Esercizi Svolti su Reti Dinamiche nel Dominio di Laplace

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

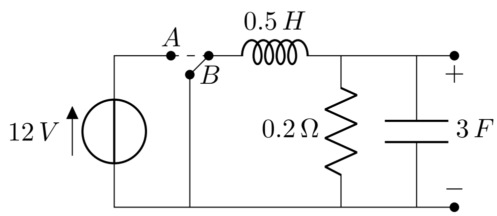
Sorgente del file LaTeX disponibile su
https://github.com/00Darxk/Elettrotecnica-ed-Elettronica

Indice

1 Esercizi Svolti l'11 Dicembre

1.1 Esercizio 2.5

Calcolare la tensione ai capi dei morsetti $v_0(t)$ del seguente cirucito, dopo la commutazione da A e B:

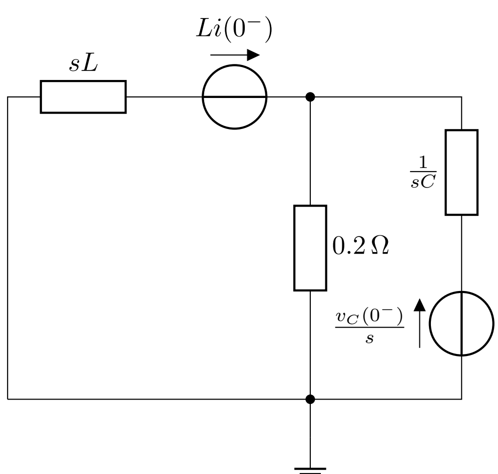


Il circuito prima della commutazione si trova a regime, per cui la tensione ai capi del condensatore corrisponde alla tensione erogata dal generatore:

$$v_C(0^-) = 12\,V$$

La memoria dell'induttore invece corrisponde a:

$$i(0^-) = \frac{12\,V}{0.2\,\Omega} = 60\,A$$



Si applica il metodo dei nodi, corrispondente al teorema di Millman in questo caso:

$$V_{out}(s) = \frac{\dfrac{Li(0^-)}{sL} + \dfrac{sCv_C(0^-)}{s}}{\dfrac{1}{sL} + \dfrac{1}{R} + sC} = \frac{\dfrac{Li(0^-) + sLCv_C(0^-)}{sL}}{\dfrac{1 + sGL + s^2LC}{sL}}$$

$$V_{out}(s) = \frac{Li(0^-) + sLCv_C(0^-)}{LC\left(s^2 + s\dfrac{1}{RC} + \dfrac{1}{LC}\right)}$$

Si considera il denominatore e si individuano i poli s_1 e s_2:

$$D(s) = LC\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = LC(s - s_1)(s - s_2)$$

Si considerano i valori delle grandezze:

$$Li(0^-) = 30$$

$$LC = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{5}{3}$$

Sostituendo i valori ottenuti nella funzione, si ottiene:

$$D(s) = \frac{3}{2}\left[s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}\right]$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}}\right) = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{9}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}$$

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -\frac{2}{3}$$

$$F(s) = \frac{30 + s\dfrac{3}{2}12}{\dfrac{3}{2}(s+1)\left(s + \dfrac{2}{3}\right)}$$

Si scompone la funzione di rete in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} = \frac{20 + 12s}{(s+1)\left(s + \dfrac{2}{3}\right)}$$

Si considerano due metodi per risolvere:

$$A_1(s-s_1)+A_2(s-s_2)=20+12s$$
$$\begin{cases} A_1+A_2=12 \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = -20 \end{cases}$$
$$f(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t}$$

Poiché i poli hanno parte reale negativa, per cui la funzione di rete è asintoticamente stabile. Alternativamente si applica il metodo dei residui per determinare A_1 e A_2:

$$\lim_{s\to s_1}(s-s_1)F(s)=\lim_{s\to s_1}\frac{20+12s}{s-s_2}=\lim_{s\to s_1}\left(A_1+A_2\frac{s-s_1}{s-s_2}\right)=A_1$$
$$A_1=\frac{20+12s_1}{s_1-s_2}=\frac{20-12}{-1+\frac{2}{3}}=-24$$
$$A_2=\frac{20+12s_2}{s_2-s_1}=\frac{20-8}{-\frac{2}{3}+1}=36$$

Per cui la funzione nel dominio del tempo risulta essere:

$$f(t)=-24e^{-t}+36^{-\frac{2}{3}t}=v_0(t)$$

Corrisponde alla tensione ai capi del condensatore, e coincide alla tensione ai capi dei morsetti del circuito, poiché la commutazione avviene in un tempo $t=0$, questa espressione è valida solo per un tempo $t\geq 0^+$:

$$v_0(t)=(36e^{-\frac{2}{3}t}-24e^{-t})u_{-1}(t) \tag{1}$$