Reprise ... complétude.

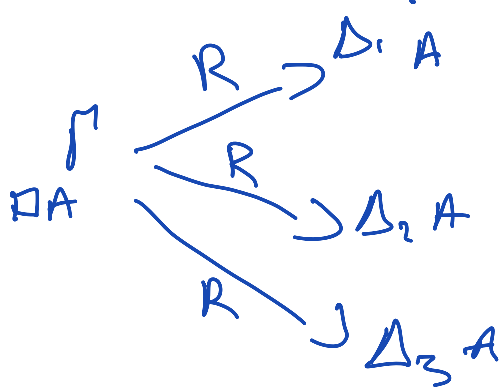
On a construit un modèle de Kripke dit canonique

- <u>les mondes possibles</u> :

  les théories complètes. (contiennent les axiomes)
  (ensemble maximaux cohérents de formules)

- <u>accessibilité</u> : Γ, Δ théories complètes

  $\Gamma \, R \, \Delta$ si pour toute formule $\Box A$ de Γ
  la formule A est dans Δ



pour le forcing :

$\Gamma \Vdash_0 p$ ssi $p \in \Gamma$

<u>Truth Lemma</u> lemme de (la) vérité

Dans le modèle canonique

$\Gamma \Vdash A$ ssi $A \in \Gamma$

(on a posé cela pour les formules atomiques, ça se propage aux formules complexes)

Théorème de complétude

Une formule X est vraie dans tout modèle

$\Downarrow \quad \Uparrow$

X est démontrable (avec des axiomes)

$\Uparrow$ déjà vu

pour le moment le seul axiome modale est K

$$K = \square(A \to B) \to \square A \to \square B$$

Si X vraie dans tout modèle
alors X démontrable

Si X pas démontrable alors il existe un modèle M

$M \not\models X$

X pas démontrable

$\neg X$ cohérente

on étend $\neg X$ en une théorie complète T_0

dans le modèle canonique,
pour ce monde possible Γ_0 (théorie complète)

$$\neg X \in \Gamma_0$$

d'après le lemme de vérité

$$\Gamma_0 \Vdash \neg X$$

donc $\Gamma_0 \not\Vdash X$ (par définition)

il y a un monde possible du modèle
canonique où X n'est pas vraie

sous l'hypothèse X pas démontrable
(= ¬X cohérente)

on a fabriqué ~~un~~ un modèle de Kripke

avec X pas vraie dans ce modèle
(= pas vraie dans l'un des mondes possibles)

---

c'est la preuve standard de la
complétude du calcul propositionnel
classique (avec les systèmes déductifs
à la Hilbert)

langage propositionnel classique

&, $\to$, $\neg$ ( )

pas de $\Box$, ni de $\Diamond$

R : vide

chaque monde est une valuation

M_i : $p = 0$

$q = 1$

$\Gamma \Vdash X$ ssi $X \in \Gamma$

pas demontrable $\exists$ une valuation rend X faux

si la table de vérité (toutes les valuations)
donne toujours 1 pour X

X est démontrable (séquents ou de Hilbert)

Que se passe-t-il en présence d'autres axiomes :

T : $\Box X \to X$

correspond à des cadres réflexifs

pour avoir la complétude de la logique K, T

<u>Complétude</u> : une formule X est vraie dans tout modèle <u>réflexif</u>

Si et seulement si

X est démontrable avec T (et les axiomes/règles)

Il suffit de remarquer :

le modèle canonique
(comme précédemment
mais avec T en plus
pour compléter les théories cohérentes)

est réflexif.

Γ (théorie complète avec T)

$\Gamma \, R \, \Gamma$?

si $\Box X \in \Gamma$, alors $X \in \Gamma$?

comme l'axiome T $\Box X \to X$
est valide dans Γ
et le modus ponens aussi

$\Box X$ vrai dans Γ
$\Box X \to X$ vrai dans Γ $\Big\}$ X vrai dans Γ

Remarque pour voir que

X pas démontrable

⇒ X pas vrai à un endroit
d'un modèle de Kripke

pour toute formule X
on utilise toujours le même
modèle de Kripke (le modèle canonique)

mais le monde où X est faux
dépend de la formule X.
(le monde obtenu par complétion de ¬X)