Complétude des logiques

- modale avec K, T, 4 etc

On a vu

- "$\models F$ vraie dans tout modèle (càd vrai en tout monde possible de tout modèle)"

ssi

"$\vdash F$ démontrable avec K)"

(K). $(\Box A \to \Box B) \to \Box A \to \Box B$

On va procéder ainsi

X pas démontrable

$\neg X$ cohérent

$\neg X$ est vrai quelque part dans le modèle canonique

X pas vrai en chaque monde de tout modèle.

Quid des autres logiques modales ?

On a vu que

"F vrai dans tout modèle reflexif"

$\Leftrightarrow$ "F démontrable avec les axiomes K et T"

$T : \Box X \to X$

<u>Argument</u> le modele canonique est reflexif presence de T

<u>Exo</u> Montrer que

"F vrai dans tout modèle transitif"

ssi

"F demontrable avec l'axiome 4"
$\Box F \Rightarrow \Box\Box F$

Il suffit de montrer qu'un prenant le modèle canonique est transitif

Modèle canonique

pas de contradiction quand on utilise axiome, modus ponens, nécessitation

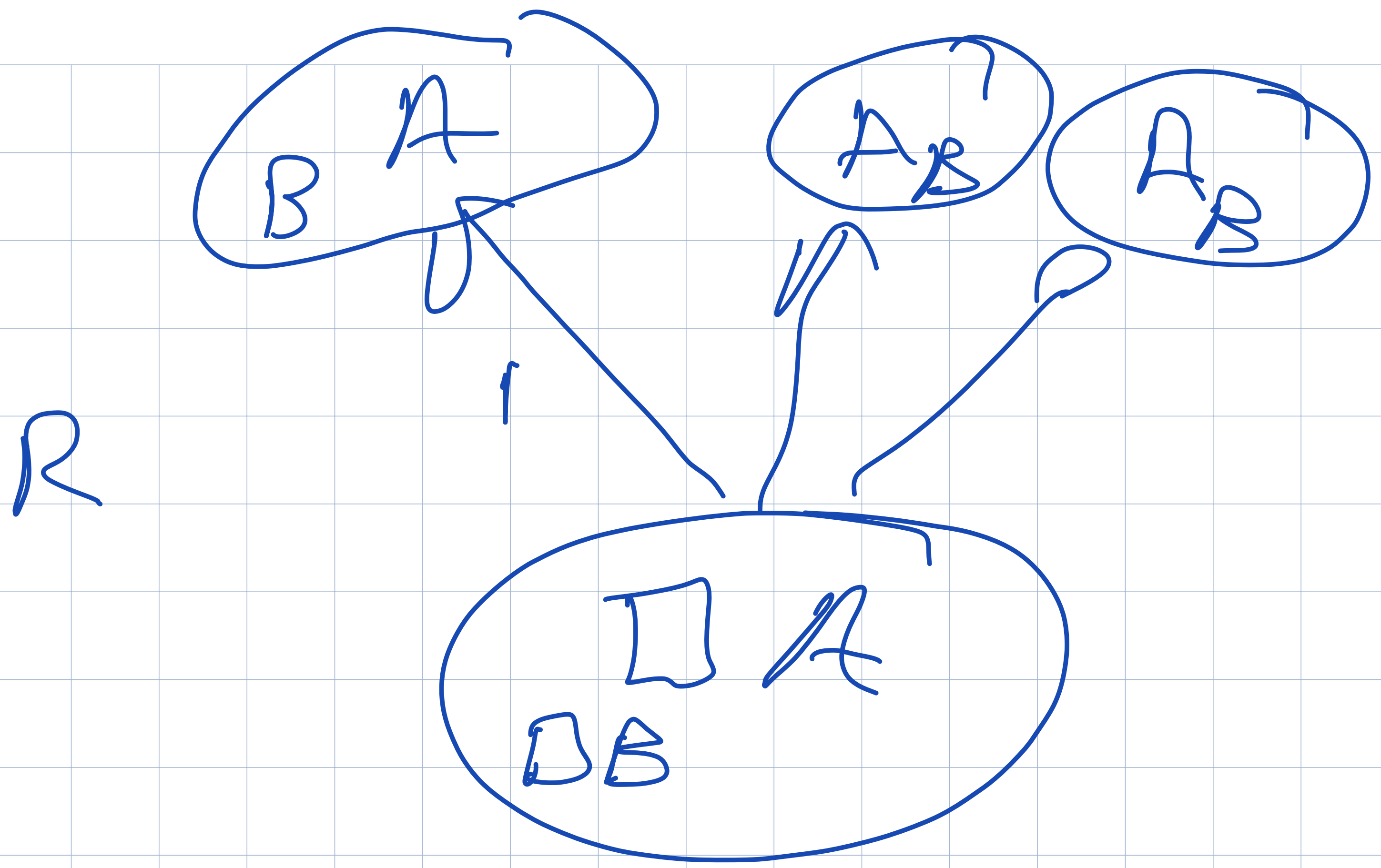
- mondes possibles : ensembles de formules cohérents maximaux

  si on ajoute une formule ça devient incohérent

- accessibilité

  $\Gamma \, R \, \Delta$

  lorsque pour toute formule de la forme $\Box A$ de Γ on a A dans Δ



B A
A B
A B
R
□A
◇B

Montre que si l'axiome $\Box A \to \Box\Box A$ est satisfait en chaque monde du modèle canonique alors la relation R du modèle canonique est transitive.

---

on veut montrer que

si on a

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "R"'] & \Delta \arrow[r, "R"] & \Theta \\ & & A \end{tikzcd}$$

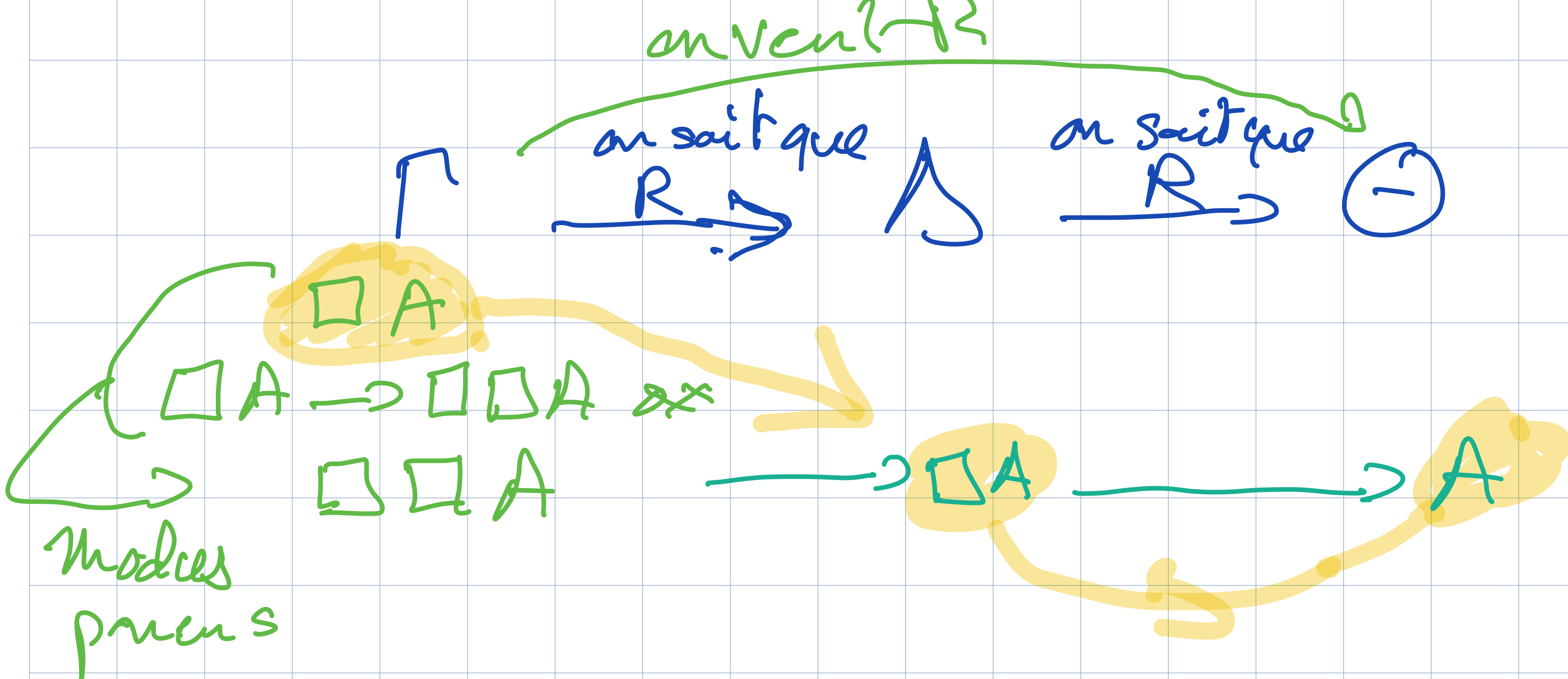
alors on a

c'est-à-dire que

si $\Box A \in \Gamma$ alors $A \in \Theta$

Pour avoir le R en vert $\Gamma R \Theta$

il faut que chaque fois qu'on a $\Box A$ dans Γ on ait A en Θ



- On suppose que $\Box A \to \Box\Box A$ est vrai en chaque monde
- On suppose que $\Gamma R \Delta$ et $\Delta R \Theta$
- On veut montrer que $\Gamma R \Theta$

  c'est-à-dire que pour toute formule A

  si $\Box A \in \Gamma$ alors $A \in \Theta$

Pour ce faire

supposons que $\Box A \in \Gamma$

comme l'axiome $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ vrai en Γ

on a $\Box\Box A$ vrai en Γ

donc par déf de R avec $\Gamma R \Delta$

$\Box A$ vrai en Δ

et par déf de R avec $\Delta R \Theta$

on a A vrai en Θ QED

$\Psi \, R \, \overline{\Phi}$ par déf

$\begin{cases} \text{pour tout} & \Box U \in \Psi \\ \text{on a} & U \in \overline{\Phi} \end{cases}$

$\Psi \, R \, \overline{\Phi} : \forall A . \; \Box A \in \Psi \Rightarrow A \in \overline{\Phi}$

déf de $U \to W$ vrai dans Γ

si U vrai dans Γ

alors W vrai dans Γ

$\Box A$ vrai dans Γ

$\Box A \to \Box\Box A$ vrai dans Γ

donc $\Box\Box A$ vrai dans Γ

Pourquoi le fait que
le modèle canonique
soit transitif quand on utilise K4
donne-t-il la complétude
de la logique modale K4
par rapport au modèles
transitifs

soit X pas démontrable

$\neg X$ cohérente

$\neg X \in \Gamma$ (Γ maximal cohérent qui complète X)

dans le modèle canonique

X pas vrai en Γ qui est transitif

X pas vrai en chaque monde de tout modèle transitif

X vrai dans tout modèle $\rightarrow$ X démontrable

Pour le calcul propositionnel classique, notre résultat s'applique. $(A \to \neg B) \to (A \to B) \to \neg A$

(S) : $(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to p \to r$

(K) : $p \to (q \to p)$

$$\begin{cases} p \to q \to (p \wedge q) \\ p \wedge q \to p \\ p \wedge q \to q \end{cases}$$

modele canonique

1 monde possible =

1 valuation (et toute les formules vraies pour cette valuation)

R = vide (pas de □)

$p = 0$
$q = 0$

$p = 0$
$q = 1$

$p = 1$
$q = 0$

$p = 1$
$q = 1$

pas de R (pas de $\square$)

X pas demontrable

$\hookrightarrow$ $\neg X$ vrai en un monde
(pour une valuation)

$\hookrightarrow$ donc X pas vrai pour une valuation

X vrai pour toute valuation

$\longrightarrow$ X demontrable.