Analisi II

Esercizi Svolti di Analisi II

Anno Accademico: 2024/25

Giacomo Sturm

Dipartimento di Ingegneria Industriale, Elettronica e Meccanica
Università degli Studi "Roma Tre"

Sorgente del file LaTeX ed ultima versione del testo disponibile al link:
https://github.com/00Darxk/Analisi-II/

Indice

1 Esercizi

Studiare il carattere della serie numerica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Per il limite notevole, il carattere di questa serie è asintoticamente equivalente alla serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+k}$$

Il numeratore si comporta come k^2, sono asintoticamente equivalenti, mentre il denominatore è asintoticamente equivalente a k^4, quindi la serie è equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k^2}}{k^{\cancel{4}\,2}}$$

Questa è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$, per cui converge.

Si può realizzare una serie di stesso carattere sostituendo il fattore trascendente con un altro sempre appartenente ad un limite notevole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}\left(e^{1/k}-1\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k^2}}{k^{\cancel{4}\,2}}$$

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+k^3}{k^5+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+k^3}{k^5+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+k^3}{k^5+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+k^4}{k^6+k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\cancel{5}}}{k^{\cancel{6}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Essendo asintoticamente equivalente ad una serie armonica divergente, la serie diverge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2(2^k+4^k)}$$

Poiché il calcolo della condizione necessaria di convergenza è complessa, per risolvere l'esercizio si suppone sia corretta e si utilizza subito uno dei criteri:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2(2^k+4^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2 4^k(1/2^k+1)}$$

Si mette in evidenza l'esponenziale con base maggiore, poiché il fattore con base minore di uno per $k \to \infty$ tende a zero, quindi questa serie è asintoticamente equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2 4^k (1/2^k + 1)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{5}{4}\right)^k$$

Si utilizza ora il criterio del rapporto, si determina la serie ausiliaria:

$$\frac{\frac{1}{(k+1)^2} \left(\frac{5}{4}\right)^{\cancel{k+1}}}{\frac{1}{k^2} \cancel{\left(\frac{5}{4}\right)^k}} = \frac{5}{4} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$\frac{5}{4} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \frac{5}{4} > 1$$

Quindi la serie diverge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{2^k + 4^k}$$

Questo esercizio è molto simile al precedente, ed analogamente si manipola il denominatore per rimuovere la somma di esponenziali:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{2^k + 4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{4^k (1/2^k + 1)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Si utilizza analogamente alla precedente il criterio del rapporto; la sua serie ausiliaria è:

$$\frac{(k+1)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\cancel{k+1}}}{k^2 \cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^k}} = \frac{3}{4} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{3}{4} < 1$$

Poiché il rapporto tendente all'infinito è minore di uno, allora la serie converge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Questo è esattamente uguale al primo esercizio, quindi anch'esso diverge, l'argomento del logaritmo è scritto in una forma equivalente.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (k^2 + \sin e^k)}{3^k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k^2}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)$$

Nel numeratore si ha $k^2 + \sin e^k \; k^2$, poiché l'oscillazione di $\sin e^k$ viene smorzata all'infinito da k^2, può essere dimostrato tramite il criterio del confronto. Si applica il criterio del rapporto:

$$\frac{(k+1)^2 \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}}{k^2 \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{k}}} = \frac{3}{4}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{2}{3} < 1$$

Essendo il limite minore di uno, la serie converge.

La formula di Stirling afferma che un fattoriale di un numero intero si comporta al limite per $k \to \infty$ come:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{\sqrt{2k\pi}\left(\frac{k}{e}\right)^k} = 1$$
$$k! \sim \sqrt{2k\pi}\left(\frac{k}{e}\right)^k \tag{1.0.1}$$

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^3 - k^{3/5}}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)}$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre nel numeratore il seno può essere al massimo pari ad uno, mentre l'altro fattore $k^{3/5}$ è sicuramente maggiore di uno da un certo k_0, quindi si può esprimere come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/5} - \sin k^3}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)}$$

Il numeratore può essere sostituito con $k^{3/5}$, analogamente alla precedente utilizzando il criterio del confronto può essere dimostrato come il seno diviso questo fattore tende a zero per $k \to \infty$, quindi la serie si può riscrivere come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/5} - \sin k^3}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/5}}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln(k^k + k!)}$$

Essendo k^k un infinito di ordine superiore a $k!$, si può esprimere il denominatore in modo asintoticamente equivalente come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln(k^k + k!)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln\left[k^k\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)\right]} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln k^k + \ln\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln k^k}$$

Si dimostra:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k^k + \ln\left(1+\frac{k!}{k^k}\right)}{\ln k^k} = \lim_{k\to\infty} \left[\cancelto{1}{\frac{\ln k^k}{\ln k^k}} + \frac{\ln\left(1+\frac{k!}{k^k}\right)}{\ln k^k}\right]$$

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(1+\frac{k!}{k^k}\right) = 0 \to \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k^k + \ln\left(1+\frac{k!}{k^k}\right)}{\ln k^k} = 1$$

Si può riscrivere come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{k} \frac{1}{\ln k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{13/20} \ln k}$$

In questa situazione si applica il criterio di condensazione creando la serie ausiliaria:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{13/20} \ln 2^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^{13/20}} \frac{1}{k \ln 2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{7k/20}}{k \ln 2} = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{7k/20}}{k}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{\cancel{2^{7(k+1/20)}}}{k+1} \frac{k}{\cancel{2^{7k/20}}} = 2^{7/20} \frac{k}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} 2^{7/20} \frac{k}{k+1} = 2^{7/20} < 1$$

Poiché il limite tende ad un valore minore di uno, la serie converge.

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k^3+1} - k\right)$$

Si considera il prodotto notevole della differenza di due cubi, per determinare se questa serie soddisfa almeno la condizione necessaria per la convergenza:

$$a = \sqrt[3]{k^3+1} \wedge b = k$$

$$a^3 - a^3 = (a-b)(a^2+ab+B^b)$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$\sqrt[3]{k^3+1} - k = \frac{\cancel{k^3} + 1 - \cancel{k^3}}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2 + k\sqrt[3]{k^3+1} + k^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k^3+1} - k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2 + k\sqrt[3]{k^3+1} + k^2}$$

Ragruppando gli addendi di potenza più grande:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2 + k\sqrt[3]{k^3+1} + k^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^6\left(1+\frac{2}{k^3}+\frac{1}{k^6}\right)} + k\sqrt[3]{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} + k^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{k^3}+\frac{1}{k^6}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{k^3}} + 1\right)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Al denominatore tutti i termini sono asintoticamente equivalenti a k^2, per cui questa serie è asintoticamente equivalente ad una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$, a meno di una costante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2 + k\sqrt[3]{k^3+1} + k^2} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Quindi converge.

Studiare la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$$

Considerando la formula di Stirling, si ottiene la serie asintoticamente equivalente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$$

Utilizzando il criterio del rapporto, si costruisce la successione ausiliaria:

$$\left(\frac{3}{e}\right)^{\cancel{k+1}} \cancel{\sqrt{2\pi}}\sqrt{(k+1)}\cancel{\left(\frac{e}{3}\right)^{k}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\sqrt{k}} = \frac{3}{e}\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3}{e}\sqrt{\frac{k+1}{k}} = \frac{3}{e} > 1$$

Quindi questa serie converge.

Studiare il carattere della seguente serie, per $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3-3\alpha}\left(e^{1/k^{2\alpha}} - 1\right)$$

Si considera il limite notevole $e^{1/k^{2\alpha}} - 1 \sim 1/k^{2\alpha}$ e si considera la serie asintoticamente equivalente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3-3\alpha}\left(e^{1/k^{2\alpha}} - 1\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3-3\alpha}}{k^{2\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3-5\alpha}$$

Si può rendere equivalente a duna serie armonica generalizzata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5\alpha-2/3}} : \begin{cases} 5\alpha - \frac{2}{3} > 1 & \text{converge} \\ 5\alpha - \frac{2}{3} < 1 & \text{diverge} \end{cases} = \begin{cases} \alpha > \frac{1}{3} & \text{converge} \\ \alpha < \frac{1}{3} & \text{diverge} \end{cases}$$

Studiare il carattere della seguente serie, per $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{k^{3\alpha}}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-\alpha} \frac{1}{k^{3\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4\alpha-1/2}}$$

La serie converge per $4\alpha - 1/2 > 1$
Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

La serie rispetta il criterio di Leibniz e quindi converge.
Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{3^{k+2} k!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{2}{9} \frac{1}{k!} = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Studiare il carattere della seguente serie, per $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2\alpha} \cos(k\pi)}{k+1}$$

Avendo π all'interno del coseno, ed essendo k solo numeri naturali, il fattore coseno alterna segno, mentre di modulo vale sempre uno:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2\alpha} \cos(k\pi)}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{2\alpha}}{k+1}$$

Si considera la funzione associata $f(x)$, e si studia la sua derivata per determinare la sua monotonia:

$$f(x) = \frac{x^{2\alpha}}{x+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{2\alpha x^{2\alpha-1}(x+1) - x^{2\alpha}}{(x+1)^2} = \frac{(2\alpha-1)x^{2\alpha} + 2\alpha x^{2\alpha-1}}{(x+1)^2} = \frac{x^{2\alpha-1}}{x+1}\left[(2\alpha-1)x + 2\alpha\right]$$

$$\frac{x^{2\alpha-1}}{x+1}\left[(2\alpha-1)x + 2\alpha\right] < 0 : \text{converge} : \; 2\alpha - 1 < 0 \implies \alpha < \frac{1}{2}$$

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1}$$

Si vuole trovare un'approssimazione di s a meno di 10^{-3}:

$$|s - s_n| \leq |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} < 10^{-3}$$
$$\text{per } n = 10^6 \Rightarrow \frac{10^6}{10^6 - 1} = 0.000\bar{9} < 10^{-3}$$

Le prime tre cifre della somma per $n = 10^6$ coincidono al valore reale della somma.
Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

Per il criterio di convergenza assoluta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k}{k^2} \right|$$

Per il criterio del confronto si ha:

$$\frac{\sin k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

La serie maggiorante è una serie armonica generalizzata convergente, quindi la serie iniziale converge.
Studiare l'insieme di convergenza di questa serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ha centro in x_0, e coefficienti unitari $a_k = 1$. Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

La serie converge sicuramente nell'intervallo di convergenza: $(-1, +1)$. Ci sono due casi dubbi nei punti $x = \pm 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

La serie non converge per $x = 1$, mentre in $x = -1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

Questa serie a termini di segno alterno non soddisfa la condizione necessaria di convergenza, quindi non converge neanche in $x = -1$. Quindi in questo caso l'insieme di convergenza coincide all'intervallo di convergenza.

È possibile esprimere la funzione $1/(1-x)$ in termini di questa serie, se x appartiene all'insieme di convergenza. Si useranno serie, come la serie di Taylor per approssimare il comportamento di funzioni trascendenti in forma di polinomio.

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

È sempre centrata in $x_0 = 0$, ma i coefficienti non sono costanti $a_k = k^{-1}$. Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^{-1}}{(k+1)^{-1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

Quindi sicuramente questa serie converge nell'intervallo $(-1, +1)$. Bisogna studiare il carattere nei valori di frontiera:

$$x = 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$
$$x = -1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} : \text{converge}$$

La serie converge perché è una serie di segno alterno, con $1/k$ decrescente tendente a zero. Quindi la serie converge in $[-1, 1)$.

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

È sempre centrata in $x_0 = 0$, dove il termine generico è $a_k = k^{-2}$. Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^{-2}}{(k+1)^{-2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Quindi sicuramente questa serie converge nell'intervallo $(-1, +1)$. Bisogna studiare il carattere nei valori di frontiera:

$$x = 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} : \text{converge}$$

$$x = -1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} : \text{converge}$$

La prima converge poiché è una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, mentre la seconda serie converge perché è una serie di segno alterno, con $1/k$ decrescente tendente a zero, per il criterio di Leibniz. Quindi la serie converge in $[-1, 1]$.

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} x^k$$

Si determina il raggio di convergenza della serie:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^2}{3^k}}{\frac{(k+1)^2}{3^{k+1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2 3^{\cancel{k+1}}}{\cancel{3^k}(k+1)^2} = 3$$

Sicuramente la serie di potenze converge nell'intervallo di convergenza $(-3, 3)$. Si determina il comportamento agli estremi:

$$x = 3 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\cancel{3^k}} \cancel{3^k} = +\infty$$

$$x = -3 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} (-3)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{\cancel{3^k}} \cancel{3^k} = +\infty$$

In questo caso l'insieme di convergenza coincide con l'intervallo di convergenza: $(-3, 3)$.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{4} \right)^k$$

Con un cambiamento di base si può riportare questa serie in una serie di potenze con centro nell'origine: $t = x/4$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$$

Questa serie è già stata analizzata precedentemente, e converge con $t \in [-1, 1)$. Ma bisogna sempre fare riferimento alla variabile originale, quindi la serie originale converge per $x \in [-4, 4)$.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+3)!}(x+2)^k$$

Questa serie di potenze è centrata in $x_0 = -2$, con termini generici:

$$\frac{k!2^k+5}{(k+3)!}$$

Si preferisce lavorare con serie di potenze con centro nell'origine, per cui si effettua il cambio di variabile $t = x+2$, mentre il termine generico rimane invariato:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+3)!}t^k$$

Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\frac{k!2^k+5}{(k+3)!}}{\frac{(k+1)!2^{k+1}+5}{(k+4)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k!2^k+5)\cancel{(k+4)!}^{k+4}}{[(k+1)!2^{k+1}+5]\cancel{(k+3)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+1)!2^{k+1}+5}(k+4)$$

Dato che si è scomposto in fattori si possono considerare fattori asintoticamente equivalenti:

$$k!2^k+5 \sim k!2^k$$
$$(k+1)!2^{k+1}+5 \sim (k+1)!2^{k+1}$$

Il limite diventa:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+1)!2^{k+1}+5}(k+4) = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k!}2^k}{\cancel{(k+1)!}^{k+1}2^{k+1}}(k+4) = \lim_{k\to\infty} \frac{k+4}{k+1}\frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^{k+1}}} = \frac{1}{2}$$

La serie converge nell'intervallo: $(-1/2, 1/2)$. Si analizza il suo comportamento agli estremi:

$$t = \frac{1}{2} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+3)!}\frac{1}{2^k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\cancel{2^k}}{(k+3)!}\frac{1}{\cancel{2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} : \text{converge}$$
$$t = -\frac{1}{2} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+3)!}\frac{(-1)^k}{2^k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} : \text{converge}$$

La prima è una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, quindi converge, la seconda è una serie di segni alterni che soddisfa il criterio di Leibniz, quindi converge. L'intervallo di convergenza è $[-1/2, 1/2]$. La serie originale quindi converge per $x \in [-5/2, 3/2]$.

Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie e determinarne la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\ln|x|}\right)^k$$

Per $x \in \mathbb{R}$, questa serie rappresenta una serie di potenze particolare, una serie geometrica con ragione t, convergente per $t \in (-1, 1)$:

$$t = \frac{1}{1 - \ln|x|}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1 - \ln|x|} < -1 \\ \dfrac{1}{1 - \ln|x|} > 1 \end{cases}$$

$$A = (-\infty, -e^2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (e^2, \infty)$$

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} (x - 5)^k$$

Questa è una serie di potenze con centro in $x_0 = 5$, si effettua una sostituzione per centrarla nell'origine, $x - 5 = t$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} t^k$$

Questa è una serie con termini a segno costante positivo, poiché per ogni $k > 1$, si ha che $e^{1/k} > 1$. Si determina la successione ausiliaria:

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{\frac{e^{k^{-1}} - 1}{3 \ln k + 1}}{\frac{e^{(k+1)^{-1}} - 1}{3 \ln(k+1) + 1}} = \frac{e^{k^{-1}} - 1}{\cancel{3} \ln k + 1} \frac{\cancel{3} \ln(k+1) + 1}{e^{(k+1)^{-1}} - 1}$$

Entrambi sono di segno positivo, quindi si può togliere il modulo essendo di segno positivo, si ha che $e^t - 1 \sim t$, analogamente per il logaritmo si ha $\ln t + c \sim \ln t$:

$$\frac{e^{k^{-1}} - 1}{\ln k} \frac{\ln(k+1) + 1}{e^{(k+1)^{-1}} - 1} \sim \frac{k^{-1}}{\ln k + 1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^{-1}} = \frac{k+1}{k} \frac{\ln(k+1)}{\ln k}$$

Si determina il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{k} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} = \cancelto{1}{\lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{k}} \lim_{k \to \infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k}$$

Per il teorema di de l'Hopital si ha:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Il raggio di convergenza è quindi pari ad uno. L'intervallo di convergenza di questa serie è l'intervallo di estremi $(-1, 1)$, questo fa riferimento alla variabile t, in x questo intervallo è $(4, 6)$. Si determina ora il comportamento agli estremi:

$$t = 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} \cancel{1^k} \sim \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \sim \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k} \ln 2^k} = \frac{1}{3 \ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$$

$$t = -1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} (-1)^k$$

Per il primo caso si usano le funzioni asintoticamente equivalenti individuate nel calcolo del raggio di convergenza, per il secondo caso si usa il criterio di Leibniz, ma bisogna dimostrare che i termini della successione siano definitivamente decrescenti a zero. Il numeratore è un'esponenziale e decresce a zero per $k \to \infty$, il numeratore tende a zero, mentre il logaritmo cresce tendente a $+\infty$. Quindi questa serie converge per $t = -1$, l'insieme di convergenza diventa $[-1, 1) \to [4, 6)$.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k^2} x^{4k}$$

Questa serie si può trasformare in una serie di potenze con centro nell'origine, effettuando la sostituzione $t = x^4$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k^2} t^k$$

Conviene invece di usare la successione ausiliaria simile a quella del criterio del rapporto, si utilizza la successione ausiliaria:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k^2}}}$$

Si determina il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k^2}}} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^k = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{2}{k-1} \right)^k = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{2}{k-1} \right)^{k+1-1}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{2}{k-1} \right)^{k-1} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{k-1} \right)}_{\to 1} = e^2$$

L'intervallo di convergenza è quindi $(-e^2, e^2)$, si considerano gli estremi:

$$t = e^2 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k^2} e^{2k}$$

$$t = -e^2 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2} (-e)^{2k}$$

Poiché utilizzare uno dei criteri è abbastanza complesso, si analizza la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2} e^{2k} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}} e^{2k} = \lim_{k\to\infty} e^{k^2 \ln\left(1-\frac{2}{k+1}\right)+2k} = e^{\lim_{k\to\infty} k^2 \ln\left(1-\frac{2}{k+1}\right)+2k}$$

Si utilizza la formula di Maclaurin, se il limite dell'esponente tende a zero, il limite tende ad uno e quindi la serie non può convergere, si controlla questo limite:

$$\lim_{k\to\infty} k^2 \ln\left(1-\frac{2}{k+1}\right) + 2k \sim \lim_{k\to\infty} k^2 \left(-\frac{2}{k+1} - \frac{2}{(k+1)^2} + o\left[\frac{1}{k^2}\right]\right) + 2k$$

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{2k^2}{k+1} - \frac{2k^2}{(k+1)^2} + \cancelto{0}{\frac{o\left[\frac{1}{k^2}\right]}{\frac{1}{k^2}}} + 2k = \lim_{k\to\infty} \frac{-2k^2(k+1) - 2k^2 + 2k(k+1)^2}{(k+1)^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{-2k^3}\cancel{-2k^2}\cancel{-2k^2} + \cancel{2k^3} + \cancel{4k^2} + 2k}{(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} 2k(k+1)^2 = 0$$

L'esponente è un infinitesimo, quindi l'esponente tende ad uno, e quindi la serie non può convergere. Per $t = -e^2$ invece si ha una serie di segno alterno:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2} e^{2k}$$

Per converge la condizione necessaria deve valere, ma i termini di questa serie tendono ad uno, quindi questa serie si avvicina oscillando ad uno, ma non può convergere. Quindi l'intervallo di convergenza coincide con l'insieme di convergenza, quindi si ha che l'intervallo di convergenza in x è dato da:

$$-e^2 < x^4 < e^2 \implies x^4 < e^2 : -e < x^2 < e \implies x^2 < e : -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$$

Studiare la convergenza e la somma della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k 4^{k+1}}$$

Si può riscrivere come:

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Questa è molto simile alla serie con $x \in \mathbb{R}$, a meno di una costante:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = -\frac{1}{4}\ln(1-x)$$

Questa identità vale solamente se $x \in [-1, 1)$, ed è verificata per il valore $3/4$. La serie di partenza quindi converge e si può esprimere come:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k = -\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\ln 4 = \frac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}$$