Appunti di Elettrotecnica ed Elettronica

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su
https://github.com/00Darxk/Elettrotecnica-ed-Elettronica

Indice

1 Introduzione: Elementi di Fisica

1.1 Forza Elettrica

Le prime analisi documentate sugli effetti elettrici risalgono agli antichi greci, da cui deriva il nome "electron"; $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$ in greco. Letteralmente significa ambra, poiché quando viene sfregata contro della lana, è capace di attrarre materiali, ovvero è in grado di generare un campo elettrico.

La forza elettrica venne analizzata da Coulomb in maniera simile all'analisi di Newton sulla gravità, poiché le due forze presentano dei comportamenti simili. La forza di gravità è una forza attrattiva tra due masse nello spazio, per cui sono presenti due forze applicate ad entrambe le masse di modulo e direzione uguale, ma verso opposto:

$$\vec{F}_{1\to 2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

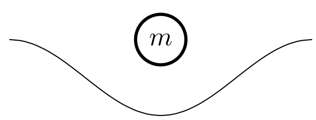
Analogamente la forza elettrica è presente solo nell'interazione tra due elementi dotati di una carica che può presentarsi in due classi diverse, per convezione positiva o negativa, vengono misurate in Coulomb C nel SI. Due cariche appartenenti alla stessa classe si oppongono, mentre due cariche appartenenti a due classi diverse si attraggono:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -k_0\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} \tag{1.1.1}$$

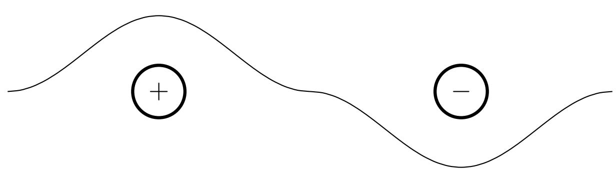
$$F = k_0\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \tag{1.1.2}$$

Viene chiamata k_0 costante elettrica nel vuoto.

La forza di gravità è una forza solamente attrattiva e presenta una sola classe di masse a differenza della forza elettrica. Poiché la forza di gravità si presenta solamente dall'interazione tra due masse, una massa singola nello spazio non è soggetta a forze di gravità. Questa massa è pronta ad interagire con un eventuale seconda massa per comunicare tra di loro la massa deforma in qualche modo lo spazio. Convenzionalmente si considera una deformazione convessa nella zona di spazio dove si trova la massa:



Poiché le cariche possono appartenere a due classi diverse per convenzione una carica positiva crea una deformazione concava, mentre una negativa una deformarzione convessa:



Per cui le cariche positive tendono a "scendere", mentre le cariche negative tendono a "salire". La deformazione spaziale è dovuta ad un campo gravitazionale o elettrico, dalle interazione del campo si genera una forza gravitazionale o elettrica.

1.2 Campo Elettrico

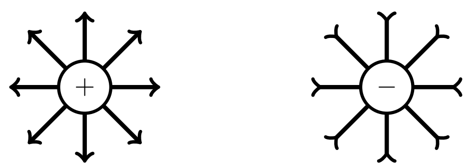
Un campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ è un campo vettoriale, ovvero è un insieme di vettori per ogni punto dello spazio dipendenti dalla loro posizione. Per misurare il campo generato da una carica Q positiva per convenzione, si considera un'altra carica positiva $q << Q$ usata per misurare la forza elettrica $\vec{F}$ generata dall'interazione con il campo $\vec{E}$. Si considera invece della costante elettrica nel vuoto k_0, la costante di permettività dielettrica nel vuoto ε:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},\ \varepsilon_0 \approx 8.86 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{m^2}\frac{1}{N}\right] \tag{1.2.1}$$

Per misurare il campo elettrico in punto dello spazio di posizione $\vec{r}$ si considera la forza per unità di carica in quel punto:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \left[\frac{N}{C}\right] \tag{1.2.2}$$

Il campo elettrico generato da una singola carica puntiforme ha una direzione radiale e verso entrante se è una carica negativa ed uscente se si tratta di una carica positiva. Per indicare la direzione ed il verso di un campo vettoriale vengono usate linee di forza, la cui tangente in un punto rappresenta la direzione ed il verso del campo nello stesso punto.

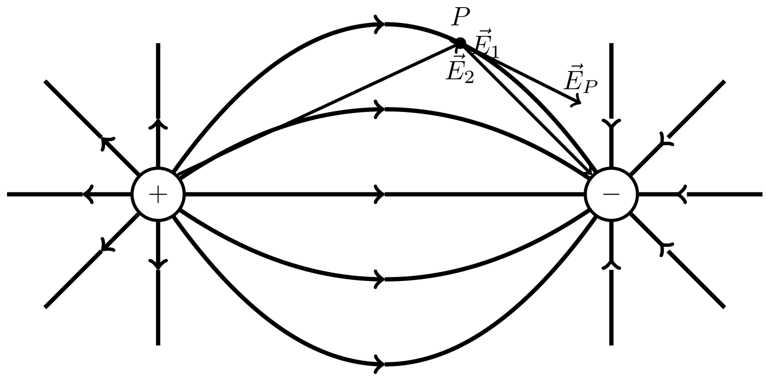


In generale una forza elettrica è effetto dall'interazione di una carica q con un campo elettrico $\vec{E}$, indipendentemente da ciò che genera il campo elettrico. Nel caso di una carica stazionaria o in moto rettilineo uniforme, si considera un campo elettro-stazionario, per cui la forza generata si esprime come il prodotto per la carica ed il campo elettrico:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{1.2.3}$$

L'unità di misura fondamentale usata per analizzare fenomeni elettrici nel SI è l'Ampere A, intensità di corrente, che ha sostituito il Coulomb C, unità di carica, entrambe sono cognomi di scienziati che hanno studiato l'elettricità, a differenza delle restanti grandezze fondamentali. Ciò spiega come non fosse chiaramanete idefntificabile la causa dei fenomeni elettrici in passato.

In caso sia presente più di una carica stazionaria nel vuoto, per determinare il campo elettrico in un dato punto si considera il principio di sovrapposizione degli effetti (P.S.E.), applicabile solo in situazioni di tipo lineare, come nel vuoto essendo un elemento lineare. Per il principio della sovrapposizione degli effetti, il campo in un punto è dato dalla somma vettoriale di tutti i campi in quel punto, per cui i campi agiscono indipendentemente l'uno dall'altro. In una configurazione a due cariche, una positiva ed una negativa, il campo totale agente su una carica positiva posta in una posizione P risulta essere: $\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.



Il campo elettrico stazionario, come il campo gravitazionale, è conservativo, per cui il lavoro svolto equivale all'opposto della differenza di energia potenziale. Per convenzione lo stato di riferimento dell'energia potenziale elettrica si trova ad una distanza infinita dalla carica, per cui l'energia corrisponde al lavoro necessario per spostare una carica q da una distanza infinita ad una distanza finita R da un campo elettrico $\vec{E}$. Si considera una campo elettrico generato da una carica puntiforme Q:

$$\Delta U(r) = -L = -\int_{+\infty}^{R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{+\infty}^{R} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{+\infty}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \cancelto{1}{\hat{r} \cdot \hat{r}} dr$$

$$\cancelto{0}{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{+\infty}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{R}$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{R} = -L(r) \tag{1.2.4}$$

Viene definito il potenziale elettrico V il lavoro per unità di carica, viene misurato nel SI in Volt V:

$$\Delta V = -\frac{L}{q} = -\int \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{1.2.5}$$

Corrisponde ad un integrale di linea del campo elettrico $\vec{E}$. Per un campo elettrico stazionario generato da una carica puntiforme Q corrisponde a:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \;\; [V] = \left[\frac{mN}{C}\right] \tag{1.2.6}$$

In forma differenziale, il potenziale elettrico corrisponde a:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

Il differenziale dV è un differenziale totale di un campo scalare $V(x, y, z)$, per cui corrisponde alla somma delle variazioni su ogni coordinata del differenziale della stessa:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Per il principio di indentità dei polinomi risulta:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x,\ \frac{\partial V}{\partial y} = -E_y,\ \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z$$

Si considera l'operatore differenziale vettoriale nabla:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Per cui è possibile esprimere la relazione tra il potenziale elettrico ed il campo elettrico considerando l'operazione di gradiente su un campo scalare $\vec{\nabla}V$:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{1.2.7}$$

La capacità di un campo di ammettere un potenziale è una condizione sufficiente della conservatività di un campo vettoriale. Un'altra condizione sufficiente dipende dal risultato della circuitazione del campo, ovvero l'integrale di linea su un qualsiasi percorso chiuso λ del campo $\vec{E}$. Se la circuitazione del campo è nulla, allora il campo in questione è conservativo:

$$\Gamma_\lambda(\vec{E}) = \oint_\lambda \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = 0 \tag{1.2.8}$$

Se il campo non è conservativo, implica che il campo è variabile per cui la circuitazione risulta diversa da zero.

Oltre all'operazione di gradiente su un campo scalare, se si considera un campo vettoriale $\vec{a}(x, y, z)$, si possono definire altre due operazioni: la divergenza ed il rotore. La divergenze è definita come il prodotto scalare tra l'operatore nabla ed il campo $\vec{a}$:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z})$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}\cancelto{1}{\hat{x}\cdot\hat{x}} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\cancelto{0}{\hat{y}\cdot\hat{x}} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\cancelto{0}{\hat{z}\cdot\hat{x}} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\cancelto{0}{\hat{x}\cdot\hat{y}} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\cancelto{1}{\hat{y}\cdot\hat{y}} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\cancelto{0}{\hat{z}\cdot\hat{y}} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\cancelto{0}{\hat{x}\cdot\hat{z}} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\cancelto{0}{\hat{y}\cdot\hat{z}} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\cancelto{1}{\hat{z}\cdot\hat{z}}$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.2.9}$$

Il rotore è definito come il prodotto vettoriale tra l'operatore nabla ed il campo $\vec{a}$:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y & a_z \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_z \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \hat{z}$$

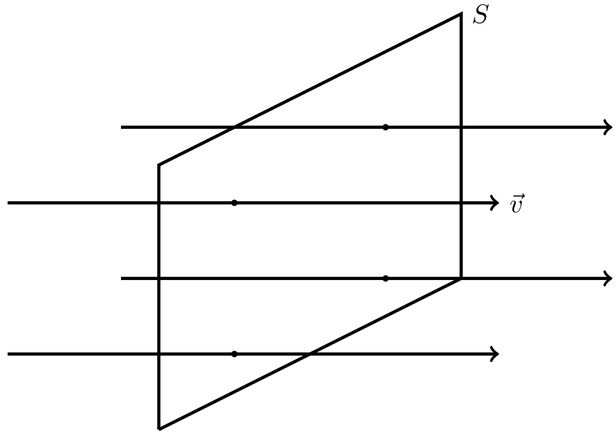
$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\hat{z} \tag{1.2.10}$$

1.2.1 Teorema di Gauss

Il flusso totale, entrane o uscente, del campo elettrico $\vec{E}$ generato da cariche interne ad una qualsiasi superficie chiusa S, attraverso la stessa superficie equivale al rapporto tra la carica totale e la costante di permettività dielettrica nel vuoto ε_0:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.2.11}$$

Analogamente alla portata di un liquido attraverso una superficie, il flusso Φ di un campo vettoriale $\vec{v}$ determina l'intensità del campo attraverso una data superficie S.



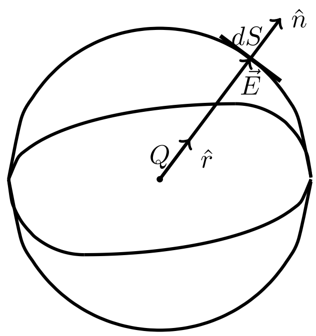
Il flusso è massimo quando il campo e la superficie sono tra di loro perpendicolari: $\Phi_S(\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot S$. Per determinare il flusso attraverso una superfecie S inclinata rispetto al campo $\vec{v}$ bisogna considerare la componente del campo che passa perpendicolarmente attraverso la superficie, per cui si definisce il versore giuntura di una superficie $\hat{n}_S$ come il vettore di modulo unitario, direzione normale alla superficie nel punto e di verso uscente se la superficie è concava, ed entrante se è convessa: $\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n}S$. In caso la superficie sia ondulata, la giacitura cambierebbe in base alla sua posizione, per cui per determinarne il flusso si considera un'approssimazione tramite la somma di flussi dello stesso campo attraverso suddivisioni della superficie, ognuna con una giacitura diversa: $\Phi_S(\vec{v}) \approx \sum_{i=1}^{N} \vec{v} \cdot \hat{n}_i S_i$. Al diminuire della superficie S_i, la precisione aumenta, per cui per una superficie infinitesima si può determinare esattamente l'infinitesimo di flusso attraverso l'intera superficie: $\Phi_{dS}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n}dS = d\Phi_S(\vec{v})$. In caso le suddivisioni siano finite, il flusso viene calcolato tramite una sommatoria, altrimenti per suddivisioni infinite si considera un integrale chiuso sulla superficie totale S:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n}dS \tag{1.2.12}$$

Nel caso del teorema di Gauss, si considera una situazione semplificata, dove è presenta una singola carica Q nel centro di una superficie sferica S di raggio r. Considerando una sezione infinitesima della superficie dS, il versore giacitura $\hat{n}$ risulta essere sempre parallelo al campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla carica, poiché si trova nel centro della sfera. Per cui il campo elettrico passante per ogni sezione infinitesima è costante, considerando l'integrale del flusso:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S E\cancelto{1}{\hat{r} \cdot \hat{n}}dS = \oint_S \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2$$

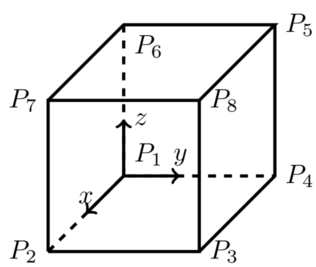
$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.2.13}$$



Ciò implica che il campo elettrico ammette l'esistenza di sorgenti singole. Infatti se una carica si trova all'interno di una superficie chiusa, tutte le linee di campo generate escono attraverso la superficie, mentre se la carica si trovasse all'esterno della superficie, tutte le linee di campo entranti sarebbero necessariamente anche uscenti, ed il flusso totale sarebbe dato dalla somma del flusso entrante e del flusso uscente risultando nullo.

1.2.2 Teorema della Divergenza e I Legge di Maxwell

Il flusso attraverso una superficie chiusa è dato dalla somma del flusso per ogni faccia della superficie. Considerando un cubo infinitesimo con faccie parallele ai piani cartesiani ed un campo elettrico $\vec{E}$ passante per quel cubo, si calcola il flusso totale sommando il flusso sulle sue sei faccie.



$$\begin{array}{ll}
P_1(x, y, z) & P_5(x, y + dy, z + dz) \\
P_2(x + dx, y, z) & P_6(x, y, z + dz) \\
P_3(x + dx, y + dy, z) & P_7(x + dx, y, z + dz) \\
P_4(x, y + dy, z) & P_8(x + dx, y + dy, z + dz)
\end{array}$$

Il flusso attraverso la faccia $P_1P_2P_3P_4$ risulta essere:

$$\Phi_1(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = (E_x \cancelto{0}{\hat{x} \cdot \hat{n}} + E_y \cancelto{0}{\hat{y} \cdot \hat{n}} + E_z \cancelto{-1}{\hat{z} \cdot \hat{n}}) dS = -E_z dx dy$$

Poiché il campo elettrico è antiparallelo alla giuntura della superficie.

Consdierando la faccia $P_5P_6P_7P_8$, il campo elettrico varia prima di attraversare la faccia. La variazione dipende dalla variazione lungo l'asse z, per cui il cambiamento del campo elettrico dipende dalla sua derivata parziale $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z}$. Il cambiamento effettivo è dato dalla derivata parziale moltiplicata per lo spostamento effettuato sull'asse z, trattandosi di un cubo infinitesimo lo spostamento è infinitesimo dz. Per cui il campo che attraversa la faccia risulta essere:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz$$

Per cui il flusso risulta essere:

$$\Phi_2 = \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dxdy$$

Analogamente alla prima faccia, il flusso attraverso le due faccie $P_1P_2P_6P_7$ e $P_1P_4P_5P_6$ risultano essere:

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= -E_y dxdz \\ \Phi_5 &= -E_x dydz \end{aligned}$$

Analogamente alla seconda faccia, il campo elettrico varia prima di attraversare le faccie $P_3P_4P_5P_8$ e $P_2P_3P_7P_8$, ed il loro flusso risulta essere:

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dxdz \\ \Phi_6 &= \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dydz \end{aligned}$$

Il flusso totale attraverso il cubo infinitesimo risulta quindi essere:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i$$

$$\begin{array}{ccc} -E_z dxdy & -E_y dxdz & -E_x dydz \\ + \left(E_z + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dxdy & + \left(E_y + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dxdz & + \left(E_x + \dfrac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dydz \end{array}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dxdydz$$

Si cosidera il volume del cubo infinitesimo $d\tau = dxdydz$, mentre la superficie infinitesime che racchiude il volume dS. Il flusso attraverso il cubo equivale alla divergenza del campo elettrico:

$$\Phi_{dS}(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} d\tau = d\Phi_S(\vec{E})$$

Per cui è possibile determinare il flusso di un campo elettrico (stazionario) $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S, consideranro l'integrale sul volume racchiuso dalla superficie τ della divergenza del campo. Ciò viene chiamato teorema della divergenza.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_\tau \nabla \cdot \vec{E} d\tau \tag{1.2.14}$$

Per il teroema di Gauss il flusso di un campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è dato dal rapporto delle carica totale Q interna alla superficie e la permettività dielettrica nel vuoto ε_0. Dato un mezzo con densità uniforme di carica ρ_Q, la carica totale può essere espressa come l'integrale sull'intero volume della densità:

$$Q = \int_\tau \rho_Q d\tau$$

Per il teorema di Gauss e per il teorema della divergenza:

$$\int_\tau \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \int_\tau \frac{\rho_Q}{\varepsilon_0} d\tau$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}$$

Viene definito vettore dello spostamento elettrico nel vuoto $\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E}$, per cui si può esprimere l'equazione precedente come:

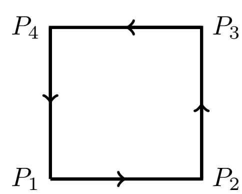
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_Q \left[\frac{C}{m^3}\right] \tag{1.2.15}$$

Questa è la prima legge di Maxwell in forma locale.

1.2.3 Teorma del Rotore

In un campo elettrico conservativo, la circuitazione lungo un qualsiasi percorso chiuso è nulla. Poiché il campo elettrico equivale all'inverso del gradiente del potenziale ed il potenziale è lavoro per unità di carica di un campo conservativo, su un percorso chiuso il lavoro è nullo, quindi anche la circuitazione. Esistono invece campi elettrici che non producono lavoro, ma forza elettro-motrice, per cui la circuitazione su un percorso chiuso è diversa da zero.

Considerando una superficie quadrata infinitesima attraversata da un campo elettrico $\vec{E}$, si vuole calcolare la sua circuitazione, sommando la circuitazione sui suoi quattro lati infinitesimi, come il prodotto scalare tra il campo elettrico e lo spostamento $d\vec{\lambda}$. Per convenzione si considera una circuitazione positiva in senso antiorario.



$P_1(x, y, z)$
$P_2(x + dx, y, z)$
$P_3(x + dx, y + dy, z)$
$P_4(x, y + dy, z)$

Sul lato P_1P_2, il campo elettrico varia con l'aumento della coordinata x, poiché ogni componte del campo elettrico dipende dalle 3 coordinate, la variazione di una coordinate implica una variazione di tutte le componenti del campo. La circuitazione risulta quindi essere:

$$\Gamma_1 = \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = \left(E_x\hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx\hat{x} + E_y\hat{y} + \frac{\partial E_y}{\partial x}dy\hat{y} + E_z\hat{z} + \frac{\partial E_z}{\partial x}dz\hat{z} \right) \cdot d\vec{x} = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx \right) dx$$

Analogamente per il lato P_2P_3, il campo elettrico varia con l'aumento delle coordinata x e y, per cui per ogni componente del campo sarà aggiunta una variazione dipendente dall'aumento delle x e un'altra dall'aumento delle y:

$$\Gamma_2 = \left(E_y\hat{y} + \frac{\partial E_y}{\partial x}dx\hat{y} + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy\hat{y} \right) \cdot d\vec{y} = \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}dx + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy \right) dy$$

Per i lati P_3P_4 e P_4P_1 la direzione in cui vengono attraversati è opposta alla verso delle coordinate, per cui la circuitazione per questi lati è negativa:

$$\Gamma_3 = -\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy \right) dx$$
$$\Gamma_4 = -\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy \right) dy$$

La circuitazione totale risulta essere quindi:

$$\begin{gathered}
\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \\
\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx \right) dx + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}dx + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy \right) dy \\
-\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy \right) dx - \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy \right) dy \\
\Gamma = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dxdy
\end{gathered}$$

La circuitazione totale equivale alla componente del rotore del campo elettrico parallela alla normale al piano individuato dalla superficie descritta dal percorso λ. Poiché la circuitazione è uno scalare, per conservare solo questa componente si considera il prodotto scalare tra il rotore del campo elettrico ed il versore giacitura. Considerando il differenziale della superficie $dS = dxdy$, la circuitazione totale su una superficie infinetesimale è:

$$\Gamma_{d\lambda} = \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n}dS = d\Gamma_\lambda$$

Integrando quest'ultima equazione si ottiene che la circuitazione per un qualsiasi percorso chiuso λ di un campo elettrico (stazionario) $\vec{E}$ è esattamente il flusso del rotore del campo elettrico attraverso la superficie S descritta dal quel percorso λ. Questo rappresenta il teorema del rotore:

$$\oint_\lambda \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n}dS \tag{1.2.16}$$

Per il teorema della circuitazione ed il teorema del rotore, per tutti i campi conservativi, il rotore di un campo elettrico è nullo, condizione necessaria affinché un campo vettoriale sia conservativo:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \tag{1.2.17}$$

1.3 Corrente e Magnetismo

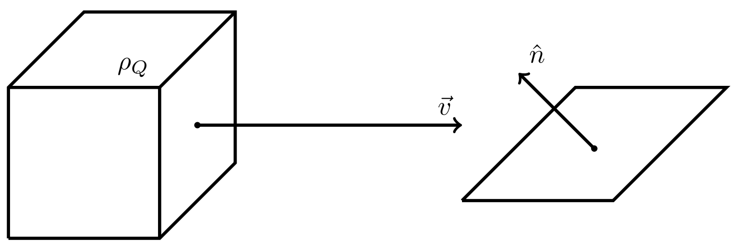
La corrente è una grandezza fisica che rappresenta un flusso di cariche, convenzionalmente positive, che si muovono dentro un mezzo. Nel SI viene misurata in Ampere A. La corrente può essere definita in duo modi:

I) Si può considerare la corrente come la somma algebrica di cariche ΔQ che passano attraverso una superficie, sezione del mezzo dove fluiscono, in un intervallo di tempo ΔQ, ovvero la velocità in cui il flusso di cariche si muove attraverso la data superficie. Questa rappresenta solo un'approssimazione della corrente effettiva, viene chiamata corrente media: $i_m = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$. Per ottenere la corrente effettiva, si considera il limite per l'intervallo di tempo di osservazione $\Delta t \to 0$, in questo modo si considera la corrente istantanea, ovvero la variazione di carica istantanea:

$$i := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \left[\frac{C}{s}\right] = [A] \tag{1.3.1}$$

II) Si può formulare la corrente considerando il concetto del mezzo continuo, visione della fisica classica secondo cui il materiale è continuo. Questa visione è paradossale poiché a livello microscopico è stato osservato che diverse grandezze non sono continue, ma per i fini prefissati non si incontra questo paradosso. Si considera un volume continuo con una certa densità di carica ρ_Q, e in moto con una certa velocità $\vec{v}$. La corrente allora corriponde alla portata attraverso una certa superficie S, ovvero corrisponde al flusso del vettore $\rho_Q\vec{v}$ attraverso la superficie S:

$$i := \int_S \rho_Q \vec{v} \cdot \hat{n} dS \tag{1.3.2}$$

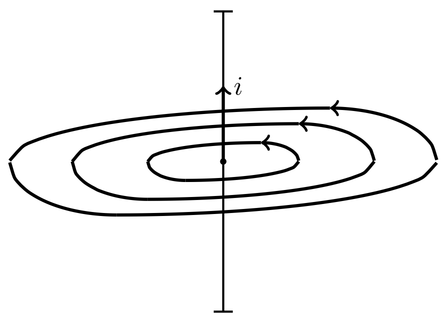


Il vettore $\rho_Q\vec{v}$ corrisponde al vettore densità di corrente $\vec{J}\left[\dfrac{C}{m^2 s}\right]$, che rappresenta la corrente in forma vettoriale.

Come una cairca è in grado di generare un campo elettrico, una corrente è in grado di generare un campo magnetico. Nei magneti permanenti la corrente generatrice di campo dipende dal moviemtno degli elettroni all'interno del materiale.

Si considera un mezzo filiforme, ovvero monodimensionale, composto di materiale conduttore, tipicamente un qualche metallo, dove gli elettroni sono liberi di muoversi all'interno. Si considera che un effetto esterno non definito abbia causato uno spostamento degli elettroni all'interno del filo, può essere dobuto all'avvicinamento di una carica negativa, spostando gli elettroni in un'altra zona del filo. Ciò crea due zone nel filo, una carica positivamente, l'altra carica negativamente, questa differenza di potenziale interna al filo si rappresenta come una corrente di spostamento di cariche i, in una certa direzione.

Ampere ha sperimentalmente dimostrato che intorno al filo si può misurare un campo di forze, formato da linee di campo concentriche con il filo come centro. Il vero di questo campo si ottiene mediante la regola della mano destra: se la corrente si muove dall'alto verso il basso, allora il campo ha verso orario, altrimenti ha verso antiorario.



Il campo generato dalla corrente è il campo magnetico $\vec{H}$. Le circonferenza generate sono il luogo dei punti dello spazio tangenti al campo $\vec{H}$ in quel punto. La circuitazione del campo $\vec{H}$ su una sua circonferenza corrisponde alla corrente concatenata i_c moltiplicata per un fattore n, poiché potrebbero essere presenti multiple correnti passanti all'intrerno di quel percorso λ:

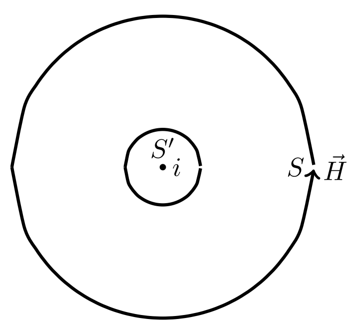
$$\oint_\lambda \vec{H} \cdot d\vec{\lambda} = (n)i_c$$

Per il teorema della circuitazione:

$$\oint_\lambda \vec{H} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS = i_c$$

La corrente passante per il filo può essere espressa come il flusso della densità di carica attraverso la sezione S' del materiale filiforme, questo flusso corrisponde allo stesso flusso per la superficie individuata dalla circonferenza λ, poiché in mezzi non metallici, ovvero conduttori, i contributi si annullano:

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS = \int_{S'} \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \tag{1.3.3}$$



Questa relazione tra rotore del campo magentico e vettore densità di carica viene chiamato teorema di Ampere, ed in forma locale si presenta come:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Considerando il vettore di induzione magnetica $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, dove μ_0 è la costante di permabilità magnetica nel vuoto:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Si esprime il teorema di Ampere in forma locale come:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{1.3.4}$$

A questo risultato ottenuto da Ampere verrà aggiunto il fattore di corrente di spostamento di Maxwell.

1.3.1 Teorema di Ampere-Maxwell e II Legge di Maxwell

Il teorema da Ampere da solo descrive una situazione paradossale, per cui l'intervento di Maxwell perfezionò l'analisi compiuta da Ampere.

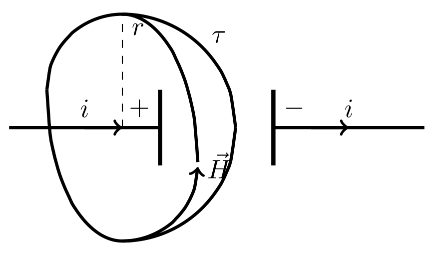
Per descrivere il paradosso contenuto nel teorema di Ampere si considera un filo dove scorre una certa corrente i. Il filo è reciso in una sezione e vengono poste due lamine metalliche ad ambo le parti della sezione tagliata. Maxwell osservò sperimentalmente che la corrente continuna a fluire nel resto del filo, per cui deve essere necessariamente presente qualcosa nella zona di vuoto tra il filo capace di muovere le cariche, per cui paradossalemente la corrente attraversa il vuoto, ma è stato descritto precedentemente come sia impossibile per la corrente fluire per un mezzo non conduttore come il vuoto.

Per spiegare il paradosso, si considera che la corrente deposita sulla lamina cariche positive, mentre la corrente dall'altra parte del vuoto preleva cariche positive dalla lamina, quindi le due lamine sono una carica positivamente, mentre l'altra carica negativamente. La carica delle due lamine può essere spiegata per un effetto induttivo, ma fisicamente la corrente preleva e deposita cariche positive sulle due maglie metalliche.

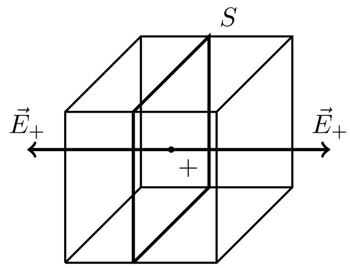
La corrente che passa attraverso il filo può essere espressa come il flusso del campo magnetico generato attraverso una cerchio di raggio r e centrato nel filo:

$$i = \int_S \vec{H} \cdot \hat{n} dS$$

Si considera inoltre un volume di base la superficie su cui si è effettuato l'operazione di flusso, che racchiude la maglia attaccata alla porzione del filo considerata.



La corrente poiché è continua dovrebbe trovarsi anche tra le due armature, ma nel volume individuato il campo magnetico è nullo, per cui non è presente un flusso di cariche. Per spiegare questo paradosso si considera la corrente come variazione di carica per unità di tempo: $i = \dfrac{dQ}{dt}$. Sull'armatura considerata si accumulano cariche, percui è presenta una variazione di carica nel tempo. L'armatura carica produce quindi un campo elettrico, individuabile tramite il teorema di Gauss, considerando un cubo avente due faccie parallele alla lamina. Se la lamina è succifientemente estesa, il campo elettrico $\vec{E}$ generato è sempre ortogonale alle due faccie parallele alla lamina, e costante su tutta la superficie. Per simmetria la lamina genera due campi di modulo e direzione uguale e verso opposto:



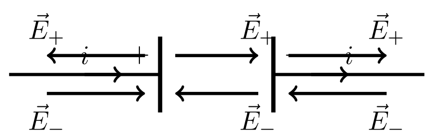
Il flusso totale passante per la superficie chiusa S corrisponde a:

$$\Phi_{S_{tot}}(\vec{E}) = \oint_{S_{tot}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{2S} E dS = 2ES$$

Per il teorema di Gauss lo stesso flusso corrisponde al rapporto tra le carica del interna alla superficie e la permettività dielettrica nel vuoto:

$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Si considera con un processo analogo anche l'armatura carica negativamente, poiché su entrambe le armature è presenta la stessa carica in modulo, i campi generati dalla due armature non si annulano solo nella zona tra le due, dove il campo totale è doppio.



Si esprime la carica presente sulle armature considerando la densità superficiale di carica δ_Q, per cui il campo totale (interno) generato dalle maglie risulta essere:

$$2ES = \frac{\delta_Q S}{\varepsilon_0}$$

$$E_{tot} = 2E = \frac{\delta_Q}{\varepsilon_0}$$

Si esprime la quantità di carica presente sulle armature mediante la densità volumetrica di carica ρ_Q:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\tau \rho_Q d\tau$$

Per la prima equazione di Maxwell, e per il teorema della divergenza:

$$i = \frac{d}{dt} \int_\tau \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} d\tau = \frac{d}{dt} \oint_{S_{tot}} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Poiché il campo elettrico è sempre ortogonale alle armature, il flusso per l'intera superficie è uguale al flusso attraverso le sole armature S_A, per cui la superficie di integrazione diventa aperta:

$$i = \frac{d}{dt}\int_{S_A} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Poiché non si deriva per la stessa variabile di integrazione, si può invertire l'ordine delle operzaioni, considerano la derivata parziale rispetto al tempo, invece di una derivata totale, poiché il campo è una funzione multivariabile:

$$i = \int_{S_A} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

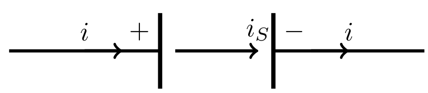
Si esprime questa corrente, chiamata corrente di spostamento, mediante il flusso di un nuovo vettore di intensità di corrente $\vec{J}_S$:

$$i_S = \int_{S_A} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_A} \vec{J}_S \cdot \hat{n} dS$$

Viene definita la corrente di spostamento di Maxwell in forma locale:

$$\vec{J}_S = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.3.5}$$

Per la continuità delle correnti in un mezzo conduttore fluisce $\vec{J}$, mentre nel vuoto scorre $\vec{J}_S$, poiché ai due capi del filo la corrente è la stessa, necessariamente la corrente nel mezzo e la corrente di spostamento devono essere uguali $\vec{J} = \vec{J}_S$. Se non è presenta una variazione di campo elettrico, entrambe i vettori di intensità di corrente diventano nulli e non fluisce corrente nè nel filo nè nel vuoto.



Con aggiunta la corrente di spostamento di Maxwell, il teorema di Ampere-Maxwell, o seconda equazione di Maxwell, in forma integrale diventa:

$$\oint_\lambda \vec{H} \cdot d\vec{\lambda} = i_c + i_S$$

Per il teorema del rotore:

$$\oint_\lambda \vec{H} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS = i_c + i_S = \int_S (\vec{J} + \vec{J}_S) \cdot \hat{n} dS$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_S$$

In forma locale, si esprime mediante il rotore campo di induzione magnetica $\vec{B}$:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{1.3.6}$$

1.4 Campo Elettro-Motore

Il campo elettro-motore è un tipo di campo fondamentale in elettronica ed elettronica, può essere generato da conversioni energetiche, tramite induzione magnetica o un'operazione ibrida tra le due, come una turbina che ruota meccanicamente, insieme ad un campo magnetico per generare un campo elettro-motore che genera elettriticà. Un campo elettro-motore genera una differenza di potenziale o tensione, ma non è garantito che queste due grandezze coincidino.

A differenza del campo elettrico, non è un campo conservativo: $\nabla \times \vec{E}_m \neq 0$. Il lavoro per unità di carica del campo elettro-motrice, equivale alla forza elettro-motrice, ma non corrisponde alla grandezza fisica forza:

$$\int_\lambda \vec{E}_m \cdot d\vec{\lambda} = f.e.m.$$

Poiché non è un campo conservativo, cambiando il percorso λ su cui viene spinta la carica di prova, cambierà la forza elettro-motrice generata.

Si considera una situazione dove sono presenti due cariche a contatto, una positiva, l'altra negativa. Quando sono a contatto il campo elettro-statico complessivo generato dalle cariche è nullo, mentre se vengono separate mediante un campo elettro-motore $\vec{E}_m$, sarà generato anche un campo elettro-statico $\vec{E}_S$ opposto del precedente: $\vec{E}_m =^* -\vec{E}_S$. Questa relazione di equvialenza tra i due campi non è generale, poiché uno è un campo conservativo, mentre l'altro non conservativo. Il campo elettro-statico è presente solo se un campo elettro-motore ha separato le due cariche. La forza elettro motrice generata, per un certo percorso λ è:

$$\int_\lambda \vec{E}_m \cdot d\vec{\lambda} = -\int_\lambda \vec{E}_s \cdot d\vec{\lambda}$$

Il percorso λ è definito dal campo elettro-motore, la conservatività di $\vec{E}_s$ è quindi irrilevante in queste condizioni. Poiché il suo lavoro per unità di carica è opposto alla forza elettro motrice per un certo percorso λ, cambia anch'esso in base a questo percorso. Dato che il campo elettro-statico corrisponde all'opposto del gradiente del potenziale V, si considera solo la componente di coordinata curvilinea λ:

$$\int_\lambda \vec{E}_m \cdot d\vec{\lambda} = \int_\lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cancelto{1}{\hat{\lambda} \cdot \hat{\lambda}} d\vec{\lambda} = \Delta V_\lambda$$

Quindi la forza elettro-motrice per un certo percorso λ è uguale alla differenza di potenziale tra l'inizio e la fine del percorso creato dal campo elettro-motore.

Una batteria è un oggetto che, mantenendo separate cariche positive e negative mediante reazioni chimiche all'interno, è in grado di generare una differenza di potenziale ed un campo elettrico-stazionario tra i due morsetti, punti di accesso di materiale conduttore, necessasari per poter usufruire della differenza di potenziale generata.

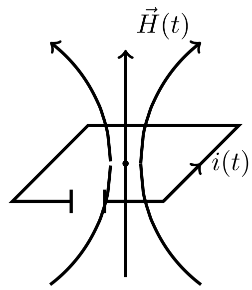
Per misurare una differenza di potenziale si usa un volmetro, uno strumento che presenta due puntali, uno positivo ed uno negativo, resitituisce la differenza tra il potenziale al puntale positivo ed il puntale negativo $V_+ - V_-$. Il segno della differenza di potenziale fornisce informazione sulla carica dei morsetti della batteria. Se i due morsetti vengono coperti con un materiale isolante come la plastica, il campo elettro-statico non ne influisce, ma il volmetro registra una tensione nulla. Per cui per misurare una differenza di potenziale sono necessarie delle porte di accesso di materiali conduttori, dello strumento di misura e dell'oggetto, per poter misurare il campo elettro-statico.

Il campo elettro-statico è immagine del campo elettro-motrice con una proprietà, fino a quando non cambia il percorso. La conservatività del campo elettro-statico permette di esprimere il rotore del campo elettro-motore come:

$$\nabla \times \vec{E}_m = \nabla \times \vec{E}_m + \nabla \times \vec{E}_s$$

1.4.1 Teorema di Faraday-Neumann-Lenz e III Legge di Maxwell

Faraday studiò le interazioni tra il campo magnetico e la corrente. Nei suoi esperimenti usò una spira di materiale conduttore, attraversata ortogonalmente da un campo magnetico variabile nel tempo $\vec{H}(t) = \mu_0 \vec{B}(t)$, all'interno del percorso descritto dalla spira. Faraday osservò che variando il campo magnetico, all'interno della spira cominciava a scorrere una corrente variabile nel tempo, ovvero un flusso di cariche. Questo flusso viene generato da un campo elettro-motore $\vec{E}_m$, indotto dal campo magnetico $\vec{H}(t)$. Sulla spira compare una forza elettro motrice uniformemente distribuita, poiché la corrente è uguale in ogni punto della spira.



Grazie ad osservazioni sperimentali si è dimostrato che la corrente è direttamente proporzionale all'inverso della variazione del campo di induzione magnetica: $i(t) \propto \vec{B}(t)$, per cui si oppone al cambiamento del campo. Questo effetto venne formalizzato da Faraday, Neumann e Lenz, per esprimere la corrente generata si considera la circuitazione del campo elettrico indotto. Spesso si taglia il filo per indicare la differenza di potenziale descritta dalla circuitazione, rimasta invariata, quindi il percorso attraversato è aperto:

$$\int_\lambda \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Dove S rappresenta qualsiasi superficie con cui si concatena il campo $\vec{B}$ individuata dal percorso λ. Per il teorema del rotore:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \tag{1.4.1}$$

In forma locale si presenta come:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Poiché si parla di rotore, si può esprimere il campo elettrico come la somma del campo elettro-motore indotto e del campo elettro-statico tra la differenza di potenziale, anche se la loro somma è nulla, dato che il campo elettro-statio è irrotazionale:

$$\nabla \times \vec{E}_m + \nabla \times \vec{E}_s = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.4.2}$$

Quest'equazione rappresenta la terza legge di Maxwell.

1.4.2 IV Legge di Maxwell

1.5 Onde Elettromagnetiche

1.6 Energia e Potenza