Preuves en logique équationnelle

David Delahaye

David.Delahaye@lirmm.fr

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

Master Informatique M1 2022-2023

Égalité

Syntaxe

- C'est un prédicat binaire, noté de manière infixe ;
- $s \doteq t$, où s et t sont des termes.

Sémantique

- $[\![s \doteq t]\!]^I_\rho = ([\![s]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_\rho)$;
- Où « $=$ » est l'égalité sur D_I ;
- Ne pas confondre la syntaxe et la sémantique :
  - « $\doteq$ » $\equiv$ égalité syntaxique ;
  - « $=$ » $\equiv$ égalité sémantique.

Égalité

Syntaxe

- C'est un prédicat binaire, noté de manière infixe ;
- $s \doteq t$, où s et t sont des termes.

Sémantique

- $[\![s \doteq t]\!]^I_\rho = ([\![s]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_\rho)$;
- Où « $=$ » est l'égalité sur D_I ;
- Ne pas confondre la syntaxe et la sémantique :
  - « $\doteq$ » $\equiv$ égalité syntaxique ;
  - « $=$ » $\equiv$ égalité sémantique.

Logique équationnelle

Équations : syntaxe

- Équation $\equiv$ paire de termes notée $s \doteq t$;
- Les termes s et t ne sont pas forcément clos ;
- Mais la quantification sur les variables libres est implicite ;
- $s \doteq t \equiv \forall \vec{x}.s \doteq t$, où $\vec{x} = FV(s) \cup FV(t)$;
- Exemple : $x + 0 \doteq x \equiv \forall x.x + 0 \doteq x$.

Logique équationnelle

Équations : sémantique

- Soit $s \doteq t$ une équation et I une interprétation ;
- I est un modèle de $s \doteq t$ ou I satisfait $s \doteq t$, noté $I \models s \doteq t$, ssi pour toute affectation ρ, $[\![s]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_\rho$;
- Un ensemble $\mathcal{E}$ d'équations entraîne $s \doteq t$, noté $\mathcal{E} \models s \doteq t$, ssi toutes les interprétations satisfaisant toutes les équations de $\mathcal{E}$ en même temps (les modèles de $\mathcal{E}$) sont aussi des modèles de $s \doteq t$, c'est-à-dire quand $I \models s' \doteq t'$ pour tout $s' \doteq t' \in \mathcal{E}$ implique $I \models s \doteq t$.

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « + » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « + » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « $+$ » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « + » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « $+$ » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Substitution

Définition

- Une substitution σ est une application de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{T}$;
- Elle se définit par récurrence structurelle comme suit :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $\sigma(x) = \sigma(x)$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Exemple

- Soit la substitution σ telle que $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(b)$, où a et b sont des constantes, et f un symbole de fonction unaire ;
- $\sigma(f(x, y)) = f(a, f(b))$.

Position et substitution

Position

- Une position est un élément de $(\mathbb{N} - \{0\})^*$;
- Étant donné un terme t, le terme $t|_p$ désigne le terme à la position p et se définit par récurrence structurelle sur les positions :
  - Si $p = \epsilon$, $t|_\epsilon = t$;
  - Si $p = i \cdot p'$ et $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, où l'on a $i \leq n$ et où p' est une position, alors $t|_{i \cdot p'} = t_i|_{p'}$.
- Exemples : si $t = f(x, g(y, z))$, $t|_\epsilon = f(x, g(y, z))$, $t|_1 = x$, $t|_2 = g(y, z)$, $t|_{21} = y$, $t|_{22} = z$.

Substitution à une position donnée

- La notation $t[u]_p$ désigne la substitution de u au terme $t|_p$ dans t ;
- Exemple : si $t = f(x, g(y, z))$, $t[h(a)]_{21} = f(x, g(h(a), z))$.

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \qquad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Arbre de preuve (arbre de dérivation)

- On part de l'équation initiale à démontrer ;
- On applique les règles en raisonnement abductif (raisonnement arrière), c'est-à-dire que l'on part de ce qu'on veut montrer pour aller vers les hypothèses/axiomes) ;
- On construit ainsi un arbre dont le séquent est la racine et les branches sont créées par les différentes prémisses des règles de déduction ;
- Dans une branche, on s'arrête lorsqu'on atteint une règle axiomatique, qui devient ainsi une feuille de l'arbre ;
- Un arbre de preuve est un arbre dont toutes les branches se terminent par une règle axiomatique (on parle alors de branche close).

Propriétés

Prouvabilité

- $s \doteq t$ est prouvable dans EQ à partir de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} s \doteq t$, ssi il existe une dérivation dans EQ se terminant sur $s \doteq t$ à partir de $\mathcal{E}$.

Théorème d'adéquation (Birkhoff, 1933)

- Correction : Si $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} s \doteq t$ alors $\mathcal{E} \models s \doteq t$;
- Complétude : Si $\mathcal{E} \models s \doteq t$ alors $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} s \doteq t$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\text{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}\ \text{trans}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0}\,\text{subst} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}\,\text{trans}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}\ \text{ax}}{0 + x \doteq x + 0}\ \text{subst} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}\ \text{trans}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}\ \mathrm{ax}}{0 + x \doteq x + 0}\ \mathrm{subst} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}\ \mathrm{ax}}{0 + x \doteq x}\ \mathrm{trans}
$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Faire le lien entre EQ et LK/LJ

Nouvelle formulation pour EQ

$$\frac{\forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash s \doteq t}\ \mathsf{ax}_{\mathsf{eq}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash s \doteq s}\ \mathsf{refl} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash s \doteq t}{\Gamma \vdash t \doteq s}\ \mathsf{sym}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s \doteq t \qquad \Gamma \vdash t \doteq u}{\Gamma \vdash s \doteq u}\ \mathsf{trans} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash s \doteq t}{\Gamma \vdash u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \mathsf{cont}$$

Remarques

- On ajoute un séquent (avec des équations et d'autres formules).
- Les équations sont explicitement (universellement) quantifiées.
- La règle $\mathsf{ax}_{\mathsf{eq}}$ gère les instanciations.
- La règle subst est capturée par la règle $\mathsf{ax}_{\mathsf{eq}}$

Faire le lien entre EQ et LK/LJ

Ajout de règles à LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, s \doteq t \qquad \Gamma \vdash \Delta, P(s)}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)} =_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, s \doteq t \qquad \Gamma, P(s) \vdash \Delta}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta} =_{\text{left}}$$

Ajout de règles à LJ

$$\frac{\Gamma \vdash s \doteq t \qquad \Gamma \vdash P(s)}{\Gamma \vdash P(t)} =_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s \doteq t \qquad \Gamma, P(s) \vdash A}{\Gamma, P(t) \vdash A} =_{\text{left}}$$

Faire le lien entre EQ et LK/LJ

Nouvelle formulation pour EQ

$$\frac{\forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash s \doteq t}\ \mathsf{ax}_{\mathsf{eq}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash s \doteq s}\ \mathsf{refl}$$

Remarques

- Les règles $=_{\mathsf{right}}$ et $=_{\mathsf{left}}$ sont très puissantes.
- Les règles sym, trans et cont deviennent redondantes !
- En effet, il suffit de prendre l'égalité $\doteq$ pour P.

Système $\mathrm{LK}_{\mathrm{EQ}}$

Règles concernant l'égalité

$$\frac{\forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash s \doteq t}\ \mathrm{ax}_{\mathrm{eq}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash s \doteq s}\ \mathrm{refl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, s \doteq t \qquad \Gamma \vdash \Delta, P(s)}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)}\ =_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, s \doteq t \qquad \Gamma, P(s) \vdash \Delta}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta}\ =_{\mathrm{left}}$$

Système $\mathrm{LJ}_{\mathrm{EQ}}$

Règles concernant l'égalité

$$\frac{\forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash s \doteq t}\ \mathrm{ax}_{\mathrm{eq}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash s \doteq s}\ \mathrm{refl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s \doteq t \qquad \Gamma \vdash P(s)}{\Gamma \vdash P(t)}\ =_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s \doteq t \qquad \Gamma, P(s) \vdash A}{\Gamma, P(t) \vdash A}\ =_{\mathrm{left}}$$

Preuve dans LK_{EQ}/LJ_{EQ}

Exemple

- $\Gamma = \forall x.x + 0 \doteq x, \forall x, y.x + y \doteq y + x$.
- On veut démontrer que $\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x + 0 \doteq 0 + x}\ \mathrm{ax_{eq}} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x + 0 \doteq x}\ \mathrm{ax_{eq}}}{\Gamma \vdash 0 + x \doteq x}\ =_{\mathrm{right}} \qquad \dfrac{}{\Gamma, P(0 + x) \vdash P(0 + x)}\ \mathrm{ax}}{\Gamma, P(0 + x) \vdash P(x)}\ =_{\mathrm{right}}}{\Gamma \vdash P(0 + x) \Rightarrow P(x)}\ \Rightarrow_{\mathrm{right}}}{\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)}\ \forall_{\mathrm{right}}
$$

Preuve dans $\mathsf{LK}_{\mathsf{EQ}}/\mathsf{LJ}_{\mathsf{EQ}}$

Exemple

- $\Gamma = \forall x.x + 0 \doteq x, \forall x, y.x + y \doteq y + x$.
- On veut démontrer que $\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)$.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma \vdash x + 0 \doteq 0 + x}\,\mathsf{ax_{eq}}
      \qquad
      \dfrac{}{\Gamma \vdash x + 0 \doteq x}\,\mathsf{ax_{eq}}
    }{\Gamma \vdash 0 + x \doteq x}\,=_{\mathsf{right}}
    \qquad
    \dfrac{}{\Gamma, P(0 + x) \vdash P(0 + x)}\,\mathsf{ax}
  }{
    \dfrac{\Gamma, P(0 + x) \vdash P(x)}{\Gamma \vdash P(0 + x) \Rightarrow P(x)}\,\Rightarrow_{\mathsf{right}}
  }\,=_{\mathsf{right}}
}{\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)}\,\forall_{\mathsf{right}}
$$

Optimisations de LK_{EQ}

Remplacement des règles $=_{right}$ et $=_{left}$ dans LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)} =_{right1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(s)} =_{right2}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta} =_{left1}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash \Delta} =_{left2}$$

Remarque

- La règle ax_{eq} devient redondante !

Optimisations de LK_{EQ}

Remplacement des règles $=_{right}$ et $=_{left}$ dans LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)} =_{right1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(s)} =_{right2}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta} =_{left1}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash \Delta} =_{left2}$$

Remarque

- La règle ax_{eq} devient redondante !

Optimisations de $\mathrm{LK}_{\mathrm{EQ}}$

Remplacement des règles $=_{\mathrm{right}}$ et $=_{\mathrm{left}}$ dans LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)} =_{\mathrm{right1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(s)} =_{\mathrm{right2}}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta} =_{\mathrm{left1}}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash \Delta} =_{\mathrm{left2}}$$

Remarque

- La règle $\mathrm{ax}_{\mathrm{eq}}$ devient redondante !

Optimisations de LK_{EQ}

Remplacement des règles $=_{right}$ et $=_{left}$ dans LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)} =_{right1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(s)} =_{right2}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta} =_{left1}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash \Delta} =_{left2}$$

Remarque

- La règle ax_{eq} devient redondante !

Optimisations de LK_{EQ}

Remplacement des règles $=_{right}$ et $=_{left}$ dans LK

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)} =_{right1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(s)} =_{right2}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta} =_{left1}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash \Delta} =_{left2}$$

Remarque

- La règle ax_{eq} devient redondante !

Optimisations de LJ_{EQ}

Remplacement des règles $=_{\text{right}}$ et $=_{\text{left}}$ dans LJ

$$\frac{\Gamma \vdash P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash P(t)} =_{\text{right1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash P(s)} =_{\text{right2}}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash A \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash A} =_{\text{left1}}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash A \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash A} =_{\text{left2}}$$

Remarque

- La règle ax_{eq} est toujours redondante.

Système $\mathrm{LK_{EQ}}$ (version finale et optimisée)

Règles concernant l'égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash s \doteq s}\ \mathrm{refl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(t)}\ =_{\mathrm{right1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash \Delta, P(s)}\ =_{\mathrm{right2}}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash \Delta}\ =_{\mathrm{left1}}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash \Delta}\ =_{\mathrm{left2}}$$

Système $\mathrm{LJ}_{\mathrm{EQ}}$ (version finale et optimisée)

Règles concernant l'égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash s \doteq s}\ \mathrm{refl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(s) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash P(t)}\ =_{\mathrm{right1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(t) \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma \vdash P(s)}\ =_{\mathrm{right2}}$$

$$\frac{\Gamma, P(s) \vdash A \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(t) \vdash A}\ =_{\mathrm{left1}}$$

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash A \qquad \forall \vec{x}.s' \doteq t' \in \Gamma \qquad s = \sigma(s'), t = \sigma(t')}{\Gamma, P(s) \vdash A}\ =_{\mathrm{left2}}$$

Preuve dans $\text{LK}_{\text{EQ}}/\text{LJ}_{\text{EQ}}$

Exemple

- $\Gamma = \forall x.x + 0 \doteq x, \forall x, y.x + y \doteq y + x$.
- On veut démontrer que $\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash P(x)}\ \text{ax}}{\Gamma, P(x+0) \vdash P(x)}\ {=}_{\text{left2}}, \sigma_2}{\Gamma, P(0+x) \vdash P(x)}\ {=}_{\text{left1}}, \sigma_1}{\Gamma \vdash P(0+x) \Rightarrow P(x)}\ {\Rightarrow}_{\text{right}}}{\Gamma \vdash \forall x.P(0+x) \Rightarrow P(x)}\ \forall_{\text{right}}$$

$\sigma_1 = [x/x, 0/y]$, $\sigma_2 = [x/x]$.

Preuve dans LK_{EQ}/LJ_{EQ}

Exemple

- $\Gamma = \forall x.x + 0 \doteq x, \forall x, y.x + y \doteq y + x$.
- On veut démontrer que $\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)$.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash P(x)}\ \text{ax}}{\Gamma, P(x + 0) \vdash P(x)}\ =_{\text{left2}}, \sigma_2}{\Gamma, P(0 + x) \vdash P(x)}\ =_{\text{left1}}, \sigma_1}{\Gamma \vdash P(0 + x) \Rightarrow P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\Gamma \vdash \forall x.P(0 + x) \Rightarrow P(x)}\ \forall_{\text{right}}
$$

$\sigma_1 = [x/x, 0/y]$, $\sigma_2 = [x/x]$.

Raisonnement équationnel en Coq

Équivalence entre les règles de LJ_{EQ} et les tactiques de Coq

Règle de LJ_{EQ}	Tactique Coq
refl	`reflexivity`
$=_{right1}$	`rewrite <- id`
$=_{right2}$	`rewrite id`
$=_{left1}$	`rewrite <- in id`
$=_{left2}$	`rewrite in id`

- Ne pas oublier que Coq fonctionne en abductif.
- Par défaut, les réécritures sont gauche-droite.
- La réécriture droite-gauche s'indique explicitement avec `rewrite <-`.

Raisonnement équationnel en Coq

Un exemple simple

```
Coq < Parameter E : Set.
E is assumed

Coq < Parameters a b : E.
a is assumed
b is assumed

Coq < Parameter P : E -> Prop.
P is assumed

Coq < Axiom eq : a = b.
eq is assumed
```

Raisonnement équationnel en Coq

Un exemple simple

```
Coq < Goal P(b) -> P(a).
1 subgoal

  ============================
   P b -> P a

Coq < intro.
1 subgoal

  H : P b
  ============================
   P a
```

Raisonnement équationnel en Coq

Un exemple simple

```
Coq < rewrite eq.
1 subgoal

  H : P b
  ============================
   P b

Coq < assumption.
No more subgoals.
```

Raisonnement équationnel en Coq

Sens de la réécriture

```
Coq < Goal P(a) -> P(b).
1 subgoal

  ============================
   P a -> P b

Coq < intro.
1 subgoal

  H : P a
  ============================
   P b
```

Raisonnement équationnel en Coq

Sens de la réécriture

```
Coq < rewrite <- eq.
1 subgoal

  H : P a
  ============================
   P a

Coq < assumption.
No more subgoals.
```