CSDN公开课

计算机视觉原理及实战：
6. 极线几何与相机标定

主讲人: Roland

哈尔滨工业大学

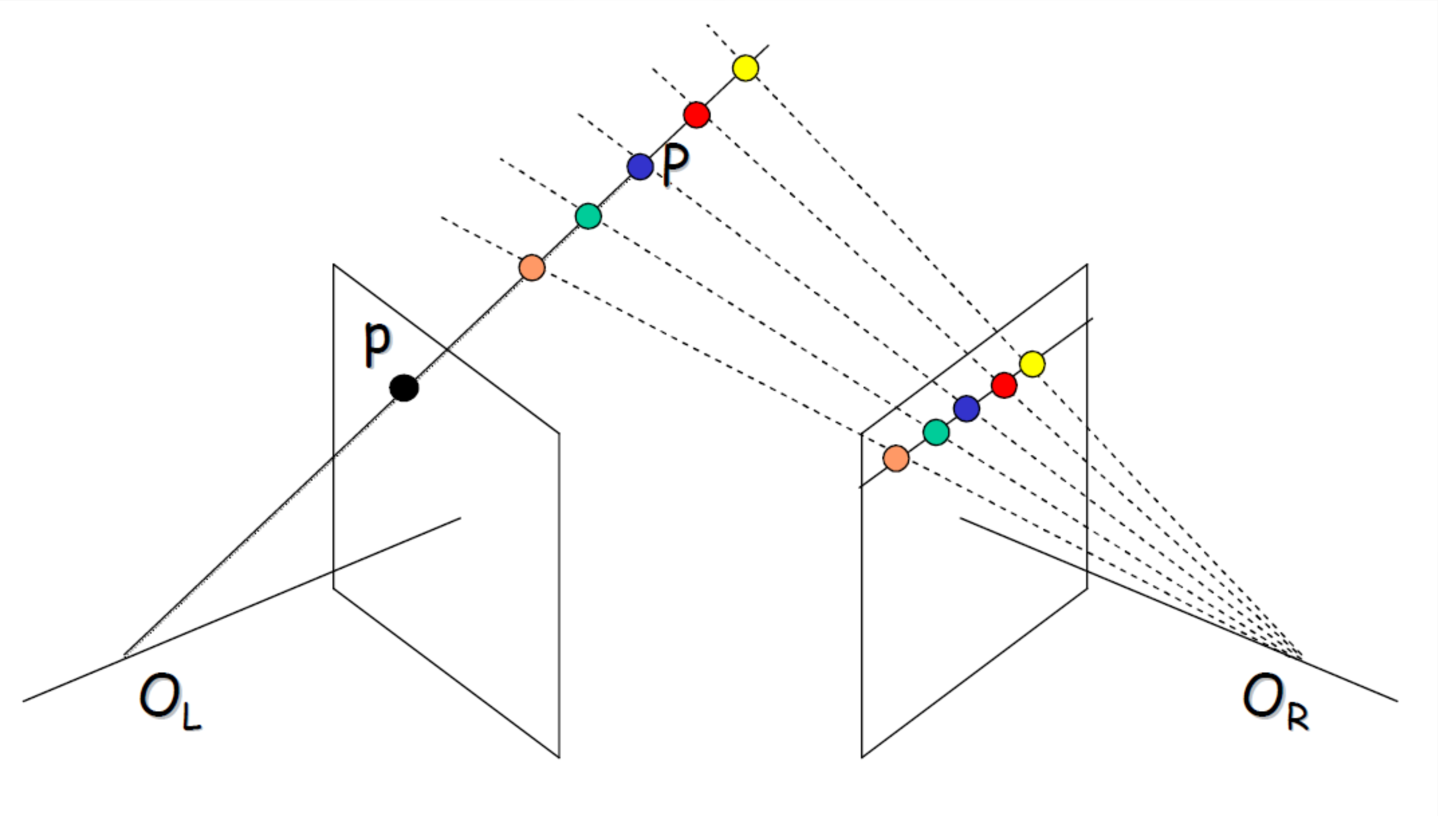
C目录
ontents

极线几何

- 极线几何与本质矩阵
- 本质矩阵求解
- 扩展

1.1 极线几何与本质矩阵

- 双目视觉对应关系——也可用于相邻二帧间的运动估计



➢ 极线几何(Epipolar geometry)

(匹配)极线约束：

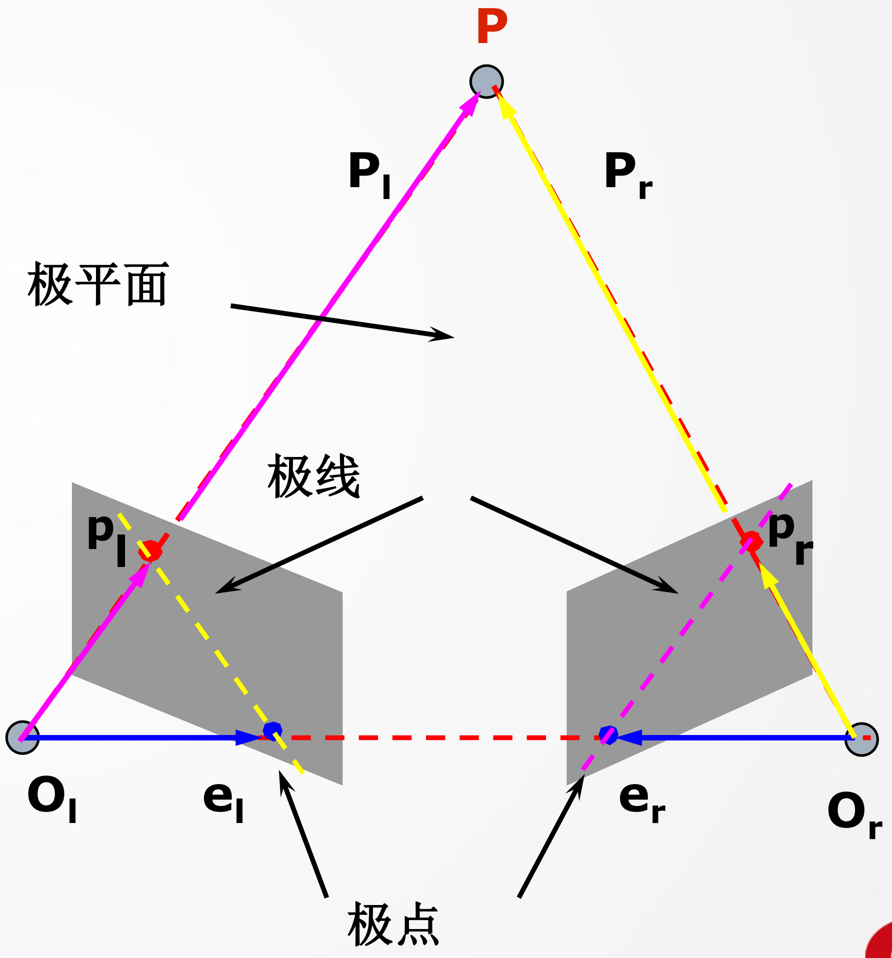
匹配点必须在极线上

基线：左右像机光心连线；

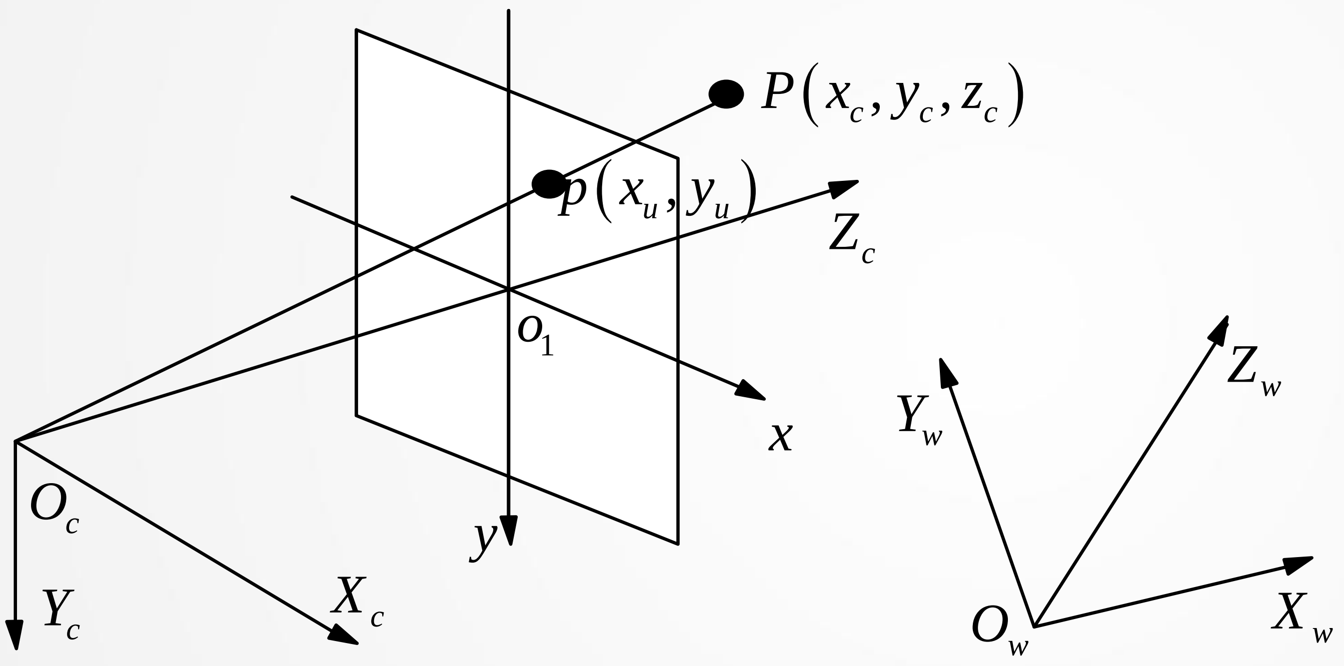
极平面：空间点，两像机光心决定的平面；

极点：基线与两摄像机图像平面的交点；

极线：极平面与图像平面交线



极线几何关系推导



图像坐标系　　相机坐标系

$$\begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_l}\begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ z_l \end{bmatrix}$$

➢ 极线几何关系推导

- 二相机坐标系某点与对应图像坐标系关系：

$$\tilde{\mathbf{p}}_l = \frac{1}{z_l}\mathbf{P}_l \qquad \tilde{\mathbf{p}}_r = \frac{1}{z_r}\mathbf{P}_r$$

- 同一点在二相机坐标系间关系：

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{R}\mathbf{P}_l + \mathbf{t}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_r = \frac{1}{z_r}\left(z_l \mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_l + \mathbf{t}\right)$$

➤ 极线几何关系推导

- 两边同叉积t： $\mathbf{t}\times\tilde{\mathbf{p}}_r = \dfrac{z_l}{z_r}\mathbf{t}\times\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_l$
- 再与 $\tilde{\mathbf{p}}_r$ 点积：

$$\tilde{\mathbf{p}}_r\cdot\left(\mathbf{t}\times\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_l\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\mathbf{p}}_r^{\mathrm{T}}[\mathbf{t}]_\times\mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_l=0}$$

$$\mathbf{t}\times\mathbf{x}=[\mathbf{t}]_\times\mathbf{x}$$

$$[\mathbf{x}]_\times=\begin{bmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\tilde{\mathbf{p}}_l=0$$

本质矩阵

➢ 本质矩阵求解——基本方程

$$\begin{bmatrix} x_r & y_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_l = 0 \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{e}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{e}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} x_r \\ & + \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} \mathbf{e}_2^{\mathrm{T}} y_r \\ & + \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} \mathbf{e}_3^{\mathrm{T}} \\ & = 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_r \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} & y_r \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = 0$$

- 本质矩阵求解——线性方程求解

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}=0 \qquad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}u_r\tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} & v_r\tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{p}}_l^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- 有九个点(非共面)时，可获得线性解：

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}=0\Rightarrow\boldsymbol{\theta}=\xi_{\min}\left(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\right) \qquad \mathbf{Q}=\mathrm{stack}\left(\mathbf{q}_i^{\mathrm{T}}\right)$$

注意解与真实解相差一个比例系数

- 本质矩阵求解——求解平移和旋转矩阵

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_\times \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} = 0$$

首先求解t： $\min \left\| \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} \right\|$

进一步求解R： $\min \left\| \mathbf{E} - [\mathbf{t}]_\times \mathbf{R} \right\|$

等价于：$\min \left\| \mathbf{E}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} - [\mathbf{t}]_\times \right\| \Rightarrow \min \sum_{j=1}^{3} \left\| \mathrm{R}\,\mathbf{e}_j - \boldsymbol{\tau}_j \right\|$

可直接求解线性方程组，然后优化R

- 基本矩阵(Fundamental matrix)

$$[u_r \quad v_r \quad 1]\mathbf{F}\begin{bmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

基本矩阵

两个对应点在像素坐标系的对应关系

(包含相机内参数信息)

相关函数

```
bool findFundamentalMat(InputArray points1, InputArray points2,
OutputArray mask, int method = FM_RANSAC, double param1 = 3., double param2
= 0.99 )
```

- *points1*，第一幅图像点的数组，大小为2xN/Nx2
- *points2*，第二幅图像点的数组

稳健估计

- 基本问题
- RANSAC
- OpenCV相关函数

稳健(robust): 对数据噪声的敏感性

- 最小二乘：非稳健 $\min\sum_i \varepsilon_i^2$
- 加权最小二乘：$\min\sum_i w_i\varepsilon_i^2$
- 基于1范数：$\min\sum_i |\varepsilon_i|$

$$w_i=\begin{cases}1 & |\varepsilon_i|\le\sigma\\ \sigma/|\varepsilon_i| & \sigma<|\varepsilon_i|\le 3\sigma\\ 0 & 3\sigma<|\varepsilon_i|\end{cases}$$

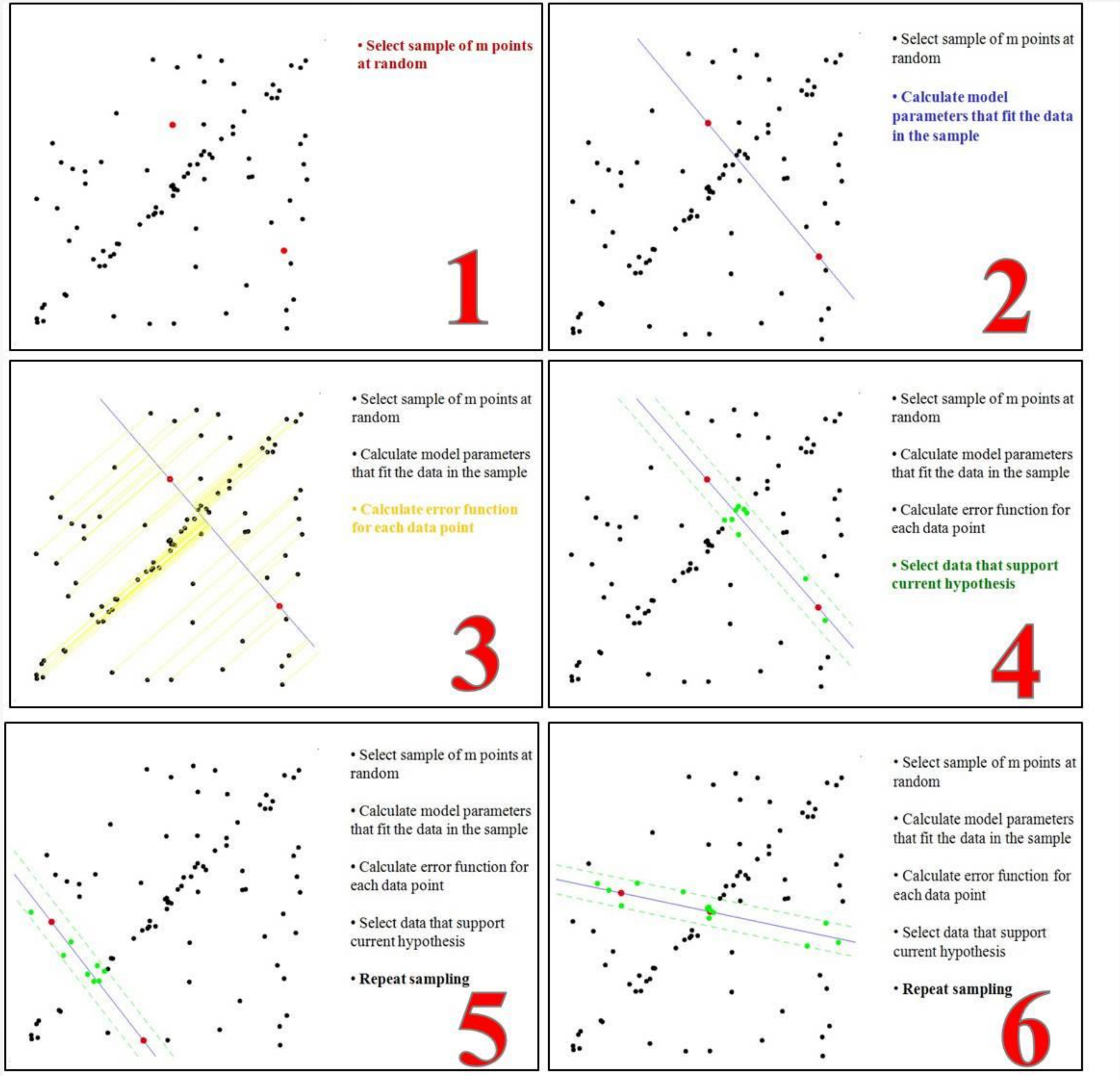
基本思想

RANSAC通过反复选择数据中的一组随机子集来达成目标。被选取的子集被假设为局内点，并用下述方法进行验证：

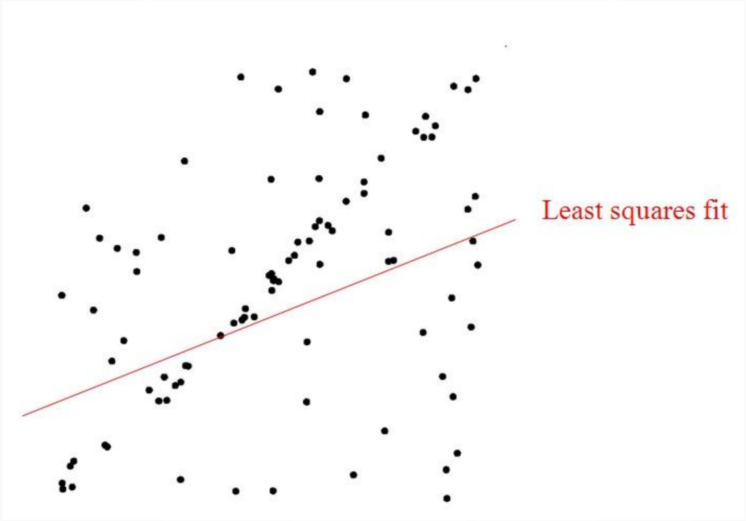
1. 有一个模型适应于假设的局内点，即所有的未知参数都能从假设的局内点计算得出。
2. 用1中得到的模型去测试所有的其它数据，如果某个点适用于估计的模型，认为它也是局内点。
3. 如果有足够多的点被归类为假设的局内点，那么估计的模型就足够合理。
4. 然后，用所有假设的局内点去重新估计模型，因为它仅仅被初始的假设局内点估计过。
5. 最后，通过估计局内点与模型的错误率来评估模型。

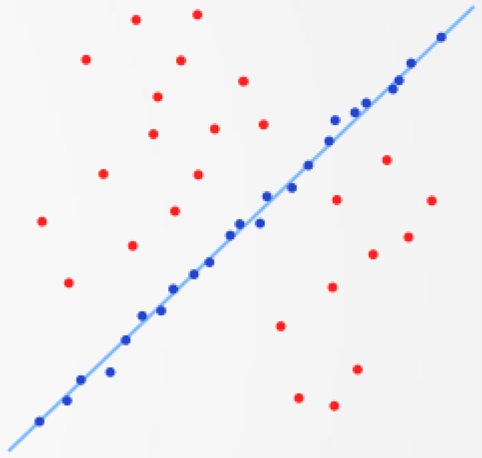
这个过程被重复执行固定的次数，每次产生的模型要么因为局内点太少而被舍弃，要么因为比现有的模型更好而被选用

基本思想示意


• Select sample of m points at random
1
• Select sample of m points at random
• Calculate model parameters that fit the data in the sample
2
• Select sample of m points at random
• Calculate model parameters that fit the data in the sample
• Calculate error function for each data point
3
• Select sample of m points at random
• Calculate model parameters that fit the data in the sample
• Calculate error function for each data point
• Select data that support current hypothesis
4
• Select sample of m points at random
• Calculate model parameters that fit the data in the sample
• Calculate error function for each data point
• Select data that support current hypothesis
• Repeat sampling
5
• Select sample of m points at random
• Calculate model parameters that fit the data in the sample
• Calculate error function for each data point
• Select data that support current hypothesis
• Repeat sampling
6

结果比较





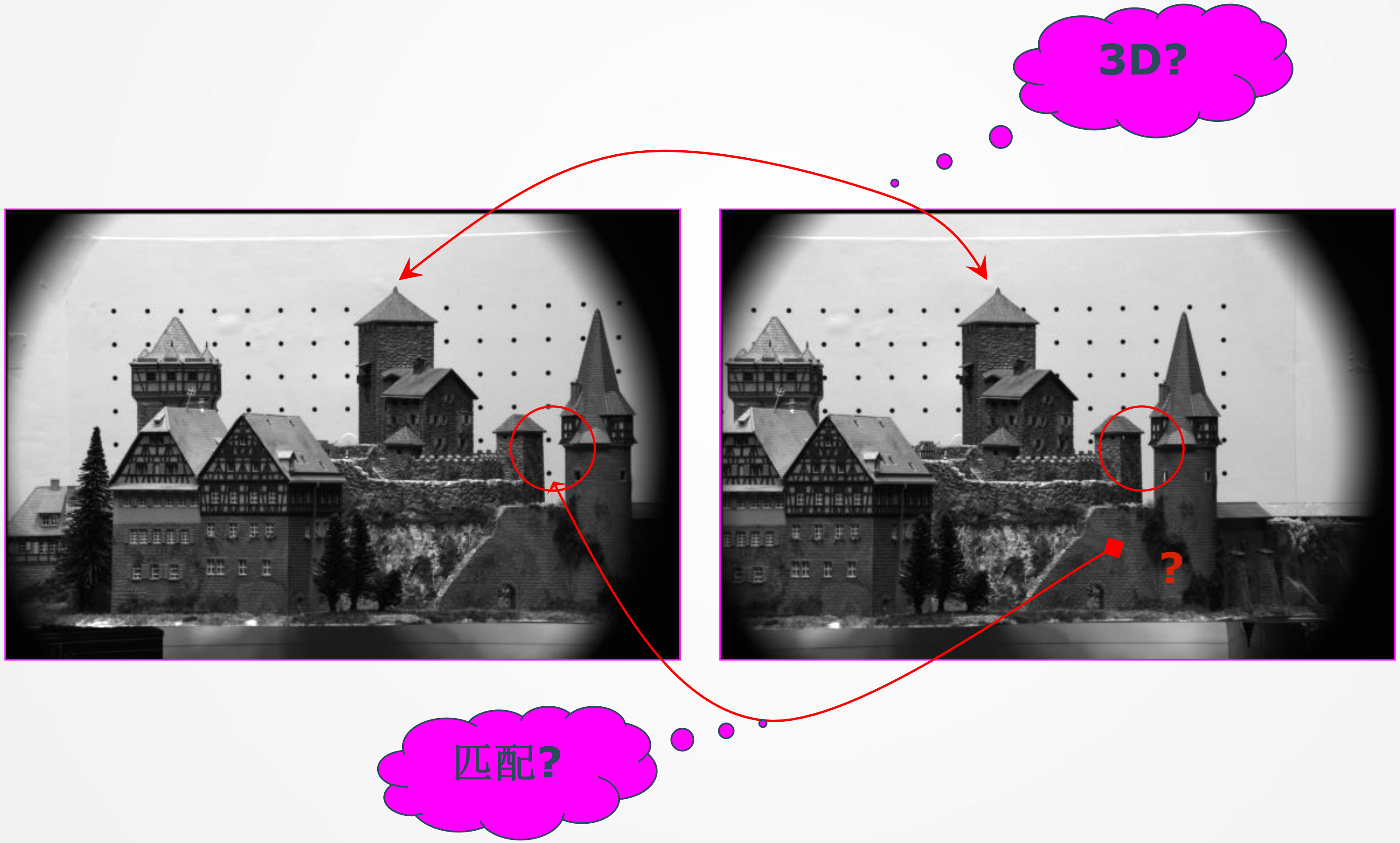
相关函数

1. solvePnPRansac
2. findFundamentalMat

立体匹配

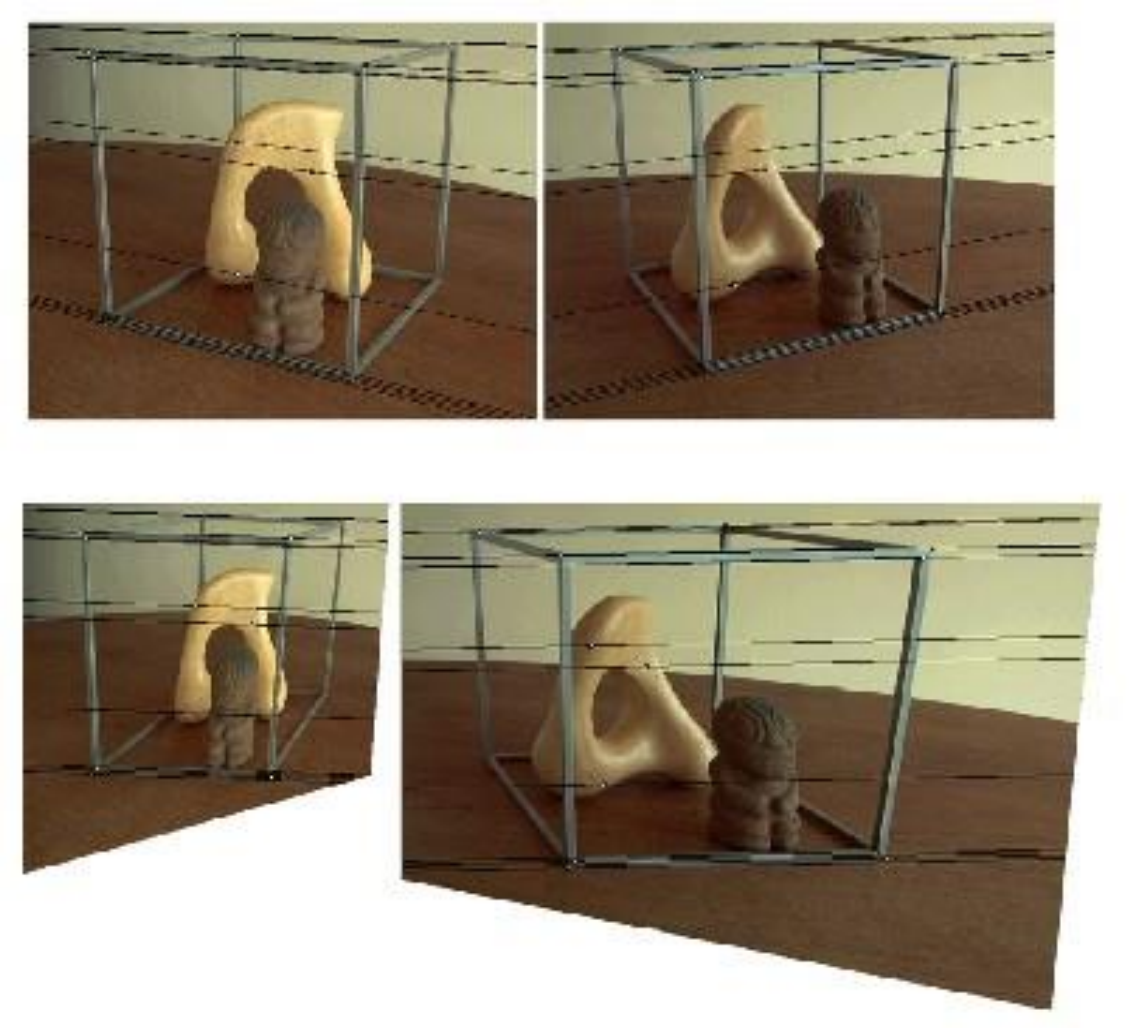
- 基本问题
- 示意

- 匹配问题（立体匹配）-> 视差图

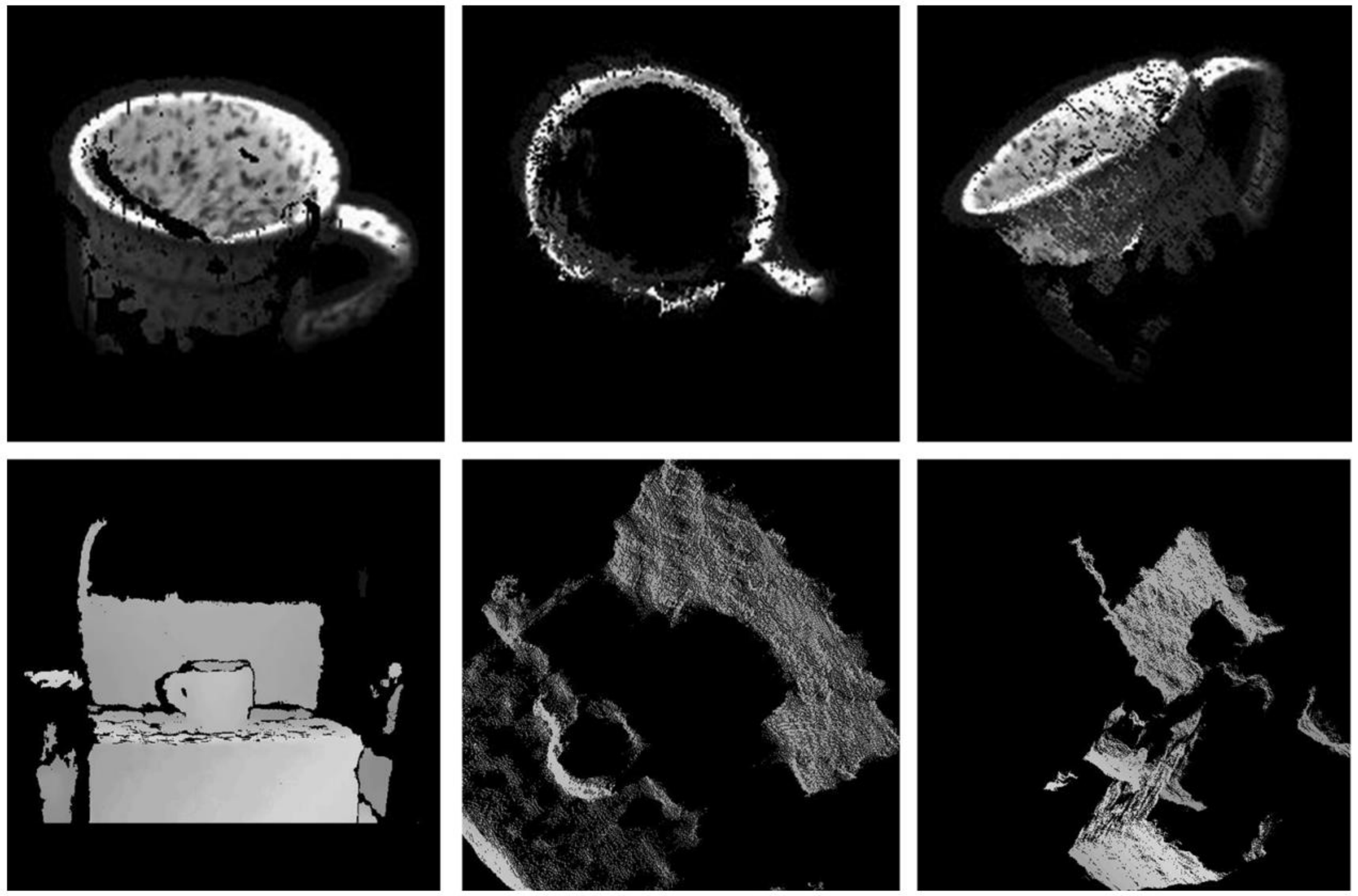


➢ 立体视觉——平行基线

➢ 立体视觉——平行校准



➢ 三维重构



➢ 相关函数

1. 立体匹配：StereoMatcher 类
   下面包括StereoBM，以及 实际使用StereoSGBM 类
2. 图像校准：stereoRectify
3. 立体标定：stereoCalibrate

相机标定

- 基本问题
- Zhang方法
- 演示

相机内外参数标定

- 考虑相机线性模型：

$$z_c\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 计算m_{ij}解
- 分解内、外参数
- 考虑非线性项

Zhang方法：由张正友提出，OpenCV等广泛使用

- 特点：使用平面靶标摆多个pose(可未知)

- 标定步骤

(1) 对一个pose,计算单应矩阵(类似M矩阵)

(2) 有三个以上Pose，根据各单应矩阵计算线性相机参数；

(3) 使用非线性优化方法计算非线性参数

➢ 第一步：求解单应矩阵——基本方程

➢ 特点：使用平面靶标摆多个pose(可未知)

$$z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \\ 1 \end{bmatrix}$$

单应矩阵H

➢ 平面靶标有四个点或更多时，可求解H(差一比例因子)

➢ 第一步：求解单应矩阵——建立内参数方程

$$\lambda\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3\end{bmatrix}=\mathbf{H}=\mathbf{M}_1\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & t\end{bmatrix}$$

令

$$\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0\\ 0 & f_y & v_0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\ \mathbf{0}_3^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$

内参　外参

$$z_c\begin{bmatrix}u\\ v\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{M}\begin{bmatrix}X_w\\ Y_w\\ Z_w\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$$

投影矩阵

- 根据**R**约束，

$$\mathbf{r}_1^T\mathbf{r}_2=0\Rightarrow\mathbf{h}_1^T\mathbf{M}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_2=0$$

$$\mathbf{r}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_2\Rightarrow\mathbf{h}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_1=\mathbf{h}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_2$$

- 对应每一个pose,可得到上述两个方程

➢ 第二步：求解内参数——建立方程

➢ 令 $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)=\mathbf{M}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_1^{-1}$

➢ 根据**B**对称，定义参数向量

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{22} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\mathbf{h}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{h}_j=\mathbf{v}_{ij}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{v}_{ij}=\begin{bmatrix} h_{i1}h_{j1} & h_{i1}h_{j2}+h_{i2}h_{j1} & h_{i2}h_{j2} & h_{i1}h_{j3}+h_{i3}h_{j1} & h_{i2}h_{j3}+h_{i3}h_{j2} & h_{i3}h_{j3} \end{bmatrix}$$

➢ 第二步：求解参数——建立内参数方程

■ 前式代入，有：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \mathbf{b} = 0$$

或记为

$$\mathbf{V}\mathbf{b} = 0$$

➢ 第二步：求解参数——内参数求解

- 当n>=3 时，可求解b

$$\mathbf{b}^* = \arg\min_{\mathbf{b}\in R^6} \|\mathbf{Vb}\|$$

- 解为 $\mathbf{b}^* = \eta \xi_{\min}$

- 前式代入，可知 $\frac{1}{\eta}\mathbf{M}_1^{-T}\mathbf{M}_1^{-1}$

- 进一步可确定$\mathbf{M}_1$各参数

第二步：求解参数—外参数求解

$$\lambda\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3\end{bmatrix}=\mathbf{M}_1\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & t\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\lambda\mathbf{M}_1^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & t\end{bmatrix}$$

- 系数 $\lambda=1/\|\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_1\|=1/\|\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_2\|$

$$\mathbf{r}_1=\lambda\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_1 \qquad \mathbf{r}_2=\lambda\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{h}_2$$

$$\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$$

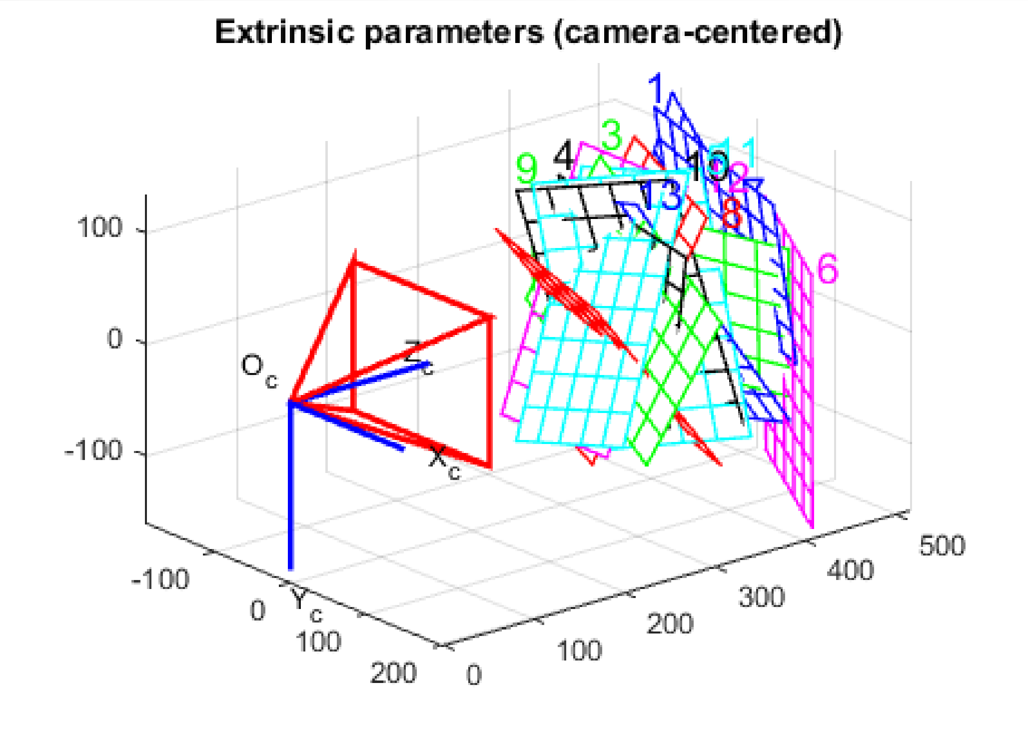
➢ 最后一步：非线性畸变参数求解

➢ 以已有解为初值，求解下式：

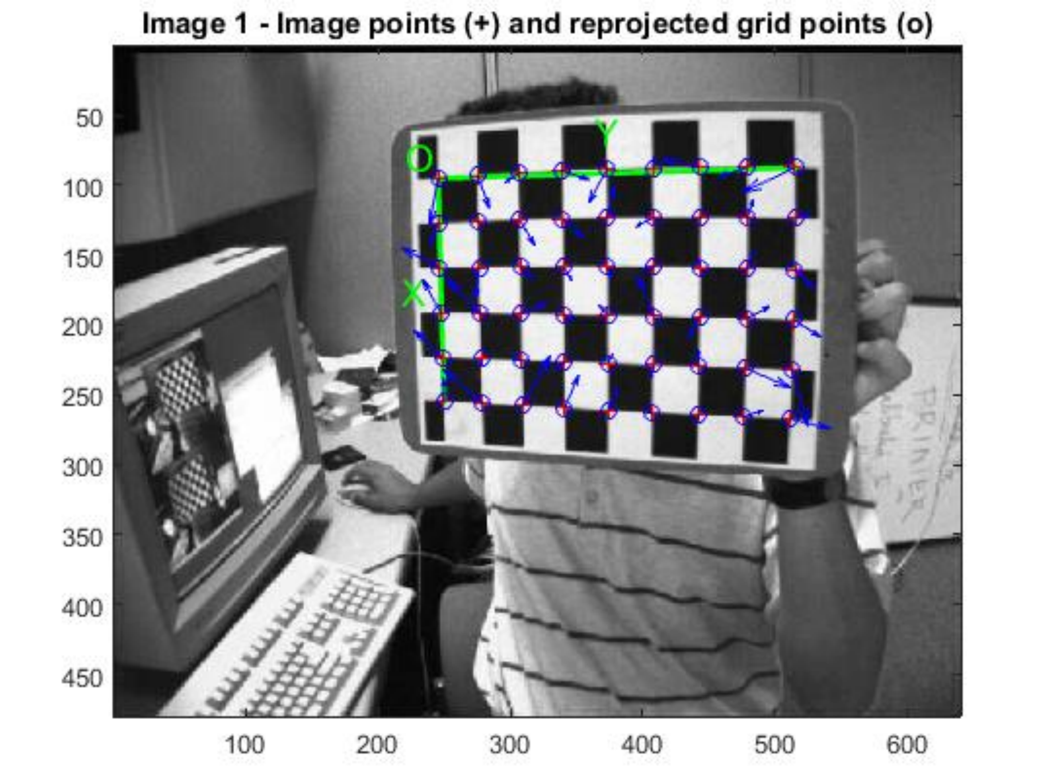
$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Omega} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\|\mathbf{p}_{ij} - \hat{\mathbf{p}}\left(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{P}_j\right)\right\|$$

可使用Levenberg-Marquardt算法求解
(原方法中只含径向畸变)

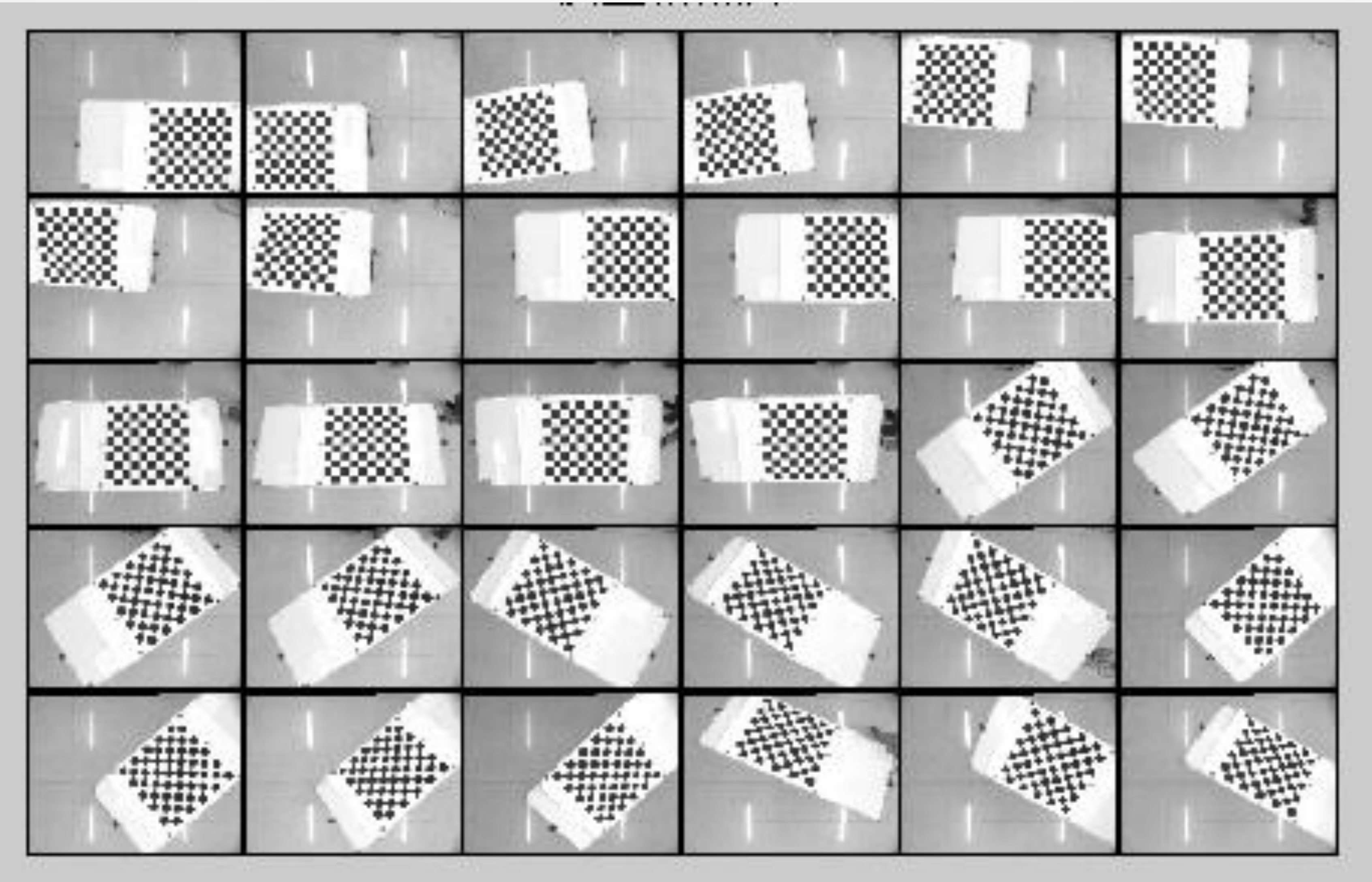
➢ 外参数标定结果示意



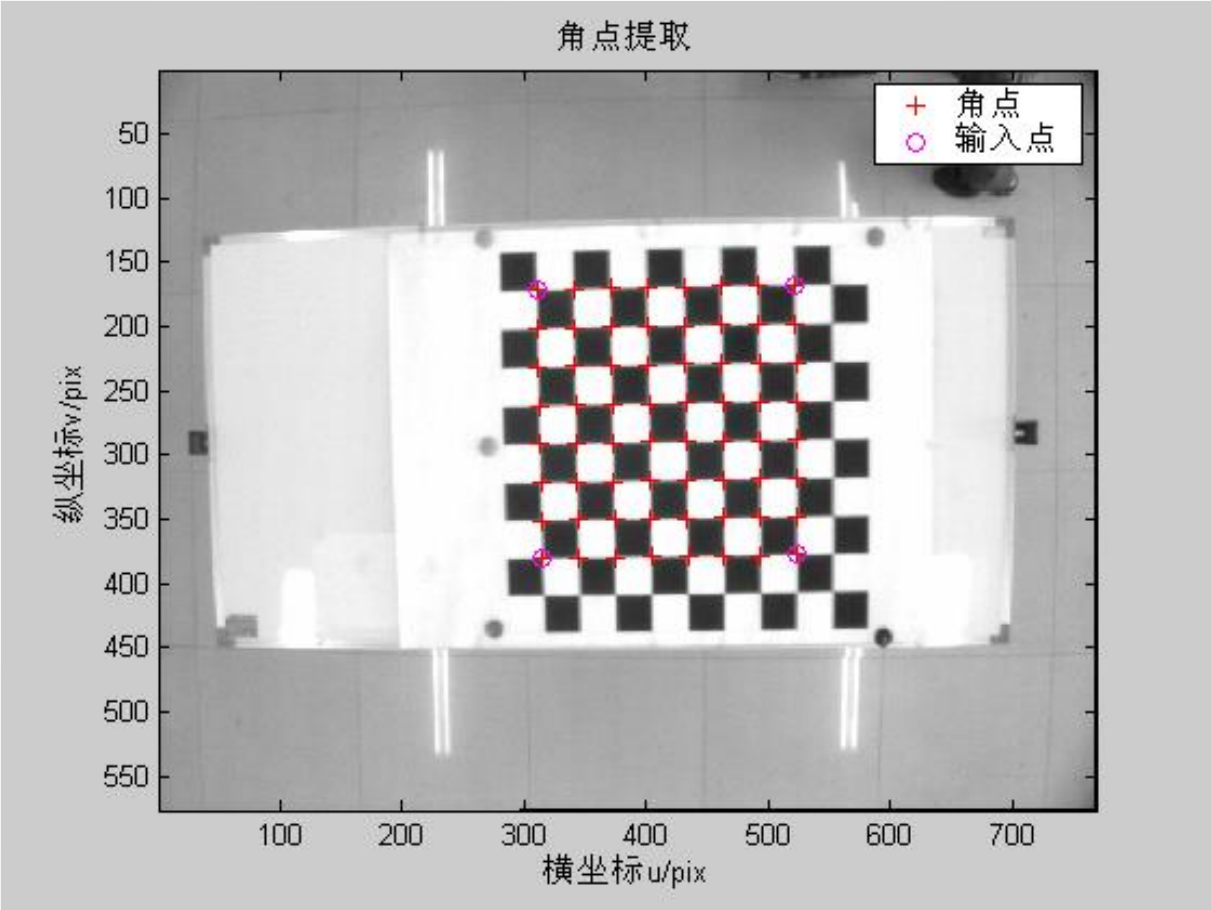
➢ 重投影示意



➤ 标定实例：使用棋盘格



➤ 某一张图片的自动角点检测结果



➢ 标定结果

f_x=1007.64777 f_y=1005.59278

u_0=364.73528 v_0=315.08950

k_1=-0.28654 k_2=0.13593

p_1=-0.00032 p_2=0.00003

s_1=0.00000 s_2=0.00000

OpenCV标定函数

```
bool calibrateCamera(InputArrayOfArrays objectPoints, InputArrayOfArrays imagePoints,Size imageSize, InputOutputArray cameraMatrix, InputOutputArray distCoeffs, OutputArrayOfArrays rvecs, OutputArrayOfArrays tvecs, int flags=0)
```

- *objectPoints*，为世界坐标系中的点集，包括多张图片的多个点，vector<vector>类型
- *imagePoints*，上述点在图像中的对应二维点，vector<vector>类型

总结

- **极线几何：** 核心是本质矩阵的估计
- **稳健估计：** 常用的是RANSAC方法
- **立体匹配：** 即确定点对应关系
- **相机标定：** 使用Zhang方法，通过多幅二维标定板成像，即可标定内外参数

感谢各位的聆听！

Roland