Analisi II

Esercizi Svolti di Analisi II

Anno Accademico: 2024/25

Giacomo Sturm

Dipartimento di Ingegneria Industriale, Elettronica e Meccanica
Università degli Studi "Roma Tre"

Sorgente del file LaTeX ed ultima versione del testo disponibile al link:
https://github.com/00Darxk/Analisi-II/

Indice

1 Serie Numeriche

1.1 Condizione Necessaria di Convergenza

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{2k^2+3}$$

Si vuole studiare il carattere della seguente serie utilizzando il primo criterio di convergenza:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3k^2+1}{2k^2+3} = \frac{3}{2} \neq 0$$

Questa serie quindi non può converge, potrebbe quindi divergere oppure essere irregolare.

Considerando la serie dell'esempio precedente, con la condizione necessaria di convergenza si è confermato che la serie non converge, analizzando i segni della serie si ha:

$$3k^2+1>0 \wedge 2k^2+3>0 \implies \frac{3k^2+1}{2k^2+3}>0$$

Quindi la serie è composta da termini definitivamente positivi, quindi la serie non può essere irregolare. Questa serie allora diverge ad infinito positivo.

1.2 Criterio del Confronto

Si considera la seguente serie, bisogna analizzarne il comportamento, tramite il criterio del confronto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{2^k}$$

Si considera il modulo per avere termini definitivamente positivi, allora il termine generico della serie sarà maggiorato dal termine generico:

$$\frac{|\sin k|}{2^k} < \frac{1}{2^k},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

È certamente diverso dal termine generico, poiché k non può essere un multiplo di π. La serie maggiorante corrisponde ad una serie geometrica di ragione $1/2$, e converge poiché la ragione è di modulo minore di uno, quindi converge anche la serie minorante.

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k}$$

Si può esprimere una serie maggiorante e minorante di questa serie:

$$\frac{1}{k} < \frac{2+\cos k}{k} < \frac{3}{k}$$

La serie minorante è una serie armonica, si dimostrerà che diverge a più infinito:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Mentre la serie armonica generalizzata, per $\alpha \in \mathbb{R}$ diverge solo per certi valori di α:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k|}{k}$$

La serie maggiorante rappresenta la serie armonica descritta precedentemente, per cui non è possibile utilizzare il criterio del confronto. Non è possibile stabilire il carattere della serie utilizzando questo criterio.

1.3 Criterio della Radice

Considerando la seguente serie, determinare il carattere tramite il metodo della radice:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{k}$$

La sua serie ausiliaria è:

$$\left\{\sqrt[k]{\left(\frac{1}{k}\right)^{k}}\right\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$$

Questa successione corrisponde alla serie armonica, e diverge quindi la serie di partenza diverge.

1.4 Criterio del Rapporto

Si considera la seguente serie, determinarne il carattere mediante il criterio dell rapporto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

La sua serie ausiliaria è quindi:

$$\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \cancelto{\frac{1}{k+1}}{\frac{k!}{(k+1)!}} \cdot \cancelto{2}{\frac{2^{k+1}}{2^k}} = \frac{2}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0$$

La serie quindi converge, invece se i termini della serie fossero inversi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$$

1.5 Criterio dell'Integrale

Considerata la seguente serie, determinare il suo carattere usando il criterio dell'integrale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$$

Per valutare il carattere di questa serie si potrebbe considerare il criterio del confronto, poiché l'arcotangente è una funzione superiormente limitata da $\pi/2$:

$$\frac{\arctan k}{1+k^2} < \frac{\pi/2}{1+k^2} < \frac{\pi}{2k^2}$$

Considerando la serie maggiorante, questa è una serie armonica generalizzata con parametro $\alpha = 2 > 1$, questa converge, quindi per il criterio del confronto converge anche la serie di partenza.

In questo caso funziona anche il criterio dell'integrale. La sua funzione associata è:

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$$

Si può notare come la funzione associata è il prodotto dell'arcotangente per la sua derivata, quindi l'integrale è immediato. Per utilizzare il criterio dell'integrale bisogna determinare che la funzione è monotona decrescente, si analizza quindi la sua derivata:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\cancelto{1}{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)} - 2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$$

$$1 - 2x\arctan x < 0$$

Il numeratore è sempre negativo per $x \in (1, \infty)$, per cui la funzione ausiliaria è monotona decrescente ed è possibile utilizzare il criterio dell'integrale:

$$t_k = \int_1^k f(x)\mathrm{d}x = \int_1^k \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$u = \arctan x \to \int_{\pi/4}^{\arctan k} u du = \left| \frac{u^2}{2} + c \right|_{\pi/4}^{\arctan k} = \frac{\arctan^2 k}{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

La serie ausiliaria è data da:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan^2 k}{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

1.6 Criterio di Condensazione

Si considera la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$$

Si calcola la derivata della sua funzione ausiliaria per determinare se è possibile applicare il criterio di condensazione:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

Si è verificata l'ipotesi della monotonia della serie. Si applica quindi il criterio di condensazione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{2^k} \frac{\ln 2^k}{\cancel{2^k}}$$

Sfruttando le proprietà del logaritmo questo diventa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \ln 2 = \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} k$$

Non verificando l'ipotesi di convergenza, non può convergere.
Si considera ora la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{x^{\cancelto{3}{4}}} < 0$$

Si applica il criterio di condensazione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cancel{2^k} \frac{\ln 2^k}{(2^k)^{\cancel{2}}} = \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Si studia il criterio del rapporto per poter determinarne il carattere:

$$\frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{k+1}{k}\frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^{k+1}}} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k}$$
$$\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

Poiché $a_{k+1}/a_k < 1$ la serie converge, e quindi per il criterio di condensazione anche la serie di partenza converge.

1.7 Criterio di Confronto Asintotica

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

È soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, avendo:

$$\lim_{k\to\infty}\sin\left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

Bisogna ora trovare una serie $\sum b_k$, tale che:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{b_k} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Per il limite notevole $\sin x/x$, questa serie è $b_k = 1/k$, per cui il limite converge ad uno:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = 1$$

Queste due serie sono asintoticamente equivalenti tra di loro:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

La serie di destra è una serie armonica e diverge, quindi diverge anche la serie di partenza.

Data ora la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

I termini sono sempre positivi, ed è soddisfatta la condizione necessaria, la serie asintoticamente equivalente è data da:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Questa è una serie armonia generalizzata per $\alpha = 2 > 1$, quindi converge. Allora anche la serie di partenza converge.

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

La serie ha termini di segno definitivamente positivo, poiché l'argomento è certamente maggiore di uno: $k+1 > k$. Si scrive in forma equivalente l'argomento per evidenziare il limite notevole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Questa serie ha lo stesso carattere di una serie armonica divergente, quindi diverge.

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{1/k} - 1\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Per il limite notevole è asintoticamente equivalente ad una serie armonica divergente, quindi diverge.

Considerando ora la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{1/\sqrt{k}} - 1\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

Essendo asintoticamente equivalente ad una serie armonica generalizzata divergente, diverge. Per avere una serie convergente, deve avere come argomento almeno un k^α, con $\alpha > 1$.

Si considera la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2+5k-2}{k^2+3}\right)$$

Sicuramente è una serie a termini positivi, si vuole quindi riscrivere l'argomento del logaritmo nella forma $1 + x$:

$$\frac{k^2+5k-2}{k^2+3} = 1 + \frac{5k-5}{k^2+3}$$

Questa serie si comporta in modo equivalente alla serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2+5k-2}{k^2+3}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{5k-5}{k^2+3}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k-5}{k^2+3} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k}{k^2} = 5\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k}}{k^{\cancel{2}}}$$

Essendo asintoticamente equivalente ad una serie armonica divergente, anche essa diverge.

1.8 Esercizi

Studiare il carattere della serie numerica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Per il limite notevole, il carattere di questa serie è asintoticamente equivalente alla serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+k}$$

Il numeratore si comporta come k^2, sono asintoticamente equivalenti, mentre il denominatore è asintoticamente equivalente a k^4, quindi la serie è equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k^2}}{k^{\cancel{4}\,2}}$$

Questa è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$, per cui converge.

Si può realizzare una serie di stesso carattere sostituendo il fattore trascendente con un altro sempre appartenente ad un limite notevole:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1} \left(e^{1/k}-1\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k^2}}{k^{\cancel{4}\,2}}$$

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+k^3}{k^5+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+k^3}{k^5+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+k^3}{k^5+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5+k^4}{k^6+k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k^5}}{k^{\cancel{6}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Essendo asintoticamente equivalente ad una serie armonica divergente, la serie diverge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2(2^k+4^k)}$$

Poiché il calcolo della condizione necessaria di convergenza è complessa, per risolvere l'esercizio si suppone sia corretta e si utilizza subito uno dei criteri:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2(2^k+4^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2 4^k(1/2^k+1)}$$

Si mette in evidenza l'esponenziale con base maggiore, poiché il fattore con base minore di uno per $k \to \infty$ tende a zero, quindi questa serie è asintoticamente equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2 4^k(1/2^k+1)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\frac{5}{4}\right)^k$$

Si utilizza ora il criterio del rapporto, si determina la serie ausiliaria:

$$\frac{\frac{1}{(k+1)^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{\cancel{k+1}}}{\frac{1}{k^2}\cancel{\left(\frac{5}{4}\right)^{k}}} = \frac{5}{4}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$\frac{5}{4}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \frac{5}{4} > 1$$

Quindi la serie diverge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2 3^k}{2^k + 4^k}$$

Questo esercizio è molto simile al precedente, ed analogamente si manipola il denominatore per rimuovere la somma di esponenziali:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2 3^k}{2^k + 4^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2 3^k}{4^k(1/2^k + 1)} \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2 3^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Si utilizza analogamente alla precedente il criterio del rapporto; la sua serie ausiliaria è:

$$\frac{(k+1)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{\cancel{k+1}}}{k^2\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}} = \frac{3}{4}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{3}{4} < 1$$

Poiché il rapporto tendente all'infinito è minore di uno, allora la serie converge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+1}{k^3+1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Questo è esattamente uguale al primo esercizio, quindi anch'esso diverge, l'argomento del logaritmo è scritto in una forma equivalente.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(k^2+\sin e^k)}{3^k} \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k^2}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{2}{3}\right)$$

Nel numeratore si ha $k^2 + \sin e^k\ k^2$, poiché l'oscillazione di $\sin e^k$ viene smorzata all'infinito da k^2, può essere dimostrato tramite il criterio del confronto. Si applica il criterio del rapporto:

$$\frac{(k+1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{\cancel{k+1}}}{k^2\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{k}}} = \frac{3}{4}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{2}{3} < 1$$

Essendo il limite minore di uno, la serie converge.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^3 - k^{3/5}}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)}$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre nel numeratore il seno può essere al massimo pari ad uno, mentre l'altro fattore $k^{3/5}$ è sicuramente maggiore di uno da un certo k_0, quindi si può esprimere come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/5} - \sin k^3}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)}$$

Il numeratore può essere sostituito con $k^{3/5}$, analogamente alla precedente utilizzando il criterio del confronto può essere dimostrato come il seno diviso questo fattore tende a zero per $k \to \infty$, quindi la serie si può riscrivere come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/5} - \sin k^3}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/5}}{k^{1/4}\ln(k^k + k!)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln(k^k + k!)}$$

Essendo k^k un infinito di ordine superiore a $k!$, si può esprimere il denominatore in modo asintoticamente equivalente come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln(k^k + k!)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln\left[k^k\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)\right]} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln k^k + \ln\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{\ln k^k}$$

Si dimostra:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k^k + \ln\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)}{\ln k^k} = \lim_{k\to\infty}\left[\cancelto{1}{\frac{\ln k^k}{\ln k^k}} + \frac{\ln\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)}{\ln k^k}\right]$$

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right) = 0 \to \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k^k + \ln\left(1 + \frac{k!}{k^k}\right)}{\ln k^k} = 1$$

Si può riscrivere come:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/20}}{k}\frac{1}{\ln k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{13/20}\ln k}$$

In questa situazione si applica il criterio di condensazione creando la serie ausiliaria:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{13/20}\ln 2^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^{13/20}}\frac{1}{k\ln 2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{7k/20}}{k\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{7k/20}}{k}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{\cancel{2^{7(k+1/20)}}}{k+1}\frac{k}{\cancel{2^{7k/20}}} = 2^{7/20}\frac{k}{k+1}$$
$$\lim_{k\to\infty} 2^{7/20}\frac{k}{k+1} = 2^{7/20} < 1$$

Poiché il limite tende ad un valore minore di uno, la serie converge.

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt[3]{k^3+1}-k\right)$$

Si considera il prodotto notevole della differenza di due cubi, per determinare se questa serie soddisfa almeno la condizione necessaria per la convergenza:

$$a = \sqrt[3]{k^3+1} \wedge b = k$$
$$a^3 - a^3 = (a-b)(a^2+ab+B^b)$$
$$a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$
$$\sqrt[3]{k^3+1}-k = \frac{\cancel{k^3}+1-\cancel{k^3}}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2+k\sqrt[3]{k^3+1}+k^2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt[3]{k^3+1}-k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2+k\sqrt[3]{k^3+1}+k^2}$$

Ragruppando gli addendi di potenza più grande:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2+k\sqrt[3]{k^3+1}+k^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^6\left(1+\frac{2}{k^3}+\frac{1}{k^6}\right)}+k\sqrt[3]{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)}+k^2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{k^3}+\frac{1}{k^6}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{k^3}}+1\right)} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Al denominatore tutti i termini sono asintoticamente equivalenti a k^2, per cui questa serie è asintoticamente equivalente ad una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$, a meno di una costante:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{k^3+1}\right)^2+k\sqrt[3]{k^3+1}+k^2} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Quindi converge.

Studiare la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$$

Considerando la formula di Stirling, si ottiene la serie asintoticamente equivalente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k^k} \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$$

Utilizzando il criterio del rapporto, si costruisce la successione ausiliaria:

$$\left(\frac{3}{e}\right)^{\cancel{k+1}} \cancel{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(k+1)} \cancel{\left(\frac{e}{3}\right)^k} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\sqrt{k}} = \frac{3}{e} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3}{e} \sqrt{\frac{k+1}{k}} = \frac{3}{e} > 1$$

Quindi questa serie converge.

Studiare il carattere della seguente serie, per $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3-3\alpha} \left(e^{1/k^{2\alpha}} - 1\right)$$

Si considera il limite notevole $e^{1/k^{2\alpha}} - 1 \sim 1/k^{2\alpha}$ e si considera la serie asintoticamente equivalente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3-3\alpha} \left(e^{1/k^{2\alpha}} - 1\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3-3\alpha}}{k^{2\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3-5\alpha}$$

Si può rendere equivalente a duna serie armonica generalizzata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5\alpha-2/3}} : \begin{cases} 5\alpha - \frac{2}{3} > 1 & \text{converge} \\ 5\alpha - \frac{2}{3} < 1 & \text{diverge} \end{cases} = \begin{cases} \alpha > \frac{1}{3} & \text{converge} \\ \alpha < \frac{1}{3} & \text{diverge} \end{cases}$$

Studiare il carattere della seguente serie, per $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{k^{3\alpha}}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-\alpha} \frac{1}{k^{3\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4\alpha-1/2}}$$

La serie converge per $4\alpha - 1/2 > 1$

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

La serie rispetta il criterio di Leibniz e quindi converge.

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{k+1}}{3^{k+2}k!}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\frac{2}{9}\frac{1}{k!}=\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\frac{1}{k!}$$

Studiare il carattere della seguente serie, per $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{2\alpha}\cos(k\pi)}{k+1}$$

Avendo π all'interno del coseno, ed essendo k solo numeri naturali, il fattore coseno alterna segno, mentre di modulo vale sempre uno:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{2\alpha}\cos(k\pi)}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^{2\alpha}}{k+1}$$

Si considera la funzione associata $f(x)$, e si studia la sua derivata per determinare la sua monotonia:

$$f(x)=\frac{x^{2\alpha}}{x+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{2\alpha x^{2\alpha-1}(x+1)-x^{2\alpha}}{(x+1)^2}=\frac{(2\alpha-1)x^{2\alpha}+2\alpha x^{2\alpha-1}}{(x+1)^2}=\frac{x^{2\alpha-1}}{x+1}\left[(2\alpha-1)x+2\alpha\right]$$

$$\frac{x^{2\alpha-1}}{x+1}\left[(2\alpha-1)x+2\alpha\right]<0:\text{converge}:\ 2\alpha-1<0\implies\alpha<\frac{1}{2}$$

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k}}{k+1}$$

Si vuole trovare un'approssimazione di s a meno di 10^{-3}:

$$|s-s_n|\leq|a_n|=\frac{\sqrt{n}}{n+1}<10^{-3}$$

$$\text{per } n=10^6\Rightarrow\frac{10^6}{10^6-1}=0.000\bar{9}<10^{-3}$$

Le prime tre cifre della somma per $n=10^6$ coincidono al valore reale della somma.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$$

Per il criterio di convergenza assoluta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k}{k^2} \right|$$

Per il criterio del confronto si ha:

$$\frac{\sin k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

La serie maggiorante è una serie armonica generalizzata convergente, quindi la serie iniziale converge.

Studiare l'insieme di convergenza di questa serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ha centro in x_0, e coefficienti unitari $a_k = 1$. Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

La serie converge sicuramente nell'intervallo di convergenza: $(-1, +1)$. Ci sono due casi dubbi nei punti $x = \pm 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

La serie non converge per $x = 1$, mentre in $x = -1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

Questa serie a termini di segno alterno non soddisfa la condizione necessaria di convergenza, quindi non converge neanche in $x = -1$. Quindi in questo caso l'insieme di convergenza coincide all'intervallo di convergenza.

È possibile esprimere la funzione $1/(1-x)$ in termini di questa serie, se x appartiene all'insieme di convergenza. Si useranno serie, come la serie di Taylor per approssimare il comportamento di funzioni trascendenti in forma di polinomio.

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

È sempre centrata in $x_0 = 0$, ma i coefficienti non sono costanti $a_k = k^{-1}$. Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^{-1}}{(k+1)^{-1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

Quindi sicuramente questa serie converge nell'intervallo $(-1,+1)$. Bisogna studiare il carattere nei valori di frontiera:

$$x = 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$
$$x = -1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} : \text{converge}$$

La serie converge perché è una serie di segno alterno, con $1/k$ decrescente tendente a zero. Quindi la serie converge in $[-1,1)$.

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

È sempre centrata in $x_0 = 0$, dove il termine generico è $a_k = k^{-2}$. Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^{-2}}{(k+1)^{-2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Quindi sicuramente questa serie converge nell'intervallo $(-1,+1)$. Bisogna studiare il carattere nei valori di frontiera:

$$x = 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} : \text{converge}$$
$$x = -1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} : \text{converge}$$

La prima converge poiché è una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, mentre la seconda serie converge perché è una serie di segno alterno, con $1/k$ decrescente tendente a zero, per il criterio di Leibniz. Quindi la serie converge in $[-1,1]$.

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} x^k$$

Si determina il raggio di convergenza della serie:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^2}{3^k}}{\frac{(k+1)^2}{3^{k+1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2 3^{\cancel{k+1}}}{\cancel{3^k}(k+1)^2} = 3$$

Sicuramente la serie di potenze converge nell'intervallo di convergenza $(-3, 3)$. Si determina il comportamento agli estremi:

$$x = 3 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\cancel{3^k}} \cancel{3^k} = +\infty$$

$$x = -3 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} (-3)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{\cancel{3^k}} \cancel{3^k} = +\infty$$

In questo caso l'insieme di convergenza coincide con l'intervallo di convergenza: $(-3, 3)$.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$$

Con un cambiamento di base si può riportare questa serie in una serie di potenze con centro nell'origine: $t = x/4$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$$

Questa serie è già stata analizzata precedentemente, e converge con $t \in [-1, 1)$. Ma bisogna sempre fare riferimento alla variabile originale, quindi la serie originale converge per $x \in [-4, 4)$.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k + 5}{(k+3)!} (x+2)^k$$

Questa serie di potenze è centrata in $x_0 = -2$, con termini generici:

$$\frac{k!2^k + 5}{(k+3)!}$$

Si preferisce lavorare con serie di potenze con centro nell'origine, per cui si effettua il cambio di variabile $t = x + 2$, mentre il termine generico rimane invariato:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k + 5}{(k+3)!} t^k$$

Si determina il valore del raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\frac{k!2^k+5}{(k+3)!}}{\frac{(k+1)!2^{k+1}+5}{(k+4)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k!2^k + 5)\cancelto{k+4}{(k+4)!}}{[(k+1)!2^{k+1} + 5]\cancel{(k+3)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!2^k + 5}{(k+1)!2^{k+1} + 5} (k+4)$$

Dato che si è scomposto in fattori si possono considerare fattori asintoticamente equivalenti:

$$k!2^k + 5 \sim k!2^k$$
$$(k+1)!2^{k+1} + 5 \sim (k+1)!2^{k+1}$$

Il limite diventa:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+1)!2^{k+1}+5}(k+4) = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k!}2^k}{\cancel{(k+1)!}2^{k+1}}(k+4) = \lim_{k\to\infty} \frac{k+4}{k+1}\frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^{k+1}}} = \frac{1}{2}$$

La serie converge nell'intervallo: $(-1/2, 1/2)$. Si analizza il suo comportamento agli estremi:

$$t = \frac{1}{2} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+3)!}\frac{1}{2^k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\cancel{2^k}}{(k+3)!}\frac{1}{\cancel{2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} : \text{converge}$$
$$t = -\frac{1}{2} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!2^k+5}{(k+3)!}\frac{(-1)^k}{2^k} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} : \text{converge}$$

La prima è una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, quindi converge, la seconda è una serie di segni alterni che soddisfa il criterio di Leibniz, quindi converge. L'intervallo di convergenza è $[-1/2, 1/2]$. La serie originale quindi converge per $x \in [-5/2, 3/2]$.

Determinare l'insieme di convergenza della seguente serie e determinarne la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\ln|x|}\right)^k$$

Per $x \in \mathbb{R}$, questa serie rappresenta una serie di potenze particolare, una serie geometrica con ragione t, convergente per $t \in (-1, 1)$:

$$t = \frac{1}{1-\ln|x|}$$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-\ln|x|} < -1 \\ \dfrac{1}{1-\ln|x|} > 1 \end{cases}$$

$$A = (-\infty, -e^2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (e^2, \infty)$$

Studiare l'insieme di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}-1}{3\ln k + 1}(x-5)^k$$

Questa è una serie di potenze con centro in $x_0 = 5$, si effettua una sostituzione per centrarla nell'origine, $x - 5 = t$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} t^k$$

Questa è una serie con termini a segno costante positivo, poiché per ogni $k > 1$, si ha che $e^{1/k} > 1$. Si determina la successione ausiliaria:

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{\frac{e^{k^{-1}} - 1}{3 \ln k + 1}}{\frac{e^{(k+1)^{-1}} - 1}{3 \ln (k+1) + 1}} = \frac{e^{k^{-1}} - 1}{\cancel{3} \ln k + 1} \frac{\cancel{3} \ln(k+1) + 1}{e^{(k+1)^{-1}} - 1}$$

Entrambi sono di segno positivo, quindi si può togliere il modulo essendo di segno positivo, si ha che $e^t - 1 \sim t$, analogamente per il logaritmo si ha $\ln t + c \sim \ln t$:

$$\frac{e^{k^{-1}} - 1}{\ln k} \frac{\ln(k+1) + 1}{e^{(k+1)^{-1}} - 1} \sim \frac{k^{-1}}{\ln k + 1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^{-1}} = \frac{k+1}{k} \frac{\ln(k+1)}{\ln k}$$

Si determina il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{k} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} = \cancelto{1}{\lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{k}} \lim_{k \to \infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k}$$

Per il teorema di de l'Hopital si ha:

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Il raggio di convergenza è quindi pari ad uno. L'intervallo di convergenza di questa serie è l'intervallo di estremi $(-1, 1)$, questo fa riferimento alla variabile t, in x questo intervallo è $(4, 6)$. Si determina ora il comportamento agli estremi:

$$t = 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} \cancel{1^k} \sim \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \sim \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k} \ln 2^k} = \frac{1}{3 \ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$$

$$t = -1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k} - 1}{3 \ln k + 1} (-1)^k$$

Per il primo caso si usano le funzioni asintoticamente equivalenti individuate nel calcolo del raggio di convergenza, per il secondo caso si usa il criterio di Leibniz, ma bisogna dimostrare che i termini della successione siano definitivamente decrescenti a zero. Il numeratore è un'esponenziale e decresce a zero per $k \to \infty$, il numeratore tende a zero, mentre il logaritmo cresce tendente a $+\infty$. Quindi questa serie converge per $t = -1$, l'insieme di convergenza diventa $[-1, 1) \to [4, 6)$.

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}x^{4k}$$

Questa serie si può trasformare in una serie di potenze con centro nell'origine, effettuando la sostituzione $t = x^4$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}t^{k}$$

Conviene invece di usare la successione ausiliaria simile a quella del criterio del rapporto, si utilizza la successione ausiliaria:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}}}$$

Si determina il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{k-1}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{k-1}\right)^{k+1-1}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{k-1}\right)^{k-1}\cancelto{1}{\left(1+\frac{2}{k-1}\right)} = e^2$$

L'intervallo di convergenza è quindi $(-e^2, e^2)$, si considerano gli estremi:

$$t = e^2 \implies \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}e^{2k}$$

$$t = -e^2 \implies \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}(-e)^{2k}$$

Poiché utilizzare uno dei criteri è abbastanza complesso, si analizza la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}e^{2k} = \lim_{k\to\infty}e^{\ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}}e^{2k} = \lim_{k\to\infty}e^{k^2\ln\left(1-\frac{2}{k+1}\right)+2k} = e^{\lim_{k\to\infty}k^2\ln\left(1-\frac{2}{k+1}\right)+2k}$$

Si utilizza la formula di Maclaurin, se il limite dell'esponente tende a zero, il limite tende ad uno e quindi la serie non può convergere, si controlla questo limite:

$$\lim_{k\to\infty} k^2 \ln\left(1-\frac{2}{k+1}\right)+2k \sim \lim_{k\to\infty} k^2\left(-\frac{2}{k+1}-\frac{2}{(k+1)^2}+o\left[\frac{1}{k^2}\right]\right)+2k$$

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{2k^2}{k+1}-\frac{2k^2}{(k+1)^2}+\cancelto{0}{\frac{o\left[\frac{1}{k^2}\right]}{\frac{1}{k^2}}}+2k=\lim_{k\to\infty}\frac{-2k^2(k+1)-2k^2+2k(k+1)^2}{(k+1)^2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{-2k^3}\cancel{-2k^2}\cancel{-2k^2}+\cancel{2k^3}+\cancel{4k^2}+2k}{(k+1)^2}=\lim_{k\to\infty}2k(k+1)^2=0$$

L'esponente è un infinitesimo, quindi l'esponente tende ad uno, e quindi la serie non può convergere. Per $t=-e^2$ invece si ha una serie di segno alterno:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k^2}e^{2k}$$

Per converge la condizione necessaria deve valere, ma i termini di questa serie tendono ad uno, quindi questa serie si avvicina oscillando ad uno, ma non può convergere. Quindi l'intervallo di convergenza coincide con l'insieme di convergenza, quindi si ha che l'intervallo di convergenza in x è dato da:

$$-e^2<x^4<e^2 \implies x^4<e^2:-e<x^2<e \implies x^2<e:-\sqrt{e}<x<\sqrt{e}$$

Studiare la convergenza e la somma della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k4^{k+1}}$$

Si può riscrivere come:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Questa è molto simile alla serie con $x\in\mathbb{R}$, a meno di una costante:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-\frac{1}{4}\ln(1-x)$$

Questa identità vale solamente se $x\in[-1,1)$, ed è verificata per il valore $3/4$. La serie di partenza quindi converge e si può esprimere come:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k=-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\ln 4=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2}$$

2 Integrali Impropri

2.1 Seconda Specie

2.1.1 Calcolo Diretto

Calcolare questo integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

Per prima cosa bisogna categorizzare l'integrale, presenta una singolarità di seconda specie nel punto $x = 1$. La funzione integranda è una funzione continua ed illimitata nell'intervallo $[0, 1)$. Si rimuove la singolarità e si calcola il suo limite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} \right\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

Si considera il seguente integrale:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

La funzione integranda è illimitata nel punto $x = 1$, si rimuove il suo intorno destro per rimuovere la singolarità e si calcola il limite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^e (\ln x)^{-1/3}\mathrm{d}\,(\ln x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \frac{3}{2}\,(\ln x)^{2/3} \Big|_{1+\varepsilon}^{e} \right\}$$
$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ 1 - (\ln 1 + \varepsilon)^{2/3} \right\} = \frac{3}{2}$$

In questo caso converge, quindi la funzione è integrabile.

2.1.2 Criterio del Confronto

Studiare la convergenza di questo integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{3-\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

È un integrale improprio di seconda specie, poiché in $x = 0$ è presente una singolarità, ed è sempre positivo per $x \geq 0$, essendo $\sin x < 3$. Si può maggiorare e minorare il numeratore:

$$2 \leq 3 - \sin x \leq 4$$

Poiché il valore massimo e minimo del seno è ± 1. La funzione integranda è sicuramente maggiorabile con la funzione:

$$\frac{3-\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Sicuramente questa condizione vale nell'intervallo $[0,1]$. Si calcola l'integrale improprio di seconda specie della funzione maggiorante:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Converge poiché è un integrale immediato già trattato.

2.1.3 Criterio del Confronto Asintotico

Si considera il carattere del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$$

La funzione integranda è continua ed illimitata in $[0,1)$ ha un punto critico in $x=1$, ha segno definitivamente positivo nell'intervallo $(1-\varepsilon,1)$.

$$\text{per} x \to 1^- \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

È asintoticamente equivalente ad una funzione campione studiata precedentemente $(1-x)^{-\alpha}$, converge avendo $\alpha = 1/2 < 1$.

2.1.4 Criterio di Convergenza Assoluta

Studiare la convergenza di questo integrale:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$$

La funzione è continua ed illimitata in questo intervallo $(0,1]$. Questa funzione assume valori di segno diverso, e l'ampiezza dell'oscillazione aumenta per $x \to 0^+$. Si valuta la convergenza della funzione di modulo per valutare eventuale convergenza assoluta:

$$\int_0^1 \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$$

Si utilizza il metodo del confronto:

$$\frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

L'integrale improprio della funzione maggiorante converge, quindi anche l'integrale della funzione minorante converge.

2.2 Prima Specie

2.2.1 Calcolo Diretto

Si determini il valore del seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Essendo una funzione pari si può esprimere come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2 \lim_{h\to+\infty} \int_{0}^{h} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2 \lim_{h\to+\infty} \arctan x \Big|_0^h = \pi \in \mathbb{R}$$

Studiare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty} \int_0^h xe^{-x}\mathrm{d}x = -\lim_{h\to+\infty} \int_0^h e\mathrm{d}(e^{-x}) = -\lim_{h\to+\infty} \left\{ xe^{-x}\Big|_0^h - \int_0^h e^{-x}\mathrm{d}x \right\}$$

$$-\lim_{h\to+\infty} \left\{ he^{-h} + e^{-x}\Big|_0^h \right\} = -\lim_{h\to+\infty} \left\{ \overbrace{he^{-h}}^{\to 0} + \underbrace{e^{-h}}_{\to 0} - 1 \right\} = -1$$

Studiare il seguente integrale:

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty} \int_{e^2}^h \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^3} = \lim_{h\to+\infty} \int_{e^2}^h (\ln x)^{-3}\mathrm{d}(\ln x) = \lim_{h\to+\infty} \frac{(\ln x)^{-2}}{2}\Big|_{e^2}^h$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{h\to+\infty} \left\{ \overbrace{\frac{1}{\ln^2 h}}^{0} - \frac{1}{\ln^2 e^2} \right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

2.2.2 Criterio del Confronto

Studiare il carattere del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

Si può maggiorare e minorare:

$$\frac{1}{x^2} \le \frac{2+\cos x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

Quindi converge anche l'integrale di partenza.

Studiare il carattere del seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$$

Questo integrale è sia di prima che seconda specie. Si divide in due integrali per studiarne il carattere separatamente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{2+\cos x}{x^2} \mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^2} \mathrm{d}x}_{\text{converge}}$$

Per il teorema del confronto si ha:

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{2+\cos x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2} \implies \int_0^1 \frac{3}{x^2} \mathrm{d}x = \infty$$

Poiché $\alpha < 1$, quindi l'integrale di partenza non converge.

2.2.3 Criterio di Convergenza Assoluta

Determinare il carattere del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

Non potendo utilizzare i teoremi, si calcola direttamente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{x} = -\lim_{h\to\infty} \left\{ \left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^h + \int_1^h \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x \right\}$$

$$-\lim_{h\to\infty} \left\{ \cancelto{0}{\frac{\cos h}{h}} - \cos 1 + \int_1^h \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x \right\} = \lim_{h\to\infty} \left\{ \cos 1 - \int_1^h \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x \right\}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$$

Si è trasformato l'integrale di partenza in un integrabile dove è applicabile il teorema del confronto, e si dimostra che converge:

$$\frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

L'integrale improprio di prima specie su x^{-2} converge, avendo $\alpha = 2 > 1$.

Determinare ora l'integrale considerando il valore assoluto della funzione integranda precedente, questo diverge. Si suppone per assurdo che questo integrale converga, la funzione è sicuramente maggiorabile da:

$$\sin^2 x \leq |\sin x| \leq 1$$

Ma per il teorema del confronto converge anche l'integrale della funzione minorante:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \mathrm{d}x$$

sfruttando la formula di duplicazione del coseno:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} \mathrm{d}(2x)$$

Il secondo integrale corrisponde a quello dimostrato precedentemente, il primo è un integrale notevole che diverge, ma per ipotesi converge, quindi l'ipotesi iniziale è errata e quindi l'integrale non converge.

2.3 Esercizi

Studiare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1 + x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

La funzione presente un punto critico in $x = 0$, la funzione integranda per $x \to 0^+$ si può stabilire sia asintoticamente equivalente alla funzione:

$$\frac{1 + x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

La funzione integranda è asintoticamente equivalente alla funzione campione $x^{-1/2}$, ed è noto sia convergente, quindi l'integrale improprio della funzione di partenza converge.

Stabilire la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

La funzione integranda presente due punti di singolarità per $x = 0$ e $x = 1$, si applica la proprietà additiva dell'integrale:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \overbrace{\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}}^{I_1} + \underbrace{\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}}_{I_2} \text{ dove } 0 < a < 1$$

Per convergere questo integrale, devono convergere entrambi gli integrali. Si considera il primo:

$$I_1 = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

La sua funzione integranda è asintoticamente equivalente per $x \to 0^+$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ed è noto che l'integrale improprio della funzione campione converge, quindi I_1 converge, mentre per la seconda funzione integranda, per $x \to 1^-$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

L'integrale improprio della funzione campione $(1-x)^{-1/2}$ è noto convergere, per un'esponente minore di uno, quindi anche l'integrale I_2, quindi l'integrale di partenza $I_1 + I_2$ converge.

Determinare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3 \sin x} \mathrm{d}x$$

La funzione integranda presenta un punto di singolarità per $x = 0$, si considera per $x \to 0^+$ la funzione asintoticamente equivalente:

$$\frac{1}{x^3 \sin x} \sim \frac{1}{x^4}$$

Per il limite notevole $\sin x/x$, l'integrale improprio di questa funzione non converge, quindi la funzione integranda non è integrabile nell'intervallo $[0, 2]$. Analogamente si ha lo stesso risultato per la funzione integranda $1/\sin x$. Per renderla integrabile bisogna elevare l'argomento del seno ad una potenza minore di uno:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sin x^\alpha} \mathrm{d}x$$

Dove $0 < \alpha < 1$, allora l'integrale improprio di seconda specie converge.

Considerare il seguente integrale improprio e valutarne la convergenza:

$$\int_1^2 \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x$$

La funzione integranda presenta un punto critico per $x = 1$, si considera $x \to 1^+$:

$$\ln x \sim x - 1$$

Si dimostra considerando il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1}$$

Utilizzando il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

La funzione integranda per $x \to 1^+$ è asintoticamente equivalente a:.

$$\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$$

Questa funzione è divergente, poiché $\alpha = 1$

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

Il punto di singolarità è $x = 1$, per la funzione logaritmo che tende il denominatore a zero. Per $x \to 1^+$ si ha:

$$\ln x \sim x-1$$
$$x \sim 1$$

Quindi si ha un integrale analogo al precedente, ed anch'esso diverge. Si considera ora l'integrale nell'intervallo $[0, 1/2]$:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

Il punto di singolarità è $x = 0$, non si riesce a trovare una funzione asintoticamente equivalente, ma si prova a verificare in maniera diretta mediante la definizione:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{1/2} \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_{0+\varepsilon}^{1/2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \ln\left|\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right| - \overbrace{\ln|\underbrace{\ln(\varepsilon)}_{+\infty}|}^{+\infty} \right\} = -\infty$$

L'integrale improprio diverge a $-\infty$.

Studiare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}\mathrm{d}x$$

Presenta un punto di singolarità per $x \to 0^+$, si considerano le equivalenze asintotiche per $x \to 0^+$:, per il limite notevole $1 - \cos x/x^2$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} = \sqrt{2}\frac{1}{x}$$

L'integrale improprio di questa funzione diverge, avendo un esponente maggiore o uguale ad uno, quindi la funzione integranda di partenza non è integrabile in senso improprio. Un modo alternativo consiste nello sfruttare l'espansione in serie del coseno, per $x \to 0^+$, mediante la serie di Maclaurin

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o[x^2]$$

Sostituendo quest'approssimazione nella funzione integranda si ha:

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o[x^2]$$
$$\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{e^x}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + o[x^2]}}$$

Considerando il seguente integrale improprio, bisogna utilizzare la formula di Maclaurin di ordine quattro:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}} \mathrm{d}x$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o[x^4] \implies 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x = -\frac{x^4}{4!} + o[x^4]$$
$$\frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{-\frac{x^4}{4!}} = 1 + o[1]$$
$$\frac{e^x}{\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}} \sim -\frac{\sqrt[3]{4!}}{\sqrt[3]{x^4}}$$

L'integrale di questa funzione diverge poiché $\alpha > 1$.

Valutare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} \mathrm{d}x$$

La funzione integranda presenta un punto di singolarità per $x = 1$, nell'intorno sinistro di uno la funzione si mantiene positiva, quindi si può applicare il criterio del confronto asintotico, il numeratore non crea problemi, essendo $\sin x + \cos x \sim \sin 1 + \cos 1$, si ha per prodotto notevole della differenza di due cubi:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} \sim \frac{\sin 1 + \cos 1}{\sqrt[5]{1-x}\sqrt[5]{1+x+x^2}} \sim \frac{\sin 1 + \cos 1}{\sqrt[5]{3}} \frac{1}{(1-x)^{1/5}}$$

L'integrale di questa funzione converge perché $\alpha < 1$.

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x}$$

Si considera l'espansione mediante la serie di Maclaurin per $x \to 0^+$, del denominatore:

$$e^x = 1 + x + o[x]$$
$$\cos x = 1 + o[x]$$
$$e^x - \cos x = \cancel{1} + x + o[x] - \cancel{1} - o[x] = x + o[x] \implies e^x - \cos x \sim x \frac{1}{e^x - \cos x} \sim \frac{1}{x}$$

L'integrale di questa funzione non converge, quindi la funzione di partenza non è integrabile in senso improprio.

Considerare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

La funzione ha un punto critico per $x = 0$, e si può usare il criterio del confronto asintotico, essendo definitamente positiva per $x \to 0^+$. Al denominatore è già presente la funzione campione. Si considera l'espansione mediante la formula di Maclaurin dell'esponenziale:

$$e^{-x} = 1 - x + o[x] \implies 1 - e^{-x} = x + o[x]$$
$$\frac{1 - e^{-x}}{x^{3/2}} \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

La funzione ottenuta è integrabile in modo improprio, quindi l'integrale di partenza converge.

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} x^{-2} \mathrm{d}x$$

La funzione integranda ha un punto di singolarità per $x = 0$. La funzione non si mantiene positiva nell'intorno di zero, poiché il seno continua ad oscillare a frequenza sempre maggiore per $x \to 0^+$. Quindi non si può utilizzare il criterio del confronto asintotico, quindi si studia la convergenza assoluta:

$$\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}\right| \mathrm{d}x$$

Si può applicare su questa funzione integranda il criterio del confronto:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}\right| \leq e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}$$

Si determina una funzione asintoticamente equivalente a questa funzione maggiorante:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}}{x^{1/2}}$$

Se questo limite tende a zero, allora la funzione maggiorante converge.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-5/2}}{e^{1/x}}$$

Il denominatore è un infinito di ordine superiore, quindi il limite tende a zero. Un corollario del teorema del confronto asintotico afferma che se il limite della funzione integranda fratto un'altra funzione $g(x)$ è uguale a zero, e questa funzione ammette un integrale improprio convergente, allora lo ammette anche la funzione integranda. Quindi converge anche l'integrale improprio di partenza. Questo può valere per qualsiasi funzione $g(x) = x^\alpha$, con $\alpha < 1$.

2.4 Esercitazione 4/4/25

Studiare la convergenza di questo integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

La funzione è positiva in tutto l'intervallo, ed è un integrale improprio di prima specie. Considerando la funzione integranda si mette in evidenza la radice di x, per $x \to +\infty$:

$$\frac{1}{x\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{x\sqrt{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}} = \frac{1}{x\sqrt{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}+1}} \to 1 \implies \frac{1}{x\sqrt{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}} \sim \frac{1}{x\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{1}{x^{5/4}}$$

Questa funzione è integrabile in modo improprio nell'intervallo $[1, +\infty)$, quindi per il criterio del confronto asintotico lo è anche la funzione integranda di partenza.

Studiare la convergenza di questo integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$$

Si applica il teorema del confronto asintotico, essendo monotona positiva, per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+2x^2+x^4} \sim \frac{1}{x^4}$$

essendo la funzione pari si può calcolare analogamente come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

In questo modo bisogna calcolare un limite in meno, solo per $h \to +\infty$.

Verificare la convergenza o meno di questo integrale:

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}}\mathrm{d}x$$

Questo è un integrale improprio di prima e di seconda specie, avendo un punto critico in $x = 1/2$, si sfrutta la proprietà additiva degli integrali, scegliendo un punto intermedio $a > 1/2$:

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}}\mathrm{d}x = \overbrace{\int_{1/2}^{a} \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}}\mathrm{d}x}^{I_1} + \underbrace{\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}}\mathrm{d}x}_{I_2}$$

Entrambi questi integrali devono converge, affinché l'integrale di partenza converga. Si considera la funzione integranda, espressa mediante il prodotto notevole della somma di quadrati. Per $x \to 1/2$ si ha:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}\sqrt{2x+1}} \sim \frac{1}{\frac{1}{4}\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1/2}}$$

Questa funzione è integrabile in modo improprio di seconda specie, avendo un esponente $\alpha < 1$, quindi I_1 converge. Si considera ora la funzione integranda di I_2 per $x \to +\infty$:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{x^2 x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} \sim \frac{1}{2x^3}$$

Poiché questa funzione ha un esponente maggiore di uno $\alpha > 1$ questa funzione è integrabile in modo improprio di prima specie, quindi l'integrale I_2 converge.

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$$

Essendo una funzione logaritmica non confrontabile, si utilizza la definizione per calcolarlo:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{h\to\infty}\int_{1}^{h} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \lim_{h\to\infty} \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_{1}^{h} = +\infty$$

Quindi l'integrale non converge. Questo integrale è un caso particolare di questo integrale notevole:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Questo integrale è dimostrabile converge se $\alpha > 1$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Oppure converge sempre se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$. Mentre l'integrale diverge a $+\infty$ se $\alpha < 1$, qualunque sia β reale: $\forall \beta \in \mathbb{R}$, oppure se $\alpha = 1$ e $\beta \leq 1$.

Valutare la convergenza del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}} \mathrm{d}x$$

Essendo sia di prima che di seconda specie si divide tramite la proprietà additiva degli integrali, con $a > 1$:

$$\int_1^{a} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}} \mathrm{d}x$$

Si considera la funzione integranda per $x \to 1^+$:

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}} \sim \frac{\ln 2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \sim \frac{\ln 2}{\sqrt{2}(x-1)^{1/2}}$$

Questa funzione è integrabile in modo improprio di seconda specie, si considera ora l'altro caso:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}} \mathrm{d}x$$

Per $x \to +\infty$ la funzione integranda diventa:

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}} \mathrm{d}x \sim \frac{\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Essendo $\alpha > 1$ l'integrale per $[a, +\infty)$ converge.

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1 + \sqrt{x})} \mathrm{d}x$$

Si divide in due integrali in un punto intermedio $a > 0$ essendo improprio sia di prima che di seconda specie:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1 + \sqrt{x})} \mathrm{d}x = \overbrace{\int_0^{a} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1 + \sqrt{x})} \mathrm{d}x}^{I_1} + \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1 + \sqrt{x})} \mathrm{d}x}_{I_2}$$

Si considera l'integrale I_1, ma non esistono criteri per poter valutare la sua convergenza. L'unico strumento a disposizione è studiare la convergenza assoluta:

$$\int_0^a \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} \right| \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} \mathrm{d}x$$

Si considera la funzione maggiorante, per $x \to 0^+$:

$$\frac{|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)|}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} \leq \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

La funzione è integrabile in senso improprio avendo $\alpha < 1$, I_1 converge in senso assoluto quindi anche semplicemente. Si analizza ora I_2, per $x \to +\infty$, la sua funzione integranda diventa:

$$\frac{\sin \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} \sim \frac{\frac{1}{x^2}}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} < \frac{1}{x^2}$$

Per il teorema del confronto l'integrale improprio di prima specie di x^{-2} converge, quindi converge per il criterio del confronto asintotico I_2.

Valutare la convergenza del seguente integrale improprio di prima specie:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+\sin^2 x}$$

Si maggiora la funzione integranda:

$$x+\sin^2 x \leq x+1 \implies \frac{1}{x+\sin^2 x} \geq \frac{1}{x+1} \sim \frac{1}{x}$$

Per $x \to +\infty$ l'integrale notevole improprio che minora la funzione integranda diverge, quindi anche l'integrale diverge a $+\infty$.

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}} \mathrm{d}x$$

Si raccoglie al numeratore ed al denominatore il fattore x di esponente maggiore:

$$\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}} = \frac{x+\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \frac{x+\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2+2x^{4/5}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Avendo $\alpha = 1$, la funzione non è integrabile in senso improprio, quindi anche l'integrale di partenza non converge.

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio, per $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1-\cos x + x^2)^{\alpha-1}(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

È un integrale improprio di prima specie e di seconda specie avendo un punto critico in $x = 0$. Si considera un punto intermedio $a > 0$:

$$\int_0^{a} \frac{\sqrt{x}}{(1-\cos x + x^2)^{\alpha-1}(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

Per determinare una funzione asintoticamente equivalente alla funzione integranda per $x \to 0^+$ si utilizza la formula di Maclaurin per il coseno:

$$\cos = 1 - \frac{x^2}{2} + o[x^2] \implies 1 - \cos x + x^2 = \frac{3}{2}x^2 + o[x^2]$$

$$1 - \cos x + x^2 \sim \frac{3}{2}x^2$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(1-\cos x + x^2)^{\alpha-1}(x+1)^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{(\frac{3}{2}x^2)^{\alpha-1}\cdot(1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha-1}\frac{x^{1/2}}{x^{2\alpha-2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{x^{2\alpha-5/2}}$$

La funzione converge se l'esponente è minore di uno, essendo un integrale di seconda specie: $2\alpha - 5/2 < 1$:

$$2\alpha - \frac{5}{2} < 1 \implies \alpha < \frac{7}{4}$$

Si considera ora l'integrale di prima specie:

$$\frac{\sqrt{x}}{(1-\cos x + x^2)^{\alpha-1}(x+1)^2} \sim \frac{x^{1/2}}{x^{2\alpha-2}\cdot x^2} = \frac{1}{x^{2\alpha-1/2}}$$

L'integrale converge se l'esponente è maggiore di uno, essendo un integrale di prima specie:

$$2\alpha - \frac{1}{2} > 1 \implies \alpha > \frac{3}{4}$$

L'integrale converge se $\alpha \in [3/4, 7/4]$.

3 Serie di Fourier

3.1 Esercizi 8/4/25

Calcolare la serie di Fourier di questa funzione:

$$f(x) = x \,\text{se}\, x \in [-\pi, \pi)$$
$$f(x + 2\pi) = f(x) \,\forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione è dispari, nell'intervallo aperto, allora $a_k = 0 \,\forall k \in \mathbb{N}$, la rispettiva serie di Fourier si esprime come:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(kx)\,\mathrm{d}x\right] \sin(kx)$$

Si risolve l'integrale per parti, e si ottiene un coefficiente b_k:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{k\pi} x \cos(kx) + \frac{2}{k^2\pi}\cancel{\sin(kx)}\right|_0^{\pi} = -\frac{2}{k}(-1)^k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

La formula $\cos(k\pi) = (-1)^k$ è molto ricorrente nell'ambito delle serie di Fourier. Sostituendo $x = \pi/4$ si può ottenere l'identità:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{4} = \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(\pi)}_{0} + \frac{1}{3}\overbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}^{-1} - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} + \frac{1}{5}\overbrace{\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)}^{1} + \cdots$$
$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

3.2 Esercizi 11/4/25

Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione:

$$f(x) = |x| \text{ se } x \in [-\pi, \pi)$$

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x + 2\pi) = f(x)$. Inoltre calcolare la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

La serie di Fourier permette di calcolare più facilmente alcune somme.

Inoltre la funzione è pari, per cui la sua serie di Fourier si può esprimere come:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x = 0$$

La serie di Fourier diventa:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(kx)\mathrm{d}x$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cancelto{1}{\cos(0\cdot x)}\mathrm{d}x = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\frac{\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = \pi$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{k\pi}x\sin(kx) + \frac{2}{k^2\pi}\cos(kx)\right|_0^{\pi}$$

$$a_k = \left[\cancelto{0}{\frac{2}{k\pi}x\sin(kx)} + \frac{2}{k^2\pi}\cos(kx)\right|_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}(-1)^k - \frac{2}{k^2\pi} = \frac{2}{k^2\pi}\big((-1)^k - 1\big)$$

La serie di Fourier è quindi:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2\pi}\big((-1)^k - 1\big)\cos(kx) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx)$$

$$f(x=0) = 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{4} = -2 + 0 - \frac{2}{3^2} + 0 - \frac{2}{5^2} + 0 - \cdots$$

$$-2\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Si è individuata la somma della serie proposta all'inizio è convergente e finita.

Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione:

$$f(x) = x^2 \text{ se } x \in [-\pi, \pi)$$

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x+2\pi) = f(x)$. Inoltre calcolare la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Questa funzione è pari quindi la sua serie di Fourier diventa:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{\cancel{\pi}} \frac{\pi^{\cancel{3}}}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} x^2 \sin(kx) + \frac{2}{k^2} x \cos(kx) - \frac{2}{k^3} \sin(kx) \right|_0^{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[\cancel{\frac{1}{k} x^2 \sin(kx)} + \frac{2}{k^2} x \cos(kx) - \frac{2}{k^3} \cancel{\sin(kx)} \right|_0^{\pi} = \frac{4}{k^2 \pi} x \cos(kx) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{k^2 \cancel{\pi}} \cancel{\pi} (-1)^k$$

$$f(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx)$$

Per arrivare alla serie iniziale si sceglie $x = \pi$:

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} (-1)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

4 Esercizi 6/5/25

Considerare la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^2 e^x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità e la derivabilità parziale rispetto alla x e la y in $(0,0)$.

Si considera la continuità della funzione nell'origine, quindi si calcola il valore del limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^2 e^x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si effettua una trasformazione in coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^2 e^x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos^4\theta + \rho^2 \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta}}{\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^3 \cos^4\theta + \rho \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta}$$

Si considera la formula di Maclaurin per l'esponenziale:

$$e^{\rho\cos\theta} = 1 + \rho\cos\theta + o[\rho]$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^3 \cos^4\theta + \rho \sin^2\theta e^{\rho\cos\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho^3 \cos^4\theta + \rho\sin^2\theta(1 + \rho\cos\theta + o[\rho])$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^3\cos^4\theta + \rho\sin^2\theta + \rho^2\sin\theta\cos\theta + o[\rho^2]$$

Tutti i termini di questo limite tendono a zero, quindi anche il limite complessivo deve tendere a zero. La funzione è quindi continua nell'origine. Tutti gli addendi possono essere analizzai con il teorema del confronto.

Per determinare la derivabilità si considera un incremento h lungo l'asse x ed un incremento k lungo l'asse y e si calcola il limite del loro rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancelto{2}{3}}}{\cancel{h}} = 0$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k^2 e^0}{\sqrt{k^2}} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{|k|} = \nexists$$

La funzione è derivabile in modo parziale rispetto a x nell'origine, ma non rispetto a y, ed ha valore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

5 Esercizi 23/5/25

Risolvere il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dove il dominio di integrazione è dato da:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \geq x \land 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

La prima equazione rappresenta la bisettrice del primo e del terzo quadrante, tutti i punti appartenenti a questa retta, e superiore sono punti ammissibili. Si può analizzare la seconda equazione come due equazioni di cerchi di raggio 1 e 4, quindi si può definire come tutti i cerchi di raggio maggiore o uguale a 1 e minore o uguale a 4. Questi sono tutti cerchi concentrici nell'origine, si considerano ammissibili tutti i punti presenti in questa corona circolare, al di sopra della bisettrice del primo e del terzo quadrante, retta compresa. Il dominio non è normale rispetto a nessuno dei due assi, poiché si considerano due circonferenze, è più utile passare al dominio polare, trasferendo l'integrale in coordinate polari, centrate nell'origine, si ottiene:

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \frac{\rho^{\cancelto{2}{4}}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Dove D' è definito come:

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$
$$1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \to 1 \leq \rho^2 \leq 4 \to \rho \in [1,2]$$

Questo dominio si trasforma in un rettangolo poiché gli estremi del dominio sono costanti, quindi è possibile separare gli integrali:

$$\iint_{D'} \rho^2 \cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \cdot \int_1^2 \rho^2\mathrm{d}\rho$$
$$\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{7}{3} \cdot -\frac{4\sqrt{2}}{24} = -\frac{7\sqrt{2}}{18}$$

Calcolare l'integrale doppio:

$$\iint_D (x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dove D è definito da:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \land x \geq 0 \land y \geq 0\right\}$$

Il dominio è il quarto della corona circolare di raggio minore pari ad 1 e maggiore pari a 4, nel primo quadrante. Il dominio corrispondente in coordinate polari è:

$$\rho \in [1, 2]$$
$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

L'integrale diventa quindi:

$$\iint_D (x^2 + 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \rho^2(\cos\theta^2 + 2\sin^2\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \iint_{D'} \rho^3(1 + \sin^2\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Il dominio diventa un rettangolo, e i due fattori integrandi sono tra loro indipendenti, quindi si può trasformare in un prodotto di integrali:

$$\iint_{D'} \rho^3(1 + \sin^2\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \cdot \int_1^2 \rho^3\mathrm{d}\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2\theta)\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\frac{15}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \cancelto{0}{\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}}\right) = \frac{45\pi}{16}$$

Risolvere il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dove il dominio D è definito come:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \geq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq -x\right\}$$

Il primo vincolo rappresenta una circonferenza di raggio 1 e centrata nell'origine, sono ammissibili tutti i punti all'esterno della circonferenza, compresa. Per la seconda condizione si considerano solo i punti nel primo e quarto quadrante, fino alla retta $x = 1$, compresa. La terza condizione si può scomporre, considerando solo i punti al di sopra della retta $y = -1$, compresa, ed i punti sottostanti alla bisettrice del secondo e quarto quadrane. Il dominio risultante si trova nel quarto quadrante. Il dominio è quindi dato da:

$$x \in [0, 1]$$
$$y_1 \in [-1, -\sqrt{1 - x^2}]$$
$$y_2 \in [-1, -x]$$

Per cambiare a coordinate polari, gli estremi degli intervalli non sono più costanti, quindi bisogna individuare le funzioni che li rappresentano:

$$\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}] = [1, -\csc\theta]$$

$$\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}] = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

Per calcolare il valore massimo di ρ si considera la retta $y = -1$ che lo identifica:

$$y = -1 = \rho \sin\theta$$
$$\rho = -\frac{1}{\sin\theta} = -\csc\theta$$

Il dominio D' è normale rispetto a θ, l'integrale quindi diventa:

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \frac{\rho\cos\theta}{\cancel{\sqrt{\rho^2}}} \cancel{\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Applicando la formula non si possono scomporre in due integrali indipendenti, quindi si ha:

$$\iint_{D'} \rho\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \mathrm{d}\theta \cos\theta \int_1^{-\csc\theta} \rho\mathrm{d}\rho = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos\theta \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{-\csc\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos\theta \left(\csc^2\theta - 1\right) \mathrm{d}\theta$$

Considerando la formula fondamentale della trigonometria:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \to \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos\theta\cot^2\theta\mathrm{d}\theta \to u = \sin\theta \wedge \mathrm{d}u = \cos\theta\mathrm{d}\theta \to \frac{1}{2}\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{1}{u^2} - 1\mathrm{d}u$$
$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u} - u\right]_{-1}^{-\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (1+1)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} - 2\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1$$

Determinare l'integrale doppio, partendo dalla stessa funzione integranda dell'esercizio precedente, considerando questo dominio D:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \geq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y\right\}$$

Analogamente all'esercizio precedente si considerano tutti i punti esterni al cerchio unitario. Per il secondo vincolo si considerano tutti i punti del primo e secondo quadrante, fino alla retta $y = 1$, compresa. Inoltre si considerano tutti i punti superiori alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il dominio è esattamente specchiato, rispetto all'asse x, dall'esercizio precedente. Per cui il risultato è esattamente lo stesso dell'esercizio precedente:

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \rho\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\cos\theta \int_{\csc\theta}^{1} \rho\mathrm{d}\rho = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1$$

Risolvere il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dove il dominio D è dato da:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \geq 1 \wedge 0 \leq y \leq x \wedge 0 \leq x \leq 2\right\}$$

Per il primo vincolo ci si trova all'esterno della circonferenza unitaria. Per il secondo ed il terzo vincolo ci si trova nel primo quadrante, inoltre i punti ammissibili sono al di sotto della bisettrice del primo quadrante, fino alla retta $x = 2$. Il dominio in coordinate polari diventa:

$$\rho \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$
$$\rho \in [1, 2\sec\theta]$$

$$\frac{7}{8} - \frac{9\pi}{16}$$

6 Esercizi 27/5/25

Risolvere il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dove il dominio D è dato da:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\right\}$$

Il primo vincolo racchiude tutti i punti interni alla circonferenza di raggio unitario centrata in $(1,0)$, mentre per il secondo vincolo si considerano tutti i punti nel primo e secondo quadrante.

Si considera una trasformazione in coordinate polari, centrate in $(1,0)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Gli intervalli diventano:

$$\theta \in [0,\pi]$$
$$\rho \in [0,1]$$

Poiché i due intervalli sono indipendenti, l'integrale diventa:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \frac{1+\rho\cos\theta}{1+2\rho\cos\theta+1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \iint_{D'} \rho\frac{1+\rho\cos\theta}{1+2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Avendo al denominatore x^2+y^2 si considerano coordinate polari centrate nell'origine, poiché complicando il dominio, si semplifica la funzione integranda:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
$$\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$$
$$\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$$

Il dominio si trova interamente nel primo quadrante, quindi l'intervallo di θ accettabile è:

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

All'aumentare di θ, il parametro ρ diminuisce, deve esserci una dipendenza tra le due, il valore massimo è 2, ed il minimo è 0. Il valore minimo rimane costante, mentre quello massimo dipende da θ. Al posto dell'equazione cartesiana dalla circonferenza si considera l'equazione polare:

$$\rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta + 1 + \rho^2\sin^2\theta = 1$$

$$\rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0$$
$$\rho \neq 0 \wedge \rho = 2\cos\theta$$

Quindi l'intervallo di ρ è dato da:

$$\rho \in [0, 2\cos\theta]$$

L'integrale diventa quindi:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\cos\theta \int_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,[2\cos\theta]\,\mathrm{d}\theta$$
$$\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos 2\theta + 1)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[-\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

7 Esercitazione 10/6/25

Verificare la conservatività in $\mathbb{R}^2$ del campo vettoriale $\vec{F}$:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Quindi calcolarne il potenziale $\varphi(x,y)$ ed infine calcolare l'integrale curvilineo sulla curva $\gamma(A,B)$, minore arco dei due archi di circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 con $A = (2,0)$ e $B = (0,-2)$.

Per determinare se un campo è conservativo si considerano le sue derivate miste:

$$\frac{\partial}{\partial y} 2xy = 2x = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + y^2$$

Inoltre il campo è definito in $\mathbb{R}^2$, quindi l'insieme di definizione è semplicemente connesso. Il campo è conservativo.

Si calcola il suo potenziale, considerando prima la componente $X(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = \int 2xy \mathrm{d}x = x^2y + \alpha(y)$$

Si considera la componente $Y(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = Y(x,y)$$
$$x^2 + \alpha'(y) = x^2 + y^2 \to \alpha'(y) = y^2 \to \alpha(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Quindi il potenziale è, per $c = 0$:

$$\varphi(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3}$$

Poiché il campo è conservativo, il suo integrale curvilineo è indipendente dalla curva, quindi si considerano solamente i due estremi A e B:

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\alpha} = \varphi(B) - \varphi(A) = 0 \cdot (-2) - \frac{8}{3} - 4 \cdot 0 - 0 = -\frac{8}{3}$$

Considerare il seguente campo vettoriale:

$$X(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$Y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Definito su D_1 e D_2:

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y > x+1\right\}$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \leq x+1\right\}$$

Determinare se il campo è conservativo in D_1 ed in $D_2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si calcolano le derivate miste:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Il campo è conservativo in D_1, poiché l'insieme è semplicemente connesso, mentre non lo è in D_2, avendo un buco in $(0,0)$.

Studiare la convergenza puntuale nell'intervallo $[0, 2\pi]$ della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\sin x)^k$$

Questa è una serie di potenze con $a_k = k$, effettuando un cambiamento di variabile $t = \sin x$, con $t_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(t)^k$$

Si calcola il raggio di convergenza di questa serie di potenze:

$$R = \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Quindi si può dire che rispetto alla variabile t la serie converge per $t \in (-1, 1)$. Riportando nella variabile x si ha $-1 < \sin x < 1$: $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Bisogna analizzare gli estremi:

$$t = 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} k$$
$$t = -1 \to \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k$$

Per $t = 1$ e $t = -1$ la serie non converge. Quindi l'intervallo di convergenza è $[0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$.

Risolvere mediante trasformata di Laplace il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Si applica ad entrambi i membri la trasformata di Laplace:

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Si calcolano i fratti semplici:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \to B = -1C = 0A = 1 \end{cases}$$

La trasformata diventa:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

APplicando l'antitrasformata si ottiene:

$$y(t) = 1 - \cos(t)$$

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 3x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si esprime l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

La soluzione dell'omogenea è quindi:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x$$

Considerando ora la forzante, per il criterio di similarità si considera la soluzione particolare k_1x+k_2:

$$-2k_1 + k_1x + k_2 = 3x$$
$$\begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 6 \end{cases}$$

La soluzione generale è data da:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + 3x$$

Si determina il valore delle costanti:

$$y(0) = c_1 + 6 \to c_1 = -5$$
$$y'(0) = -5 + c_2 + 3 \to c_2 = 2$$
$$y(x) = -5e^x + 2xe^x + 3x + 6$$