

Esercizi Svolti su Circuiti a Corrente Alternata

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su

<https://github.com/00Darxk/Elettrotecnica-ed-Elettronica>

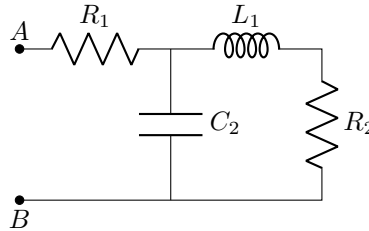
Indice

1	Esercizi Svolti il 24 Novembre	3
1.1	Esercizio 1	3
1.2	Esercizio 2	4
2	Esercitazione Svolta il 29 Novembre	6
2.1	Esercizio 1	6
2.2	Esercizio 2	7
2.3	Esercizio 3	8
2.4	Esercizio 4	8
2.5	Esercizio 5	9

1 Esercizi Svolti il 24 Novembre

1.1 Esercizio 1

Calcolare i valori di resistenza e capacità equivalente, del seguente circuito in regime sinusoidale alla pulsazione di $\omega = 2 \text{ rad/s}$:



$$C_2 = 0.5 \text{ F}$$

$$L_1 = 1 \text{ H}$$

$$R_1 = R_2 = 1 \Omega$$

Si può risolvere applicando trasformazioni in serie ed in parallelo dell'impedenza:

$$z_1 = j\omega L_1 + R_2 = 2j + 1$$

$$z_2 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j$$

$$z_3 = R_1 = 1$$

Si considera il parallelo tra z_1 e z_2 :

$$z_{p12} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{-j(1 + 2j)}{1 + 2j - j} = \frac{-j + 2}{1 + j} \cdot \frac{1 - j}{1 - j}$$
$$z_{p12} = \frac{1 - 3j}{2}$$

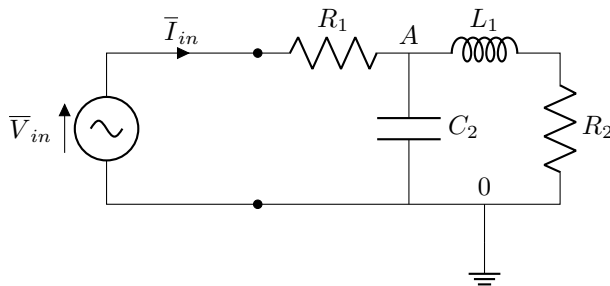
Si considera la serie tra z_{p12} e z_3 :

$$z_{AB} = z_{p12} + z_3 = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2} + j\frac{3}{2}$$

$$R_{eq} = \frac{3}{2} \Omega \tag{1}$$

$$C_{eq} = \frac{2}{3} \Omega \cdot \omega = \frac{1}{3} \text{ F} \tag{2}$$

Alternativamente per trovare l'impedenza equivalente della rappresentazione Thevenin si considera un generatore che erga una tensione \bar{V}_{in} , e si risolve mediante il metodo dei nodi o delle maglie:



La matrice delle ammettenze modali diventa solamente l'autoammettenza del nodo A :

$$(y_1 + y_2 + y_3)\bar{V}_A = \bar{V}_{in}y_3$$

$$\bar{I}_{in} = \frac{\bar{V}_{in} - \bar{V}_A}{z_3}$$

$$z_{in} = \frac{\bar{V}_{in}}{\bar{I}_{in}}$$

Si calcola ora numericamente:

$$\bar{V}_{in} = 1 \text{ V}$$

$$\bar{V}_A = \frac{y_3}{y_1 + y_2 + y_3} \cdot 1 \text{ V}$$

$$\bar{V}_A = \frac{1}{\frac{1}{1+2j} - \frac{1}{j} + 1} = \frac{1}{\frac{j-1-2j-j(1+2j)}{j(1+2j)}} = \frac{j(1+2j)}{j-1-2j+j-2}$$

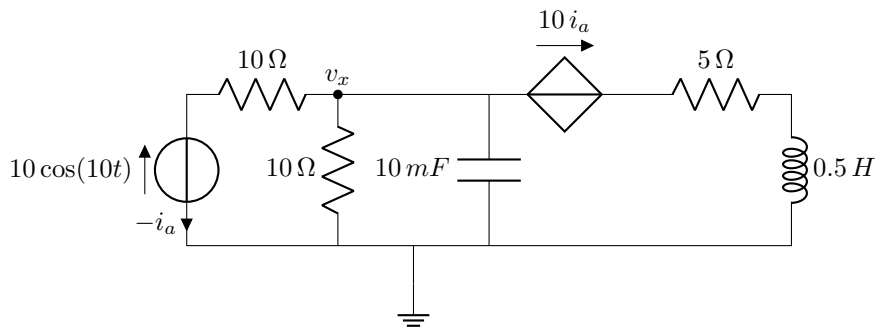
$$\bar{V}_A = \frac{j-2}{-3}$$

$$\bar{I}_{in} = 1 + \frac{j-2}{3} = \frac{3+j-2}{3} = \frac{1+j}{3}$$

$$z_{in} = \frac{1}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} \cdot 3 = \frac{3}{2} + j\frac{3}{2}$$

1.2 Esercizio 2

Calcolare l'espressione a regime della tensione di nodo v_x :



Si risolve mediante il metodo dei nodi. Si considerano per ogni lato le loro impedenze:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = 10 \Omega \\ z_3 &= -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{10 \cdot 10 \times 10^{-3}} = -10j \Omega \\ z_4 &= 5 \Omega + \omega L = 5 \Omega + 5j \Omega \end{aligned}$$

Poiché oltre al nodo di salto è presente un solo nodo, per il metodo dei nodi si ottiene un'unica equazione:

$$(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\bar{V}_x = \bar{V}_{in}y_1 - 10\bar{I}_ay_4$$

Si esprime il vincolo del pilota:

$$\bar{I}_a = (\bar{V}_{in} - \bar{V}_x)y_1$$

Per cui l'equazione dei nodi diventa:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\bar{V}_x &= \bar{V}_{in}y_1 - 10(\bar{V}_{in} - \bar{V}_x)y_1y_4 \\ (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 10y_1y_4)\bar{V}_x &= \bar{V}_{in}(y_1 - 10y_1y_4) \\ \bar{V}_x &= \frac{\bar{V}_{in}(y_1 - 10y_1y_4)}{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 10y_1y_4)} \end{aligned}$$

Si calcolano le ammettenze:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 = \frac{1}{10} \Omega^{-1} \\ y_3 &= \frac{j}{10} \Omega^{-1} \\ y_4 &= \frac{1}{5 + 5j} \Omega^{-1} = \frac{1}{10} \Omega^{-1} - \frac{j}{10} \Omega^{-1} \end{aligned}$$

Da cui si ottiene un fasore di nodo:

$$\begin{aligned} \bar{V}_x &= 2 + 4i \\ |\bar{V}_x| &= \frac{10}{\sqrt{5}} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{4}{2}\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 63.4^\circ \end{aligned}$$

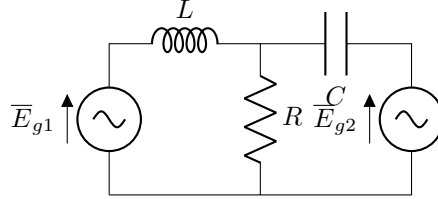
Per cui l'espressione della tensione di nodo corrisponde a:

$$v_x = |\bar{V}_x| \cos(\omega t + \varphi) = \frac{10}{\sqrt{5}} \cos(10t + 63.4^\circ) \quad (3)$$

2 Esercitazione Svolta il 29 Novembre

2.1 Esercizio 1

Determinare la tensione a regime dell'induttore v_L :



$$\begin{aligned}E_{g1} &= 20 \cos(1000t) \text{ V} \\E_{g2} &= 30 \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V} \\R &= 10 \Omega \\L &= 16 \text{ mH} \\C &= 200 \mu\text{F}\end{aligned}$$

Si determina la pulsazione e ed i fasori dei generatori:

$$\begin{aligned}\omega &= 10^3 \text{ rad/s} \\ \overline{E}_{g1} &= 20 \text{ V} \\ \overline{E}_{g2} &= 30e^{-j\pi/2} = -30j \text{ V}\end{aligned}$$

Si determinano le impedenze del circuito:

$$\begin{aligned}z_1 &= j\omega L = 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-3} j \Omega = 15e^{j\pi/2} \Omega \\ z_2 &= R = 10 \Omega \\ z_3 &= -\frac{j}{\omega C} = -j \frac{1}{10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} \Omega = 5e^{-j\pi/2} \Omega\end{aligned}$$

Si risolve mediante il metodo dei nodi, ottenendo una singola equazione, questo caso coincide con il teorema di Millman:

$$\begin{aligned}\overline{V}_A &= \frac{y_1 \overline{E}_{g1} + y_3 \overline{E}_{g2}}{y_1 + y_2 + y_3} = \frac{\frac{20}{15j} + \frac{-30j}{-5j}}{\frac{1}{15j} + \frac{1}{10} + \frac{1}{-5j}} \\ \frac{\frac{1}{5j} \left[\frac{20}{3} + 30j \right]}{\frac{10-30+15j}{150j}} &= \frac{30 \left[\frac{20}{3} + 30j \right]}{-20 + 15j} = \frac{30 \left[\frac{20}{3} + 30j \right]}{20^2 + 15^2} (-20 - 15j) \\ &= -\frac{30}{625} \left(\frac{400}{3} + 600j + 100j - 450 \right) = 15.2 - 33.6j \text{ V}\end{aligned}$$

Si determina ora la tensione ai capi dell'induttore:

$$\overline{V}_L = \overline{E}_{g1} - \overline{V}_A = 20 - 15.2 + 33.6j \text{ V} = 4.8 + 33.6j \text{ V}$$

Si determina ora la fase ed il modulo:

$$|V_L| = \sqrt{4.8^2 + 33.6^2} = 33.941$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{33.6}{4.8}\right) = 81.2^\circ$$

Per cui l'espressione a regime della tensione corrisponde a:

$$v_L(t) = 33.941 \cos(1000t + 81.2^\circ) V \quad (4)$$

Si risolve ora mediante il metodo delle maglie:

$$\begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_2 \\ -z_2 & z_2 + z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{m_1} \\ \bar{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{g1} \\ -\bar{E}_{g2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{m_1} \\ \bar{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 15j & -10 \\ -10 & 10 - 5j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ -30j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 - 3.2j \\ 1.2 - 5.6j \end{bmatrix}$$

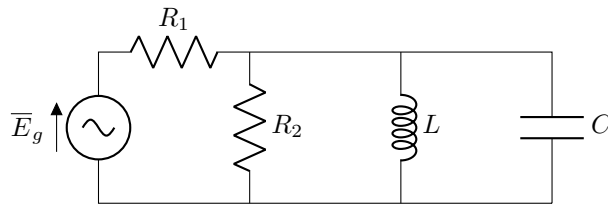
Si calcola ora il fasore della tensione dell'induttore:

$$\bar{V}_L = \bar{E}_{g1} - (\bar{I}_{m_1} - \bar{I}_{m_2})z_1 = 4.8 + 33.6j V$$

Corrisponde allo stesso fasore calcolato precedentemente mediante il metodo dei nodi.

2.2 Esercizio 2

Determinare la potenza attiva erogata dal generatore:



$$E_g = 5 \cos(2t) V$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$R_2 = 1 \Omega$$

$$C = 0.5, F$$

$$L = 2H$$

Si calcolano le impedenze ed il fasore della tensione:

$$z_1 = 2 \Omega$$

$$z_2 = 1 \Omega$$

$$z_3 = 4j \Omega$$

$$z_4 = -j \Omega$$

$$\bar{E}_g = 5 V$$

Si considera il parallelo tra z_2 , z_3 e z_4 :

$$y_p = 1 + \frac{1}{4j} + \frac{1}{-j} = \frac{4j + 1 - 4}{4j} = \frac{-3 + 4j}{4j}$$

$$z_p = \frac{4j}{-3 + 4j} = \frac{4j(-3 - 4j)}{25} = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}j \Omega$$

Si applica il metodo delle maglie:

$$(z_1 + z_p)\bar{I}_{m_1} = \bar{E}_g$$

$$\bar{I}_{m_1} = \bar{I}_g = \frac{\bar{E}_g}{z_1 + z_p} = \frac{5}{\frac{16}{25} - \frac{12}{25}j + 2}$$

$$\bar{I}_g = \frac{125}{66 - 12j} = \frac{125}{4500}(66 + 12j) A$$

La potenza complessa erogata dal generatore si ottiene come:

$$P_C = \frac{1}{2}\bar{E}_g\bar{I}_g^* = \frac{1}{2}5\frac{125}{4500}(66 - 12j) = 4.5833 - 0.8333j$$

2.3 Esercizio 3

Un'impedenza Z alimentata da un generatore sinusoidale da $120 V$ efficaci, assorbe la potenza apparente di $12 kVA$, con un fattore di potenza di 0.856 induttivo. Determinare modulo e fase di Z .

Dato il fattore di potenza si può determinare la fase della potenza complessa:

$$\varphi \arccos(0.856) = 31.1296^\circ$$

Si può esprimere la corrente che attraverso l'impedenza come il rapporto tra la potenza apparente e la tensione erogata:

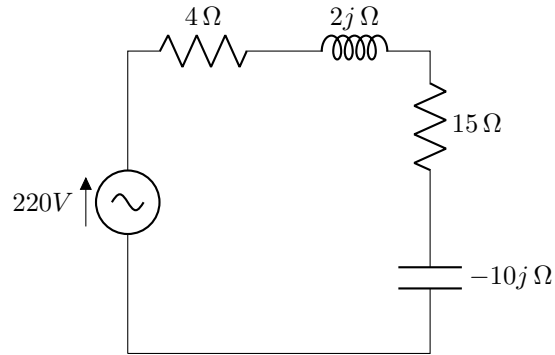
$$\bar{I} = \frac{P_a}{\bar{E}_g} = \frac{12 \cdot 10^3}{120} = 100 A$$

Si ricorda che l'impedenza di un dato bipolo, tramite la legge di Ohm complessa, si può ricavare dal fasore della corrente e della tensione:

$$|Z| = \frac{\bar{E}_g}{\bar{I}_g} \frac{120 V}{100 A} = 1.2 \Omega$$

2.4 Esercizio 4

Determinare la potenza complessiva assorbita dall'impedenza z_1 composta dal resistore e dall'induttore in serie:



Si calcola il fasore della corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_g}{z_1 + z_2} = \frac{220}{4 + 15 + (2 - 10)j} = \frac{220}{425}(19 + 8j)$$

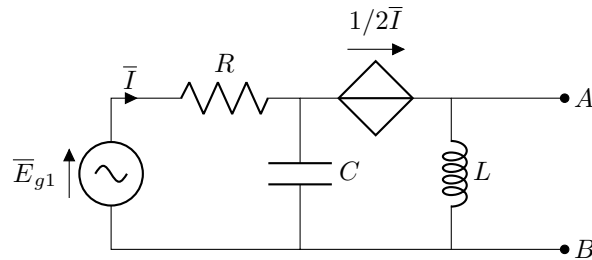
La potenza assorbita dall'impedenza z_1 si calcola come:

$$P_{C1} = z_1 |\bar{I}|^2 = (4 + 2j) \left| \frac{220}{425}(19 + 8j) \right|^2 = 455.4 W + 227.7j VA$$

Per cui questo circuito risulta ohmico-capacitivo, e per metterlo in risonanza bisognerebbe inserire un'induttore in parallelo.

2.5 Esercizio 5

Determinare il circuito equivalente di Thevenin tra i terminali A e B :



$$\begin{aligned}\bar{E}_g &= 5 V \\ z_R &= 1 \Omega \\ z_C &= -3j \Omega \\ z_L &= 2j \Omega\end{aligned}$$

Si risolve mediante il metodo delle maglie:

$$\begin{bmatrix} z_R + z_C & -z_C \\ -z_C & z_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{m_1} \\ \bar{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{g1} \\ \bar{E}_{g2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 3j & 3j \\ 3j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{m_1} \\ \bar{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \bar{I} \end{bmatrix}$$

Il vincolo del pilota è banale, poiché la corrente di riferimento corrisponde alla corrente della maglia 1:

$$\bar{I} = \bar{I}_{m_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 3j & +3j \\ -\frac{1}{2} + 3j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{m_1} \\ \bar{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{m_1} \\ \bar{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3j & +3j \\ -\frac{1}{2} + 3j & -j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.069 - 0.8276j \\ 0.2069 - 2.5172j \end{bmatrix}$$

La tensione di Thevenin equivalente si ottiene come:

$$\bar{E}_{th} = z_L \bar{I}_{m_2} = 2j(0.2069 - 2.5172j) = 5.0345 + 0.4138j \text{ V}$$

Si rappresenta in coordinate polari:

$$|\bar{E}_{th}| = \sqrt{5.0345^2 + 0.4138^2} = 5.0515$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{0.4138}{5.0345}\right) = 4.6897^\circ$$

$$\bar{E}_g = 5.0515 e^{j4.6897^\circ} \quad (5)$$

Applicando il metodo dei nodi si ottiene una risposta analoga:

$$\bar{V}_A = \frac{\bar{E}_g z_R - \frac{1}{2} \bar{I} y_L}{y_R + y_C + y_L}$$

Dove l'equazione del pilota in questo caso si ottiene come:

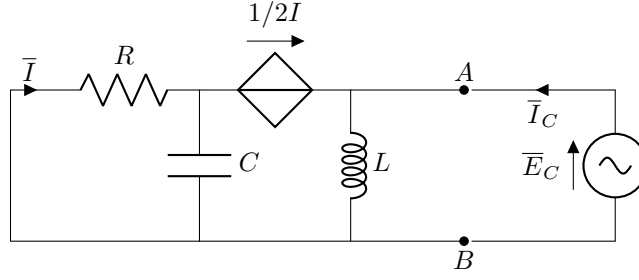
$$\bar{I} = (\bar{E}_g - \bar{V}_A) y_R$$

Per cui si ottiene un'equazione per la tensione:

$$\bar{V}_A = \frac{\bar{E}_g z_R}{y_R + y_C + y_L} - \frac{1}{2} y_L y_R \frac{\bar{E}_g}{y_R + y_C + y_L} + \frac{1}{2} y_L y_R \frac{\bar{V}_A}{y_R + y_C + y_L}$$

$$\bar{V}_A \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y_R y_L}{y_R + y_C + y_L} \right) = \frac{\bar{E}_g z_R - \frac{1}{2} y_L y_R \bar{E}_g}{y_R + y_C + y_L}$$

Per calcolare l'impedenza di Thevenin si spengono solo i generatori passivi:



Si inserisce dall'esterno un generatore indipendente in base al metodo di risoluzione, per cui in questo caso si inserisce un generatore di tensione esterno per applicare il metodo delle maglie, che eroga $\overline{E}_C = 1\text{ V}$. L'induttore non influisce sulla tensione in ingresso, per cui si può calcolare prima un sistema di due equazioni, per trovare due correnti di maglia \overline{I}_{m_1} e \overline{I}_{m_2} :

$$\begin{bmatrix} z_R + z_C & -z_C \\ -z_C & z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_{m_1} \\ \overline{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\overline{I} - \overline{E}_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_R + z_C & -z_C \\ -\frac{1}{2} - z_C & z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_{m_1} \\ \overline{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{E}_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{I}_{m_1} \\ \overline{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3j & +3j \\ -\frac{1}{2} + 3j & -3j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 - \frac{2}{3}j \end{bmatrix}$$

La corrente che si vuole misurare corrisponde alla corrente della seconda maglia sommata alla corrente attraverso l'induttore $\overline{I}_C = \overline{I}_{m_1} + \overline{I}_L = \overline{I}_{m_1} + \frac{\overline{E}_C}{z_L}$:

$$\overline{I}_C = 2 + \frac{2}{3}j - \frac{1}{2}j = 2 - \frac{1}{6}j$$

L'impedenza equivalente si ottiene dal rapporto tra la tensione inserita nel circuito e la corrente calcolata:

$$z_{eq} = \frac{\overline{E}_C}{\overline{I}_C} = \frac{1}{2 - \frac{1}{6}j} = \frac{1}{4 + \frac{1}{36}} \left(2 - \frac{1}{6}j \right) = \frac{36}{145} \left(2 + \frac{1}{6}j \right)$$

Rappresentandola in modulo e fase:

$$|z_{eq}| = \frac{36}{145} \sqrt{4 + \frac{1}{6}} = 0.4983$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{6}}{2}\right) = 4.7636^\circ$$

Per cui l'impedenza equivalente della rappresentazione esterna di Thevenin risulta essere:

$$z_{eq} = 0.4983e^{4.7636^\circ} \quad (6)$$