

基于卡尔曼滤波的无人机遂行编队无源定位算法研究

摘要

无人机遂行编队常运用纯方位无缘定位法进行机队位置的调控。本文就无人机集群飞行时的“接收机”定位问题、机队编队调整问题等,给出了有高可靠性的无人机位置定位及矫正方案,分别圆形“接收机”定位模型、无人机编号识别模型等,使用卡尔曼滤波器对模型的误差进行优化,设计出理想的无人机位置调整方案等。

针对问题一 (1) 小问,为了实现对无人机集群的准确定位,需要确定对象的极坐标。由“外围无人机均匀分布”得出相邻任两外围机夹角均为 $\frac{\pi}{9}$;参照纯方位无缘定位法,可推出各机的方位角;然后,我们对无人机集群位置的几何关系进行解析,根据圆周上两架“发射机”到“接收机”的夹角 $\angle\alpha_{ij}$ 与这两架“发射机”的圆心角 $\angle\alpha_0$ 进行分类讨论,分别对四种三角形结构建模求解极径长。经仿真检验,模型置信水平可以达到 0.999:当相对方位角 $\alpha_1 = 28.8594$ 、 $\alpha_2 = 66.2404$ 、 $\alpha_3 = 95.0998$ 时,预测出观测点坐标与真实值相同,为 $(105.2242, 239.3820^\circ)$ 等。

针对问题一 (2) 小问,除了 FA00、FA01 号外需另外选“发射机”,使电磁波影响尽量小且定位精度尽量高。因 (1) 小问定位模型精度较理想,我们在该模型的基础上改进,先确定无人机编号,便可定位到所有无人机坐标。由于外围无人机有穷且较少,我们应用 MATLAB 遍历算法程序 (见附录 C) 进行全局搜索,以一个评估定位效果的损失函数遴选出最优的“发射机”,记录编号。同样的,我们通过计算机仿真,使用 100 组模拟数据对该流程进行重复试验:当第一架“发射机”中 α_1 为 9.7917, α_2 为 52.1907, α_3 为 61.9825, 第二架中 α_1 为 9.7917, α_2 为 31.2953, α_3 为 40.0871 时,可以准确的分辨出 FYX1 号、FYX1 号无人机分别为 FY07 号、FY08 号等,对比损失函数值状态,最终我们发现还需新增 2 架“发射机”,才能实现有效定位。

针对问题一 (3) 小问,为了使无人机编队按要求飞行,需要动态调整无人机的相对位置使外围无人机均匀分布在圆周上。单一无人机的姿态变动会引起集群中其他成员的响应,为了最终使机队稳定地飞行,我们运用自适应卡尔曼过滤器算法,建立了圆形编队调整模型;通过先验估计和后验更新,使无人机在调整位置过程中,逐渐使误差趋于最小。往复进行本过程,最终可以另外新增无偏差信号“发射机”;当“发射机”数量足够多,回带 (1) 小问中的定位模型,最终得出了一种无人机位置调控方案。

针对问题二,基于 (3) 小问中无人机编队的调整算法,我们考虑在此之上加以改进,使得对于锥形编队改进机队调整方案。同样的,通过计算机模拟生成的多组测试集。然后,引入三点定位法来先验检索无人机的坐标。通过卡尔曼滤波器进行机队位置的后验更新,每次无人机调整都调用一次“卡尔曼滤波”,使误差趋于最小,认为此时无人机到达标的位置。依照本方法,最终使 15 架无人机均可以到达图 3 所示的锥形编队位置。

关键字: 无人机编队 卡尔曼滤波器 三点定位法 计算机模拟

一、问题重述

1.1 问题背景

当今,无人机具有丰富的应用场景。为了迎合实际应用需求,常需使得无人机集群按一定姿态遂行编队飞行。为避免外界干扰,应尽量保持电磁静默,减少电磁波发射。“纯方位无源定位”法是一种实用的机队姿态稳定算法——该算法将机队成员赋予固定编号,由其中某几架无人机发射信号(简记为“发射机”)、其余无人机被动接收信号(简记为“接收机”);并约定“接收机”得到的方向信息为“相对方位角 α ”,定义为参考无人机与任意两架“发射机”连线的夹角,如图1中 α_1 、 α_2 、 α_3 所示:

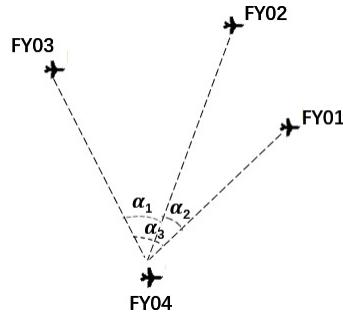


图1 以FY04为参考机的相对方位角 α 示例图

1.2 问题提出

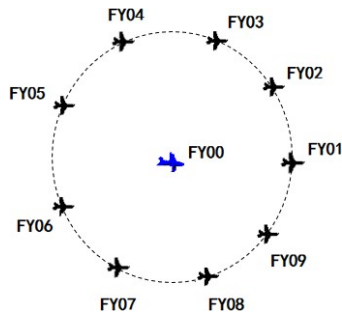


图2 圆形无人机编队示意图

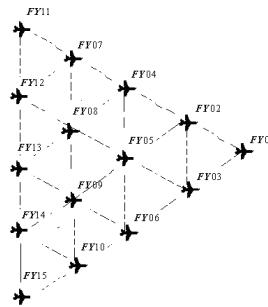


图3 锥形无人机编队示意图

问题一: 现有一组由10架有序无人机组成的圆形遂行机队,如图2所示,编号分别为FY01~FY09的成员机在以“FY00号无人机”为心的圆周上,依次解决下述问题:

(1) 编队中由包括“FY00号机”在内的3架无人机发射信号,其余偏移较大的成员为“接收机”,当已知“发射机”编号且位置无偏时,建立各“接收机”的定位模型。

(2) 假设“发射机”位置无偏差,已有FY00号和FY01号“发射机”时,还需要几架“发射机”才能实现“接收机”的有效定位。

(3) 要求每次机队调整以“FY00 号并另选 3 架无人机”作为“发射机”,其余作为“接收机”,仅根据表 1 中被选为“接收机”的方向信息,设计合理具体的无人机位置矫正方案,使外围的 9 架无人机最终均匀落在某半径为 100 m 的圆周上。

表 1 无人机的初始位置

无人机编号	极坐标 (m,°)	无人机编号	极坐标 (m,°)
0	(0, 0)	5	(98, 159.86)
1	(100, 0)	6	(112, 199.96)
2	(98, 40.10)	7	(105, 240.07)
3	(112, 80.21)	8	(98, 280.17)
4	(105, 119.75)	9	(112, 320.28)

问题二: 仍使用纯方位无源定位法, 设计适合其他编队队形的位置调整方案, 以如图 3 所示的锥形编队队形为例 (间距均等于 50m), 阐述矫正方案设计过程。

二、模型的假设

- (1) 假设编队内各无人机均可根据自身感知的高度信息保持飞行在同一高度。
- (2) 针对问题一前两种情况, 假设“发射机”可以无偏差地稳定在圆周上, 第三种情况下“发射机”有位置偏差。
- (3) 假设编队内无人机位调整位置的时间忽略不计, 视为“瞬间”完成位移。

三、符号说明

符号	意义	单位
α	相对方向角	°
F_i	对应编号为 FY0i 的无人机的坐标点	-
ρ_i	编号为 FY0i 的无人机到 FY00 的距离	m
θ_i	第 i 个夹角 (按实际场景区分)	°
$Loss$	损失函数	-
P_k	第 k 次调整时的卡尔曼滤波协方差矩阵	-
X_k	第 k 次调整时状态向量	-
U_k	第 k 次调整时状态均值向量	-

四、问题分析

4.1 考虑“发射机”可以无偏差运行在圆周轨道上

问题一的情况 (1)、(2) 中, 认为圆周上的发射机没用位置偏差, 故可以对模型做简化, 认为这两家发射机离圆心恒等于半径。同时, 由于外围无人机均匀排布“”, 便可理想认为任意相邻的两无人机夹角均为 $\frac{\pi}{9}$; 参照纯方位无缘定位方法, 确定出 2 架“发射机”后, 便依次易得各无人机方位角。,

4.2 考虑解析运算出代求接收机的方位信息

问题一 (1) 小问要求设计对“接收机”的定位模型, 而确定“接收机”的方位需计算方位角和极径长。同时依题意, 3 架发射机无位置偏差且已知编号, 基于 4.1 中的浅析, 容易定位出各“接受机”的方位角。故本题需着重考虑各“接收机”到圆心的距离 L 。

4.3 考虑无人机定位方案进行优化校验

问题一 (2) 小问约定了除选 FY00、FY01 号外, 另外确定一些无人机作为“发射机”, 使无人机集群可以准确地被定位。根据题目背景中要求, 应尽量减少电波发射已减轻干扰, 故另设信号“发射机”数量越少越好; 同时, “发射机”的设置也需保证机队能正常定位。在问题一 (1) 小问中, 当机队序号已知时, 只需要包括 FY00 在内的 3 架“发射机”即可做到准确定位。不妨在本问中继承前问的逻辑, 通过确定机队序号的方式, 实现方案的最优化, 可以实质上让“发射机”最少。

4.4 考虑“发射机”实际在轨有偏差时矫正机群位置

问题一 (3) 小问要求基于表 1 中无人机编队的初始位置数据, 通过多次调整“发射机”与“接收机”的编排——其中 FA00 号一直是“发射机”且“发射机”总数不超过 4 架, 最终使得无人机编队均匀排布。在本题假设中, 认为无人机的调整不需耗时。在前文的分析中, 若存在足够多的“发射机”无偏差地工作, 无人机编队的坐标便可一次求出。一旦无人机编队的“当前坐标”和“目标坐标”足够精确, 由于调整指令瞬间完成, 便可达到预期的机队编排效果。

4.5 考虑变换编队形态实现机队形态的动态矫正

问题二继续使用“纯方位无缘定位”法, 需要设计一种可以在锥形编队下, 仍可良好保持队形的无人机位置调整方案。与问题一 (3) 小问一样, 本题也考虑“发射机”的动态偏差。需要注意, 由于队形的变换, 对题目中坐标系的调整提出新要求; 同时, 由于无人机

数量增加到 15 架次, 相比问题一, 本题中对于方位角的计算具有更多复杂的情况, 需要重新进行分类讨论。

五、数据预处理

5.1 问题一 (1) 中有序模拟集的制作

问题一 (1) 小问需要建立对“接收机”的定位模型, 对于模型精度的检验, 需要一组符合实际的测试集。根据题意, 在外围的 9 架无人机中, 有 2 架“发射机”在轨无偏差运行, 其余无人机为“接收机”。据此, 我们考虑通过计算机模拟, 设计符合需求测试集结构:

(1) 对 FA01~FA09 共 9 架无人机中随机选取 2 架作为“发射机”, 由随机生成的“发射机”编号, 可按照相对位置得出各无人机方位角, 并认为这两架“发射机”始终在圆周上, F_i 、 F_j 分别表示选中的“发射机”, F 为外围无人机集合, random 为随机函数。

$$\begin{cases} F_i = \text{random}(F) \\ F_j = \text{random}(F - F_i) \\ F_i = (100, \frac{i \cdot \pi}{9}) \\ F_j = (100, \frac{j \cdot \pi}{9}) \end{cases} \quad (5-1-1)$$

(2) 剩余 7 架无人机作为“接收机”, 由于极角已经确定, 只需要以半径长为中心施加扰动 ϵ , 便可模拟出“接收机”的极坐标 (ρ, θ) :

$$F_k = (\rho, \theta) = (100 \pm \epsilon, \frac{(k-1)\pi}{9}) \quad (5-1-2)$$

根据上述约定, 我们在附录 B 中 MATLAB 计算机模拟程序中随机生成了 101 组符合条件的数据, 作为测试集 (记为“ M ”) 以待备用。

5.2 问题一 (2) 中发射机模拟集的制作

与 (1) 小问相似, 问题一 (2) 小问, 为了检验模型的精度, 也需要一组符合实际的“发射机”坐标测试集。依据题意, 本测试集中需包括多家新增“发射机”与已有 FA00、FA01 号无人机的相对方位信息。我们考虑使用随机数生成两组“发射机”信息:

对 FA01~FA09 共 9 架无人机中随机选取 2 架作为“发射机”, 随机生成的“发射机”编号并记录真实序号。按照序号和相对位置可推出“发射机”的无偏工作点 F_i 、 F_j 分别表示选中的“发射机”, F 为外围无人机集合, random 为随机函数, 需要以精确工作点为中心, 给无人机坐标施加适当扰动 $\epsilon < 1E - 4$:

$$\begin{cases} F_i = \text{random}(F) \\ F_j = \text{random}(F - F_i) \\ F_i = (100 \pm \epsilon, (i + \epsilon) \frac{\pi}{9}) \\ F_j = (100 \pm \epsilon, (j + \epsilon) \frac{\pi}{9}) \end{cases} \quad (5-2-1)$$

按照式 5-2-1 我们模拟出 100 组测试数据用于“发射机”确定模型的精度验证, 记为“N”以待备用。

5.3 问题二中坐标数据的采集

根据问题二的要求, 本题与问题一 (3) 小问接近, 需要通过多次调整使得编队如图 3 所示稳定运行。在分析中, 机队的调整需要指导“目标坐标”, 而目标坐标在图 3 中可以直接反映为已知极坐标。如 FA13 可以记为 $(0, 0^\circ)$, FA08 为 $(50, 30^\circ)$ 等, 确定完坐标系后需优先完成。

六、问题一模型

6.1 已知发射机编号时建立接收机的定位模型

6.1.1 接收机与发射机相对位置的讨论

据题意, 外围两架“发射机”默认在圆周上, 且两点的圆心角一定是 $\frac{\pi}{9}$ 的整数倍; 本题需根据圆上两“发射机”位置、圆心以及无人机之间的夹角 α 等信息, 建模定位出 7 架“接收机”的坐标。此外, 题意注明, 圆周半径 $R = 100m$; 同时保持符号约定与章节 5-1-1 相同, F_i 、 F_j 、 F_k 分别表示外围第一架“发射机”、第二架“发射机”与第 k 架“接收机”。在章节 4.2 中, 我们认为“接收机”的定位需要解算出“接收机” F_k 的方位角, 记为 θ_k , “接收机” F_k 到圆心 F_0 的距离, 记为 L :

根据选取的两架发射机以及其对应的编号, 为了维持无人机编队队形稳定, 通常采用“鸽群顺序”^[1]编队 (逆时针序依次编号), 易于管理; 综上, 可以依次推导相邻无人机的方位角:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{(1-1) \cdot \pi}{9} \\ \theta_2 &= \frac{(2-1) \cdot \pi}{9} \\ &\vdots \\ \theta_k &= \frac{(k-1) \cdot \pi}{9} \end{aligned} \quad (6-1-1)$$

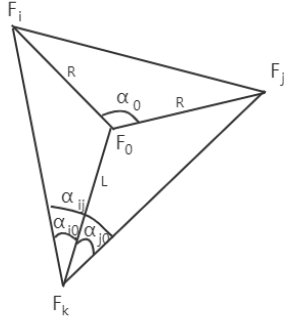


图4 圆形编队接收机情况 1

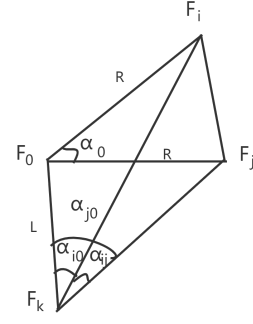


图5 圆形编队接收机情况 2

令 $L = |F_0 F_k|$, $\angle \alpha_0 = \angle F_i F_0 F_j$, $\angle x = \angle F_i F_0 F_k$, 在解析题目时, 为了便于模型的理解, 我们按照圆周上两架“发射机”到“接收机”的夹角 $\angle \alpha_{ij}$ 与这两架“发射机”的圆心角 $\angle \alpha_0$ 角度关系组合, 进行了多分类讨论, 共分出如图 4、图 5、图 6、图 7 四种几何关系, 由正弦定理^[2]可分别推导出下述四组方程组:

情况一 当 $90^\circ < \angle \alpha_0 < 180^\circ$ 、 $0^\circ < \angle \alpha_{ij} < 90^\circ$, 如图 4 所示:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{\sin \angle \alpha_{i0}} = \frac{L}{\sin [180^\circ - \angle \alpha_{i0} - (360^\circ - \angle \alpha_0 - \angle x)]} \\ \quad = \frac{L}{-\sin [180^\circ + \angle \alpha_{i0} - \angle \alpha_0 - \angle x]} \\ \quad = \frac{L}{\sin [\angle \alpha_{i0} - \angle \alpha_0 - \angle x]} \\ \frac{R}{\sin \angle \alpha_{j0}} = \frac{L}{\sin [180^\circ - \angle \alpha_{j0} - \angle x]} \\ \quad = \frac{L}{\sin [\angle \alpha_{j0} + \angle x]} \end{array} \right. \quad (6-1-2)$$

情况二 当 $0^\circ < \angle \alpha_0 < 90^\circ$ 、 $0^\circ < \angle \alpha_{ij} < 90^\circ$, 如图 5 所示:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{\sin \angle \alpha_{i0}} = \frac{L}{\sin [180^\circ - \angle \alpha_{i0} - (\angle \alpha_0 + \angle x)]} \\ \frac{R}{\sin \angle \alpha_{j0}} = \frac{L}{\sin [180^\circ - \angle \alpha_{j0} - \angle x]} \\ \quad = \frac{L}{\sin [\angle \alpha_{j0} + \angle x]} \end{array} \right. \quad (6-1-3)$$

情况三 当 $90^\circ < \angle \alpha_0 < 180^\circ$ 、 $90^\circ < \angle \alpha_{ij} < 180^\circ$, 如图 6 所示:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{\sin \angle \alpha_{ik}} = \frac{L}{\sin [180^\circ - \angle \alpha_{ik} - (\angle \alpha_0 - \angle x)]} \\ \frac{R}{\sin \angle \alpha_{jk}} = \frac{L}{\sin [180^\circ - \angle \alpha_{jk} - \angle x]} \\ \quad = \frac{L}{\sin [\angle \alpha_{jk} + \angle x]} \end{array} \right. \quad (6-1-4)$$

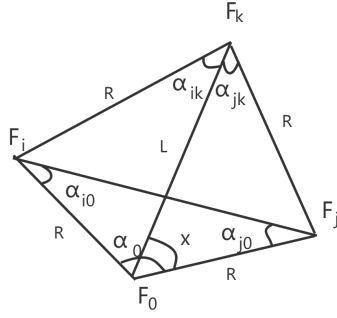


图 6 圆形编队接收机情况 3

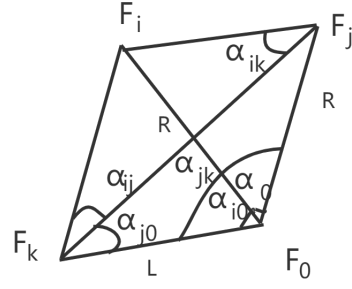


图 7 圆形编队接收机情况 4

情况四 当 $0^\circ < \angle \alpha_0 < 90^\circ$ 、 $90^\circ < \angle \alpha_{ij} < 180^\circ$, 如图 7 所示:

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin[\angle \alpha_{ij} + \angle \alpha_{j0}]} = \frac{L}{\sin[180^\circ - \angle \alpha_{i0} - (\angle \alpha_{ij} + \angle \alpha_{j0})]} \\ \frac{R}{\sin \angle \alpha_{j0}} = \frac{L}{\sin[180^\circ - \angle \alpha_{jk} - \angle j0]} \end{cases} \quad (6-1-5)$$

式 6-1-2 至 6-1-4 中均利用正弦定理建立起待求极轴长 L 与各已知夹角 α 之间的关系,在附录 B 的 MATLAB 程序中,通过联立方程组消去含中间变量 $\angle x$ 的表达式,便可以解算出待求“接收机”距离圆心的极轴长 L ,solve() 为 MATLAB 内置求解函数,formula 表示上述方程组:

$$[L] = \text{solve}(L, \text{formula}) \quad (6-1-6)$$

6.1.2 接收机定位模型精度检验

在章节 6.1.1 中,基于纯方位无缘定位法我们对信号“发射机”和“接收机”的相对集合关系进行了数学解析,通过解析法设计了可以计算极轴长 L 的几何模型,从而定位出了“接收机”的极坐标。为了进一步验证模型的可靠性,我们使用章节 5.1 中制作的模拟集对 6.1.1 的模型进行检验,最终得出置信水平高达 0.999。

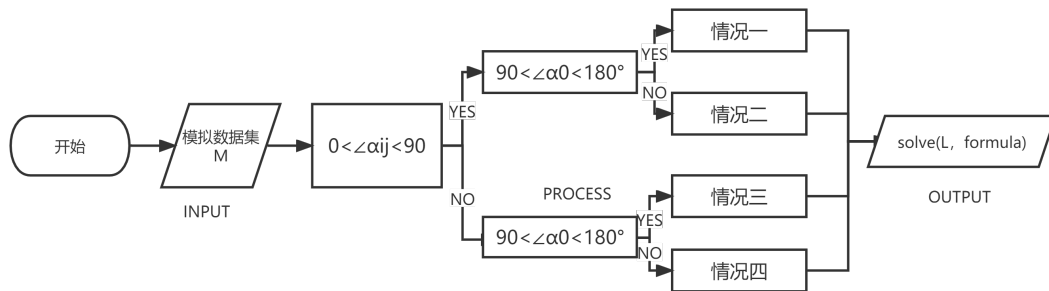


图 8 情况讨论分支语句流程图

Step.1

将模拟集中的元素遍历,依次将 F_i 、 F_j 、 F_k 模拟数据中的 α_{ij} 、 α_0 进行比较,在 MATLAB 程序中使用分支语句进行分类,依次归入四种情况。

Step.2

将模拟集中的元素遍历,依次将 F_i 、 F_j 、 F_k 模拟数据带入四种情况的求解模型中,依次计算出 7 架“接收机”的极角 θ'_k 、极轴长 ρ'_k 。

Step.3

通过依次比较原始数据和求解数据,若同时满足:

$$\begin{cases} \rho_k = \rho'_k \\ \theta_k = \theta'_k \end{cases} \quad (6-1-7)$$

则认为对模拟数据中“接收机”方位的定位正确,计数 $count++$ 自增 1 个单位,最终使用成功试验次数与总试验次数的频率来描述模型定位程度的置信水平 Z ,最终求得 $Z \approx 0.999$,如表 2 所示,取前 10 条模拟数据,表中 10 组数据均准确的定位到模拟出的无人机的极坐标,当观测接收机相对方位角 $\alpha_1 = 28.8594$ 、 $\alpha_2 = 66.2404$ 、 $\alpha_3 = 95.0998$ 时,预测出观测点坐标为 (105.2242,239.3820°) 为完整数据详见附录 F:

$$Z = \frac{count}{101} \quad (6-1-8)$$

表 2 “接收机”定位模型验证数据表 (前 10 条)

接收机编号	发射机编号	α_i	α_j	α_0	真实位置极径	真实位置极角	模型输出极径	模型输出极角
6	7	28.8594	66.2404	95.0998	105.2242	239.3820	105.2242	239.3820
2	3	50.9066	72.2338	21.3272	97.0403	80.2295	97.0403	80.2295
4	6	10.1527	47.9040	58.0567	105.1239	200.8316	105.1239	200.8316
9	3	48.8287	29.3571	19.4715	103.0628	80.2937	103.0628	80.2937
6	8	50.0504	49.6488	99.6993	100.4413	280.4038	100.4413	280.4038
2	3	47.2977	63.4888	16.1911	108.8599	79.5724	108.8599	79.5724
6	2	72.1601	9.7031	81.8632	97.8389	39.1946	97.8389	39.1946
5	7	29.7529	49.3822	79.1351	101.7220	240.0714	101.7220	240.0714
8	2	69.5583	29.8101	39.7482	100.4087	40.2456	100.4087	40.2456
5	8	51.3596	30.7755	82.1350	95.8703	279.8482	95.8703	279.8482

6.2 未知发射机编号时使发射机数量最少

在章节 6.1.2 中, 通过计算机模拟, 使用 101 组试验数据验证了 (1) 小问中的模型精度, 且 (1) 题背景下只使用了 3 架发射机, 数量较少。据此, 我们认为该模型的有较高精度同时可以发射较少的电磁波, 在 (2) 小问中仍可运用该模型推算“发射机”的配置:

6.2.1 衡量无人机编队定位准确度的损失函数

为了同时描述无人机编队的定位精度和机队的数量, 在章节 5.2 中通过计算机模拟, 生成了 100 组测试数据。而由 6.1.2 中的试验可知, 当 (2) 小问中“发射机”选取越接近采样点的情况时, 回带 6.1.1 的“接收机”定位模型准确度越高。

据此, 我们定义“发射机”选取会影响“接收机”定位精度, 且可用一损失函数 $Loss$ 对影响进行评价。选取一架的外围无人机与 FA00、FA01 号共同作为“发射机”, 模拟原始数据为“第 k 架无人机的原始极坐标为 (ρ_k, θ_k) ”, 对应第 k 架无人机的测试极坐标为 (ρ'_k, θ'_k) :

$$Loss_k = \sqrt{\rho_k^2 + \rho_k'^2 - 2\rho_k\rho_k'\cos(\theta_k - \theta'_k)} \quad (6-2-1)$$

6.2.2 全局搜索获取新增一架“发射机”的编号

在 (1) 小问模型基础上, 以 40° 设置旋转梯度, 假设外围无人机恰好以逆时针递增次增编号, 分别为 01~09。以 FA00 与 FA01 连线的正方向作为无人机编队极坐标体系的初始位置。依次将 F_k 作为新增的一架“发射机”, F_k 的极坐标可以表示为 $(R, \frac{(k-1)\pi}{9})$

在章节 5.2 中我们模拟出了 100 组符合条件的数据, 可以将数据集“N”作为原始集。对除了 FA00 和 FA01 号外的其他无人机进行一次全局遍历搜索, 每次选取 FA0i(F_i) 号无人机作为新增“发射机”。

每轮修改“发射机”编号后, 都要依次对所有计算式 6-2-1 所示的损失函数值 $Loss_k$ 。在遍历过程中使用如式 6-2-2 所示的“优化函数”对“发射机”的选取进行评估。

$$\min \min[Loss] \quad (6-2-2)$$

当损失值趋于 0 时, 说明无人机的原始数据与圆周上的标的点非常接近。

6.2.3 只取一架“发射机”无法完全实现精确定位

基于上文的分析, 我们使用损失函数 $Loss$ 做了全局搜索。对于部分样本点, 3 架“发射机”可以得出检测无人机的序号; 但是, 存在部分样本点出现了异常值, 再重复试验发现该组点存在多个结果。

结合图 9, 经过考虑和研讨, 我们认为多解问题主要是由于“发射机”的选取可能有等价情况。由于外围共有 9 架均匀分布的无人机, 沿着 FA00 与 FA01 延长线呈轴对称。对于同一组定位目标, 可能存在两组对称的最优“发射机”选择方案, 如图所示, 故仅用 3 架“发射机”无法实现定位的完全精确:

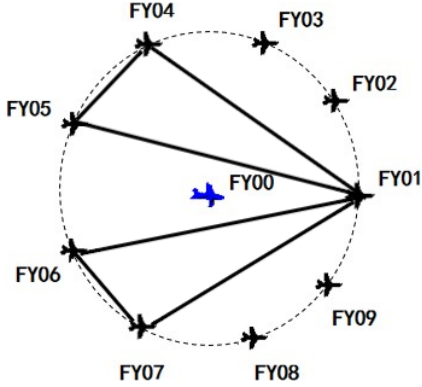


图 9 同一接收机定位等价发射机选取方案 (实例一)

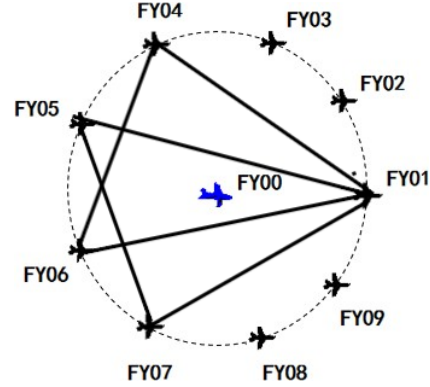


图 10 同一接收机定位等价发射机选取方案 (实例二)

6.2.4 全局搜索获取新增两架“发射机”的编号

在章节 6.2.1 中我们只选了一架“发射机”但发现存在对称多解, 故需要继续增加“发射机”的数量。故, 我们考虑获取新增 2 架“发射机”的编号。

同时, 由于“发射机”数量的改变提高了定位的精度, 损失函数的实际意义失效; 需要随之调整, 如式 6-2-3 所示, 选用 FA00、FA01 和另选中两架 F_i 、 F_j 作为“发射机”, 可以分别取 FA00、FA01、 F_i 作为第一组定位信号“发射机”, 按照式 6-2-1 计算出损失函数值 $Loss^{(1)}$; 同理再取 FA00、FA01、 F_j 作为第二组“发射机”, 计算损失函数值趋于最小, 达到最优:

$$\min \min [Loss_k^{(1)} + Loss_k^{(2)}] \quad (6-2-3)$$

从除了 FA00 和 FA01 号外的其他无人机进行嵌套遍历, 每组挑选出两架新增“发射机, 记为“FA0i(F_i)、FA0j(F_j)”。对所选的数据组, 以横轴为第一组的函数损失值, 纵轴为第二组的损失值, 绘制如图 10 所示的损失函数值图像。从图中不难发现, 大部分点落在半径为 100m 的圆内, 即大部分区域可以被准确定位出。

6.2.5 第 (2) 小问结论

(1) 测试检验:

为了检验本模型对另外增选“发射机”模型的准确度, 我们仿照 (1) 小问中计算机模拟的思路, 根据章节 5.2 中模拟出的测试集数据, 通过带回模型的方式, 统计通过无人机序号检验的实验次数, 最终得出本模型可以完美地准确解析出“发射机”的序号。拥有 4 架“发射机”后, 基于章节 6.1 中定位模型的研究, 最终可计算出所有无人机的方位信

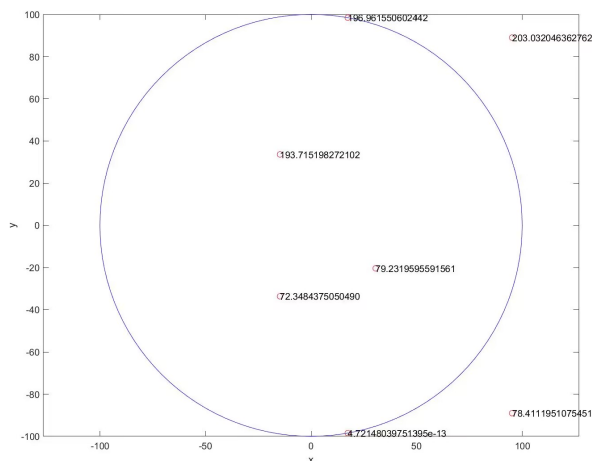


图 11 选取新增两架“发射机”时测试集的损失值雷达图

息。如表 3 所示, 列举了前 10 条模拟检验数据, 可依照“相对方位角 α ”检验模型精度。如表 3 所示, 当选取两架无人机发射角分别为: 新增第一架“发射机”中 α_1 为 9.7917, α_2 为 52.1907, α_3 为 61.9825, 第二架“发射机”中 α_1 为 9.7917, α_2 为 31.2953, α_3 为 40.0871 时, 可以准确的分辨出 FYX1 号无人机为“FY07 号”、FYX1 号无人机为“FY08 号”等, 可以反映出模型具有优秀的测试效果, 完整数据详见附录 F。

表 3 无人机序号识别检验数据表 (前 10 条)

FYX1 发射机对应的发射角			FYX2 发射机对应的发射角			FYX1 的真实编号	FYX2 的真实编号	FYX1 模型识别编号	FYX2 模型识别编号
α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3				
9.7917	52.1907	61.9825	9.7917	31.2953	41.0871	7	8	7	8
66.6277	29.8035	96.4311	66.6277	9.3708	57.2568	5	7	5	7
46.5893	62.7189	16.1296	46.5893	28.8778	75.4670	2	6	2	6
30.8234	75.4210	44.5976	30.8234	10.8140	41.6374	3	8	3	8
65.1491	64.9471	130.0962	65.1491	9.8149	55.3343	3	7	3	7
64.9607	28.6424	36.3183	64.9607	47.5875	17.3732	8	9	8	9
65.1266	48.1506	16.9760	65.1266	29.3292	35.7974	2	3	2	3
30.8349	30.7603	61.5951	30.8349	51.6842	20.8493	4	9	4	9
53.1828	78.4849	131.6677	53.1828	10.8320	64.0148	4	7	4	7
48.2132	10.1367	38.0765	48.2132	47.3229	95.5361	3	6	3	6

(2) 结论小结:

本题中, 为了实现有效的无人机定位, 同时尽可能减少电磁波的干扰, 保持定位的准确性和可靠性; 除 FY00 和 FY01 外, 还至少需要再选 2 架“发射机”。

6.3 择优选取信号发射机以动态调整无人机编队位置

6.3.1 动态调整“发射机”排布位置

本题中“发射机”的选取会随着机队调整而改变,为了实现最终无人机编队整体整齐,可能会进行多次变换调整。无人机编队是一个集群系统,系统中的成员异动会引发其他成员的姿态调整反应。同时,根据题目约束条件,“发射机”可能存在位置偏差。不妨从编队以 FA00 号机为参考系的角度思考,则外围 9 架无人机均需要各自向着坐标已知的位置移动。

查阅资料,无人机的位置运动,需要同时在位移指令中告知该无人机的初始坐标和目标坐标在表 1 中给出的数据中,FA00 与 FA01 号无人机已分别精准地布于目标位置 (0,0) 和 (100,0),根据章节 6.1 中的“接收机”定位模型,只要再有一架“发射机”达到给定目标位置后,便可以 99.9% 的置信水平下精准卡尔曼滤波器是一种适用于线性系统中未知环境下理想参数估计的数据最优化自回归处理方法,对存在误差的观测值也能够有效地估计真实值。本题中,无人机中由“发射机”引导“接收机”调整位置,而定位出其他“接收机”的坐标。根据这组精确坐标与运动目标坐标,可以计算出飞行方向和步长。我们考虑在章节 6.1 的定位模型和 6.2 “发射机”选择模型的基础上再做改进。

承上述分析,无人机的初始坐标和最终希望达到的目标坐标已知。首先,需要让 2-9 号无人机中其中一架在目标位置到位。参考 6.2 的“发射机”选择模型,需要在移动的过程中准确地告知“接收机”的实时坐标,由于该机初始位置的轴长扰动 ϵ , 初始时找不到三架无偏差的“发射机”,只能用其中坐标最接近于目标的一架取代;由此,该定位体系此时得出的其他无人机的定位坐标是不精确的,据此的位移指令也是不精确的。故本题需使用一种可以应对带“扰动”数据的处理方法,卡尔曼滤波器算法符合本题的实际需求。

6.3.2 卡尔曼滤波器

(1) 卡尔曼滤波器简介:

传统的卡尔曼滤波器是一种适用于线性系统中未知环境下理想参数估计的数据最优化自回归处理方法,对存在误差的观测值也能够有效地估计真实值。本题中,无人机中由“发射机”引导“接收机”调整位置,而“发射机”的位置围绕着圆周轨迹具有一定的扰动 ϵ , 自身的牵引信号存在一定偏差,而卡尔曼滤波器可以折中地处理由观测源数据误差引起的整体失调,(3) 小问选用卡尔曼滤波器主要是由此考虑。算法中卡尔曼滤波算法基本实现原理主要包含预测和更新两部,分别对应无人机位置调整循环周期内的两个阶段:

(2) 预测:

由于卡尔曼滤波算法评估的对象的状态向量是动态调整,为了避免“后馈”响应模

为了描述调整编队形态的过程的不确定性, 按卡尔曼滤波算法, 需要从状态向量的协方差入手分析, 依据协方差的定义, 可以计算出第 i 次调整与第 j 次调整间的协方差 \sum_{ij} 如式 6-3-2; 为便于推演, 将算得协方差以式 6-3-3 所示的协方差矩阵形式表示为 P_k 。之后, 根据协方差的乘法运算, 可以把协方差阵变形为式 6-3-4 的形式, 其中 $Cov()$ 为求协方差函数:

$$Cov(AX) = A \sum A^T \quad (6-3-4)$$

(4) 先验状态估计:

无人机编队飞行以当前极坐标 (ρ, θ) 来表征无人机所处状态, 故本题中使用无人机极坐标来作为先验状态向量。

先验概率估计是一种假设检验方法, 先验估计 \hat{X}_k 主要取决于三个方面:

- (a) 无人机编队前一次调整的最优估计;
- (b) 环境当中存在一定的噪声干扰;
- (c) 确定的外部影响值。

为了描述跟踪对象的变化, 需要通过先验估计计算状态向量的协方差矩阵 P_k , 预测出可能的调整趋势。

由于环境中存在无法线性描述的误差 (“发射机” 不一定在圆周上), 需要在预测时允许有一定扰动, 用 R_k 表示环境不确定度, 且状态变化过程受外界的影响, 用 O_k 表示, 则有状态预测公式, 如式 6-3-5:

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= Q_k \hat{X}_{k-1} + S_k O_k \\ P_k &= Q_k P_{k-1} Q_k^T + R_k \end{aligned} \quad (6-3-5)$$

其中 Q_k 为状态变量的转移矩阵, 由于在题目中经过假设: 无人机位置调整认为 “瞬间” 完成, 状态变化转换为非线性, 无法直接解析出 Q_k 的变化过程; 同理, S_k 为状态参数异动, 故本处不对 Q_k 、 S_k 注解。

(5) 后验检验:

为了校验无人机编队位置调整的合理性, 每次无人机的矫正都需要进行一次损失函数评估。与章节 6.2.1 中对损失函数的定义类似, 本题中讨论损失的对象是除了 FA00、FA01 号无人机以外的其它成员, 对 2~9 号无人机我们建立列表, 每轮调整都记录下 $F_2 \sim F_9$ 对应的每组损失值 $Loss_k$, 以总体损失值来检验无人机编队调整的优度:

$$\begin{aligned} Loss_k &= \frac{(\rho'_k - \rho_k)^2}{\sum_{k=2}^9 (\rho'_k - \rho_k)^2} + \frac{(\theta'_k - \theta_k)^2}{\sum_{k=2}^9 (\theta'_k - \theta_k)^2} \\ \min \sum_{k=2}^9 Loss_k \end{aligned} \quad (6-3-6)$$

当损失函数值合趋于最小时, 说明观测值和预测值十分接近, 可以认为 “先验估计是可靠的”, 该调整方案已达到预测的最优状态。

(4) 卡尔曼滤波参数更新:

每一轮无人机编队的调整后, 都需要对编队的状态向量更新, 类似于动态优化模型, 如下式, U_i 为输入向量中第 i 次变换后的状态向量均值, Σ 为状态变量的协方差, U' 表示当前更新后的均值, H_{k_i} 为第 i 个有预测值到观测值的变换矩阵, Σ' 表示当前更新后的协方差:

$$\begin{aligned}
 k'_i &= \sum_i (\sum_i + \sum_{i+1})^{-1} \\
 &= \frac{H_{k'_i} P_{k'_i} H_{k'_i}^T}{H_{k'_i} P_{k'_i} H_{k'_i}^T + R_{k'_i}} \\
 U' &= U_i + k' (U_{i+1} - U_i) \\
 \sum' &= \sum_i - k'_i \sum_i \\
 P'_{k'} &= P_k - k' H_{k'_i} P_k
 \end{aligned} \tag{6-3-7}$$

(6) 算法程序实现步骤:

Step.1

根据表 1 中给出的无人机坐标进行首次调整, 需要再选一架合适“发射机”。我们依据式 6-3-6, 计算了损失函数值 $Loss(MSE)$, 选取损失值最小的作为第一轮调整的新增“发射机”。

Step.2

以选中的 3 架“发射机”为参考, 依据上文中 (1)(2)(3)(4)(5) 小结算法阐述, 对其余的“接收机”进行反复多轮“卡尔曼滤波”。据此可以得出对全体无人机的坐标估计值。

Step.3

当坐标估计值在误差范围内,, 基于 6.3.3 中对卡尔曼滤波的论述, 当式 6-3-6 中的损失函数值 $Loss_k$ 趋于最小且在扰动 $\epsilon < 1E - 4$ 时, 可认为此时该机的坐标的准确的, 便可命令让该机运动到目标位置。

Step.4

当所有无人机都运动到目标位置后, 此时的无人机编队实现了在圆形形态的稳定。

根据章节 6.1 中的“接收机”定位模型、3 架位置无偏差“发射机”的方位信息 F_i 、 F_j 、 F_0 和其他无人机的相对方位角 α , 便可以依次计算出“接收机”的坐标 (ρ_k, θ_k) ; 最后, 对比当前“接收机”的坐标和已知的目标坐标, 便可以计算出运动方向 θ 和步长 ρ_b :

$$\begin{cases} \theta_2 = \pi + \theta_3 \\ \rho_b = \rho_a \cdot \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1} \end{cases} \tag{6-3-8}$$

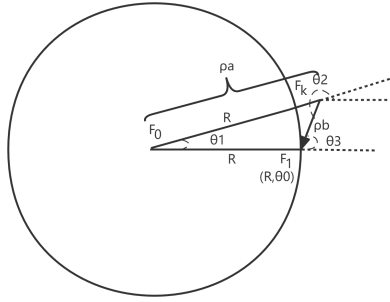


图 13 运动方向、步长示意图

6.3.4 第 (3) 小问结论: 编队调整方案

七、 问题二模型

7.1 考虑无人机编队型态变换

问题二中无人机编队调整与问题一 (3) 小问中的情况类似, 本题将继承该问的条件约束。由于编队队形改变为锥形, 需要重新考虑建系、信号“发射机”等选取。先就队形调整引起的条件变化重新约定:

7.1.1 锥形编队下坐标系的建立

为了使章节 6.3 中的无人机编队矫正模型适用, 保证问题的线性特性; 本题中仍然考虑使用极坐标体系:

(1) 极心的约定:

在锥形编队下, 无人机集群一共有 15 架按正三角形分布, 即任意相邻两架无人机间的距离都相等, 不妨记间距为 R (以 $R = 50m$ 为例)。同时为了便于程序设计和模型表达, 应尽量时更多的坐标点落在周上。经过试验, 我们最终选取以 FA13 号无人机作为机队集群的极心, 逆时针方向为正方向, 如图 13 所示: -

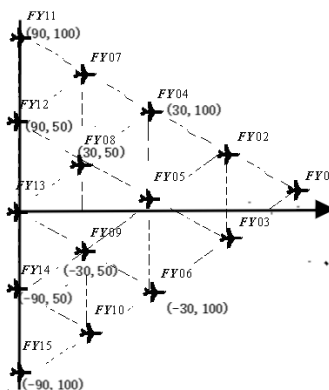


图 14 极坐标下的无人机锥形编队

(2) 单位体系的约定:

本题中, 由于无人机编队的几何特征, 部分无人机目标点的极轴长 ρ 、极角 θ 为无理数, 对程序运行的效率影响较大。故本题中考虑使用角度制避开无理数, 同时只取轴长 ρ 小数后 4 位近似计算 (在 MATLAB 中为 short 类型)。

7.1.2 默认“发射机”选择的调整

在章节 6.3 的队形调整模型中, 默认选择了 FA00、FA01 号无人机作为“发射机”; 本题中由于极心、队形改变, 需要调整默认“发射机”。结合圆形编队下的“发射机”选取, 我们考虑以 FA13 号无人机作为领航“发射机”, 再仿照章节 6.3.3 新增“发射机的选取方式”, 先确定 2 架无人机与 FY13 号机组成机队定位网络。

7.2 三点定位法原理及模型运用

在章节 7.1.2 中, 我们选取了 3 架无人机作为信号“发射机”, 由于选取的 2 架“发射机”可能有偏差, 且本题中需要根据 3 点坐标解算其余 12 点坐标, 对模型的可适用性要求较大。由于章节 6.3 中描述的圆心编队调整法使用到章节 6.1 中的圆形编队“接收机”定位模型; 经过试验, 我们发现 6.1 的定位模型在本题运用中效果不佳。

已知选取的三架“发射机”到被观测机之间的相对关系, 我们考虑使用“三点定位法”对受探无人机的坐标进行解算。“三点定位法”的原理如下:

Step.1 绘制共弦双子圆:

已选取三架“发射机”, 记为: A 、 B 、 C , 需检测一“接收机” D , 假设四点不构成矩形, 及四点不共圆, 一定能画出一组以其中两点连线为公共弦的双圆, 如图所示, 由勾股定理可得方程组:

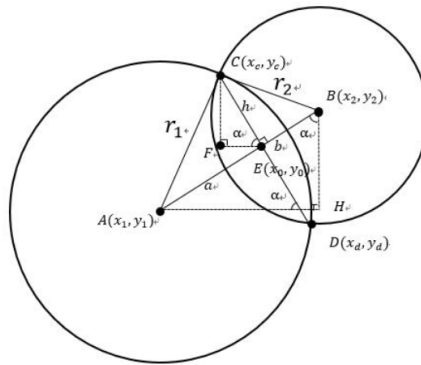


图 15 三点定位法示意图

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = r_1^2 \\ b^2 + h^2 = r_2^2 \\ a + b = \rho_{ab} \end{cases} \quad (7-3-1)$$

根据式 7-3-1, 可以解得 a:

$$a = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \rho_{ab}^2}{2\rho_{ab}} \quad (7-3-2)$$

Step.2 建立极坐标与直角坐标之间的关系:

$$\begin{cases} x = \rho + r\cos\theta \\ y = \rho + r\sin\theta \end{cases} \quad (7-3-3)$$

Step.3 计算受测点坐标:

$$\begin{cases} x_c = x_0 - \frac{h}{d}(y_2 - y_1) \\ y_c = x_0 - \frac{h}{d}(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (7-3-4)$$

或

$$\begin{cases} x_d = x_0 + \frac{h}{d}(y_2 - y_1) \\ y_d = x_0 + \frac{h}{d}(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (7-3-4)$$

7.3 改进的卡尔曼滤波算法

在章节 6.3 中的研究中, 运用传统的“卡尔曼滤波器”, 我们对无人机圆形编队下队形的调整算法建立了模型。本题在该题的基础上变换了队形, 其余条件均未改变。据此, 我们尝试使用章节 6.3 中的模型改进, 使之适用于锥形队形。

在章节 7.1 与 7.2 中, 本文在新背景下对坐标系构建与位置信息解算设计了“三点定位”模型。与章节 6.3 的考虑类似, 由于初始状态有 2 架“发射机”存在偏差, 定位精度无法完全保证。同理使用卡尔曼滤波算法, 对观测无人机的位置信息进行损失值评估。此处的损失函数仍与式 6-3-6 保持一致。利用卡尔曼滤波算法对带扰动数据的处理优势, 多次进行无人机位置的调整, 最终无人机离标定点的误差会逐渐缩小。根据章节 6.2 的结论, 当无偏“发射机”多余 4 架后, 可以准确不搜索出所有“接收机”的极坐标。

八、模型的评价和改进

8.1 模型的优点和不足

8.1.1 问题一的模型评价

(1) 误差分析:

问题一共划分为 3 个小问, 其中针对 (1) 小问对无人机圆形编队时, “接收机”的定位模型中基于古典几何学进行了数学解析。由于本题中将无人机编队理想化为登高平面, 与实际机队编排差别较大。而且 (1) 小问中暂不考虑“发射机”存在偏差。

针对 (2) 小问, 本题中采用全局搜索方法, 通过设定损失函数进行遍历效果评估。由于损失函数的定义为经验公式, 缺少一定的理论推敲。而损失函数为本题中的核函数, 对“发射机”序号的预测有直接影响。

针对 (3) 小问, 本题运用卡尔曼滤波器结合损失函数, 采用先预测再更新的流程, 动态进行

(2) 模型优点:

对于 (1) 小问, 由于本题直接运用逻辑演绎还原题目的数学需求, 最终得出的模型具有较为理想的拟合优度, 通过计算机数据模拟验证出模型具有较高的置信水平。

对于 (2) 小问, 本模型使用了全局搜索方法, 当检索到符合要求的最优方案时, 模型就会收敛。对于实际的无人机集群协同, 计算量较小, 对无人机的平台算力要求较低。

对于 (3) 小问, 在本题中对无人机编队参数设定运用了卡尔曼滤波器。卡尔曼滤波器因其自身的优点: 递归运算、计算简单、自适应性、前瞻性等, 能够对随机干扰下的线性动态系统进行最优估计, 因而有着广泛的应用。

(3) 模型不足:

对于 (1) 小问, 本模型中对问题的理想化背景依赖较大, 如果“发射机”没有沿着圆周均匀分布, 那么模型的定位效果将会产生较大的误差。本题中采用了思路最为简朴的分类讨论法, 给出了四类外围无人机的分布情况, 分别就四种情况再进行数学解析。本方法由于情况较多, 导致模型分类过于复杂, 同时计算量较大, 对计算机性能和编程能力提出较高要求。

对于 (2) 小问, 本题中运用到了全局搜索和损失函数, 当损失趋于最少时, 由于全局搜索的弊端容易陷入局部最小。

对于 (3) 小问, 本题中主要使卡尔曼滤波器算法, 使受控无人机经过多次调整最终落到目标坐标点上。由于本题中观测数据有一定的误差, 当无人机位置长时间重合时, 会导致目标失踪, 样本点缺失。

8.1.2 问题二的模型评价

(1) 误差分析:

问题二的模型是在章节 6.3 圆形编队调整模型下进行改进而得。误差来源包括前验估计时直接假设了当前选中点近似在圆周上。此时, 3 架“发射机”监测的无人机坐标信息并不完全准确

(2) 模型优点:

本题的模型基于前述研究加以改进, 模型的可靠性得到了一定验证。使用卡尔曼滤波器算法, 对于有一定扰动范围的原始数据, 可以实现效果良好的序号辨别。

(3) 模型不足:

问题二中根据无人机编队的布局特点建立的三圆定位法, 由于编队布局的对称性、

对于同一组参考点和受观测点,模型可能推演出多组坐标。同时,由于本模型在设计定位算法时,对“发射机”内部存在受观测“接收机”等情况缺少细化考虑,在编程实现时依赖于大量分类讨论,使得代码逻辑过于冗杂,计算量增大。

同时,对于三架“发射机”与观测的“接收机”正好处于四点共圆的情况,三圆定位发对坐标的确定就会失效。

8.2 模型的改进

8.2.1 问题一的模型改进

对于 (1) 小问: 本问中主要以几何学的解析法,分别对四种无人机位置情况进行几何演算;不妨考虑在本题中四类模型的基础上进行二次抽象,利用圆周上三角形的性质、三角函数周期性等再做归纳,使无人机的位置分类减少。

对于 (2) 小问: 本题中使用全局搜索法或导致局部最优,可以参考文献^[3]中引述 Nelder_Mead 单纯形方法。

对于 (3) 小问: 本题就章节 6.2 模型进行改进,由于损失函数的使用存在一定的主观性,可以使用文献^[4]的中心损失 (Center Loss)、文献^[5]的附加边角损失 (AAMS) 等方法对损失函数进行改进。

8.2.2 问题二的模型改进

为了纠正问题二模型的多解问题,我们在模型中以增加字段的方式标明了受观测无人机相对于对称轴的关系。对于少数观测点,这种方法有可取之处,但当观测点数量达到一定规模后,增加数据维度容易陷入数维灾。针对对称问题,可以考虑使用“向量”方法解析坐标点的方向。

对于“发射机”和“接受机”的相对关系问题,可以考虑用使用二分类法、调整极心等方法进行使点位置情况尽量减少;对于“四点共圆”问题,可以考虑通过缩小可行解范围,从多个可疑坐标中找出最符合要求的定位信息。

参考文献

- [1] 邱华鑫, 段海滨, 范彦铭. 基于鸽群行为机制的多无人机自主编队[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1298-1304.
- [2] 黄汉禹. 对正弦定理和余弦定理的研讨[J]. 数学通报, 2011, 6.
- [3] SINGER S, NELDER J. Nelder-mead algorithm[J]. Scholarpedia, 2009, 4(7): 2928.
- [4] CAI W, CHEN J, LI M. Exploring the encoding layer and loss function in end-to-end speaker and language recognition system[A]. 2018.
- [5] DENG J, GUO J, XUE N, et al. Arcface: Additive angular margin loss for deep face recognition[C]//Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. 2019: 4690-4699.

附录 A 文件列表

表 4 支撑材料列表清单 (一)

文件夹名	文件夹内容	文件描述
code1.1		问题一 (1) 程序集
	code_1_1.m	1.1 程序
	main_fun.m	主函数
	judge.m	解集极角整理
	trans.m	弧度角度转换
	arg.m	求 α_1 、 α_2 、 α_3
	model1.m	情况一
	model2.m	情况二
	model3.m	情况三
	model4.m	情况四
	location.mat	1.1 程序数据
code1.2		问题一 (2) 程序集
	code_1_2.m	1.2 程序
	main_fun.m	主函数
	judge.m	解集极角整理
	trans.m	弧度角度转换
	arg.m	求 α_1 、 α_2 、 α_3
	model1.m	情况一
	model2.m	情况二
	model3.m	情况三
	model4.m	情况四

表 5 支撑材料列表清单 (二)

文件夹名	文件夹内容	文件描述
	loss_fun1.m	新增 1 架损失函数
	loss_fun2.m	新增 2 架损失函数
	location.mat	新增 1 架“发射机”数据
	location2.mat	新增 2 架“发射机”数据
code1.3		问题一 (3) 程序集
code2		问题二程序集

附录 B 问题一 (1) 小问——MATLAB 源程序

main_fun.m

```

1 %此函数为根据输入参数进行定位的主要模型函数
2 %输入 angle 为 n*3 的矩阵第一列是 FY_00 与 FY_i 发射线的夹角 a1,
3 %第二列是 FY_00 与 FY_j 发射线的夹角 a2, 第三列是 FY_i 与 FY_j 发射线的夹角 a3
4 %fly_item 是 n*2 的矩阵第一列为发射机 FY_i 的编号第二列为发射机 FY_j 的编号
5 %n 为输入的样本数量
6 function output=main_fun(angle,fly_item)
7
8 need_angle=angle;
9 d_angle=40*(fly_item(:,2)-fly_item(:,1)); %两架发射机与 FY_00 连线的夹角
10 [m,n]=size(need_angle);
11 r=100;%半径
12 flag=zeros(m,1);
13 for i=1:m
14     if d_angle(i)>180
15         d_angle(i)=360-d_angle(i);
16         temp=need_angle(i,2);
17         need_angle(i,2)=need_angle(i,1);
18         need_angle(i,1)=temp;
19         flag(i)=1;%标记两发射机大于 180 角的样本
20     end
21 end
22
23 output=zeros(m,2);
24 for i=1:m
25     solve_angle=need_angle(i,:);%取出一个样本的角度
26     a1=solve_angle(1);

```



```

27     a2=solve_angle(2);
28     a3=solve_angle(3);
29     d=d_angle(i);
30     if a2==a3+a1
31         out=fsolve(@(p)model4(p,a1,a2,r,d),[100,100]);
32         out=judge(out);
33         output(i,1)=out(2);
34         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
35     elseif a1==a3+a2
36         out=fsolve(@(p)model3(p,a1,a2,r,d),[-100,100]);
37         out=judge(out);
38         output(i,1)=out(2);
39         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
40     elseif a3<90
41         out=fsolve(@(p)model2(p,a1,a2,r,d),[-100,100]);
42         out=judge(out);
43         output(i,1)=out(2);
44         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
45     elseif a3>90
46         out=fsolve(@(p)model1(p,a1,a2,r,d),[100,100]);
47         out=judge(out);
48         output(i,1)=out(2);
49         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
50     end
51     end
52 end
53 % disp('模型计算完毕结果输出为output.mat每行对应每个样本输入的极坐标')

```

code_1_1.m

```

1 %% 第一问
2 %第一小问
3 %定位模型
4 clc;clear
5 load location.mat
6 %location 记录了极坐标系下各个飞机按顺序的位置
7
8 disp('本模型规定除了FY_00之外的两架发射机编号为FY_i,FY_j（其中j的编号大于i），接收机的编号为FY_k')
9 disp('坐标系为极坐标系，正方向规定为逆方向')
10 disp('规定FY_00与FY_i发射线的夹角为a1，FY_00与FY_j发射线的夹角为a2,FY_i与FY_j发射线的夹角为a3')
11 angle=input('请依次按行输入a1，a2，a3。（以角度值输入例如:[12 30 40]）');
12 fly_item=input('请依次按行输入FY_i和FY_j的编号(例如: [1 3])');
13 output=main_fun(angle,fly_item);
14
15 %模拟与验证模型精度
16 epoch=10000;%需要验证的样本量

```

```

17 recall_mat=zeros(epoch,6);
18 for i=1:epoch
19     r=randperm(9);
20     [a1,a2,a3]=arg(r(1:3));%r(3)为发射机的编号)
21     recall_mat(i,1)=r(3);%接收机编号
22     recall_mat(i,2:4)=[a1 a2 a3];%接收机接受的信息
23     recall_mat(i,5)=40*(r(3)-1);%接收机的真实极坐标角
24     F_i_item=min(r(1:2));
25     F_j_item=max(r(1:2));
26     fly_item=[F_i_item,F_j_item];
27     out_arg=main_fun(recall_mat(i,2:4),fly_item);
28     recall_mat(i,6)=out_arg(2);%模型定位获得的极坐标角
29 end
30 count=sum(recall_mat(:,5)-recall_mat(:,6)<=1e-4);
31 disp(['模型的精度为' num2str(count/epoch*100) '%'])

```

trans.m

```

1 %输出角度
2 function out=trans(x,flag,item)
3 if flag==0
4     out=(item(1)-1)*40+x;
5 else
6     out=(item(2)-1)*40+x;
7 end
8 if out>=360
9     out=out-360;
10 elseif out<0
11     out=out+360;
12 end
13 if abs(out-360)<1e-4||abs(out)<1e-4 %浮点输出限制
14     out=0;
15 end

```

model1.m

```

1 function q=model1(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(a2+d-x);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1+x)];

```

model2.m

```

1 function q=model2(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(x-d+a2);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1-x)];

```

model3.m

```
1 function q=model3(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(d+a2-x);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1-x)];
```

model4.m

```
1 function q=model4(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(x-d+a2);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1+x)];
```

judge.m

```
1 %调整解集至合理位置
2 function output=judge(out)
3 if out(2)<0
4     output(1)=180+out(1);
5     output(2)=-out(2);
6 else
7     output=out;
8 end
```

arg.m

```
1 %已知发射机和接收机的编号得出 a1,a2,a3角度
2 %item(i) i=1 2 3分别指FY_i,FY_j,FY_k(接收机)
3 function [a1,a2,a3]=arg(item)
4 F_i=min(item(1:2));
5 F_j=max(item(1:2));
6 F_k=item(3);
7 d_a1=(max(F_k,F_i)-min(F_k,F_i))*40;
8 if d_a1>180
9     d_a1=360-d_a1;
10 end
11 a1=(180-d_a1)/2;
12 d_a2=(max(F_k,F_j)-min(F_k,F_j))*40;
13 if d_a2>180
14     d_a2=360-d_a2;
15 end
16 a2=(180-d_a2)/2;
17 d_a3=(F_j-F_i)*40;
18 if F_k<F_j &&F_k>F_i&&d_a3<180
19     a3=180-d_a3/2;
20 elseif F_k<F_j &&F_k>F_i&&d_a3>180
21     d_a3=360-d_a3;
```

```

22     a3=d_a3/2;
23 elseif (F_k>F_j||F_k<F_i)&&d_a3<180
24     a3=d_a3/2;
25 else
26     d_a3=360-d_a3;
27     a3=180-d_a3/2;
28 end
29 end

```

附录 C 问题一 (2) 小问——MATLAB 源程序

main_fun.m

```

1 %此函数为根据输入参数进行定位的主要模型函数
2 %输入angle为n*3的矩阵第一列是FY_00与FY_i发射线的夹角a1,
3 %第二列是FY_00与FY_j发射线的夹角a2,第三列是FY_i与FY_j发射线的夹角a3
4 %fly_item是n*2的矩阵第一列为发射机FY_i的编号第二列为发射机FY_j的编号
5 %n为输入的样本数量
6 function output=main_fun(angle,fly_item)
7
8 need_angle=angle;
9 d_angle=40*(fly_item(:,2)-fly_item(:,1)); %两架发射机与FY_00连线的夹角
10 [m,n]=size(need_angle);
11 r=100;%半径
12 flag=zeros(m,1);
13 for i=1:m
14     if d_angle(i)>180
15         d_angle(i)=360-d_angle(i);
16         temp=need_angle(i,2);
17         need_angle(i,2)=need_angle(i,1);
18         need_angle(i,1)=temp;
19         flag(i)=1;%标记两发射机大于180角的样本
20     end
21 end
22
23 output=zeros(m,2);
24 for i=1:m
25     solve_angle=need_angle(i,:);%取出一个样本的角度
26     a1=solve_angle(1);
27     a2=solve_angle(2);
28     a3=solve_angle(3);
29     d=d_angle(i);
30     if a2==a3+a1
31         out=fsolve(@(p)model4(p,a1,a2,r,d),[100,100]);
32         out=judge(out);
33         output(i,1)=out(2);

```

```

34         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
35 elseif a1==a3+a2
36         out=fsolve(@(p)model3(p,a1,a2,r,d),[-100,100]);
37         out=judge(out);
38         output(i,1)=out(2);
39         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
40 elseif a3<90
41         out=fsolve(@(p)model2(p,a1,a2,r,d),[-100,100]);
42         out=judge(out);
43         output(i,1)=out(2);
44         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
45 elseif a3>90
46         out=fsolve(@(p)model1(p,a1,a2,r,d),[100,100]);
47         out=judge(out);
48         output(i,1)=out(2);
49         output(i,2)=trans(out(1),flag(i),fly_item(i,:));
50 end
51     end
52 end
53 % disp('模型计算完毕结果输出为output.mat每行对应每个样本输入的极坐标')

```

code_1_2.m

```

1 %% 第二问求解
2 %% 三发射机代码
3 %已知FY_00和FY_01发射机之间的夹角为a1
4 %三架发射机其中一架未知编号求解代码
5 %因算法特性会有多种loss值较小的情况无法精准定位，故三架发射机不可行
6 % clc;clear
7 % load location.mat
8 % disp('假设不知道编码的飞机为FY_X')
9 % angle=input('请依次输入接收机得到的信息<FY_00,FY_01> <FY_00,FY_X> <FY_01_X>（例如
    [20 20 40]）');
10 % loss_list=[];%存储每个循环总损失
11 %
12 % for i=2:9
13 %     fly_item=[1 i];
14 %     out=main_fun(angle,fly_item);
15 %     loss=loss_fun1(location,out,fly_item);
16 %     loss_list=cat(1,loss_list,loss);
17 % end
18 %     item=find(min(loss_list(:,1))==loss_list(:,1));%最小损失
19 %     disp(['未知无人机的标号为' num2str(loss_list(item,2))])
20 %     disp(['其损失loss=' num2str(loss_list(item,1))])
21
22 %% 四发射机代码
23 clc;clear
24 load location.mat

```

```

25 disp('假设不知道编码的飞机为FY_X1,FY_X2')
26 angle1=input('请依次输入接收机得到的关于FY_X1的信息<FY_00,FY_01> <FY_00,FY_X1> <
    FY_01, FY_X1> (例如[20 20 40]) ');
27 angle2=input('请依次输入接收机得到的关于FY_X2的信息<FY_00,FY_01> <FY_00,FY_X2> <
    FY_01,FY_X2> (例如[20 20 40]) ');
28 loss_list=[];%存储每个循环总损失
29
30 for i=2:9
31     for j=i+1:9
32         if i~=j
33             fly_item=[1 i j];
34             out1=main_fun(angle1,fly_item(1:2));
35             out2=main_fun(angle2,fly_item(1:2:3));
36             loss=loss_fun2(location,out1,out2,fly_item);
37             loss_list=cat(1,loss_list,loss);
38         end
39     end
40 end
41 item=find(min(loss_list(:,1))==loss_list(:,1));%最小损失
42 disp(['未知无人机的标号分别为' ' FY_0' num2str(loss_list(item,2)) ', FY_0'
    num2str(loss_list(item,3))])
43 disp(['其损失loss=' num2str(loss_list(item,1))])
44 %至此已知全部发射机的编号，此后可用第一问模型进行求解定位

```

loss_fun1.m

```

1 %计算损失函数
2 function out=loss_fun1(location,output,fly_item)
3     [m,n]=size(location);
4     loss=zeros(7,2);%除了两个发射机和中间的FY_0,无人机可以在7个位置游走,存储对应的
    损失值和编号
5     j=1;
6     for i=1:m
7         if sum(i==fly_item) ==0
8             x1=[location(i,1)*sind(location(i,2)) location(i,1)*cosd(location(i,2))
9             ];
10            x2=[output(1)*sind(output(2)) output(1)*cosd(output(2))];
11            loss(j,1)=dist(x1,x2');
12            loss(j,2)=fly_item(2);
13            j=j+1;
14        end
15    end
16    item=find(min(loss(:,1))==loss(:,1));%最小损失
17    out=loss(item,:);
18 end

```

loss_fun2.m

```

1 %计算损失函数

```

```

2 %双无人机
3 function out=loss_fun2(location,out1,out2,fly_item)
4     [m,n]=size(location);
5     loss=zeros(6,3);%除了两个发射机和中间的FY_0,无人机可以会在7个位置游走,存储对应的
        损失值和编号
6     j=1;
7     for i=1:m
8         if sum(i==fly_item) ==0
9             x1=[location(i,1)*sind(location(i,2)) location(i,1)*cosd(location(i,2))
10            ];
11             x2=[out1(1)*sind(out1(2)) out1(1)*cosd(out1(2))];
12             x3=[out2(1)*sind(out2(2)) out2(1)*cosd(out2(2))];
13             loss(j,1)=dist(x1,x2')+dist(x1,x3');
14             loss(j,2)=fly_item(2);
15             loss(j,3)=fly_item(3);
16             j=j+1;
17         end
18     end
19     item=find(min(loss(:,1))==loss(:,1));%最小损失
20     out=loss(item,:);
end

```

trans.m

```

1 %输出角度
2 function out=trans(x,flag,item)
3 if flag==0
4     out=(item(1)-1)*40+x;
5 else
6     out=(item(2)-1)*40+x;
7 end
8 if out>=360
9     out=out-360;
10 elseif out<0
11     out=out+360;
12 end
13 if abs(out-360)<1e-4 || abs(out)<1e-4 %浮点输出限制
14     out=0;
15 end

```

model1.m

```

1 function q=model1(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(a2+d-x);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1+x)];

```

model2.m

```

1 function q=model2(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(x-d+a2);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1-x)];

```

model3.m

```

1 function q=model3(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(d+a2-x);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1-x)];

```

model4.m

```

1 function q=model4(p,a1,a2,r,d)
2 x=p(1);
3 l=p(2);
4 q=[r/sind(a2)-l/sind(x-d+a2);
5 r/sind(a1)-l/sind(a1+x)];

```

附录 D 问题一 (3) 小问——MATLAB 源程序

附录 E 问题二——MATLAB 源程序

附录 F 附表: 问题结果表格

表 6 问题一 (1) 问“接收机”定位模型验证数据表 (1-35)

接收机编号	发射机编号	a1	a2	a3	真实位置极径	真实位置极角	模型输出极径	模型输出极角
6	7	28.8594	66.2404	95.0998	105.2242	239.3820	105.2242	239.3820
2	3	50.9066	72.2338	21.3272	97.0403	80.2295	97.0403	80.2295
4	6	10.1527	47.9040	58.0567	105.1239	200.8316	105.1239	200.8316
9	3	48.8287	29.3571	19.4715	103.0628	80.2937	103.0628	80.2937
6	8	50.0504	49.6488	99.6993	100.4413	280.4038	100.4413	280.4038
2	3	47.2977	63.4888	16.1911	108.8599	79.5724	108.8599	79.5724
6	2	72.1601	9.7031	81.8632	97.8389	39.1946	97.8389	39.1946
5	7	29.7529	49.3822	79.1351	101.7220	240.0714	101.7220	240.0714
8	2	69.5583	29.8101	39.7482	100.4087	40.2456	100.4087	40.2456
5	8	51.3596	30.7755	82.1350	95.8703	279.8482	95.8703	279.8482
4	3	48.0136	66.5948	114.6083	104.8455	80.7881	104.8455	80.7881
4	9	74.8575	9.9702	64.8873	93.4453	319.2809	93.4453	319.2809
5	4	31.4936	75.2594	106.7530	93.0630	119.4177	93.0630	119.4177
7	5	10.5227	53.1322	63.6548	91.0751	159.9031	91.0751	159.9031
9	5	10.0082	9.5130	19.5212	104.8538	159.4924	104.8538	159.4924
9	2	71.7108	50.6821	21.0287	97.7000	40.2184	97.7000	40.2184
5	6	10.2638	66.1730	76.4369	104.4494	200.9896	104.4494	200.9896
6	4	30.2154	49.7541	79.9695	100.0603	119.5491	100.0603	119.5491
8	9	64.0479	63.9690	128.0169	107.9435	320.1165	107.9435	320.1165
8	5	10.2159	30.8074	41.0233	95.3709	160.0459	95.3709	160.0459
9	6	10.1087	31.1118	21.0031	91.5979	199.3603	91.5979	199.3603
6	8	52.7512	52.4127	105.1638	92.7084	280.3101	92.7084	280.3101
3	4	30.2836	72.6572	42.3736	96.1740	120.7048	96.1740	120.7048
7	9	73.7526	51.8369	125.5895	95.1446	319.7388	95.1446	319.7388
2	6	10.2033	9.9566	20.1599	98.4301	200.2447	98.4301	200.2447
5	6	10.4505	76.0201	86.4706	92.5189	200.1114	92.5189	200.1114
5	7	30.1568	50.5086	80.6654	98.6964	239.8806	98.6964	239.8806
3	2	65.1180	65.6498	130.7679	106.0533	40.7087	106.0533	40.7087
4	6	9.6816	50.2898	59.9714	100.0726	199.3704	100.0726	199.3704
6	9	76.3443	31.8632	108.2075	91.5926	319.2218	91.5926	319.2218
8	7	29.7043	66.9311	37.2268	104.4514	240.8744	104.4514	240.8744
4	2	63.4247	47.5486	110.9733	108.4381	40.6892	108.4381	40.6892
8	5	9.8312	30.6855	40.5168	97.6396	160.5718	97.6396	160.5718
3	6	10.1385	28.9686	39.1070	104.2338	200.7110	104.2338	200.7110

表 7 问题一 (1) 问“接收机”定位模型验证数据表 (36-70)

接收机编号	发射机编号	a1	a2	a3	真实位置极径	真实位置极角	模型输出极径	模型输出极角
30.8601	74.3993	105.2594	94.6284	239.8981	94.6284	239.8981	105.2242	239.3820
30.8767	30.2710	61.1477	96.5897	119.4079	96.5897	119.4079	97.0403	80.2295
9.8188	10.3166	20.1355	98.6680	160.4944	98.6680	160.4944	105.1239	200.8316
9.2892	9.8890	19.1782	108.4790	160.6261	108.4790	160.6261	103.0628	80.2937
72.5181	71.4893	144.0075	97.4866	39.0721	97.4866	39.0721	100.4413	280.4038
9.2743	28.5997	19.3253	106.0870	160.8813	106.0870	160.8813	108.8599	79.5724
73.9024	10.3423	63.5601	95.2962	39.8069	95.2962	39.8069	97.8389	39.1946
10.7087	30.4647	41.1734	94.6940	200.8429	94.6940	200.8429	101.7220	240.0714
53.0919	30.9384	84.0303	92.3760	280.7074	92.3760	280.7074	100.4087	40.2456
51.3481	30.8193	20.5288	97.0685	280.6416	97.0685	280.6416	95.8703	279.8482
48.1489	65.4695	17.3205	106.1362	280.3895	106.1362	280.3895	104.8455	80.7881
9.9838	9.6358	19.6196	103.8373	159.6451	103.8373	159.6451	93.4453	319.2809
9.6981	49.2642	39.5661	101.5111	199.5441	101.5111	199.5441	93.0630	119.4177
63.1636	46.8488	110.0124	109.2568	39.7013	109.2568	39.7013	91.0751	159.9031
65.2281	65.1320	130.3601	106.3325	39.8701	106.3325	39.8701	104.8538	159.4924
9.8469	48.2065	38.3596	105.7861	159.7303	105.7861	159.7303	97.7000	40.2184
52.1725	31.0376	21.1349	93.7430	80.0586	93.7430	80.0586	104.4494	200.9896
51.4269	73.8647	22.4378	94.4892	279.0501	94.4892	279.0501	100.0603	119.5491
30.3128	74.4751	104.7879	95.1795	120.9763	95.1795	120.9763	107.9435	320.1165
51.8242	30.7177	82.5419	95.1116	280.2149	95.1116	280.2149	95.3709	160.0459
48.3323	29.9056	78.2379	103.5573	279.0094	103.5573	279.0094	91.5979	199.3603
51.5723	30.2396	81.8120	96.5000	280.6829	96.5000	280.6829	92.7084	280.3101
47.2764	10.0411	57.3175	107.1425	80.8077	107.1425	80.8077	96.1740	120.7048
29.5219	9.8344	19.6875	102.7586	239.9428	102.7586	239.9428	95.1446	319.7388
10.3550	53.4393	63.7943	90.7772	199.7458	90.7772	199.7458	98.4301	200.2447
9.9974	72.3637	62.3663	96.8101	199.6727	96.8101	199.6727	92.5189	200.1114
63.8131	47.4109	16.4022	108.3691	39.6647	108.3691	39.6647	98.6964	239.8806
9.9954	66.7669	76.7622	103.9806	200.3929	103.9806	200.3929	106.0533	40.7087
50.2675	50.7886	101.0561	98.4653	80.5116	98.4653	80.5116	100.0726	199.3704
74.4391	52.3593	126.7984	94.1018	319.4686	94.1018	319.4686	91.5926	319.2218
77.0990	31.1382	108.2373	91.7600	320.5353	91.7600	320.5353	104.4514	240.8744
63.1093	28.6416	34.4677	109.3067	320.2383	109.3067	320.2383	108.4381	40.6892
30.0742	10.5738	40.6480	97.0346	120.8307	97.0346	120.8307	97.6396	160.5718
49.7478	9.6232	59.3710	101.6092	79.4027	101.6092	79.4027	104.2338	200.7110

表 8 问题一 (1) 问 “接收机” 定位模型验证数据表 (71-102)

接收机编号	发射机编号	a1	a2	a3	真实位置极径	真实位置极角	模型输出极径	模型输出极角
9	3	52.1501	31.0863	21.0637	94.1446	79.8294	94.1446	79.8294
8	2	71.6067	30.5925	41.0142	98.4116	39.3517	98.4116	39.3517
8	6	10.2059	51.8351	41.6292	94.5402	199.8491	94.5402	199.8491
8	7	29.3775	67.9828	38.6053	102.3030	239.5006	102.3030	239.5006
2	3	49.6583	68.8871	19.2288	101.7165	79.5112	101.7165	79.5112
5	3	49.7419	50.6547	100.3966	99.4209	80.9065	99.4209	80.9065
4	8	48.2407	9.7296	57.9703	105.3171	280.0181	105.3171	280.0181
3	2	78.2782	77.5173	155.7955	90.3889	39.4655	90.3889	39.4655
5	8	49.6289	30.1348	79.7637	100.4684	279.5744	100.4684	279.5744
2	9	65.1207	48.0437	17.0770	106.6806	320.5420	106.6806	320.5420
6	8	50.7000	50.2541	100.9541	98.6124	280.4384	98.6124	280.4384
2	6	10.0965	10.0301	20.1266	98.7548	200.0659	98.7548	200.0659
3	7	29.8097	9.3590	39.1687	103.9128	240.9123	103.9128	240.9123
2	4	31.3090	52.3874	21.0784	94.1029	119.4156	94.1029	119.4156
4	6	9.8738	48.2714	58.1453	104.8584	200.2326	104.8584	200.2326
7	2	77.0989	10.9329	66.1660	92.1257	39.0045	92.1257	39.0045
2	4	30.5337	51.1666	20.6328	96.4607	120.1214	96.4607	120.1214
2	7	28.9977	9.9285	19.0692	108.4054	240.7011	108.4054	240.7011
4	6	10.0825	47.1880	57.2705	107.2788	200.9075	107.2788	200.9075
7	2	76.4838	10.2462	66.2376	91.7662	40.3593	91.7662	40.3593
7	5	9.9731	48.6975	58.6706	103.4601	159.7051	103.4601	159.7051
6	4	29.5838	48.5523	78.1361	103.7551	119.6034	103.7551	119.6034
6	4	28.6017	47.0105	75.6123	109.0593	119.9259	109.0593	119.9259
9	5	9.4177	10.0949	19.5126	104.9438	160.6944	104.9438	160.6944
9	4	31.4429	10.2452	21.1976	90.0549	120.5378	90.0549	120.5378
7	9	71.3022	49.9158	121.2180	98.9395	320.8850	98.9395	320.8850
8	3	50.5128	10.2388	40.2740	99.0667	79.6190	99.0667	79.6190
7	8	47.5080	65.4719	112.9799	106.3555	279.1581	106.3555	279.1581
6	7	30.4903	75.1545	105.6447	94.3316	239.0863	94.3316	239.0863
8	4	29.2954	9.2199	38.5153	107.0983	119.1006	107.0983	119.1006
9	4	30.0656	10.0590	20.0066	99.9424	119.8879	99.9424	119.8879

表 9 问题一 (2) 问 “接收机” 定位模型验证数据表 (1-35)

FYX1 发射机对应的发射角			FYX2 发射机对应的发射角			FYX1 的真实编号	FYX2 的真实编号	FYX1 模型识别编号	FYX2 模型识别编号
α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3				
9.7917	52.1907	61.9825	9.7917	31.2953	41.0871	7	8	7	8
66.6277	29.8035	96.4311	66.6277	9.3708	57.2568	5	7	5	7
46.5893	62.7189	16.1296	46.5893	28.8778	75.4670	2	6	2	6
30.8234	75.4210	44.5976	30.8234	10.8140	41.6374	3	8	3	8
65.1491	64.9471	130.0962	65.1491	9.8149	55.3343	3	7	3	7
64.9607	28.6424	36.3183	64.9607	47.5875	17.3732	8	9	8	9
65.1266	48.1506	16.9760	65.1266	29.3292	35.7974	2	3	2	3
30.8349	30.7603	61.5951	30.8349	51.6842	20.8493	4	9	4	9
53.1828	78.4849	131.6677	53.1828	10.8320	64.0148	4	7	4	7
48.2132	10.1367	38.0765	48.2132	47.3229	95.5361	3	6	3	6
10.4827	49.6887	60.1714	10.4827	50.6123	40.1297	4	8	4	8
50.1945	71.3431	121.5376	50.1945	9.8035	40.3911	4	8	4	8
10.2994	53.2190	63.5184	10.2994	77.2202	87.5196	4	5	4	5
77.5701	10.5278	67.0424	77.5701	53.3196	24.2506	7	9	7	9
52.1252	30.9075	21.2176	52.1252	75.1694	23.0443	2	9	2	9
69.8946	29.6418	40.2528	69.8946	49.7142	20.1804	8	9	8	9
64.3400	28.5753	35.7647	64.3400	64.7468	129.0869	3	8	3	8
48.4272	49.3595	97.7867	48.4272	28.9892	19.4380	5	9	5	9
69.3362	29.5484	98.8846	69.3362	9.6812	79.0174	5	6	5	6
28.3972	9.3196	19.0776	28.3972	9.8660	38.2632	2	3	2	3
30.0556	29.0744	59.1300	30.0556	10.3597	19.6959	7	9	7	9
71.5120	50.4069	21.1051	71.5120	51.3404	122.8524	2	7	2	7
52.2194	30.9319	21.2875	52.2194	75.4319	23.2125	2	9	2	9
67.4398	9.7901	77.2299	67.4398	9.8763	57.5636	6	7	6	7
10.0599	50.6557	40.5959	10.0599	10.1473	20.2072	3	9	3	9
10.1855	31.4205	41.6060	10.1855	31.0369	20.8513	3	9	3	9
53.0651	10.5410	63.6061	53.0651	77.3187	130.3839	4	7	4	7
53.0107	52.6836	105.6944	53.0107	10.2666	63.2773	5	7	5	7
30.0523	50.3392	80.3915	30.0523	10.1143	40.1666	6	8	6	8
66.9684	67.0424	134.0108	66.9684	9.7643	57.2040	3	7	3	7
9.4760	63.1635	53.6876	9.4760	28.6550	38.1309	4	8	4	8
68.9894	69.3591	138.3485	68.9894	29.6343	39.3551	3	8	3	8

表 10 问题一 (2) 问 “接收机” 定位模型验证数据表 (36-70)

FYX1 发射机对应的发射角			FYX2 发射机对应的发射角			FYX1 的真实编号	FYX2 的真实编号	FYX1 模型识别编号	FYX2 模型识别编号
α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3				
50.5201	30.4432	80.9633	50.5201	50.7795	101.2996	5	6	5	6
66.2917	10.2523	76.5440	66.2917	9.3215	56.9702	6	7	6	7
70.2059	70.3136	140.5195	70.2059	30.1078	100.3137	3	5	3	5
52.0330	30.8477	21.1853	52.0330	31.3999	83.4329	2	5	2	5
31.0110	30.6212	61.6322	31.0110	73.6499	104.6610	4	6	4	6
64.9693	29.1587	35.8106	64.9693	9.4014	74.3707	3	5	3	5
49.8079	30.0401	19.7678	49.8079	9.6768	59.4848	2	4	2	4
52.7032	31.2986	84.0018	52.7032	76.1839	128.8871	5	7	5	7
53.5358	10.2354	63.7711	53.5358	53.0061	106.5419	4	6	4	6
75.7802	9.9006	85.6807	75.7802	31.5441	44.2361	6	8	6	8
28.9008	64.8889	35.9881	28.9008	64.9294	93.8302	3	5	3	5
10.3693	73.1151	83.4844	10.3693	51.5933	41.2239	5	8	5	8
47.6548	28.8776	18.7772	47.6548	64.5675	16.9127	2	9	2	9
66.7528	10.2127	56.5400	66.7528	48.0011	114.7539	4	7	4	7
10.1278	72.8613	82.9890	10.1278	51.2698	61.3975	6	7	6	7
9.8947	67.0116	57.1169	9.8947	66.8555	76.7503	4	6	4	6
9.9563	68.3176	58.3613	9.9563	9.8196	19.7760	4	9	4	9
10.4588	74.3588	63.9001	10.4588	31.0638	20.6050	7	9	7	9
9.7239	28.3083	38.0322	9.7239	62.7326	72.4565	3	5	3	5
29.4295	68.8252	98.2547	29.4295	49.6486	79.0782	5	6	5	6
66.6716	48.3540	18.3176	66.6716	9.4703	57.2013	2	4	2	4
46.9737	63.0295	16.0557	46.9737	9.5644	37.4093	2	8	2	8
29.5692	9.3069	38.8761	29.5692	66.2653	36.6962	3	8	3	8
62.4825	28.6751	91.1576	62.4825	47.0088	109.4914	6	7	6	7
51.1955	10.4058	40.7898	51.1955	30.1757	81.3712	3	5	3	5
31.2545	10.3237	41.5782	31.2545	52.4459	83.7003	3	5	3	5
10.0369	10.0262	20.0631	10.0369	50.2185	40.1816	2	8	2	8
10.4499	31.5853	42.0352	10.4499	77.3434	66.8935	3	7	3	7
52.8385	76.9032	24.0647	52.8385	77.8348	130.6733	2	4	2	4
77.5268	10.2141	87.7408	77.5268	31.2661	108.7929	5	6	5	6
48.6882	28.7307	77.4189	48.6882	65.6647	114.3529	5	7	5	7
68.7690	67.9336	136.7026	68.7690	29.2013	97.9702	3	5	3	5
50.0602	71.1311	121.1912	50.0602	9.7577	40.3025	4	8	4	8
65.3320	10.0084	55.3236	65.3320	48.1745	17.1575	7	9	7	9
63.7404	47.2366	16.5039	63.7404	9.5377	54.2027	2	4	2	4
72.7460	9.9916	62.7544	72.7460	30.4247	42.3213	7	8	7	8
76.4732	52.7686	23.7046	76.4732	31.2918	45.1813	2	3	2	3
70.3277	9.8705	80.1982	70.3277	30.1803	40.1474	37	8	6	8
48.2595	66.1713	17.9118	48.2595	29.3429	77.6024	2	6	2	6
76.1101	31.4613	44.6488	76.1101	52.2850	128.3950	3	7	3	7

表 11 问题一 (2) 问“接收机”定位模型验证数据表 (71-100)

FYX1 发射机对应的发射角			FYX2 发射机对应的发射角			FYX1 的真实编号	FYX2 的真实编号	FYX1 模型识别编号	FYX2 模型识别编号
α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3				
72.7460	9.9916	62.7544	72.7460	30.4247	42.3213	7	8	7	8
76.4732	52.7686	23.7046	76.4732	31.2918	45.1813	2	3	2	3
70.3277	9.8705	80.1982	70.3277	30.1803	40.1474	6	8	6	8
48.2595	66.1713	17.9118	48.2595	29.3429	77.6024	2	6	2	6
76.1101	31.4613	44.6488	76.1101	52.2850	128.3950	3	7	3	7
10.1918	9.6688	19.8606	10.1918	68.6661	78.8579	2	5	2	5
64.9630	29.3032	94.2662	64.9630	47.6143	17.3487	5	9	5	9
49.1330	68.2604	19.1275	49.1330	68.6158	117.7487	2	4	2	4
46.3829	9.1169	37.2660	46.3829	62.8120	109.1949	3	7	3	7
9.5648	28.7928	19.2281	9.5648	64.7890	74.3537	2	6	2	6
70.6325	9.6176	80.2501	70.6325	10.4121	60.2205	6	7	6	7
10.2473	49.9486	39.7014	10.2473	69.4848	59.2376	3	4	3	4
63.1109	28.8817	34.2292	63.1109	46.5191	109.6300	3	7	3	7
48.9933	48.9024	97.8957	48.9933	9.7978	58.7911	5	7	5	7
65.9427	10.1549	55.7877	65.9427	65.2557	131.1983	4	8	4	8
75.1548	74.2329	149.3877	75.1548	31.3704	43.7843	3	8	3	8
71.6527	29.9916	101.6443	71.6527	50.8766	20.7761	5	9	5	9
77.3903	53.9233	131.3136	77.3903	78.5381	155.9284	7	8	7	8
48.1983	28.9225	77.1208	48.1983	47.9289	96.1272	5	6	5	6
74.9101	75.9870	150.8971	74.9101	31.5832	106.4932	3	5	3	5
10.3386	29.7594	40.0980	10.3386	50.4719	40.1333	3	8	3	8
10.3398	68.4400	58.1002	10.3398	49.5990	39.2592	7	8	7	8
52.9097	75.4846	128.3944	52.9097	10.7072	42.2026	4	8	4	8
30.8286	73.7353	42.9067	30.8286	51.6514	20.8228	8	9	8	9
52.6334	76.6144	23.9810	52.6334	32.0583	84.6916	2	6	2	6
30.3140	10.2506	20.0634	30.3140	29.8681	60.1821	2	4	2	4
10.7226	53.2647	63.9872	10.7226	53.7050	42.9824	4	8	4	8
70.4986	30.1609	40.3377	70.4986	30.0180	100.5166	3	6	3	6
30.9678	51.6332	20.6654	30.9678	9.8420	40.8098	2	8	2	8
31.3821	52.7023	21.3203	31.3821	31.0911	62.4731	2	7	2	7
71.9896	50.8246	21.1650	71.9896	50.9700	122.9596	2	7	2	7
9.4051	29.1125	19.7074	9.4051	49.5820	58.9871	2	7	2	7
9.6728	50.2073	40.5345	9.6728	51.0600	60.7327	3	7	3	7
65.3320	10.0084	55.3236	65.3320	48.1745	17.1575	7	9	7	9
63.7404	47.2366	16.5039	63.7404	9.5377	54.2027	2	4	2	4
72.7460	9.9916	62.7544	72.7460	30.4247	42.3213	7	8	7	8
76.4732	52.7686	23.7046	76.4732	31.2918	45.1813	2	3	2	3
70.3277	9.8705	80.1982	70.3277	30.1803	40.1474	6	8	6	8
48.2595	66.1713	17.9118	48.2595	29.3429	77.6024	2	6	2	6
76.1101	31.4613	44.6488	76.1101	52.2850	128.3950	3	7	3	7