Topología

Semana 1: Espacios topológicos y bases para topologías

6 - 13 de marzo de 2020

1. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $U \subseteq A$. Demuestre que U es abierto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ la colección de todos los abiertos contenidos en A. Entonces, podemos escribir que $A = \bigcup \mathcal{U}$. Al ser $\mathcal{U}$ una colección de abiertos, $\bigcup \mathcal{U}$ también es un abierto. Por tanto, A es abierto. $\square$

2. Considere las nueve topologías sobre $X = \{a, b, c\}$ indicadas en la siguiente imagen y compárelas.

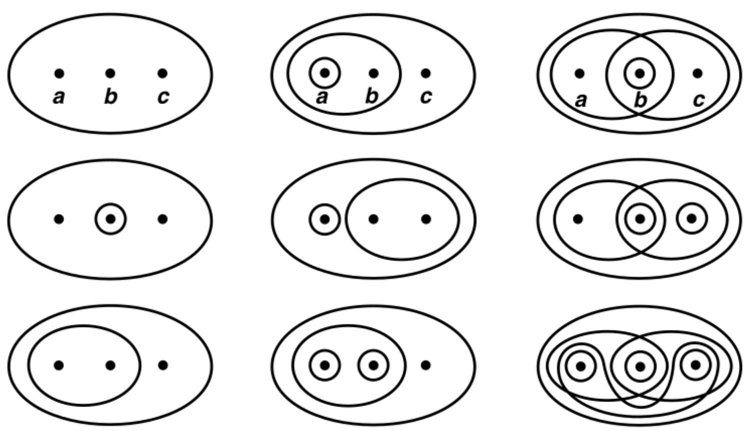

Figura 1: Nueve topologías sobre $X = \{a, b, c\}$. Tomado de §12 de [**1**].

Numeramos las topologías de arriba abajo y de izquierda a derecha. Presentamos los resultados en la siguiente tabla, donde todas las inclusiones son estrictas y el símbolo ✗ denota que las topologías no son comparables.

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$	$\mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_7$	$\mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_1$		$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_5$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_7$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_2$			✗	✗	✗	✗	$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_3$				$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_3$	✗	$\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_3$	✗	$\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_4$					✗	$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_6$	✗	$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_4 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_5$						✗	✗	✗	$\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_6$							$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_6$	✗	$\mathcal{T}_6 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_7$								$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_8$	$\mathcal{T}_7 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_8$									$\mathcal{T}_8 \subseteq \mathcal{T}_9$
$\mathcal{T}_9$									

3. (a) Sea X un conjunto y definamos

$$\mathcal{T}_c = \{U \subseteq X \mid U \text{ es conumerable en } X\} \cup \{\varnothing\}.$$

Demuestre que $\mathcal{T}_c$ es una topología sobre X.

(b) Considere la colección

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq X \mid X \backslash U \text{ es infinito }\} \cup \{\varnothing, X\}.$$

¿Es una topología sobe X?

Demostración. Notamos que $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}_c$. El primero por definición y el segundo por ser conumerable.
Ahora supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de conjuntos de $\mathcal{T}_c$ y demostremos que la unión de estos conjuntos también está en $\mathcal{T}_c$. Si la colección es vacía, este hecho se cumple dado que obtenemos el conjunto vacío. Si no, consideremos la expresión

$$X \backslash \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (X \backslash U_\alpha).$$

Si algún U_α es vacío, podemos descartarlo en el lado izquierdo, ya que no afecta a la unión. Así, si suponemos que $U_\alpha \neq \varnothing$, se sigue que cada conjunto $X \backslash U_\alpha$ es finito, de forma que la expresión del lado derecho es la intersección de conjuntos finitos y debe ser, por tanto, finita. Esto implica que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ está en $\mathcal{T}_\alpha$.
Sean U_1, U_2 elementos de $\mathcal{T}_c$ y supongamos que ninguno es vacío. Entonces,

$$X \backslash (U_1 \cap U_2) = (X \backslash U_1) \cup (X \backslash U_2)$$

es un conjunto finito, dado que es la unión de dos conjuntos finitos. Por tanto, $U_1 \cap U_2$ está en $\mathcal{T}_c$. $\square$

Comentario. De la definición notamos que si X es un conjunto numerable, $\mathcal{T}_c$ coincide con la topología discreta sobre X.

Para **(b)** notamos que si X es finito, $\mathcal{T}_\infty = \{\varnothing, X\}$. Por el contrario, si X es infinito, $\mathcal{T}_\infty$ no es una topología. Consideremos un contraejemplo en $\mathbb{R}$. Los conjuntos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ están en $\mathcal{T}_\infty$, pero su unión no, dado que $\mathbb{R}\backslash((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = \{1\}$. ■

4. (a) Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una familia de topologías sobre X, demuestre que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ una topología sobre X?

(b) Demuestre que existe una única topología más grande contenida en todas las topologías $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ y que existe una única topología más pequeña que contiene a todas estas topologías.

(c) Si $X = \{a, b, c\}$, sean

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\} \text{ y } \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Encuentre la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ y la topología más grande contenida en $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

(a) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre un conjunto X. Al estar en cada topología $\mathcal{T}_\alpha$, los conjuntos X y $\varnothing$ también están en $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$.
Si $\{U_\beta\}$ es una subcolección de $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$, se sigue que cada uno de los conjuntos U_β es un abierto en cada topología $\mathcal{T}_\alpha$. Así, $\bigcup U_\beta$ también es un abierto en cada $\mathcal{T}_\alpha$, de lo que se sigue que $\bigcup U_\beta \in \bigcap \mathcal{T}_\alpha$.
Ahora supongamos que U_1 y U_2 están en $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$. Se sigue que estos dos conjuntos son abiertos en cada topología $\mathcal{T}_\alpha$, por lo que su intersección también es abierta en cada topología $\mathcal{T}_\alpha$. Así, $U_1 \cap U_2 \in \bigcap \mathcal{T}_\alpha$.

En contraste, la unión de topologías no es necesariamente una topología. Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c\}$ y las topologías

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{b\}\} \text{ y } \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Entonces, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$, pero $\{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. ■

(b) Para ver que existe una única topología más grande contenida en todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ notamos que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología. Esta topología está contenida en todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$. Si $\mathcal{T}$ es una topología que cumple con esta propiedad, se deduce que $\mathcal{T} \subseteq \bigcap \mathcal{T}_\alpha$, de forma que esta última es la topología más grande que cumple con esta propiedad.

Para demostrar que existe una única topología más pequeña que contiene a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$, notamos que si bien no podemos esperar que $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ sea una topología, sí es una subbase. Por el **ejercicio 5**, la topología generada por esta subbase es la topología más pequeña que contiene a los elementos de la subbase como elementos. ■

(c) La topología más grande que está contenida en $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ es

$$\bigcap\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}.$$

Para encontrar la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, primero calculamos $\bigcup\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$:

$$\bigcup\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}\}.$$

Ahora calculamos el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de la subbase:

$$\mathcal{B} = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}\}.$$

Para obtener la topología deseada, tomamos uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$. En este caso, resulta que la topología es igual a $\mathcal{B}$. ■

5. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada por $\mathcal{A}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{A}$. Pruebe lo mismo para una subbase.

Comentario. Los siguientes resultados nos dicen que si $\mathcal{B}$ es una base, la topología generada por $\mathcal{B}$ es la topología más pequeña que contiene que $\mathcal{B}$. De forma análoga, si $\mathcal{S}$ es una subbase, la topología que genera es la topología más pequeña de entre todas las topologías que contienen a $\mathcal{S}$.

• Supongamos que $\mathcal{A}$ es una base que genera una topología $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ y sea

$$\mathrm{T} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}\}.$$

Notamos que $\mathcal{T}_\mathcal{A} \in \mathrm{T}$, de forma que $\bigcap \mathrm{T} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{A}$.
Por otro lado, si U es un abierto de la topología generada por $\mathcal{A}$, podemos escribir

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

donde $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ son elementos de $\mathcal{A}$. Cada A_α pertence a cada topología en T, de lo que se sigue que su unión también debe pertencer a cada topología contenida en T. Así, $\mathcal{T}_\mathcal{A} \subseteq \bigcap \mathrm{T}$. ■

• Ahora supongamos que $\mathcal{S}$ es una subbase y sea

$$\mathrm{T} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}\}.$$

Notamos que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ está T, de lo que podemos deducir que $\bigcap \mathrm{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Si U es un abierto de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, es la unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Puesto que los elementos de $\mathcal{S}$ están en cada topología de T, sus intersecciones finitas también estarán en cada topología, al igual que cualquier unión de estas. Por tanto, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \bigcap \mathrm{T}$. ■

6. Demuestre que las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y de $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

• Supongamos que el abierto $[0,1)$ de la topología de $\mathbb{R}_\ell$ es abierto en la topología de $\mathbb{R}_K$. Entonces, debe existir un conjunto ya sea de la forma (a,b) o de la forma $(a,b)\backslash K$ que contenga a 0 y esté contenido en $[0,1)$ pero ninguno de estos casos es posible. ■

• El conjunto $(-1,1)\backslash K$ es abierto en la topología de $\mathbb{R}_K$, pero no puede ser abierto en la topología de $\mathbb{R}_\ell$, ya que existiría algún $[a,b)$ tal que

$$0 \in [a,b) \subseteq (-1,1)\backslash K$$

y cualquier $[a,b)$ contendría elementos de K. ■

7. Considere las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

$\mathcal{T}_1$ = la topología usual,
$\mathcal{T}_2$ = la topología de $\mathbb{R}_K$,
$\mathcal{T}_3$ = la topología cofinita,
$\mathcal{T}_4$ = la topología del límite superior, con todos los conjuntos $(a,b]$ como base,
$\mathcal{T}_5$ = la topología con todos los conjuntos $(-\infty,a)$ como base.

Determine las posibles relaciones de inclusión entre estas topologías.

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$
$\mathcal{T}_1$		(1) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$	(2) $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_1$	(3) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_4$	(4) $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_1$
$\mathcal{T}_2$			(5) $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_2$	(6) ✗	(7) $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_2$
$\mathcal{T}_3$				(8) $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_4$	(9) ✗
$\mathcal{T}_4$					(10) $\mathcal{T}_5 \subseteq \mathcal{T}_4$
$\mathcal{T}_5$					

(1) La topología de $\mathbb{R}_K$ es estrictamente más fina que la topología usual.

(2) Sea U un abierto de la topología cofinita. Entonces, U contiene a todos los números reales salvo una cantidad finita de estos. Supongamos que

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

son los números reales que no están en U. Podemos escribir

$$U = (-\infty, x_0) \cup (x_0, x_1) \cup \ldots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, \infty).$$

Notamos que

$$(-\infty, x_0) = \bigcup \{(r, x_0) \subseteq \mathbb{R} \mid r < x_0\}$$
$$(x_n, \infty) = \bigcup \{(x_n, r) \subseteq \mathbb{R} \mid x_n < r\},$$

de forma que cada abierto de $\mathcal{T}_c$ se puede expresar como la unión de intervalos abiertos. La inclusión es estricta: los intervalos (a, b) no son cofinitos.

(3) La topología usual es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior. Dado un intervalo (a, b), para todo $x \in (a, b)$ tenemos que $x \in (a, x] \subseteq (a, b)$. Para ver que la inclusión es estricta, se debe notar que todos los conjuntos de la forma $(a, b]$ son abiertos en la topología del límite superior, pero no pueden serlo en la topología usual, ya que no hay forma de encontrar un intervalo abierto que incluya a b y esté contenido en $(a, b]$.

(4) Para cada $x \in (-\infty, a)$ podemos encontrar un intervalo abierto que contenga a x y esté dentro de $(-\infty, a)$. La inclusión es estricta: ningún intervalo (a, b) puede pertenecer a la topología $\mathcal{T}_5$.

(5) Al ser estrictamente más gruesa que la topología usual, se sigue que la topología cofinita es estrictamente más gruesa que la topología de $\mathbb{R}_K$.

(6) Las topologías de $\mathbb{R}_K$ y del límite superior no son comparables. Un argumento análogo al del **ejercicio 6** se puede hacer para probar esto, sustituyendo los conjuntos de la forma $[a, b)$ por conjuntos de la forma $(a, b]$.

(7) $\mathcal{T}_5$ es estrictamente más gruesa que la topología usual, de forma que también debe ser estrictamente más gruesa que la topología de $\mathbb{R}_K$.

(8) La topología cofinita es estrictamente más gruesa que la topología usual y esta es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior como se demostró en **(2)**.

(9) La topología cofinita y $\mathcal{T}_5$ no son comparables. Por un lado, los conjuntos de la forma $(-\infty, a)$ no son cofinitos. Por otro lado, el conjunto $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ está en $\mathcal{T}_3$, pero no hay forma que esté en $\mathcal{T}_5$: de lo contrario, existiría un conjunto $(-\infty, a)$ tal que
$$2 \in (\infty, a) \subseteq \mathbb{R}\backslash\{1,2\}.$$
Entonces, $1 \in (-\infty, a)$, aun cuando lo hemos removido del conjunto de la derecha.

(10) La topología $\mathcal{T}_5$ es estrictamente más gruesa que la topología usual y esta es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior, de forma que $\mathcal{T}_5$ es estrictamente más gruesa que la topología del límite superior. ■

8. (a) Aplique el **lema 13.2** para demostrar que la colección contable
$$\mathcal{B} = \{(p,q) \subseteq \mathbb{R} \mid p < q \text{ y } p,q \in \mathbb{Q}\}$$
es una base que genera la topología estándar sobre $\mathbb{R}$.

(b) Demuestre que la colección
$$\mathcal{C} = \{[p,q) \subseteq \mathbb{R} \mid p < q \text{ y } p,q \in \mathbb{Q}\}$$
es una base que genera una topología diferente de la topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$.

(a) Consideremos un abierto U en la topología estándar y un elemento x de este. Entonces, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (a,b) \subseteq U$. Podemos elegir racionales p, q tales que
$$a < p < x < q < b,$$
de modo que $x \in (p,q) \subseteq (a,b) \subseteq U$. Se sigue que $\mathcal{B}$ es una base que genera la topología estándar sobre $\mathbb{R}$. ■

(b) Notemos que $[\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ es abierto en la topología de $\mathbb{R}_\ell$. Procedemos por contradicción. Supongamos que $[\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ es abierto en la topología generada por $\mathcal{C}$. Entonces, existen racionales p y q tales que $\sqrt{2} \in [p,q) \subseteq [\sqrt{2}, \frac{3}{2})$. Esto implica que $p < \sqrt{2}$ y $p > \sqrt{2}$, de lo que deducimos que $[\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ no puede pertenecer a la topología generada por $\mathcal{C}$.
Por otro lado, se cumple que la topología generada por $\mathcal{C}$ es más gruesa que la topología de $\mathbb{R}_\ell$, ya que todos los elementos de $\mathcal{C}$ están en la base que genera la topología de $\mathbb{R}_\ell$. ■