

প্রয়োগ : 5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার একটি ব্যাস AB এবং A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক PAQ; PAQ-এর সমান্তরাল জ্যা RS; যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখন্ডক।



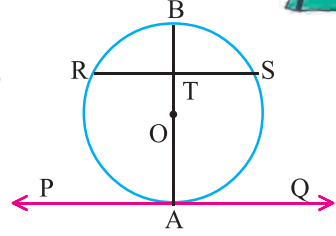
প্রমাণ : ধরি, AB, RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AB ব্যাস। সুতরাং, $AB \perp PQ$

আবার, $PQ \parallel RS$ [প্রদত্ত]

$\therefore AB \perp RS$ অর্থাৎ, $OT \perp RS$

$\therefore T$, RS-এর মধ্যবিন্দু [\because বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যা-টিকে সমদ্বিখন্ডিত করে]

$\therefore AB$, RS-এর লম্বসমদ্বিখন্ডক।



প্রয়োগ : 6. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি পরস্পর সমান্তরাল।
(নিজে করি)

কষে দেখি 15.1

1. মাসুম O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার AB একটি জ্যা। B বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করেছে যা বর্ধিত AO-কে T বিন্দুতে ছেদ করল। $\angle BAT = 21^\circ$ হলে, $\angle BTA$ -এর মান হিসাব করে লিখি।
2. কোনো বৃত্তের XY একটি ব্যাস। বৃত্তটির উপর অবস্থিত A বিন্দুতে PAQ বৃত্তের স্পর্শক। X বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব PAQ-কে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XA , $\angle YXZ$ -এর সমদ্বিখন্ডক।
3. একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যার PR একটি ব্যাস। P বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করলাম এবং এই স্পর্শকের উপরে S এমন একটি বিন্দু নিলাম যাতে $PR = PS$ হয়। RS, বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $ST = RT = PT$ ।
4. একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করি যার দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $AB = OT$ এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখন্ডিত করে।
5. দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির AB ও AC জ্যা দুটি অপর বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করি যে, $PQ = \frac{1}{2} BC$ ।
6. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে স্পর্শকের উপর X যে-কোনো একটি বিন্দু। X বিন্দু থেকে অঙ্কিত একটি ছেদক বৃত্তকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। YZ-এর মধ্যবিন্দু P হলে, প্রমাণ করি যে, XAPO বা XAOP একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।
7. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। ওই ব্যাসের উপর O বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। বর্ধিত QP বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত OP-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $SP = SR$ ।
8. বুমেলা O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার QR একটি জ্যা। Q ও R বিন্দুতে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। QM বৃত্তের একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, $\angle QPR = 2 \angle RQM$ ।
9. কোনো বৃত্তের AC ও BD দুটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle P + \angle Q = 2 \angle BOC$ ।

প্রয়োগ : 17. সুমিতা দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। যদি PQ ও RS দুটি বৃত্তের ব্যাস হয় যারা পরস্পর সমান্তরাল, তবে প্রমাণ করি যে, P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ।

প্রদত্ত : দুটি বৃত্ত পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির ব্যাস PQ ও RS সমান্তরাল।

প্রমাণ করতে হবে : P, O, S বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : ধরি বৃত্ত দুটির কেন্দ্র A ও B ; O, A; O, B; O, P; O, Q; O, R; O, S যুক্তি করি।

প্রমাণ : বৃত্তদুটির কেন্দ্র A ও B.

O বিন্দুতে বৃত্তদুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে।

∴ A, O ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ΔAOP-এর AP = AO, ∴ ∠APO = ∠AOP

আবার ∠PAO + ∠APO + ∠AOP = 180°

∴ 2∠AOP = 180° - ∠PAO

অনুরূপভাবে, ΔBOR থেকে পাই 2∠ROB = 180° - ∠RBO

∴ 2∠AOP + 2∠ROB = 360° - (∠PAO + ∠RBO)
= 360° - 180° [∵ PQ ∥ RS এবং AB ভেদক]
= 180°

∴ ∠AOP + ∠ROB = 90°

∴ ∠POR = 180° - (∠AOP + ∠ROB) = 180° - 90° = 90°

∠POR + ∠ROS = 90° + 90° = 180° (∵ ∠ROS অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং ∠ROS = 90°)

∴ ∠POS = 180°

∴ P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ। **[প্রমাণিত]**



কষে দেখি 15.2

- 16 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 17 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
- একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি A বিন্দুতে ছেদ করেছে। ∠PAQ = 60° হলে ∠APQ-এর মান নির্ণয় করি।
- O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AP ও AQ বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। PR একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, OA ∥ RQ
- প্রমাণ করি যে, একটি বৃত্তের পরিলিখিত কোনো চতুর্ভুজের যে-কোনো দুটি বিপরীত বাহুর দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।
- প্রমাণ করি যে, বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক মাত্রই রম্বস।
- A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর O একটি বিন্দু এবং OD ও OE যথাক্রমে A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। ∠COD = 56°, ∠COE = 40°, ∠ACD = x° এবং ∠BCE = y° হলে প্রমাণ করি যে OD = OC = OE এবং x - y = 8

7. A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করেছে। অপর একটি বৃত্ত, বৃত্তদ্বয়ের বৃত্তটিকে X বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে Y বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O যদি ওই বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $AO + BO$ ধ্রুবক হবে।
8. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AP \parallel BQ$.
9. তিনটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, ওই বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
10. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু A থেকে অঙ্কিত AB ও AC দুটি স্পর্শক বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। উপচাপ BC-এর উপর অবস্থিত X বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $\triangle ADE$ -এর পরিসীমা = 2 AB.

11. অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

- (i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। $OB = 5$ সেমি., $AO = 13$ সেমি. হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
(a) 12 সেমি. (b) 13 সেমি. (c) 6.5 সেমি. (d) 6 সেমি.
- (ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। AB বৃত্ত দুটির একটি সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করে। $\angle ACB$ -এর পরিমাপ
(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 90°
- (iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। O বিন্দু থেকে 13 সেমি. দূরত্বে P একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য PQ এবং PR; PQOR চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
(a) 60 বর্গ সেমি. (b) 30 বর্গ সেমি. (c) 120 বর্গ সেমি. (d) 150 বর্গ সেমি.
- (iv) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. ও 3 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। বৃত্তদুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 2 সেমি. (b) 2.5 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) 8 সেমি.
- (v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি. ও 2 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করে। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 5.5 সেমি. (b) 1 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) কোনোটিই নয়

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

- (i) একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু P ; বৃত্তে অঙ্কিত কোনো স্পর্শক P বিন্দুগামী নয়।
- (ii) একটি বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল দুইয়ের অধিক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

- (i) একটি সরলরেখা বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের _____ বলে।
- (ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ বা স্পর্শ না করলে বৃত্তদুটির সর্বাধিক সংখ্যায় _____ টি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
- (iii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক হলো _____ সাধারণ স্পর্শক (সরল / তির্যক)।

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)

- (i) পাশের চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং BOA বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত BA -কে T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle PBO = 30^\circ$ হলে, $\angle PTA$ -এর মান নির্ণয় করি।
- (ii) পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে পরিলিখিত এবং বৃত্তকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি $AP = 4$ সেমি., $BP = 6$ সেমি., $AC = 12$ সেমি. এবং $BC = x$ সেমি. হয়। তাহলে x -এর মান নির্ণয় করি।
- (iii) পাশের চিত্রে A, B, C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। যদি $AB = 5$ সেমি., $BC = 7$ সেমি. এবং $CA = 6$ সেমি. হয়, তাহলে A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
- (iv) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে বহিঃস্থ বিন্দু C থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু R -তে অঙ্কিত স্পর্শক CP ও CQ -কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি, $CP = 11$ সেমি. এবং $BC = 7$ সেমি. হয়, তাহলে BR -এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
- (v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ৪ সেমি. ও ৩ সেমি. এবং তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব ১৩ সেমি.। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

