# TD2-Logique Modale

## 1 La machine à café

Un système de transition interprété est la donnée de :
- Un ensemble $\mathcal{S} = \{s_i \mid i \in I\}$ d'états,
- un ensemble $\mathcal{A} = \{a_i \mid i \in I\}$ d'actions,
- une relation binaire $\mathtt{R}^{a_i} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, pour chaque $a_i \in \mathcal{A}$
- une fonction qui associe à chaque état un ensemble de formules atomique d'un langage logique $\mathcal{L}$.

Il est évident que l'on peut voir un système de transition interprète comme un modèle de Kripke dont ils existent plusieurs relations d'accessibilité $\mathtt{R}^{a_i}$.

**Exercice 1.** *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de formules logique défini par la grammaire suivante*

$$\mathcal{F} := \mathtt{At} \mid \neg F \mid F \wedge F \mid \Diamond_{a_i} \mathcal{F}$$

*ou $\mathtt{At} = \{p, q, r, \ldots\}$ est un ensemble de formules (ou lettres) atomiques. Définir la notion de vérité d'une formule dans un système de transition interprété.*

Un système de transition interprété se prête aisément à la modélisation de computations. Dans cet exercice, nous modéliserons le fonctionnement d'une machine à café en la représentant par un système de transition interprété. Voici comment la machine marche :
- L'utilisateur a le choix entre un expresso, pour le prix de 30 centimes, ou un thé pour le prix de 20 centimes.
- une fois que l'utilisateur a choisi entre l'expresso ou le thé, il peut commencer à insérer la monnaie. À partir de ce point la machine enregistre le montant inséré par l'utilisateur.
- La machine accepte uniquement de pièces de 10 et 20 centimes. Si l'utilisateur insère une pièce de valeur inférieure à 10 ou supérieur à 20 le montant inséré n'évolue pas.
- Lorsque l'utilisateur a inséré au moins la somme demandée, la machine rends la somme superflue à l'utilisateur et délivre l'expresso ou le thé et elle est prête pour accepter des nouvelles requêtes.

**Exercice 2.** *On se donne un ensemble de proposition atomique qui servent à décrire les états de la machine : $\mathtt{S}$ qui exprime le fait que la machine est*

*dans l'état initial,* `E` *et* `T` *qui expriment, respectivement, le fait que la machine est dans un état où l'utilisateur a choisi un expresso ou un thé,* $V_n$ *pour* $n \in \{0, 10, 20, 30, \ldots\}$ *qui exprime le fait qu'à l'état présent la machine a reçu 10,20,30 etc centimes et* `D-E`, `D-T` *qui expriment le fait que la machine donne de l'expresso ou du thé. L'ensemble des actions est les suivantes : deux actions* `C-E` *et* `C-T` *pour les choix de l'expresso et du thé. Une famille d'actions* $I_m$ *où m peut être 2c, 5c, 10c, 20c, 50c, 1 euro ou bien 2 euros. Une famille d'actions* $D_r$ *où r est l'un des valeurs précédemment mentionnées.*
*Donner un système de transition interprète qui modélise la machine à café.*

**Exercice 3.** *Si on voit les relations du système de transition de l'exercice précédent comme des relations d'accessibilité, chacune d'entre elle désigne une modalité différente. Comment peut-on exprimer les modalités "standard" possible et nécessaire ?*

**Exercice 4.** *Soit* $\mathcal{M}$ *le système de transition interprète de l'exercice 2. Vérifier que les formules suivantes sont valides dans* $\mathcal{M}$

— $S \to \Diamond\, T \vee \Diamond\, C$
— $(E \wedge V_0) \to \Diamond\,(V_0 \vee (\Diamond\, V_{10} \vee \Diamond\, V_{20}))$
— $(E \wedge V_{10}) \to \Diamond\,(V_{10} \vee (\Diamond\, V_{20} \vee \Diamond\, V_{30}))$
— $(E \wedge V_{20}) \to \Diamond\,(V_{20} \vee (\Diamond\, V_{30} \vee \Diamond\, V_{40}))$
— $(E \wedge V_{40}) \to \Box\, V_{30}$
— $(E \wedge V_{30}) \to \Box\, \texttt{D-E}$
— $(T \wedge (V_{20} \vee V_{30})) \to \neg\Diamond\, V_{40}$
— $T \to \neg\Diamond\, S$
— $\texttt{D-E} \vee \texttt{D-T} \to \Box\, S$

# 2 Le train

Dans cette section, on considère une interprétation particulière des modalités. L'ensemble des formules linéaires est définie par la grammaire suivante :

$$\mathcal{F} := \texttt{At} \,|\, \neg\mathcal{F} \,|\, \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \,|\, \Diamond\,\mathcal{F} \,|\, \circ\,\mathcal{F}$$

La modalité $\circ$ est appelée *next*. On définit $\Box\, A$ par $\neg\Diamond\, \neg A$, $A \to B$ par $\neg(A \wedge \neg B)$ et $A \vee B$ par $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. Une *Interprétation linéaire* est la donnée d'une séquence infinie d'états

$$\mathcal{S} = s_0, s_1, s_2, \ldots, sn, \ldots$$

et d'une fonction $f$ qui associe à chaque état un ensemble de formules atomiques. La notion de satisfaction d'une formule dans un état d'un modèle linéaire est définie comme suit :

— $s_i \Vdash p$ ssi $p \in f(s_i)$
— $s_i \Vdash \neg A$ ssi $s_i \nVdash A$
— $s_i \vdash A \wedge B$ ssi $s_i \Vdash A$ et $s_i \Vdash B$
— $s_i \vdash \Diamond\, A$ ssi il existe $j \geq i$ tel que $s_j \vdash A$

— $s_i \Vdash \circ A$ ssi $s_{i+1} \Vdash A$
finalement on dit qu'une interprétation linéaire $\mathcal{S} = s_0, s_1, s_2, \ldots s_n \ldots$ est un **modèle** d'une formule $A$ si le premier état du modèle $s_0$ satisfait $A$.

**Exercice 5.** *On considère les formules atomiques suivantes*
— $a$ *= un train approche ;*
— $p$ *= un train passe ;*
— $c$ *= le gyrophare clignote ;*
— $b$ *la barrière est baissée.*
*Exprimer les phrases qui suivent en utilisant les formules linéaires.* ***À tout instant*** *:*

1. *si un train approche la barrière est baissé.*
2. *Si un train approche ou passe le gyrophare clignote.*
3. *Lorsqu'un train approche un train va passer.*
4. *Si un train finit de passer, la barrière finira par se lever.*
5. *La barrière n'est pas toujours baissée ni toujours levé*
6. *À un certain moment il n'y a plus des trains qui approchent.*

**Exercice 6.** *Donner une interprétation linéaire qui est un modèle des formules demandées dans l'exercice précedent.*