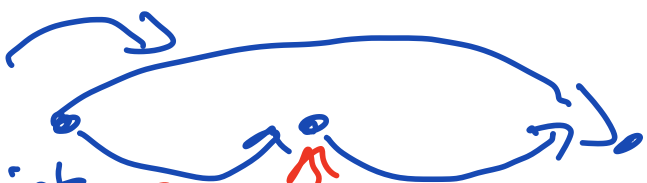
Montrez que $\forall A$ $\Box\Box A \rightarrow \Box A$ est valide dans toute interpretation de cadre $\langle m, R \rangle$ ssi R est dense.

si



alors il existe un intermédiaire

$$\forall x, y \quad xRy \rightarrow \exists z \; xRz \,\&\, zRy$$

On suppose R dense

Pour montrer que $\Box\Box A \to \Box A$ est partout vrai (= dans tout monde possible)
il faut montrer que si
$\Box\Box A$ est vraie dans un monde M_i
alors $\Box A$ est vraie dans ce monde M_i
(définition de $U \to W$ vraie dans M_i)

$\Box\Box A$ vraie dans M_i
alors pour tout M_j tq $M_i R M_j$
on a $\Box A$ vraie dans M_j (déf $\Box$)

$$\begin{array}{ccc} M_i & \longrightarrow & M_j \\ \Box\Box A & & \Box A \end{array}$$

Comme R est dense il y a un intermédiaire M_ℓ entre i et j

$$\begin{tikzcd}
\underset{\Box\Box A}{M_i} \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "R"'] & & \underset{\Box A}{M_j} \\
& M_\ell \arrow[ur, "R"'] &
\end{tikzcd}$$

comme $M_i \, R \, M_\ell$ on a $\Box A$ vraie en M_ℓ

$$\begin{tikzcd}
\underset{\Box\Box A}{M_i} \arrow[rr, "R"] \arrow[dr] & & \underset{\Box A}{M_j} \\
& \underset{\Box A}{M_\ell} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Comme $M_l \, R \, M_j$

et M_l satisfait $\Box A$

on a M_j satisfait A (déf $\Box$)

pour tout j tq $M_i R M_j$: $M_i \, \Box\Box A \longrightarrow M_j \, \Box A$ A

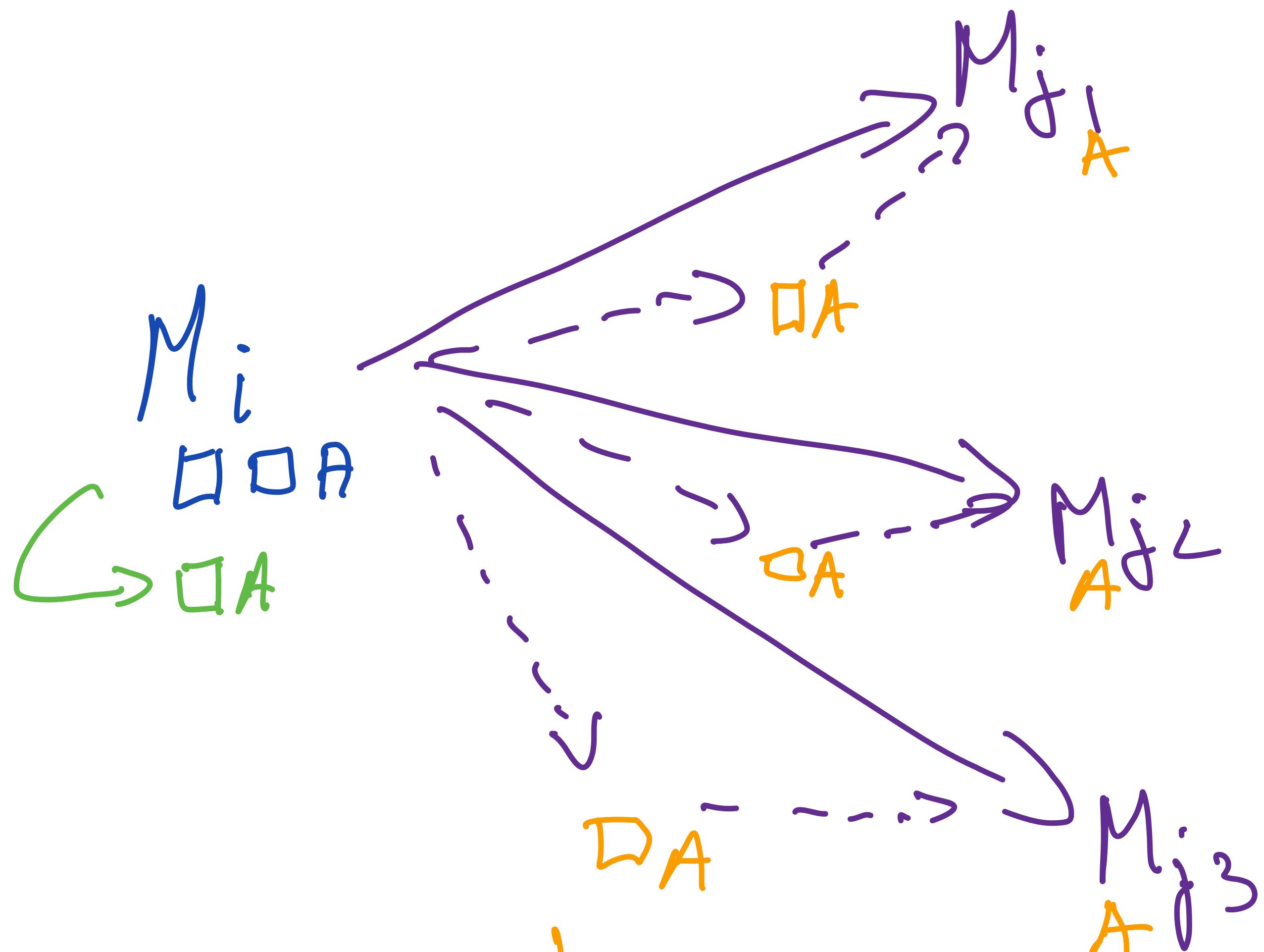
$M_l \, \Box A$

Le raisonnement ci-dessus vaut pour tout M_j tq $M_i R M_j$

Donc pour tout M_j tq $M_i R M_j$
A est vrai en M_j

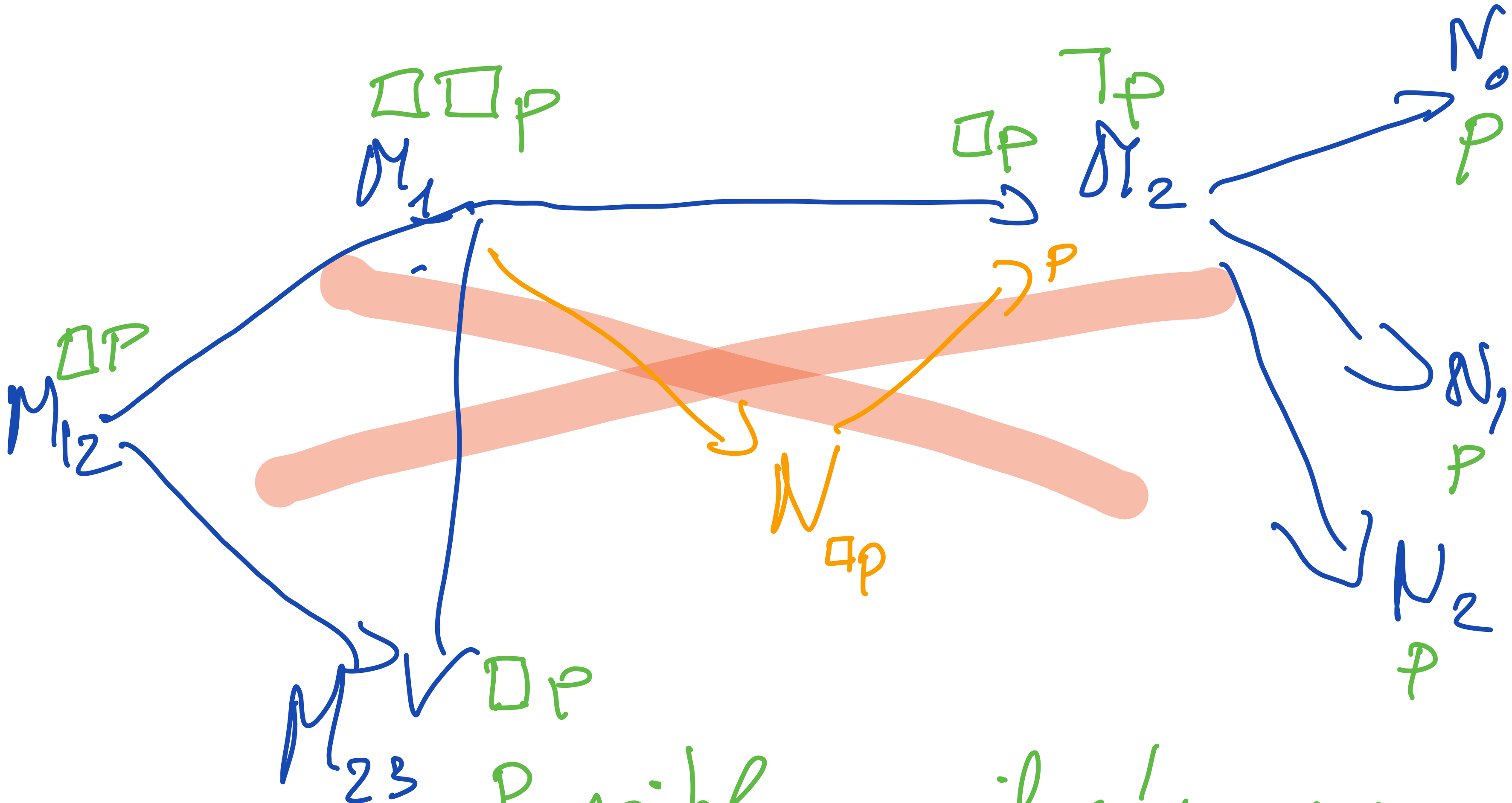
Donc $\Box A$ est vrai en M_i

on prend un M_j tq $M_i R M_j$ et on montre que $M_j \Vdash A$



Comme dans <u>tous</u> les mondes M_j accessibles depuis M_i on a A on peut affirmer que $M_i \Vdash \Box A$ (déf de $\Box$)

Soit $\langle M_i\ R\rangle$ un cadre nondense



Possible car il n'y a pas d'intermédiaire entre M_1 et M_2 sinon il faudrait $N \Vdash \Box p$ et $M_2 \Vdash p$