Topología

Semana 2: Conjuntos cerrados, puntos límite y espacios de Hausdorff

13 - 20 marzo de 2020

11. Muestre que el producto de dos espacios de Hausdorff es Hausdorff.

Demostración. Sean X y Y dos espacios de Hausdorff. Tomemos dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ distintos de $X \times Y$. Entonces, $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_1 \neq x_2$. Puesto que X es Hausdorff, podemos elegir entornos disjuntos $U_1, U_2 \subseteq X$ de x_1 y x_2, respectivamente. Entonces, $U_1 \times Y$ y (x_2, y_2) son entornos de (x_1, y_1) y $U_2 \times Y$, respectivamente, en la topología producto sobre $X \times Y$. Además,

$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y = \varnothing,$$

con lo que queda demostrada la proposición. $\square$

12. Demuestre que un subespacio de Hausdorff es Hausdorff.

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff y Y un subespacio de este. Consideremos dos puntos distintos x y y en Y. Entonces, podemos encontrar abiertos U, V de X que contengan a x y a y, respectivamente, y sean disjuntos. Se sigue que $Y \cap U$ y $Y \cap V$ son entornos de x y de y, respectivamente, en el subespacio Y. Además, son entornos disjuntos: $(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap U \cap V = \varnothing$. $\square$

13. Muestre que X es Hausdorff si y solo si la **diagonal**

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

es cerrada en $X \times X$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que Δ es cerrada en $X \times X$. Entonces,

$$(X \times X) \setminus \Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x \neq y\}$$

es abierto en $X \times X$. Esto implica que para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que

$$(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

De lo anterior se observa que no puede existir un elemento en $U \cap V$. Así, para x y y de X distintos, hemos construido entornos disjuntos. Se sigue que X es Hausdorff.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que X es Hausdorff. Mostramos que $(X \times X) \setminus \Delta$ es abierto. Si $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, deducimos que $x \neq y$ y que existen entornos disjuntos U, V de x y y, respectivamente. Notamos que $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$, de forma que

$$(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

Así, para cada punto en $(X \times X) \setminus \Delta$ podemos encontrar un elemento básico dentro de este conjunto que lo contiene, de lo que se sique que $(X \times X) \setminus \Delta$ es abierto. $\square$

15. Pruebe que el axioma T_1 es equivalente a la condición que para cada par de puntos distintos de X, cada uno posee un entorno que no contiene al otro.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que para par de puntos distintos de un espacio X, cada uno tiene un entorno que no contiene al otro. Demostraremos que todos los conjuntos unipuntuales son cerrados en X, de lo que se sigue que cualquier conjunto finito también será cerrado.
Sea x un punto de X. Mostramos que $\mathrm{cl}\{x\} = \{x\}$. Consideremos un puntuo $y \neq x$. Por la hipótesis, podemos encontrar un entorno V de y tal que $x \notin V$; es decir, $V \cap \{x\} = \varnothing$. Así, hemos construido un entorno de y que no interseca a $\{x\}$, de lo que se sigue que $y \notin \mathrm{cl}\{x\}$. Por tanto, $\mathrm{cl}\{x\} = \{x\}$.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que los subconjuntos finitos de X son cerrados y tomemos dos puntos distintos x y y de X. Entonces, el conjunto $X \setminus \{y\}$ es un entorno de x que no contiene a y. De manera similar, $X \setminus \{x\}$ es un entorno de y que no contiene a x. $\square$

La parte ($\Leftarrow$) sigue el mismo argumento de la demostración del **teorema 17.8** de [**1**]. Este hecho ilustra que no necesitamos algo tan fuerte como la propiedad de Hausdorff para que los conjuntos finitos sean cerrados: basta con una propiedad más débil como el axioma T_1.

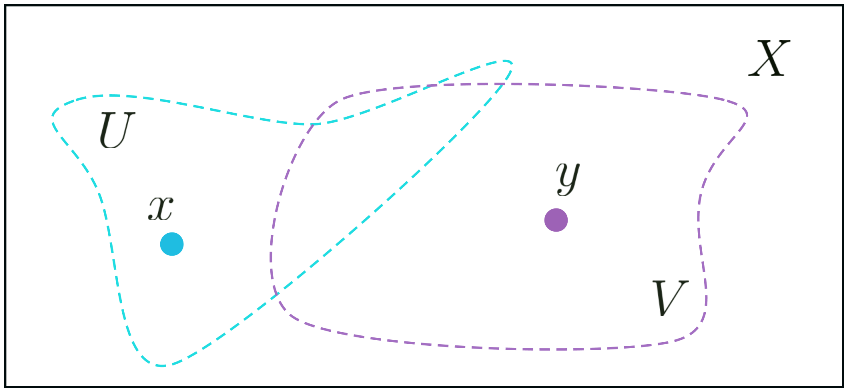

Figura 1: En un espacio X que cumple el axioma T_1 siempre podemos hacer lo mostrado en la figura, pero no podemos garantizar que los entornos sean disjuntos, a diferencia de un espacio de Hausdorff.

19. Si $A \subseteq X$, definimos la **frontera** de A mediante la ecuación

$$\partial A = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(X \backslash A).$$

(a) Pruebe que $\mathrm{int}(A)$ y ∂A son disjuntos y que $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$.

(b) Muestre que $\partial A = \varnothing$ si y solo si A es abierto y cerrado a la vez.

• Para ver que el interior de A y su frontera son disjuntos, suponemos que existe un punto x en ambos conjuntos. Al estar en el interior de A, se sigue que existe un U entorno de x contenido en A. Sin embargo, $x \in \mathrm{cl}(X \backslash A)$, lo que implica que U debe intersecar a $X \backslash A$. Teniendo en cuenta que $U \subseteq A$, esto resulta imposible.

Para demostrar que al unir el interior de un conjunto A con su frontera obtenemos su clausura, primero notamos que la definición implica que $\partial A \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Además, sabemos que $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A)$, de forma que $\mathrm{int}(A) \cup \partial A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.
Para demostrar que $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{int}(A) \cup \partial A$, supongamos que x está en $\mathrm{cl}(A)$ y no está en $\mathrm{int}(A)$, con el fin de mostrar que $x \in \partial A$. Si tomamos un entorno arbitrario de x, notamos que no puede estar contenido en A, de forma que se debe intersecar con $X \backslash A$. Así, $x \in \mathrm{cl}(X \backslash A)$, de lo que se sigue la conclusión. ■

• ($\Leftarrow$) Supongamos que A es abierto y cerrado a la vez. Entonces, podemos decir lo mismo de $X \backslash A$. Usando el hecho que ambos conjuntos son cerrados, inferimos que

$$\mathrm{cl}(X \backslash A) = X \backslash A \;\text{ y }\; \mathrm{cl}(A) = A.$$

Así, $\partial A = A \cap (X \backslash A) = \varnothing$.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que $\partial A = \varnothing$. Por la parte **(a)**, se sigue que $\mathrm{int}(A) =$

$\mathrm{cl}(A)$. En vista que $\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(A)$, podemos deducir que $A = \mathrm{int}(A) = \mathrm{cl}(A)$, de forma que A es abierto y cerrado. ■