

Topología

Semana 1: Espacios topológicos y bases para topologías

6 - 13 de marzo de 2020

1. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Supongamos que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $U \subseteq A$. Demuestre que A es abierto.

Demostración. Sea \mathcal{U} la colección de todos los abiertos contenidos en A . Entonces, podemos escribir que $A = \bigcup \mathcal{U}$. Al ser \mathcal{U} una colección de abiertos, $\bigcup \mathcal{U}$ también es un abierto. Por tanto, A es abierto. \square

2. Considere las nueve topologías sobre $X = \{a, b, c\}$ indicadas en la siguiente imagen y compárelas.

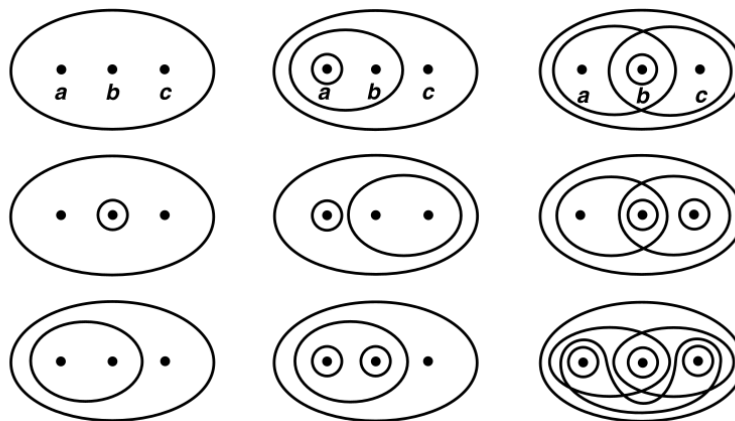


Figura 1: Nueve topologías sobre $X = \{a, b, c\}$. Tomado de §12 de [1].

Numeramos las topologías de arriba abajo y de izquierda a derecha. Presentamos los resultados en la siguiente tabla, donde todas las inclusiones son estrictas y el símbolo \times denota que las topologías no son comparables.

	\mathcal{T}_1	\mathcal{T}_2	\mathcal{T}_3	\mathcal{T}_4	\mathcal{T}_5	\mathcal{T}_6	\mathcal{T}_7	\mathcal{T}_8	\mathcal{T}_9
\mathcal{T}_1		$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_5$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_7$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_2			\times	\times	\times	\times	$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_3				$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_3$	\times	$\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_3$	\times	$\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_4					\times	$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_6$	\times	$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_5						\times	\times	\times	$\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_6							$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_6$	\times	$\mathcal{T}_6 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_7								$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_8									$\mathcal{T}_8 \subseteq \mathcal{T}_9$
\mathcal{T}_9									

3. (a) Sea X un conjunto y definamos

$$\mathcal{T}_c = \{U \subseteq X \mid U \text{ es conumerable en } X\} \cup \{\emptyset\}.$$

Demuestre que \mathcal{T}_c es una topología sobre X .

(b) Considere la colección

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es infinito}\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

¿Es una topología sobre X ?

Demostración. Notamos que \emptyset y X están en \mathcal{T}_c . El primero por definición y el segundo por ser conumerable.

Ahora supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de conjuntos de \mathcal{T}_c y demostremos que la unión de estos conjuntos también está en \mathcal{T}_c . Si la colección es vacía, este hecho se cumple dado que obtenemos el conjunto vacío. Si no, consideremos la expresión

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus U_\alpha).$$

Si algún U_α es vacío, podemos descartarlo en el lado izquierdo, ya que no afecta a la unión. Así, si suponemos que $U_\alpha \neq \emptyset$, se sigue que cada conjunto $X \setminus U_\alpha$ es finito, de forma que la expresión del lado derecho es la intersección de conjuntos finitos y debe ser, por tanto, finita. Esto implica que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ está en \mathcal{T}_c .

Sean U_1, U_2 elementos de \mathcal{T}_c y supongamos que ninguno es vacío. Entonces,

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$$

es un conjunto finito, dado que es la unión de dos conjuntos finitos. Por tanto, $U_1 \cap U_2$ está en \mathcal{T}_c . \square

Comentario. De la definición notamos que si X es un conjunto numerable, \mathcal{T}_c coincide con la topología discreta sobre X .

Para **(b)** notamos que si X es finito, $\mathcal{T}_\infty = \{\emptyset, X\}$. Por el contrario, si X es infinito, \mathcal{T}_∞ no es una topología. Consideremos un contraejemplo en \mathbb{R} . Los conjuntos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ están en \mathcal{T}_∞ , pero su unión no, dado que $\mathbb{R} \setminus ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\}$. ■

4. **(a)** Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una familia de topologías sobre X , demuestre que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X . ¿Es $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ una topología sobre X ?

(b) Demuestre que existe una única topología más grande contenida en todas las topologías $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ y que existe una única topología más pequeña que contiene a todas estas topologías.

(c) Si $X = \{a, b, c\}$, sean

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \text{ y } \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Encuentre la topología más pequeña que contiene a \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 y la topología más grande contenida en \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 .

(a) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre un conjunto X . Al estar en cada topología \mathcal{T}_α , los conjuntos X y \emptyset también están en $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$.

Si $\{U_\beta\}$ es una subcolección de $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$, se sigue que cada uno de los conjuntos U_β es un abierto en cada topología \mathcal{T}_α . Así, $\bigcup U_\beta$ también es un abierto en cada \mathcal{T}_α , de lo que se sigue que $\bigcup U_\beta \in \bigcap \mathcal{T}_\alpha$.

Ahora supongamos que U_1 y U_2 están en $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$. Se sigue que estos dos conjuntos son abiertos en cada topología \mathcal{T}_α , por lo que su intersección también es abierta en cada topología \mathcal{T}_α . Así, $U_1 \cap U_2 \in \bigcap \mathcal{T}_\alpha$.

En contraste, la unión de topologías no es necesariamente una topología. Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c\}$ y las topologías

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{b\}\} \text{ y } \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Entonces, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$, pero $\{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. ■

(b) Para ver que existe una única topología más grande contenida en todas las topologías \mathcal{T}_α notamos que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología. Esta topología está contenida en todas las topologías \mathcal{T}_α . Si \mathcal{T} es una topología que cumple con esta propiedad, se deduce que $\mathcal{T} \subseteq \bigcap \mathcal{T}_\alpha$, de forma que esta última es la topología más grande que cumple con esta propiedad.

Para demostrar que existe una única topología más pequeña que contiene a todas las topologías \mathcal{T}_α , notamos que si bien no podemos esperar que $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ sea una topología, sí es una subbase. Por el **ejercicio 5**, la topología generada por esta subbase es la topología más pequeña que contiene a los elementos de la subbase como elementos. ■

(c) La topología más grande que está contenida en \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 es

$$\bigcap \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}\}.$$

Para encontrar la topología más pequeña que contiene a \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 , primero calculamos $\bigcup \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$:

$$\bigcup \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}\}.$$

Ahora calculamos el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de la subbase:

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}\}.$$

Para obtener la topología deseada, tomamos uniones arbitrarias de elementos de \mathcal{B} . En este caso, resulta que la topología es igual a \mathcal{B} . ■

5. Demuestre que si \mathcal{A} es una base para una topología sobre X , entonces la topología generada por \mathcal{A} es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a \mathcal{A} . Pruebe lo mismo para una subbase.

Comentario. Los siguientes resultados nos dicen que si \mathcal{B} es una base, la topología generada por \mathcal{B} es la topología más pequeña que contiene que \mathcal{B} . De forma análoga, si \mathcal{S} es una subbase, la topología que genera es la topología más pequeña de entre todas las topologías que contienen a \mathcal{S} .

• Supongamos que \mathcal{A} es una base que genera una topología $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ y sea

$$\mathbf{T} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}\}.$$

Notamos que $\mathcal{T}_\mathcal{A} \in \mathbf{T}$, de forma que $\bigcap \mathbf{T} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{A}$.

Por otro lado, si U es un abierto de la topología generada por \mathcal{A} , podemos escribir

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

donde $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ son elementos de \mathcal{A} . Cada A_α pertenece a cada topología en \mathbf{T} , de lo que se sigue que su unión también debe pertenecer a cada topología contenida en \mathbf{T} . Así, $\mathcal{T}_\mathcal{A} \subseteq \bigcap \mathbf{T}$. ■

- Ahora supongamos que \mathcal{S} es una subbase y sea

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}\}.$$

Notamos que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ está en \mathcal{T} , de lo que podemos deducir que $\bigcap \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Si U es un abierto de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, es la unión de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} . Puesto que los elementos de \mathcal{S} están en cada topología de \mathcal{T} , sus intersecciones finitas también estarán en cada topología, al igual que cualquier unión de estas. Por tanto, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \bigcap \mathcal{T}$. ■

6. Demuestre que las topologías de \mathbb{R}_{ℓ} y de \mathbb{R}_K no son comparables.

- Supongamos que el abierto $[0, 1)$ de la topología de \mathbb{R}_{ℓ} es abierto en la topología de \mathbb{R}_K . Entonces, debe existir un conjunto ya sea de la forma (a, b) o de la forma $(a, b) \setminus K$ que contenga a 0 y esté contenido en $[0, 1)$ pero ninguno de estos casos es posible. ■
- El conjunto $(-1, 1) \setminus K$ es abierto en la topología de \mathbb{R}_K , pero no puede ser abierto en la topología de \mathbb{R}_{ℓ} , ya que existiría algún $[a, b)$ tal que

$$0 \in [a, b) \subseteq (-1, 1) \setminus K$$

y cualquier $[a, b)$ contendría elementos de K . ■

7. Considere las siguientes topologías sobre \mathbb{R} :

- \mathcal{T}_1 = la topología usual,
- \mathcal{T}_2 = la topología de \mathbb{R}_K ,
- \mathcal{T}_3 = la topología cofinita,
- \mathcal{T}_4 = la topología del límite superior, con todos los conjuntos $(a, b]$ como base,
- \mathcal{T}_5 = la topología con todos los conjuntos $(-\infty, a)$ como base.

Determine las posibles relaciones de inclusión entre estas topologías.

	\mathcal{T}_1	\mathcal{T}_2	\mathcal{T}_3	\mathcal{T}_4	\mathcal{T}_5
\mathcal{T}_1		(1) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$	(2) $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_1$	(3) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_4$	(4) $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_1$
\mathcal{T}_2			(5) $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_2$	(6) ✗	(7) $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_2$
\mathcal{T}_3				(8) $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_4$	(9) ✗
\mathcal{T}_4					(10) $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_4$
\mathcal{T}_5					

(1) La topología de \mathbb{R}_K es estrictamente más fina que la topología usual.

(2) Sea U un abierto de la topología cofinita. Entonces, U contiene a todos los números reales salvo una cantidad finita de estos. Supongamos que

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

son los números reales que no están en U . Podemos escribir

$$U = (-\infty, x_0) \cup (x_0, x_1) \cup \dots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, \infty).$$

Notamos que

$$(-\infty, x_0) = \bigcup \{(r, x_0) \subseteq \mathbb{R} \mid r < x_0\}$$

$$(x_n, \infty) = \bigcup \{(x_n, r) \subseteq \mathbb{R} \mid x_n < r\},$$

de forma que cada abierto de \mathcal{T}_c se puede expresar como la unión de intervalos abiertos. La inclusión es estricta: los intervalos (a, b) no son cofinitos.

(3) La topología usual es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior. Dado un intervalo (a, b) , para todo $x \in (a, b)$ tenemos que $x \in (a, x] \subseteq (a, b)$. Para ver que la inclusión es estricta, se debe notar que todos los conjuntos de la forma $(a, b]$ son abiertos en la topología del límite superior, pero no pueden serlo en la topología usual, ya que no hay forma de encontrar un intervalo abierto que incluya a b y esté contenido en $(a, b]$.

(4) Para cada $x \in (-\infty, a)$ podemos encontrar un intervalo abierto que contenga a x y esté dentro de $(-\infty, a)$. La inclusión es estricta: ningún intervalo (a, b) puede pertenecer a la topología \mathcal{T}_5 .

(5) Al ser estrictamente más gruesa que la topología usual, se sigue que la topología cofinita es estrictamente más gruesa que la topología de \mathbb{R}_K .

(6) Las topologías de \mathbb{R}_K y del límite superior no son comparables. Un argumento análogo al del **ejercicio 6** se puede hacer para probar esto, sustituyendo los conjuntos de la forma $[a, b)$ por conjuntos de la forma $(a, b]$.

(7) \mathcal{T}_5 es estrictamente más gruesa que la topología usual, de forma que también debe ser estrictamente más gruesa que la topología de \mathbb{R}_K .

(8) La topología cofinita es estrictamente más gruesa que la topología usual y esta es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior como se demostró en (2).

(9) La topología cofinita y \mathcal{T}_5 no son comparables. Por un lado, los conjuntos de la forma $(-\infty, a)$ no son cofinitos. Por otro lado, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ está en \mathcal{T}_3 , pero no hay forma que esté en \mathcal{T}_5 : de lo contrario, existiría un conjunto $(-\infty, a)$ tal que

$$2 \in (\infty, a) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Entonces, $1 \in (-\infty, a)$, aun cuando lo hemos removido del conjunto de la derecha.

(10) La topología \mathcal{T}_5 es estrictamente más gruesa que la topología usual y esta es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior, de forma que \mathcal{T}_5 es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior. ■

8. (a) Aplique el **lema 13.2** para demostrar que la colección contable

$$\mathcal{B} = \{(p, q) \subseteq \mathbb{R} \mid p < q \text{ y } p, q \in \mathbb{Q}\}$$

es una base que genera la topología estándar sobre \mathbb{R} .

(b) Demuestre que la colección

$$\mathcal{C} = \{[p, q) \subseteq \mathbb{R} \mid p < q \text{ y } p, q \in \mathbb{Q}\}$$

es una base que genera una topología diferente de la topología del límite inferior sobre \mathbb{R} .

(a) Consideremos un abierto U en la topología estándar y un elemento x de este. Entonces, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (a, b) \subseteq U$. Podemos elegir racionales p, q tales que

$$a < p < x < q < b,$$

de modo que $x \in (p, q) \subseteq (a, b) \subseteq U$. Se sigue que \mathcal{B} es una base que genera la topología estándar sobre \mathbb{R} . ■

(b) Notemos que $[\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ es abierto en la topología de \mathbb{R}_ℓ . Procedemos por contradicción. Supongamos que $[\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ es abierto en la topología generada por \mathcal{C} . Entonces, existen racionales p y q tales que $\sqrt{2} \in [p, q) \subseteq [\sqrt{2}, \frac{3}{2})$. Esto implica que $p < \sqrt{2}$ y $p > \sqrt{2}$, de lo que deducimos que $[\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ no puede pertenecer a la topología generada por \mathcal{C} .

Por otro lado, se cumple que la topología generada por \mathcal{C} es más gruesa que la topología de \mathbb{R}_ℓ , ya que todos los elementos de \mathcal{C} están en la base que genera la topología de \mathbb{R}_ℓ . ■

Rreferencia

[1] Munkres, J. R. (2014). *Topology*, segunda edición internacional. Pearson Education.