প্রয়োগ : 65. যদি $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

$\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{y+z-x+z+x-y+x+y-z}$ [সংযোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{a+b+c}{x+y+z}$

সুতরাং, $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(b+c-a)}{(x+y+z)-(y+z-x)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2a}{2x}=\frac{a}{x}$

অনুরূপে, $\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(c+a-b)}{(x+y+z)-(z+x-y)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2b}{2y}=\frac{b}{y}$

এবং $\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(a+b-c)}{(x+y+z)-(x+y-z)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2c}{2z}=\frac{c}{z}$

$\therefore \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 66. যদি $(4a+5b)(4c-5d)=(4a-5b)(4c+5d)$ হয়, প্রমাণ করি যে a, b, c ও d সমানুপাতে আছে। [নিজে করি]

কষে দেখি 5.3

1. $a:b=c:d$ হলে, দেখাই যে,

   (i) $(a^2+b^2):(a^2-b^2)=(ac+bd):(ac-bd)$

   (ii) $(a^2+ab+b^2):(a^2-ab+b^2)=(c^2+cd+d^2):(c^2-cd+d^2)$

   (iii) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=(pa+qc):(pb+qd)$

2. $x:a=y:b=z:c$ হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ (ii) $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$

   (iii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

3. $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$ (ii) $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$

4. যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে,

   (i) $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$ (iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$

5. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ করি যে,

   (i) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ (ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$

6. (i) যদি $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(m^2+n^2)(a^2+b^2)=(am+bn)^2$

(ii) যদি $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(a+b)(a^2+b^2)x^3=(x+y)(x^2+y^2)a^3$

(iii) যদি $\frac{x}{\ell m-n^2}=\frac{y}{mn-\ell^2}=\frac{z}{n\ell-m^2}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\ell x+my+nz=0$

(iv) $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হলে, দেখাই যে, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

(v) $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a-2}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{4a}{a^2+4}$

(vi) $x=\frac{8ab}{a+b}$ হলে, $\left(\frac{x+4a}{x-4a}+\frac{x+4b}{x-4b}\right)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

7. (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a+b+c}{c}=2$

(ii) $\frac{a}{q-r}=\frac{b}{r-p}=\frac{c}{p-q}$ হলে, দেখাই যে, $a+b+c=0=pa+qb+rc$

(iii) $\frac{ax+by}{a}=\frac{bx-ay}{b}$ হলে, দেখাই যে প্রতিটি অনুপাত x-এর সমান।

8. (i) যদি $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $c=a$ অথবা $a+b+c+d=0$

(ii) যদি $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হয়, দেখাই যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

(iii) $\frac{x+y}{3a-b}=\frac{y+z}{3b-c}=\frac{z+x}{3c-a}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$

(iv) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-yz}{a^2-bc}=\frac{y^2-zx}{b^2-ca}=\frac{z^2-xy}{c^2-ab}$

9. (i) যদি $\frac{3x+4y}{3u+4v}=\frac{3x-4y}{3u-4v}$ হয়, তবে দেখাই যে $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$

(ii) $(a+b+c+d):(a+b-c-d)=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$ হলে, প্রমাণ করি যে, $a:b=c:d$

10. (i) $\frac{a^2}{b+c}=\frac{b^2}{c+a}=\frac{c^2}{a+b}=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$

(ii) $x^2:(by+cz)=y^2:(cz+ax)=z^2:(ax+by)=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}=1$

11. (i) $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z\neq 0$ হলে, দেখাই যে, প্রতিটি অনুপাত $\frac{1}{a+b+c}$ -এর সমান।

(ii) $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$

(iii) $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) 3, 4 এবং 6-এর চতুর্থ সমানুপাতী (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 24

(ii) 8 এবং 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী (a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 20

(iii) 16 এবং 25-এর মধ্য সমানুপাতী (a) 400 (b) 100 (c) 20 (d) 40

(iv) a একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a:\frac{27}{64}=\frac{3}{4}:a$ হলে, a -এর মান

(a) $\frac{81}{256}$ (b) 9 (c) $\frac{9}{16}$ (d) $\frac{16}{9}$

(v) $2a=3b=4c$ হলে, $a:b:c$ হবে (a) $3:4:6$ (b) $4:3:6$ (c) $3:6:4$ (d) $6:4:3$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $ab:c^2$, $bc:a^2$ এবং $ca:b^2$ -এর যৌগিক অনুপাত $1:1$

(ii) x^3y, x^2y^2 এবং xy^3 ক্রমিক সমানুপাতী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার গুণফল 64 হলে, তাদের মধ্যসমানুপাতী ________

(ii) $a:2=b:5=c:8$ হলে a-এর 50% = b-এর 20% = c-এর ________ %

(iii) $(x+2)$ এবং $(x-3)$ এর মধ্য সমানুপাতী x হলে, x-এর মান ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{2a-3b+4c}{p}$ হলে, p-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\frac{3x-5y}{3x+5y}=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{3x^2-5y^2}{3x^2+5y^2}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $a:b=3:4$ এবং $x:y=5:7$ হলে, $(3ax-by):(4by-7ax)$ কত নির্ণয় করি।

(iv) x, 12, y, 27 ক্রমিক সমানুপাতী হলে, x ও y-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় করি।

(v) $a:b=3:2$ এবং $b:c=3:2$ হলে, $a+b:b+c$ কত নির্ণয় করি।