

Topología

Semanas 4 y 5: Continuidad y homeomorfismos

27 de marzo - 10 de abril de 2020

1. Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que \mathcal{B} es una base para la topología sobre Y . Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto para todo $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. (\Rightarrow) Si f es continua, se sigue que la preimagen de cualquier abierto en Y es abierta en X . En particular, la preimagen de cualquier elemento de la base \mathcal{B} es abierta.

(\Leftarrow) Ahora tomemos un abierto V en Y y mostremos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Entonces,

$$V = \bigcup_{i \in J} B_i,$$

de forma que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i).$$

Al ser la unión de conjuntos abiertos, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto. \square

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(q) = 0$ para todo racional q . Mostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Puesto que f es continua, se cumple que

$$f(\text{cl}(\mathbb{Q})) \subseteq \text{cl}(f(\mathbb{Q})),$$

es decir,

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \{0\}.$$

Por la hipótesis, sabemos que $\{0\} \subseteq f(\mathbb{R})$. A partir de esto, deducimos que $f(\mathbb{R}) = \{0\}$. \square

Demostración. Sea x irracional y supongamos que $f(x) \neq 0$. Puesto que \mathbb{R} es T_1 , podemos encontrar un entorno U de $f(x)$ que no contenga a 0. Se sigue, por la continuidad de f , que $f^{-1}(U)$ es abierto. Del hecho que U es abierto, podemos deducir que existe un racional q en $f^{-1}(U)$. Esto implicaría que $0 = f(q) \in U$, lo cual es una contradicción. \square

3. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es continua. Si x es un punto límite del subconjunto A de X , ¿es necesariamente cierto que $f(x)$ es un punto límite de $f(A)$?

• No es necesariamente cierto. Podría ser que el conjunto Y no tenga puntos límite. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ es una función continua. Consideremos $A = (2, 3)$. Entonces, 2 es un punto límite de A , pero $f(2) = 1$ no es un punto límite de $f(A) = \{1\}$: este conjunto no tiene puntos límite.

4. Consideremos $\text{id} : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(i) La función id es continua si y solo si \mathcal{T}_1 es más fina que \mathcal{T}_2 .

(ii) La función id es un homeomorfismo si y solo si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Demostración. (i) (\Rightarrow) Supongamos que id es continua y consideremos un abierto V en \mathcal{T}_2 . Entonces, $\text{id}^{-1}(V) = V$ es abierto en \mathcal{T}_1 , de modo que \mathcal{T}_1 debe ser más fina que \mathcal{T}_2 .

(\Leftarrow) Ahora supongamos que \mathcal{T}_1 es más fina que \mathcal{T}_2 . Entonces, al tomar un abierto V de \mathcal{T}_2 , sabemos que $\text{id}^{-1}(V) = V$ también será abierto en \mathcal{T}_1 , de lo que concluimos que id es continua.

(ii) (\Rightarrow) Supongamos que id es un homeomorfismo. Entonces, si $U \in \mathcal{T}_1$, sabemos que $\text{id}(U) = U \in \mathcal{T}_2$, de forma que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. De forma análoga, si $V \in \mathcal{T}_2$, $\text{id}^{-1}(V) = V$ es abierto en \mathcal{T}_1 , de manera que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

(\Leftarrow) Si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, se sigue inmediatamente $\text{id} = \text{id}^{-1}$ es continua. \square

5. Todos los subespacios (a, b) de \mathbb{R} son homeomorfos.

Demostración. • Sea (a, b) arbitrario. Mostramos que $(0, 1) \cong (a, b)$. Consideremos la función $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ dada por $f(x) = a(1 - x) + bx$. La función $g : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ dada por $g(x) = (x - a)/(b - a)$ es inversa de f , de lo que deducimos que f es biyectiva.

Ahora mostramos que f es continua. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \cap (c, d) \subseteq \mathbb{R} \mid c < d\} = \{(c, d) \subseteq \mathbb{R} \mid a \leq c < d \leq b\}$$

es una base para la topología sobre (a, b) . Consideremos $(c, d) \subseteq (a, b)$. Entonces,

$$f^{-1}((c, d)) = \left(\frac{c - a}{b - a}, \frac{d - a}{b - a} \right) \subseteq (0, 1)$$

es abierto en la topología sobre $(0, 1)$. Así, la preimagen de todo básico de (a, b) es abierta, de lo que se sigue que f es continua.

Para mostrar que g es continua, tomemos un intervalo $(k, l) \subseteq (0, 1)$. Entonces,

$$g^{-1}((k, l)) = (a(1 - k) + bk, a(1 - l) + bl) \subseteq (a, b),$$

de forma que g^{-1} es continua.

Así, hemos demostrado que $(0, 1) \cong (a, b)$. Puesto que la relación entre dos espacios de ser homeomorfos es una relación de equivalencia, podemos deducir que todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} son homeomorfos. \square

6. Sea $\{A_i\}_{i \in J}$ una familia de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{i \in J} A_i$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_i}$ es continua para todo $i \in J$.

(a) Mostrar que si la colección $\{A_i\}_{i \in J}$ es finita y cada A_i es cerrado, entonces f es continua.

(b) Encontrar un ejemplo donde la colección $\{A_i\}_{i \in J}$ sea contable y cada A_i cerrado, pero f no sea continua.

(c) Una colección de subconjuntos de un espacio X se denomina **localmente finita** si cada $x \in X$ tiene un entorno que interseca solo a una cantidad finita de conjuntos en la colección. Mostrar que si $\{A_i\}_{i \in J}$ es localmente finita y cada A_i es cerrado, entonces f es continua.

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_{i \in J}$ es finita y que cada uno de estos conjuntos es cerrado. Sea C un cerrado de Y . Entonces,

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i \in J} (f|_{A_i})^{-1}(C).$$

Al ser una unión finita de conjuntos cerrados, se sigue que $f^{-1}(C)$ es cerrado. Por tanto, la función f es continua. \square

- Consideremos $X = \mathbb{Z}$ con la topología cofinita y $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(m) = m$, donde \mathbb{R} está equipado con la topología usual. Entonces, podemos escribir

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{m\}$$

Al ser conjuntos finitos, todos los conjuntos unipuntuales $\{m\}$ son cerrados en \mathbb{Z} con la topología cofinita.

Notamos que cada restricción $f|_{\{m\}}$ es continua: todas son funciones constantes. Sin embargo,

$$f^{-1}((1, 5)) = \{2, 3, 4\}.$$

Notamos que $(1, 5)$ es abierto en \mathbb{R} con la topología usual, pero $\{2, 3, 4\}$ no es abierto en \mathbb{Z} con la topología cofinita.

El ejemplo anterior está relacionado con la siguiente proposición.

Proposición. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es continua, donde X es un conjunto infinito equipado con la topología cofinita y Y es un espacio de Hausdorff. Entonces, f es constante.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existen x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Puesto que Y es de Hausdorff, existen entornos disjuntos U de $f(x_1)$ y V de $f(x_2)$. Se sigue que el conjunto $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ es abierto en X . Sin embargo, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Entonces,

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)) = X \setminus f^{-1}(U) \cup X \setminus f^{-1}(V)$$

lo que contradice el hecho que X es infinito. □

Ahora vamos a la demostración de (c).

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es localmente finita y que cada A_i es cerrado. Sea C cerrado en Y . Definimos $C_i = (f|_{A_i})^{-1}(C)$ para cada $i \in I$. Por hipótesis, esta es una colección de conjuntos cerrados. Además, es localmente finita: consideremos x en X y el entorno U de x que interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\{A_i\}_{i \in I}$. Es decir, el conjunto

$$\{i \in I \mid U \cap A_i \neq \emptyset\}$$

es finito. Notamos que para cada $i \in I$, $C_i \subseteq A_i$. Consideramos el conjunto U como el entorno candidato de x que interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\{C_i\}_{i \in I}$. Entonces, se cumple que

$$\{i \in I \mid U \cap C_i \neq \emptyset\} \subseteq \{i \in I \mid U \cap A_i \neq \emptyset\},$$

de forma que el conjunto de la derecha debe ser finito y $\{C_i\}_{i \in I}$ localmente finita. Así,

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i \in I} (f|_{A_i})^{-1}(C) = \bigcup_{i \in I} C_i$$

es cerrado, al ser la unión de una colección localmente finita de cerrados. Por tanto, la función f es continua. \square

7. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ localmente finita. Entonces, toda colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es localmente finita.

Demostración. Consideremos x en X y un entorno U de x que solo interseca una cantidad finita de elementos de \mathcal{A} . Es decir, el conjunto

$$\{A \in \mathcal{A} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$$

es finito. Además, contiene al conjunto

$$\{B \in \mathcal{B} \mid U \cap B \neq \emptyset\}$$

de forma que este conjunto también debe ser finito. Así, para todo x en X existe un entorno que interseca solo a una cantidad finita de elementos de \mathcal{B} . \square

8. Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow D$ funciones continuas. La función $f \times g : A \times C \rightarrow B \times D$ definida mediante la ecuación

$$(f \times g)(a, c) = (f(a), g(c))$$

es continua.

Demostración. Sea $U \times V$ un elemento básico de la topología sobre $B \times D$. Entonces,

$$(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V).$$

Puesto que f y g son continuas, se sigue que los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son abiertos en A y C , respectivamente, de forma que su producto es abierto en $A \times C$. Así, la preimagen de todo elemento básico es abierta, de lo que se sigue que $f \times g$ es continua. \square

9. Consideremos una función $F : X \times Y \rightarrow Z$. Decimos que F es **continua en cada variable separadamente** si

(i) para cada $y_0 \in Y$, la función $h_{y_0} : X \rightarrow Z$ definida mediante $h(x) = F(x, y_0)$ es continua

(ii) y para cada $x_0 \in X$, la función $k_{x_0} : Y \rightarrow Z$ definida mediante $k(y) = F(x_0, y)$ es continua.

Si F es continua, se sigue que F es continua en cada variable separadamente.

Demostración. • Sea $y_0 \in Y$ arbitrario y supongamos que F es continua. Si W es abierto en Z , queremos mostrar que $h_{y_0}^{-1}(W)$ es abierto en X . Por definición,

$$h^{-1}(W) = \{x \in X \mid h(x) = F(x, y_0) \in W\}$$

$$F^{-1}(W) = \{(x, y) \in X \times Y \mid F(x, y) \in W\}.$$

Por la continuidad de F , este último conjunto es abierto. Notamos que

$$h^{-1}(W) \times \{y_0\} = F^{-1}(W) \cap (X \times \{y_0\}).$$

El conjunto anterior es abierto en el subespacio $X \times \{y_0\}$ de $X \times Y$. Ahora consideremos la función $f : X \rightarrow X \times \{y_0\}$ dada por

$$f(x) = (x, y_0).$$

Esta función es continua, dado que sus funciones coordenadas son continuas: la primera es la función identidad de X a X y la segunda es la función constante de X a $\{y_0\}$. Ahora, puesto que $h^{-1}(W) \times \{y_0\}$ es abierto en $X \times \{y_0\}$ y f es continua, se sigue que

$$f^{-1}(h^{-1}(W) \times \{y_0\}) = h^{-1}(W)$$

es abierto en X .

• Un argumento análogo muestra la continuidad de F implica que para cada x_0 en X , la función k es continua. \square

10. Sea $A \subseteq X$ y $f : A \rightarrow Y$ continua, donde Y es un espacio de Hausdorff. Si f se puede extender a una función continua $g : \bar{A} \rightarrow Y$, entonces g es única.

Demostración. Supongamos que existen dos funciones continuas $g_1, g_2 : \bar{A} \rightarrow Y$ tales que

$$g_1|_A = g_2|_A = f.$$

Puesto que g_1 y g_2 son continuas y Y es Hausdorff, se sigue que

$$C = \{x \in \bar{A} \mid g_1(x) = g_2(x)\}$$

es cerrado en \bar{A} , de lo que se sigue que es cerrado en X . Notamos que $A \subseteq C$, de modo que se debe cumplir que $\bar{A} \subseteq C$. Así, $\bar{A} = C$ y se sigue que $g_1 = g_2$. \square

Demostración. También podemos proceder por contradicción. Supongamos que existe un $x \in \bar{A}$ tal que $g_1(x) \neq g_2(x)$. Usando el hecho que Y es de Hausdorff, deducimos que existen entornos U de $g_1(x)$ y V de $g_2(x)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por la continuidad de g_1 y de g_2 , se sigue que el conjunto

$$g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$$

es un entorno de x . Puesto que $x \in \bar{A}$, se sigue que existe un x' en

$$A \cap g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$$

A partir de esto podemos deducir que U y V no son disjuntos: contienen el punto $g_1(x') = g_2(x')$, lo cual contradice nuestra suposición anterior. Entonces, debe ser el caso que $g_1 = g_2$. \square

11. Si f y g son dos funciones continuas que van de X a un espacio de Hausdorff Y , el conjunto

$$W = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en X .

Demostración. Mostramos que

$$X \setminus W = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

es abierto. Si x está en $X \setminus W$, se sigue que $f(x) \neq g(x)$. Puesto que Y es Hausdorff, existen entornos disjuntos U de $f(x)$ y V de $g(x)$. Definamos

$$O := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

Entonces, $x \in O$. Notamos que para cualquier y en O , se debe cumplir que $f(y) \neq g(y)$: esto se deduce del hecho que U y V son disjuntos. Así, concluimos que $O \subseteq X \setminus W$.

Para un punto arbitrario de $X \setminus W$, hemos encontrado un entorno contenido en este conjunto, de lo que se sigue que es abierto. \square

Una demostración fallida. Al ver el problema anterior, una idea que puede surgir es usar la diagonal Δ de Y . Definamos $h : X \rightarrow Y \times Y$ como

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Puesto que ambas funciones coordenadas son continuas, se sigue que h es continua. Del hecho que Y es Hausdorff, podemos deducir que la diagonal Δ es cerrada en $Y \times Y$. Si se cumple que

$$h^{-1}(\Delta) = W$$

habremos demostrado que W es cerrado. La demostración que $W \subseteq h^{-1}(\Delta)$ no presenta problemas: todos los puntos de W son enviados por h a la diagonal Δ . Sin embargo, cuando queremos demostrar que $h^{-1}(\Delta) \subseteq W$, nos encontramos con el problema que f y g pueden no ser sobreyectivas: puede existir $y \in Y$ al que no llega ni f ni g , de forma que (y, y) estaría en Δ pero no en $h(W)$.

La proposición siguiente es una generalización **11** en §1.

12. Supongamos que f y g son funciones continuas que van de un espacio X a un espacio de Hausdorff Y . Si A es un subconjunto denso de X y f y g son iguales en todos los puntos de A , se sigue que son iguales en todos los puntos de X .

Demostración. Por el problema anterior, podemos deducir que

$$W = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en X . Notemos que $A \subseteq W$, de modo que $X = \text{cl}(A) \subseteq W$. Se sigue que $f = g$. \square

Lo anterior se puede reformular como que una función continua que toma valores en un espacio de Hausdorff está determinada por sus valores en un conjunto denso.

13. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección localmente finita de conjuntos cerrados en un espacio X . Entonces, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Mostramos que $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto. Sea x un elemento de $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ y U el entorno de x que interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\{A_i\}_{i \in I}$.

Caso I. U no interseca a ningún elemento de $\{A_i\}_{i \in I}$. Entonces, $U \subseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$.

Caso II. Supongamos que U interseca solo a los conjuntos A_1, \dots, A_n . Notamos que $\bigcup_{i=1}^n A_i$, al ser una unión finita de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado. Entonces,

$$U \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$$

es un conjunto abierto que cumple que

$$x \in U \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$$

de lo que concluimos que $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto. \square

14. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X . La función característica de A , $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

La función χ_A es continua si y solo si A es clopen.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que χ_A es continua. Entonces, los conjuntos

$$\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$$

$$\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$$

son cerrados en X , de lo que deducimos que A es clopen en X .

(\Leftarrow) Supongamos que A es clopen en X . Demostramos que $\chi_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ es continua, donde $\{0, 1\}$ está equipado con la topología discreta. Entonces,

$$\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$$

$$\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$$

$$\chi_A^{-1}(\{0, 1\}) = X$$

$$\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Así, χ_A trae conjuntos abiertos a conjuntos abiertos, de lo que deducimos que es continua. Puesto que $\chi_A(X) = \{0, 1\}$ y $\{0, 1\}$ con la topología discreta es un subespacio de \mathbb{R} con la topología usual, concluimos que χ_A es continua como función de X a \mathbb{R} . \square

15. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X . La función característica de A , χ_A , es continua en $x \in X$ si y solo si $x \notin \partial A$.

16. Un espacio X es discreto si y solo si toda función $f : X \rightarrow Y$ es continua, para cualquier espacio Y .

Demostración. (\Leftarrow) En particular, la función identidad de X a X con la topología discreta es continua, de lo que deducimos que $i^{-1}(\{x\}) + \{x\}$ es abierto en X para cualquier $x \in X$. Se sigue que X debe ser discreto.

(\Rightarrow) Ahora supongamos que X es discreto y sea $f : X \rightarrow Y$ arbitraria, donde Y es un espacio topológico. Si tomamos un abierto U de Y , $f^{-1}(U)$ es un subconjunto de X , de lo que se sigue que $f^{-1}(U)$ es abierto en X para cualquier U abierto en Y . Por tanto, f es continua. \square