Complétude du calcul propositionnel

cohérence
validité
correction
$\Longrightarrow$

LK_0

$\Gamma \vdash \varphi$ ssi φ vrai dans toutes les valuations qui rendent Γ vraie.

$\Longleftarrow$

correction (soundness)

car les axiomes de LK_0 sont vraies et les règles préservent la vérité

complétude

les règles de LK_0 sont réversibles

Il y a un algo de recherche

$a, b \to c \vdash a \to c, b \to c \to a$ $\quad$ $b, b \to c \vdash a \to c, b \to c \to a$

$\underline{a \vee b}, b \to c \vdash a \to c, b \to c \to a$

certaines feuilles ne sont pas des axiomes mais elles ont que des lettres

que des axiomes avec que des lettres

$\underbrace{a, b \vdash a}_{ax}, c$ $\quad$ $a, b \vdash c$ pas ax

$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee c)$ $\quad$ $(a \wedge b) \Rightarrow c$

règles correcte

$a = b = 1$ & $c = 0$

$\Gamma \vdash \varphi$ $\not\vdash$ pas vrai $\quad$ réversibles $\quad$ faux

pour $\forall \varphi$ ① soit l'algo produit une preuve
② soit l'algo fournit une valuation pour laquelle φ est fausse

si φ tjrs vraie
alors φ admet une preuve

Un ensemble de formules T cohérent admet toujours une extension maximale cohérente $T \subset T^+$ tel que T^+ coh
coh
maximal pour toute formule G $G \in T$
ou $\neg G \in T$

énumération des formules

Th_1 si $Th_1 \cup f$ cohésion

$Th_2 = Th \cup f$ $\quad Th \cup \neg f$

$\vdots$

f_1

f_2

f_3

f_4

f_5

Th n'cohérent

$T^+ \cup Th_n$ clôture maximale

Soit la valuation

si $p \in T^+$ $\quad V(p)=1$

$V(p)=0$

on a alors $\quad V(\varphi)=1$ si $\varphi \in T^+$

$V(\varphi)=0$ si $\varphi \notin T^+$

par induction sur la formule

$A \wedge B$, A, B

par hyp. ind $V(A)=1$ $V(B)=1$

donc $V(A \wedge B)=1$

$\neg A \in T^+$

dnc $A \notin T^+$ $|A| < |\neg A|$
hyp. ind $v(A) = 0$

$v(\neg A) = \underline{1}$

si T cohérente, T admet un modèle

$T \longrightarrow T^{+} \supset T$

il existe une valuation V

$\left\{ \text{si } p \in T^{+} \quad V(p) = 1 \right.$

sinon $V(p) = 0$

qui rend toutes les formules de T vraies

$T \vdash \varphi$ ssi φ vrai dans ~~de~~ tout les modèle de T

si $T \cup \neg\varphi$ cohérente

$(T \cup \neg\varphi)^+$ cohérente maximale

il existe une valuation qui rend toutes les formules de $(T \cup \neg\varphi)^+$ vraies

cela fournit une valuation où toutes les formule de T sont vraies et $\neg\varphi$ vraies

donc $T \nvdash \varphi$

Th de complétude "en pratique"

on peut raisonner dans les modèles ou avec les preuves ... c'est pareil.

$$H_1, H_2 \vdash C$$

- dans un modèle/valuation où H_1 et H_2 vrais, C est vrai
- preuve de $H_1 \& H_2 \Rightarrow C$ (Hilbert, sequent)

H_1 H_2

$\square X \Rightarrow X$