9 দ্বিঘাত করণী
QUADRATIC SURD

রেবার দাদু রেবাকে একটি সাদা বোর্ড কিনে দিয়েছেন। আমরা সেই বোর্ডে ছবি আঁকি ও নানান মজার খেলায় বোর্ড ব্যবহার করি। আজ আমরা মতিউরদের বাগানে ওই বোর্ডটি নিয়ে জড়ো হয়েছি, একটি মজার খেলা খেলার জন্য।

আমাদের বন্ধু তপেন ওই বোর্ডে একটি ঘর আঁকল এবং ওই ঘরের মধ্যে কিছু ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা লিখল।

আমরা ঠিক করেছি প্রত্যেকে ওই পূর্ণসংখ্যার ঘর থেকে যে-কোনো দুটি সংখ্যা লিখব ও বিভিন্ন আকারে সাজাব ও তাদের প্রকৃতি জানব।

সীমা লিখল 5 ও 4

5+4, 5–4, 5×4 প্রত্যেকেই **পূর্ণ সংখ্যা**।

আবার, $\frac{5}{4}$ ও $\frac{4}{5}$ প্রত্যেকেই $\boxed{}$ [পূর্ণসংখ্যা/মূলদ সংখ্যা]

1 আমি 5 ও 4-এর বর্গ করে কী পাই দেখি।

$5^2 = \boxed{}$ এবং $4^2 = \boxed{}$

$\therefore$ দেখছি 5 ও 4-এর বর্গও $\boxed{}$ সংখ্যা।

আমরা জানি, কোনো একটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা a-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{a}$ বা, $\pm a^{\frac{1}{2}}$

কেননা $(+\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^1 = a$ এবং $(-\sqrt{a})^2 = a$

2 কিন্তু $\sqrt{0}$ -এর মান কী হবে?

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $\sqrt{0} = 0$

3 আমি 4 ও 5-এর বর্গমূল নিয়ে কী পাই দেখি।

4-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{4}$ অর্থাৎ +2 এবং –2 [$\because (+2)^2=4$ এবং $(-2)^2=4$]

4-এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে $\sqrt{4}$ লেখা হয়

অর্থাৎ অঙ্কের ভাষায় $\sqrt{4} = 2$, $\therefore$ 4-এর বর্গমূল $\boxed{}$ (মূলদ/অমূলদ) সংখ্যা **[নিজে লিখি]**

4 কিন্তু $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$ হবে কি?

$\sqrt{a^2} = |a|$ [সংজ্ঞা অনুযায়ী]

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$ এবং $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

5-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{5}$ [$\because$ কোনো পূর্ণসংখ্যা পাব না যার বর্গ 5 হবে]

বুঝেছি, 5 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়, কিন্তু 4 পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

5 $\pm\sqrt{5}$ আকারের সংখ্যাকে কী বলা হয়?

যদি a এমন একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয়, যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়, তাহলে $\pm\sqrt{a}$ আকারের সংখ্যাকে **শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী** বলা হয়। আবার $a \pm\sqrt{b}$ আকারের সংখ্যা হলো **মিশ্র দ্বিঘাত করণী**, যেখানে a মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{b}$ শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী ।

আমরা জানি, $5^2 = 25$ বলে $\sqrt{25} = 25^{1/2} = (5^2)^{1/2} = 5^{2\times 1/2} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 25-এর একটি বর্গমূল]

$5^3 = 125$ বলে $\sqrt[3]{125} = 125^{1/3} = (5^3)^{1/3} = 5^{3\times 1/3} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 125-এর একটি ঘনমূল]

$5^4 = 625$ বলে $\sqrt[4]{625} = 625^{1/4} = (5^4)^{1/4} = 5^{4\times 1/4} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 625-এর একটি চতুর্থমূল] .

বর্গমূল চিহ্নটির ক্ষেত্রে সাধারণত $\sqrt{}$ ব্যবহার করা হয়, $\sqrt[2]{}$ ব্যবহার করা হয় না। যে মূলগুলি উপরে উল্লেখ করলাম তারা প্রত্যেকে মূলদ সংখ্যা। কিন্তু সবসময় তা হয় না।

যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[5]{25}$, ইত্যাদিরা মূলদ সংখ্যা নয়। এদের সুনির্দিষ্ট দশমিক মান সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না। অর্থাৎ এরা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore \pm\sqrt{5}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

6 আমি 4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী ও 4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী বুঝে লিখি।

4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\boxed{}$ [নিজে লিখি]

4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{6}$, $\frac{3}{5}-\sqrt{10}$, $\boxed{}$ [নিজে লিখি]

কিন্তু সকল দ্বিঘাত করণীই কি অমূলদ সংখ্যা?

দ্বিঘাত করণীর দশমিক মান সম্পূর্ণ রূপে নির্ণয় করা যায় না। তাই এগুলি অমূলদ সংখ্যা। কিন্তু সকল অমূলদ সংখ্যাই করণী নয়। যেমন, $\sqrt{\pi}$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু এটি দ্বিঘাত করণী নয়।

7 $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ কি দ্বিঘাত করণী?

$\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ আপাতদৃষ্টিতে করণীর আকারে থাকলেও এগুলি করণী নয়।

মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{4} = 2$ এবং $\sqrt{25} = 5$

আমি শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে $x^2-2ax+(a^2-b^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে দেখছি বীজদ্বয় $\boxed{a+\sqrt{b}}$ ও $\boxed{}$ যারা উভয়েই মিশ্র দ্বিঘাত করণী, যেখানে b একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়। **[নিজে করি]**

এই স্তরে আমাদের আলোচনা দ্বিঘাত করণীতেই সীমাবদ্ধ থাকবে এবং সাধারণভাবে করণী বললে আমরা দ্বিঘাত করণীই বুঝব।

মণিদীপা বোর্ডে লিখল 8 ও 12

8 8 ও 12 সংখ্যাদুটির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল, বর্গ নিয়ে যা পেলাম তা কেমন ধরনের সংখ্যা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যেহেতু $\sqrt{a} = a^{1/2}$ সুতরাং সূচকের নিয়ম অনুসারে পাই,

$\sqrt{ab} = (ab)^{1/2} = a^{1/2}\times b^{1/2} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$, যেখানে a, b অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} = \frac{a^{1/2}}{b^{1/2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, যেখানে a অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

(9) আমি 8 ও 32-এর বর্গমূল নিই ও কী পাই বুঝে লিখি।

$\sqrt{8}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 8 একটি পূর্ণবর্গ মূলদসংখ্যা নয়, আবার $\sqrt{32}$ -ও একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 32 একটি পূর্ণবর্গ মূলদ সংখ্যা নয়।

$\sqrt{8}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\,.\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

এবং $\sqrt{32}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}=\sqrt{16}\,.\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(10) দেখছি, দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ একই করণী $\sqrt{2}$ -এর মূলদ গুণিতক। এইরকম শুদ্ধ করণীকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী যদি একই করণীর মূলদ গুণিতক হয় তবে ওই সকল শুদ্ধ করণীকে **সদৃশ করণী** বলা হয়।

বুঝেছি, $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ শুদ্ধ করণী দুটি সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 1. $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ কি সদৃশ করণী? হিসাব করে দেখি?

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{25\times2}{4}}=\frac{\sqrt{25\times2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 2. $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ সদৃশ করণী কিনা হিসাব করি।

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$

$\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ শুদ্ধ করণীদ্বয় একই করণীর মূলদ গুণিতক নয়।

এই রকম শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীকে কী বলা হয়?

যে সকল শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী সদৃশ করণী নয় তারা **অসদৃশ করণী**।

বুঝেছি, $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ **অসদৃশ করণী**।

অর্থাৎ যদি m এবং n দুটি এমন পরস্পর মৌলিক সংখ্যা [অর্থাৎ m ও n-এর গ.সা.গু 1] হয় যারা পূর্ণবর্গ নয়, তাহলে $\sqrt{m}$ এবং $\sqrt{n}$ অসদৃশ করণী হবে।

যেমন, 15 এবং 22 দুটি পরস্পর মৌলিক সংখ্যা, কারণ 15 এবং 22-এর গ.সা.গু. 1 এবং 15 এবং 22 কেউই পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়। সুতরাং $\sqrt{15}$ ও $\sqrt{22}$ অসদৃশ করণী।

(11) দুটি অসদৃশ করণী $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{7}$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো কীভাবে পাব দেখি।

যেহেতু, $7>5$ $\therefore \sqrt{7}>\sqrt{5}$ ($\because$ a, b ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a^2>b^2$ হলে $a>b$ হয়)

প্রয়োগ : 3. নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি একটি ঘরে লিখি

$\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{147}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

$\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt{147}=\sqrt{7\times7\times3}=7\sqrt{3}$

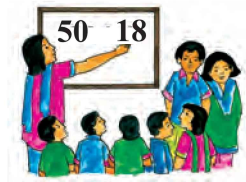
$\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=4\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt{180}=\sqrt{6\times6\times5}=6\sqrt{5}$

$\sqrt{500}=\boxed{}$ **[নিজে করি]**

$\therefore$ সদৃশ করণীগুলি $\sqrt{45}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

প্রয়োগ : 4. $\sqrt{48}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি লিখি। **[নিজে করি]**

রেবা বোর্ডে লিখেছে 50 ও 18
$\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।



প্রয়োগ : 5. $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ ও $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$ এদের শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীতে পরিণত করা যাবে কিনা দেখি।

$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ দেখছি $\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ সদৃশ করণী।

যেহেতু, $5x+3x=8x$ এবং $5x-3x=\boxed{}$

$\therefore\quad \sqrt{50}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

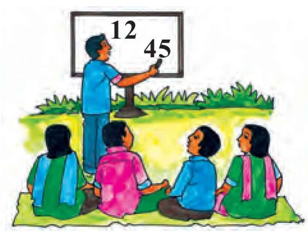
$\therefore$ দেখছি, $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ এবং $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$-এদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যাচ্ছে।

প্রয়োগ : 6. আমি $(\sqrt{2}+\sqrt{8})$ এবং $(\sqrt{2}-\sqrt{8})$ -এর মান হিসাব করে লিখি এবং দেখি তাদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যায় কিনা। **[নিজে করি]**

মৃণাল বোর্ডে লিখল 12 ও 45

প্রয়োগ : 7. আমি $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ এদের মান হিসাব করে লিখি।

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$



$\therefore \sqrt{12}$ ও $\sqrt{45}$ অসদৃশ করণী।

যেহেতু, $2x$ ও $3y$ -এর যোগফল $=2x+3y$

$\therefore\ \sqrt{12}+\sqrt{45}=2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

একইভাবে, $\sqrt{12}-\sqrt{45}=2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

$\therefore$ আবার দেখছি, $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু তাদের শুদ্ধ করণীর আকারে লেখা যাচ্ছে না।

বুঝেছি, যেহেতু a ও b-এর যোগফল $=a+b$, $\therefore \sqrt{5}+\sqrt{7}=\boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 8. আমি $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ ও $4\sqrt{3}$ -এর যোগফল নির্ণয় করি।

$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 9. $\sqrt{12}$, $-4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$ -এর সমষ্টি হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. আমি দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

30 ও 2x-এর যোগফল $=30+2x$ এবং $(30+2x)+(30-4x)=\boxed{}$ হয়।

$\therefore (2+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})=2+2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

$\therefore (2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী পেলাম।

প্রয়োগ : 11. $(9-2\sqrt{5})+(12+7\sqrt{5})=\boxed{}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. আমি $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-\sqrt{3})$ -এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) = 2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 4$$

$\therefore$ দেখছি, দুটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি মূলদ সংখ্যা পেলাম।

প্রয়োগ : 13. আমি অন্য যে-কোনো দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা। [নিজে করি]

কষে দেখি 9.1

1. মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার গুণফল আকারে লিখি—
   (i) $\sqrt{175}$ (ii) $2\sqrt{112}$ (iii) $\sqrt{108}$ (iv) $\sqrt{125}$ (v) $5\sqrt{119}$
2. প্রমাণ করি যে, $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$
3. দেখাই যে, $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$
4. দেখাই যে, $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+\sqrt{192}=0$
5. সরলতম মান নির্ণয় করি :
   $\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{27}-\sqrt{32}$
6. (a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ -এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল $2\sqrt{5}$ হবে, হিসাব করে লিখি।
   (b) $7-\sqrt{3}$ -এর থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফল $3+\sqrt{3}$ হবে, নির্ণয় করি।
   (c) $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ এবং $2+\sqrt{7}$ -এর যোগফল লিখি।
   (d) $(10-\sqrt{11})$ থেকে $(-5+3\sqrt{11})$ বিয়োগ করি ও বিয়োগফল লিখি।
   (e) $(-5+\sqrt{7})$ এবং $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$-এর যোগফল থেকে $(5+\sqrt{2}+\sqrt{7})$ বিয়োগ করে বিয়োগফল নির্ণয় করি।
   (f) দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা।

(12) এবার আমাদের বন্ধু অমিয় বোর্ডে লিখল 7 ও 11

দেখছি, বোর্ডে লেখা সংখ্যাদুটি মৌলিক সংখ্যা।

$\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও বিয়োগফল নিজে লিখি।

(13) কিন্তু $\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ -এর গুণফল ও ভাগফল হিসাব করে লিখি।

যেহেতু $a^m \times b^m = (ab)^m$ [$a\neq0, b\neq0$, m একটি মূলদ সংখ্যা]

$$\therefore \sqrt{7}\times\sqrt{11} = 7^{1/2}\times 11^{1/2}$$
$$= (7\times11)^{1/2}$$
$$= 77^{1/2}$$
$$= \sqrt{77}$$

এখানে $\sqrt{77}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 14. আমি নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির গুণফল নির্ণয় করি :

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}$ (ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$ (iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$ (iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2} = 2\times3\times\sqrt{5\times2} = 6\sqrt{10}$

(ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3} = 7\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$= 14\sqrt{3^2} = 14(3^2)^{½} = 14\times3^{(2\times½)}$

$= 14\times3 = 42$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}, a\neq0$ এবং m, n মূলদ সংখ্যা]

(iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3}) = 8+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$= 8+6\sqrt{3}+3 = 11+6\sqrt{3}$ [$\because (x+y)(a+b) = ax+ay+bx+by$]

(iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 5\times2-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$= 10-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3 = 13-7\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 15. আমি $(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})$-এর গুণফল নির্ণয় করি।

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5}) &= 2\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{3}\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(3-\sqrt{5})\\ &= 6-2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}+3\sqrt{5}-5\\ &= 6-5+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}\\ &= 1+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}\end{aligned}$$

প্রয়োগ : 16. $(3+\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(2\sqrt{2}-1)$-এর গুণফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

নাথুরা বোর্ডে লিখল 13 ও 5

$\sqrt{13}$ ও $\sqrt{5}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 17. আমি $\sqrt{13}\div\sqrt{5}$ -এর ভাগফল কী হবে হিসাব করে দেখি।

$\sqrt{13}\div\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$

দেখছি হরে করণী আছে। কিন্তু কীভাবে $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণীমুক্ত করব?

$\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর লব ও হরকে $\sqrt{5}$ দিয়ে গুণ করি ও কী পাই দেখি।

> $\dfrac{a}{b}$ কে বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ বললে a কে লব ও b কে হর বলি। সেই অর্থে এর লব $\sqrt{13}$ এবং হর $\sqrt{5}$

$\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{65}}{5}$ অর্থাৎ $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণী মুক্ত করে $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$ পেলাম।

> কিন্তু এইভাবে গুণ করে কোনো করণীকে করণীমুক্ত করার প্রক্রিয়াকে কী বলা হয়?
> কোনো করণীর সঙ্গে অথবা একাধিক করণীর যোগ ও বিয়োগ দ্বারা গঠিত অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে কোনো উৎপাদক গুণ করে গুণফলটি করণীমুক্ত করা অর্থাৎ একটি মূলদ সংখ্যা পাওয়ার প্রক্রিয়াকে **করণী নিরসন (Rationalisation)** বলে এবং ওই উৎপাদকটিকে ওই করণীর **অথবা ওই অমূলদ সংখ্যার** **করণী নিরসক উৎপাদক (Rationalising Factor)** বলা হয়।

$\sqrt{5}$ -এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$; এছাড়াও $k\sqrt{5}$ যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

$\therefore \sqrt{a}$ -এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{a}$; এছাড়াও $k\sqrt{a}$,যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

প্রয়োগ : 18. $\sqrt{7}$ -এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19 . আমি $(5+\sqrt{7})$-এর করণী নিরসক উৎপাদক কী পাব দেখি।

$$(5+\sqrt{7})\times(5-\sqrt{7}) = (5)^2-(\sqrt{7})^2 = 25-7 = \boxed{} \quad [(a+b)(a-b)=a^2-b^2]$$

আবার, $(5+\sqrt{7})\times(-5+\sqrt{7}) = (\sqrt{7}+5)\times(\sqrt{7}-5) = (\sqrt{7})^2-(5)^2 = \boxed{}$

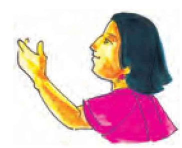
$\therefore$ দেখছি, $5+\sqrt{7}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক পেলাম $(5-\sqrt{7})$ এবং $(-5+\sqrt{7})$

বুঝেছি, $a+\sqrt{b}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক $a-\sqrt{b}$ অথবা $-a+\sqrt{b}$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 20. $7-\sqrt{3}$ -এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 21. $(\sqrt{11}-\sqrt{6})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক কী কী পাব দেখি।

$$(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{6})^2 = 11-6 = 5$$



আবার, $(\sqrt{11}-\sqrt{6})(-\sqrt{11}-\sqrt{6}) = -[(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})]$

$= \boxed{}$ **[নিজে করি]**

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ অথবা $(-\sqrt{a}-\sqrt{b})$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 22. $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$-এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 23. আমি $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা $(7+\sqrt{2})$-এর সঙ্গে যোগ করলে মূলদ সংখ্যা পাব।

$$(7+\sqrt{2})\times(7-\sqrt{2}) = 7^2-(\sqrt{2})^2 = \boxed{}$$

আবার, $(7+\sqrt{2})+(7-\sqrt{2}) = 7+7 = 14$

$\therefore$ দেখছি, $7-\sqrt{2}$ উৎপাকটির সঙ্গে $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল মূলদ সংখ্যা।

কিন্তু কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর এরকম করণী নিরসক উৎপাদককে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর কী বলা হয়?

কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর করণী নিরসক উৎপাদকের সঙ্গে ওই করণীর যোগফল ও গুণফল উভয়ই যদি মূলদ সংখ্যা হয় তবে তাকে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর **অনুবন্ধী বা পূরক করণী (Conjugate surd)** বলা হয়।

বুঝেছি, $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর অনুবন্ধী করণী $7-\sqrt{2}$, কিন্তু $(-7+\sqrt{2})$ উৎপাদকটি অনুবন্ধী করণী নয়। যদিও এটি প্রদত্ত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক।

কারণ, $7+\sqrt{2}+7-\sqrt{2} = 14$ (মূলদ সংখ্যা)

আবার, $(7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2}) = (7)^2-(\sqrt{2})^2 = 49-2=47$ (মূলদ সংখ্যা)।

কিন্তু $(7+\sqrt{2})+(-7+\sqrt{2}) = 7+\sqrt{2}-7+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (অমূলদ সংখ্যা)

প্রয়োগ : 24. আমি $(\sqrt{5}-1)$, $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-2)$-এদের অনুবন্ধী করণীগুলি লিখি।

$(\sqrt{5}-1)$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{5}-1$

$\sqrt{3}$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-2)$-এর অনুবন্ধী করণী $(-\sqrt{3}-2)$

$\therefore$ পেলাম, $a+\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a-\sqrt{b}$

$a-\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a+\sqrt{b}$

প্রয়োগ : 25. নীচের মিশ্র এবং শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীগুলির অনুবন্ধী করণী লিখি—

(i) $2+\sqrt{3}$ (ii) $5-\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{5}-7$ (iv) $\sqrt{11}+6$ (v) $\sqrt{5}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 26. আমি $(2\sqrt{2}\div\sqrt{5})$-এর হরের করণী নিরসন করি।

$$2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \text{———— (i)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\therefore$ পেলাম, $2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=2\sqrt{10}\div5$

প্রয়োগ : 27. আমি হরের করণী নিরসন করি : (i) $6\div\sqrt{7}$ (ii) $5\sqrt{2}\div6\sqrt{3}$

$$\text{(i) } 6\div\sqrt{7}=\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{6\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{7}}{7}=6\sqrt{7}\div7$$

$$\text{(ii) } 5\sqrt{2}\div6\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{6\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6\times3}=\frac{5\sqrt{6}}{18}=5\sqrt{6}\div18$$

প্রয়োগ : 28. হরের করণী নিরসন করি : (i) $\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 29. আমি হরের করণী নিরসন করি ।

(i) $4\div(3-\sqrt{2})$ (ii) $(\sqrt{5}+2)\div(\sqrt{3}-1)$ (iii) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\div(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$$\text{(i) } 4\div\left(3-\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}=\frac{\left(12+4\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$\text{(ii) } \left(\sqrt{5}+2\right)\div\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{2}$$

(iii) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\div\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$$=\frac{2+3+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2-3}$$

$$=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}$$

প্রয়োগ : 30. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $(4+2\sqrt{3})\div(2-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ [নিজে করি]

কষে দেখি 9.2

1. (a) $3^{\frac{1}{2}}$ ও $\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।

   (b) $2\sqrt{2}$ -কে কত দিয়ে গুণ করলে 4 পাব লিখি।

   (c) $3\sqrt{5}$ এবং $5\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।

   (d) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=x\sqrt{10}$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=25-x^2$ একটি সমীকরণ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. **গুণফল নির্ণয় করি :**

   (a) $\sqrt{7}\times\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{12}\times2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$

   (e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (f) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{2}+\sqrt{5})$

   (g) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$

3. (a) $\sqrt{5}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{x}$ হলে, x-এর ক্ষুদ্রতম মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। [যেখানে x একটি পূর্ণসংখ্যা]

   (b) $3\sqrt{2}\div3$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (c) $7\div\sqrt{48}$ -এর হরের করণী নিরসন করতে হরকে ন্যূনতম কত দিয়ে গুণ করতে হবে তা লিখি।

   (d) $(\sqrt{5}+2)$-এর করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয় করি যা করণীটির অনুবন্ধী করণী।

   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\div\sqrt{7}=\frac{1}{7}(\sqrt{35}+a)$ হলে, a-এর মান নির্ণয় করি।

   (f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-2}$ -এর হরের একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা অনুবন্ধী করণী নয়।

4. $(9-4\sqrt{5})$ ও $(-2-\sqrt{7})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীদ্বয়ের অনুবন্ধী করণীদ্বয় লিখি।

5. নীচের মিশ্র দ্বিঘাত করণীর 2 টি করে করণী নিরসক উৎপাদক লিখি:

   (i) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (ii) $13+\sqrt{6}$ (iii) $\sqrt{8}-3$ (iv) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$

6. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{2}-1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(iv) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (v) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$ (vi) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

7. প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দিয়ে ভাগ করে ভাজককে মূলদ সংখ্যায় পরিণত করি।

(i) $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$ (ii) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (iii) $3+\sqrt{6}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

8. মান নির্ণয় করি : (i) $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}-\dfrac{4\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$ (ii) $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}-\dfrac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

প্রয়োগ : 31. সরল করি : $\dfrac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

$$\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}=\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{4.3}+\sqrt{4.5}}{3\sqrt{9.2}-2\sqrt{9.3}+\sqrt{9.5}}=\frac{3.2\sqrt{2}-2.2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3.3\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $=\dfrac{2}{3}$

প্রয়োগ : 32. সরল করি : $\dfrac{3\sqrt{20}+2\sqrt{28}+\sqrt{12}}{5\sqrt{45}+2\sqrt{175}+\sqrt{75}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 33. সরল করি : $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

প্রদত্ত $=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ———— (i)

প্রথম অংশ $=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2}=\sqrt{15}-\sqrt{10}$

দ্বিতীয় অংশ $=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3\sqrt{15}-3\sqrt{6}}{5-2}=\dfrac{3\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)}{3}$

$$=\sqrt{15}-\sqrt{6}$$

তৃতীয় অংশ $= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{5-3}$

$$= \frac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{2}$$
$$= \sqrt{10}-\sqrt{6}$$

$\therefore$ (i) থেকে পাই,

প্রদত্ত $= \left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)-\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$

$= \sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{6} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $= 0$.

প্রয়োগ : 34. সরল করি : $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 35. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি।

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(i) $x-\frac{1}{x} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\times x\times\frac{1}{x} = \left(2\sqrt{2}\right)^2+2.1 = 8+2 = 10$

(iii) $x^3-\frac{1}{x^3} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)^3+3\times1\times2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 36. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ এবং $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 37. যদি $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তবে

(a) দেখাই যে, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$ (b) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

(c) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি। (d) x^3-y^3 -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

প্রথমে, $x+y$, $x-y$ ও xy -এর মান নির্ণয় করি।

$x+y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2} = \frac{8}{3-1}$

$$= \frac{8}{2} = 4$$

অথবা, $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2\right]}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\quad\left[\because (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\right]$$

$$=\frac{2(3+1)}{3-1}=\frac{2\times4}{2}=4$$

$$x-y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(3+1+2\sqrt{3}\right)-\left(3+1-2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}-3-1+2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

অথবা, $x-y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{4\times\sqrt{3}\times1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\quad\left[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$x\times y=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}\times\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=1$$

(a) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{(4)^2-2\times1}{4\times2\sqrt{3}}=\dfrac{14}{4\times2\sqrt{3}}=\dfrac{7\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

(b) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-xy}=\dfrac{4^2-3\times1}{4^2-1}=\dfrac{13}{15}$

অথবা, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x-y)^2+xy}{(x-y)^2+3xy}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+3}=\dfrac{12+1}{12+3}=\dfrac{13}{15}$

বুঝেছি, $(x+y)$ অথবা $(x-y)$-এর যে-কোনো একটির মান জানতে হবে।

(c) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\dfrac{4^3-3\times4}{1}=64-12=52$

(d) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=(2\sqrt{3})^3+3\times1\times2\sqrt{3}=24\sqrt{3}+6\sqrt{3}=30\sqrt{3}$