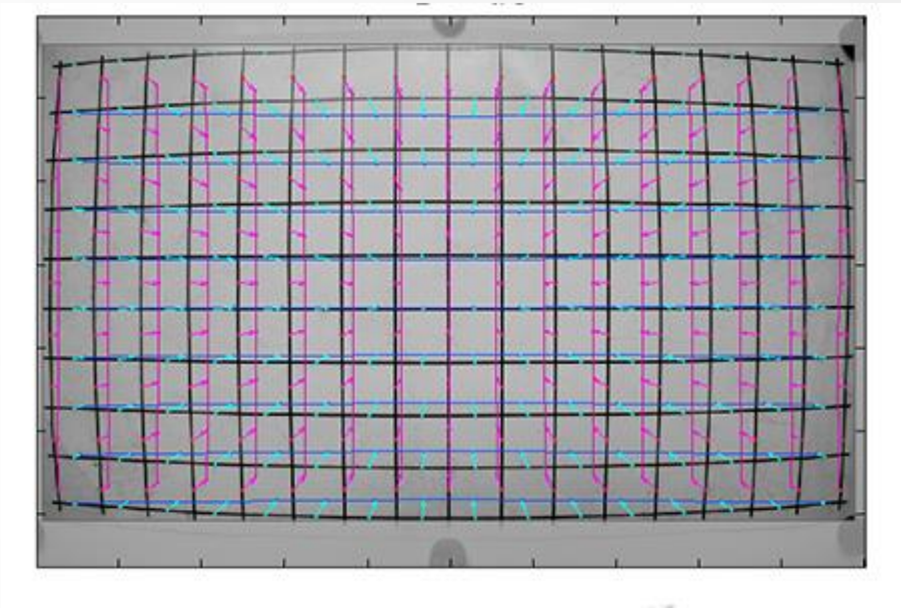
投影矩阵

$$z_c \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_3^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}$$

1.2 线性摄像机模型

- 成像畸变示意





- 非线性摄像机模型

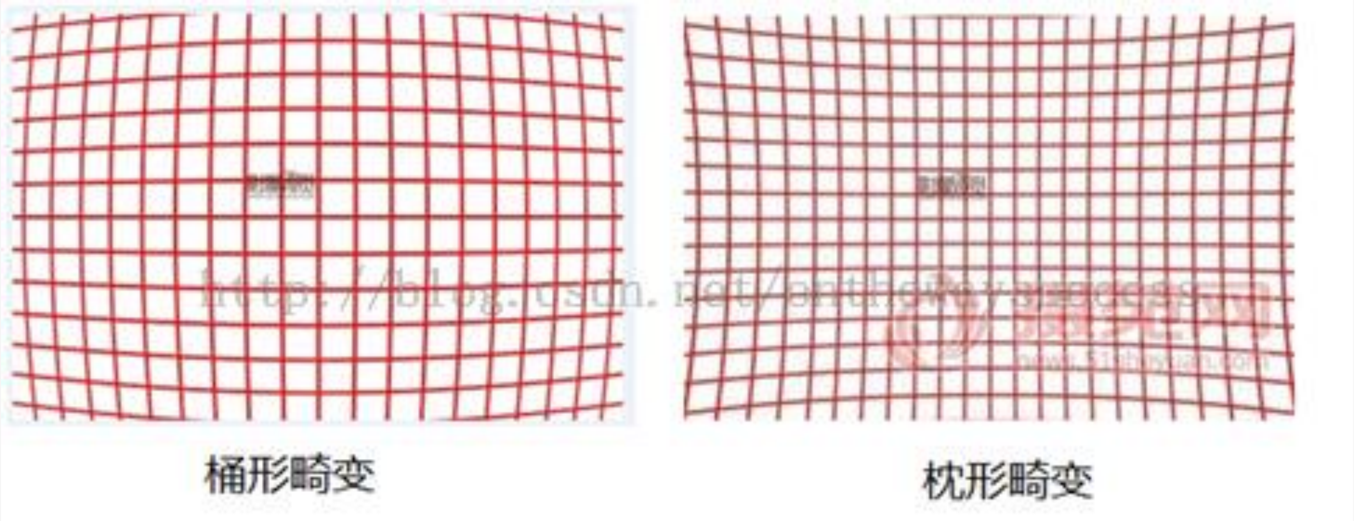
$$\bar{x} = x + \delta_x(x, y) \qquad \bar{y} = y + \delta_y(x, y)$$

$$\delta_x(x, y) = k_1 x(x^2 + y^2) + [p_1(3x^2 + y^2) + 2p_2 xy] + s_1(x^2 + y^2)$$

$$\delta_y(x, y) = k_2 y(x^2 + y^2) + [p_2(3x^2 + y^2) + 2p_1 xy] + s_2(x^2 + y^2)$$

- 径向畸变，离心畸变，薄棱镜畸变

- 径向畸变：



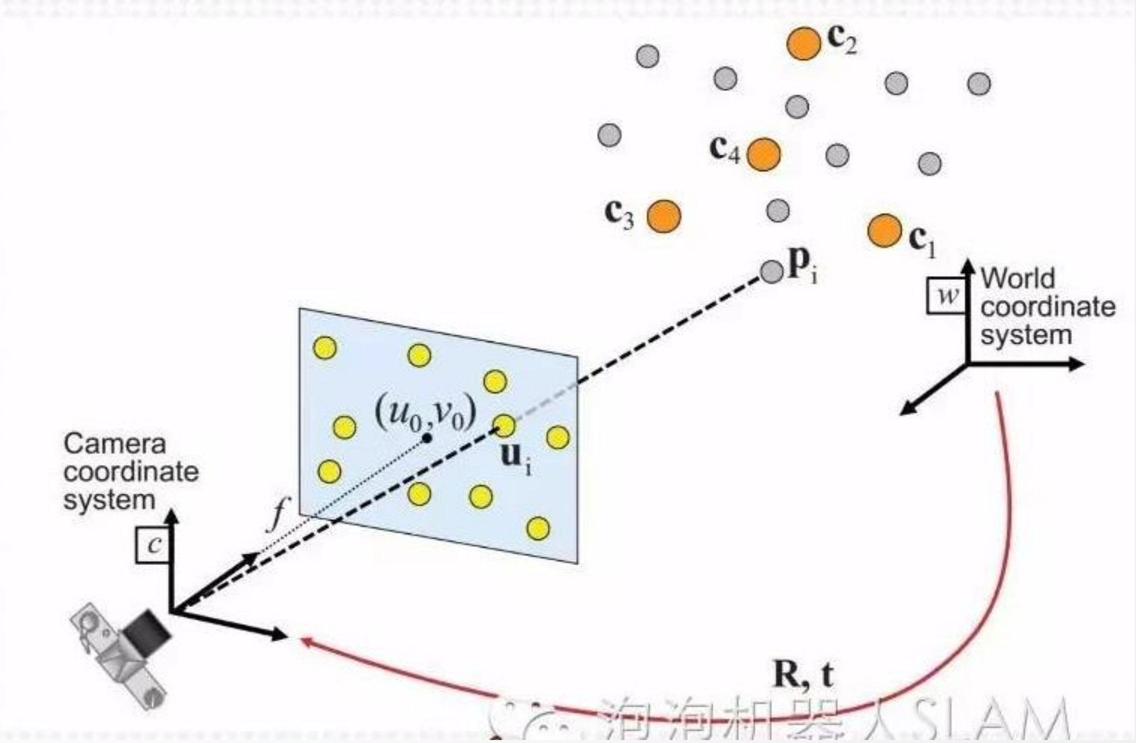
- 通常仅考虑径向畸变

相对位姿测量算法

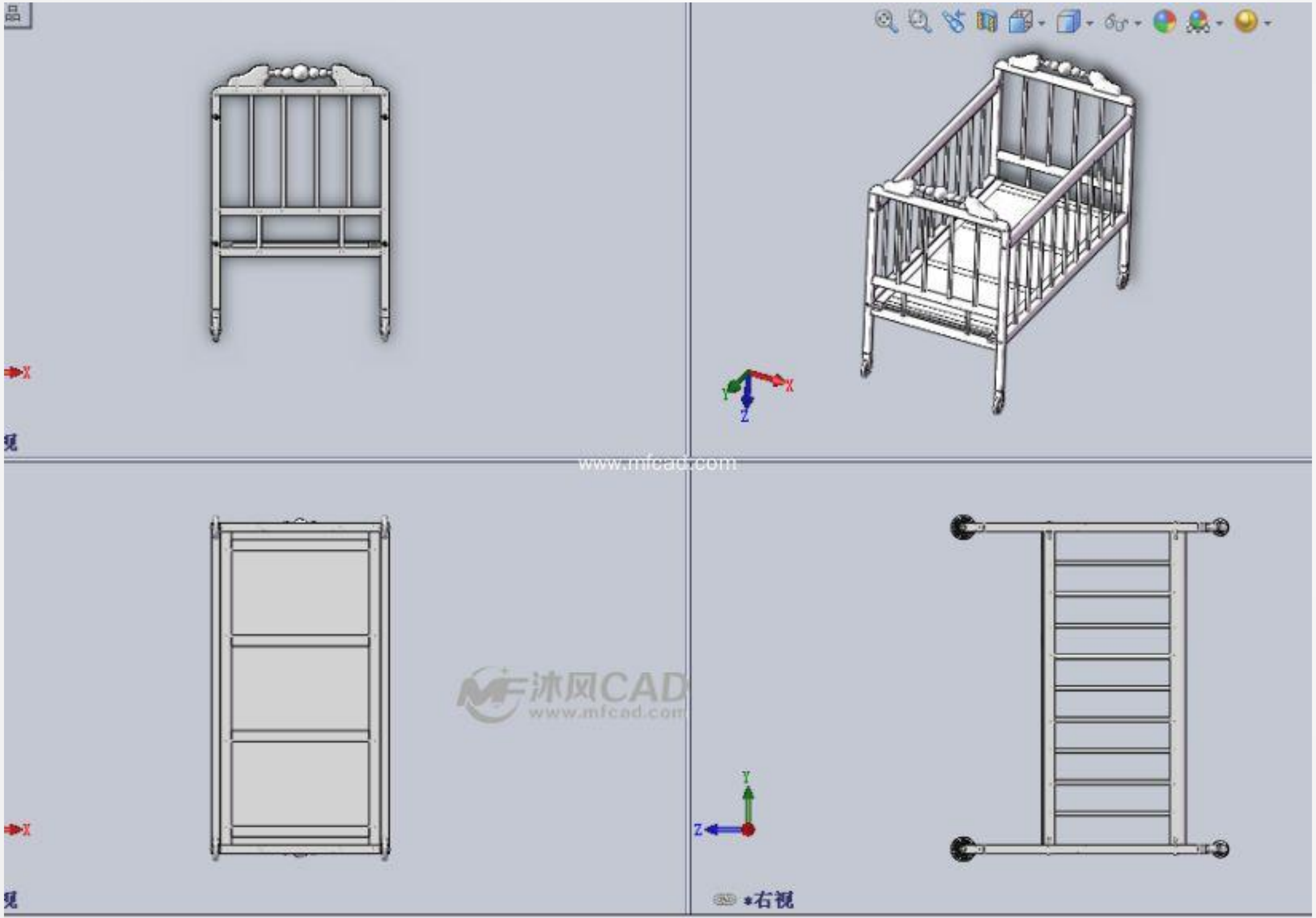
- 基本问题
- 线性求解

相对位姿估计的基本问题

- 已知：相机内参数；多个空间上的特征点(非共面)在目标坐标系(3D)和相平面坐标系(2D)坐标；
- 输出：目标坐标系相对相机坐标系的位置和姿态



基本思想示意



线性求解基本方程：

- 对每一个特征点，均有：

$$z_c\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & 0 & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\\mathbf{0}_3^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_w\\Y_w\\Z_w\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & 0 & u_0\\0 & f_y & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_w\\Y_w\\Z_w\\1\end{bmatrix}$$

$$z_c\begin{bmatrix}f_x & 0 & u_0\\0 & f_y & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_w\\Y_w\\Z_w\\1\end{bmatrix}$$

线性求解基本方程：

- 对每一个特征点，均有：

$$z_c\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 展开第一行：

$$z_c x' = r_{11}X_t + r_{12}Y_t + r_{13}Z_t + t_1$$

- 类似展开第二、三行：

$$\div$$

$$z_c y' = r_{21}X_t + r_{22}Y_t + r_{23}Z_t + t_2$$

$$z_c = r_{31}X_t + r_{32}Y_t + r_{33}Z_t + t_3$$

不止于代码

➤ 未知数线性求解

➤ 消去z_c

$$x' = \frac{r_{11}X_t + r_{12}Y_t + r_{13}Z_t + t_1}{r_{31}X_t + r_{32}Y_t + r_{33}Z_t + t_3} \quad y' = \frac{r_{21}X_t + r_{22}Y_t + r_{23}Z_t + t_2}{r_{31}X_t + r_{32}Y_t + r_{33}Z_t + t_3}$$

➤ 上二式右侧分母移到左边，得：

$$X_t \cdot r_{11} + Y_t \cdot r_{12} + Z_t \cdot r_{13} - x'X_t \cdot r_{31} - x'Y_t \cdot r_{32} - x'Z_t \cdot r_{33} + 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 = x' \cdot t_3$$

$$X_t \cdot r_{21} + Y_t \cdot r_{22} + Z_t \cdot r_{23} - y'X_t \cdot r_{31} - y'Y_t \cdot r_{32} - y'Z_t \cdot r_{33} + 0 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 = y' \cdot t_3$$

整理为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X_t & Y_t & Z_t & 0 & 0 & 0 & -x'X_t & -x'Y_t & -x'Z_t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_t & Y_t & Z_t & -y'X_t & -y'Y_t & -y'Z_t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}/t_3 \\ r_{12}/t_3 \\ r_{13}/t_3 \\ r_{21}/t_3 \\ r_{22}/t_3 \\ r_{23}/t_3 \\ r_{31}/t_3 \\ r_{32}/t_3 \\ r_{33}/t_3 \\ t_1/t_3 \\ t_2/t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

记为 $\boxed{\mathbf{A}_1}\boldsymbol{\theta} = \boxed{\mathbf{b}_1}$

对于每一个点都可以形成如上两个方程，对于多个点，可进行堆叠，并记成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$$

有六个或以上特征点且非共面时，可求解：

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}'$$

上面求出的只有11个参数，且多一个/t_3. 最后一个变量可利用如下约束求出：

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$

相关函数

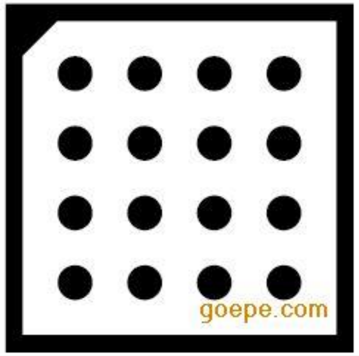
```
bool solvePnP(InputArray objectPoints, InputArray imagePoints, InputArray cameraMatrix, InputArray distCoeffs, OutputArray rvec, OutputArray tvec, bool useExtrinsicGuess=false, int flags=ITERATIVE )
```

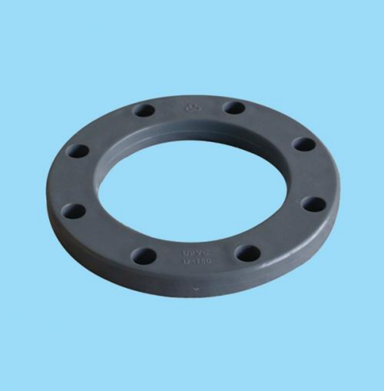
- *objectPoints*，目标座标系下的三维点座标，3*N
- *imagePoints*，像平面点坐标
- *cameraMatrix*，相机内参数矩阵，如前所述
- *distCoeffs* ，畸变系数向量
- *rvec*，旋转矩阵计算结果，以Rodrigues向量形式表示
- *tvec*，平移向量计算结果

基于平面特征点的位姿测量

- 基本问题
- 线性求解
- 扩展

- 已知：相机内参数；多个平面上的特征点在目标坐标系(3D)和相平面坐标系(2D)坐标；
- 输出：目标坐标系相对相机坐标系的位置和姿态





平面特征点相对位姿估计——线性求解

- 设Z_t=0(特征共面)，则对每一个特征点，均有：

$$z_c\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & t_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 得到两个方程

$$x'=\frac{r_{11}X_t+r_{12}Y_t+t_1}{r_{31}X_t+r_{32}Y_t+t_3} \qquad y'=\frac{r_{21}X_t+r_{22}Y_t+t_2}{r_{31}X_t+r_{32}Y_t+t_3}$$

➢ 未知数线性求解

$$X_t \cdot r_{11} + Y_t \cdot r_{12} - x'X_t \cdot r_{31} - x'Y_t \cdot r_{32} + 1 \cdot t_1 = x' \cdot t_3$$

$$X_t \cdot r_{21} + Y_t \cdot r_{22} - y'X_t \cdot r_{31} - y'Y_t \cdot r_{32} + 1 \cdot t_2 = y' \cdot t_3$$

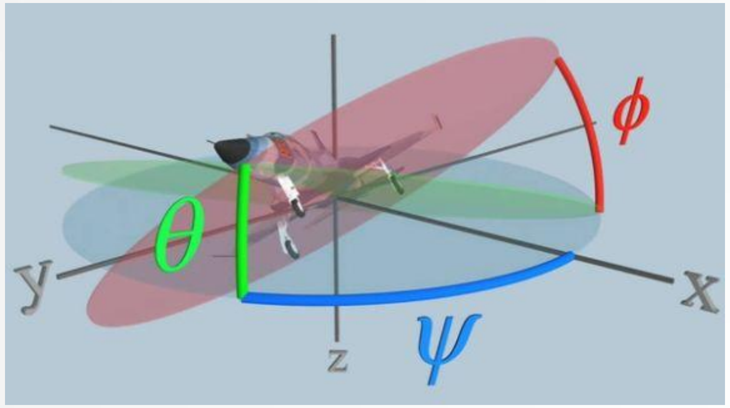
- ➢ 对于每一个点都可以形成如上两个方程，对于>=4个点，可使用类似PnP方法求得解：

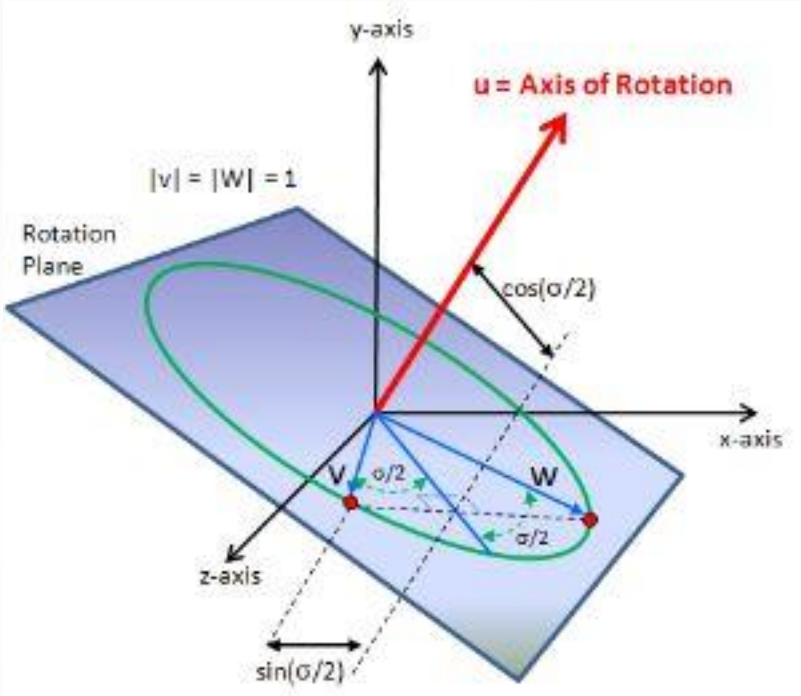
$$\boldsymbol{\theta}' = \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{t_3} & \frac{r_{12}}{t_3} & \frac{r_{21}}{t_3} & \frac{r_{22}}{t_3} & \frac{r_{31}}{t_3} & \frac{r_{32}}{t_3} & \frac{t_1}{t_3} & \frac{t_2}{t_3} \end{bmatrix}$$

求t_3 $\quad r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$

求$\mathbf{r}_3$ $\quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$

➢ Rodrigues旋转





➢ 空间的任何一个旋转，可表达为一个向量绕旋转轴旋转给定角度。可用四元数表达：

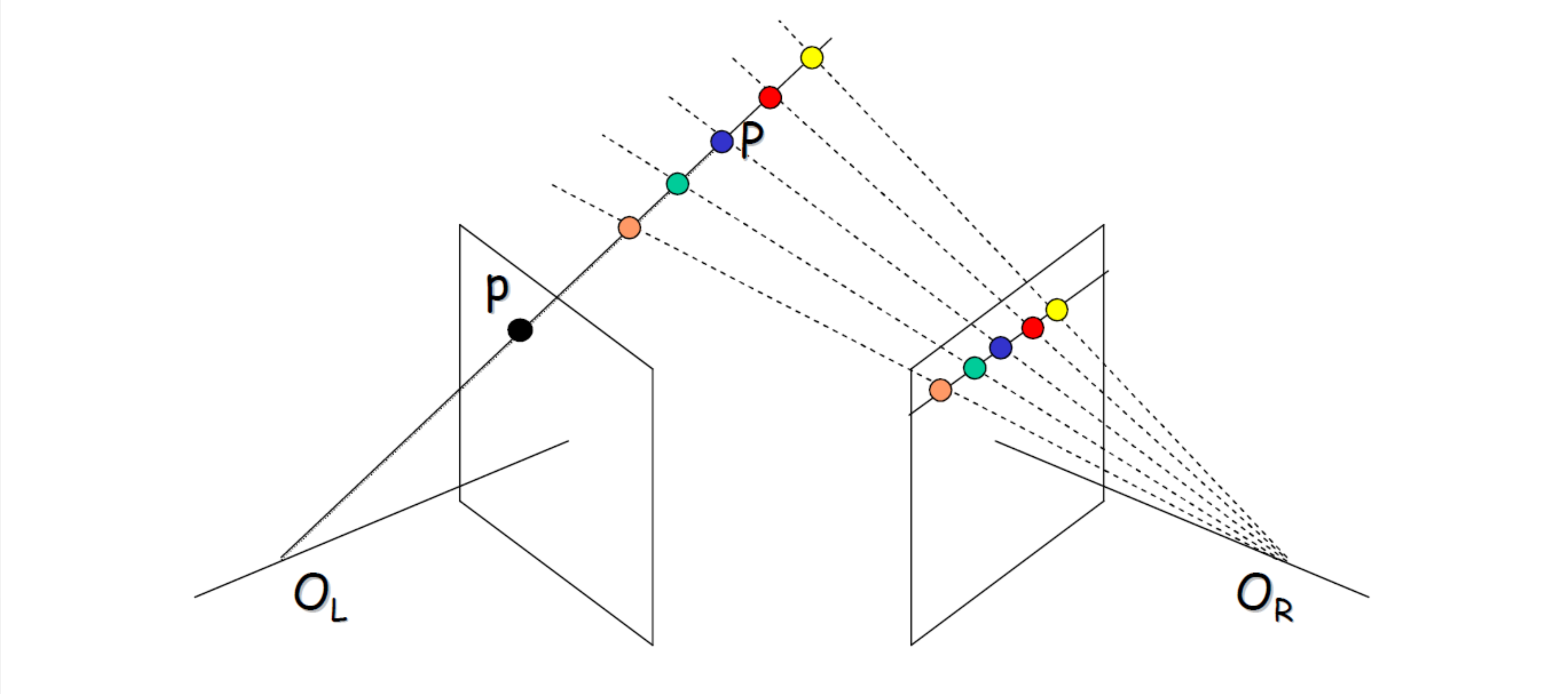
$$\mathbf{q}=\left[\cos\frac{\theta}{2}\quad n_x\sin\frac{\theta}{2}\quad n_y\sin\frac{\theta}{2}\quad n_z\sin\frac{\theta}{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

双目视觉基础

- 基本问题
- 平行双目视觉
- 演示

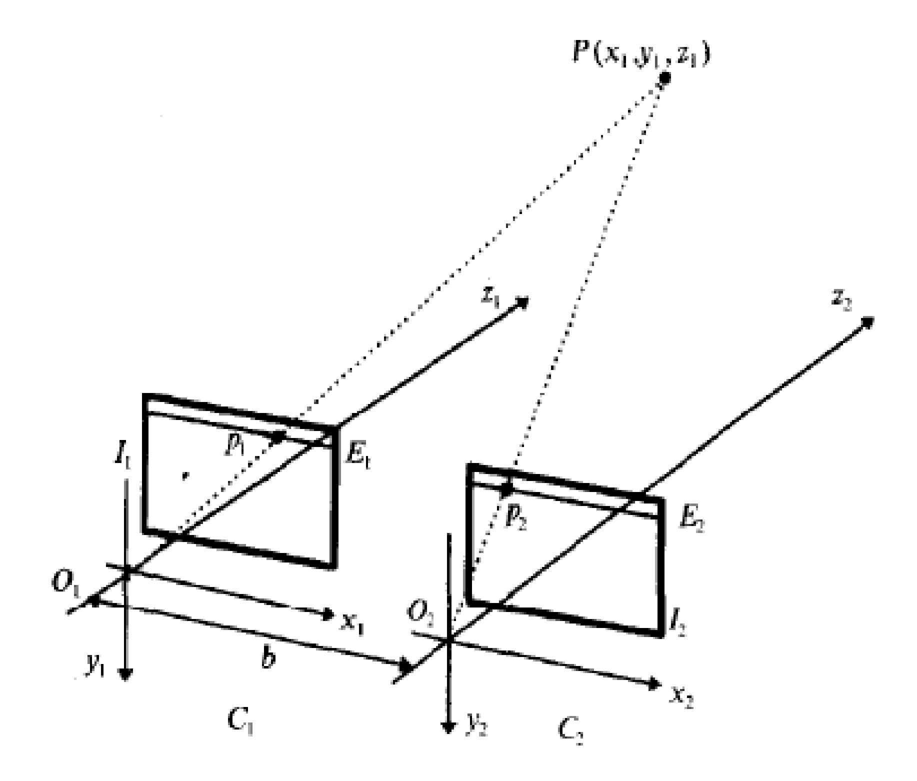
二维视角中，结构和深度是不确定的

➢ 为什么需要立体视觉？



第2个照相机可以解决这种歧义性，通过三角化实现深度测量

➢ 假设双目完全平行



$$u_1 = u_0 + f_x \frac{x_1}{z_1}$$

$$v_1 = v_0 + f_y \frac{y_1}{z_1}$$

$$u_2 = u_0 + f_x \frac{x_1 - b}{z_1}$$

$$v_2 = v_0 + f_y \frac{y_1}{z_1}$$

➢ 空间点三维座标位置求解

- 空间点坐标

$$x_1 = \frac{b(u_1 - u_0)}{u_1 - u_2}$$

基线

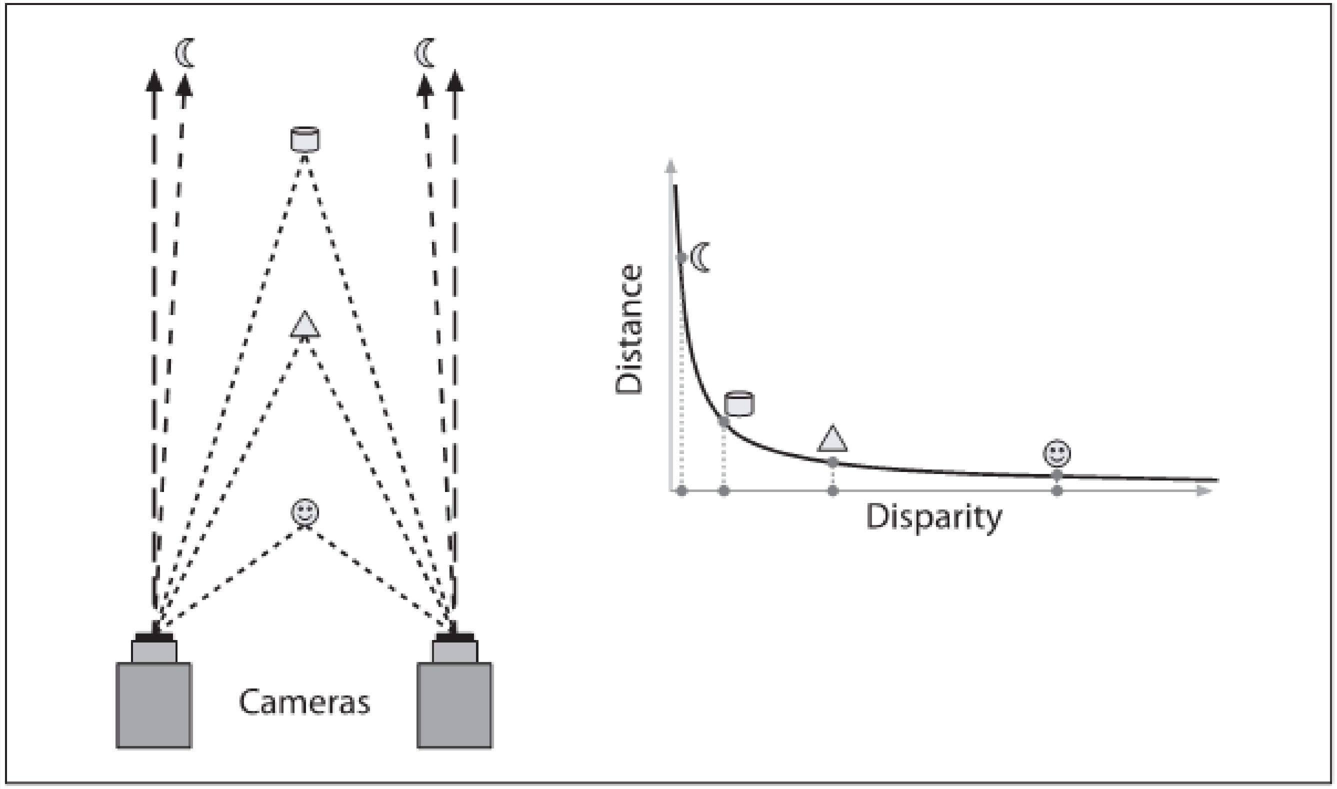
$$y_1 = \frac{bf_x(v_1 - v_0)}{f_y(u_1 - u_2)}$$

$$z_1 = \frac{bf_x}{u_1 - u_2}$$

视差

➢ 假设双目完全平行

视差和深度成反比关系 $$z_1 = \frac{bf_x}{u_1 - u_2}$$



➢ 某立体视觉系统

总结

5.1 总结

- 座标系：像平面，相机，目标，世界坐标系。
  相对位姿(平移+旋转)
- 相对位姿估计：已知三维点座标至少六个估计相对位姿；
  二维点至少四个
- 双目视觉： 平行视觉中，基线越长，精度越高

感谢各位的聆听！

Roland

AI100