

Appunti di Analisi dei Sistemi ad Eventi

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su

<https://github.com/00Darxk/Analisi-dei-Sistemi-ad-Eventi>

Indice

1	Introduzione	3
2	Reti di Petri	4
2.1	Rappresentazione	4
2.2	Evoluzione	4
2.3	Sistema Produttori/Consumatori	5

1 Introduzione

Verranno forniti due modelli di sistemi, reali o astratti, un modello matematico, reti di Code, ed un modello logico, reti di Petri. Quest'ultimo è un modello grafico, simile ad un diagramma di flusso. La rete di Petri analizza le interazioni tra gli elementi del sistema, mentre la rete di Code analizza nel tempo queste interazioni ingresso-uscita. In questi modelli si analizza l'evoluzione di una variabile di stato, da individuare nel sistema analizzato, per studiare la funzione obiettivo. La variazione della variabile di stato si studia tramite derivata continua o discreta, oppure si campiona il suo valore ad intervalli fissi. L'analisi ad eventi consiste nel misurare solamente se succede qualcosa al sistema, se avviene un evento, ovvero non c'è spreco di memoria campionando lo stesso valore. Per determinare un evento si controlla se la variabile di stato considerata è cambiata, questa variabile può essere sia deterministica oppure aleatoria. In caso sia aleatoria, conoscere la sua distribuzione di probabilità non è sufficiente per determinarne l'evoluzione, sono necessaria la media, il valore centrale della distribuzione, e la varianza, la distanza dal valore centrale nella distribuzione.

Si usano sistemi manifatturieri come esempi, poiché sono comuni e semplici da studiare. Viene definita una coda un luogo dove i clienti o utenti aspettano il servizio. Quando un cliente entra nel sistema, se è disponibile un servente, viene servito, se non è disponibile si mette in coda. Viene definito tempo di processamento il tempo necessario per un cliente affinché sia servito. Si considerano i clienti usciti dal sistema dopo essere stati serviti. Si considera per ipotesi la coda ordinate in FIFO (First In First Out), ovvero si considera il primo cliente entrato in coda, il primo servito, se sono disponibili serventi. La coda del modello può essere illimitata oppure limitata con un massimo numero clienti k . Si indica il numero dei serventi con s . Si definisce la variabile di stato di questo sistema il valore intero n che rappresenta il numero di clienti all'interno del sistema, il suo valore massimo corrisponde alla massima capienza dei serventi e della coda: $n \in [0, s + k]$. Questo valore si incrementa o decrementa di uno ogni volta che un cliente entra o esce dal sistema. In uno stesso istante non può avvenire più di un evento, ovvero la variabile può variare di uno in ogni istante. Si chiamano questi eventi di incremento e decremento processi di nascita e morte. Questo sistema è descritto da una legge di transizione:

$$\begin{cases} n = n + 1 \\ n = n - 1 \end{cases}$$

Quest'equazione rappresenta la legge di evoluzione del sistema. Un evento rappresenta l'arrivo o la partenza di un cliente dal sistema. In questo modello la variazione è legata al tempo, noto solo il cambiamento della variabile di stato ad ogni evento, per cui rappresenta un modello logico. Se ad ogni evento viene assegnato una durata di tempo il modello diventa temporizzato, in maniera asincrona, ovvero ogni evento corrisponde ad intervalli di tempo diversi. L'obiettivo del modello è determinare l'evoluzione del sistema, questo può comprendere il numero di clienti, il tempo di servizio, differenza tra il tempo di entrata ed il tempo di uscita di un cliente, il tempo di attesa. Conoscendo il tempo di processamento si può determinare se il sistema è sotto o sovra-utilizzato.

2 Reti di Petri

La rete di Petri è un modello logico per rappresentare sistemi ad eventi deterministici (DES), può rappresentare comportamenti complessi come la sincronizzazione, il succedersi asincrono di eventi che avvengono in intervalli di tempo diversi, operazioni concorrenti che avvengono totalmente indipendentemente tra di loro, conflitti ed altre caratteristiche di sistemi ad eventi.

2.1 Rappresentazione

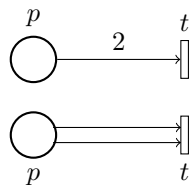
La rete di petri è una rappresentazione grafica con una struttura matematica, è modulare e limitata, potendo rappresentare un ciclo continuo, è possibile gestire il ridimensionamento della rete senza perdere le sue proprietà. La rete è un grafo bipartito, formato da due tipi di nodi, i posti p e le transizioni t . Si possono unire solamente posti-transizioni tramite archi orientati.



Viene definito pre-set di un nodo x l'insieme dei nodi immediatamente a monte di x : $\bullet x$, viene invece definito post-set di un nodo x l'insieme dei nodi immediatamente a valle di x : $x\bullet$. Lo stato del sistema viene definito dalla marcatura x un vettore colonna di dimensione pari al numero di posti $|P|$, dove P indica l'insieme dei posti, ed avente ogni componente di valore uguale al numero di gettoni presenti nel posto associato:

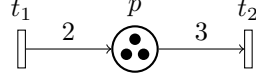
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{|P|} \end{pmatrix}$$

Viene definita marcatura iniziale x_0 lo stato assunto dal sistema all'inizio della sua analisi. I nodi sono collegati da archi pesati, il peso di un arco esprime il numero di gettoni generati, in caso sia in entrata ad un posto, oppure consumati, in caso sia in entrata ad una transizione. Il peso di un arco può essere indicato come un numero espresso sopra l'arco, per convenzione se è omissso il peso si considera di peso unitario, oppure si possono rappresentare come un numero di archi pari al peso dell'arco:



2.2 Evoluzione

Una transizione è abilitata se i posti a monte della transizione contengono almeno abbastanza gettoni da poter essere tutti consumati dai rispettivi archi.



In questo esempio la transizione t_2 è abilitata, poiché l'arco consuma tre gettoni e nel posto immediatamente a monte della transizione sono presenti tre gettoni. Ad ogni transizione può essere associato un tempo di processamento, in modo da temporizzare il sistema. Se il pre-set di una transizione è vuoto, allora quella transizione è sempre abilitata.

Il numero di stati possibili in una qualsiasi configurazione corrisponde al numero di transizioni abilitate in quella data configurazione. Questi stati possibili possono essere rappresentati con un grafo di stato, in base alla rete e alla marcatura iniziale considerata x_0 .

Si definiscono posti con un pre-set nullo appesi ed il numero di gettoni al loro interno può o rimanere costante o diminuire. Per cui se il sistema si basa solamente su posti appesi, allora sicuramente si bloccherà, incontra un "deadlock".

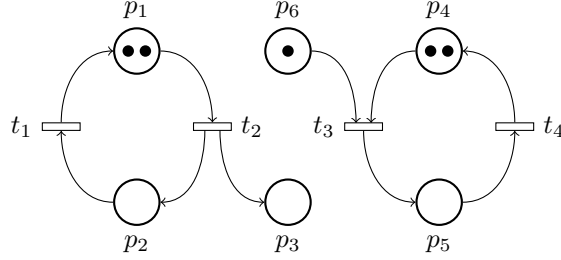
L'evoluzione di un sistema viene determinata dall'accadimento di eventi abilitati, ognuno con una sua abilità di accadere. La possibilità che un evento accada dipende dall'abilitazione di una transizione, l'effetto del suo accadimento corrisponde allo scatto di una transizione. L'abilitazione di una transizione dipende solamente dal peso dell'arco in entrata e dai gettoni nel pre-set, è abilitata se il numero dei gettoni nel pre-set è almeno uguale al peso dei rispettivi archi. Lo scatto di una transizione provoca un "flusso" di gettoni, questo flusso non è continuo, poiché i gettoni in entrata alla transizione vengono consumati e ne vengono creati di nuovi sulla base del peso dell'arco in uscita, numero indipendente dal numero dei gettoni consumati.

L'evoluzione comprende quattro passaggi ciclici: data una marcatura corrente si individua l'insieme delle transizioni abilitate, si sceglie casualmente, se non è specificato, una sola di queste transizioni, si provoca lo scatto di questa transizione che cambia la marcatura, si considera la nuova marcatura corrente e si ripetono questi passaggi.

Una sequenza di transizioni, abilitate, (t_1, \dots, t_n) si esprime con il simbolo S . Questa sequenza rappresenta l'ordine con cui le transizioni scattano, affinché rappresenti una sequenza valida, le transizioni considerate devono essere abilitate quando è il loro turno di scattare. Diverse sequenze possono arrivare alla stessa marcatura. Un singolo posto può abilitare più di una transizione, ma dopo lo scatto di una delle transizioni abilitate, potrebbe non avere gettoni rimanenti per abilitare le altre.

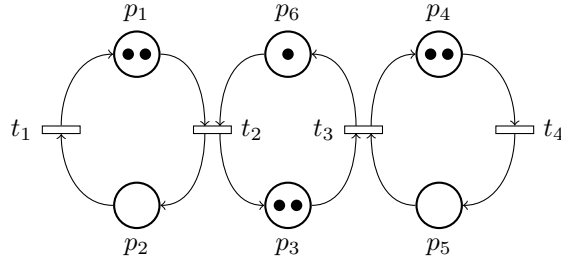
2.3 Sistema Produttori/Consumatori

Si considera un sistema semplice formato da uno o più produttori che creano oggetti e li depositano in un buffer condiviso da cui uno o più consumatori possono prelevarli e consumarli. Per rappresentare un consumatore o un produttore si un ciclo che produce uno o più gettoni e lo depositano in un posto esterno al ciclo, oppure prelevano uno o più gettoni per poi consumarli con lo scatto di una transizione del ciclo:



In questo caso ogni volta che la transizione t_2 scatta, viene generato un gettone nel posto p_3 , quindi il ciclo rappresenta un ciclo di produttori ed il numero di gettoni nel ciclo, indica il numero di produttori. La transizione t_3 è abilitata solo se è presente almeno un gettone nel posto p_6 , per cui questo ciclo consuma un gettone ogni volta che scatta t_6 , rappresenta un ciclo di consumatori, ed il numero di gettoni nel ciclo rappresenta il numero di consumatori del sistema. In un qualsiasi ciclo il numero di gettoni rimane sempre costante, se il peso degli archi che generano gettoni è uguale al peso dei gettoni che consumano gettoni, e se le transizioni sono sempre abilitate, altrimenti il ciclo non potrebbe né consumare né generare gettoni.

Per creare un sistema unico produttori-consumatori si considera un posto dove vengono depositati i gettoni generati dal ciclo dei produttori e consumati dal ciclo dei consumatori. Questo deposito può essere sia illimitato, nelle situazioni precedenti, oppure limitato. In questo caso è necessario un controllo nelle transizioni pre-set del buffer per impedire siano generati gettoni se il deposito non può accodarli, analogamente è necessario un controllo post-set per segnalare che un numero di gettoni è diminuito e quindi il deposito può accomodare più gettoni. Per indicare questo limite si crea un ciclo composto dalle transizioni generatrici nei cicli dei produttori, il posto buffer, le transizioni consumatrici dei cicli dei consumatori, ed un altro posto. In questo ciclo così definito il numero di gettoni rimane invariato, per cui il massimo numero di gettoni presenti nel deposito non può eccedere un limite imposto a priori:



In questo caso il deposito presenta un limite massimo di tre gettoni, e nel sistema sono presenti due consumatori e due produttori. Generalmente modelli di sistemi di produttori e consumatori presentano sempre dei cicli simili comunicanti tra di loro.