Exercice 1 Théorèmes de point fixe

On dit qu'un programme est minimal s'il est le plus petit dans l'ensemble de tous les programmes qui calculent la même fonction. En d'autres termes le programme n est minimal si pour tout m $[m|\cdot] = [n|\cdot]$ entraine $m \geq n$; ou encore n est minimal si pour tout (code de) programme m calculant la même fonction que le programme n on a $m \geq n$. On note M l'ensemble des programmes minimaux et on souhaite montrer que M n'est pas récursif.

1(a) Expliquez pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème de Rice pour traiter le cas de cet ensemble.

Le fait d'être minimal est une propriété du numéro du programme, qui code le texte du programme, et non de la fonction calculée par le programme.

1(b) Montrez que si la propriété d'être minimal était décidable, alors pour chaque entier, on pourrait trouver un entier strictement plus grand que le premier et qui soit minimal.

Supposons qu'il existe un programme a qui décide si le programme numéro k est minimal ou non. Comme il ya une infinité de fonctions calculables, toutes ne sont pas apparues avant le programme k, et il reste toujours une infinité de fonctions et de programmes minimaux calculant ces fonctions au delà de k. Il suffit donc d'associer à n le premier entier strictement supérieur à n qui soit un programme minimal, ce qui se fait ainsi :

ϕ :
p $\leftarrow$ 1
tant que $[a|n+p] \neq 1$ faire $p \leftarrow p+1$
fin tant que
return $n+p$

Puisque $\phi(n)$ est un programme minimal de rang supérieur strictement à n, la fonction $[\phi(n)|\cdot]$ calculée par $\phi(n)$ est différente de toutes les fonctions calculées par les programmes de rang inférieur à $\phi(n)$ et en particulier de la fonction $[n|\cdot]$ calculée par le programme n.

1(c) Montrez (on peut utiliser ce qui précède) que la minimalité n'est pas décidable.

Si la fonction caractéristique des programmes minimaux est calculable, alors la fonction ϕ ci-dessus admet un point fixe. Mais comme on l'a dit ci-dessus, il est impossible que $[n|\cdot] = [\phi(n)|\cdot]$