

HAI713I exemple de corrigé TD3 Exercice 1

Cours et TD de B. Durand Correction rédigée par Ch. Retoré

Exercice 1 Réductions On considère $A = \{x \mid \forall y [x|y] \downarrow\}$ — en d’autres termes A est l’ensemble des (codes de) programmes qui convergent pour chaque entrée.

1(a) Montrer que A n’est pas récursif.

On utilise le théorème de Rice. La propriété $\forall y [x|y] \downarrow$ est une propriété de la fonction réalisée par le programme x : cette fonction doit être totale (définie sur tout \mathbb{N}). Ainsi, A est exactement l’ensemble des programmes qui calculent une fonction ayant cette propriété et on peut donc appliquer le théorème de Rice.

D’après ce théorème, il suffit que A ne soit ni \mathbb{N} ni \emptyset pour que A ne soit pas récursif. Comme (un code quelconque de) la fonction $Id : x \mapsto x$ appartient à A et que (un code quelconque de) la fonction $\perp : x \mapsto \perp$ n’appartient pas à A , le théorème de Rice permet d’affirmer que A n’est pas récursif.

1(b) Montrer que $K < A$ ($K = \{x \mid [x|x] \downarrow\}$)

Il faut trouver une fonction calculable totale telle que :

$x \in K$ si et seulement si $f(x) \in A$.

Définition de la fonction de réduction

Considérons le programme a :

$a\langle x, z \rangle : \text{if } [x|x] \downarrow \text{ then } z$

La fonction $S_1^1\langle a, x \rangle$ (a est déjà fixé, et de plus on fixe x) définit une fonction :

— soit $S_1^1\langle a, x \rangle = Id : z \mapsto z$ quand $[x|x] \downarrow$

— soit $S_1^1\langle a, x \rangle = \perp : z \mapsto \perp$ quand $[x|x] \uparrow$

On propose la réduction $f : x \mapsto S_1^1\langle a, x \rangle$ — $S_1^1\langle a, x \rangle$ est une fonction !

La réduction est une fonction calculable totale

La fonction $x \mapsto S_1^1\langle a, x \rangle$ est calculable totale qui associe le code d’un programme à savoir $S_1^1\langle a, x \rangle$ — attention ! cela ne veut pas dire que $S_1^1\langle a, x \rangle$ soit un programme total !

La réduction envoie K dans A Si $x \in K$ alors $S_1^1\langle a, x \rangle \in A$ car $S_1^1\langle a, x \rangle = Id$.

Lorsqu’un réduit est dans A , il provient de K

Si $S_1^1\langle a, x \rangle \in A$ alors $S_1^1\langle a, x \rangle = Id$ (on a le choix entre Id et $\perp \notin A$) et c’est donc que $[x|x] \downarrow$ c.-à-d. $x \in K$

1(c) Montrer que $K < \bar{A} = \{x \mid \exists y [x|y] \uparrow\}$

On procède un peu comme précédemment, mais cette fois on souhaite que $f(x)$ ne converge pas partout quand $[x|x] \downarrow$.

Définition de la réduction

Soit le programme b défini comme suit :

$b\langle x, z \rangle : \text{if step}(x, x, z) = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \perp$

Alors $S_1^1\langle b, x \rangle$ est le programme suivant :

- soit $[x|x]_{\downarrow}$ ($x \in K$) et c'est la fonction $z \mapsto z$ tant que $z < t$ (t : nombre de pas pour que $[x|x]_{\downarrow}$) puis \perp dès que $z \geq t$ — donc $S_1^1 \langle b, x \rangle \notin A$ quand $x \in K$
- soit $[x|x]_{\uparrow}$ ($x \notin K$) et c'est la fonction identité $z \mapsto z$ — donc $S_1^1 \langle b, x \rangle \in A$ quand $x \notin K$

La réduction est une fonction calculable totale

La fonction $x \mapsto S_1^1 \langle b, x \rangle$ est calculable totale (la fonction de x $x \mapsto S_1^1 \langle b, x \rangle$ est bien définie, même si la fonction de $z \mapsto S_1^1 \langle b, x \rangle z$ peut valoir \perp pour certaines valeurs de z).

La réduction envoie K dans \bar{A} et \bar{K} dans $A = \bar{\bar{A}}$

Les deux items ci-dessus montrent que si $x \in K$ alors $S_1^1 \langle b, x \rangle \in \bar{A}$ et si $x \notin K$ alors $S_1^1 \langle b, x \rangle \notin \bar{A}$, on a donc bien $x \in K$ si et seulement si $S_1^1 \langle b, x \rangle \in \bar{A}$.

1(d) En déduire que ni A ni \bar{A} ne sont énumérables.

On a vu dans les question précédente que $K < A$ et $K < \bar{A}$.

Comme vu en cours, $M < N$ ssi $\bar{M} < \bar{N}$ (ce n'est pas difficile à vérifier avec la définition de $<$, il suffit de prendre le même f) on a donc aussi $\bar{K} < \bar{A}$ (*) et $\bar{K} < A$ (**).

D'après les propriétés de $<$, si \bar{A} était énumérable, \bar{K} le serait aussi d'après (*) et si A était énumérable \bar{K} le serait aussi d'après (**).

Comme \bar{K} n'est pas énumérable (sinon K serait récursif) ni \bar{A} ni A ne sont énumérables.