HAI713I Logique, calculabilité, complexité
Cours et TD de Bruno DURAND
Exemple de correction (Ch. Retoré)

TD 3

Exercice 3.1

On considère $A = \{x|\forall y[x|y]\downarrow\}$ — en d'autres termes A est l'ensemble des (codes de) programmes qui convergent pour chaque entrée.

3.1(a) Montrer que A n'est pas récursif.

On utilise le théorème de Rice. La propriété $\forall y[x|y]\downarrow$ est une propriété de la fonction $[x|\cdot] : z \mapsto [x|z]$: le domaine de $[x|\cdot]$ est N. D'après le théorème de Rice il suffit que A ne soit ni $\mathbb{N}$ ni $\emptyset$ pour A ne soit pas récursif. Comme (le code de) la fonction $Id : x \mapsto x$ appartient à A et que (le code de) la fonction $\underline{\perp} : x \mapsto \perp$ n'appartient pas à A, le théorème de Rice permet d'affirmer que A n'est pas récursif.

3.1(b) Montrer que $K < A$ ($K = \{x|[x|x]\downarrow\}$)

Il faut trouver une fonction calculable totale telle que :

$x \in K$ si et seulement si $f(x) \in A$.

Définition de la fonction de réduction

Considérons le programme a :

$$a\langle x,z\rangle : \ \mathsf{if}\ [x|x]\downarrow\ \mathsf{then}\ z$$

La fonction $S^1_1\langle a,x\rangle$ (a est déjà fixé, et de plus on fixe x) définit une fonction :

— soit $S^1_1\langle ,ax\rangle = Id : z \mapsto z$ quand $[x|x]\downarrow$

— soit $S^1_1\langle a,x\rangle = \underline{\perp} : z \mapsto \perp$ quand $[x|x]\uparrow$

On propose la réduction $f : x \mapsto S^1_1\langle a,x\rangle$ — $S^1_1\langle a,x\rangle$ est une fonction !

La réduction est une fonction calculable totale

La fonction $x \mapsto S^1_1\langle a,x\rangle$ est calculable totale qui associe le code d'un programme à savoir $S^1_1\langle a,x\rangle$ — attention ! cela ne veut pas dire que $S^1_1\langle a,x\rangle$ soit un programme total !

La réduction envoie K dans A Si $x \in K$ alors $S^1_1\langle a,x\rangle \in A$ car $S^1_1\langle a,x\rangle = Id$.

Lorsqu'un réduit est dans A, il provient de K

Si $S^1_1\langle a,x\rangle \in A$ alors $S^1_1\langle a,x\rangle = Id$ (on a le choix entre Id et $\underline{\perp} \notin A$) et c'est donc que $[x|x]\downarrow$ c.-à-d. $x \in K$

3.1(c) Montrer que $K < \bar{A} = \{x | \exists y [x|y] \uparrow\}$

On procède un peu comme précédemment, mais cette fois on souhaite que $f(x)$ ne converge pas partout quand $[x|x]\downarrow$.

Définition de la réduction

Soit le programme b défini comme suit :

$b\langle x,z\rangle$: if $\mathsf{step}(x,x,z) = 0$ then 0 else $\perp$.

Alors $S^1_1\langle b,x\rangle$ est le programme suivant :

— soit $[x|x]\downarrow$ $(x \in K)$ et c'est la fonction $z \mapsto z$ tant que $z < t$ (t : nombre de pas pour que $x|x]\downarrow$) puis $\perp$ dès que $z \geq t$ — donc $S^1_1\langle b,x\rangle \notin A$ quand $x \in K$

— soit $[x|x]\uparrow$ $(x \notin K)$ et c'est la fonction identité $z \mapsto z$ — donc $S^1_1\langle b,x\rangle \in A$ quand $x \notin K$

La réduction est une fonction calculable totale

La fonction $x \mapsto S^1_1\langle b,x\rangle$ est calculable totale (la fonction de x $x \mapsto S^1_1\langle b,x\rangle$ est bien définie, même si la fonction de $z \mapsto S^1_1\langle b,x\rangle z$ peut valoir $\perp$ pour certaines valeurs de z).

La réduction envoie K dans $\bar{A}$ et $\bar{K}$ dans $A = \bar{\bar{A}}$

Les deux items ci-dessus montrent que si $x \in K$ alors $S^1_1\langle b,x\rangle \in \bar{A}$ et si $x \notin K$ alors $S^1_1\langle b,x\rangle \notin \bar{A}$, on a donc bien $x \in K$ si et seulement si $S^1_1\langle b,x\rangle \in \bar{A}$.

3.1(d) En déduire que ni A ni $\bar{A}$ n'est énumérable.

On a vu dans les question précédente que $K < A$ et $K < \bar{A}$.

Comme vu en cours, $M < N$ ssi $\bar{M} < \bar{N}$ (ce n'est pas difficile à vérifier avec la définition de $<$, il suffit de prendre le même f) on a donc aussi $\bar{K} < \bar{A}$ (*) et $\bar{K} < A$ (**).

D'après les propriétés de $<$, si $\bar{A}$ était énumérable, $\bar{K}$ le serait aussi d'après (*) et si A était énumérable $\bar{K}$ le serait aussi d'après (**).

Comme $\bar{K}$ n'est pas énumérable (sinon K serait récursif) ni $\bar{A}$ ni A ne sont énumérables.