# 23 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

## TRIGONOMETRIC RATIOS AND TRIGOMETRIC IDENTITIES

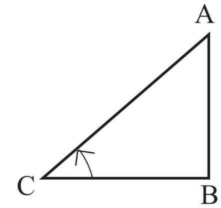
আমি আমার খাতায় রীনার ঘুড়ির ওড়ানোর ছবিটি এঁকে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC পেয়েছি,

যার, C বিন্দু ভূমিতে রীনার অবস্থান

A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

AB ভূমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের উচ্চতা।

এবং, $\angle BCA$ একটি সূক্ষ্মকোণ।



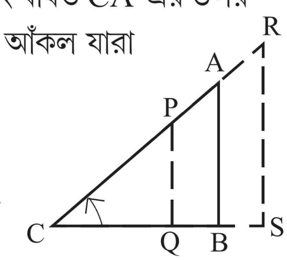

**1** কিন্তু $\angle BCA$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB ও BC -কে কী বলব?

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে $\angle BCA$ **কোণের বিপরীত বাহু বা লম্ব** এবং BC বাহুকে $\angle ACB$ **কোণের সংলগ্ন বাহু বা ভূমি** বলা হয়।

বুঝেছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC$ কোণের বিপরীত বাহু ☐ এবং $\angle BAC$ কোণ সংলগ্ন বাহু AB

শুভ আমার আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC-এর উপরে একটি বিন্দু P এবং বর্ধিত CA-এর উপর একটি বিন্দু R নিল। P ও R বিন্দু থেকে BC ও বর্ধিত CB-এর উপর দুটি লম্ব আঁকল যারা BC-কে এবং CB-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Q ও S বিন্দুতে ছেদ করল।

এরফলে, PQC ও RSC আরও দুটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম।




**2** PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক জানার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

দেখছি, PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশ। **[নিজে প্রমাণ করি]**

(i) $\frac{PQ}{CP}=\frac{AB}{CA}=\frac{RS}{CR}$ (ii) $\frac{CQ}{CP}=\frac{CB}{CA}=\frac{CS}{CR}$ (iii) $\frac{PQ}{CQ}=\frac{AB}{CB}=\frac{RS}{CS}$

(iv) $\frac{CP}{PQ}=\frac{CA}{AB}=\frac{CR}{RS}$ (v) $\frac{CP}{CQ}=\frac{CA}{CB}=\frac{CR}{CS}$ (vi) $\frac{CQ}{PQ}=\frac{CB}{AB}=\frac{CS}{RS}$

দেখছি, তিনটি সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle BCA$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে

(i) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান (ii) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান এবং (iii) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ অনুপাতগুলিও সমান।

অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে ও একইভাবে একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে একাধিক সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখছি (i), (ii) ও (iii) নং অনুপাতগুলি সমান। **[নিজে করি]**

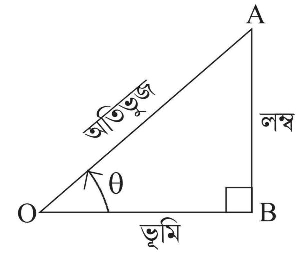
বুঝেছি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত ওই ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অনুপাতগুলি সম্পূর্ণভাবে সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণের উপর নির্ভরশীল।

**3** কিন্তু একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাতগুলি পেলাম, তাদের আলাদা আলাদা কী নাম আছে দেখি।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাত পাওয়া যায় তাদের **ত্রিকোণমিতিক অনুপাত** বলা হয়।

পাশের চিত্রের ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = এক সমকোণ

$\therefore$ OA অতিভুজ এবং $\angle BOA$ সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে OB = ভূমি এবং AB = লম্ব। ধরি, $\angle AOB = \theta$




$\angle BOA$ -এর Sine = $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{OA} = \sin\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosine = $\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{OB}{OA} = \cos\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Tangent = $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{AB}{OB} = \tan\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosecant = $\dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{OA}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Secant = $\dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{OA}{OB} = \sec\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cotangent = $\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{OB}{AB} = \cot\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

**4** উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি দেখি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

দেখছি, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ -র অন্যোন্যক।

অর্থাৎ, $\boldsymbol{\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}}$ , $\boldsymbol{\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}}$ , $\boldsymbol{\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}}$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{\frac{AB}{OA}}{\frac{OB}{OA}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore$ পেলাম, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

আবার, $\cot\theta = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\frac{OB}{OA}}{\frac{AB}{OA}} = \dfrac{\boxed{\phantom{xx}}}{\boxed{\phantom{xx}}}$ **[নিজে লিখি]**

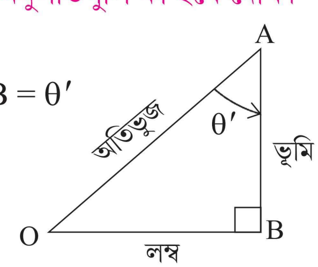
$\therefore$ পেলাম, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

দেখছি, সমকোণী ত্রিভুজ ABO-এর সূক্ষ্মকোণ $\angle BOA$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ওই ত্রিভুজের কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে এবং কোনো নির্দিষ্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানগুলি সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সঙ্গে পরিবর্তনশীল নয়।

**5** কিন্তু ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি কী হবে দেখি।

ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = 1 সমকোণ। $\therefore$ OA = অতিভুজ

$\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB = ভূমি এবং OB = লম্ব। ধরি, $\angle OAB = \theta'$

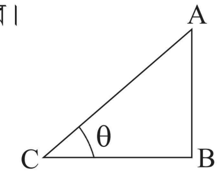



$\therefore\ \sin\theta' = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{OB}{OA}$

$\cos\theta' = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{OA}$

$\tan\theta'$, $\operatorname{cosec}\theta'$, $\sec\theta'$, $\cot\theta'$ **নিজে লিখি।**

বুঝেছি, রীনার ঘুড়ি যদি AC দৈর্ঘ্যের লম্বা সুতো দিয়ে বাঁধা থাকে এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $60^{\circ}$ কোণ করে উড়তে থাকে তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান থেকে AB উচ্চতায় থাকবে।




$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \therefore AB = AC \times \sin\theta$$

$\therefore$ তখন রীনার ঘুড়ি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $AC \times \sin\theta$ উচ্চতায় থাকবে।

**6** **কিন্তু $\sin\theta$ কি sin এবং $\theta$ -এর গুণফল ?**

$\theta$ কোণের sine-এর সংক্ষিপ্ত রূপ "$\sin\theta$"। কিন্তু **sin ও $\theta$-এর গুণফল $\sin\theta$ নয়**। একইভাবে $\cos\theta$ , cos এবং $\theta$-এর গুণফল নয় এবং অন্য সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি একই রকমের।

আর্যভট্ট (500 A.D.) প্রথম sin-এর ধারণা ব্যবহার করেন। এরপর আর্যভট্টের কাজ আরবি ও লাতিন ভাষায় অনুবাদ করা হয়। লাতিন ভাষায় (Sinus) শব্দটি ব্যবহৃত হয়। এরপর সমগ্র ইউরোপে গণিতের সর্বক্ষেত্রে 'Sinus' শব্দটি 'Sine' শব্দ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। ইংরেজ জ্যোতির্বিজ্ঞানী অধ্যাপক Edmund Gunter (1581–1626) প্রথম সংক্ষিপ্ত আকারে 'Sin' ব্যবহার করেন।

**7** **$\sin\theta$-এর বর্গ কীভাবে লিখব?**

লেখার সুবিধার জন্য, $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ লেখা হয়, তবে $(\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$

অনুরূপে, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^3 = \tan^3\theta$ ইত্যাদি।

$\text{cosec}\,\theta = (\sin\theta)^{-1}$ লেখা যায়। কিন্তু $\text{cosec}\,\theta \neq \sin^{-1}\theta$ (একে Sin inverse $\theta$ বলা হয়।)

$\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\therefore$ $\sin\theta$-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে?

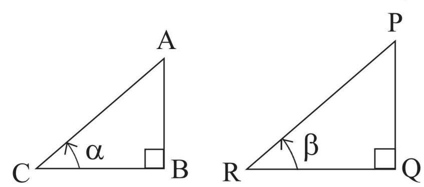
$\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ ; যেহেতু লম্ব, অতিভুজের থেকে বড়ো হতে পারে না।

সুতরাং, $\sin\theta$-এর মান 1-এর বেশি হবে না।

**8** **$\cos\theta$-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে? [নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 1.** $\alpha$ ও $\beta$ দুটি এমন সূক্ষ্মকোণ যে $\sin\alpha = \sin\beta$ ; প্রমাণ করি যে, $\alpha = \beta$

ধরি, ABC এবং PQR দুটি সমকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $\angle BCA = \alpha$; PQR ত্রিভুজে $\angle PQR = 90^{\circ}$ এবং $\angle QRP = \beta$

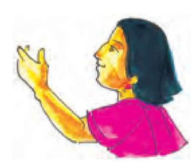



সমকোণী $\Delta ABC$-তে, $\sin\alpha = \dfrac{AB}{AC}$ ;

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin\beta = \dfrac{PQ}{PR}$

যেহেতু, $\sin\alpha = \sin\beta$, সুতরাং, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{PQ}{PR}$ বা, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = k$ (ধরি) $(k>0)$

$\therefore AB = k.PQ$ এবং $AC = k.PR$



$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ এবং $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

সুতরাং, $\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{\sqrt{AC^2-AB^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = \dfrac{\sqrt{k^2PR^2-k^2PQ^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = \dfrac{k\sqrt{PR^2-PQ^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = k$ $\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ সুতরাং, $\angle BCA = \angle QRP$ $\therefore \alpha = \beta$ [প্রমাণিত]

বুঝেছি, $\sin\alpha = \sin 45^{\circ}$ হলে, $\alpha = 45^{\circ}$ [$\sin\alpha = \sin\beta$ হলে উভয়পক্ষে sin দিয়ে ভাগ করতে পারি না। কারণ $\sin\alpha = \sin\times\alpha$ নয়। তাই যখন, $\cancel{\sin}\,\alpha = \cancel{\sin}\,\beta$ তখন $\alpha = \beta$ এভাবে লিখতে পারি না। এটা ভুল]

**প্রয়োগ : 2.** $\sin(90^\circ-\theta) = \sin 2\theta$ হলে, $\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি যখন $2\theta$ সূক্ষ্মকোণ।

$\sin(90^\circ-\theta)=\sin 2\theta$

বা, $90^\circ-\theta = 2\theta$

বা, $3\theta = 90^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

**প্রয়োগ : 3.** $5\theta$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan 5\theta = \tan(60^\circ+\theta)$ হলে, $\theta$-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

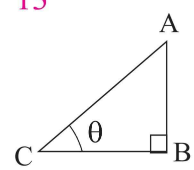
**মনে রাখব :** সাধারণত, (i) $\sin 2\theta \neq 2\sin\theta$

(ii) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \neq \dfrac{\alpha}{\beta}$

এবং (iii) $\sin\alpha \pm \sin\beta \neq \sin(\alpha \pm \beta)$

কোণের Cosine, tangent ইত্যাদির ক্ষেত্রেও এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

**প্রয়োগ : 4.** একটি সমকোণী ত্রিভুজে $\theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।




$\sin\theta = \dfrac{12}{13} = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle BCA = \theta$

ধরি, লম্ব $AB = 12k$ একক এবং অতিভুজ $AC = 13k$ একক [যেখানে, $k>0$]

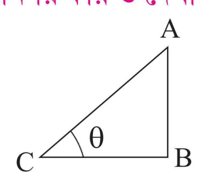
$\therefore$ ভূমি $BC = \sqrt{AC^2-AB^2} = \sqrt{(13k)^2-(12k)^2}$ একক $= \sqrt{169k^2-144k^2}$ একক

$= 5k$ একক

$\therefore \tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{12k}{5k} = \dfrac{12}{5}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{5k}{13k} = \dfrac{5}{13}$

**প্রয়োগ : 5.** $\theta$ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \dfrac{8}{15}$ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মান নির্ণয় করি ও দেখাই যে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle ACB = \theta$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{15}$

ধরি, লম্ব $AB = 8k$ একক এবং ভূমি $BC = 15k$ একক [যেখানে, $k>0$]

$\therefore$ অতিভুজ $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{(8k)^2+(15k)^2}$ একক $= \sqrt{64k^2+225k^2}$ একক

$= \sqrt{289k^2}$ একক $= 17k$ একক

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{8k}{17k} = \dfrac{8}{17}$

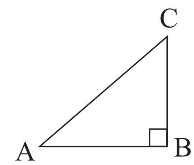
$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \dfrac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$ [নিজে লিখি]

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\dfrac{8}{17}\right)^2 + \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{64}{289} + \dfrac{225}{289} = \boxed{\phantom{00}}$ [নিজে লিখি]

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 6.** যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 7.** ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\sqrt{13}$ একক। ওই ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 5 একক হলে, $\sin C + \sin A$-এর মান নির্ণয় করি।




ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC

$\angle C$-এর সাপেক্ষে লম্ব AB

এবং $\angle A$-এর সাপেক্ষে লম্ব BC

$$\therefore \sin C + \sin A = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

**বিকল্প প্রমাণ :** মনে করি, AB = x একক, BC = (5–x) একক

ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$x^2+(5-x)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$

বা, $x^2+25+x^2-10x = 13$

বা, $2x^2-10x+12 = 0$

বা, $x^2-5x+6 = 0$

বা, $x^2-3x-2x+6 = 0$

বা, $x(x-3)-2(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

হয়, $x-3 = 0 \quad \therefore x = 3$

অথবা, $x-2 = 0 \quad \therefore x = 2$

যদি, AB = 3 একক হয়, তখন BC = (5–3) একক = 2 একক

সুতরাং, $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ এবং $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

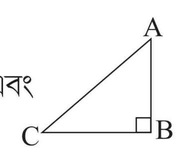
$$\therefore \sin C + \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

আবার, AB=2 একক হলে BC= $\boxed{\phantom{xx}}$ একক এবং তখন $\sin C+\sin A = \boxed{\phantom{xx}}$ [একই ভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

কিন্তু যদি $(\sin C-\sin A)$-এর মান নির্ণয় করতে চাই তাহলে কি প্রথম পদ্ধতিতে করব না বিকল্প প্রমাণের সাহায্যে করব তা যুক্তিসহ চিন্তা করে নিজে করি।

## কষে দেখি 23.1

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছি যার অতিভুজ AB=10 সেমি., ভূমি BC= 8 সেমি. এবং লম্ব AC=6 সেমি.। $\angle ABC$-এর Sine এবং tangent-এর মান নির্ণয় করি।




2. সোমা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার $\angle ABC=90^\circ$, AB=24 সেমি. এবং BC=7 সেমি.। হিসাব করে sinA, cosA, tanA ও cosecA-এর মান লিখি।
3. যদি ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C=90^\circ$, BC=21 একক এবং AB=29 একক হয়, তাহলে sinA, cosA, sinB ও cosB-এর মান নির্ণয় করি।
4. যদি $\cos\theta = \frac{7}{25}$ হয়, তাহলে $\theta$ কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।

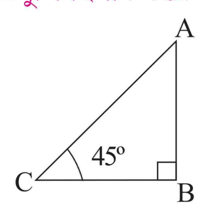
5. যদি $\cot\theta=2$ হয়, তাহলে $\tan\theta$ ও $\sec\theta$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
6. $\cos\theta=0.6$ হলে, দেখাই যে, $(5\sin\theta-3\tan\theta)=0$
7. যদি $\cot A=\frac{4}{7.5}$ হয়, তাহলে $\cos A$ এবং $\operatorname{cosec} A$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$
8. যদি $\sin C=\frac{2}{3}$ হয়, তবে $\cos C\times\operatorname{cosec} C$-এর মান হিসাব করে লিখি।
9. নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা তা যুক্তি সহকারে লিখি।
   (i) $\tan A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বড়ো।
   (ii) $\cot A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা ছোটো।
   (iii) একটি কোণ $\theta$-এর জন্য $\sin\theta=\frac{4}{3}$ হতে পারে।
   (iv) একটি কোণ $\alpha$-এর জন্য $\sec\alpha=\frac{12}{5}$ হতে পারে।
   (v) একটি কোণ $\beta$(Beta)-এর জন্য $\operatorname{cosec}\beta=\frac{5}{13}$ হতে পারে।
   (vi) একটি কোণ $\theta$-এর জন্য $\cos\theta=\frac{3}{5}$ হতে পারে।

আমাদের বন্ধুরা প্রত্যেকে ঘুড়ি ওড়াল। সবার ঘুড়িই অনেকটা উঁচুতে উড়েছিল। কিন্তু সতীশের ঘুড়ি সবচেয়ে বেশি উচ্চতায় উড়েছিল।

আজ আমরা ঠিক করেছি বাড়ি ফিরে নানা ধরনের সমকোণী ত্রিভুজ আঁকব (পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে) যাদের একটি কোণের পরিমাপ $30^\circ$ বা $45^\circ$ বা $60^\circ$ এবং সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের চেষ্টা করব।

আশা তার খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল আর $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA$ -এর মান $45^\circ$

**9** আমার আঁকা ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি হিসাব করে লিখি।




ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=45^\circ$

$\therefore\ \angle CAB=45^\circ$

$\therefore\ \Delta ABC$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সুতরাং, $BC=BA$

ধরি, $BA=BC=a$ একক

$\therefore\ AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2$

$\therefore\ AC=a\sqrt{2}$ একক

$\sin\angle BCA=\sin45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

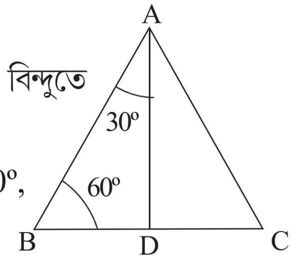
$\cos\angle BCA=\cos45^\circ=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\angle BCA=\tan45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{a}=1$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec}45^\circ=\frac{1}{\sin45^\circ}=\sqrt{2}$, $\sec45^\circ=\frac{1}{\boxed{\phantom{00}}}=\sqrt{2}$ এবং $\cot45^\circ=\frac{1}{\tan45^\circ}=\boxed{\phantom{00}}$

**আমি $30^\circ$ ও $60^\circ$ কোণদ্বয়ের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।**

আমি একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC আঁকলাম। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ $\boxed{\quad}$ [60º/45º]




$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

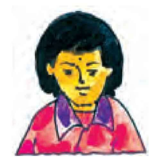
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [$\Delta ABD$ ও $\Delta ACD$-তে $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$ এবং $AB = AC$.

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)]

$\therefore BD=DC$ এবং $\angle BAD=\angle CAD$

আবার, ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ; $\angle ADB=90^\circ$, $\angle DBA=60^\circ$ $\therefore \angle BAD=30^\circ$

ধরি, $AB=2a$ একক, $\therefore BC=2a$ একক



সুতরাং, $BD=\frac{1}{2}BC=a$ একক

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $AD = \sqrt{AB^2-BD^2} = \sqrt{(2a)^2-a^2}$
$= \sqrt{4a^2-a^2} = a\sqrt{3}$ একক

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 30^\circ = \boxed{\quad}$, $\sec 30^\circ = \boxed{\quad}$ এবং $\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$ **[নিজে লিখি]**

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

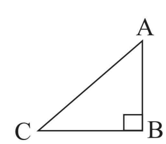
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

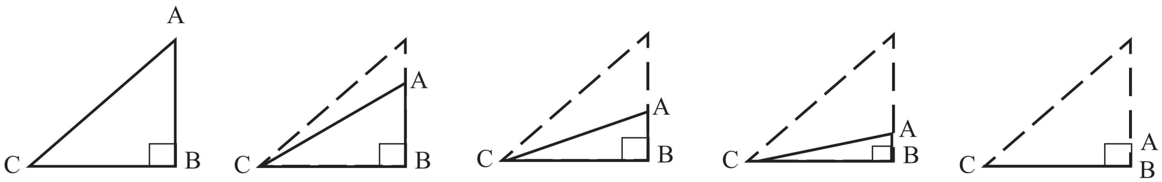
বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$ **[নিজে লিখি]**

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ এবং } \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**10** কিন্তু যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ABC-এর সূক্ষ্মকোণটির মান যদি ক্রমশ কমতে থাকে তবে ওই সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের কী পরিবর্তন হবে ছবি এঁকে দেখি।




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ; $\angle BCA$ -এর মান ক্রমশ কমতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় 0º-এর কাছে হয়।




চিত্রে দেখছি, $\angle BCA$-এর মান যতই কমতে থাকছে A-বিন্দু ততই B বিন্দুর দিকে অগ্রসর হচ্ছে অর্থাৎ ততই AB বাহুর দৈর্ঘ্য কমতে থাকছে এবং A বিন্দু প্রায় B বিন্দুর কাছে এলে $\angle BCA$-এর মান প্রায় $0^\circ$ হয় এবং AC ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়। অর্থাৎ $\angle BCA$-এর মান প্রায় $0^\circ$-এর কাছে আসলে AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় 0-এর কাছে হয়।

$\therefore\ \sin\angle BCA = \dfrac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছে হবে যখন $\angle BCA$-এর মান প্রায় $0^\circ$-এর কাছে হয়।

আবার $\angle BCA$-এর মান যখন প্রায় $0^\circ$-এর কাছে হয় তখন AC ও BC বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়।

সুতরাং $\cos\angle BCA = \dfrac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছে হয় যখন $\angle BCA$-এর মান $0^\circ$-এর কাছে হয়।

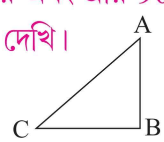
সুতরাং, এই ক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

**$\sin 0^\circ = 0$ এবং $\cos 0^\circ = 1$**

$\therefore \tan 0^\circ = \dfrac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0$ এবং $\cot 0^\circ = \dfrac{1}{\tan 0^\circ}$, যা অসংজ্ঞাত

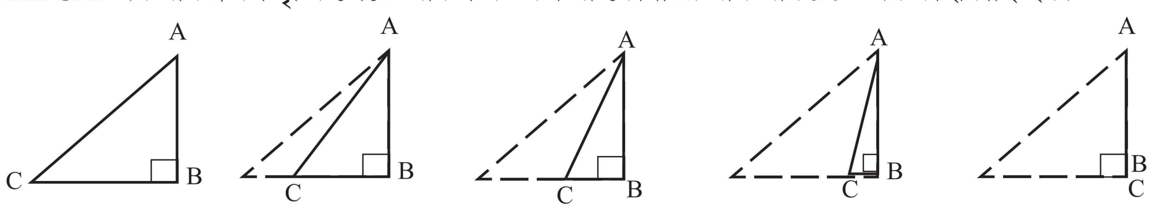
বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 0^\circ = \dfrac{1}{\sin 0^\circ}$, যা অসংজ্ঞাত এবং $\sec 0^\circ = \dfrac{1}{\cos 0^\circ} = 1$

যদি উপরের ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ সূক্ষ্মকোণের মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায় এবং প্রায় $90^\circ$ কোণের কাছাকাছি যায়, তখন $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান কী হবে দেখি।




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ,

$\angle BCA$-এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় $90^\circ$-এর কাছাকাছি হয়।




চিত্রে দেখছি, $\angle BCA$-এর মান বৃদ্ধি পেয়ে যতই প্রায় $90^\circ$-এর দিকে কাছাকাছি যাচ্ছে $\angle CAB$-এর মান ততই কমে প্রায় $0^\circ$ কোণের কাছাকাছি যাচ্ছে এবং C বিন্দু B বিন্দুর দিকে ক্রমশ সরে যাওয়ায় CB বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় শূন্যের কাছে যাচ্ছে।

আবার, AC বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় AB বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান হচ্ছে।

সুতরাং, সেক্ষেত্রে $\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছাকাছি যাবে যখন $\angle BCA$ এর মান $90^\circ$-এর কাছাকাছি যাবে।

আবার, $\cos\angle BCA = \dfrac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছাকাছি যাবে যখন $\angle BCA$-এর মান প্রায় $90^\circ$-এর কাছাকাছি যাবে।

সুতরাং, এক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

$\sin 90^\circ = 1$ এবং $\cos 90^\circ = 0$

$\therefore \tan 90^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$ যা অসংজ্ঞাত এবং $\cot 90^\circ = \dfrac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = 0$

$\operatorname{cosec} 90^\circ$ ও $\sec 90^\circ$-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

পেলাম,

| $\theta$ কোণের কোণানুপাত | $0^{\circ}$ বা 0 | $30^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{6}$ | $45^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{4}$ | $60^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{3}$ | $90^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | অসংজ্ঞাত |
| $\operatorname{cosec}\theta$ | অসংজ্ঞাত | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| $\sec\theta$ | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | অসংজ্ঞাত |
| $\cot\theta$ | অসংজ্ঞাত | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

উপরের ছক থেকে দেখছি, $\theta$ কোণের মান $0^{\circ}$ থেকে $90^{\circ}$ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\sin\theta$-এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয় এবং $\cos\theta$-এর মান 1 থেকে হ্রাস পেয়ে 0 হয়।

**আরও দেখছি, $0^{\circ}$ থেকে $90^{\circ}$ পর্যন্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি শূন্য, ধনাত্মক বা অসংজ্ঞাত হয়। কিন্তু ঋণাত্মক হয় না।**

যেহেতু দশম শ্রেণির পাঠ্যসূচিতে $\theta$ সর্বদা ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি ঋণাত্মক হবে না।

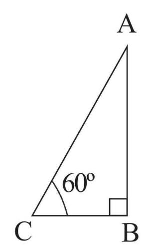
**প্রয়োগ : 8.** রীনার ঘুড়িটি যদি 150 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হয় এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $60^{\circ}$ কোণ করে থাকে, তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উঁচুতে আছে হিসাব করে দেখি।

নীচের ছবিতে, ABC সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC=90^{\circ}$, AC=150 মিটার লম্বা সুতোসমেত ঘুড়ি

এবং $\angle BCA = 60^{\circ}$

AB = রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে ঘুড়ির উচ্চতা

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB নির্ণয়ের জন্য সেই কোণানুপাতটি নেব যেখানে AB ও AC আছে। [$\because$ AC-এর দৈর্ঘ্য জানা]

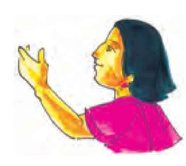



ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin 60^{\circ} = \frac{AB}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{150 \text{ মিটার}}$

বা, $2AB = 150\sqrt{3}$ মিটার

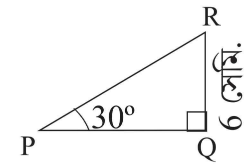
বা, $AB = \frac{150\sqrt{3}}{2}$ মিটার $= 75\sqrt{3}$ মিটার



$\therefore$ ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $75\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে আছে।

**প্রয়োগ : 9.** যদি ঘুড়িটি 120 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হতো এবং ঘুড়িটি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $30^{\circ}$ কোণ করে থাকে, তাহলে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উচ্চতায় থাকবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 10.** PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q$ সমকোণ এবং $\angle P=30^o$; RQ=6 সেমি. হলে, PQ ও PR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।




সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\tan 30^o = \dfrac{RQ}{PQ}$

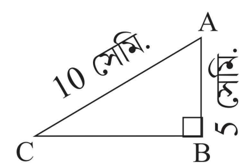
বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\text{সেমি.}}{PQ}$ $\quad\therefore PQ = 6\sqrt{3}$ সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin 30^o = \dfrac{RQ}{PR}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{6\text{সেমি.}}{PR}$ $\quad\therefore PR = 12$ সেমি.

**অন্যভাবে,** পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $PR^2 = PQ^2+RQ^2$
$= (6\sqrt{3}\text{ সেমি.})^2 + (6\text{ সেমি.})^2$
$= 108\text{ সেমি.}^2 + 36\text{ সেমি.}^2$
$= 144\text{ সেমি.}^2$
$\therefore PR = 12$ সেমি.

**প্রয়োগ : 11.** ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান নির্ণয় করি।




ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ

AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-তে, $\sin\angle BCA = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = \sin 30^o$

$\therefore \angle BCA = 30^o$

$\therefore \angle CAB = 90^o - 30^o = \boxed{\phantom{00}}$

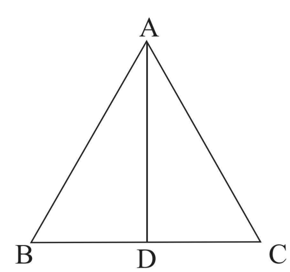
**প্রয়োগ : 12.** ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=7 সেমি. এবং $AC=7\sqrt{2}$ সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 13.** দেখাই যে, $\sin^2 30^o + \cos^2 30^o = 1$

$$\sin^2 30^o + \cos^2 30^o = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \textbf{[প্রমাণিত]}$$

**প্রয়োগ : 14.** দেখাই যে, $\tan^2 60^o + 1 = \sec^2 60^o$ **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 15.** ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে $\sin\angle BAD = \cos\angle DBA$.




ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা।

$\therefore AD \perp BC$ এবং $\angle BAD = \angle DAC$

ABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle DBA = 60^o$ [$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

$\therefore \angle BAD = 30^o$

$\therefore \sin\angle BAD = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$ এবং $\cos\angle DBA = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin\angle BAD = \cos\angle DBA$ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 16.** প্রমাণ করি যে, $\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$

$$\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

**প্রয়োগ : 17.** প্রমাণ করি যে, $\tan^2 60^\circ - 2\sin 60^\circ = 3 - \cot 30^\circ$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 18.** মান নির্ণয় করি : $\dfrac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12} = 5\frac{7}{12}$$

**প্রয়োগ : 19.** $\sin(A+B)=1$ এবং $\cos(A-B)=1$ যেখানে, $0^\circ \leq (A+B) \leq 90^\circ$ এবং $A>B$; A ও B কোণের মান নির্ণয় করি।

$\sin(A+B)=1=\sin 90^\circ$

$\therefore A+B = 90^\circ$

আবার, $\cos(A-B)=1=\cos 0^\circ$

$\therefore A-B = 0^\circ$

$$\begin{array}{rl} A+B &= 90^\circ \\ A-B &= 0^\circ \\ \hline 2A &= 90^\circ \end{array}$$

$\therefore A = 45^\circ$ এবং $B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

**প্রয়োগ : 20.** $\theta$ $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ -এর কোন মানের জন্য $\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 = 0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 = 0$

বা, $\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 2 = 0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta - 2) - 1(\sin\theta - 2) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$

হয়, $\sin\theta - 1 = 0 \quad \therefore \sin\theta = 1$;

অথবা, $\sin\theta - 2 = 0 \quad \therefore \sin\theta = 2$

যেহেতু, $\sin\theta$ -এর মান 1-এর বেশি হতে পারে না, সুতরাং $\sin\theta = 1 = \sin 90^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ$

**প্রয়োগ : 21.** $\theta\ (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$-এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\cos\theta = 0 = \cos 90^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ$

আবার, $2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$ বা $\theta = 30^\circ$ মানের জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ হবে।

কিন্তু $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে শুধু পাই $\theta = 30^\circ$, $\theta$-এর অন্য মানটি পাওয়া গেল না কেন দেখি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$-এর উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে পাই, $2\sin\theta = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

কিন্তু এখানে $\cos\theta \neq 0$ নয়। তাই $\cos\theta$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করা যায় না। এর জন্য $\theta$-এর দুটি মানের পরিবর্তে একটি মান পাওয়া গেল।

## কষে দেখি 23.2

1. আমাদের বাড়ির জানালায় একটি মই ভূমির সঙ্গে $60^\circ$ কোণে রাখা আছে। মইটি $2\sqrt{3}$ মিটার লম্বা হলে আমাদের ওই জানালাটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে ছবি এঁকে হিসাব করে লিখি।
2. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। $AB = 8\sqrt{3}$ সেমি. এবং $BC = 8$সেমি. হলে, $\angle ACB$ ও $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।
3. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ এবং $AC = 20$ সেমি.। BC এবং AB বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = 45^\circ$; যদি $PR = 3\sqrt{2}$ মিটার হয়, তাহলে PQ ও QR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
5. **মান নির্ণয় করি :**

   (i) $\sin^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ$ (ii) $\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

   (iii) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{3}\cot^2 30^\circ - \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

   (iv) $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

   (v) $\dfrac{\frac{1}{3}\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ} + \dfrac{\tan 60^\circ}{\cos 30^\circ}$ (vi) $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

   (vii) $\sec^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ - \dfrac{2\tan 30^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

   (viii) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

   (ix) $\dfrac{1-\sin^2 30^\circ}{1+\sin^2 45^\circ} \times \dfrac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\operatorname{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ} \div (\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$

6. দেখাই যে,

(i) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$ (ii) $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ (iii) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$ (v) $\dfrac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} + \sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ = \sec 60^\circ$

(vi) $\tan^2\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6}\ \tan^2\frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$ (vii) $\sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2\sin^2\frac{\pi}{4}$

7. (i) $x\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \dfrac{\tan^2 45^\circ \sec 60^\circ}{\operatorname{cosec} 60^\circ}$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $x^2 = \sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

8. $x \tan 30^\circ + y \cot 60^\circ = 0$ এবং $2x - y \tan 45^\circ = 1$ হলে, x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি।

9. যদি $A = B = 45^\circ$ হয়, তবে যাচাই করি যে,

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

10. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের BD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করি যে, $\tan\angle ABD = \cot\angle BAD$

(ii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB=AC$ এবং $\angle BAC=90^\circ$ ; $\angle BAC$-এর সমদ্বিখন্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

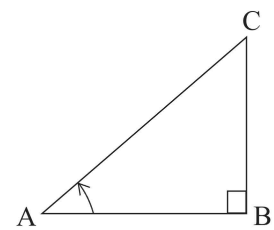
প্রমাণ করি যে , $\dfrac{\sec\angle ACD}{\sin\angle CAD} = \operatorname{cosec}^2 \angle CAD$

11. $\theta\ (0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$ - এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

---

আমাদের বন্ধু বিশাখ বোর্ডে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল যার $\angle B$ সমকোণ।

11 আজ আমরা বিশাখের আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের যে-কোনো সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে সম্পর্ক খোঁজার চেষ্টা করব।




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ।

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই, $AB^2+BC^2 = AC^2$ ———— (i)

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে $AC^2$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

বা, $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

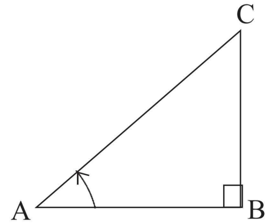
$\therefore\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ———— (I)

দেখছি, (I) নং সম্পর্কটি A কোণের সকল মানের জন্য প্রযোজ্য যখন $0^\circ \le A \le 90^\circ$

কিন্তু (I) নং সম্পর্কটিকে কী বলা হয়?

(I) নং সম্পর্কটি একটি **অভেদ**।

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে $AB^2$ দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।




$$AB^2+BC^2=AC^2$$

বা, $\dfrac{AB^2}{AB^2}+\dfrac{BC^2}{AB^2}=\dfrac{AC^2}{AB^2}$

$\therefore\ 1+\tan^2A=\sec^2A$ ________ (II)

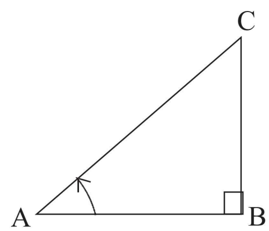
(II) নং অভেদে $A=0^o$ ও $A=90^o$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=0^o$ হলে II নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=90^o$ হলে $\tan A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^o\leq A<90^o$

$1+\tan^2A=\sec^2A$ ________ (II)

কিন্তু (i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে $BC^2$ দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।




$$AB^2+BC^2=AC^2$$

বা, $\dfrac{AB^2}{BC^2}+\dfrac{BC^2}{BC^2}=\dfrac{AC^2}{BC^2}$

বা, $\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2+1=\left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$

$\therefore \cot^2A+1=\operatorname{cosec}^2A$ ________ (III)

(III) নং অভেদে $A=90^o$ ও $A=0^o$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=90^o$ হলে (III) নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=0^o$ হলে $\cot A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^o<A\leq 90^o$

$1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$ ________ (III)

**12** আমি (I), (II) ও (III) নং অভেদের সাহায্যে প্রতিটি ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতকে অন্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করার চেষ্টা করি।

(I) নং থেকে পাই, $\sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$ এবং $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o\leq A\leq 90^o$

(II) নং থেকে পাই, $1+\tan^2A=\sec^2A$

$\therefore \sec A=\sqrt{1+\tan^2A}$ এবং $\tan A=\sqrt{\sec^2A-1}$

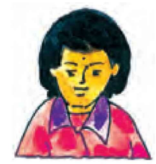
কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o\leq A<90^o$

(III) নং থেকে পাই, $1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$

$\therefore \operatorname{cosec}A=\sqrt{1+\cot^2A}$ এবং $\cot A=\sqrt{\operatorname{cosec}^2A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o< A\leq 90^o$

**প্রয়োগ : 22.** $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি।



$\sin\theta = 0.5 \qquad \therefore \sin^2\theta = 0.25$

$\cos\theta = 0.6 \qquad \therefore \cos^2\theta = 0.36$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 0.25 + 0.36 = 0.61$

কিন্তু $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

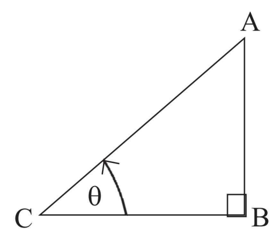
$\therefore$ $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব নয়।

**প্রয়োগ : 23.** $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\cos\theta = \frac{1}{3}$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 24.** $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta > 1$

ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ।

ধরি, $\angle BCA = \theta$ [যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$]




$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$ এবং $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC}$

কিন্তু ABC ত্রিভুজে, $AB+BC > AC$ সুতরাং, $\frac{AB+BC}{AC} > 1$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta > 1$

(i) $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ (a) যদি লম্ব > ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} > 1$

(b) আবার যদি লম্ব < ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} < 1$ হয়,

(c) যখন লম্ব = ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = 1$ হয়।

তাই $\tan\theta$-এর মান 1-এর বেশি, 1-এর কম এবং 1-এর সমান হতে পারে।

**$\tan\theta = \sqrt{2}$ হওয়া সম্ভব কি?**

যেহেতু $\sqrt{2} > 1$, তাই, $\tan\theta = \sqrt{2}$ হতে পারে।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ যেহেতু, অতিভুজ > লম্ব, সুতরাং, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} > 1$

**$\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব কি?**

যেহেতু, $\sqrt{3} > 1$ সুতরাং $\operatorname{cosec}\theta$-এর মান $\sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব।

**প্রয়োগ : 25.** আমি $\cot\theta$ ও $\sec\theta$ কে, $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

সুতরাং, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

**প্রয়োগ : 26.** আমি $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ কে, $\cos\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 27.** যদি $\tan\theta = \frac{8}{15}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ -এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

$$\tan\theta = \frac{8}{15}$$

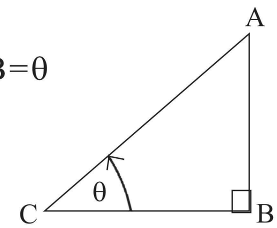
আমরা জানি, $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\left(\frac{8}{15}\right)^2 = 1+\frac{64}{225} = \frac{289}{225}$

$$\therefore\ \sec\theta = \frac{17}{15}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{15}{17}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

**অন্যভাবে পাই,** $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{8}{17}$




**বিকল্প প্রমাণ :** ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ। ধরি, $\angle ACB=\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{8}{15}$$

ধরি, AB=8k একক এবং BC=15k একক (যেখানে $k > 0$)

ABC ত্রিভুজে, $AC^2=AB^2+BC^2$ = (8k একক)$^2$+(15k একক)$^2$

= $64k^2$ বর্গএকক +$225k^2$ বর্গএকক = $289k^2$ বর্গএকক

$\therefore$ AC=17k একক

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k}$ $\quad \therefore \sin\theta = \frac{8}{17}$

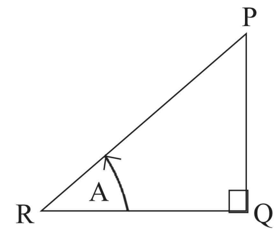
**প্রয়োগ : 28.** যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তাহলে $(\sin\theta+\cos\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 29.** $\sin A = \frac{p}{q}$ হলে, $\tan A$, $\cot A$ ও $\sec A$-এর প্রত্যেকটি কত হবে নির্ণয় করি।

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{\frac{q^2-p^2}{q^2}}} = \frac{p}{q}\times\frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}}{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}\times\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$




**বিকল্প প্রমাণ :** PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle Q$ সমকোণ।

ধরি, $\angle PRQ = A$

$\sin A = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{p}{q}$

ধরি, $PQ = pk$ একক এবং $PR = qk$ একক, যেখানে $k > 0$,

PQR ত্রিভুজে, $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = q^2k^2 - p^2k^2 = k^2(q^2 - p^2)$

$\therefore QR = k\sqrt{q^2 - p^2}$

$\tan A = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{pk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \dfrac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$

$\sec A = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{qk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \dfrac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$

$\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{1}{\dfrac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}} = \dfrac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$

**প্রয়োগ : 30.** যদি $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\dfrac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

বামপক্ষ $= \dfrac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta}$

$= \dfrac{\dfrac{x\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{y\sin\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{x\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{y\sin\theta}{\sin\theta}}$ [লব ও হরকে $\sin\theta$ দিয়ে ভাগ করে পাই]

$= \dfrac{x\cot\theta - y}{x\cot\theta + y} = \dfrac{x\times\dfrac{x}{y} - y}{x\times\dfrac{x}{y} + y} = \dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{y}}{\dfrac{x^2+y^2}{y}} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} =$ ডানপক্ষ

**বিকল্প পদ্ধতি : (I)** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ বা, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x}{y}$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{x} = \dfrac{\sin\theta}{y} = k$ (ধরি) যেখানে $k > 0$

$\therefore \cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$

$\therefore \dfrac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \dfrac{x\times xk - y\times yk}{x\times xk + y\times yk} = \dfrac{k\left(x^2-y^2\right)}{k\left(x^2+y^2\right)} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

> **মনে রাখতে হবে :** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ থেকে $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x}{y}$ পাই,
> কিন্তু $\cos\theta = x$ এবং $\sin\theta = y$ লেখা ভুল। $\cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$ নিতে পারি, যেখানে $k > 0$.

**বিকল্প পদ্ধতি : (II)** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ বা, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x}{y}$

বা, $\dfrac{x\cos\theta}{y\sin\theta} = \dfrac{x^2}{y^2}$ (উভয়পক্ষে $\dfrac{x}{y}$ দ্বারা গুণ করে পাই)

বা, $\dfrac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x\cos\theta - y\sin\theta} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

$\therefore \dfrac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

**প্রয়োগ : 31.** যদি $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ এবং $\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ ________ (i)

$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$, সমীকরণে $\cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ বসিয়ে পাই,

$\sin\theta\times\left(\frac{7}{5}-\sin\theta\right)=\frac{12}{25}$

বা, $\frac{7\sin\theta}{5}-\sin^2\theta=\frac{12}{25}$

বা, $7\sin\theta-5\sin^2\theta=\frac{12}{5}$

বা, $35\sin\theta-25\sin^2\theta=12$

বা, $25\sin^2\theta-35\sin\theta+12=0$

বা, $25\sin^2\theta-20\sin\theta-15\sin\theta+12=0$

বা, $5\sin\theta(5\sin\theta-4)-3(5\sin\theta-4)=0$

বা, $(5\sin\theta-4)(5\sin\theta-3)=0$ [উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পেলাম]

হয়, $5\sin\theta-4=0\quad\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$

অথবা, $5\sin\theta-3=0\quad\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \left.\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{4}{5}\\ \cos\theta=\frac{3}{5}\end{array}\right\}$ অথবা $\begin{array}{l}\sin\theta=\frac{3}{5}\\ \cos\theta=\frac{4}{5}\end{array}$

**বিকল্প প্রমাণ :** $(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\frac{7}{5}\right)^2-4\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}-\frac{48}{25}=\frac{1}{25}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{5}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$

যোগ করে পাই, $2\sin\theta=\frac{8}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{5}$

$2\sin\theta=\frac{6}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}, \cos\theta=\frac{3}{5}$ অথবা, $\sin\theta=\frac{3}{5}, \cos\theta=\frac{4}{5}$

**প্রয়োগ : 32.** $1+2\sin\theta\cos\theta$ -কে পূর্ণবর্গ রাশি হিসাবে প্রকাশ করি।

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$
$$= (\sin\theta+\cos\theta)^2$$

**প্রয়োগ : 33.** $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\dfrac{51}{79}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

$$\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\frac{51}{79} = \frac{209}{79}$$

বা, $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta-\sec\theta+\tan\theta} = \dfrac{209+79}{209-79}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

বা, $\dfrac{2\sec\theta}{2\tan\theta} = \dfrac{288}{130}$

বা, $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta} = \dfrac{130}{288} = \dfrac{65}{144}$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \dfrac{65}{144}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{65}{144}$

**প্রয়োগ : 34.** $\dfrac{5\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{5\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta} = \dfrac{7}{3}$ হলে, $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 35.** $x=a\cos\theta$ এবং $y=b\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি ও কী পাই দেখি।

$x=a\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = \dfrac{x}{a}$

আবার, $y=b\sin\theta \quad \therefore \sin\theta = \dfrac{y}{b}$

যেহেতু, $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\therefore \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = 1$

সুতরাং, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

**প্রয়োগ : 36.** $2x=3\sin\theta$ এবং $5y=3\cos\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করে $x$ ও $y$ -এর সম্পর্ক লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 37.** $x\cos\theta=3$ এবং $4\tan\theta=y$ সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি ও $x$ এবং $y$ -এর সম্পর্ক লিখি।

$x\cos\theta=3$ বা, $\cos\theta = \dfrac{3}{x} \quad \therefore \sec\theta = \dfrac{x}{3}$

$4\tan\theta=y \quad \therefore \tan\theta = \dfrac{y}{4}$

যেহেতু, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

সুতরাং, $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1$

$\therefore \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

**প্রয়োগ : 38.** $x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 39.** $x=a\cos\theta+b\sin\theta$, $y=b\cos\theta-a\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি।

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(b\cos\theta-a\sin\theta)^2 \\ &= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta \\ &= a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ &= a^2+b^2 \quad [\because \sin^2\theta+\sin^2\theta=1] \end{aligned}$$

$\therefore x^2+y^2 = a^2+b^2$

**প্রয়োগ : 40.** যদি $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$ হয়, তাহলে $(\sin^{10}\theta + \operatorname{cosec}^{10}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$

বা, $\sin\theta + \dfrac{1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\dfrac{\sin^2\theta+1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\sin^2\theta+1 = 2\sin\theta$

বা, $\sin^2\theta-2\sin\theta+1 = 0$

বা, $(\sin\theta-1)^2 = 0$

বা, $\sin\theta-1 = 0$

$\therefore$ $\sin\theta = 1$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}\theta = 1$

$$\begin{aligned} \sin^{10}\theta + \operatorname{cosec}^{10}\theta &= (1)^{10} + (1)^{10} \\ &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

**প্রয়োগ : 41.** যদি $\cos\theta + \sec\theta = 2$ হয়, তাহলে $(\cos^{11}\theta + \sec^{11}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 42.** যদি $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ হয়, তাহলে $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$ -এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

$$\begin{aligned} & 4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha \\ =\ & (2\operatorname{cosec}\alpha)^2 + (3\sin\alpha)^2 \\ =\ & (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2 + 2\times 2\operatorname{cosec}\alpha \times 3\sin\alpha \\ =\ & (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2 + 12\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\sin\alpha \\ =\ & (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2 + 12 \end{aligned}$$

যে-কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যামালার সর্বনিম্ন মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান শূন্য।

$\therefore$ $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 12

$$\begin{aligned} 4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha &= (2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2 - 2\times 2\operatorname{cosec}\alpha\times 3\sin\alpha \\ &= (2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2 - 12 \end{aligned}$$

$(2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$-এর ন্যূনতম মান $-12$

তাহলে কোনটি ন্যূনতম মান হবে?

দুটি বর্গ সংখ্যামালার সমষ্টি ঋণাত্মক হতে পারে না। তাই $(4\operatorname{cosec}^2\alpha + 9\sin^2\alpha)$ -এর মান 12।