Topología

Semanas 4 y 5: Continuidad y homeomorfismos

27 de marzo - 10 de abril de 2020

§1

2. Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología sobre Y. Una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto para todo $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si f es continua, se sigue que la preimagen de cualquier abierto en Y es abierta en X. En particular, la preimagen de cualquier elemento de la base $\mathcal{B}$ es abierta.
($\Leftarrow$) Ahora tomemos un abierto V en Y y mostremos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Entonces,

$$V = \bigcup_{i \in J} B_i,$$

de forma que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i).$$

Al ser la unión de conjuntos abiertos, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto. $\square$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(q) = 0$ para todo racional q. Mostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Puesto que f es continua, se cumple que

$$f(\mathrm{cl}(\mathbb{Q})) \subseteq \mathrm{cl}(f(\mathbb{Q})),$$

es decir,

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \{0\}.$$

Por la hipótesis, sabemos que $\{0\} \subseteq f(\mathbb{R})$. A partir de esto, deducimos que $f(\mathbb{R}) = \{0\}$. $\square$

En la demostración anterior, la función f, al ser continua, toma todos los puntos *cercanos* $\mathbb{Q}$, de forma que sus imágenes sean *cercanas* a $f(\mathbb{Q})$. Sin embargo, este último conjunto es el unipuntual $\{0\}$. Cabe destacar que la densidad de los racionales juega un papel importante en la demostración anterior. Específicamente, en el hecho que $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. La siguiente demostración muestra otra forma de usar este hecho.

Demostración. Sea x irracional y supongamos que $f(x) \neq 0$. Puesto que $\mathbb{R}$ es T_1, podemos encontrar un entorno U de $f(x)$ que no contenga a 0. Se sigue, por la continuidad de f, que $f^{-1}(U)$ es abierto. Del hecho que U es abierto, podemos deducir que existe un racional q en $f^{-1}(U)$. Esto implicaría que $0 = f(q) \in U$, lo cual es una contradicción. $\square$

§2

Definición I. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una biyección. Si f y f^{-1} son continuas, decimos que f es un **homeomorfismo**.

3. Consideremos $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(i) La función id es continua si y solo si $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$.

(ii) La función id es un homeomorfismo si y solo si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Demostración. (i) ($\Rightarrow$) Supongamos que id es continua y consideremos un abierto V en $\mathcal{T}_2$. Entonces, $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ es abierto en $\mathcal{T}_1$, de modo que $\mathcal{T}_1$ debe ser más fina que $\mathcal{T}_2$.
($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$. Entonces, al tomar un abierto V de $\mathcal{T}_2$, sabemos que $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ también será abierto en $\mathcal{T}_1$, de lo que concluimos que id es continua.

(ii) ($\Rightarrow$) Supongamos que id es un homeomorfismo. Entonces, si $U \in \mathcal{T}_1$, sabemos que $\mathrm{id}(U) = U \in \mathcal{T}_2$, de forma que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. De forma análoga, si $V \in \mathcal{T}_2$, $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ es abierto en $\mathcal{T}_1$, de manera que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.
($\Leftarrow$) Si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, se sigue inmediatamente $\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1}$ es continua. $\square$

5. Todos los subespacios (a, b) de $\mathbb{R}$ son homeomorfos. De la misma forma, todos los subespacios de $\mathbb{R}$ de la forma $[a, b]$ son homeomorfos.

Demostración. • Sea (a, b) arbitrario. Mostramos que $(0, 1) \cong (a, b)$. Consideremos la función $f : (0, 1) \to (a, b)$ dada por $f(x) = a(1 - x) + bx$. La función $g : (a, b) \to (0, 1)$ dada por $g(x) = (x - a)/(b - a)$ es inversa de f, de lo que deducimos que f es biyectiva.
Ahora mostramos que f es continua. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \cap (c, d) \subseteq \mathbb{R} \mid c < d\} = \{(c, d) \subseteq \mathbb{R} \mid a \leq c < d \leq b\}$$

es una base para la topología sobre (a, b). Consideremos $(c, d) \subseteq (a, b)$. Entonces,

$$f^{-1}((c, d)) = \left(\frac{c - a}{b - a}, \frac{d - a}{b - a}\right) \subseteq (0, 1)$$

es abierto en la topología sobre $(0, 1)$. Así, la preimagen de todo básico de (a, b) es abierta, de lo que se sigue que f es continua.
Para mostrar que g es continua, tomemos un intervalo $(k, l) \subseteq (0, 1)$. Entonces,

$$g^{-1}((k, l)) = (a(1 - k) + bk, a(1 - l) + bl) \subseteq (a, b),$$

de forma que g^{-1} es continua.
Así, hemos demostrado que $(0, 1) \cong (a, b)$. Puesto que la relación entre dos espacios de ser homeomorfos es una relación de equivalencia, podemos deducir que todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos. $\square$