Th. complétude

propositionnel / prédicat / modale

complétude

cohérence validité

$\underbrace{Th \vdash G}_{\text{démonstration formelle}}$ ssi G vraie pour toute valuation

complétude

preuve formelle

$$\Gamma \vdash^{LK_0} G$$

$$\underbrace{Th}_{} \vdash^{LK_0} G$$

théorie ensemble de formules pas forcément finie

Dans toute interprétation où Γ vraie G vraie.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$$

$$v(\Gamma \Rightarrow A) = 1 \qquad v(\Gamma \Rightarrow B) = 1$$

dmc

$$v(\Gamma \Rightarrow A \& B) = 1$$

$\Gamma \wedge A \vdash A \vee \Delta$ vrai pour toute valuation

$\underline{v(A) = 0}$ ou $\underline{v(A) = 1}$

$v(\Gamma \wedge A) = 0$ $\qquad$ $v(A \vee \Delta) = 1$

$v(\Gamma \wedge A \to A \vee \Delta) = 1$ $\qquad$ $v(\Gamma \wedge A \to \Delta \vee A) = 1$

valuation propositionnel

$$\overbrace{\neg r \vee (p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p \vee q)}^{H}$$

8

p	q	r	H
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Si que des 1

H est démontrable

$\vdash_{LK_0} H$

logiques modale

- pas de calcul des sequents
  (S4 S5 calcul des sequents)
  LTL CTL . . .

- système déductif à la Hilbert

démonstration formelle
suite de formules

1. $p \to (p \vee q)$
2. p
3. $p \vee q$
4.

chaque ligne est
— une instance d'un axiome
un formule de la théorie
— déduite de deux
ligne précédent
par modus ponens

~~4~~ 43. $A \to B$

57. A

~~6~~ $p \to p$
65. B (MP lignes 43 et 57)

S $\quad (p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$

K $\quad p \to q \to p$

$p = x \quad \cancel{r} = x \quad q = x \to x$

① $(x \to ((x \to x) \to x)) \to (\cancel{x} \to (x \to x)) \to (x \to x)$ $\quad$ S

② $x \to ((x \to x) \to x)$ $\quad$ K

③ $(\underline{x \to (x \to x)}) \to x \to x$ $\quad$ MP ① et ②

④ $(x \to (x \to x))$ $\quad$ K

⑤ $x \to x$ $\quad$ MP ③ et ④

$$S \quad (x \to (y \to z)) \to (x \to y) \to (x \to z)$$
$$K \quad x \to (y \to x)$$
$$I \quad x \to x$$

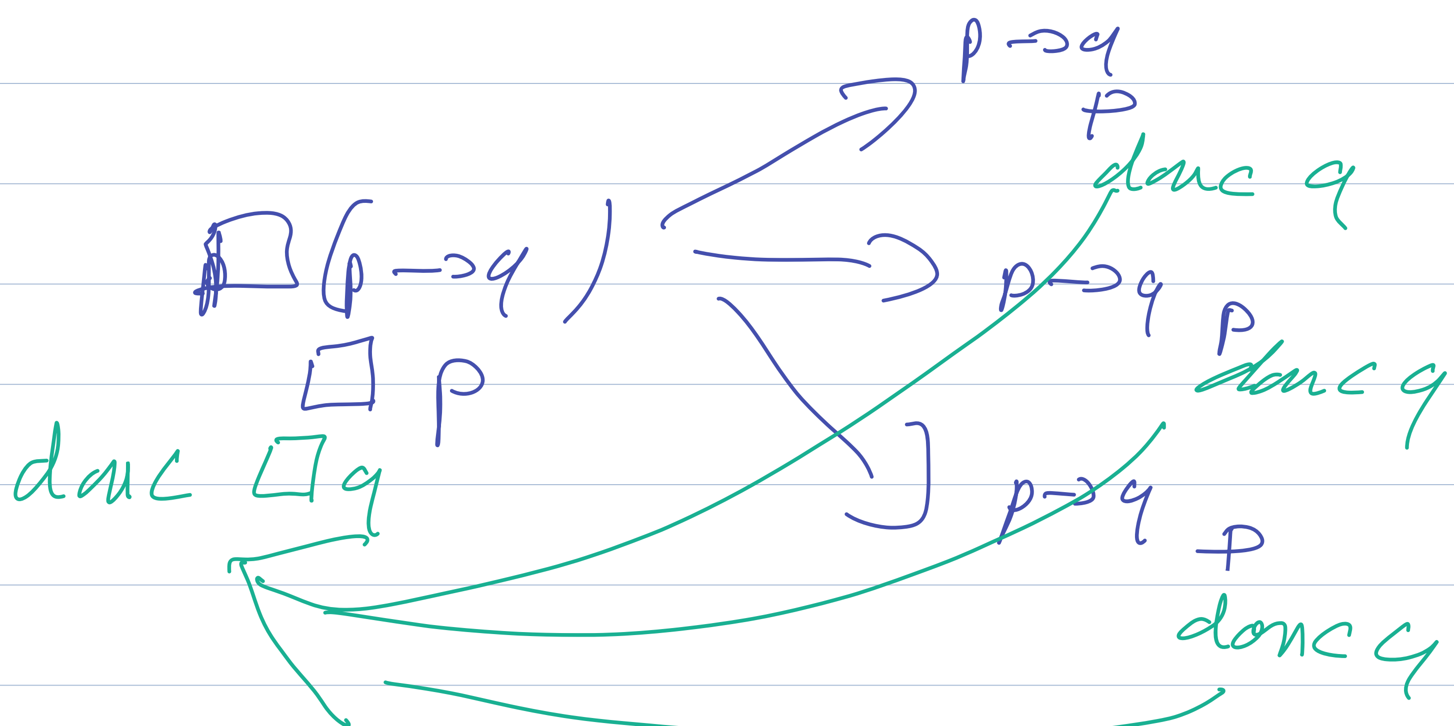
$$x \to (y \to x \& y)$$
$$x \& y \to x$$
$$x \& y \to y$$

$$x \to x \vee y$$
$$y \to x \vee y$$
$$x \vee y \to ((x \to c) \to (y \to c) \to c)$$

$$\neg p = p \to \bot \qquad (\neg a \to b) \to (\neg a \to \neg b) \to a$$

$$\neg\neg A = A$$

$K \quad = \quad \Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$



$4 \qquad \Box X \to \Box\Box X$.

1

⋮

25 G $\quad$ G vrai partout ici $\vdash G$

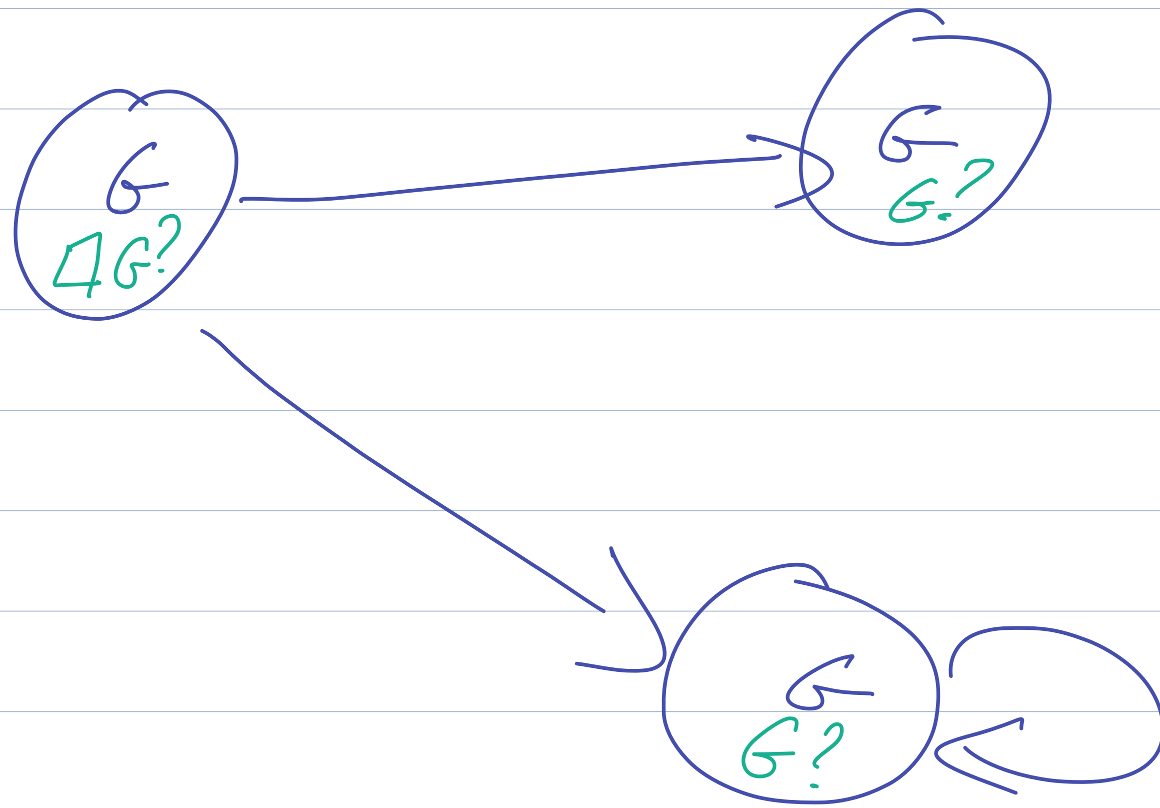
26 $\Box G$ $\quad$ ici $\vdash \Box G$

Ne signifie pas que $\cancel{G \to \Box G}$

si $\vdash G$ alors $\vdash \Box G$

$\Box G \to G$ (cadre réflexif)

G vraie partout ?



obligatoire si on a pas $\square$ on ne peut pas appliquer $\square_i$

$\square A \quad \square B \quad \square C \vdash X$

$\square A \quad \square B \quad \square C \vdash \square X$ $\quad \square_i$

Donc on a un système déductif.

axiomes
- axiomes classiques
- K : $\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$

règles
- modus ponens $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$
- necessitation $\dfrac{A}{\Box A}$

① $X \to Y$ hyp

② $\underbrace{\Box(X \to Y)}$ necessitation

③ $\underbrace{\Box(X \to Y)} \to (\Box X \to \Box Y)$ K kripke

④ $\Box X \to \Box Y$ MP 2 et 3

régularité
$$\frac{X \to Y}{\Box X \to \Box Y}$$

système déductif

Th cohérente Th $\nvdash_{A_1 A} \bot$

comme les preuves sont finies.

$$(\Box X \wedge \Box Y) \to \Box(X \wedge Y)$$

1. $X \to (Y \to (X \wedge Y))$ $\qquad A_1$
2. $\Box X \to \Box(Y \to X \wedge Y)$
3. Kripke $\Box(Y \to X \wedge Y) \to \Box Y \to \Box(X \wedge Y)$
4. $\Box X \to \Box Y \to \Box(X \wedge Y)$ $\qquad$ 2 & 3 $\to$ transitive
5. $\Box X \,\&\, \Box Y \to \Box(X \wedge Y)$ $\qquad$ uncurry

$A \to (B \to C) \equiv A \& B \to C$

Complétude :

Une théorie cohérente peut être complétée en une théorie maximale cohérente

si Γ cohérente et $\Gamma \nvdash \varphi$ alors $\Gamma \cup \neg\varphi$ cohérente

Th 1 φ_1

2 φ_2

3 ⋮

⋮ ⋮

Th $\cup\,\varphi_1$ cohérente ? si oui $Th_1 = Th \cup \varphi_1$

sinon $Th_1 = Th \cup \neg\varphi_1$

$Th_1 \left(\begin{matrix} \varphi_1 \\ \neg\varphi_1 \end{matrix} \right. \quad \left(\begin{matrix} \varphi_2 \\ \neg\varphi_2 \end{matrix} \right. \quad \ldots$

énumération des formules

Th_i cohérente pour tout $i \in \mathbb{N}$

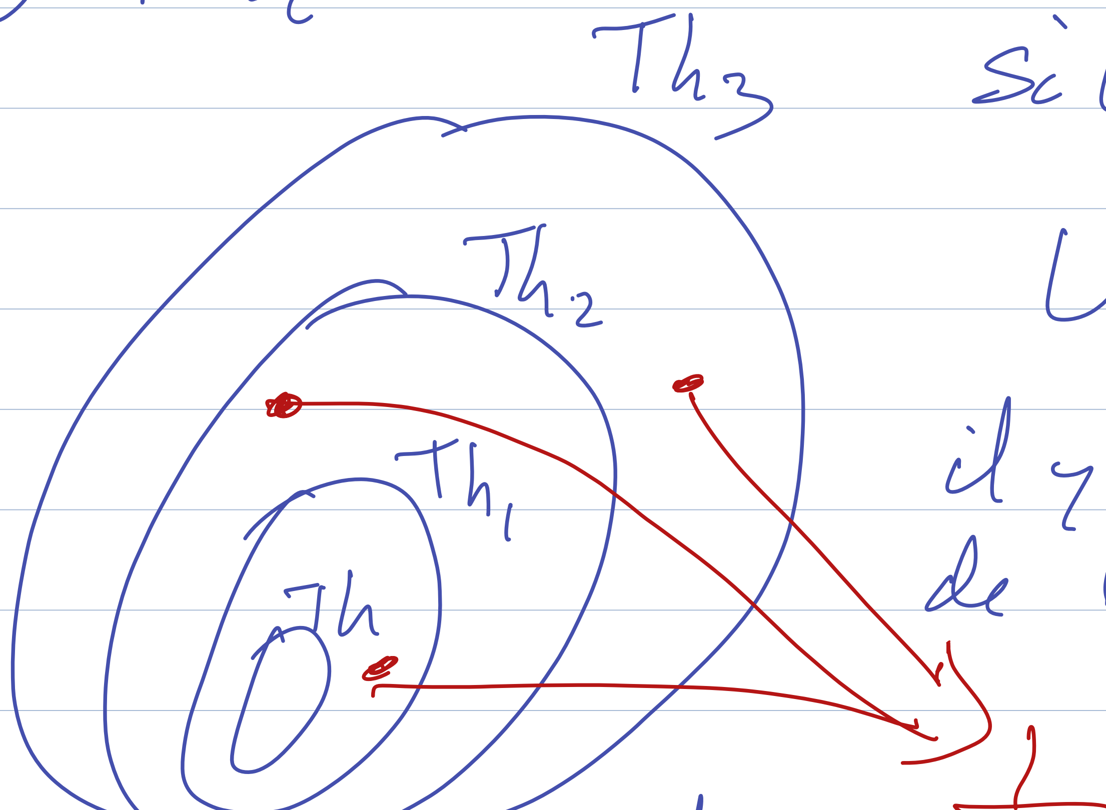
$\bigcup Th_i$

$\bigcup Th_i$ coh ?

si $\bigcup Th_i$ incohérente

$\bigcup Th_i \vdash \bot$

il y a un nombre fini de G_i tq $G_1 \dots G_n \vdash \bot$



donc un des $Th_i \vdash \bot$ impossible

$\bigcup Th_i$ cohérente

pour toute formule G on a

$$\bigcup Th_i \vdash G$$

ou $\bigcup Th_i \vdash \neg G$

$G \in \bigcup Th_i$ ou $\neg G \in \bigcup Th_i$

dans le cas du Calcul propositionnel classique (cf annexe)

Th coh

↳ Th^+ complète $\left(\forall G \; \begin{array}{l} Th^+ \ni G \\ \text{ou} \\ Th^+ \ni \neg G \end{array} \right)$

$v \quad v(p) = 1 \quad \text{ssi} \quad p \in Th^+$

valuation qui rend vrai toute formule de Th^+

Si une Th est cohérente
il existe une valuation
qui rend toutes les formules de Th
vraies ($Th \longrightarrow Th^+$ valuation)

$\underset{1}{a} \;,\; \underset{1}{b} \;,\; \underbrace{a \wedge b}_{1}$

Modèle de Kripke canonique :

monde possible : théorie <u>complète</u>

monde possible ~ valuation. $p = 0$

$q = 1$

$r = \cdot$

on a mis toutes les conséquences

des formules

et ajouté arbitrairement φ ou $\neg\varphi$

puis les contraires

$p = q = 1$

$p \wedge q$

$r = 1$ $\quad$ $r = 0$

toute les instances de K sont dans toute théorie complètes.

Th. Coh

$$Th^+ \ni a \wedge b \to b$$

$$\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$$

appartient à toute théorie complète

pour toute formule p et q

Monde possible = théorie cohérente / complète.

$$\overset{\Box C}{\Gamma} \xrightarrow{\quad R \quad} \overset{C}{\Delta}$$

pour toute formule $\Box C_i \in \Gamma$

on a $C_i \in \Delta$

$\Gamma \Vdash_o p$ quand $p \in \Gamma$

$\varphi \in \Gamma$ si $\underbrace{\Gamma}_{} \nVdash \varphi$

Γ théorie complète et non-contradictoire [?]

se vérifie par induction sur φ

$\Gamma ; \neg\varphi$ cohérente

$\mathcal{M}_i$ extension maximalement

$\mathcal{M}_i \Vdash \Gamma ; \neg\varphi$

Γ et φ pas vrai

dnc $\Gamma \neg\varphi$ wdheut

$\Gamma, \neg\varphi \vdash \underline{\perp}$

$\Gamma \vdash \underbrace{\neg\varphi \to \underline{\perp}}$

$\underbrace{\neg\neg\varphi \vee \underline{\perp}}$

$\underbrace{\varphi \vee \underline{\perp}}$

φ

φ vraie en Γ

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{théorie complète}} \vdash \varphi \quad \text{ssi} \quad \varphi \in \Gamma$$

par induction sur φ

prochain TD.