Appunti di Analisi dei Sistemi ad Eventi

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su
https://github.com/00Darxk/Analisi-dei-Sistemi-ad-Eventi

Indice

1 Introduzione

Verrano forniti due modelli di sistemi, reali o astratti, un modello matematico, reti di Code, ed un modello logico, reti di Petri. Quest'ultimo è un modello grafico, simile ad un diagramma di flusso. La rete di Petri analizza le interazioni tra gli elementi del sistema, mentre la rete di Code analizza nel tempo queste interazioni ingresso-uscita. In questi modelli si analizza l'evoluzione di una variabile di stato, da individuare nel sistema analizzato, per studiare la funzione obiettivo. La variazione della variabile di stato si studia tramite derivata continua o discreta, oppure si campiona il suo valore ad intervalli fissi. L'analisi ad eventi consiste nel misurare solamente se succede qualcosa al sistema, se avviene un evento, ovvero non c'è spreco di memoria campionando lo stesso valore. Per determinare un evento si controlla se la variabile di stato considerata è cambiata, questa variabile può essere sia deterministica oppure aleatoria. In caso sia aleatoria, conoscere la sua distribuzione di probabilità non è sufficiente per determinarne l'evouzione, sono necessaria la media, il valore centrale della distribuzione, e la varianza, la distanza dal valore centrale nella distribuzione.

Si usano sistemi manufatturieri come esempi, poiché sono comuni e seplici da studiare. Viene definita una coda un luogo dove i clienti o utenti aspettano il servizio. Quando un cliente entra nel sistema, se è disponibile un servente, viene servito, se non è disponibile si mette in coda. Viene definito tempo di processamento il tempo necessario per un cliente affinché sia servito. Si considerano i clienti usciti dal sistema dopo essere stati serviti. Si considera per ipotesi la coda ordinate in FIFO (First In First Out), ovvero si considera il primo cliente entrato in coda, il primo servito, se sono disponibili serventi. La coda del modello può essere illimitata oppure limitata con un massimo numero clienti k. Si indica il numero dei serventi con s. Si definisce la variabile di stato di questo sistema il valore intero n che rappresenta il numero di clienti all'interno del sistema, il suo valore massimo corrisponde alla massima capienza dei servneti e della coda: $n \in [0, s + k]$. Questo valore si incremente o decrementa di uno ogni volta che un cliente entra o esce dal sistema. In uno stesso istante non può avvenire più di un evento, ovvero la variabile può variare di uno in ogni istante. Si chiamano questi eventi di incremento e decremento processi di nascita e morte. Questo sistema è descritto da una legge di transizione:

$$\begin{cases} n = n + 1 \\ n = n - 1 \end{cases}$$

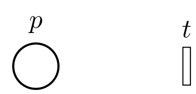
Quest'equazione rappresenta la legge di evoluzione del sistema. Un evento rappresenta l'arrivo o la partenza di un cliente dal sistema. In questo modello la variazione è slegata dal tempo, noto solo il cambiamento della variabile di stato ad ogni evento, per cui rappresenta un modello logico. Se ad ogni evento viene assegnato una durata di tempo il modello diventa temporizzato, in maniera asincrona, ovvero ogni evento corrisponde ad intervalli di tempo diversi. L'obiettivo del modello è determinare l'evoluzione del sistema, questo può comprendere il numero di clienti, il tempo di servizio, differenza tra il tempo di entrata ed il tempo di uscita di un cliente, il tempo di attesa. Conoscendo il tempo di processamento si può deterinare se il sistemaè sotto o sovra-utilizzato.

2 Reti di Petri

La rete di Petri è un modello logico per rappresentare sistemi ad eventi deterministici (DES), può rappresentare comportamenti complessi come la sincronizzazione, il succedersi asincrono di eventi che avvengono in intervalli di tempo diversi, operazioni concorrenti che avvengono totalemente indipendentemente tra di loro, conflitti ed altre caratteristiche di sistemi ad eventi.

2.1 Rappresentazione

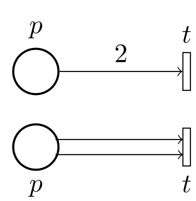
La rete di petri è una rappresentazione grafica con una struttura matematica, è modulare e limitata, potendo rappresentare un ciclo continuo, è possibile gestire il ridimensionamento della rete senza perdere le sue proprietà. La rete è un grafo bipartito, formato da due tipi di nodi, i posti p e le transizioni t. Si possono unire solamente posti-transizioni tramite archi orientati.



Viene definito pre-set di un nodo x l'insieme dei nodi immediatamente a monte di x: $\bullet x$, viene invece definito post-set di un nodo x l'insieme dei nodi immediatamente a valle di x: $x\bullet$. Lo stato del sistema viene definito dalla marcatura x un vettore colonna di dimensione pari al numero di posti $|P|$, dove P indica l'insieme dei posti, ed avente ogni componente di valore uguale al numero di gettoni presenti nel posto associato:

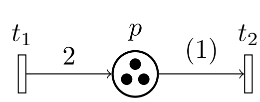
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{|P|} \end{pmatrix}$$

Viene definita marcatura iniziale x_0 lo stato assunto dal sistema all'inizio della sua analisi. I nodi sono collegati da archi pesati, il peso di un arco esprime il numero di gettoni generati, in caso sia in entrata ad un posto, oppure consumati, in caso sia in entrata ad una transizione. Il peso di un arco può essere indicato come un numero espresso sopra l'arco, per convenzione se è omesso il peso si considera di peso unitario, oppure si possono rappresentare come un numero di archi pari al peso dell'arco:



2.1.1 Evoluzione

Una transizione è abilitata se i posti a monte della transizione contengono almeno abbastanza gettoni da poter essere tutti consumati dai rispettivi archi.



In questo esempio la transizione t_2 è abilitata, poiché l'arco consuma tre gettoni e nel posto immediatamente a monte della transizione sono presenti tre gettoni. Ad ogni transizione può essere associato un tempo di processamento, in modo da temmporizzare il sistema. Se il pre-set di una transizione è vuoto, allora quella transizione è sempre abilitata.

Il numero di stati possibili in una qualsiasi configurazione corrisponde al numero di transizioni abilitate in quella data configurazione. Questi stati possibili possono essere rappresentati con un grafo di stato, in base alla rete e alla marcatura iniziale considerata x_0.

Si definiscono posti con un pre-set nullo appesi ed il numero di gettoni al loro interno può o rimanere costante o diminuire. Per cui se il sistema si basa solamente su posti appesi, allora sicuramente si bloccherà, incontra un "deadlock".

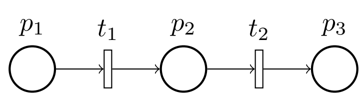
L'evoluzione di un sistema viene determinata dall'accadimento di eventi abilitati, ognuno con una sua abilità di accadere. La possibilità che un evento accada dipende dall' abilitazione di una transizione, l'effetto del suo accadimento corrisponde allo scatto di una transizione. L'abilitazione di una transizione dipende solamente dal peso dell' arco in entrata e dai gettoni nel pre-set, è abilitata se il numero dei gettoni nel pre-set è almeno uguale al peso dei rispettivi archi. Lo scatto di una transizione provoca un "flusso" di gettoni, questo flusso non è continuo, poiché i gettoni in entrata alla transizione vengono consumati e ne vengono creati di nuovi sulla base del peso dell'arco in uscita, numero indipendente dal numero dei gettoni consumati.

L'evoluzione comprende quattro passaggi ciclici: data una marcatura corrente si individua l'insieme delle transizioni abilitate, si sceglie casualmente, se non è specificato, una sola di queste transizioni, si provoca lo scatto di questa transizione che cambia la marcatura, si considera la nuova marcatura corrente e si ripetono questi passaggi.

Una sequenza di transizioni, abilitate, $(t_1, \cdots, t_n)$ si esprime con il simbolo S. Questa sequenza rappresenta l'ordine con cui le transizioni scattano, affinché rappresenti una sequenza valida, le transizioni considerate devono essere abilitate quando è il loro turno di scattare. Diverse sequenze possono arrivare alla stessa marcatura. Un singolo posto può abilitare più di una transizione, ma dopo lo scatto di una delle transizioni abilitate, potrebbe non avere gettoni rimanenti per abilitare le altre.

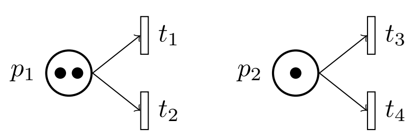
2.1.2 Strutture Fondamentali

Due transizioni si dicono in sequenza se sono collegate da un singolo posto:



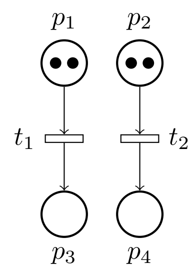
Le transizioni t_1 e t_2 si dicono in sequenza.

Un posto d'ingresso a due o più transizioni rappresenta un conflitto strutturale. Questo conflitto può essere effettivo se data una marcatura M, lo scatto di una transizione disabilita le altre transizioni. Il conflitto è potenziale se questo scatto non disabilita le altre transizioni.



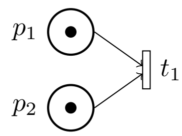
Le transizioni t_1 e t_2 si dicono in conflitto potenziale, le t_3 e t_4 si dicono in conflitto effettivo.

Due, o più, transizioni si dicono concorrenti se la loro evoluzione è indipendente l'una dall'altra:



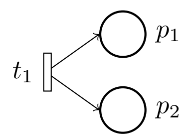
Le transizioni t_1 e t_2 si dicono in concorrenza strutturale, essendo entrambe abilitate si dicono in concorrenza effettiva.

Due o più posti si dicono sincronizzati se come post-set presentano la stessa transizione:



I posti p_1 e p_2 si dicono sincronizzati tra di loro, la transizione t si identifica come transizione di sincronizzazione

Due o più posti si dicono concorrenti se presentano in pre-set la stessa transizione, per cui allo scatto di quella transizione vengono generati dei gettoni in entrambi i posti:

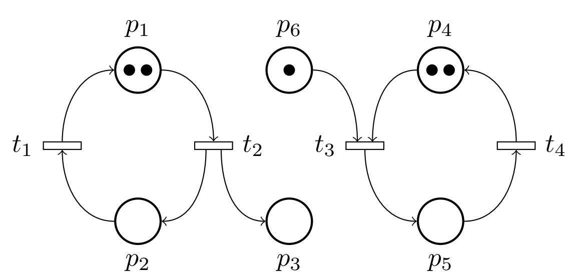


I due posti p_1 e p_2 si dicono concorrenti tra di loro, la transzizione t si identifica come transizione di inizio concorrenza.

Una rete di Petri si dice completa se non presenta nessun posto e transizione appese.

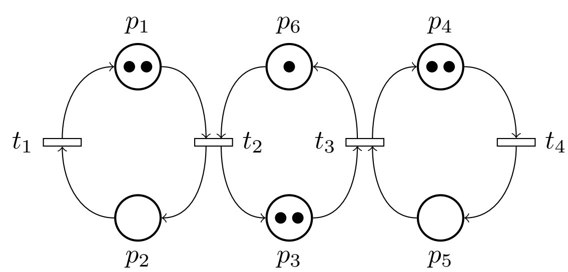
2.1.3 Sistema Produttori/Consumatori

Si considera un sistema semplice formato da uno o più produttori che creano oggetti e li depositano in un buffer condiviso da cui uno o più consumatori possono prelevarli e consumarli. Per rappresentare un consumatore o un produttore si un ciclo che produce uno o più gettoni e lo depositano in un posto esterno al ciclo, oppure prelevano uno o più gettoni per poi consumarli con lo scatto di una transizione del ciclo:



In questo caso ogni volta che la transizione t_2 scatta, viene generato un gettone nel posto p_3, quindi il ciclo rappresenta un ciclo di produttori ed il numero di gettoni nel ciclo, indica il numero di produttori. La transizione t_3 è abilitata solo se è presente almeno un gettone nel posto p_6, per cui questo ciclo consuma un gettone ogni volta che scatta t_6, rappresenta un ciclo di consumatori, ed il numero di gettoni nel ciclo rappresenta il numero di consumatori del sistema. In un qualsiasi ciclo il numero di gettoni rimane sempre costante, se il peso degli archi che generano gettoni è uguale al peso dei gettoni che consumano gettoni, e se le transizioni sono sempre abilitate, altrimenti il ciclo non potrebbe né consumare né generare gettoni.

Per creare un sistema unico produttori-consumatori si considera un posto dove vengono depositati i gettoni generati dal ciclo dei produttori e consumati dal ciclo dei consumatori. Questo deposito può essere sia illimitato, nelle situazioni precedenti, oppure limitato. In questo caso è necessario un controllo nelle transizioni pre-set del buffer per impedire siano generatati gettoni se il deposito non può accomodarli, analogamente è necessario un controllo post-set per segnalare che un numero di gettoni è diminuito e quindi il deposito può accomodare più gettoni. Per indicare questo limite si crea un ciclo composto dalle transizioni generatrici nel cicli dei produttori, il posto buffer, le transizioni consumatrici dei cicli dei consumatori, ed un altro poste. In questo ciclo così definito il numero di gettoni rimane invariato, per cui il massimo numero di gettoni presenti nel deposito non può eccedere un limite imposto a priori:



In questo caso il deposito presenta un limite massimo di tre gettoni, e nel sistema sono presenti due consumatori e due produttori. Generalmente modelli di sistemi di produttori e consumatori presentano sempre dei cicli simili comunicanti tra di loro.

2.2 Proprietà

Una stessa rete presenta proprietà diverse in base ad una diversa marcatura iniziale M_0.

2.2.1 Raggiungibilità

Una marcatura M^* si dice raggiugibile se esiste almeno una sequenza S di transizioni abilitate tale che sia possibile, da una marcatura iniziale M, raggiungere la marcatura M^*:

$$M\,[S > M^*$$

Si definisce, data una rete di Petri N marcata con una marcatura M_0, l'insieme di raggiungibilità $R(N, M_0)$, l'insieme più piccolo di marcature tale che la marcatura iniziale appartiene all'insieme, e data una qualsiasi marcatura M^* appartenente all'insieme, ed una qualsiasi transizione t, abilitata, appartenente all'insisme delle transizioni T nella marcatura M^*. La transizione M^{**} ottenuta facendo scattare la transizione t nella marcatura M^* anch'essa appartiene all'insieme di raggiungibilità.

$$M_0 \in R(N, M_0)$$
$$M^* \in R(N, M_0) \wedge t \in T \text{ t.c. } M^* [\ t > M^{**} \implies M^{**} \in R(N, M_0)$$

2.2.2 Limitatezza

Un posto p_i di una rete N si dice $k-$limitato se in tutte le marcature raggiungibili, da una marcatura iniziale M_0, quel posto presenta al massimo k gettoni al suo interno:

$$\forall M \in R(N, M_0) \to m_i \leq k$$

Una rete N in una marcatura iniziale M_0 si dice $k-$limitata se tutti i suoi posti sono $k-$limitati. Se $k = 1$, la rete si dice binaria, poiché ogni posto può avere o zero o un singolo gettone. Una rete si dice limitata al massimo numero di gettoni che possono esistere in uno dei suoi posti, per cui è sufficiente un singolo posto illimitato affinché l'intera rete sia illimitata.

I cicli, analizzati precedentemente, rappresentano un caso semplice di rete limitata, poiché il numero di gettoni presenti nel ciclo rimane costante.

2.2.3 Reversibilità

Una rete N si dice reversibile, a partire da una marcatura iniziale M_0, se per ogni marcatura M appartenente all'insieme di raggiungibilià, la marcatura iniziale appartiene all'insieme di raggiungibilità della marcatura M:

$$\forall M \in R(N, M_0) \implies M_0 \in R(N, M)$$

Per cui una rete si dice reversibile se per ogni marcatura M raggiungibile deve esistere una serie di scatti S tali da ritornare alla marcatura originale M_0:

$$\forall M \in R(N, M_0) \implies M [\ S > M_0$$

2.2.4 Conservatitivà

Una rete N con marcatura iniziale M_0 si dice conservativa in riferimento ad un vettore peso W (colonna), maggiore uguale al vettore nullo 0, di dimensione pari alla cardinalità dell'insieme dei posti $\dim W = |P|$, se per ogni marcatura M appartenente all'insieme di raggiungibilità R il prodotto matriciale tra la trasposta del vettore peso W ed il vettore marcatura M assume un valore finito e costante:

$$\exists W \geq 0 \text{ t.c. } \forall M \in R(N, M_0) \implies W^T \cdot M = k \in \mathbb{R}^+$$

Il vettore peso W poiché è maggiore uguale al vettore nullo presente al minimo una sola componente non nulla positiva, ed al massimo tutte componenti positive non nulle. Il prodotto tra W^T

e M si può esprimere in diversi modi:

$$\forall M \in R(N, M_0) : W^T \cdot M = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_{|P|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{|P|} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{|P|} w_j m_j = k$$

$$M_0 \in R(N, M_0) \implies W^T \cdot M = W^T \cdot M_0 = k$$

$$\sum_{j=1}^{|P|} w_j m_j = \sum_{j=1}^{|P|} w_j m_{j0} \to \sum_{j=1}^{|P|} w_j (m_j - m_{j0}) = 0$$

Una rete si dice conservativa, se esiste un vettore peso W strettamente maggiore del vettore nullo, per cui il prodotto la trasposta del vettore ed una qualsiasi marcatura appartenente all'insieme di raggiungibilità risulta sempre costante:

$$\exists W > 0 \text{ t.c } \forall M \in R(N, M_0) \implies W^T \cdot M = k \in \mathbb{R}^+$$

Una rete conservativà quindi è $k-$limitata poiché non è necessario azzerare il contributo di un posto, a differenza del caso della conservativà in riferimento ad un vettore dove il vettore W contiene tanti zeri quanti sono i posti illimitati nella rete N, in modo da azzerare i loro contriubti nella somma.

Una rete si dice strettamente conservativa se è conservativa con riferimento al vettore identità, per cui tutte le componenti del vettore peso W assumono valore unitario: $\forall j \in 1, \cdots, |P| \implies w_j = 1$.

Una rete si dice non conservativa se è conservativa con riferimento ad un vettore peso nullo, per cui tutti i suoi posti sono illimitati, per cui il numero di posti rimane costante solo se non si considera nessun posto della rete.

In generale per controllare la conservatività si cerca il sottoinsieme più grande dell'insieme dei posti della rete N dove il numero di gettoni rimane complessivamente costante. Si deduce quindi che un ciclo rappresenta un elemeno conservativo, e se è presente in una rete, sarà sempre conservativà rispetto ad un vettore, se i posti del ciclo presentano almeno un vettore.

2.2.5 Vivezza

Una transizione t, di una rete N con marcatura iniziale M_0, si dice viva, se e solo se per ogni marcatura M appartenente all'insieme di raggiungibilità R esiste una marcaura M^* raggiungibile da M, tale che la transizione t sia abilitata:

$$t : \text{viva} \iff \forall M \in R(N, M_0), \exists M^* \in R(N, M) \text{ t.c. } t : \text{abilitata in } M^*$$

Una rete N, con marcatura iniziale M_0, si dice raggiungibile se e solo se tutte le sue transizioni t_j sono vive:

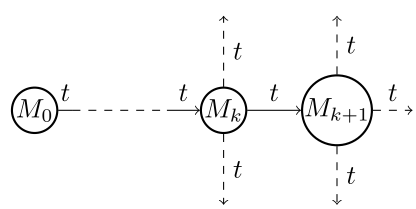
$$N : \text{viva} \iff \forall t \in T \to t : \text{viva}$$

2.3 Analisi Dimamica

Partendo da una rete è possibile creare un grafo di stato o grafo di raggiungibilità, che racchiude le relazioni tra ogni marcatura appartenente all'insieme di raggiungibilità, data una marcatura iniziale M_0, tramite li scatti di una singola transizione. Questo grafo è sempre limitato, anche se la rete non lo è. Dal grafo è possible inferire sulle proprietà della rete in quella data configurazione. Bisogna tenere conto delle differenza tra le prorpietà strutturali di una rete, che non dipendono dalla marcatura iniziale M_0, e le proprietà dinamiche che dipedono dalla marcatura M_0. Le proprietà individuate da un'analisi strutturale sono più importanti poiché intrinseche alla rete e verrano studiate nelle sezioni successive.

2.3.1 Grafo di Raggiungibilità e di Copertura

Un grafo di raggiungibilità è un grafo con un unico tipo di nodo che corrisponde ad una marcatura M. Sono presenti tanti nodi quante sono le marcature presenti nell'insieme di raggiungibilità R, a partire da una marcatura iniziale M_0. Gli archi del grafo uniscono due marcature collegate dallo scatto di una singola transizione, abilitata. Se è presente un numero finito di nodi, la rete è limitata, se sono presenti solo valori di 0 e 1, allora la rete è binaria. Se da ogni nodo del grafo esiste un percorso che abilita tutte le transizioni allora la rete è viva. Se da ogni nodo esiste un percorso che ritorna allo stesso nodo, la rete è reversibile.
Per costruire un grafo di raggiungibilità si parte dalla marcatura iniziale M_0, segnandola come nodo corrente. Si indica M_k la marcatura associata al nodo corrente; se non ci sono più transizioni attivabili a partire dal nodo corrente, non considerate in precedenza rispetto allo stesso nodo, e se il nodo corrente non corrisponde alla marcatura iniziale $k > 0$ allora si assegna come nodo corrente M_{k-1}, altrimeni l'algoritmo termina. Si considera la prima transizione abilitata, non considerata in precedenza con riferimento allo stesso nodo, e si calcola la marcatura raggiunta dal suo scatto. Se questa marcatura non corrisponde ad una marcatura già analizzata la si chiama M_{k+1}, e si crea un nodo associato ad essa collegato al nodo corrente da un arco, indicando la transizione scattata per arrivarci. Questo nodo diventa il nuovo nodo corrente e si ricomincia l'algoritmo cercando transizioni attivabili a partire da questo nodo corrente.



Al termine di questo algoritmo si ottiene il grafo di raggiungibilità di una rete N con marcatura iniziale M_0. Se tutti i nodi contengono marcatura, la cui somma dei gettoni è costante, allora la rete è strettamente conservativa, mentre se solo la somma di alcune posizioni delle marcature sono costanti allora la rete è conservativa in riferimento ad un vettore. Per controllare se la rete è conservativa rispetto ad un vettore $W > 0$, bisogna controllare che la somma pesata assuma valore costante. Generalmente è meglio un vettore peso strettamente maggiore al vettore nullo che un vettore maggiore uguale al vettore nullo. Dato un vettore peso W, è possibile identificarne infiniti, combinazioni lineari del vettore W.
Se la rete è illimitata, si considera invece del grafo di raggiungibilità il grafo di copertura, che presenta un numero finito di nodi per poter descrivere la rete illimitata. Per identificare se una rete è illimitata si cerca una sequenza ammissibile di transizioni S da una marcatura M^* ad una marcatura M^{**}: $M^* [\, S > M^{**}$, tale che la marcatura M^{**} sia maggiore uguale alla marcatura M^*: $M^{**} \geq M^*$. Per cui presenta almeno un elemento maggiore della marcatura di partenza, ciò implica che il numero di gettoni complessivo è aumentato durante la sequenza S, ed almeno un

posto presenta più gettoni rispetto all'inizio della sequenza. Necessariemente quindi la sequenza S è abilitata nella nuova marcatura M^{**}, e può scattare portando ad un'altra marcatura M^{***} maggiore uguale della precedente: $M^{**}\,[\,S > M^{***}$ t.c. $M^{***} \geq M^{**}$. Continuando aribtrariamente questo processo è possibile aumentare il numero di gettoni all'interno di almeno un posto della rete, per cui quei posti sono illimitati. La posizione dei posti illimitati o strettamente maggiori si indica con il simbolo ω, per indicare un numero arbitrario di gettoni:

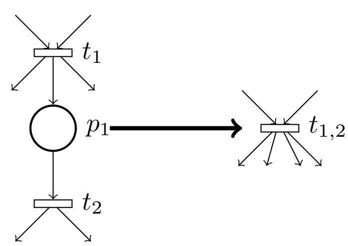
$$M = \begin{pmatrix} \vdots \\ \omega \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Nel grafo di copertura, alla prima istanza di questo aumento arbitrario di gettoni si inserisce il termine ω nella posizione corrispondente ai posti illimitati, e si continua la costruzione del grafo seguendo le regole precedentemente definite. In alcuni casi è possibile, dato un determinato valore di ω, svuotare il posto illimitato arrivando ad un nodo con una marcatura senza ω. Oppure è possibile ritornare ad una marcatura finita precedentemente analizzata quindi collegando i due nodi con un'istruzione condizionale $\omega = k$, oltre al nome della transizione scattata. Se una rete è illimitata allora non può essere ciclica, ma può essere conservativa rispetto ad un vettore.

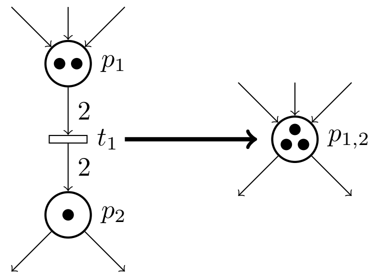
2.3.2 Tecniche di Riduzione

Si può ridurre il numero di posti di una rete, pur mantenendo le stesse proprietà, eccetto la conservatività. Poiché il vettore peso dipende dalla specifica rete considerata.

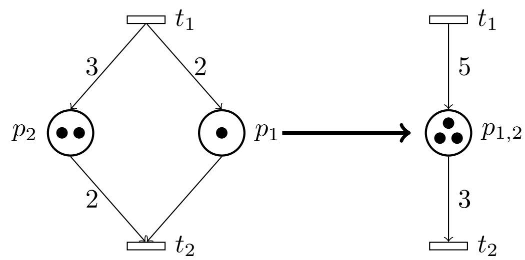
Se due posti o due transizioni sono connessi in serie, avendo in comune una singola transizione o posto (vuoto), possono essere sotituiti da un singolo posto o transizione. In caso di transizioni poste in serie, si possono unire solo se il posto in comune tra di loro è vuoto, altrimenti si perderebbe l'informazione dei suoi gettoni, e se il peso dell'arco entrante al posto equivale al peso dell'arco uscente dal posto:



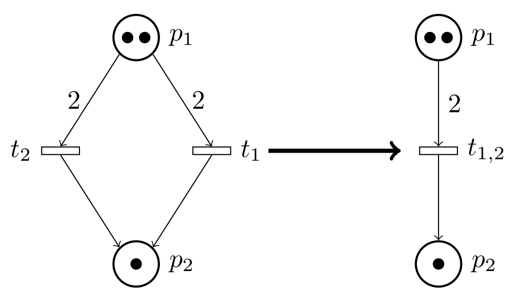
Due posti si possono unire se sono collegati da un'unica transizione (abilitata), ed il peso degli archi entranti equivale il peso degli archi uscenti da essa. Il posto risultante contiene la somma dei gettoni presenti nei due posti:



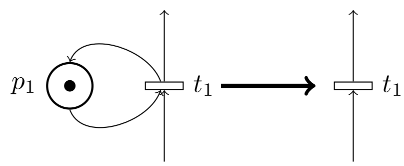
Inoltre è possibile unire insieme transizioni o posti in parallelo, ovvero aventi gli stessi insieme di pre-set e post-set. In caso siano due posti connessi in parallelo, il posto risultante contiene la somma dei gettoni, mentre l'arco entrante al posto ha peso dato dalla somma dei pesi degli archi entranti nei due posti originali, analogamente per l'arco uscente dal posto risultante:



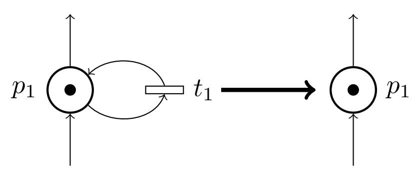
In caso siano presenti due transizioni poste in parallelo, per unirle è necessario che gli archi entranti in entrambe le transizioni abbiano lo stesso peso, analogamente per le transizioni in uscita, in questo modo date due marcatura prima e dopo lo scatto di una delle due transizioni è impossibile distinguere quale delle due sia scattata, per cui si considerano come un'unica transizione:



Se in una rete è presente un autociclo, ovvero un posto o una transizione che presenta in pre-set e post-set lo stesso insieme, si può eliminare poiché non altera il comportamento della rete. In caso sia un posto in autociclo, se gli archi in entrata ed in uscita al posto hanno lo stesso peso, il numero di gettoni al suo interno rimane costante; se il peso dell'arco in entrata alla transizione è maggiore del numero dei gettoni interni al posto, la rete è morta, poiché quella transizione non sarà mai abilitata, quindi eliminandolo bisogna indicare che la rete sia morta, anche se la rete ridotta non lo è. Se il peso dell'arco in uscita è minore del peso dell'arco in entrata si raggiunge la stessa situazione, e la transizione diventa morta.



Analogamente se è presenta una transizione avente in pre-set ed in post-set lo stesso posto, se il posto è $k-$limitato ed il peso del'arco entrante nella transizione è maggiore di k, allora quella transizione è morta. Se il peso degli archi entranti ed uscenti dalla transizione è uguale, non altera il numero dei gettoni nel posto associato.



2.4 Rappresentazione Algebrica

Una qualsiasi rete di petri può essere rappresentata in riferimento a 3 matrici:

La matrice di ingresso I (Input) è una matrice avente tante righe quanti sono i posti nella rete e tante colonne quante sono le transizioni. Gli elemnenti della matrice sono interi positivi o nulli: $I \in M(|P|, |T|, \mathbb{N})$. L'elemento i_{ij} della matrice $I := (i_{ij})$ viene definito come il peso dell'arco che collega il $i-$esimo posto alla $j-$esima transizione. Per cui questa matrice racchiude tutti i pesi degli archi entranti nelle transizioni.

Analogamente la matrice di uscita $O \in M(|P|, |T|, \mathbb{N})$ (Output), contiene tutti i pesi degli archi uscenti dalle transizioni. L'elemento o_{ij} della matrice $O := (o_{ij})$ è definito come il peso dell'arco uscente dalla transizione j in entrata al posto i.

La matrice di incidenza C è definita come la differenza tra la matrice di uscita e la matrice di entrata:

$$C := O - I \in M(|P|, |T|, \mathbb{N})$$

Se nella rete è presente un ciclo, a gettoni costanti, le componenti della matrice di incidenza relative a quegli archi assumono valori nulli. Se un elemento c_{ij} della matrice di incidenza $C := (c_{ij})$ è negativo, allora la transizione t_j è in ingresso al posto p_i, se è positivo allora la transizione t_j è di uscita dal posto p_i, ed il modulo dell'elemento indica il peso dell'arco corrispondente.

Questa rappresentazione corrisponde ad un'analisi puramente strutturale di una rete, poiché si perdono le informazioni sui gettoni contenuti nei posti. Se ogni elemento della matrice di incidenza è nullo, allora la rete è strettamente, strutturalmente, conservativa, poiché è indipendente dalla marcatura M_0 della rete. Gli elementi della matrice di incidenza possono essere nulli in caso sia presente un ciclo o un autociclo nelle rispettive posizioni. Una rete senza autocicli si definisce pura.

Per determinare se una data transizione t_i è abilitata, si controlla se il vettore marcatura corrente M è maggiore uguale alla colonna $i-$esima della matrice di ingresso I_i, poiché quella colonna indica quanti gettoni devono essere consumati per lo scatto della transizione t_i e se la marcatura M è maggiore uguale a quella colonna, sono presenti necessariamente abbastanza gettoni per scattare la transizione t_i in tutti i posti collegati, rendendola abilitata:

$$t_i : \text{ abilitata } \iff M \geq I_i$$

La marcatura corrente M se viene sommata con la colonna $i-$esima della matrice di uscita risulta maggiore uguale di M prima della somma, poiché gli elementi della matrice O sono strettamente positivi, allora:

$$M + O_i \geq M \geq I_i \to M + O_i \geq I_i$$
$$M + O_i - I_i = M + C_i \geq 0$$

La marcatura M rappresenta lo stato della rete, mentre l'espressione $M+C_i$ rappresenta l'equazione di stato della rete, ovvero la sua evoluzione dopo lo scatto di una transizione t_i, se abilitata. Rappresenta una nuova marcatura raggiunta dalla rete aggiungendo e togliendo gettoni in base ai pesi degli archi entranti ed uscenti alla transizione t_i. L'evoluzione della rete non dipende dalla marcatura, ma dipende interamente dalla topo logia della stessa. Per ottenere la colonna $i-$esima della matrice di incidenza si considera il versore s_i, vettore di dimensione pari alla cardinalità dell'insieme delle transizioni dim $s = |T|$, avente tutti elementi nulli eccetto per l'elemento nella posizione $i-$esima:

$$s_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \vdots \\ (i) \\ \vdots \\ (|T|) \end{matrix}$$

Per cui si può esprimere una colonna corrispondente ad una transizione t_i attraverso il prodotto della matrice di incidenza per il versore associato a quella transizione:

$$C_i = C \cdot s_i$$

Una sequenza di scatti $S = t_{k_1}, \cdots, t_{k_n}$ abilitata in una marcatura iniziale M_0 è una sequenza di transizioni $t_{k_j} \in T,\ \forall j = 1, \cdots, n$ tali che la marcatura raggiunta dallo scatto di t_{k_j} da M_j porta ad una marcatura M_{j+1} dove la transizione $t_{k_{j+1}}$ è abilitata:

$$M_0 \,[\, t_{k_1} > M_1, \cdots, M_{n-1} \,[\, t_{k_n} > M_n \implies M_0 \,[\, t_{k_1}, \cdots, t_{k_n} = S > M_n$$

Una sequenza di transizioni S si dice sequenza di scatti solo se tutte le transizioni sono abilitate quando devono scattare, non necessariamente vero per una sequenza arbitraria. Se questo è verificato la sequenza di transizioni si dice ammissibile.

L'effetto di una sequenza di scatti $S = t_{k_1}, \cdots, t_{k_n}$ da una marcatura M_0 ad una marcatura M^* può essere espresso mediante l'equazione di stato della rete:

$$M^* = M + C_{k_1} + \cdots + C_{k_n} = M + C \cdot (s_{k_1} + \cdots + c_{k_n})$$

Si definisce il vettore colonna s_k, di dimensione pari alla cardinalità dell'insieme delle transizioni, associato alla sequenza di scatti, che indica quante volte ogni singola transizione è scattata, senza fornire informazioni sull'ordine in cui le transizioni scattano. Presenta nella posizione $i-$esima il valore corrispondente al numero di occorrenze della transizione t_i nella sequenza S:

$$s_{k_1} + \cdots + s_{k_n} = s_k$$

Per cui si può esprimere l'evoluzione della rete da una marcatura M_0 dopo una sequenza di scatti S come:

$$M_0 \,[\, S > M^* : \quad M^* = M_0 + C \cdot s_k$$

Quest'espressione indica una relazione lineare.

2.5 Analisi Strutturale

L'analisi della rappresentazione algebrica di una rete permette di trovare proprietà esclusivamente strutturali, intrinseche alla rete. Quest'analisi si basa solo su informazioni contenute nel grafo di incidenza. Questa analisi punta ad individuare delle strutture specifiche nella rete. Alcune di queste strutture si chiamano invarianti, possono essere di posto, $P-$invarianti, di transizione, $T-$invarianti.

2.5.1 P-invarianti

Gli invarianti di posto sono delle strutture associate all'insieme dei posti P, dove la somma pesata dei gettoni è costante, si studiano per determinare la conservatività strutturale della rete. Un $P-$invariante di una rete N viene definito come un vettore colonna x di dimensione pari alla cardinalità dell'insieme dei posti $|P|$, tale che il prodotto matriciale tra la sua trasposta ed una qualsiasi marcatura M raggiungibile da M_0 è costante e finito:

$$x^T M = x^T M_0, \ \forall M \in R(N, M_0)$$

Per calcolare i $P-$invarianti si considera una generica marcatura raggiungibile M da una sequenza di scatti S, con associato un vettore s:

$$M = M_0 + Cs$$

Gli ivarianti di posto x sono tali che:

$$x^T M = x^T(M + Cs) = x^T M_0 + Csx^T$$

Per definizione $x^T M = x^T M_0$, allora, un vettore colonna x si dice $P-$invariante se rispetta la seguente equazione:

$$x^T Cs = 0$$

Per definizione un vettore associato ad una sequenza di scatti S non è nullo, per cui non si considera come soluzione $s = 0$. Per cui il l'equazione diventa un sistema di $|P|$ equazioni:

$$x^T C = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{|P|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1|T|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{|P|1} & \cdots & c_{|P||T|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 c_{11} + \cdots + x_{|P|} c_{|P|1} = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 c_{1|T|} + \cdots + x_{|P|} c_{|P||T|} = & 0 \end{cases}$$

Si omette la soluzione x uguale al vettore nullo, poiché inutile nell'analisi di una rete di Petri. Le soluzioni accettate sono vettori colonna con componenti intere. Se non sono presenti soluzioni, la rete non è strutturalmente conservativa, se è presente almeno una soluzione è possibile crearne infinite tramite combinazione lineare e la rete è strutturalmente conservativa.

2.5.2 T-invarianti

I $T-$invarianti sono analoghi ai $P-$invarianti associati alle transizioni T. Un vettore colonna y, di dimensione pari alla cardinalità dell'insieme delle transizioni, si definisce $T-$invariante, se dopo lo scatto delle transizioni indicate dal vettore si ritorna alla marcatura iniziale, quindi esprime la reversibilità della rete. Si considera uno sequenza di scatti $S : M_0 [\ S > M_0$ associata al vettore y:

$$M = M_0 + Cy = M_0 \rightarrow Cy = 0$$

Non si considera $y = 0$ una soluzione, per cui un vettore colonna si definisce $T-$invariante se non è il vettore nullo e ha componenti interi. Per trovare le componenti del vettore y bisogna risolvare un sistema di $|T|$ equazioni:

$$Cy = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1|T|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{|P|1} & \cdots & c_{|P||T|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{|T|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 c_{11} + \cdots + y_{|T|} c_{1|T|} = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ y_{|T|} c_{|P|1} + \cdots + y_{|T|} c_{|P||T|} = & 0 \end{cases}$$

Se il vettore y è maggiore uguale del vettore nullo, ovvero ha componenti tutte positive, la rete si dice reversibile, altrimenti se presenta almeno una componente negativa implicherebbe che per ritornare alla marcatura iniziale bisognerebbe invertire lo scatto di una transizione, ma ciò è impossibile, quindi in questo caso la rete non è reversibile. Se una ammete un $T-$invariante, ne ammette infiniti. Se non ammette $T-$invarianti sicuramente non è reversibile.