

# Fondamenti di Automatica

# Indice

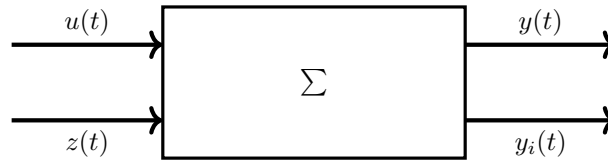
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Equazioni Differenziali</b>	<b>5</b>
2.1	Introduzione alle Equazioni Differenziali . . . . .	5
2.2	Equazioni Differenziali Ordinarie . . . . .	5
2.3	Problema di Cauchy . . . . .	5
2.4	Equazione Lineare di Primo Ordine . . . . .	5
2.5	Equazione di Grado Superiore al Primo . . . . .	5
2.5.1	Metodo Geometrico . . . . .	5
2.5.2	Metodo Algebrico . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>6</b>
3.1	Trasformate Notevoli . . . . .	6
3.2	Trasformata di un'Equazione Differenziale di Ordine Superiore al Primo . . . . .	6
3.3	Stabilità di un Sistema . . . . .	6
3.4	Funzioni di Trasferimento . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Modellistica</b>	<b>9</b>
4.1	Motore a Corrente Continua . . . . .	9
4.2	Controllori . . . . .	10
4.2.1	Luogo delle Radici . . . . .	11
4.2.2	Controllore Proporzionale con un integratore . . . . .	12
4.2.3	Entrata di Tipo $k$ . . . . .	13
4.2.4	Disturbo di Tipo $k$ . . . . .	15
4.2.5	Controllore Proporzionale, Integrativo e Derivativo (PID) . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Ingressi di Tipo Sinusoidale</b>	<b>18</b>
5.1	Diagrammi di Bode . . . . .	19
5.2	Diagramma di Nyquist . . . . .	25
5.3	Margini di Stabilità . . . . .	25
5.4	Sistemi con Ritardo . . . . .	25
5.5	Sistemi a Fase Non Minima . . . . .	25
5.6	Sintesi Diretta . . . . .	25
5.7	Stabilità Interna . . . . .	25
5.8	Guadagno . . . . .	25
5.8.1	Sensibilità . . . . .	25
5.8.2	Amplificatori Operazionali . . . . .	25
5.9	Carta di Nichols . . . . .	25
5.10	Reti Correttrici . . . . .	25
5.11	Linearizzazione . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Controllori Digitali</b>	<b>26</b>

# 1 Introduzione

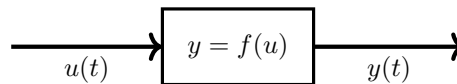
L'automotica è la scienza che si occupa dell'analisi del controllo di sistemi dinamici in quattro passaggi:

- Modellazione: Rappresentazione matematica basata sulla fisica del sistema;
- Studio delle Soluzioni: Le soluzioni possono essere ottenute analiticamente, in forma chiusa, o tramite simulazioni del dato sistema;
- Esplorazione: Ricerca di relazioni tra struttura e comportamento del sistema ed approfondimento di quest'ultimo;
- Modifica e Controllo: Ricerca dei metodi per cambiare il comportamento del sistema.

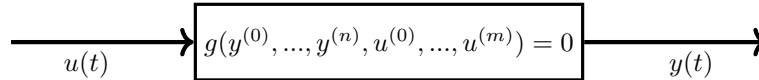
Un sistema (dal greco  $\sigma\acute{\nu}\nu$  +  $\eta\iota\sigma\tau\acute{\alpha}\nu\alpha\iota$ ) viene definito come un insieme di oggetti connessi, indipendenti, che operano insieme. La decomposizione funzionale di un sistema, è un tipo di scomposizione che esprime le relazioni causa-effetto necessarie per comprendere il funzionamento del sistema e per poter intervenire su di esso. Questa scomposizione è formata da vari blocchi funzionali, vengono rappresentati come degli oggetti aventi due ingressi e due uscite, e dei parametri interni che ne descrivono il legame, un singolo blocco funzionale può quindi essere analizzato come un sistema a sé. In un blocco funzionale possono entrare degli ingressi scelti arbitrariamente  $u(t)$ , di cui è possibile controllare il comportamento, e disturbi  $z(t)$ , ovvero errori che agiscono indipendentemente sul blocco, non controllabili. Da un blocco funzionale escono l'uscita  $y(t)$ , funzione rispetto alle entrate scelte, ed una catena di misura, usata per analizzare uno o tutti i parametri di  $y(t)$ . Il comportamento di un singolo blocco viene rappresentato come dei parametri  $\Sigma$  costanti, che rappresentano il comportamento fisico del blocco, e ne descrivono le sue uscite rispetto all'entrate date.



Viene definito sistema isolato, un sistema in cui le uscite dipendono solo dagli ingressi attuali  $\Sigma : y = f(u)$ .



Viene definito sistema dinamico, un sistema le cui uscite dipendono dagli ingressi attuali e dagli ingressi passati del sistema  $\Sigma : g(y^{(0)}, \dots, y^{(n)}, u^{(0)}, \dots, u^{(m)}) = 0$ .



Viene definito stato del sistema  $\vec{x}(t)$ , un vettore di  $n$  variabili dipendenti dal tempo, tale che la conoscenza del suo valore allo stato  $\vec{x}(t = 0)$ , e l'andamento dell'ingresso da  $t = 0$  in poi è sufficiente a determinare univocamente da  $t = 0$  in poi l'andamento di tutte le variabili dipendenti. In generale dato lo stato completo di un sistema in un istante di tempo  $\vec{x}(t_0)$ , è possibile determinarne l'evoluzione futura, ovvero  $\vec{x}(t > t_0)$ .

## **2 Equazioni Differenziali**

### **2.1 Introduzione alle Equazioni Differenziali**

### **2.2 Equazioni Differenziali Ordinarie**

### **2.3 Problema di Cauchy**

### **2.4 Equazione Lineare di Primo Ordine**

### **2.5 Equazione di Grado Superiore al Primo**

#### **2.5.1 Metodo Geometrico**

#### **2.5.2 Metodo Algebrico**

### 3 Trasformata di Laplace

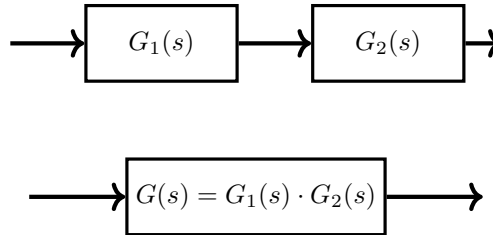
#### 3.1 Trasformate Notevoli

#### 3.2 Trasformata di un'Equazione Differenziale di Ordine Superiore al Primo

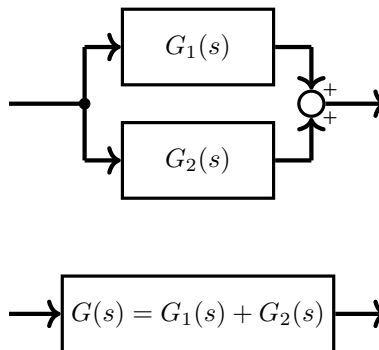
#### 3.3 Stabilità di un Sistema

#### 3.4 Funzioni di Trasferimento

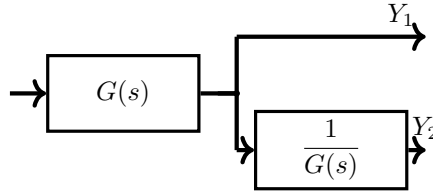
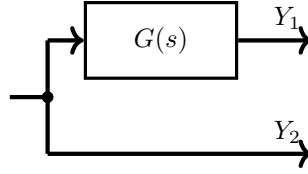
Una funzione di trasferimento del tipo ingresso-uscita, per cui perde ogni informazione sullo stato del sistema. Se due funzioni di trasferimento si trovano in serie, allora si possono sostituire da un'altra funzione di trasferimento data dal prodotto delle due, in generale per un numero  $n$  di funzioni di trasferimento in serie si può descrivere una funzione equivalente  $G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$ .



Date due funzioni di trasferimento in parallelo, potranno essere sostituite da un'altra funzione equivalente alla somma tra le due, in generale per  $k$  funzioni di trasferimento in parallelo, potranno essere sostituite da un'altra funzione equivalente  $G(s) = \sum_{i=1}^k G_i(s)$ .



La funzione di trasferimento complessiva di un sistema presenta tutte le dinamiche di quel sistema, ovvero non viene persa l'informazione sulle dinamiche manipolando le funzioni di trasferimento. Per spostare una funzione di trasferimento sulla catena bisogna opportunamente dividere e moltiplicare per tale funzione su tutte le altre ramificazioni per mantenere invariata l'entrata  $U(s)$  su quella catena.



Viene definito processo di un sistema l'insieme coordinato di trasformazioni, trasmissione di energia, materiali e informazioni finalizzato ad un obiettivo, viene indicato con la funzione  $P(s)$ .

Viene definito sistema a controreazione o retroreazione o feedback un sistema in cui l'uscita passata agisce sull'entrata futura. Si vuole calcolare una funzione di trasferimento equivalente:

$$Y(s) = U(s) \cdot W(s) \Rightarrow W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.4.1)$$

Per trovarla si analizzano le varie entrate ed uscite del sistema. Quando si analizza una certa entrate o uscita, tutte le altre vengono considerate nulle:

$$\begin{cases} Y = eG \\ e = U - HY \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$\frac{Y}{G} = U - HY \quad (3.4.3)$$

$$Y(1 + GH) = UG \quad (3.4.4)$$

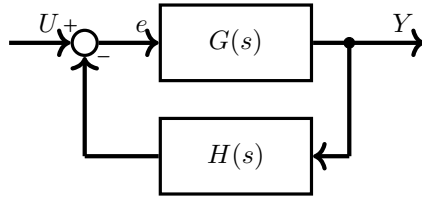
$$\frac{Y}{U} = \frac{G}{1 + GH} = W \quad (3.4.5)$$

Viene definita la funzione del ciclo aperto, uguale al prodotto di ogni funzione di trasferimento lungo l'anello:

$$F(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.4.6)$$

Per cui la funzione di trasferimento del sistema a controreazione o funzione a ciclo chiuso può essere espressa come il rapporto tra la funzione di trasferimento a catena diretta, ovvero la funzione di trasferimento equivalente a tutte le funzioni di trasferimento tra l'ingresso  $U$  all'uscita  $Y$  senza passare per l'anello, e la somma tra 1 e la funzione a ciclo aperto, con segno negativo se è presente un numero pari di cambi di segno, altrimenti positivo.

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 \pm F(s)} \quad (3.4.7)$$

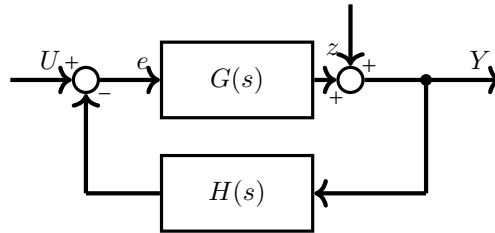


Se invece fosse presente un errore sulla catena diretta, allora per trovare la funzione a ciclo chiuso del disturbo, si considera:

$$\begin{cases} e = -HY \\ Y = eG + z \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$Y = -GHY + z \quad (3.4.9)$$

$$W_z = \frac{1}{1 + GH} = \frac{1}{1 + F} \quad (3.4.10)$$



Ogni errore sulla catena di misura genererà un'errore in uscita.

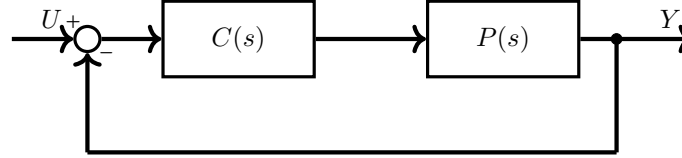
In generale la funzione a ciclo chiuso di una qualsiasi entrata di un qualsiasi sistema a controreazione avrà un denominatore  $Dem(s) = 1 \pm F(s)$ , dove  $F(s)$  è la funzione a ciclo aperto del sistema considerato. Avendo tutte le stesso denominatore, se una funzione a ciclo chiuso per due generiche entrate e uscite del sistema è stabile, allora tutte le funzioni a ciclo chiuso del sistema sono stabili, e tutti gli oggetti in entrata saranno stabili.



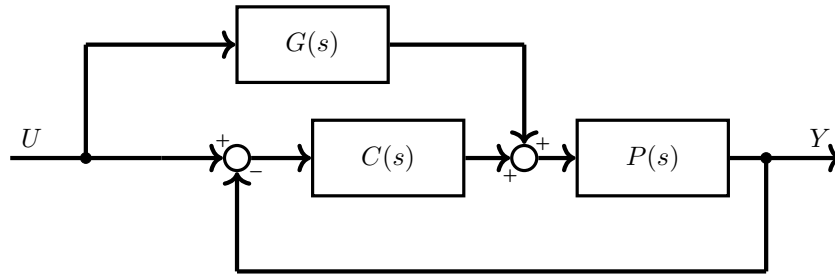
## 4 Modellistica

Per controllare il comportamento di un sistema, dopo aver analizzato l'entrata necessaria per ottenere l'effetto desiderato, si può implementare un controllore  $C(s)$ , che dato un ingresso lo manipola per poi restituirlo al processo  $P(s)$  che agir  in base all'entrata modificata.

Si pu  ottenere tramite un ciclo a feedback:



Oppure tramite un ciclo a feedforward, che user  un'altra funzione per manipolare l'ingresso non dipendente dalle uscite passate:



### 4.1 Motore a Corrente Continua

Si vuole creare un modello per un motore elettrico, quindi si analizza il suo funzionamento.

Se una corrente attraversa una spira, crear  un campo magnetico, se sono presenti dei magneti permanenti ai lati della spira, verr  generata una forza magnetica che spinge sulla spira. Se la spira   in grado di ruotare su s  stessa, allora generer  un momento torcente. Per ottenere una rotazione continua bisogna invertire la corrente passante per la spira ogni mezzo giro, usando una corrente continua per ottenere ci  vengono usati dei contatti struscianti. In questo modo   possibile generare da una corrente continua e dei magneti permanenti un momento torcente continuo. Per aumentare l'efficienza si fa ruotare il magnete all'interno di un cilindro contenente varie spire. Ogni volta che il magnete interno ruota di un certo angolo, si cambier  la coppia di spire che crea il campo magnetico, nonostante questo crei delle oscillazioni per il cambiamento di spire, la sua efficienza   notevolmente superiore ad un motore che usa contatti struscianti.

Si pu  rappresentare il circuito del rotore semplificato, formato da un'unica spira. In questo circuito semplificato sar  presente un generatore di tensione  $V_a$ , un resistore  $R_a$ , un induttore  $L_a$ , rappresentazione della spira, ed una forza contro elettro-motrice  $f.c.em$ , che rappresenta il magnete che ruota.

Per la seconda legge di Kirchhoff si ottiene la seguente equazione della tensione di armatura:

$$V_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + f.c.em \quad (4.1.1)$$

La forza contro elettro-motrice generata dal magnete in rotazione   data da:

$$f.c.em = \Phi_e K_a \omega, \quad \Phi_e K_a = cost. \Rightarrow K_m = \Phi_e K_a \quad (4.1.2)$$

Si avrà quindi un'equazione differenziale per la corrente, e si potrà ottenere la sua funzione di trasferimento:

$$V_a = R_a \dot{i}_a + L_a \ddot{i}_a + K_m \omega \quad (4.1.3)$$

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + s L_a I_a(s) + K_m \Omega(s) \quad (4.1.4)$$

$$I_a(s) = \frac{V_a - K_m \Omega(s)}{s L_a + R_a} \quad (4.1.5)$$

Avrà un tempo caratteristico  $\tau = \frac{1}{\left| \frac{R_a}{L_a} \right|} = \left| \frac{L_a}{R_a} \right|$ . Questa corrente genererà una coppia  $\tau(s)_m =$

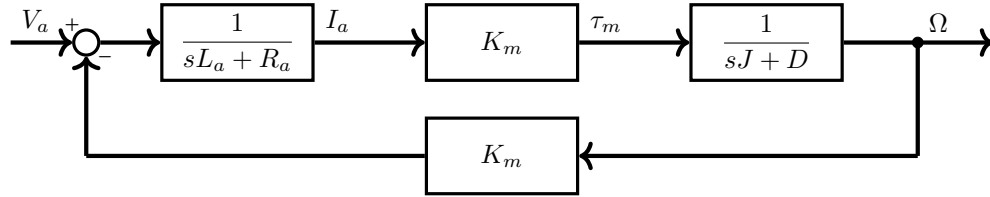
$K_m I_a(s)$ . Per ottenere la rotazione del rotore bisogna esprimerla rispetto al momento torcente prodotto. Considerando  $J$  il momento di inerzia del carico, e  $D$  la costante di attrito viscoso del rotore, si avrà:

$$\tau_m(t) = J \dot{\omega}(t) + D \omega(t) \quad (4.1.6)$$

$$\tau_m(s) = s J \Omega(s) + D \Omega(s) \quad (4.1.7)$$

$$\Omega(s) = \frac{\tau_m(s)}{s J + D} \quad (4.1.8)$$

Si può allora esprimere come un ciclo a controreazione:

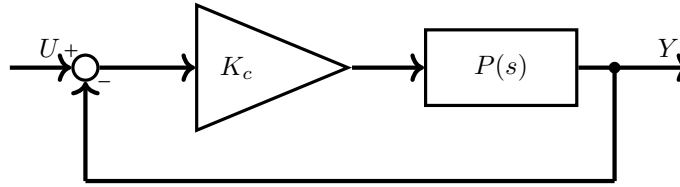


Per ottenere l'angolo al posto della velocità angolare del rotore, si può inserire un integratore  $\frac{1}{s}$  sull'uscita  $\Omega$ . Per ottenere una velocità maggiore bisognerà allora aumentare il guadagno della funzione di trasferimento a ciclo chiuso  $W(s)$ .

## 4.2 Controllori

Un controllore è un oggetto fisico usato per manipolare la stabilità di un sistema, il suo comportamento nel transitorio e a pieno regime. Esistono vari tipi di controllori, il più semplice è un controllore proporzionale che consiste di una costante  $K_c$  che moltiplica l'ingresso, in modo che il processo lavori su un'entrata  $K_c \cdot U$ , se il controllore proporzionale vale 1, avrà guadagno unitario. Per ottenere della catena diretta si moltiplica il guadagno del controllore, per il guadagno del processo:  $K = K_c \cdot K_P$ . Considerando un processo  $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , si avrà una funzione a ciclo chiuso, per un controllore proporzionale:

$$W(s) = \frac{K_c \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + K_c \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \quad (4.2.1)$$



#### 4.2.1 Luogo delle Radici

Il teorema sulla continuità delle radici di un polinomio descrive il comportamento delle soluzioni di un polinomio, alterando leggermente i valori dei coefficienti del polinomio:

Considerando un polinomio  $P^n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x = 0$ , sarà sempre possibile trovare una soluzione  $x'_0$  nell'intorno  $I_\varepsilon(x_0)$ , dove  $x_0$  è una soluzione di  $P(x)$ , al polinomio  $P'(x) = (a_n + \varepsilon)x^n + \dots + (a_1 + \varepsilon)x = 0$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  scelto arbitrariamente.

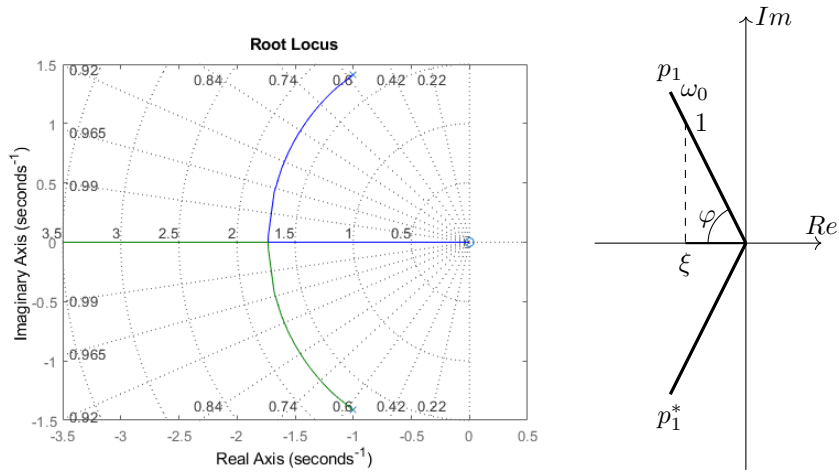
Per cui se esiste almeno una soluzione di  $D(s) + K_c N(s)$ , allora sarà sempre possibile trovare una sua soluzione per ogni valore di  $K_c$  scelto. Per valori di  $K_c \approx 0$ , si potrà approssimare il denominatore a:  $D(s) + K_c N(s) \approx D(s)$ , quindi il valore dei poli sarà dato dalla sola funzione  $D(s)$ , al contrario per valori del guadagno del controllore molto elevati  $K_c \gg 0$ , si avrà  $D(s) + K_c N(s) \approx N(s)$ , quindi il valore dei poli sarà dato dalla sola funzione  $N(s)$ . Per controllare l'andamento dei poli della funzione a ciclo chiuso rispetto ai valori del guadagno del controllore, si usa il luogo delle radici, un grafico che mostra lo spostamento dei poli rispetto all'aumento del guadagno, i poli partiranno dai valori dei poli del processo, fino a tendere al valore degli zeri del processo. Se il processo presenta un numero minore di zeri, allora alcuni dei poli tenderanno all'infinito. Il luogo delle radici viene rappresentato su un piano di Gauss. Se due poli sono complessi e coniugati, allora il loro comportamento rispetto all'aumentare del guadagno sarà simmetrico. Questi poli possono essere espressi come:

$$(s + p_1)(s + p_1^*) = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}s + 1 \quad (4.2.2)$$

Dove  $\xi$  rappresenta lo smorzamento del polo, quantifica quanto persiste l'oscillazione del sistema in seguito ad un dato ingresso, è dato da  $\xi = \cos\varphi$ , dove  $\varphi$  rappresenta l'angolo con l'orizzontale rispetto a  $\omega_0$ , la distanza tra l'origine  $O$  ed il polo, che esprime l'ampiezza dell'oscillazione. Per cui il polo espresso in coordinate polari sarà  $(\omega_0, \varphi)$ . Un polo con uno smorzamento maggiore tenderà a convergere più velocemente, e avrà un tempo caratteristico minore.

In Matlab si può ottenere il grafico del luogo delle radici per qualsiasi funzione di trasferimento tramite il comando `La`. La funzione di trasferimento sarà stabile se il luogo delle radici è interamente nel semipiano di parte reale negativa, altrimenti sarà stabile solo in un certo intervallo di  $K_c$ . La funzione `"rlocus(F)"` analizza solo valori positivi del guadagno, per controllare se l'intervallo si estenda anche per valori negativi bisogna controllare `"rlocus(-F)"`. Le linee radiali uscenti dall'origine rappresentano le linee di smorzamento. I punti segnati con una croce rappresentano i poli, mentre i punti individuati da un cerchio rappresentano gli zeri della funzione.

Aumentando il guadagno, aumenta l'ampiezza di un'oscillazione e diminuisce l'errore che ne deriva. La robustezza di un sistema è una misura che quantifica quanto un sistema mantiene nel suo dinamismo nel tempo, rispetto ad errori.



#### 4.2.2 Controllore Proporzionale con un integratore

Per controllare l'effetto di un controllore proporzionale sul guadagno di un sistema, si considera un'entrata a gradino  $U(s) = \frac{1}{s}$ , e si calcola con il teorema del valore finale il valore dell'uscita a regime permanente:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \quad (4.2.3)$$

$$Y(s) = \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{1}{s} \quad (4.2.4)$$

$$K_Y = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{1}{s} \quad (4.2.5)$$

$$K_Y = \frac{K_c}{\frac{1}{K_P} + K_c} < 1 \quad (4.2.6)$$

Dove  $K_P$  è il guadagno del processo  $P(s)$ . Per valori piccoli di  $K_c$ , si avrà un errore  $e_Y = 1 - K_Y$  elevato, solo all'umentare di  $K_c$  l'errore diminuirà fino a tendere a 1 per  $K_c \rightarrow \infty$ :

$$e_Y = 1 - \lim_{K_c \rightarrow \infty} \frac{K_c}{\frac{1}{K_P} + K_c} = 1 - 1 = 0 \quad (4.2.7)$$

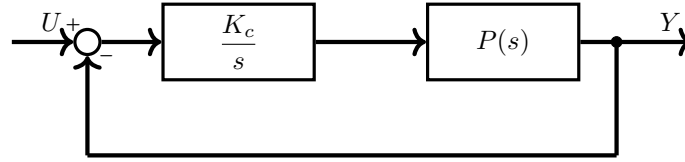
Si vuole ottenere un'errore nullo senza aumentare il guadagno  $K_c$ , poiché cambierebbe l'andamento del processo nel transitorio. Inserendo un integratore insieme ad un controllore proporzionale  $\frac{K_c}{s}$  si avrà una funzione a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{K_c N(s)}{sD(s) + K_c N(s)} \quad (4.2.8)$$

Il guadagno dell'uscita per un'entrata a gradino sarà in questo caso:

$$K_Y = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c N(s)}{sD(s) + K_c N(s)} \frac{1}{s} = \frac{K_c}{0 \cdot \frac{1}{K_P} + K_c} = 1 \quad (4.2.9)$$

Si può quindi ottenere un'errore nullo a regime permanente, indipendentemente dal valore del controllore proporzionale. Da notare come per ottenere un errore nullo è stato necessario inserire un integratore, per un'entrata a gradino. Per il principio del modello interno per ottenere un'uscita di un certo tipo sarà necessaria una dinamica simile all'interno del sistema. Segue che per un sistema asintoticamente stabile, l'uscita seguirà l'entrata, ovvero entrambe saranno dello stesso tipo.

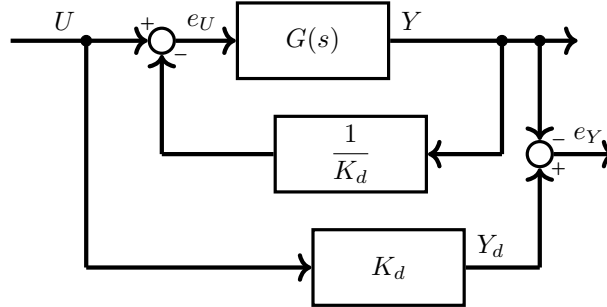


#### 4.2.3 Entrata di Tipo $k$

Poiché l'uscita tenderà a seguire l'entrata, si considera un modello di riferimento ideale, dove l'uscita  $Y_d$  è proporzionale all'entrata di un fattore  $K_d$ :

$$Y_d = K_d \cdot U \Rightarrow W_d(s) = K_d \quad (4.2.10)$$

Ma non potrà esistere un sistema fisico tale da avere una funzione a ciclo chiuso uguale ad una costante. Per cui si vuole calcolare l'errore di un sistema rispetto a questo riferimento ideale, per ottenerlo si considera:



Si avrà quindi un errore in entrata  $e_U$  dovuto alla differenza tra la funzione a ciclo chiuso ed il modello ideale:

$$e_U = U - \frac{Y}{K_d} \quad (4.2.11)$$

questo errore sarà nullo per valori di uscita uguali al riferimento ideale:  $Y = Y_d = K_d U$ .

Si avrà un errore in uscita:

$$e_Y : E(s) = Y_d - Y = K_d U(s) - W(s)U(s) \quad (4.2.12)$$

$$K_d U(s) - \frac{K_d G(s)}{K_d + G(s)} U(s) \quad (4.2.13)$$

$$\left( \frac{K_d^2 + K_d G(s) - K_d G(s)}{K_d + G(s)} \right) U(s) \quad (4.2.14)$$

$$E(s) = \frac{K_d^2}{K_d + G(s)} U(s) \quad (4.2.15)$$

Per cui è necessario conoscere l'ingresso del sistema per poter determinare l'errore in uscita. Si analizza il caso di entrate del tipo  $k$  polinomiale:

$$u(t) = \frac{t^k}{k!} = \delta_{-(k+1)}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^{k+1}} \quad (4.2.16)$$

Si considera il processo  $G(s)$  contenente un numero  $h$  di integratori:

$$G(s) = \frac{G'(s)}{s^h} \quad (4.2.17)$$

Allora si avrà un errore in uscita:

$$E(s) = \frac{K_d^2}{K_d + \frac{G'(s)}{s^h}} \frac{1}{s^{k+1}} \quad (4.2.18)$$

Si vuole determinare per quali valore di  $h$  si ha un errore nullo a regime permanente, per cui si analizza:

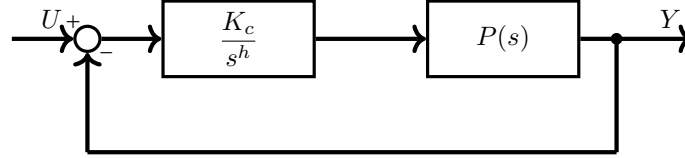
$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_d^2}{K_d + \frac{G'(s)}{s^h}} \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{K_d^2}{G'(0)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{k-h}} \quad (4.2.19)$$

Si definisce guadagno generalizzato  $K_G$  di una funzione  $G(s) = \frac{G'(s)}{s^h}$ , il suo valore per  $s = 0$ , senza considerare gli integratori, per cui:  $K_G = G'(0)$ . Per cui l'errore in uscita a pieno regime dipenderà dal numero di integratori nel processo  $G$ :

$$\frac{K_d^2}{K_G} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{k-h}} = \begin{cases} +\infty, & k > h \\ \frac{K_d^2}{K_G}, & k = h \\ 0, & k < h \end{cases} \quad (4.2.20)$$

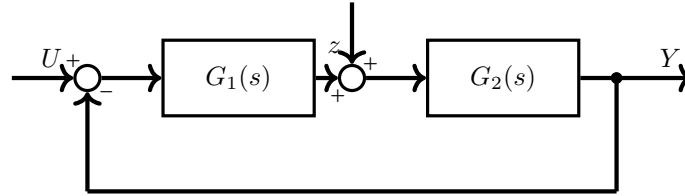
Segue che per rigettare un errore di tipo  $k$ , serviranno  $k$  integratori nella catena diretta. Anche se inserire un numero maggiore di integratori annulla l'errore, non è consigliato inserire un numero maggiore dell'indispensabile di integratori nella catena diretta, poiché più aumenta il numero di poli nell'origine più il sistema tende all'instabilità. Viene definito sistema di controllo di tipo  $k$ , un controllore tale da rendere l'errore a regime permanente costante per un'entrata di tipo  $k$ . Da notare che per un entrata di tipo 0, non serviranno integratori e l'errore a regime permanente sarà dato da:  $E_Y = \frac{K_d^2}{K_d + K_G}$ . È possibile quindi creare una tabella che mostri l'andamento dell'errore rispetto ad entrate di tipo  $k$  e un numero  $h$  di integratori in catena diretta:

$h, k$	0	1	2	...
0	$\frac{K_d^2}{K_d + K_G}$	$\infty$	$\infty$	
1	0	$\frac{K_d^2}{K_G}$	$\infty$	
2	0	0	$\frac{K_d^2}{K_G}$	
$\vdots$				$\ddots$



#### 4.2.4 Disturbo di Tipo $k$

Nel caso sia presente un disturbo di tipo  $k$  sulla catena diretta  $z(t) = \delta_{-(k+1)}(t)$ , per rigettarlo a regime permanente bisogna ottenere un'errore nullo in uscita considerando il disturbo come unica entrata del sistema.



Allora si avrà una funzione a ciclo chiuso del disturbo:

$$W_z(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (4.2.21)$$

Ed un'uscita a regime permanente  $Y_z$ :

$$Y_z = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \frac{1}{s^{k+1}} \quad (4.2.22)$$

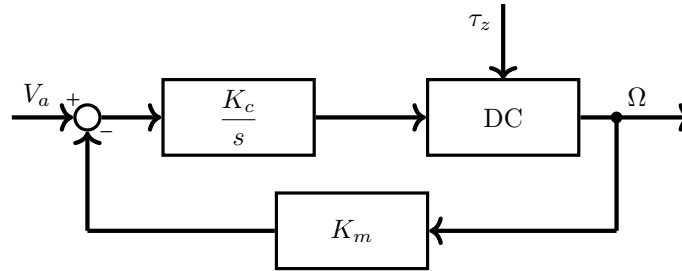
Per poter rigettare il disturbo bisogna inserire  $k$  integratori a monte di esso, ovvero nella funzione  $G_1(s)$ , l'errore causato a regime permanente allora sarà:

$$Y_z = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)}{1 + \frac{G_1'(s)}{s^k} G_2(s)} \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{K_{G_2}}{K_{G_1} K_{G_2}} \quad (4.2.23)$$

Per cui per inseguire o rigettare un polinomio di tipo  $k$  in entrata, servono  $k$  integratori in catena diretta, a monte del disturbo. Gli integratori nella funzione  $G_1$  annullano l'errore per un'entrata di tipo  $k$  e rigettano un disturbo di tipo  $k$ . Ma l'inserimento di poli nell'origine destabilizza

il sistema, quindi è necessario inserire un altro elemento per recuperare la stabilità.

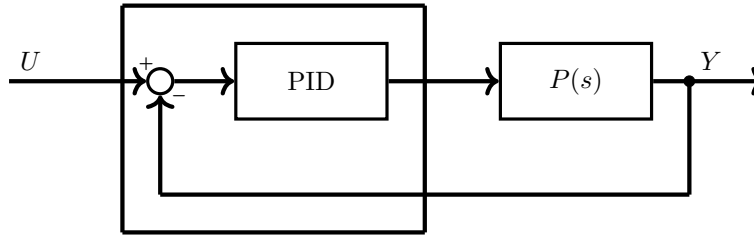
Considerando il motore a corrente diretta, un possibile disturbo potrebbe essere il peso del carico che sta spostando che produrrà un momento torcente costante nel tempo, per cui sarà un disturbo di tipo 0 e necessiterà di un controllore di tipo 0 a monte del disturbo. Nel caso di un motore, si considera un riferimento ideale legato da una cosante unitaria:  $Y_d = U$ , ovvero per una qualsiasi entrata, l'uscita la deve seguire esattamente. Per cui l'errore risulterà:  $e = \frac{1}{1 + K_c K_{DC}}$ , dove  $K_c$  è il guadagno del controllore di tipo 0. Se il motore opera dei sistemi precisi, richiederanno un'errore nullo indipendentemente dal valore del guadagno del controllore quindi si userà un controllore di tipo 1, ma ciò renderà il transitorio molto lungo, poiché un integratore prima di diventare utile dovrà caricarsi per un certo intervallo di tempo, prima di agire come richiesto. Ciò altererà i punti di equilibrio del rotore, ma inserire un altro integratore per rigettare l'errore renderebbe il sistema instabile, per cui si può alterare manualmente il riferimento iniziale su cui opera il sistema.



#### 4.2.5 Controllore Proporzionale, Integrativo e Derivativo (PID)

Considerando l'errore in uscita nel dominio del tempo  $e(t) = u(t) - y(t)$ , assumendo un ingresso costante si avrà:  $\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) \Rightarrow sE(s) = -sK_d Y(s)$ , un derivatore agirà su questa componente dell'errore agendo come un riduttore, ovvero come una forma di attrito, annullandolo. Questo procedimento però non funzionerà per ogni sistema, è possibile che un sistema abbia troppo attrito, quindi un riduttore non porterebbe effetti desiderati, agendo su quel sistema. Per cui per alcuni sistema inserire un derivatore può aiutare nel loro controllo.

Un controllore che contiene un parametro proporzionale integrativo e derivativo viene chiamato controllore PID. L'oggetto fisico può escludere il cavo di riferimento, poiché può essere computato.



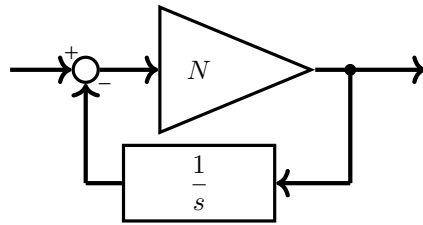
Un controllore PID sarà quindi un oggetto avente funzione di trasferimento:  $K_c + K_i \frac{1}{s} + K_d s$ . Poiché un derivatore è un oggetto non causale, dipendendo da entrate future, si inserisce un polo



lontano in un valore  $\frac{1}{\varepsilon}$ , per  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo, in modo che risenta del polo solo per valori molto alti. Per cui la parte derivativa sarà:  $\frac{K_d s}{s\varepsilon + 1}$ , si può esprimere come:  $\frac{K_d s}{s\varepsilon + 1} \frac{1}{\frac{1}{s\varepsilon}} = \frac{K_d N}{1 + \frac{N}{s}}$ , dove  $N$  rappresenta un valore arbitrariamente grande. Un controllore PID può essere espresso, esplicitando il suo guadagno come:

$$PID(s) = K_p \left( 1 + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \right) \quad (4.2.24)$$

Per costruire un derivatore si considera:



Quest'oggetto fisicamente realizzabile avrà una funzione a ciclo chiuso  $W(s) = \frac{N}{1 + \frac{N}{s}}$ , per un guadagno sulla catena diretta tendente all'infinito  $N \rightarrow \infty$ , si avrà un derivatore puro.

## 5 Ingressi di Tipo Sinusoidale

Per degli ingressi del tipo  $u(t) = \sin(\omega t)$ , si ipotizza che un processo  $G(s)$  sia asintoticamente stabile, e quindi abbia un'uscita a regime permanente della stessa classe dell'ingresso, ovvero  $y_p(t) = A \sin(\Omega t)$ . La risposta del sistema nel dominio di Laplace sarà data da:  $Y_p(s) = G(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ ,

si potrà scomporre in poli residui come:  $Y_p(s) = \frac{R}{s - j\omega} + \frac{R^*}{s + j\omega}$ , i valori di  $R$  potranno essere calcolati usando la formula dei poli residui:

$$R = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y_p(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) G(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5.0.1)$$

$$\lim_{s \rightarrow j\omega} \cancel{(s - j\omega)} \overset{1}{\nearrow} G(s) \frac{\omega}{\cancel{(s - j\omega)} \overset{1}{\nearrow} (s + j\omega)} \quad (5.0.2)$$

$$R = \frac{G(j\omega)\omega}{2j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j} \quad (5.0.3)$$

$$R^* = -\frac{G^*(j\omega)}{2j} \quad (5.0.4)$$

La funzione  $G(j\omega)$ , può essere espressa in termini polari come:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)} \quad (5.0.5)$$

$$G^*(j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j \angle G(j\omega)} \quad (5.0.6)$$

Allora si potrà esprimere la risposta a regime permanente come:

$$Y_p(s) = \frac{1}{2j} \left( \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} - \frac{G^*(j\omega)}{s + j\omega} \right) \quad (5.0.7)$$

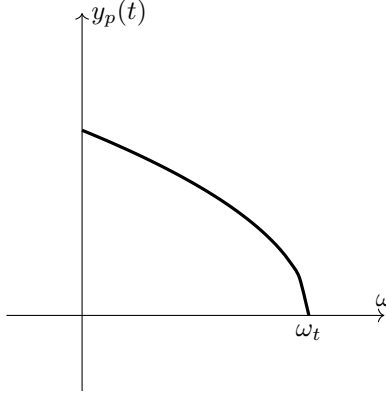
$$y_p(y) = \frac{1}{2j} (G(j\omega) e^{j\omega t} - G^*(j\omega) e^{-j\omega t}) \quad (5.0.8)$$

$$\frac{1}{2j} \left( |G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)} e^{j\omega t} - |G(j\omega)| e^{-j \angle G(j\omega)} e^{-j\omega t} \right) \quad (5.0.9)$$

$$|G(j\omega)| \left( \frac{e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}}{2j} \right) \quad (5.0.10)$$

$$y_p(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (5.0.11)$$

La risposta è proporzionale al modulo  $|G(j\omega)|$ . Data una certa pulsazione si ha che la risposta si annulla, per poi diventare negativa, per cui non si può amplificare una frequenza all'infinito.



Quest'analisi coincide con una trasformata di Fourier, poiché una trasformata di Fourier non è altro che una trasformata di Laplace solamente sull'asse immaginario:

$$\mathcal{F}_-(g(t)) = \int_0^\infty g(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{L}_-(y_p(t))\Big|_{s=j\omega}, \text{ corrisponde ad un'analisi dei soli segnali periodici.}$$

Per analizzare il comportamento della risposta del sistema, si dovranno analizzare gli andamenti del modulo e della fase del processo rispetto ad una pulsazione  $\omega$ .

## 5.1 Diagrammi di Bode

Per analizzare il modulo di una funzione  $G(s)$ , con un guadagno normalizzato:

$$G(s) = K_g \frac{(s\tau_i + 1) \dots (s\tau_n + 1)}{(s\tau_k + 1) \dots (s\tau_m + 1)} \quad (5.1.1)$$

Per facilitare l'analisi rispetto ad ogni polo della funzione si considera una scala logaritmica in Decibel:

$$|x|_{dB} = 20 \log_{10} |x| \quad (5.1.2)$$

Il modulo in Decibel del guadagno della funzione  $K_g$ , risulterà una costante addittiva:

$$|K_g|_{dB} = 20 \log_{10} |K_g| \quad (5.1.3)$$

Per un valore di modulo  $0dB$ , corrisponderà un guadagno unitario.

Essendo il guadagno  $K_g$ , un numero reale, la sua fase dipenderà solamente dal suo segno per cui:

$$\angle K_g = \begin{cases} 0^\circ, & K_g > 0 \\ -180^\circ, & K_g < 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Per i diagrammi di Bode vengono usati i gradi.

Si analizza un termine generico  $(s\tau_i + 1)$ . Il suo modulo sarà:

$$|j\omega\tau + 1| = \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \quad (5.1.5)$$

Viene espresso in Decibel:

$$20 \log_{10} \left( \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} \right) = 10 \log_{10} (\omega^2 \tau^2 + 1) \quad (5.1.6)$$

Si traccie un andamento asintotico per  $\omega \gg p$ , allora si avrà:  $\omega^2 \tau^2 \gg 1$ , il modulo potrà quindi essere approssimato come:

$$10 \log_{10} (\omega^2 \tau^2 + 1) \approx 20 \log_{10} (\omega \tau) \quad (5.1.7)$$

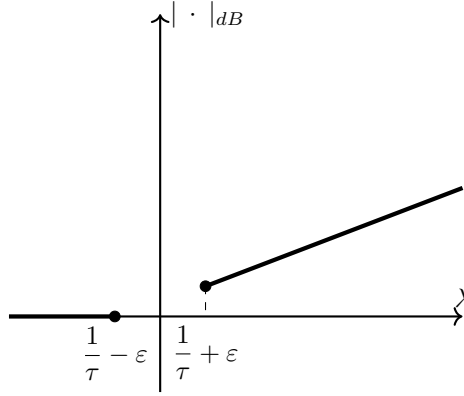
$$20 (\log_{10} \omega + \log_{10} \tau), \log_{10} \omega \gg \log_{10} \tau \quad (5.1.8)$$

$$20 (\log_{10} \omega + \log_{10} \tau) \approx 20 \log_{10} \omega \quad (5.1.9)$$

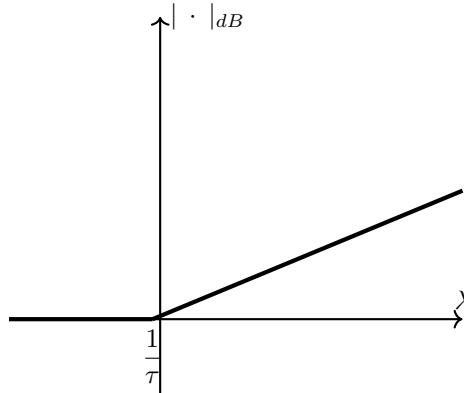
Per  $\omega \ll p$ , si avrà invece che  $\omega^2 \tau^2 \ll 1$ , per cui il modulo potrà essere approssimato come:

$$20 \log_{10} (\omega^2 \tau^2 + 1) \approx 20 \log_{10} 1 = 0 \quad (5.1.10)$$

Viene definito  $\lambda = \log_{10} \omega$ , per cui  $|j\omega\tau + 1|_{dB} \approx 20\lambda$ .



Questa approssimazione non è definita nell'intorno del polo  $\frac{1}{\tau}$ , per cui si considera l'andamento del modulo nell'intervallo  $\left( \frac{1}{\tau} + \varepsilon, \frac{1}{\tau} \right)$  come  $20\lambda$ , mentre si considera nell'intervallo  $\left( \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau} - \varepsilon \right)$  come 0. Questa approssimazione ha un errore di circa  $\pm 6dB$ , nell'intorno dello zero o del polo, chiamato punto di rottura, non rilevante per quest'analisi.



Il modulo viene espresso rispetto a  $\lambda$ , ed aumenta linearmente all'aumentare di  $\lambda$ . Si vuole rappresentare rispetto alla pulsazione per cui si considera  $\omega = 10^\lambda$ , il modulo quindi aumenta linearmente rispetto a incrementi esponenziali della pulsazione  $\omega$ . I diagrammi di Bode saranno quindi rappresentati su una carta semi logaritmica, divisa in decadi, ed il modulo crescerà di  $20dB$  ogni decade in caso di uno zero, mentre scenderà di  $20dB$  in caso di un polo.

La fase di un termine generico aumenterà da un valore iniziale di  $0^\circ$ , per  $\omega = 0$ , ed aumenterà fino a raggiungere asintoticamente un valore massimo di  $90^\circ$ .

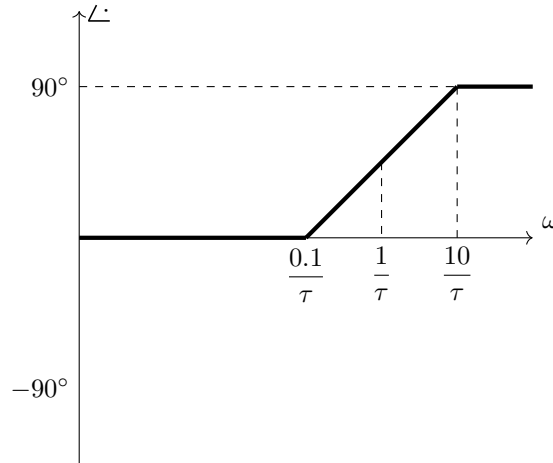
$$\omega = 0, j\omega\tau + 1 = 1 \Rightarrow \angle 1 = 0^\circ \quad (5.1.11)$$

$$\omega \rightarrow \infty, j\omega\tau + 1 \approx j\omega \Rightarrow \angle j\omega = 90^\circ \quad (5.1.12)$$

Per cui  $\angle(j\omega\tau + 1) \in [0^\circ, 90^\circ)$ , in caso si tratti di uno zero, mentre se si considera un polo si avrà:

$$\angle \frac{1}{j\omega\tau + 1} = (\angle 1 - \angle(j\omega\tau + 1)) \in (90^\circ, 0^\circ] \quad (5.1.13)$$

Si approssima il cambiamento di fase come se fosse lineare nell'intervallo  $\left(\frac{0.1}{\tau}, \frac{10}{\tau}\right)$ . Quest'approssimazione presenta un'errore di  $\pm 6^\circ$ .



Per uno zero in 0, il modulo aumenterà di  $20dB$  su tutto l'intervallo di  $\omega$ , partendo da  $-\infty dB$ , tagliando il diagramma di Bode per  $\omega = 1$ . Avrà una fase costante pari a  $90^\circ$ . Per un polo in 0, il modulo diminuirà di  $20dB$  ogni decade partendo da  $+\infty dB$ , ed avrà una fase costante di  $-90^\circ$ . Si tratterà di un oggetto al limite di stabilità.

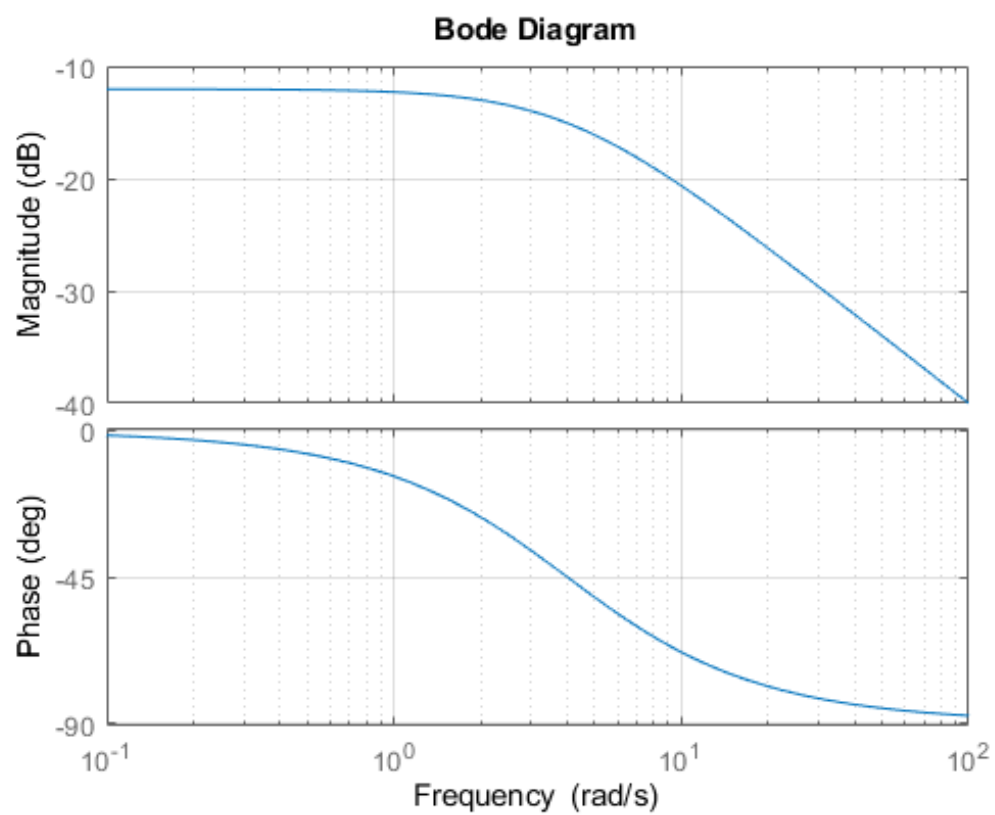


Figure 1: Singolo Polo

Si considera un trinomio  $\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1 \rightarrow_{s=j\omega} -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_n}j + 1$ . Per  $\omega \gg \omega_n$  il modulo sarà:

$$\left| -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_n}j + 1 \right| = 20 \log 10 \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \quad (5.1.14)$$

$$10 \log_{10} = \left( 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) \approx 40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (5.1.15)$$

Per  $\omega \ll \omega_n$  il modulo sarà nullo, poiché:

$$20 \log 10 \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \approx 20 \log_{10}(1) = 0 \quad (5.1.16)$$

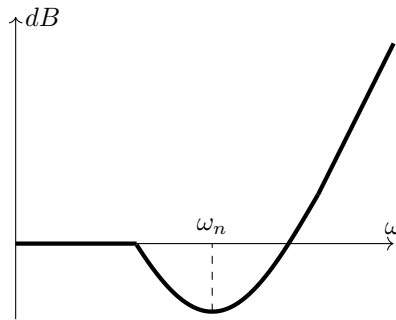
Per  $\omega = \omega_n$ , il modulo dipenderà dallo smorzamento dei poli:

$$20 \log 10 \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \right) = 20 \log_{10}(2\xi), \quad \xi \in [0, 1] \quad (5.1.17)$$

$$20 \log_{10}(2\xi) \in (-\infty, 20 \log_{10}(2)] \quad (5.1.18)$$

Per uno smorzamento nullo sarà presenta un asintoto verticale per un valore di  $\omega = \omega_n$ , se non fosse uguale, allora il diagramma di Bode del modulo presenterebbe un affossamento nell'intorno di  $\omega_n$ , la cui profondità aumenta all'aumentare dello smorzamento. Questo affossamento è ciò che causa per i poli il fenomeno della risonanza, dove per una certa pulsazione si avrà un guadagno maggiore del guadagno statico del sistema. Per gli zeri si verifica il fenomeno dell'antirisonanza, dove per una certa pulsazione risulta estremamente attenuata. La sovraelongazione è un effetto dello smorzamento e sarà massima per smorzamento massimo.

Viene definito modulo alla risonanza  $M_r$  la distanza tra il picco di risonanza ed il guadagno statico del sistema.



Per  $\omega = 0$ , a fase del trinomio sarà:  $\angle(1) = 0^\circ$ , mentre per  $\omega \rightarrow \infty$ , si avrà una fase tendente asintoticamente a:

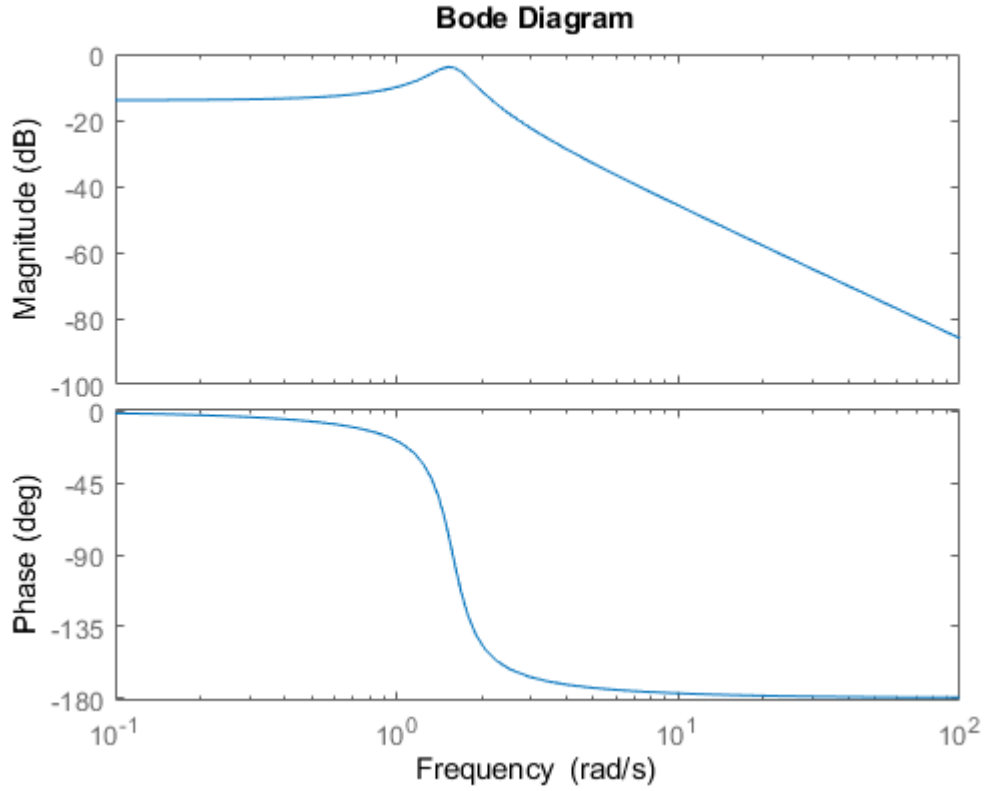


Figure 2: Fenomeno della Risonanza

$$\angle \left( -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} j + 1 \right) \rightarrow \angle -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -180^\circ \quad (5.1.19)$$

Mentre per  $\omega = \omega_n$ , la fase sarà:

$$\angle 2\xi j = 90^\circ \quad (5.1.20)$$

Quindi avverrà un cambiamento di fase nell'intorno di  $\omega_n$ , il cambiamento sarà sempre più rapido per smorzamenti sempre più piccoli, fino a presentare una discontinuità per smorzamenti nulli. Per smorzamenti sempre più piccoli la curva nel diagramma di Bode apparirà sempre più schiacciata. Nei sistemi causali ci saranno sempre più poli che zeri, per cui i loro diagrammi di Bode tenderanno sempre a scendere.



- 5.2 Diagramma di Nyquist
- 5.3 Margini di Stabilità
- 5.4 Sistemi con Ritardo
- 5.5 Sistemi a Fase Non Minima
- 5.6 Sintesi Diretta
- 5.7 Stabilità Interna
- 5.8 Guadagno
  - 5.8.1 Sensibilità
  - 5.8.2 Amplificatori Operazionali
- 5.9 Carta di Nichols
- 5.10 Reti Corretrici
- 5.11 Linearizzazione

## 6    **Controllori Digitali**