

NRPDJ  
Godunovljeva metoda za nelinearni zakon  
sačuvanja

Lana Čaldarević

24. veljače 2017.

---

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Godunovljeva metoda</b>	<b>5</b>
2.1	Detalji numeričkog fluksa . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Buckley-Leverettova jednačba</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Rezultati</b>	<b>15</b>
4.1	$u_l > u_r$ . . . . .	15
4.2	$u_l < u_r$ . . . . .	19

---

## 1 Uvod

Promatramo sljedeći nelinearni zakon sačuvanja u jednoj prostornoj dimenziji:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0, \quad x \in \Omega = (0, L), \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_r, \quad x \in \Omega, \quad u(0, t) = u_l.\end{aligned}$$

Diskretiziramo  $x - t$  ravninu prostornim korakom  $h \equiv \Delta x$  i vremenskim korakom  $k \equiv \delta t$ . Definiramo:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{\Delta x}{2}.$$

Točnu vrijednost označimo sa  $u_j^n = u(x_j, t^n)$ , a aproksimaciju te vrijednosti s  $U_j^n$ . U metodama za računanje rješenja zakona sačuvanja često se gleda na  $U_j^n$  kao aproksimaciju prosječne vrijednosti ćelije od  $u(x, t^n)$ , definiranu sa:

$$\tilde{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx,$$

nego kao aproksimaciju vrijednosti  $u_j^n$ . Interpretacija je prirodna jer integralna forma zakona sačuvanja opisuje vremensku evoluciju baš takvih integrala.

Definiramo i konstantnu funkciju  $U_k(x, t)$  za svaki  $x, t$  kao:

$$U_k(x, t) = U_j^n, \quad \forall (x, t) \in \left[ x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right) \times [t^n, t^{n+1}).$$

Pokušamo li riješiti nelinearni zakon sačuvanja numerički doći ćemo do dodatnih problema koji se ne pojavljuju kod linearnih jednadžbi:

- metoda može konvergirati k funkciji koja nije slabo rješenje naše jednadžbe, ili konvergira k krivom slabom rješenju, tj. ne zadovoljava entropijske uvjete
- metoda može biti nelinearno nestabilna, tj. nestabilna u nelinearnom slučaju, dok je u linearnom slučaju stabilna. Često su krivac oscilacije

Srećom, postoji uvjet koji numerička metoda mora zadovoljavati koji garantira da metoda neće konvergirati ka krivom rješenju. Zahtjeva se da metodu zapišemo u obliku zakona sačuvanja:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)], \quad (1)$$

gdje je  $F$  numerički fluks.

Slabo rješenje  $u(x, t)$  zadovoljava integralnu formu zakona sačuvanja:

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt,$$

i kada pomožimo jednakost s  $\frac{1}{h}$ , dobijemo

$$\tilde{u}_j^{n+1} = \tilde{u}_j^n - \frac{1}{h} \left[ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \quad (2)$$

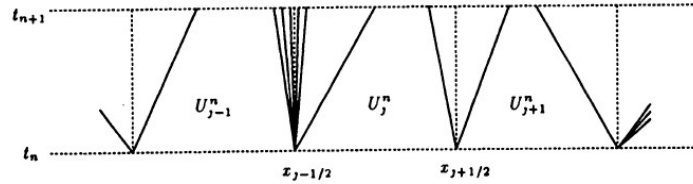
Ako usporedimo jednakost 2 s 1 vidimo da  $F(U_j, U_{j+1})$  predstavlja prosječan fluks kroz  $x_{j+\frac{1}{2}}$  na vremenskom intervalu  $[t^n, t^{n+1}]$ :

$$F(U_j, U_{j+1}) \approx \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt.$$

Zadatak je zapisati Godunovljevu metodu u obliku zakona sačuvanja te provjeriti da slabo rješenje metode zadovoljava entropijski uvjet.

## 2 Godunovljeva metoda

U Godunovljevoj metodi koristimo numeričko rješenje  $U^n$  kako bi definirali konstantnu funkciju  $\tilde{u}^n(x, t^n)$  sa vrijednosti  $U_j^n$  na  $x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}$ . U vrijeme  $t^n$  to se poklapa sa konstantnom funkcijom  $U_k(x, t^n)$ . Funkcija  $\tilde{u}^n$ , za razliku od funkcije  $U_k$ , neće biti konstanta na  $t^n \leq t < t^{n+1}$ . Umjesto toga koristimo  $\tilde{u}^n(x, t^n)$  kao početni podatak za zakon sačuvanja koji rješavamo kako bi dobili egzaktno rješenje  $\tilde{u}^n(x, t)$  za  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ . Jednadžba može biti riješena egaktno na malom vremenskom intervalu jer je početni podatak  $\tilde{u}^n(x, t^n)$  konstanta (dobivamo niz Riemannovih problema). Egzaktno rješenje, do vremena kada se susjedni valovi počinju sjeći, je dobiveno spajanjem svih Riemannovih rješenja.



Nakon što je nađeno rješenje na intervalu  $[t^n, t^{n+1}]$ , definiramo aproksimativno rješenje  $U^{n+1}$  u vremenu  $t^{n+1}$  kao prosječna vrijednost egzaktnog rješenja u  $t^{n+1}$ :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{u}^n(x, t^{n+1}) dx \quad (3)$$

Nakon toga koristimo te vrijednosti kako bi definirali  $\tilde{u}^{n+1}(x, t^{n+1})$  i ponavljamo postupak.

Ovaj algoritam možemo pojednostaviti ako izračunamo 3 koristeći integralnu formu zakona saočuvanja. Kako je  $\tilde{u}^n$  egzaktno slabo rješenje, znamo da je:

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{u}^n(x, t^{n+1}) dx &= \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{u}^n(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tilde{u}^n(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tilde{u}^n(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt. \end{aligned}$$

Ako pomnožimo integralnu formu s  $\frac{1}{h}$ , i primjetimo da je  $\tilde{u}^n(x, t^n) \equiv U_j^n$  na  $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ , i iskoristimo 3 dobijemo:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)],$$

gdje je  $F$  numerički fluks dan s:

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tilde{u}^n(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (4)$$

Iz toga slijedi da se Godunovljeva metoda može zapisati u obliku zakona sačuvanja.

Konstantna vrijednost od  $\tilde{u}^n$  na  $x = x_{j+\frac{1}{2}}$  ovisi samo o vrijednostima  $U_j^n$  i  $U_{j+1}^n$  za taj Riemannov problem. Ako tu vrijednost označimo s  $u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)$ , tada fluks 4 možemo zapisati kao:

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) \quad (5)$$

i tada Godunovljeva metoda poprima oblik:

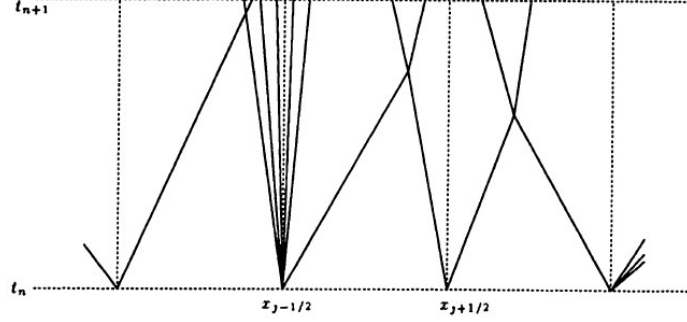
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} [f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - f(u^*(U_{j-1}^n, U_j^n))].$$

Primjetimo da je fluks 5 konzistentan s  $f$  jer ako je  $U_j^n = U_{j+1}^n \equiv \bar{u}$ , tada je i  $u^*(U_j^n, U_{j+1}^n) = \bar{u}$ .

Za velike  $t$ , rješenje možda nije konstantno u  $x_{j+\frac{1}{2}}$  zbog valova koji dolaze iz susjednih Riemannovih problema. No kako je brzina valova omeđena svojstvenim vrijednostima od  $f'(u)$  i susjedni Riemannovi problemi su udaljeni za  $h$ ,  $\tilde{u}^n(x_{j+\frac{1}{2}}, t)$  je konstantno na  $[t^n, t^{n+1}]$  ukoliko je  $k$  dovoljno malo. Zahtjevamo da je:

$$\left| \frac{k}{h} \lambda_p(U_j^n) \right| \leq 1, \quad (6)$$

za sve svojstvene vrijednosti  $\lambda_p$  za svaki  $U_j^n$ . Primjetimo da 6 dozvoljava da se valovi susjednih Riemannovih problema sijeku tijekom vremenskog koraka sve dok se sijeku unutar ćelije.



Dalje pokazujemo kako slabo rješenje Godunovljeve metode zadovoljava entropijski uvjet.

Neka je dana konveksna entropijska funkcija  $\eta(u)$  i entropijski fluks  $\psi(u)$  i neka svaki  $\tilde{u}^n$  zadovoljava entropijsku nejednadžbu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(u(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} \psi(u(x, t)) \leq 0. \quad (7)$$

Kako  $\tilde{u}^n(x, t)$  za  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$  predstavlja egzaktno rješenje koje zadovoljava entropijski uvjet, možemo integrirati 7 na pravokutniku  $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}) \times (t^n, t^{n+1})$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \eta(\tilde{u}^n(x, t^{n+1})) dx &\leq \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \eta(\tilde{u}^n(x, t^n)) dx \\ - \frac{1}{h} \left[ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi(\tilde{u}^n(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi(\tilde{u}^n(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt \right]. \end{aligned}$$

Kako je  $\tilde{u}^n$  konstantna svugdje osim na jednoj strani pravokutnika dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \eta(\tilde{u}^n(x, t^{n+1})) dx &\leq \eta(U_j^n) \\ - \frac{k}{h} [\psi(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - \psi(u^*(U_{j-1}^n, U_j^n))] &. \end{aligned}$$

Lijeva strana nije jednaka  $\eta(U_j^{n+1})$  jer  $\tilde{u}^n$  na tom intervalu nije konstanta. No kako je  $\eta$  konveksna, možemo iskoristiti Jensenovu nejednakost i dobijemo sljedeće:

$$\eta \left( \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{u}^n(x, t^{n+1}) dx \right) \leq \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \eta(\tilde{u}^n(x, t^{n+1})) dx$$

Lijeva strana ove nejednakosti je jednaka  $\eta(U_j^{n+1})$ , a desna strana je omeđena sa nejednakosti iznad.

Definiramo numerički entropijski fluks s:

$$\Psi(U_j^n, U_{j+1}^n) = \psi(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)).$$

Kombinirajući sve rezultate dobivamo sljedeće:

$$\eta(U_j^{n+1}) \leq \eta(U_j^n) - \frac{k}{h} [\Psi(U_j^n, U_{j+1}^n) - \Psi(U_{j-1}^n, U_j^n)],$$

čime smo pokazali da vrijedi diskretna entropijska nejednadžba. To povlači da slabo rješenje dobiveno Godunovljevom metodom zadovoljava entropijske uvjete (ako koristimo Riemannova rješenja koja zadovoljavaju entropijski uvjet).

---



## 2.1 Detalji numeričkog fluksa

Riemannov problem sa početnim uvjetima  $u_l, u_r$  uvijek ima jedno slabo rješenje dano koje se širi brzinom  $s = (f(u_r) - f(u_l))/(u_r - u_l)$ . Ako uvijek koristimo to rješenje (koje ne mora zadovoljavati entropijski uvjet), tada je  $u^*$  dano sa:

$$u^*(u_l, u_r) = \begin{cases} u_l & \text{if } s > 0, \\ u_r & \text{if } s < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ako je  $s = 0$ , onda  $u^*$  nije dobro definirano, ali je u tom slučaju  $f(u_l) = f(u_r)$  pa slijedi da je dobiveni fluks jednak i u slučaju da definiramo  $u^* = u_l$  i  $u^* = u_r$ .

Iz 8 dobivamo fluks:

$$F(u_l, u_r) = f(u^*(u_l, u_r)) = \begin{cases} f(u_l) & \text{if } (f(u_r) - f(u_l))/(u_r - u_l) \geq 0, \\ f(u_r) & \text{if } (f(u_r) - f(u_l))/(u_r - u_l) < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Ovaj fluks je isti fluksu dobivenom u (12.51) u knjizi Randall J. LeVeque: Numerical Methods for Conservation Laws, koji daje metodu čija rješenja ne moraju zadovoljavati entropijski uvjet.

Kako bi to popravili trebali bi koristiti slaba rješenja koja zadovoljavaju entropijski uvjet u implementaciji Godunovljeve metode. U konveksnom slučaju postoji četiri slučaja koje moramo uzeti u obzir:

1.  $f'(u_l), f'(u_r) \geq 0 \implies u^* = u_l$ ,
2.  $f'(u_l), f'(u_r) \leq 0 \implies u^* = u_r$ ,
3.  $f'(u_l) \geq 0 \geq f'(u_r) \implies u^* = u_l$  za  $[f]/[u] > 0$  ili  $u^* = u_r$  za  $[f]/[u] < 0$ ,
4.  $f'(u_l) < 0 < f'(u_r) \implies u^* = u_s$ .

U prva tri slučaja, vrijednost od  $u^*$  je ili  $u_l$  ili  $u_r$ , i tada je fluks dan kao 9. U slučaju 1 i 2 svejedno je je li rješenje krivulja šoka ili lepeza, jer je vrijednost od  $u^*$  jednak u oba slučaja. To pokazuje da korištenjem Godunovljeve metode sa Riemannovim rješenjima koji ne zadovoljavaju entropijski uvjet nemoramo nužno dobiti numerička rješenja koja ne zadovoljavaju entropijski uvjet.

Jedino u slučaju 4 je vrijednost fluksa  $F$  drugačija nego što je definirano u 9. U tom slučaju vrijednost od  $u^*$  nije ni  $u_l$  ni  $u_r$ , nego  $u_s$  sa svojstvom da je  $f'(u_s) = 0$ . To je vrijednost od  $u$  za koji je brzina karakteristika jednaka 0.

Možemo modificirati 9 kako bi uključivala i tu mogućnost: ako je  $f'(u_l) < 0 < f'(u_r)$ , tada definiramo  $F(u_l, u_r) = f(u_s)$ .

Tada konačni fluks  $F$  možemo zapisati na sljedeći način:

$$F(u_l, u_r) = \begin{cases} \min_{u_l \leq u \leq u_r} f(u) & \text{za } u_l \leq u_r, \\ \max_{u_r \leq u \leq u_l} f(u) & \text{za } u_l > u_r. \end{cases} \quad (10)$$

10 vrijedi i u nekonveksnom slučaju i daje korektni Godunovljev fluks koji odgovara slabom rješenju koji zadovoljava entropijski uvjet

$$\frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r}.$$

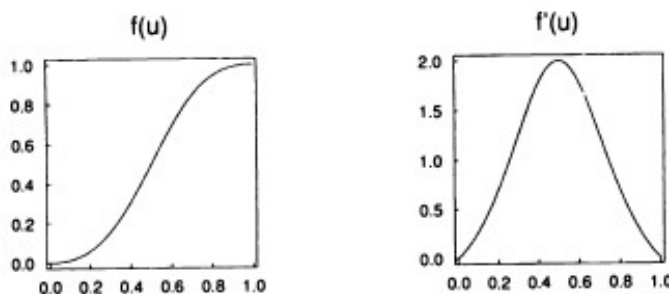
---

### 3 Buckley-Leverettova jednađžba

Kada je  $f$  konveksna, rješenje Riemannovih problema je uvijek ili krivulja šoka ili lepeza. A kada  $f$  nije konveksna, entropijsko rješenje može oboje. Primjer takve funkcije je Buckley-Leverettova jednađžba, gdje je

$$f = \frac{u^2}{u^2 + a(1-u)^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Buckley-Leverettova jednađžba predstavlja model dvofaznog toka kroz poroznu sredinu. Jednostavan primjer je simulacija rezervoara s naftom. Kada se pronade podzemni izvor nafte, zbog velikog pritiska određena količina odmah izade na površinu. Međutim, i nakon toga velika količina nafte ostane pod zemljom. Standardna metoda za ekstrakciju preostalog dijela nafte je da se upumpava voda u naftno polje kroz neke izvore, npr. bunare, tjerajući naftu van kroz druge. U ovom slučaju dvofazni tok čine voda i nafta, a porozni medij stijene ili pijesak.



Slika 1: Funkcija toka vode za  $a = \frac{1}{2}$  i njena derivacija

Proučavamo Riemannov problem sa početnim uvjetima  $u_l = 1$  i  $u_r = 0$  (to je zapravo tok do kojeg dolazi zbog utiskivanja čiste vode ( $u = 1$ ), u čistu naftu ( $u = 0$ )).

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

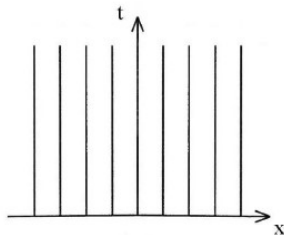
$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = 1 & \text{za } x < 0, \\ u_r = 0 & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

Rješenje konstruiramo metodom karakteristika. Jednađžba karakteristika dana je sa  $x'(t) = f'(u(x(t), t))$ .

To rješenje je konstantno na karakteristikama pa je:

$$x(t) = x(0) + f'(u(x(0), 0))t.$$

Primjetimo da su karakteristike svugdje osim u  $x(0) = 0$  paralelne s  $t$  osi u  $x - t$  koordinatnom sustavu.



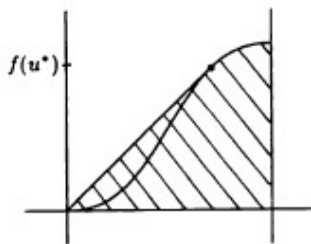
Slika 2: Karakteristike Buckley-Leverettove jednadžbe.

Uočimo da:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{za } x < 0, \\ 0 & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

nije slabo rješenje jer  $x = 0$  ne zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet.

Možemo pokazati da se rješenje Riemannovog problema može dobiti iz grafa funkcije  $f$ . Za  $u_l > u_r$  konstruiramo konveksnu ljusku skupa ispod grafa:  $\{(x, y) : u_r \leq x \leq u_l, y \leq f(x)\}$ .



Slika 3: Konveksna ljuska skupa ispod grafa.

Ako pogledamo gornju granicu ovog skupa, vidimo da se sastoji od ravne linije na segmentu od  $(u_r, f(u_r)) = (0, 0)$  do  $(u^*, f(u^*))$  a nakon toga slijedi  $y = f(x)$  do  $(u_l, f(u_l)) = (1, 1)$ . Ravna linija predstavlja šok koji skače od 0

do  $u^*$ , a nakon toga slijedi lepeza, tj. stanje  $u_r = 0$  možemo spojiti šokom s nekim drugim stanjem  $u^* > 0$ , a da pritom ne narušimo uvjet entropije (to je linija iznad grafa funkcije), dok stanje  $u_l = 1$  spajamo lepezom sa stanjem  $u^*$ .

Još nam je ostalo odrediti položaj točke  $u^*$ . Znamo da rješenje na šoku mora zadovoljavati Rankine-Hugonitov uvjet, tj. za brzinu šoka  $s^*$  mora vrijediti:

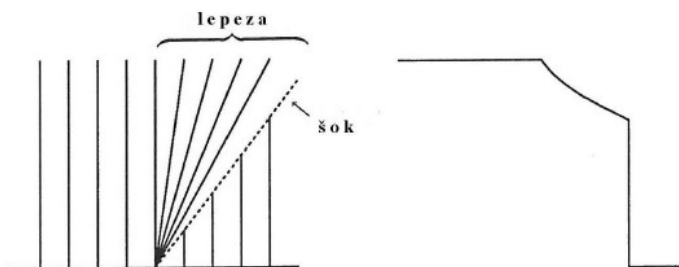
$$s^* = \frac{f(u^*) - f(u_r)}{u^* - u_r} = \frac{f(u^*)}{u^*}.$$

S druge strane, lepeza je definirana jednadžbom  $f'(\hat{u}(\xi)) = \xi$  pa za  $u = u^*$  mora vrijediti  $s^* = f'(u^*)$ , gdje je  $s^*$  brzina šoka koja izlazi iz  $x = 0$ . Time dolazimo do jednadžbe:

$$f'(u^*) = \frac{f(u^*)}{u^*}.$$

U literaturi [2] možemo pronaći da je rješenje ove jednadžbe dano s  $u^* = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$ .

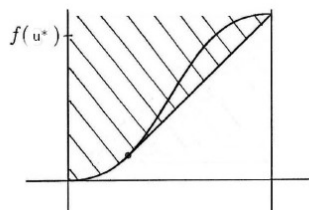
Rješenje Riemannovog problema će imati ovakav oblik:



Slika 4: Rješenje Buckley-Leverettove jednadžbe za  $u_l > u_r$

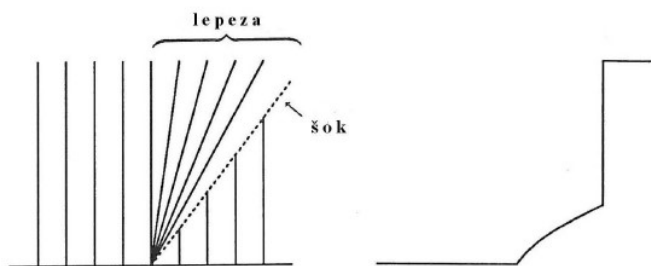
S fizikalne strane to znači da voda, kako se utiskuje u tlo istisne određenu količinu nafte. Period tijekom kojeg izlazi čista nafta odgovara lepezi u našem rješenju. Trenutak nakon šoka predstavlja istjecanje mješavine nafte i vode, sa sve manje i manje nafte kako vrijeme odmiče. Ovom tehnikom nemoguće je istisnuti svu naftu.

Slično za  $u_l < u_r$ . Konstruiramo konveksnu ljusku:  $\{(x, y) : u_l \leq x \leq u_r, y \geq f(x)\}$ . Sada je to skup točaka iznad grafa.



Slika 5: Konveksna ljuska skupa iznad grafa.

Rješenje će u ovom slučaju imati oblik:

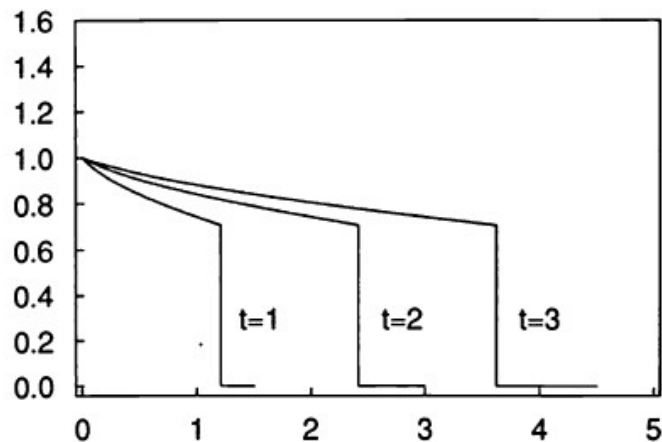


Slika 6: Rješenje Buckley-Leverettove jednadžbe za  $u_l < u_r$

## 4 Rezultati

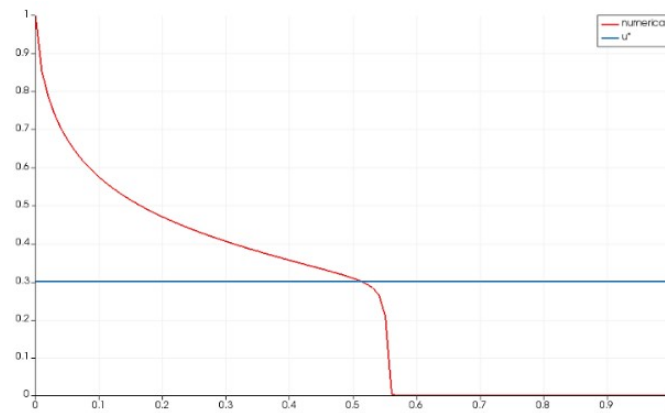
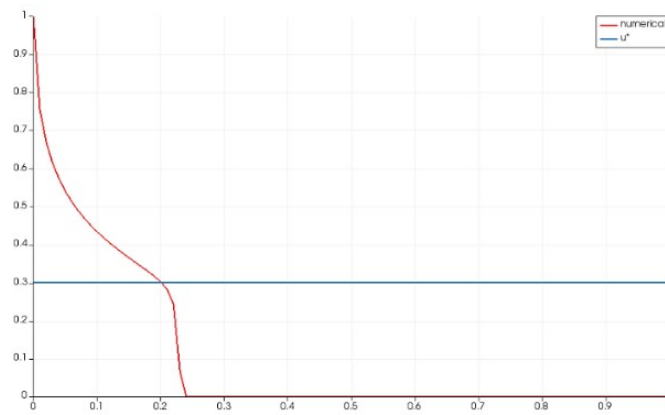
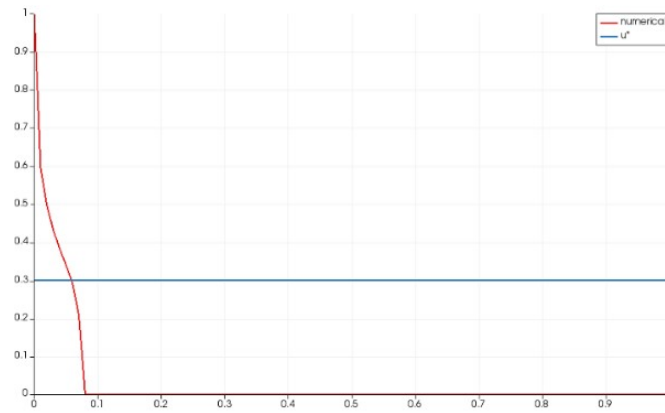
### 4.1 $u_l > u_r$

Primjer točnog rješenja Buckley-Leverettove jednadžbe za  $t = 1, 2, 3$ .

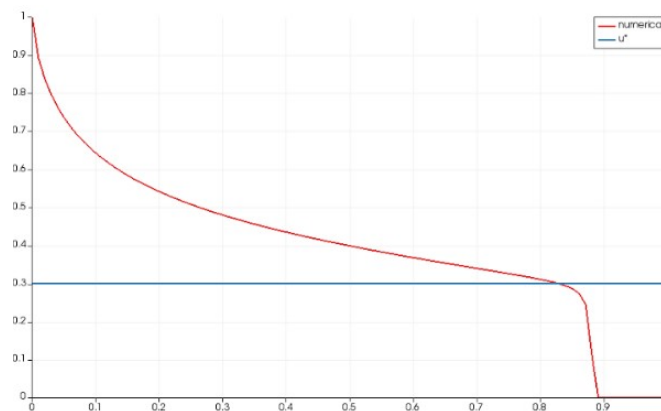


Za testiranje metode uzela sam  $u_l = 1$  i  $u_r = 0$ . U tom slučaju znamo da je  $u^* = \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ . U ovom primjeru sam uzela  $a = 0.1$ . Vremenski korak sam namjestila na  $\Delta t = 0.0001$  kako bi u svakom slučaju zadovoljavao CFL uvjet  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{m}$ , gdje je  $m = \max_{0 \leq x \leq 1} f'(u)$ . U protivnom bi došlo do oscilacija. Za ovaj slučaj znamo izračunati poziciju točke  $u^*$  te ćemo ju prikazati na grafu za usporedbu. Rješenje gledamo na intervalu  $[0, 1]$ , jer je tamo naša funkcija  $f$  monotona te se fluks  $F(u, v)$  svodi na računanje  $f(u)$ .

Prvo ćemo prikazati rješenje kroz neke vremenske korake za  $n = 300$ , gdje je  $n$  broj diskretizacijskih točaka.

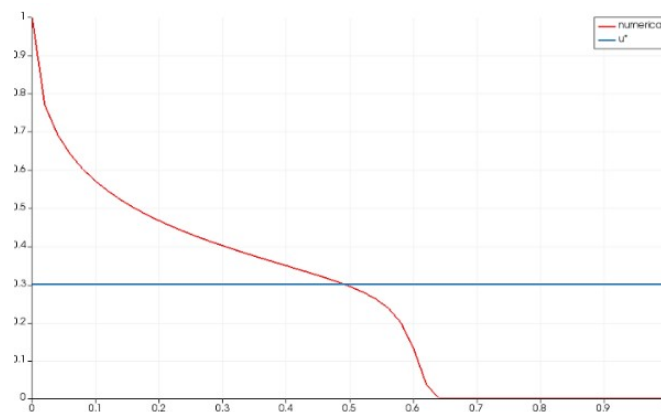


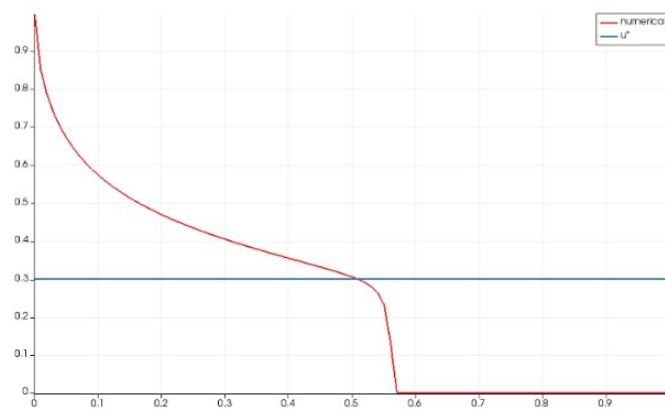
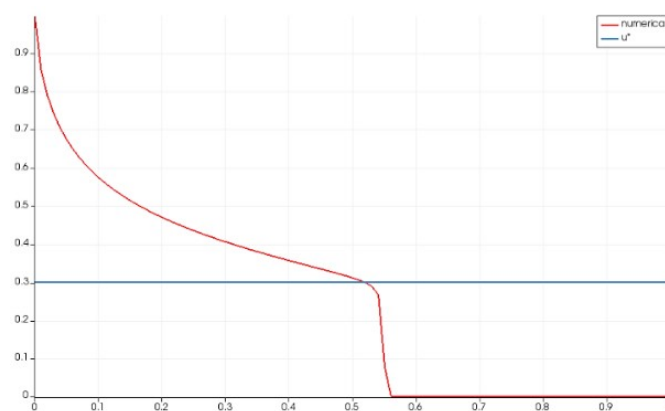
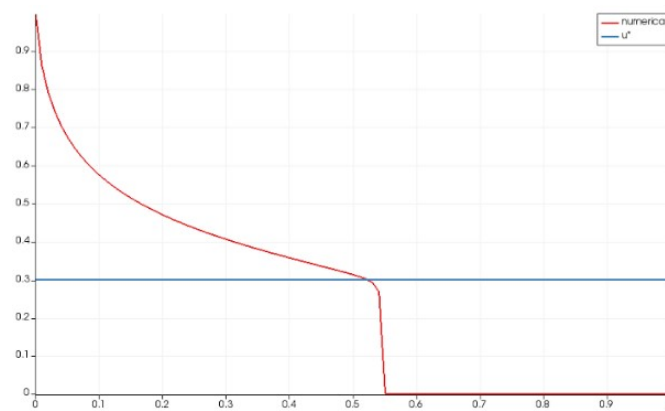




Dalje može usporediti rješenje u određenom trenutku  $t$  za različite  $n$  te usporediti sa točnim rješenjem prikazanim na slici 4. Za veće  $n$  dobijemo "bolje" rješenje.

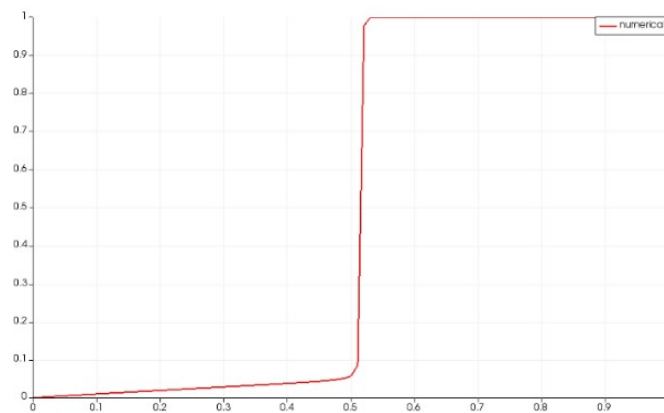
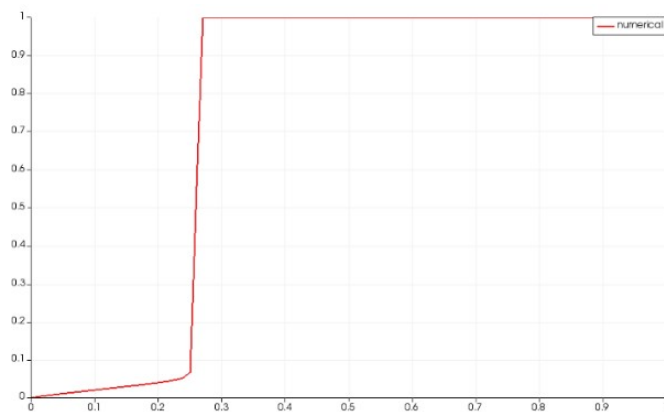
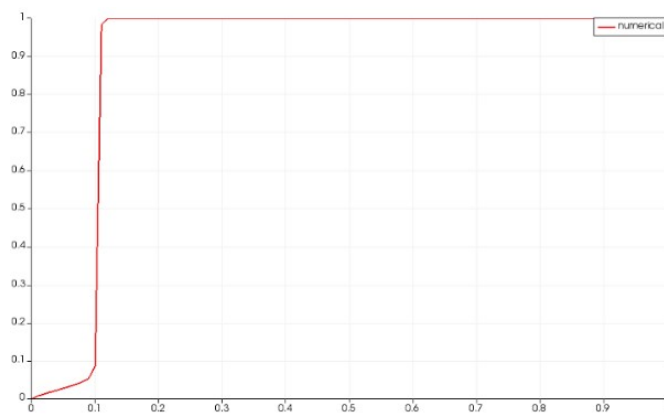
$n = 50$

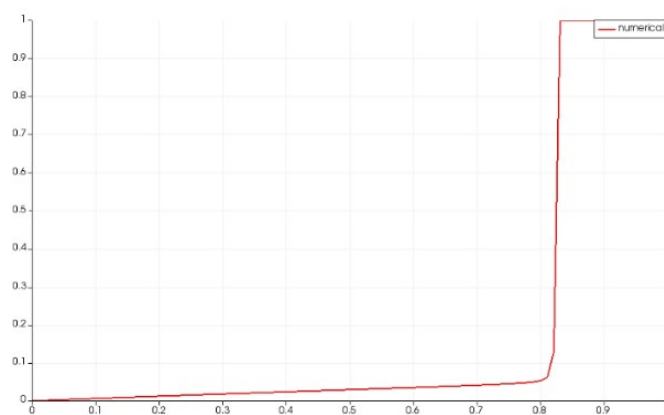


$n = 200$  $n = 500$  $n = 750$ 

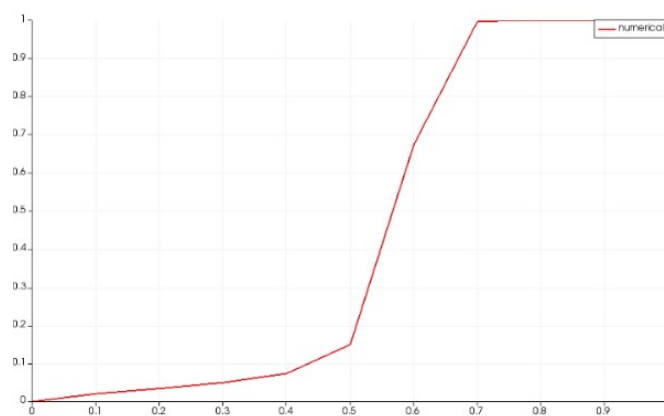
## 4.2 $u_l < u_r$

Uzimamo  $a = 0.1$ , vremenski korak  $\Delta t = 0.001$  i uzmimo  $u_l = 0$ ,  $u_r = 1$ . Pogledajmo kako se rješenje ponaša kroz vrijeme za npr.  $n = 200$ .

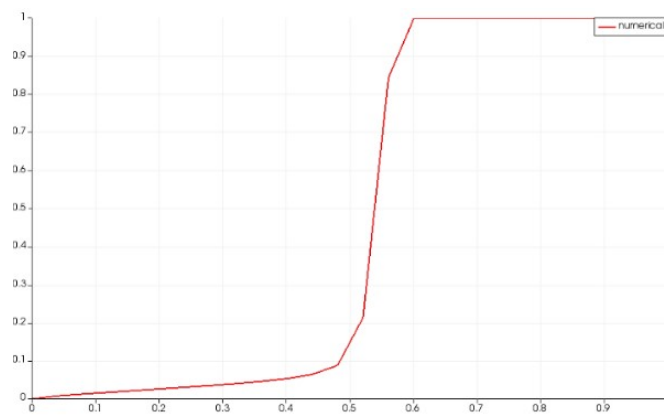


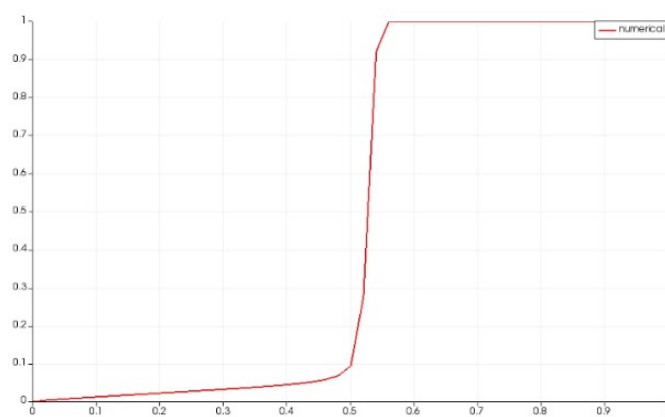
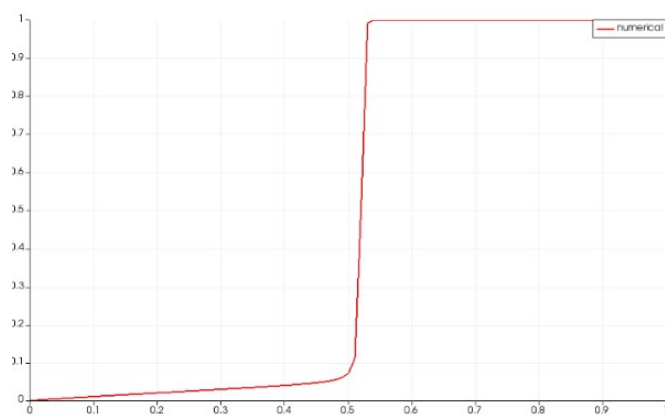


Sada pogledajmo rješenje za neki  $t$  mjenjajući  $n$ .  
 $n = 10$



$n = 25$



$n = 50$  $n = 100$ 

## Literatura

- [1] Randall J. LeVeque: Numerical Methods for Conservation Laws, Springer 1990.
  - [2] C.J. van Dujin, L.A. Peletier, I.S. Pop: A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation
-