Topología

Semanas 6 y 7: Productos cartesianos arbitrarios

10 - 24 de abril de 2020

Definición 1. *Sea J un conjunto de índices. Una J-tupla de elementos de un conjunto X es una función*

$$\mathbf{x} : J \to X.$$

Si α es un elemento de X, a menudo denotamos el valor de $\mathbf{x}$ en α como x_α en lugar de $\mathbf{x}(\alpha)$ y lo denominamos la α-ésima coordenada de $\mathbf{x}$. A menudo denotamos $\mathbf{x}$ como

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}.$$

Además, denotamos el conjunto de todas las J-tuplas de elementos de X como X^J. De manera más formal,

$$X^J = \{\mathbf{x} \subseteq J \times X \mid \mathbf{x} : J \to X\}.$$

•**Ejemplo 1.** Si $X = \mathbb{R}$ y $J = 3$, $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todas las 3-tuplas de números reales.

•**Ejemplo 2.** Si $X = \mathbb{C}$ y $J = \mathbb{Z}$. Un elemento de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ podría ser, por ejemplo, la función $\mathbf{x}$ dada por

$$x_k = e^{-ik}$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, que también podemos denotar como

$$(\ldots, e^{2i}, e^{i}, 1, e^{-i}, e^{-2i}, \ldots)$$

o como $(e^{-ik})_{k\in\mathbb{Z}}$. En general, los elementos de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ son las $\mathbb{Z}$-tuplas de números complejos.

•**Ejemplo 3.** Si $X = J = \mathbb{R}$, obtenemos

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

Definición 2. *Sea $\{A_i\}_{i\in J}$ una famila indexada de conjuntos. Definimos el producto cartesiano $\prod_{i\in J} A_i$ como*

$$\prod_{i\in J} A_j := \{\mathbf{x} : J \to \bigcup_{i\in J} A_i \mid \forall i \in I \ \ (\mathbf{x}(i) \in A_i)\}.$$

Notamos que si $X = A_i$ para toda $i \in J$, el producto cartesiano coincide con el conjunto X^J de todas las J-tuplas de elementos de X.

Definición 3.