Esercizi Svolti sul Dominio di Laplace

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

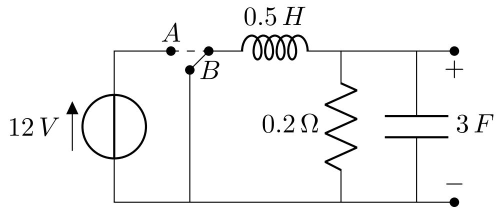
Sorgente del file LaTeX disponibile su
https://github.com/00Darxk/Elettrotecnica-ed-Elettronica

Indice

1 Esercizi Svolti l'11 Dicembre

1.1 Esercizio 2.5

Calcolare la tensione ai capi dei morsetti $v_o(t)$ del seguente circuito, dopo la commutazione da A e B:

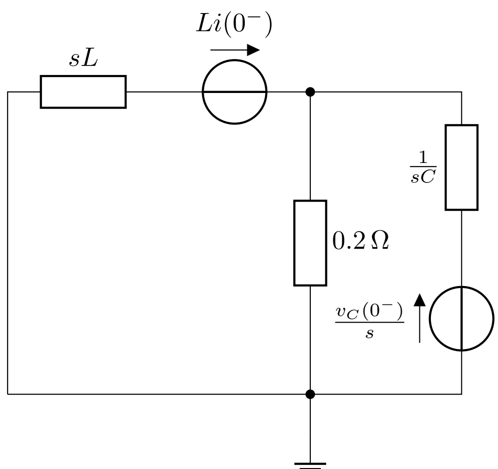


Il circuito prima della commutazione si trova a regime, per cui la tensione ai capi del condensatore corrisponde alla tensione erogata dal generatore:

$$v_C(0^-) = 12\,V$$

La memoria dell'induttore invece corrisponde a:

$$i(0^-) = \frac{12\,V}{0.2\,\Omega} = 60\,A$$



Si applica il metodo dei nodi, corrispondente al teorema di Millman in questo caso:

$$V_{out}(s) = \frac{\dfrac{Li(0^-)}{sL} + \dfrac{sCv_C(0^-)}{s}}{\dfrac{1}{sL} + \dfrac{1}{R} + sC} = \frac{\dfrac{Li(0^-) + sLCv_C(0^-)}{sL}}{\dfrac{1 + sGL + s^2LC}{sL}}$$

$$V_{out}(s) = \frac{Li(0^-) + sLCv_C(0^-)}{LC\left(s^2 + s\dfrac{1}{RC} + \dfrac{1}{LC}\right)}$$

Si considera il denominatore e si individuano i poli s_1 e s_2:

$$D(s) = LC\left(s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = LC(s - s_1)(s - s_2)$$

Si considerano i valori delle grandezze:

$$Li(0^-) = 30$$
$$LC = \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{RC} = \frac{5}{3}$$

Sostituendo i valori ottenuti nella funzione, si ottiene:

$$D(s) = \frac{3}{2}\left[s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}\right]$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}}\right) = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25-24}{9}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}$$

$$s_1 = -1$$
$$s_2 = -\frac{2}{3}$$

$$F(s) = \frac{30 + s\dfrac{3}{2}12}{\dfrac{3}{2}(s+1)\left(s + \dfrac{2}{3}\right)}$$

Si scompone la funzione di rete in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} = \frac{20 + 12s}{(s+1)\left(s + \dfrac{2}{3}\right)}$$

Si considerano due metodi per risolvere:

$$A_1(s-s_1)+A_2(s-s_2)=20+12s$$
$$\begin{cases} A_1+A_2=12 \\ A_1s_1+A_2s_2=-20 \end{cases}$$
$$f(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

Poiché i poli hanno parte reale negativa, per cui la funzione di rete è asintoticamente stabile. Alternativamente si applica il metodo dei residui per determinare A_1 e A_2:

$$\lim_{s\to s_1}(s-s_1)F(s)=\lim_{s\to s_1}\frac{20+12s}{s-s_2}=\lim_{s\to s_1}\left(A_1+A_2\frac{s-s_1}{s-s_2}\right)=A_1$$
$$A_1=\frac{20+12s_1}{s_1-s_2}=\frac{20-12}{-1+\frac{2}{3}}=-24$$
$$A_2=\frac{20+12s_2}{s_2-s_1}=\frac{20-8}{-\frac{2}{3}+1}=36$$

Per cui la funzione nel dominio del tempo risulta essere:

$$f(t)=-24e^{-t}+36^{-\frac{2}{3}t}=v_o(t)$$

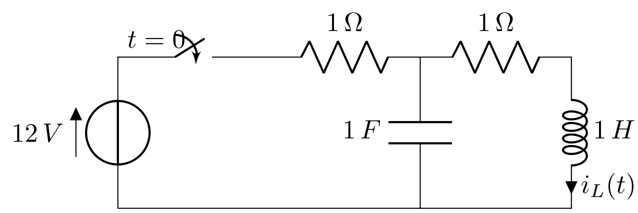
Corrisponde alla tensione ai capi del condensatore, e coincide alla tensione ai capi dei morsetti del circuito, poiché la commutazione avviene in un tempo $t=0$, questa espressione è valida solo per un tempo $t\geq 0^+$:

$$v_o(t)=(36e^{-\frac{2}{3}t}-24e^{-t})u_{-1}(t) \tag{1}$$

2 Esercizi Svolti l'8 Gennaio

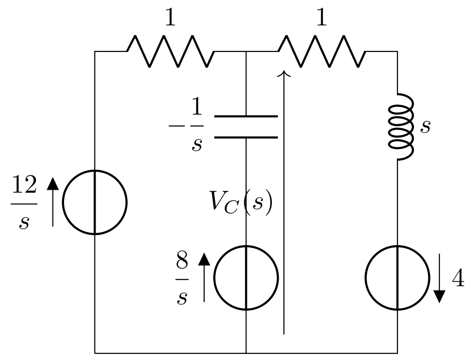
2.1 Esercizio 2.7

Determinare l'espressione della corrente $i_L(t)$, dopo la commutazione, del seguente circuito:



$$i_L(0^-)=4\,A$$
$$v_C(0^-)=8\,V$$

Si rappresenta il circuito equivalente nel dominio di Laplace:



Si risolve mediante il metodo dei nodi per avere direttamente la trasformata di $i_L(t)$:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s}+s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1}(s) \\ I_{m_2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{s}-\frac{8}{s} \\ \frac{8}{s}+4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1+s(s+1)}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1}(s) \\ I_{m_2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{s} \\ \frac{4(s+2)}{s} \end{bmatrix}$$

Si ricava la corrente della seconda maglia tramite il metodo di Cramer:

$$I_{m_2}(s) = \frac{s^2}{(s+1)+s(s+1)^2-1} \begin{vmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{4}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{4(s+2)}{s} \end{vmatrix}$$

$$I_{m_2}(s) = \frac{s^2}{(s+1)+s(s+1)^2-1} \frac{4+(8s+8+4s^2+4s)}{s^2} = \frac{4s^2+12s+12}{s(s^2+2s^1+2)} = I_L(s)$$

Si individuano ora i poli al finito di $I_L(s)$:

$$s_{p_1} = 0$$
$$s_{p_{2,3}} = --1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j$$
$$s_{p_2} = -1+j = s_{p_3}^*$$

Si calcolano i residui A e B, poiché il residuo di s_{p_3} è pari al coniugato del suo coniugato B^*, usando la formula per i residui:

$$I_L(s) = \frac{A}{s - s_{p_1}} + \frac{B}{s - s_{p_2}} + \frac{B^*}{s - s^*_{p_2}}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}} \frac{4s^2 + 12s + 12}{s^2 + 2s + 2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$B = \lim_{s \to -1+j} \cancel{\frac{s+1-j}{s+1-j}} \frac{4s^2 + 12s + 12}{s(s+1+j)} = \frac{4(-1+j)^2 + 12(-1+j) + 12}{(-1+j)(-1+j+1+j)}$$

$$\frac{1}{2j} \frac{4 - 4 - 8j - 12 + 12j + 12}{-1+j} = \frac{1}{2j} \frac{4j}{-1+j} \frac{-1-j}{-1-j} = \frac{1}{2j} \frac{4j(-1-j)}{2}$$

$$\frac{1}{2j}(-2j + 2) = \frac{1}{2j} \left(2\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \right)$$

Ricordando l'espressione in fasori di un'entrata sinusoidale:

$$I_M \sin(\omega t + \beta) = \frac{I_M}{2j} e^{j\beta} e^{\omega t} - \frac{I_M}{2j} e^{-j\beta} e^{-\omega t}$$

La trasformata di Laplace di un esponenziale si esprime come:

$$\mathcal{L}\{Ae^{\sigma t}\} = \frac{A}{s - \sigma}$$

Per cui la trasformata di Laplace di una sinusoide smorzata si ottiene come:

$$\mathcal{L}\{e^{j\sigma t} I_M \sin(\omega t + \beta)\} = \mathcal{L}\left\{ e^{j\sigma t} \left[\frac{I_M}{2j} e^{j\beta} e^{j\omega t} - \frac{I_M}{2j} e^{-j\beta} e^{-j\omega t} \right] \right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{I_M}{2j} e^{j\beta} e^{(j\omega + \sigma)t} - \frac{I_M}{2j} e^{-j\beta} e^{-(j\omega + \sigma)t} \right\} = \frac{I_M}{2j} e^{\alpha t} \frac{1}{s - (j\omega + \sigma)} - \frac{I^*_M}{2j} e^{-\alpha t} \frac{1}{s - (-j\omega + \sigma)}$$

I residui ottenuti da $I_L(s)$ corrispondono quindi ad una funzione sinusoidale nel domino del tempo:

$$I_L(s) = \frac{6}{s} + \frac{2\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j} \frac{1}{s - (-1+j)} - \frac{2\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} \frac{1}{s - (-1-j)}$$

$$i_L(t) = 6 + 2\sqrt{2}^{-t} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$$

Poiché il circuito si chiude per $t = 0$, si moltiplica l'espressione ottenuta per il segnale gradino:

$$i_L(t) = \left[6 + 2\sqrt{2}^{-t} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) \right] u(t) \tag{2}$$