Topología

Semanas 4 y 5: Continuidad y homeomorfismos

27 de marzo - 10 de abril de 2020

§1

2. Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología sobre Y. Una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto para todo $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si f es continua, se sigue que la preimagen de cualquier abierto en Y es abierta en X. En particular, la preimagen de cualquier elemento de la base $\mathcal{B}$ es abierta.
($\Leftarrow$) Ahora tomemos un abierto V en Y y mostremos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Entonces,

$$V = \bigcup_{i \in J} B_i,$$

de forma que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i).$$

Al ser la unión de conjuntos abiertos, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto. $\square$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(q) = 0$ para todo racional q. Mostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Puesto que f es continua, se cumple que

$$f(\mathrm{cl}(\mathbb{Q})) \subseteq \mathrm{cl}(f(\mathbb{Q})),$$

es decir,

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \{0\}.$$

Por la hipótesis, sabemos que $\{0\} \subseteq f(\mathbb{R})$. A partir de esto, deducimos que $f(\mathbb{R}) = \{0\}$. $\square$

Demostración. Sea x irracional y supongamos que $f(x) \neq 0$. Puesto que $\mathbb{R}$ es T_1, podemos encontrar un entorno U de $f(x)$ que no contenga a 0. Se sigue, por la continuidad de f, que $f^{-1}(U)$ es abierto. Del hecho que U es abierto, podemos deducir que existe un racional q en $f^{-1}(U)$. Esto implicaría que $0 = f(q) \in U$, lo cual es una contradicción. □

§2

2. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Si x es un punto límite del subconjunto A de X, ¿es necesariamente cierto que $f(x)$ es un punto límite de $f(A)$?

• No es necesariamente cierto. Podría ser que el conjunto Y no tenga puntos límite. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ es una función continua. Consideremos $A = (2, 3)$. Entonces, 2 es un punto límite de A, pero $f(2) = 1$ no es un punto límite de $f(A) = \{1\}$: este conjunto no tiene puntos límite.

3. Consideremos $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(i) La función id es continua si y solo si $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$.

(ii) La función id es un homeomorfismo si y solo si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Demostración. (i) ($\Rightarrow$) Supongamos que id es continua y consideremos un abierto V en $\mathcal{T}_2$. Entonces, $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ es abierto en $\mathcal{T}_1$, de modo que $\mathcal{T}_1$ debe ser más fina que $\mathcal{T}_2$.
($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$. Entonces, al tomar un abierto V de $\mathcal{T}_2$, sabemos que $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ también será abierto en $\mathcal{T}_1$, de lo que concluimos que id es continua.

(ii) ($\Rightarrow$) Supongamos que id es un homeomorfismo. Entonces, si $U \in \mathcal{T}_1$, sabemos que $\mathrm{id}(U) = U \in \mathcal{T}_2$, de forma que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. De forma análoga, si $V \in \mathcal{T}_2$, $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ es abierto en $\mathcal{T}_1$, de manera que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.
($\Leftarrow$) Si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, se sigue inmediatamente $\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1}$ es continua. □

5. Todos los subespacios (a, b) de $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Similarmente, todos los subespacios de $\mathbb{R}$ de la forma $[a, b]$ son homeomorfos.

Demostración. • Sea (a, b) arbitrario. Mostramos que $(0, 1) \cong (a, b)$. Consideremos la función $f : (0, 1) \to (a, b)$ dada por $f(x) = a(1 - x) + bx$. La función $g : (a, b) \to (0, 1)$ dada por $g(x) = (x - a)/(b - a)$ es inversa de f, de lo que deducimos que f es biyectiva.
Ahora mostramos que f es continua. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \cap (c, d) \subseteq \mathbb{R} \mid c < d\} = \{(c, d) \subseteq \mathbb{R} \mid a \leq c < d \leq b\}$$

es una base para la topología sobre (a, b). Consideremos $(c, d) \subseteq (a, b)$. Entonces,

$$f^{-1}((c, d)) = \left(\frac{c - a}{b - a}, \frac{d - a}{b - a}\right) \subseteq (0, 1)$$

es abierto en la topología sobre $(0, 1)$. Así, la preimagen de todo básico de (a, b) es abierta, de lo que se sigue que f es continua.
Para mostrar que g es continua, tomemos un intervalo $(k, l) \subseteq (0, 1)$. Entonces,

$$g^{-1}((k, l)) = (a(1 - k) + bk, a(1 - l) + bl) \subseteq (a, b),$$

de forma que g^{-1} es continua.
Así, hemos demostrado que $(0, 1) \cong (a, b)$. Puesto que la relación entre dos espacios de ser homeomorfos es una relación de equivalencia, podemos deducir que todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos. □

10. Sean $f : A \to B$, $g : B \to D$ funciones continuas. La función $f \times g : A \times C \to B \times D$ definida mediante la ecuación

$$(f \times g)(a, c) = (f(a), g(c))$$

es continua.

Demostración. Sea $U \times V$ un elemento básico de la topología sobre $B \times D$. Entonces,

$$(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V).$$

Puesto que f y g son continuas, se sigue que los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son abiertos en A y C, respectivamente, de forma que su producto es abierto en $A \times C$. Así, la preimagen de todo elemento básico es abierta, de lo que se sigue que $f \times g$ es continua. □

11. Consideremos una función $F : X \times Y \to Z$. Decimos que F es **continua en cada variable separadamente** si

(i) para cada $y_0 \in Y$, la función $h_{y_0} : X \to Z$ definida mediante $h(x) = F(x, y_0)$ es continua

(ii) y para cada $x_0 \in X$, la función $k_{x_0} : Y \to Z$ definida mediante $k(y) = F(x_0, y)$ es continua.

Si F es continua, se sigue que F es continua en cada variable separadamente.

Demostración. • Sea $y_0 \in Y$ arbitrario y supongamos que F es continua. Si W es abierto en Z, queremos mostrar que $h_{y_0}^{-1}(W)$ es abierto en X. Por definición,

$$h^{-1}(W) = \{x \in X \mid h(x) = F(x, y_0) \in W\}$$

$$F^{-1}(W) = \{(x, y) \in X \times Y \mid F(x, y) \in W\}.$$

Por la continuidad de F, este último conjunto es abierto. Notamos que

$$h^{-1}(W) \times \{y_0\} = F^{-1}(W) \cap (X \times \{y_0\}).$$

El conjunto anterior es abierto en el subespacio $X \times \{y_0\}$ de $X \times Y$. Ahora consideremos la función $f : X \to X \times \{y_0\}$ dada por

$$f(x) = (x, y_0).$$

Esta función es continua, dado que sus funciones coordenadas son continuas: la primera es la función identidad de X a X y la segunda es la función constante de X a $\{y_0\}$. Ahora, puesto que $h^{-1}(W) \times \{y_0\}$ es abierto en $X \times \{y_0\}$ y f es continua, se sigue que

$$f^{-1}(h^{-1}(W) \times \{y_0\}) = h^{-1}(W)$$

es abierto en X.

• Un argumento análogo muestra la continuidad de F implica que para cada x_0 en X, la función k es continua. $\square$

§3

1. Si f y g son dos funciones continuas que van de X a un espacio de Hausdorff Y, el conjunto
$$W = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
es cerrado en X.

Demostración. Mostramos que

$$X \backslash W = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

es abierto. Si x está en $X \backslash W$, se sigue que $f(x) \neq g(x)$. Puesto que Y es Hausdorff, existen entornos disjuntos U de $f(x)$ y V de $g(x)$. Definamos

$$O := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

Entonces, $x \in O$. Notamos que para cualquier y en O, se debe cumplir que $f(y) \neq g(y)$: esto se deduce del hecho que U y V son disjuntos. Así, concluimos que $O \subseteq X \backslash W$.
Para un punto arbitrario de $X \backslash W$, hemos encontrado un entorno contenido en este conjunto, de lo que se sigue que es abierto. $\square$

Una demostración fallida. Al ver el problema anterior, una idea que puede surgir es usar la diagonal Δ de Y. Definamos $h : X \to Y \times Y$ como

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

Puesto que ambas funciones coordenadas son continuas, se sigue que h es continua. Del hecho que Y es Hausdorff, podemos deducir que la digonal Δ es cerrada en Y. Si se cumple que
$$h^{-1}(\Delta) = W$$
habremos demostrado que W es cerrado. La demostración que $W \subseteq h^{-1}(\Delta)$ no presenta problemas: todos los puntos de W son enviados por h a la diagonal Δ. Sin embargo, cuando queremos demostrar que $h^{-1}(\Delta) \subseteq W$, nos encontramos con el problema que f y g pueden no ser sobreyectivas: puede existir $y \in Y$ al que no llega ni f ni g, de forma que (y, y) estaría en Δ pero no en $h(W)$.

La proposición siguiente es una generalización **11** en §**1**.

2. Supongamos que f y g son funciones continuas que van de un espacio X a un espacio de Hausdorff Y. Si A es un subconjunto denso de X y f y g son iguales en todos los puntos de A, se sigue que son iguales en todos los puntos de X.

Demostración. Por el problema anterior, podemos deducir que

$$W = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en X. Notemos que $A \subseteq W$, de modo que $X = \mathrm{cl}(A) \subseteq W$. Se sigue que $f = g$. $\square$

Lo anterior se puede reformular como que una función continua que toma valores en un espacio de Hausdorff está determinada por sus valores en un conjunto denso.

Willard, General Topology, 48