

Fondamenti di Automatica

Indice

1	Introduzione	4
2	Equazioni Differenziali	6
2.1	Introduzione alle Equazioni Differenziali	6
2.2	Equazioni Differenziali Ordinarie	6
2.3	Problema di Cauchy	6
2.4	Equazione Lineare di Primo Ordine	6
2.5	Equazione di Grado Superiore al Primo	6
2.5.1	Metodo Geometrico	6
2.5.2	Metodo Algebrico	6
3	Trasformata di Laplace	7
3.1	Trasformate Notevoli	7
3.2	Trasformata di un'Equazione Differenziale di Ordine Superiore al Primo	7
3.3	Stabilità di un Sistema	7
3.4	Funzioni di Trasferimento	7
4	Modellistica	10
4.1	Motore a Corrente Continua	10
4.2	Controllori	11
4.2.1	Luogo delle Radici	12
4.2.2	Controllore Proporzionale con un integratore	13
4.2.3	Entrata di Tipo k	14
4.2.4	Disturbo di Tipo k	16
4.2.5	Controllore Proporzionale, Integrativo e Derivativo (PID)	17
5	Ingressi di Tipo Sinusoidale	19
5.1	Diagrammi di Bode	20
5.2	Diagramma di Nyquist	25
5.3	Margini di Stabilità	29
5.4	Sistemi con Ritardo	30
5.5	Sistemi a Fase Non Minima	31
5.6	Sintesi Diretta	32
5.7	Guadagno	33
5.7.1	Sensibilità	33
5.7.2	Amplificatori Operazionali	34
5.7.3	Linearizzazione	36
5.8	Errore di Tipo Sinusoidale	37
5.9	Carta di Nichols	37
5.10	Reti Correttrici	39
5.11	Rumori Aleatori	41
5.12	Teoria di Lyapunov	42

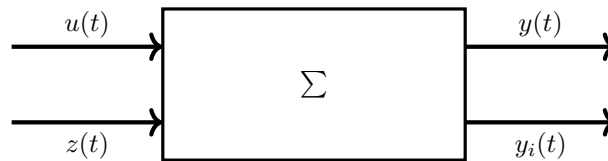
6	Sistemi a Segnali Campionati	44
6.1	Microcontrollore	44
6.1.1	Conversione Dati	44
6.1.2	Equazione alle Differenze	45
6.1.3	Tempo di Campionamento	46
6.2	Rappresentazione Segnali Campionati	46
6.2.1	Teorema di Shannon	48

1 Introduzione

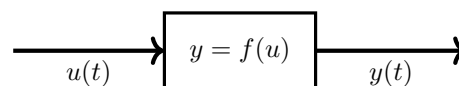
L'automotica è la scienza che si occupa dell'analisi del controllo di sistemi dinamici in quattro passaggi:

- Modellazione: Rappresentazione matematica basata sulla fisica del sistema;
- Studio delle Soluzioni: Le soluzioni possono essere ottenute analiticamente, in forma chiusa, o tramite simulazioni del dato sistema;
- Esplorazione: Ricerca di relazioni tra struttura e comportamento del sistema ed approfondimento di quest'ultimo;
- Modifica e Controllo: Ricerca dei metodi per cambiare il comportamento del sistema.

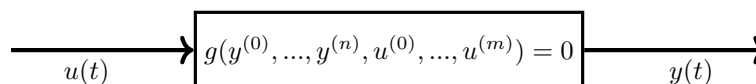
Un sistema (dal greco $\sigma\acute{\nu}\nu$ + $\eta\iota\sigma\tau\acute{\alpha}\nu\alpha\iota$) viene definito come un insieme di oggetti connessi, indipendenti, che operano insieme. La decomposizione funzionale di un sistema, è un tipo di scomposizione che esprime le relazioni causa-effetto necessarie per comprendere il funzionamento del sistema e per poter intervenire su di esso. Questa scomposizione è formata da vari blocchi funzionali, vengono rappresentati come degli oggetti aventi due ingressi e due uscite, e dei parametri interni che ne descrivono il legame, un singolo blocco funzionale può quindi essere analizzato come un sistema a sé. In un blocco funzionale possono entrare degli ingressi scelti arbitrariamente $u(t)$, di cui è possibile controllare il comportamento, e disturbi $z(t)$, ovvero errori che agiscono indipendentemente sul blocco, non controllabili. Da un blocco funzionale escono l'uscita $y(t)$, funzione rispetto alle entrate scelte, ed una catena di misura, usata per analizzare uno o tutti i parametri di $y(t)$. Il comportamento di un singolo blocco viene rappresentato come dei parametri Σ costanti, che rappresentano il comportamento fisico del blocco, e ne descrivono le sue uscite rispetto all'entrate date.



Viene definito sistema isolato, un sistema in cui le uscite dipendono solo dagli ingressi attuali $\Sigma : y = f(u)$.



Viene definito sistema dinamico, un sistema le cui uscite dipendono dagli ingressi attuali e dagli ingressi passati del sistema $\Sigma : g(y^{(0)}, \dots, y^{(n)}, u^{(0)}, \dots, u^{(m)}) = 0$.



Viene definito stato del sistema $\vec{x}(t)$, un vettore di n variabili dipendenti dal tempo, tale che la conoscenza del suo valore allo stato $\vec{x}(t = 0)$, e l'andamento dell'ingresso da $t = 0$ in poi è sufficiente a determinare univocamente da $t = 0$ in poi l'andamento di tutte le variabili dipendenti. In generale dato lo stato completo di un sistema in un istante di tempo $\vec{x}(t_0)$, è possibile determinarne l'evoluzione futura, ovvero $\vec{x}(t > t_0)$.

2 Equazioni Differenziali

2.1 Introduzione alle Equazioni Differenziali

2.2 Equazioni Differenziali Ordinarie

2.3 Problema di Cauchy

2.4 Equazione Lineare di Primo Ordine

2.5 Equazione di Grado Superiore al Primo

2.5.1 Metodo Geometrico

2.5.2 Metodo Algebrico

3 Trasformata di Laplace

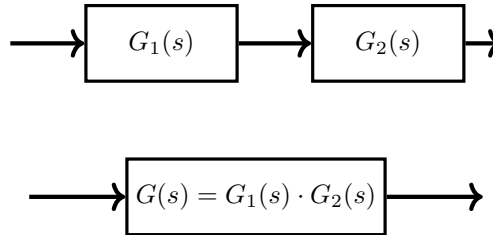
3.1 Trasformate Notevoli

3.2 Trasformata di un'Equazione Differenziale di Ordine Superiore al Primo

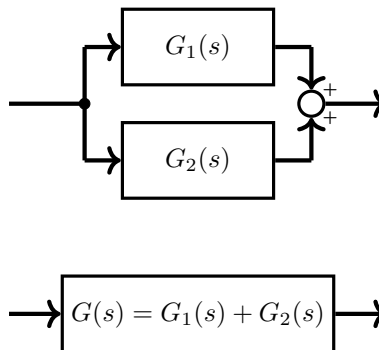
3.3 Stabilità di un Sistema

3.4 Funzioni di Trasferimento

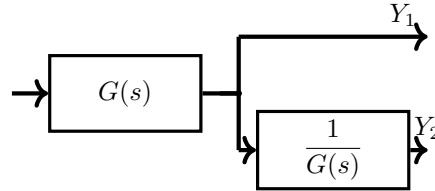
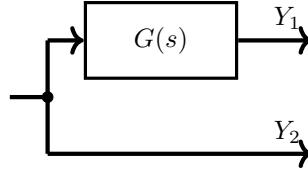
Una funzione di trasferimento del tipo ingresso-uscita, per cui perde ogni informazione sullo stato del sistema. Se due funzioni di trasferimento si trovano in serie, allora si possono sostituire da un'altra funzione di trasferimento data dal prodotto delle due, in generale per un numero n di funzioni di trasferimento in serie si può descrivere una funzione equivalente $G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$.



Date due funzioni di trasferimento in parallelo, potranno essere sostituite da un'altra funzione equivalente alla somma tra le due, in generale per k funzioni di trasferimento in parallelo, potranno essere sostituite da un'altra funzione equivalente $G(s) = \sum_{i=1}^k G_i(s)$.



La funzione di trasferimento complessiva di un sistema presenta tutte le dinamiche di quel sistema, ovvero non viene persa l'informazione sulle dinamiche manipolando le funzioni di trasferimento. Per spostare una funzione di trasferimento sulla catena bisogna opportunamente dividere e moltiplicare per tale funzione su tutte le altre ramificazioni per mantenere invariata l'entrata $U(s)$ su quella catena.



Viene definito processo di un sistema l'insieme coordinato di trasformazioni, trasmissione di energia, materiali e informazioni finalizzato ad un obiettivo, viene indicato con la funzione $P(s)$.

Viene definito sistema a controreazione o retroreazione o feedback un sistema in cui l'uscita passata agisce sull'entrata futura. Si vuole calcolare una funzione di trasferimento equivalente:

$$Y(s) = U(s) \cdot W(s) \Rightarrow W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.4.1)$$

Per trovarla si analizzano le varie entrate ed uscite del sistema. Quando si analizza una certa entrate o uscita, tutte le altre vengono considerate nulle:

$$\begin{cases} Y = eG \\ e = U - HY \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$\frac{Y}{G} = U - HY \quad (3.4.3)$$

$$Y(1 + GH) = UG \quad (3.4.4)$$

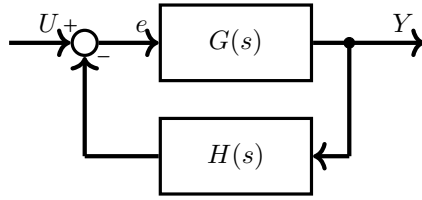
$$\frac{Y}{U} = \frac{G}{1 + GH} = W \quad (3.4.5)$$

Viene definita la funzione del ciclo aperto, uguale al prodotto di ogni funzione di trasferimento lungo l'anello:

$$F(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.4.6)$$

Per cui la funzione di trasferimento del sistema a controreazione o funzione a ciclo chiuso può essere espressa come il rapporto tra la funzione di trasferimento a catena diretta, ovvero la funzione di trasferimento equivalente a tutte le funzioni di trasferimento tra l'ingresso U all'uscita Y senza passare per l'anello, e la somma tra 1 e la funzione a ciclo aperto, con segno negativo se è presente un numero pari di cambi di segno, altrimenti positivo.

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 \pm F(s)} \quad (3.4.7)$$

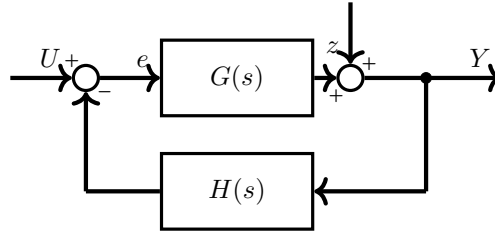


Se invece fosse presente un errore sulla catena diretta, allora per trovare la funzione a ciclo chiuso del disturbo, si considera:

$$\begin{cases} e = -HY \\ Y = eG + z \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$Y = -GHY + z \quad (3.4.9)$$

$$W_z = \frac{1}{1 + GH} = \frac{1}{1 + F} \quad (3.4.10)$$



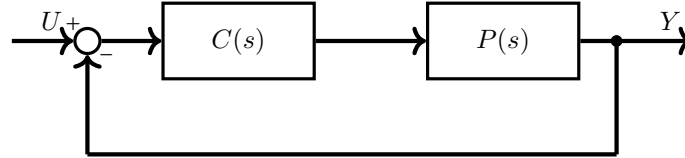
Ogni errore sulla catena di misura genererà un'errore in uscita.

In generale la funzione a ciclo chiuso di una qualsiasi entrata di un qualsiasi sistema a controreazione avrà un denominatore $Dem(s) = 1 \pm F(s)$, dove $F(s)$ è la funzione a ciclo aperto del sistema considerato. Avendo tutte le stesso denominatore, se una funzione a ciclo chiuso per due generiche entrate e uscite del sistema è stabile, allora tutte le funzioni a ciclo chiuso del sistema sono stabili, e tutti gli oggetti in entrata saranno stabili.

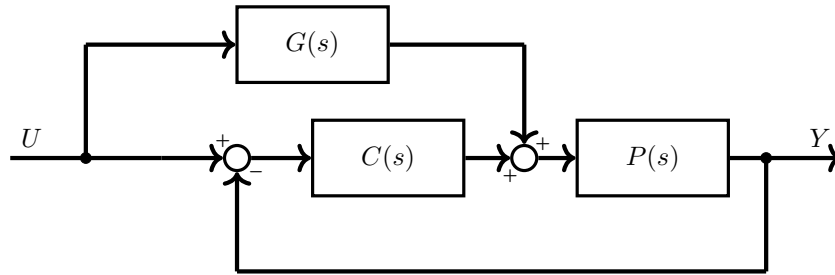
4 Modellistica

Per controllare il comportamento di un sistema, dopo aver analizzato l'entrata necessaria per ottenere l'effetto desiderato, si può implementare un controllore $C(s)$, che dato un ingresso lo manipola per poi restituirlo al processo $P(s)$ che agir  in base all'entrata modificata.

Si pu  ottenere tramite un ciclo a feedback:



Oppure tramite un ciclo a feedforward, che user  un'altra funzione per manipolare l'ingresso non dipendente dalle uscite passate:



4.1 Motore a Corrente Continua

Si vuole creare un modello per un motore elettrico, quindi si analizza il suo funzionamento.

Se una corrente attraversa una spira, crear  un campo magnetico, se sono presenti dei magneti permanenti ai lati della spira, verr  generata una forza magnetica che spinge sulla spira. Se la spira   in grado di ruotare su s  stessa, allora generer  un momento torcente. Per ottenere una rotazione continua bisogna invertire la corrente passante per la spira ogni mezzo giro, usando una corrente continua per ottenere ci  vengono usati dei contatti struscianti. In questo modo   possibile generare da una corrente continua e dei magneti permanenti un momento torcente continuo. Per aumentare l'efficienza si fa ruotare il magnete all'interno di un cilindro contenente varie spire. Ogni volta che il magnete interno ruota di un certo angolo, si cambier  la coppia di spire che crea il campo magnetico, nonostante questo crei delle oscillazioni per il cambiamento di spire, la sua efficienza   notevolmente superiore ad un motore che usa contatti struscianti.

Si pu  rappresentare il circuito del rotore semplificato, formato da un'unica spira. In questo circuito semplificato sar  presente un generatore di tensione V_a , un resistore R_a , un induttore L_a , rappresentazione della spira, ed una forza contro elettro-motrice $f.c.em$, che rappresenta il magnete che ruota.

Per la seconda legge di Kirchhoff si ottiene la seguente equazione della tensione di armatura:

$$V_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + f.c.em \quad (4.1.1)$$

La forza contro elettro-motrice generata dal magnete in rotazione   data da:

$$f.c.em = \Phi_e K_a \omega, \quad \Phi_e K_a = cost. \Rightarrow K_m = \Phi_e K_a \quad (4.1.2)$$

Si avrà quindi un'equazione differenziale per la corrente, e si potrà ottenere la sua funzione di trasferimento:

$$V_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + K_m \omega \quad (4.1.3)$$

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + K_m \Omega(s) \quad (4.1.4)$$

$$I_a(s) = \frac{V_a - K_m \Omega(s)}{sL_a + R_a} \quad (4.1.5)$$

Avrà un tempo caratteristico $\tau = \frac{1}{\left| \frac{R_a}{L_a} \right|} = \left| \frac{L_a}{R_a} \right|$. Questa corrente genererà una coppia $\tau(s)_m =$

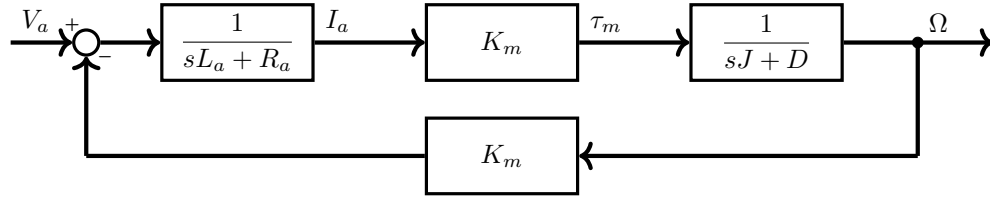
$K_m I_a(s)$. Per ottenere la rotazione del rotore bisogna esprimerla rispetto al momento torcente prodotto. Considerando J il momento di inerzia del carico, e D la costante di attrito viscoso del rotore, si avrà:

$$\tau_m(t) = J\dot{\omega}(t) + D\omega(t) \quad (4.1.6)$$

$$\tau_m(s) = sJ\Omega(s) + D\Omega(s) \quad (4.1.7)$$

$$\Omega(s) = \frac{\tau_m(s)}{sJ + D} \quad (4.1.8)$$

Si può allora esprimere come un ciclo a controreazione:

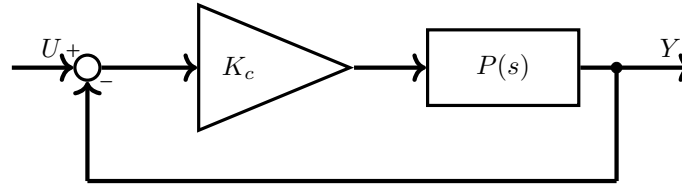


Per ottenere l'angolo al posto della velocità angolare del rotore, si può inserire un integratore $\frac{1}{s}$ sull'uscita Ω . Per ottenere una velocità maggiore bisognerà allora aumentare il guadagno della funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W(s)$.

4.2 Controllori

Un controllore è un oggetto fisico usato per manipolare la stabilità di un sistema, il suo comportamento nel transitorio e a pieno regime. Esistono vari tipi di controllori, il più semplice è un controllore proporzionale che consiste di una costante K_c che moltiplica l'ingresso, in modo che il processo lavori su un'entrata $K_c \cdot U$, se il controllore proporzionale vale 1, avrà guadagno unitario. Per ottenere della catena diretta si moltiplica il guadagno del controllore, per il guadagno del processo: $K = K_c \cdot K_P$. Considerando un processo $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, si avrà una funzione a ciclo chiuso, per un controllore proporzionale:

$$W(s) = \frac{K_c \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + K_c \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \quad (4.2.1)$$



4.2.1 Luogo delle Radici

Il teorema sulla continuità delle radici di un polinomio descrive il comportamento delle soluzioni di un polinomio, alterando leggermente i valori dei coefficienti del polinomio:

Considerando un polinomio $P^n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x = 0$, sarà sempre possibile trovare una soluzione x'_0 nell'intorno $I_\varepsilon(x_0)$, dove x_0 è una soluzione di $P(x)$, al polinomio $P'(x) = (a_n + \varepsilon)x^n + \dots + (a_1 + \varepsilon)x = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ scelto arbitrariamente.

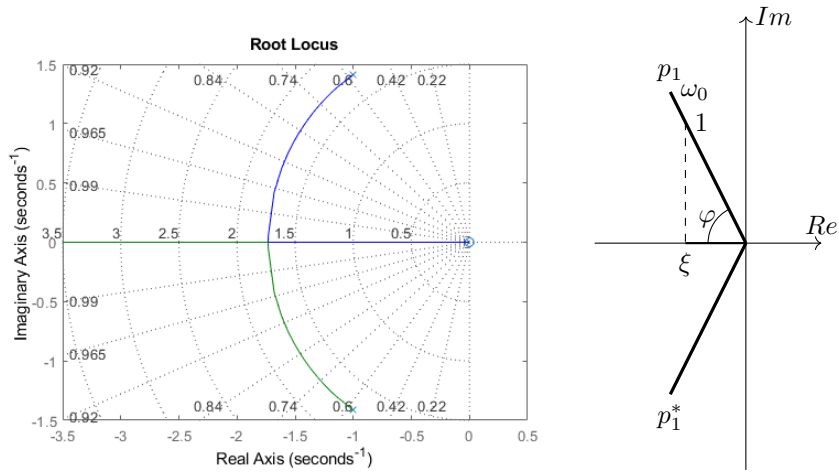
Per cui se esiste almeno una soluzione di $D(s) + K_c N(s)$, allora sarà sempre possibile trovare una sua soluzione per ogni valore di K_c scelto. Per valori di $K_c \approx 0$, si potrà approssimare il denominatore a: $D(s) + K_c N(s) \approx D(s)$, quindi il valore dei poli sarà dato dalla sola funzione $D(s)$, al contrario per valori del guadagno del controllore molto elevati $K_c \gg 0$, si avrà $D(s) + K_c N(s) \approx N(s)$, quindi il valore dei poli sarà dato dalla sola funzione $N(s)$. Per controllare l'andamento dei poli della funzione a ciclo chiuso rispetto ai valori del guadagno del controllore, si usa il luogo delle radici, un grafico che mostra lo spostamento dei poli rispetto all'aumento del guadagno, i poli partiranno dai valori dei poli del processo, fino a tendere al valore degli zeri del processo. Se il processo presenta un numero minore di zeri, allora alcuni dei poli tenderanno all'infinito. Il luogo della radici viene rappresentato su un piano di Gauss. Se due poli sono complessi e coniugati, allora il loro comportamento rispetto all'aumentare del guadagno sarà simmetrico. Questi poli possono essere espressi come:

$$(s + p_1)(s + p_1^*) = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}s + 1 \quad (4.2.2)$$

Dove ξ rappresenta lo smorzamento del polo, quantifica quanto persiste l'oscillazione del sistema in seguito ad un dato ingresso, è dato da $\xi = \cos\varphi$, dove φ rappresenta l'angolo con l'orizzontale rispetto a ω_0 , la distanza tra l'origine O ed il polo, che esprime l'ampiezza dell'oscillazione. Per cui il polo espresso in coordinate polari sarà (ω_0, φ) . Un polo con uno smorzamento maggiore tenderà a convergere più velocemente, e avrà un tempo caratteristico minore.

In Matlab si può ottenere il grafico del luogo delle radici per qualsiasi funzione di trasferimento tramite il comando `La`. La funzione di trasferimento sarà stabile se il luogo delle radici è interamente nel semipiano di parte reale negativa, altrimenti sarà stabile solo in un certo intervallo di K_c . La funzione `"rlocus(F)"` analizza solo valori positivi del guadagno, per controllare se l'intervallo si estenda anche per valori negativi bisogna controllare `"rlocus(-F)"`. Le linee radiali uscenti dall'origine rappresentano le linee di smorzamento. I punti segnati con una croce rappresentano i poli, mentre i punti individuati da un cerchio rappresentano gli zeri della funzione.

Aumentando il guadagno, aumenta l'ampiezza di un'oscillazione e diminuisce l'errore che ne deriva. La robustezza di un sistema è una misura che quantifica quanto un sistema mantiene nel suo dinamismo nel tempo, rispetto ad errori.



4.2.2 Controllore Proporzionale con un integratore

Per controllare l'effetto di un controllore proporzionale sul guadagno di un sistema, si considera un'entrata a gradino $U(s) = \frac{1}{s}$, e si calcola con il teorema del valore finale il valore dell'uscita a regime permanente:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \quad (4.2.3)$$

$$Y(s) = \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{1}{s} \quad (4.2.4)$$

$$K_Y = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{1}{s} \quad (4.2.5)$$

$$K_Y = \frac{K_c}{\frac{1}{K_P} + K_c} < 1 \quad (4.2.6)$$

Dove K_P è il guadagno del processo $P(s)$. Per valori piccoli di K_c , si avrà un errore $e_Y = 1 - K_Y$ elevato, solo all'umentare di K_c l'errore diminuirà fino a tendere a 1 per $K_c \rightarrow \infty$:

$$e_Y = 1 - \lim_{K_c \rightarrow \infty} \frac{K_c}{\frac{1}{K_P} + K_c} = 1 - 1 = 0 \quad (4.2.7)$$

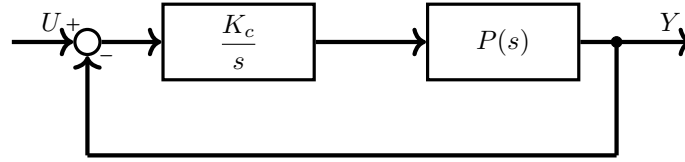
Si vuole ottenere un'errore nullo senza aumentare il guadagno K_c , poiché cambierebbe l'andamento del processo nel transitorio. Inserendo un integratore insieme ad un controllore proporzionale $\frac{K_c}{s}$ si avrà una funzione a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{K_c N(s)}{sD(s) + K_c N(s)} \quad (4.2.8)$$

Il guadagno dell'uscita per un'entrata a gradino sarà in questo caso:

$$K_Y = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c N(s)}{sD(s) + K_c N(s)} \frac{1}{s} = \frac{K_c}{0 \cdot \frac{1}{K_P} + K_c} = 1 \quad (4.2.9)$$

Si può quindi ottenere un'errore nullo a regime permanente, indipendentemente dal valore del controllore proporzionale. Da notare come per ottenere un errore nullo è stato necessario inserire un integratore, per un'entrata a gradino. Per il principio del modello interno per ottenere un'uscita di un certo tipo sarà necessaria una dinamica simile all'interno del sistema. Segue che per un sistema asintoticamente stabile, l'uscita seguirà l'entrata, ovvero entrambe saranno dello stesso tipo.

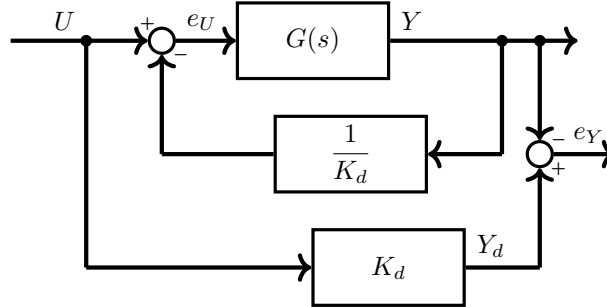


4.2.3 Entrata di Tipo k

Poiché l'uscita tenderà a seguire l'entrata, si considera un modello di riferimento ideale, dove l'uscita Y_d è proporzionale all'entrata di un fattore K_d :

$$Y_d = K_d \cdot U \Rightarrow W_d(s) = K_d \quad (4.2.10)$$

Ma non potrà esistere un sistema fisico tale da avere una funzione a ciclo chiuso uguale ad una costante. Per cui si vuole calcolare l'errore di un sistema rispetto a questo riferimento ideale, per ottenerlo si considera:



Si avrà quindi un errore in entrata e_U dovuto alla differenza tra la funzione a ciclo chiuso ed il modello ideale:

$$e_U = U - \frac{Y}{K_d} \quad (4.2.11)$$

questo errore sarà nullo per valori di uscita uguali al riferimento ideale: $Y = Y_d = K_d U$.

Si avrà un errore in uscita:

$$e_Y : E(s) = Y_d - Y = K_d U(s) - W(s)U(s) \quad (4.2.12)$$

$$K_d U(s) - \frac{K_d G(s)}{K_d + G(s)} U(s) \quad (4.2.13)$$

$$\left(\frac{K_d^2 + K_d G(s) - K_d G(s)}{K_d + G(s)} \right) U(s) \quad (4.2.14)$$

$$E(s) = \frac{K_d^2}{K_d + G(s)} U(s) \quad (4.2.15)$$

Per cui è necessario conoscere l'ingresso del sistema per poter determinare l'errore in uscita. Si analizza il caso di entrate del tipo k polinomiale:

$$u(t) = \frac{t^k}{k!} = \delta_{-(k+1)}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^{k+1}} \quad (4.2.16)$$

Si considera il processo $G(s)$ contenente un numero h di integratori:

$$G(s) = \frac{G'(s)}{s^h} \quad (4.2.17)$$

Allora si avrà un errore in uscita:

$$E(s) = \frac{K_d^2}{K_d + \frac{G'(s)}{s^h}} \frac{1}{s^{(k+1)}} \quad (4.2.18)$$

Si vuole determinare per quali valore di h si ha un errore nullo a regime permanente, per cui si analizza:

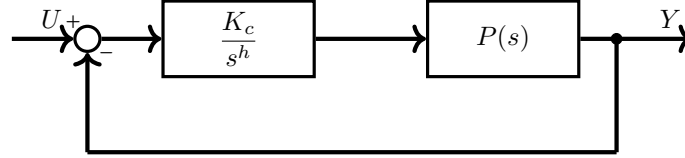
$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_d^2}{K_d + \frac{G'(s)}{s^h}} \frac{1}{s^{(k+1)}} = \frac{K_d^2}{G'(0)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{k-h}} \quad (4.2.19)$$

Si definisce guadagno generalizzato K_G di una funzione $G(s) = \frac{G'(s)}{s^h}$, il suo valore per $s = 0$, senza considerare gli integratori, per cui: $K_G = G'(0)$. Per cui l'errore in uscita a pieno regime dipenderà dal numero di integratori nel processo G :

$$\frac{K_d^2}{K_G} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{k-h}} = \begin{cases} +\infty, & k > h \\ \frac{K_d^2}{K_G}, & k = h \\ 0, & k < h \end{cases} \quad (4.2.20)$$

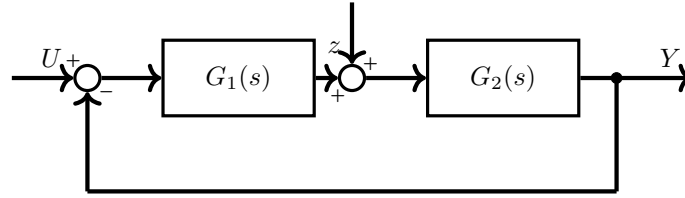
Segue che per rigettare un errore di tipo k , serviranno k integratori nella catena diretta. Anche se inserire un numero maggiore di integratori annulla l'errore, non è consigliato inserire un numero maggiore dell'indispensabile di integratori nella catena diretta, poiché più aumenta il numero di poli nell'origine più il sistema tende all'instabilità. Viene definito sistema di controllo di tipo k , un controllore tale da rendere l'errore a regime permanente costante per un'entrata di tipo k . Da notare che per un entrata di tipo 0, non serviranno integratori e l'errore a regime permanente sarà dato da: $E_Y = \frac{K_d^2}{K_d + K_G}$. È possibile quindi creare una tabella che mostri l'andamento dell'errore rispetto ad entrate di tipo k e un numero h di integratori in catena diretta:

h, k	0	1	2	...
0	$\frac{K_d^2}{K_d + K_G}$	∞	∞	
1	0	$\frac{K_d^2}{K_G}$	∞	
2	0	0	$\frac{K_d^2}{K_G}$	
\vdots				\ddots



4.2.4 Disturbo di Tipo k

Nel caso sia presente un disturbo di tipo k sulla catena diretta $z(t) = \delta_{-(k+1)}(t)$, per rigettarlo a regime permanente bisogna ottenere un'errore nullo in uscita considerando il disturbo come unica entrata del sistema.



Allora si avrà una funzione a ciclo chiuso del disturbo:

$$W_z(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (4.2.21)$$

Ed un'uscita a regime permanente Y_z :

$$Y_z = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \frac{1}{s^{k+1}} \quad (4.2.22)$$

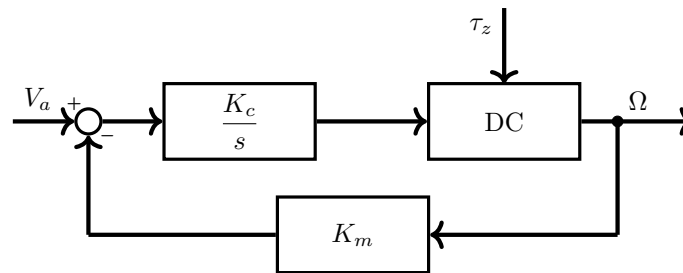
Per poter rigettare il disturbo bisogna inserire k integratori a monte di esso, ovvero nella funzione $G_1(s)$, l'errore causato a regime permanente allora sarà:

$$Y_z = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)}{1 + \frac{G_1'(s)}{s^k} G_2(s)} \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{K_{G_2}}{K_{G_1} K_{G_2}} \quad (4.2.23)$$

Per cui per inseguire o rigettare un polinomio di tipo k in entrata, servono k integratori in catena diretta, a monte del disturbo. Gli integratori nella funzione G_1 annullano l'errore per un'entrata di tipo k e rigettano un disturbo di tipo k . Ma l'inserimento di poli nell'origine destabilizza

il sistema, quindi è necessario inserire un altro elemento per recuperare la stabilità.

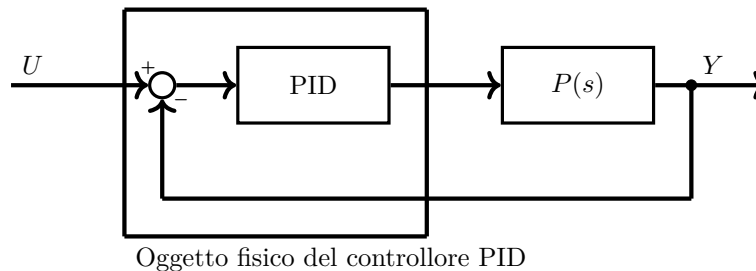
Considerando il motore a corrente diretta, un possibile disturbo potrebbe essere il peso del carico che sta spostando che produrrà un momento torcente costante nel tempo, per cui sarà un disturbo di tipo 0 e necessiterà di un controllore di tipo 0 a monte del disturbo. Nel caso di un motore, si considera un riferimento ideale legato da una cosante unitaria: $Y_d = U$, ovvero per una qualsiasi entrata, l'uscita la deve seguire esattamente. Per cui l'errore risulterà: $e = \frac{1}{1 + K_c K_{DC}}$, dove K_c è il guadagno del controllore di tipo 0. Se il motore opera dei sistemi precisi, richiederanno un'errore nullo indipendentemente dal valore del guadagno del controllore quindi si userà un controllore di tipo 1, ma ciò renderà il transitorio molto lungo, poiché un integratore prima di diventare utile dovrà caricarsi per un certo intervallo di tempo, prima di agire come richiesto. Ciò altererà i punti di equilibrio del rotore, ma inserire un altro integratore per rigettare l'errore renderebbe il sistema instabile, per cui si può alterare manualmente il riferimento iniziale su cui opera il sistema.



4.2.5 Controllore Proporzionale, Integrativo e Derivativo (PID)

Considerando l'errore in uscita nel dominio del tempo $e(t) = u(t) - y(t)$, assumendo un ingresso costante si avrà: $\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) \Rightarrow sE(s) = -sK_d Y(s)$, un derivatore agirà su questa componente dell'errore agendo come un riduttore, ovvero come una forma di attrito, annullandolo. Questo procedimento però non funzionerà per ogni sistema, è possibile che un sistema abbia troppo attrito, quindi un riduttore non porterebbe effetti desiderati, agendo su quel sistema. Per cui per alcuni sistemi inserire un derivatore può aiutare nel loro controllo.

Un controllore che contiene un parametro proporzionale integrativo e derivativo viene chiamato controllore PID. L'oggetto fisico può escludere il cavo di riferimento, poiché può essere computato.

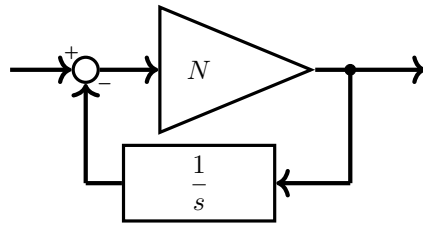


Un controllore PID sarà quindi un oggetto avente funzione di trasferimento: $K_c + K_i \frac{1}{s} + K_d s$. Poiché un derivatore è un oggetto non causale, dipendendo da entrate future, si inserisce un polo

lontano in un valore $\frac{1}{\varepsilon}$, per ε arbitrariamente piccolo, in modo che risenta del polo solo per valori molto alti. Per cui la parte derivativa sarà: $\frac{K_d s}{s\varepsilon + 1}$, si può esprimere come: $\frac{K_d s}{s\varepsilon + 1} \frac{1}{\frac{1}{s\varepsilon}} = \frac{K_d N}{1 + \frac{N}{s}}$, dove N rappresenta un valore arbitrariamente grande. Un controllore PID può essere espresso, esplicitando il suo guadagno come:

$$PID(s) = K_p \left(1 + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \right) \quad (4.2.24)$$

Per costruire un derivatore si considera:



Quest'oggetto fisicamente realizzabile avrà una funzione a ciclo chiuso $W(s) = \frac{N}{1 + \frac{N}{s}}$, per un guadagno sulla catena diretta tendente all'infinito $N \rightarrow \infty$, si avrà un derivatore puro.

5 Ingressi di Tipo Sinusoidale

Per degli ingressi del tipo $u(t) = \sin(\omega t)$, si ipotizza che un processo $G(s)$ sia asintoticamente stabile, e quindi abbia un'uscita a regime permanente della stessa classe dell'ingresso, ovvero $y_p(t) = A \sin(\Omega t)$. La risposta del sistema nel dominio di Laplace sarà data da: $Y_p(s) = G(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$,

si potrà scomporre in poli residui come: $Y_p(s) = \frac{R}{s - j\omega} + \frac{R^*}{s + j\omega}$, i valori di R potranno essere calcolati usando la formula dei poli residui:

$$R = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y_p(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) G(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5.0.1)$$

$$\lim_{s \rightarrow j\omega} \cancel{(s - j\omega)} \overset{1}{\nearrow} G(s) \frac{\omega}{\cancel{(s - j\omega)} \overset{1}{\nearrow} (s + j\omega)} \quad (5.0.2)$$

$$R = \frac{G(j\omega)\omega}{2j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j} \quad (5.0.3)$$

$$R^* = -\frac{G^*(j\omega)}{2j} \quad (5.0.4)$$

La funzione $G(j\omega)$, può essere espressa in termini polari come:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)} \quad (5.0.5)$$

$$G^*(j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j \angle G(j\omega)} \quad (5.0.6)$$

Allora si potrà esprimere la risposta a regime permanente come:

$$Y_p(s) = \frac{1}{2j} \left(\frac{G(j\omega)}{s - j\omega} - \frac{G^*(j\omega)}{s + j\omega} \right) \quad (5.0.7)$$

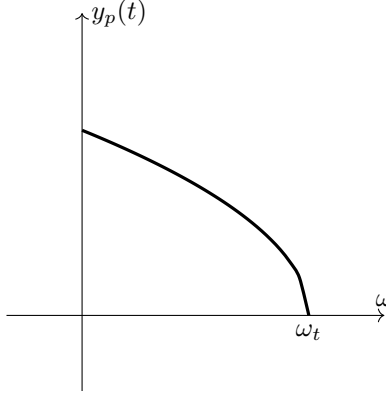
$$y_p(y) = \frac{1}{2j} (G(j\omega) e^{j\omega t} - G^*(j\omega) e^{-j\omega t}) \quad (5.0.8)$$

$$\frac{1}{2j} \left(|G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)} e^{j\omega t} - |G(j\omega)| e^{-j \angle G(j\omega)} e^{-j\omega t} \right) \quad (5.0.9)$$

$$|G(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} - e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}}{2j} \right) \quad (5.0.10)$$

$$y_p(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (5.0.11)$$

La risposta è proporzionale al modulo $|G(j\omega)|$. Data una certa pulsazione si ha che la risposta si annulla, per poi diventare negativa, per cui non si può amplificare una frequenza all'infinito.



Quest'analisi coincide con una trasformata di Fourier, poiché una trasformata di Fourier non è altro che una trasformata di Laplace solamente sull'asse immaginario:

$$\mathcal{F}_-(g(t)) = \int_0^\infty g(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{L}_-(y_p(t))\Big|_{s=j\omega}, \text{ corrisponde ad un'analisi dei soli segnali periodici.}$$

Per analizzare il comportamento della risposta del sistema, si dovranno analizzare gli andamenti del modulo e della fase del processo rispetto ad una pulsazione ω .

5.1 Diagrammi di Bode

Per analizzare il modulo di una funzione $G(s)$, con un guadagno normalizzato:

$$G(s) = K_g \frac{(s\tau_i + 1) \dots (s\tau_n + 1)}{(s\tau_k + 1) \dots (s\tau_m + 1)} \quad (5.1.1)$$

Per facilitare l'analisi rispetto ad ogni polo della funzione si considera una scala logaritmica in Decibel:

$$|x|_{dB} = 20 \log_{10} |x| \quad (5.1.2)$$

Il modulo in Decibel del guadagno della funzione K_g , risulterà una costante addittiva:

$$|K_g|_{dB} = 20 \log_{10} |K_g| \quad (5.1.3)$$

Per un valore di modulo $0dB$, corrisponderà un guadagno unitario.

Essendo il guadagno K_g , un numero reale, la sua fase dipenderà solamente dal suo segno per cui:

$$\angle K_g = \begin{cases} 0^\circ, & K_g > 0 \\ -180^\circ, & K_g < 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Per i diagrammi di Bode vengono usati i gradi.

Si analizza un termine generico $(s\tau_i + 1)$. Il suo modulo sarà:

$$|j\omega\tau + 1| = \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \quad (5.1.5)$$

Viene espresso in Decibel:

$$20 \log_{10} \left(\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} \right) = 10 \log_{10} (\omega^2 \tau^2 + 1) \quad (5.1.6)$$

Si traccie un andamento asintotico per $\omega \gg p$, allora si avrà: $\omega^2 \tau^2 \gg 1$, il modulo potrà quindi essere approssimato come:

$$10 \log_{10} (\omega^2 \tau^2 + 1) \approx 20 \log_{10} (\omega \tau) \quad (5.1.7)$$

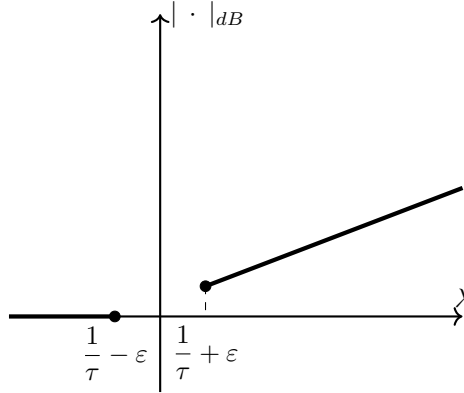
$$20 (\log_{10} \omega + \log_{10} \tau), \log_{10} \omega \gg \log_{10} \tau \quad (5.1.8)$$

$$20 (\log_{10} \omega + \log_{10} \tau) \approx 20 \log_{10} \omega \quad (5.1.9)$$

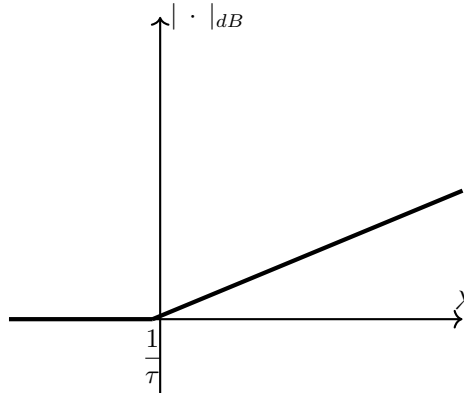
Per $\omega \ll p$, si avrà invece che $\omega^2 \tau^2 \ll 1$, per cui il modulo potrà essere approssimato come:

$$20 \log_{10} (\omega^2 \tau^2 + 1) \approx 20 \log_{10} 1 = 0 \quad (5.1.10)$$

Viene definito $\lambda = \log_{10} \omega$, per cui $|j\omega\tau + 1|_{dB} \approx 20\lambda$.



Questa approssimazione non è definita nell'intorno del polo $\frac{1}{\tau}$, per cui si considera l'andamento del modulo nell'intervallo $\left(\frac{1}{\tau} + \varepsilon, \frac{1}{\tau} \right)$ come 20λ , mentre si considera nell'intervallo $\left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau} - \varepsilon \right)$ come 0. Questa approssimazione ha un errore di circa $\pm 6dB$, nell'intorno dello zero o del polo, chiamato punto di rottura, non rilevante per quest'analisi.



Il modulo viene espresso rispetto a λ , ed aumenta linearmente all'aumentare di λ . Si vuole rappresentare rispetto alla pulsazione per cui si considera $\omega = 10^\lambda$, il modulo quindi aumenta linearmente rispetto a incrementi esponenziali della pulsazione ω . I diagrammi di Bode saranno quindi rappresentati su una carta semi logaritmica, divisa in decadi, ed il modulo crescerà di $20dB$ ogni decade in caso di uno zero, mentre scenderà di $20dB$ in caso di un polo.

La fase di un termine generico aumenterà da un valore iniziale di 0° , per $\omega = 0$, ed aumenterà fino a raggiungere asintoticamente un valore massimo di 90° .

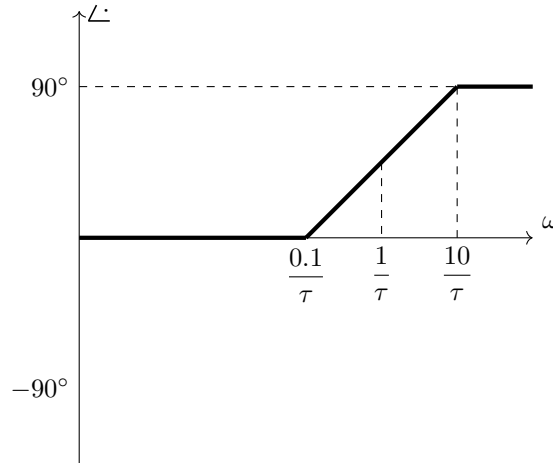
$$\omega = 0, j\omega\tau + 1 = 1 \Rightarrow \angle 1 = 0^\circ \quad (5.1.11)$$

$$\omega \rightarrow \infty, j\omega\tau + 1 \approx j\omega \Rightarrow \angle j\omega = 90^\circ \quad (5.1.12)$$

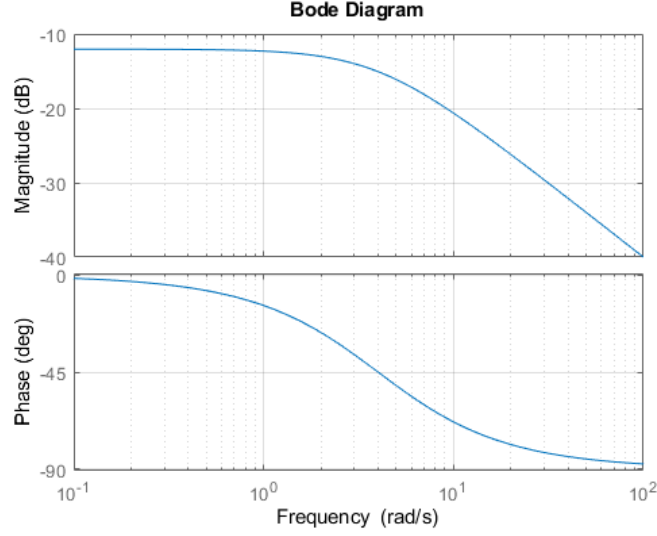
Per cui $\angle(j\omega\tau + 1) \in [0^\circ, 90^\circ)$, in caso si tratti di uno zero, mentre se si considera un polo si avrà:

$$\angle \frac{1}{j\omega\tau + 1} = (\angle 1 - \angle(j\omega\tau + 1)) \in (-90^\circ, 0^\circ] \quad (5.1.13)$$

Si approssima il cambiamento di fase come se fosse lineare nell'intervallo $\left(\frac{0.1}{\tau}, \frac{10}{\tau}\right)$. Quest'approssimazione presenta un'errore di $\pm 6^\circ$.



Per uno zero in 0, il modulo aumenterà di $20dB$ su tutto l'intervallo di ω , partendo da $-\infty dB$, tagliando il diagramma di Bode per $\omega = 1$. Avrà una fase costante pari a 90° . Per un polo in 0, il modulo diminuirà di $20dB$ ogni decade partendo da $+\infty dB$, ed avrà una fase costante di -90° . Si tratterà di un oggetto al limite di stabilità.



Si considera un trinomio $\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1 \rightarrow_{s=j\omega} -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_n}j + 1$. Per $\omega \gg \omega_n$ il modulo sarà:

$$\left| -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_n}j + 1 \right| = 20 \log_{10} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \quad (5.1.14)$$

$$10 \log_{10} = \left(4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) \approx 40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (5.1.15)$$

Per $\omega \ll \omega_n$ il modulo sarà nullo, poiché:

$$20 \log_{10} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \approx 20 \log_{10}(1) = 0 \quad (5.1.16)$$

Per $\omega = \omega_n$, il modulo dipenderà dallo smorzamento dei poli:

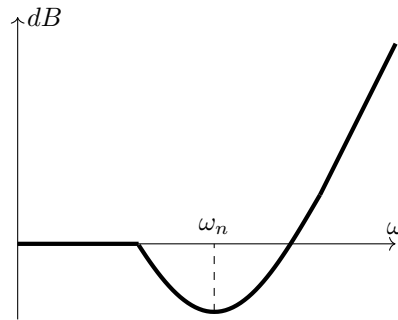
$$20 \log_{10} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \right) = 20 \log_{10}(2\xi), \quad \xi \in [0, 1] \quad (5.1.17)$$

$$20 \log_{10}(2\xi) \in (-\infty, 20 \log_{10}(2)] \quad (5.1.18)$$

Per uno smorzamento nullo sarà presenta un asintoto verticale per un valore di $\omega = \omega_n$, se non fosse uguale, allora il diagramma di Bode del modulo presenterebbe un affossamento nell'intorno di ω_n , la cui profondità aumenta all'aumentare dello smorzamento. Questo affossamento è ciò che causa per i poli il fenomeno della risonanza, dove per una certa pulsazione si avrà un guadagno maggiore del guadagno statico del sistema. Per gli zeri si verifica il fenomeno dell'antirisonanza,

dove per una certa pulsazione risulta estremamente attenuata. La sovraelongazione è un effetto dello smorzamento e sarà massima per smorzamento massimo.

Viene definito modulo alla risonanza M_r la distanza tra il picco di risonanza ed il guadagno statico del sistema.



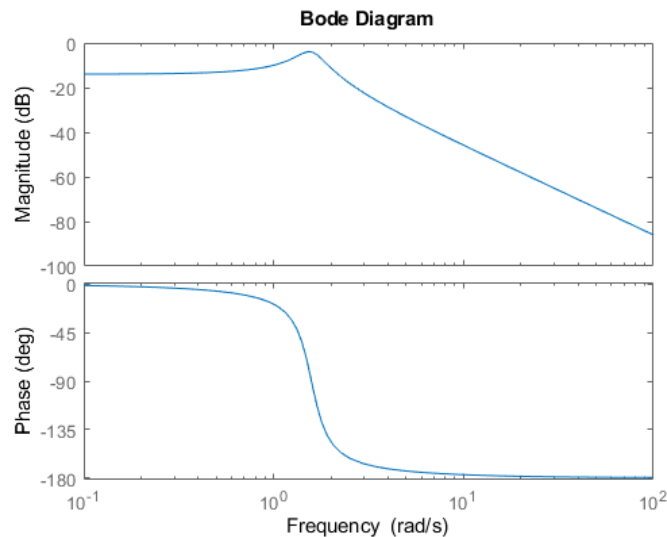
Per $\omega = 0$, a fase del trinomio sarà: $\angle(1) = 0^\circ$, mentre per $\omega \rightarrow \infty$, si avrà una fase tendente asintoticamente a:

$$\angle\left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{\omega}{\omega_n}j + 1\right) \rightarrow \angle\left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = -180^\circ \quad (5.1.19)$$

Mentre per $\omega = \omega_n$, la fase sarà:

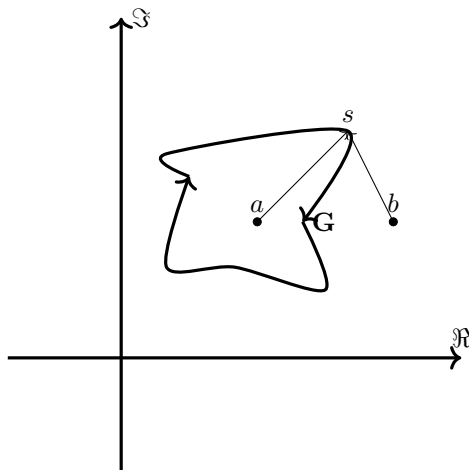
$$\angle 2\xi j = 90^\circ \quad (5.1.20)$$

Quindi avverrà un cambiamento di fase nell'intorno di ω_n , il cambiamento sarà sempre più rapido per smorzamenti sempre più piccoli, fino a presentare una discontinuità per smorzamenti nulli. Per smorzamenti sempre più piccoli la curva nel diagramma di Bode apparirà sempre più schiacciata. Nei sistemi causali ci saranno sempre più poli che zeri, per cui i loro diagrammi di Bode tenderanno sempre a scendere.



5.2 Diagramma di Nyquist

Data una funzione di trasferimento $M(s) = \frac{s-a}{s-b}$. Si definisce una qualsiasi curva chiusa \mathbf{G} sul piano, e un punto s che percorre la curva in senso orario. Allora per uno spostamento di s , comporterà uno spostamento di $M(s)$ nel piano di Gauss.



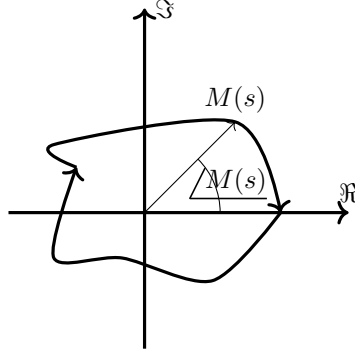
Per determinare se lo spostamento effettuato da $M(s)$ nel piano di Gauss a seguito di una variazione di s formi una curva chiusa, si analizza il cambiamento di fase $\angle M(s)$. Se il cambiamento di fase della funzione rispetto ad s è nullo allora la curva non ruota attorno all'origine, è un multiplo di 2π : $2k\pi$ allora la curva ha ruotato k volte attorno all'origine. Per determinare il cambiamento di fase:

$$\angle(M(s)) = \angle s - a - \angle s - b \quad (5.2.1)$$

Poiché s ruota attorno allo zero a , mentre non ruota attorno al polo b , il cambiamento di fase $\angle s - a$ risulta essere uguale ad una rotazione completa, ovvero 2π , mentre $\angle s - b = 0$ poiché la curva non ruota attorno a b . In base alla fase di \vec{as} e \vec{bs} si può ottenere il cambiamento di fase della funzione di trasferimento iniziale. Se un punto s ruota intorno ad uno zero od un polo, la fase del vettore distanza \vec{as} aumenterà fino a k -volte le rotazioni attorno a quello zero o polo. Si avrà quindi in questo caso:

$$\angle M(s) = 2\pi + 0 \quad (5.2.2)$$

Quindi la funzione $M(s)$ ruoterà attorno all'origine.

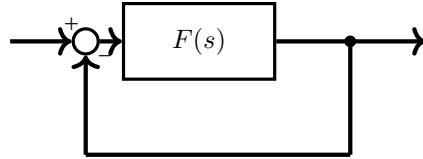


Gli unici termini che contribuiscono al cambiamento di fase di $M(s)$ sono gli elementi interni alla curva. Poiché il cambiamento di fase sarà sempre un numero intero di rotazioni complete intorno all'origine del piano di Gauss. Si definisce l'indicatore logaritmico $R_{M,0}$, che rappresenta il numero di queste rotazioni. Risulterà essere dato da:

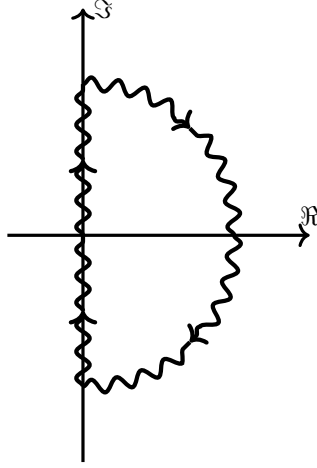
$$R_{M,0} = \#zeri_{\in \mathbf{G}}[M(s)] - \#poli_{\in \mathbf{G}}[M(s)] \quad (5.2.3)$$

Tramite questo indicatore è possibile determinare graficamente la differenza poli-zeri di una qualsiasi funzione di trasferimento in s .

Dato un sistema controreazionato, avente una funzione a ciclo aperto $F(s)$, ed una funzione a ciclo chiuso $W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}$.



I poli della funzione a ciclo chiuso corrispondono ai poli di F . Applicando il teorema dell'indicatore logaritmico su $1 + F(s)$, si traccia il percorso di Nyquist, una curva chiusa che contiene tutti gli oggetti aventi parte reale positiva. La curva si trova interamente sull'asse immaginario, la chiusura avviene all'infinito, per cui la risposta armonica corrisponde al percorso di Nyquist.



Per cui si ha:

$$R_{1+F,0} = \#zeri_{Nyq}[1 + F(s)] - \#poli_{Nyq}[1 + F(s)] \quad (5.2.4)$$

Dato che $1 + F(s) = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)}$, e la funzione a ciclo chiuso $W(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$, gli zeri della funzione $1 + F(s)$ equivalgono ai poli della funzione a ciclo chiuso, e i poli della funzione $1 + F(s)$ equivalgono agli zeri della funzione a ciclo aperto $F(s)$, per cui la differenza poli zeri è data da:

$$R_{1+F,0} = \#poli_{Nyq}[W(s)] - \#poli_{Nyq}[F(s)] \quad (5.2.5)$$

Un sistema è stabile se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale positiva, per se il sistema è stabile il numero di poli a parte reale positiva sarà nullo: $\#poli_{Nyq}[W(s)] = 0$, allora il numero di rotazioni attorno al punto zero di $W(s)$ sarà dato dal solo numero dei poli di $1 + F(s)$. Questa relazione è reciproca per cui si ha che:

$$\#poli_{Nyq}[W(s)] = 0 : \text{ sistema stabile } \iff R_{1+F(s),0} = -\#poli_{Nyq}[1 + F(s)] \quad (5.2.6)$$

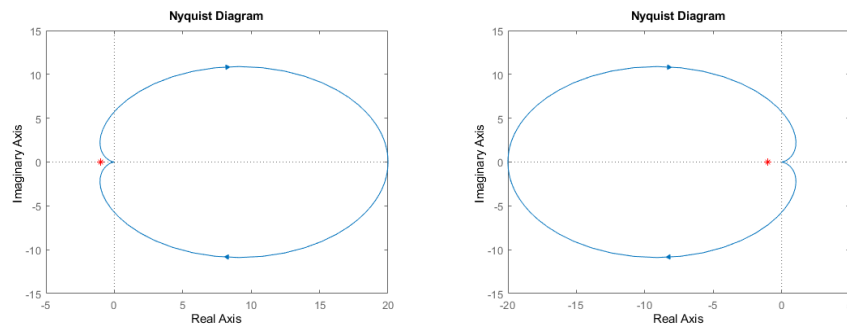
Traslando la curva di Nyquist di -1 , si ottiene la risposta armonica della funzione a ciclo aperto $F(s)$. L'indicatore logaritmico di $1 + F(s)$ attorno a 0, quindi corrisponde all'indicatore logaritmico di $F(s)$ attorno a -1 :

$$R_{F(s),-1} = R_{1+F(s),0} = -\#poli_{Nyq}[F(s)] \quad (5.2.7)$$

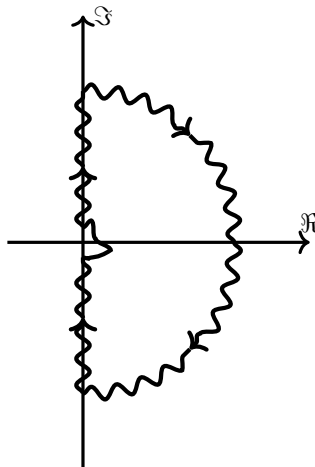
Tramite questa relazione è possibile analizzare il sistema molto più facilmente, poiché la funzione a ciclo aperto è più facilmente alterabile. Se la funzione a ciclo aperto è asintoticamente stabile, allora la funzione affinché la funzione a ciclo chiuso stia anch'essa stabile, è necessario e sufficiente che il grafico di $F(s)$ non ruoti intorno a -1 . Questo grafico corrisponde alla risposta armonica della funzione $F(s)$, e viene definito diagramma di Nyquist. A partire dai dati sulla risposta armonica forniti dal diagramma di Bode è possibile realizzare il diagramma polare di Nyquist di $F(s)$.

Poiché su un diagramma di Bode vengono rappresentati solo incrementi positivi di ω , si ottiene solo una metà del diagramma di Nyquist. Considerando frequenze negative il modulo rimarrà invariato, mentre la fase sarà opposta. Per cui per il diagramma di Nyquist è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

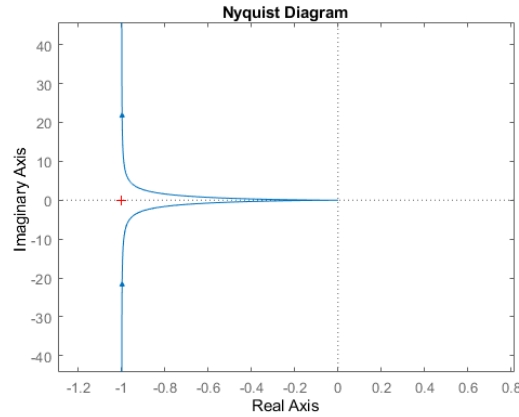
Se la fase di una funzione di trasferimento non scende al di sotto dei -180° allora non potrà mai girare intorno al punto -1 , poiché il modulo tende sempre a 0 per ogni funzione di trasferimento stabile, per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma tende asintoticamente verso l'origine. Il sistema sarà quindi stabile per ogni controllore proporzionale maggiore di zero, se invece si sceglie un Kc minore di zero, il sistema sarà stabile fino a quando il diagramma di Nyquist non include il punto -1 . Aumentando il guadagno il diagramma si espande o si comprime, mentre la fase rimane costante, per cui esiste un intervallo di guadagni negativi dove il diagramma non contenga il punto -1 , di conseguenza il sistema è stabile in quell'intervallo.



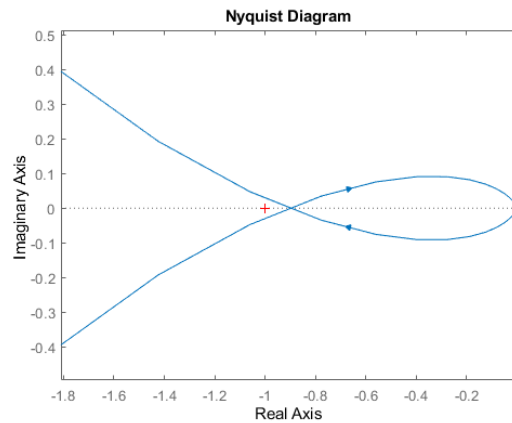
In caso la curva di Nyquist passi sopra un ad un polo, allora si considera un percorso uncinato in modo che s gira intorno al polo p , questa rotazione attorno al polo causa una variazione di fase aggiuntiva di $+180^\circ$, il raggio di questa semicirconferenza è arbitrariamente piccolo, poiché deve escludere solo il punto coincidente con il polo. Può succedere per ogni polo immaginario puro, o per un polo nell'origine.



In caso la fase cominci da -90° e raggiunga -180° , il diagramma di Nyquist non completerà una curva chiusa, poiché tenderà ad essere parallelo all'asse immaginario per $\omega \rightarrow \pm\infty$. Si considera quindi una chiusura all'infinito in senso orario da $+90^\circ$ a -90° , aggiungendo una variazione di fase di -180° . Per cui sarà sempre stabile per controllori proporzionali maggiori di zero, mentre sarà instabile per valori di K_c minori di zero, poiché la chiusura all'infinito considera tutti gli elementi con parte reale maggiore di zero, per valori negativi di K_c comprenderà sicuramente il punto -1 .



Se la fase parte da -90° e finisce a -270° , il diagramma intersecherà l'asse delle ascisse in un punto negativo α , potrebbe essere necessario comprimere il grafico con $K_c \in (0, K_{max})$, per allontanare il punto di intersezione da -1 .



5.3 Margini di Stabilità

Viene definito questo guadagno massimo margine di guadagno m_g , il valore massimo per cui il modulo valga -1 .

$$m_g \cdot \alpha \geq |-1| \Rightarrow m_g = \frac{1}{\alpha} \quad (5.3.1)$$

dove α è il punto di intersezione del grafico con l'asse dei reali. Per un guadagno uguale al margine di guadagno, il sistema oscilla sul limite di stabilità, per valori di guadagno maggiore del margine di guadagno il sistema ha dinamiche oscillatorie marcate.

Viene definito margine di fase m_φ , il massimo angolo di cui si può ruotare il diagramma di Nyquist prima di intersecare il punto -1 . Ovvero la distanza del diagramma di Bode della fase da -180° , per $\omega = \omega_t$, dove ω_t viene definita pulsazione di taglio per cui il modulo in decibel per quella frequenza è nullo. Rappresenta di quando si può sfasare il ciclo aperto.

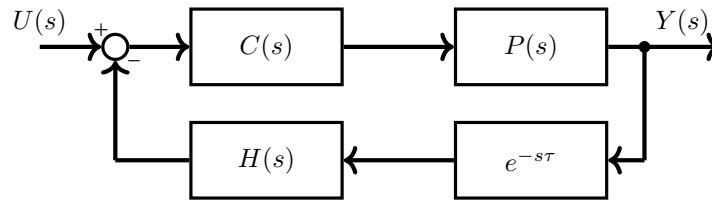
$$m_\varphi = 180^\circ - |\angle F(j\omega_t)| \quad (5.3.2)$$

In caso si considerasse una funzione con zeri a parte reale positiva, bisogna calcolare i margini per ruotare abbastanza volte intorno al punto -1 , non si calcolano direttamente dal diagramma di Bode.

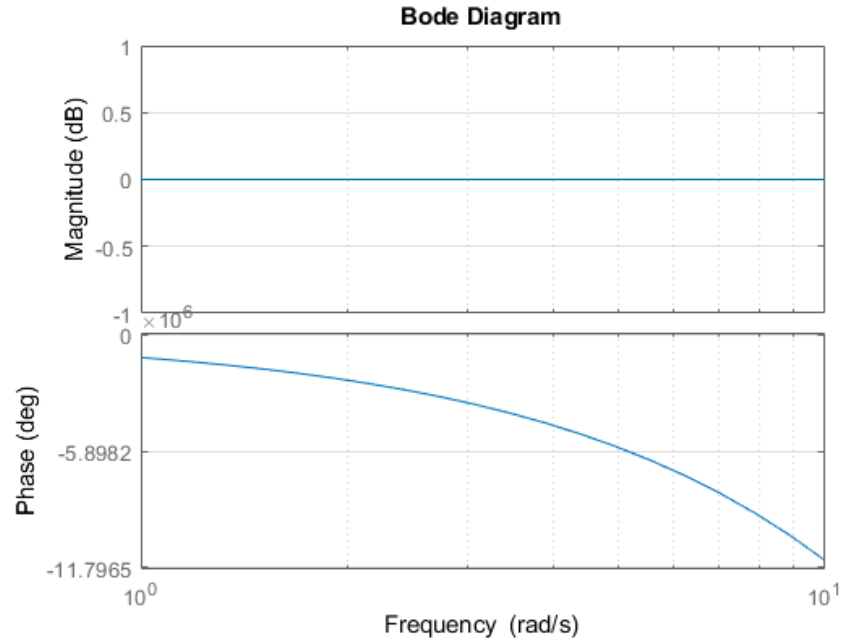
Aumentando il guadagno, si diminuiscono gli errori a regime permanente e il tempo di salita, ma si diminuiscono i margini di stabilità, ciò destabilizza il sistema poiché è più suscettibile ad errori. Viene definita robustezza di un sistema la sua capacità di resistere ad errori. Viene definita resilienza la capacità di un sistema di ritornare autonomamente allo stato di funzionante in seguito a destabilizzazioni, è necessaria una "coscienza" del sistema per determinare se si trova in uno stato di funzionamento.

5.4 Sistemi con Ritardo

Per alcuni sistemi fisici è presente un ritardo nella misurazione dello stato del sistema, indotto da fenomeni intrinseci al sistema o per esterni ad esso. Nel dominio del tempo un ritardo di tempo τ su un sistema $f(t)$ viene implementato come: $f(t - \tau)$, nel dominio della frequenza: $\mathcal{L}_-(f(t - \tau)) = F(s)e^{-s\tau}$, per cui la funzione di trasferimento di un ritardo viene rappresentata come un esponenziale sulla catena di misura, prima dell'oggetto di misurazione.



Il modulo del ritardo per una sinusoide in entrata sarà: $|e^{-\tau j\omega}| = 1$, per cui avrà un modulo nullo in decibel, mentre la fase sarà: $\angle e^{-\tau j\omega} = -\tau\omega$. Per frequenze molto basse il ritardo non diminuisce la fase del sistema, per cui se il ritardo è troppo elevato o se il sistema opera su frequenze elevate può destabilizzare il sistema.

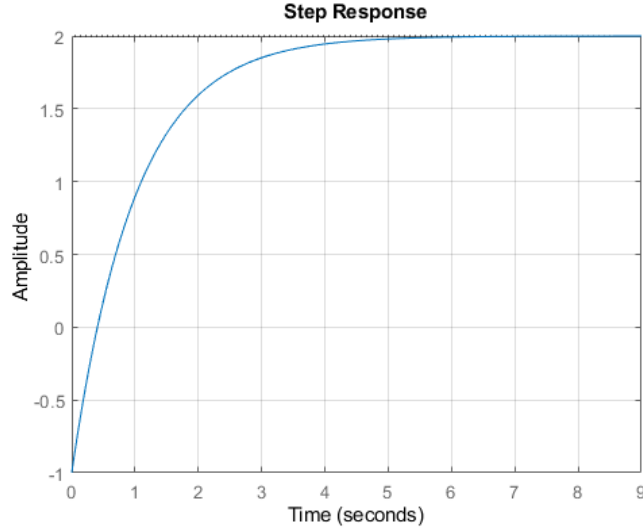


5.5 Sistemi a Fase Non Minima

Se il sistema presenta almeno uno zero a parte reale positiva, scomponendo l'uscita in fratti semplici rispetto ad un'entrata a gradino $\delta_{-1}(t)$, si avrà il residuo del gradino minore di zero, per un numero dispari di zeri a parte reale positiva. Il transitorio potrà avere una risposta nel transitorio opposto alla risposta a pieno regime.

$$Y(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s\tau_1 + 1} + \dots + \frac{R_n}{s\tau_n + 1}, \quad R_0 < 0 \quad (5.5.1)$$

$$y(t) = -|R_0|\delta_{-1}(t) + R_1 e^{-\tau_1 t} + \dots + R_n e^{-\tau_n t} \quad (5.5.2)$$



5.6 Sintesi Diretta

Dato un sistema avente una funzione a ciclo chiuso $W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$, se si vuole ottenere una specifica funzione di trasferimento, si può calcolare direttamente un controllore $C(s)$ per ottenerla:

$$W(s)(1 + C(s)P(s)) = C(s)P(s) \quad (5.6.1)$$

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \cdot \frac{W(s)}{1 - W(s)} \quad (5.6.2)$$

Se il processo $P(s)$ è causale, allora il suo inverso $\frac{1}{P(s)}$ non potrà essere causale, poiché presenterà più zeri che poli. Allora il controllore $C(s)$ potrà essere stabile solo se l'eccesso poli-zeri di $\frac{1}{P(s)}$ viene bilanciato da $1 - W(s) = D(s) - N(s)$:

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{N(s)}{D(s) - N(s)} \quad (5.6.3)$$

Se si sceglie una funzione $W(s)$ asintoticamente stabile, allora il controllore cancella il processo, contenendo $\frac{1}{P(s)}$. Se il processo contiene zeri a parte reale positiva, allora il controllore contiene poli a parte reale positiva, analiticamente si cancellano, ma non si possono cancellare le dinamiche di un sistema. Per cui un sistema con un controllore ottenuto tramite sintesi diretta presenta delle dinamiche instabili, non è stabile internamente.

5.7 Guadagno

Il guadagno ad anello oltre a diminuire l'errore di riproduzione di segnali di tipo k e rigettare disturbi di tipo k , diminuisce la sensibilità diretta del sistema, ottenendo presetazioni più costanti.

5.7.1 Sensibilità

Viene definita la funzione sensibilità di una funzione $Q(\alpha)$, il rapporto tra le variazioni percentuali della funzione e della variabile indipendente:

$$S_\alpha^Q := \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{d\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{Q} \frac{dQ}{d\alpha} \quad (5.7.1)$$

Per un sistema a controreazione avente una funzione $G(s)$ in catena diretta ed una funzione $H(s)$ in catena di misura, si può considerare la sensibilità del sistema sia rispetto a $G(s)$ che rispetto a $H(s)$:

$$S_H^W(s) = \frac{H}{W} \frac{dW}{dH} = - \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.7.2)$$

$$S_G^W(s) = \frac{G}{W} \frac{dW}{dG} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.7.3)$$

La sensibilità del sistema rispetto alla funzione a $H(s)$ è complementare alla sensibilità diretta del sistema rispetto a $G(s)$:

$$S_G^W(s) - S_H^W(s) = 1 \quad (5.7.4)$$

Se si considera una funzione $G(s, p)$ la sensibilità del sistema rispetto ad una delle variabili indipendenti di G è data da:

$$S_p^W(s) = \frac{p}{W} \frac{dW}{dp} = \frac{p}{W} \frac{dW}{dG} \frac{dG}{dp} \left(\frac{G}{G} \right) \quad (5.7.5)$$

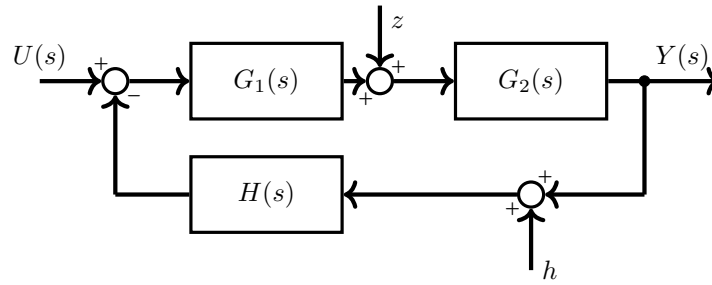
$$\left(\frac{p}{G} \frac{dG}{dp} \right) \left(\frac{W}{G} \frac{dW}{dG} \right) \quad (5.7.6)$$

$$S_p^W(s) = S_p^G(s) S_G^W(s) \quad (5.7.7)$$

Considerando un sistema con un errore in catena diretta, si può calcolare l'effetto dell'errore sul sistema tramite la sensibilità diretta. Si considera l'uscita di un errore d :

$$Y_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} D(s) = S_{G_1}^W(s) G_2(s) D(s) \quad (5.7.8)$$

L'effetto dell'errore è direttamente proporzionale alla sensibilità diretta, per cui all'aumentare del guadagno ad anello l'effetto dell'errore diminuisce. Se si considera un errore h in catena di misura, non potrà essere alterato facilmente dal guadagno ad anello, per cui risulta più problematico.



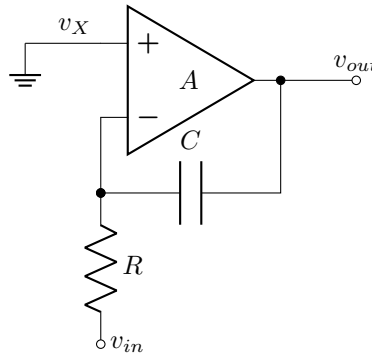
5.7.2 Amplificatori Operazionali

Data una funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$, si considera $H(s) = h$. Per il modulo della funzione a catena diretta molto alto:

$$|G(j\omega)| \gg 0 \Rightarrow |W(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)h|} = \frac{1}{h} \quad (5.7.9)$$

Quindi per guadagno ad anello molto elevato e basse frequenze la funzione a ciclo chiuso sarà l'inverso della funzione sulla catena di misura.

Un integratore è un operazionale descritto dal seguente circuito, in configurazione invertente:



Si definisce impedenza di un circuito il rapporto tra la tensione applicata ai capi del circuito e la corrente che vi ci scorre, nel dominio di Laplace, misura la facilità con cui una corrente alternata attraversa un circuito. Le impedenze derivano dalle tensioni generate dai vari oggetti di un circuito come un resistore, un capacitore ed un induttore:

$$Z_R : R = \frac{v(t)}{i(t)} \Rightarrow Z_R = \frac{V(s)}{I(s)} = R \quad (5.7.10)$$

$$Z_C : v_{in} = \frac{1}{C} \int i \, d\tau \quad (5.7.11)$$

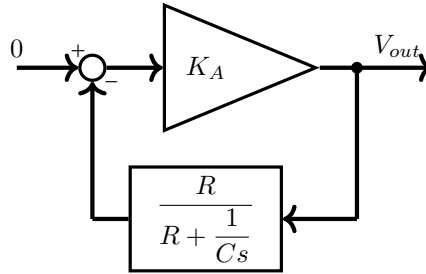
$$\dot{v}_{in} = \frac{1}{C} i \quad (5.7.12)$$

$$sV(s)_{in} = \frac{1}{C} I(s) \Rightarrow Z_C = \frac{1}{Cs} \quad (5.7.13)$$

$$Z_L : v(t) = L \dot{i}(t) \quad (5.7.14)$$

$$V(s) = sLI(s) \Rightarrow Z_L = sL \quad (5.7.15)$$

Si definisce amplificatore operazionale un oggetto avente un guadagno elevato $K_A \approx 10^5$ ed un'impedenza elevatissima in entrata proporzionale al suo guadagno, perciò si considera il caso dove l'entrata sia nulla. Si può quindi rappresentare in un sistema a blocchi il circuito di un integratore operazionale:

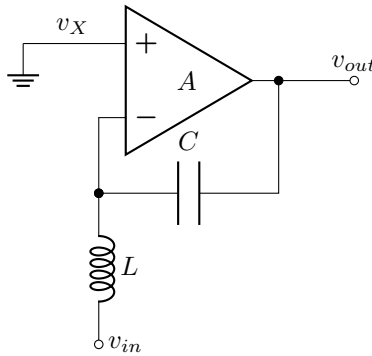


Poiché il guadagno K_A è molto elevato, si può approssimare la funzione a ciclo chiuso come:

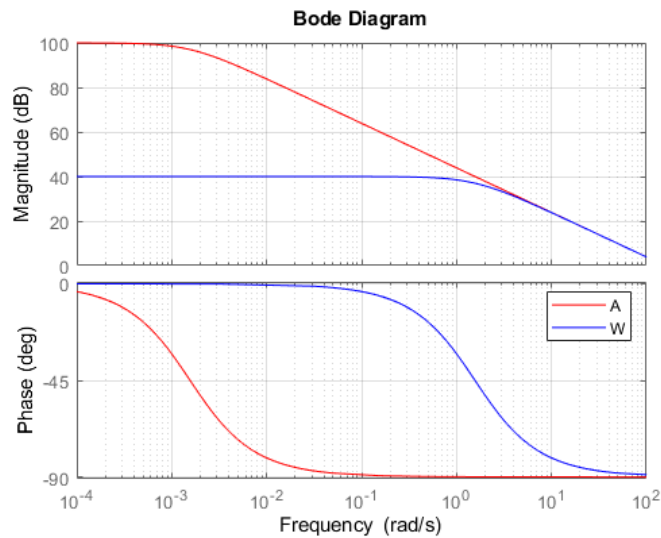
$$W(s) = \frac{R + \frac{1}{Cs}}{R} = \frac{RCs + 1}{RCs} \quad (5.7.16)$$

Rappresenta un integratore con uno zero in $-\frac{1}{RC}$, per un intervallo di frequenze può essere approssimato come un integratore puro.

Per ottenere un derivatore si considera invece un induttore al posto del resistore:



L'amplificatore presenta un comportamento non lineare, ma in controreazione ha un comportamento lineare; ha una risposta in frequenza che si può determinare sperimentalmente usando un generatore di funzioni in entrata ed un oscilloscopio in uscita. In ciclo aperto presenta una banda passante piccola, se si inserisce un fattore $\frac{1}{K_d} < 1$ in controreazione aumenta la banda passante, ma diminuisce il guadagno del sistema. Poiché un amplificatore è un oggetto a guadagno molto elevato, è possibile aumentare la banda passante considerevolmente senza disturbare di troppo le funzioni dell'amplificatore.



5.7.3 Linearizzazione

Un qualsiasi sistema non lineare definito da una funzione f , se messo in controreazione con un guadagno K , avrà una risposta:

$$\begin{cases} y = f(v) \\ v = k(u - y) \end{cases} \quad (5.7.17)$$

$$y = f(k(u - y)) \quad (5.7.18)$$

$$(5.7.19)$$

Dove $f(x)$ è una funzione non lineare, considerando un guadagno molto elevato $k \gg 0$, allora $y \propto u - y$, se il sistema non diventa stabile prima.

Un transistor è un oggetto non lineare, ma ha un guadagno molto elevato, per cui viene costruito in controreazione per avere comportamenti lineari.

5.8 Errore di Tipo Sinusoidale

Si vuole determinare l'errore $\tilde{e}(t) = \tilde{y}_d - \tilde{y}(t)$ rispetto ad un riferimento ideale per un entrata sinusoidale $\tilde{u}(t) = \sin(\tilde{\omega}t)$, di un'uscita $\tilde{y}(t) = M \sin(\tilde{\omega}t + \varphi(\tilde{\omega}))$, dove $M(\tilde{\omega}) = |W(j\omega)|_{\omega=\tilde{\omega}}$ e $\varphi(\tilde{\omega}) = \angle W(j\omega)_{\omega=\tilde{\omega}}$. L'errore sarà dato da:

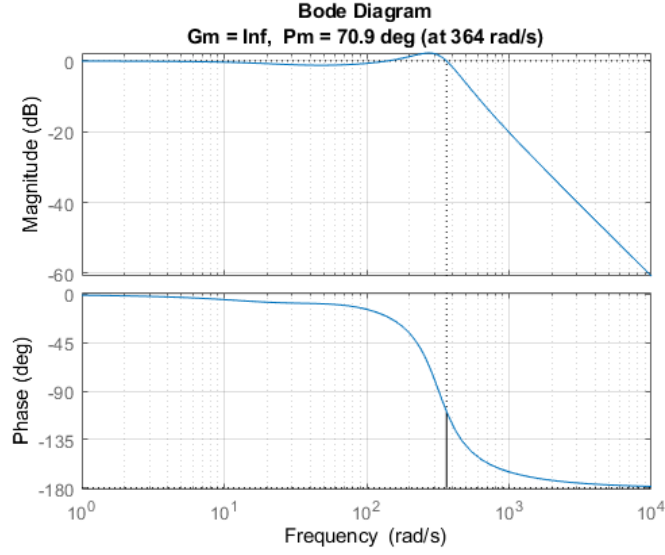
$$W_e(s) = |Kd - W(j\omega)| = \left| \frac{Kd^2}{Kd + G(j\omega)} \right| = \left| \frac{Kd}{1 + F(j\omega)} \right| \quad (5.8.1)$$

Per un guadagno ad anello molto elevato si ha un errore piccolo: $|G(j\omega)| \gg 0 \Rightarrow \tilde{e}(\omega) = \frac{Kd}{|F(j\omega)|} \ll 1$. Intorno alla pulsazione di taglio, si ha un guadagno ad anello basso, per cui si ha un errore $W_e(s) = Kd$.

5.9 Carta di Nichols

Tracciando il modulo della funzione a ciclo chiuso rispetto alla frequenza, si individuano il modulo alla risonanza Mr definito come la distanza tra il guadagno statico ed il picco del modulo, se il modulo rispetto alla frequenza è strettamente decrescente, il modulo alla risonanza è nullo. Si definisce banda passante ω_{-3} , la frequenza per cui il modulo della funzione a ciclo chiuso scende al di sotto di -3 dB . Analogamente al tempo caratteristico, rappresenta la massima pulsazione trattata dal sistema prima che l'effetto diminuisca considerevolmente.

La sovraelongazione s è direttamente proporzionale al modulo alla risonanza $s \propto Mr$, il tempo di salita t_s e la banda passante sono circa inversamente proporzionali $t_s \cdot \omega_{-3} \approx \text{cost.}$. Per un aumento del guadagno, aumentano sia la banda passante che la pulsazione di taglio, per cui le due frequenze sono direttamente proporzionali, mentre diminuisce il tempo di salita, per cui $\omega_t \propto \omega_{-3} \cdot t_s$.



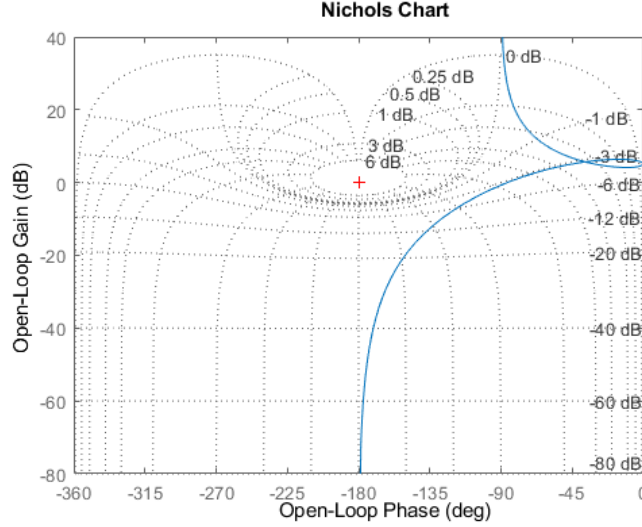
La carta di Nichols è un diagramma che rappresenta l'andamento della fase e del modulo di una funzione di trasferimento. Considera la fase nell'intervallo $[-360^\circ, 0^\circ]$, ed il modulo in $[-80\text{ dB}, 40\text{ dB}]$, viene usato un sistema di coordinate rettilineo usato per la funzione a ciclo aperto. Mentre per la funzione a ciclo chiuso si usa un sistema di coordinate curvilineo, formato da luogo delle curve a modulo costante, fino a -3 dB , ed a fase costante. Ovvero si considera o la fase o il modulo costante e si traccia l'andamento della funzione a ciclo chiuso $W = |W|e^{j\angle W}$ per la variazione della rimanente. Ha l'origine nel punto $(0\text{ dB}, -180^\circ)$: -1 .

Data $W = \frac{F}{1+F}$, ci si può ricavare la funzione a ciclo aperto: $F = \frac{W}{1-W}$. Si ricava il modulo della funzione a ciclo chiuso in una data fase dall'intersezione della curva a modulo costante con la funzione a ciclo aperto. Per $|W|_{\text{dB}} = -20\text{ dB}$, le curve a modulo costante sono quasi rettilinee nella carta di Nichols, per cui il comportamento della funzione a ciclo chiuso è molto simile alla funzione a ciclo aperto: $W = \frac{F}{1+F} \approx F$.

Dall'intersezione di F con la curva di modulo -3 dB si può determinare il valore della banda passante ω_{-3} , dalla fase corrispondente all'intersezione. La distanza sull'asse a 0 dB della curva F dall'origine rappresenta il margine di fase m_φ , mentre la distanza sull'asse a -180° della curva dall'origine rappresenta il margine di guadagno m_g . Per queste curve che passano l'asse a 0 dB da destra avranno una funzione a ciclo chiuso stabile. Il modulo alla risonanza è la curva a modulo costante maggiore che interseca la funzione a ciclo aperto, per $K_d = 1$. Per un modulo alla risonanza maggiore, la funzione F si avvicina all'origine della carta di Nichols, diminuendo il margine di fase, per cui $Mr \propto \frac{1}{m_\varphi}$; il fenomeno della risonanza è presente per $m_\varphi \ll 1$.

Dalle relazioni ottenute precedentemente:

$$\begin{cases} s \propto Mr \propto \frac{1}{m_\varphi} \\ t_s \cdot \omega_{-3} \propto \omega_t \end{cases} \quad (5.9.1)$$



5.10 Reti Correttrici

Per modificare in maniera selettiva l'andamento di un sistema si agisce direttamente sui poli e gli zeri del sistema. Un metodo per eliminare una dinamica sfavorevole per introdurne un'altra consiste nell'inserire una funzione in catena diretta contenente una coppia polo-zero a guadagno unitario. In questo modo si mantiene il guadagno statico del sistema e si agisce direttamente sull'andamento di Bode del processo. Questo metodo non si può utilizzare per eliminare elementi instabili da un processo, poiché le dinamiche di un sistema anche se vengono cancellate analiticamente rimangono fisicamente in esso. Per questo motivo anche il controllore deve avere una coppia poli-zero stabile.

Un controllore di questo tipo viene chiamato rete correttrice $R(s)$, può presentare il polo prima dello zero, in questo caso si chiama rete attenuatrice, oppure il polo dopo lo zero, rete anticipatrice. Le reti correttrici vengono definite da un parametro m , che rappresenta la distanza tra il polo e lo zero nel tempo, e di conseguenza l'intensità del cambiamento che provoca la rete, più i poli sono vicini, più l'effetto della rete viene diminuito poiché più sono vicini, meno tempo ha l'altra dinamica per bilanciare la prima. Queste reti vengono costruite fisicamente tramite una serie di resistenze ed un condensatore, più la coppia polo-zero è distante più precisione sarà richiesta per le resistenze, per cui si tende a scegliere tra reti a partià di effetto, quella con un parametro m minore per diminuire il costo di produzione del componente fisico.

Le reti correttrici sono definite da un altro parametro τ , utilizzato per traslare globalmente la coppia polo-zero, per un aumento o diminuzione dell'effetto causato della rete. Questo effetto viene

indicato su un diagramma di Bode rispetto ad una frequenza ω , pari alla frequenza dove si vuole applicare la rete tenendo conto della traslazione della coppia polo-zero τ . Poiché si vuole agire sulla pulsazione di taglio si avrà una frequenza $\omega = \omega_t \cdot \tau$.

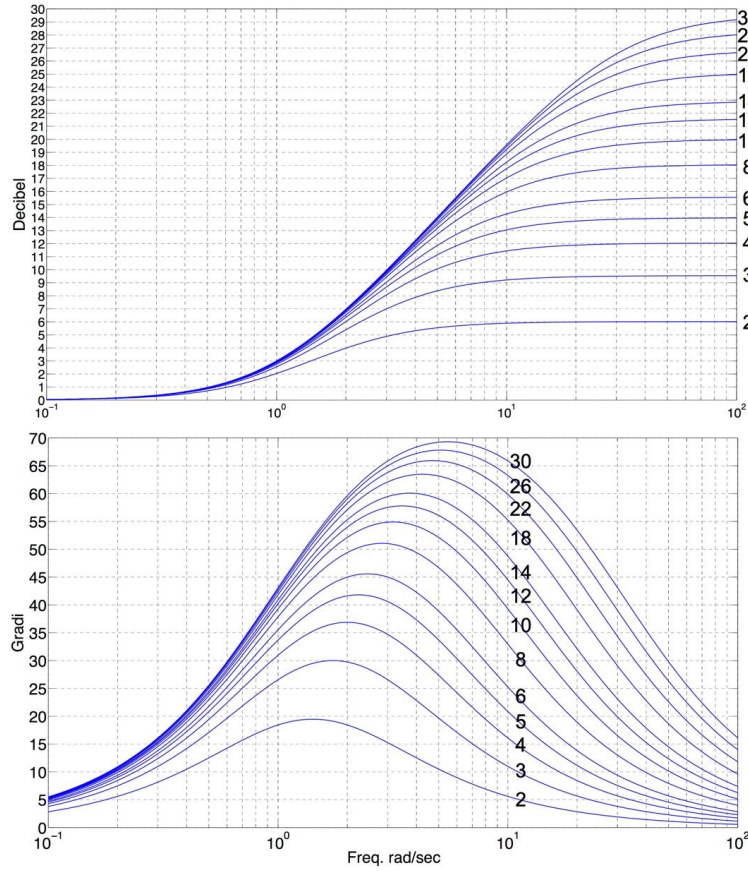
Le reti hanno funzione di trasferimento:

$$R(s)_{antp.} = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m}s} \quad (5.10.1)$$

$$R(s)_{att} = \frac{1 + \frac{\tau}{m}s}{1 + \tau s} \quad (5.10.2)$$

In una rete anticipatrice, presentando uno zero prima del polo, i moduli saliranno per poi rimanere costanti dopo il polo, mentre le fasi saliranno e poi scenderanno. Essendo una attenuatrice l'esatto opposto, i moduli prima scenderanno prima di arrestarsi e le fasi prima scenderanno e poi saliranno. È possibile che una rete correttiva si trovi al limite di stabilità.

Il diagramma usato per calcolare una rete si chiama carta delle reti compensatrici:



Poiché per una rete attenuatrice, l'effetto causato è esattamente l'opposto di una anticipatrice, si usa sempre la stessa carta per entrambe le reti, solo si considera l'effetto negativo quando si tratta di una attenuatrice.

In un sistema generico, la rete correttiva viene aggiunta in catene diretta al controllore $C(s)$, che presenta un numero h di integratori ed un guadagno K_c , per cui il controllore del sistema diventa:

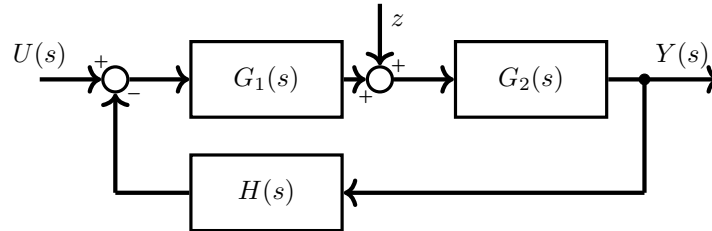
$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot R(s) \quad (5.10.3)$$

Si può dividere l'effetto di una rete, per qualsiasi m , in due zone. In una prima zona, il modulo varia di poco, mentre cambia notevolmente la fase, questo può essere usato in sistemi al limite di stabilità per recuperare margine di fase, senza cambiare il modulo del sistema. In una seconda zona si può variare di molto il modulo del sistema senza intaccare di troppo la fase. Per stabilizzare un sistema è necessario un margine di fase abbastanza grande per resistere ad errori, per cui si scelgono sempre reti che a parità di modulo diminuiscano il meno possibile la fase.

Si possono combinare più reti per sistemi, dove ogni rete agisce in un punto diverso nel tempo, in questo caso si useranno parametri τ e m diversi per ogni singola rete nel controllore.

5.11 Rumori Aleatori

Dei rumori aleatori sono dei tipi di errori che agiscono su un sistema il cui comportamento può essere descritto solo statisticamente. Per rigettare questo tipo di errori, si analizza l'intervallo di frequenze su cui agiscono.



A ciclo aperto il rumore ha un effetto sull'uscita $y_{z,F} = G_2 z$, a ciclo chiuso ha un effetto $y_{z,W} = \frac{G_2 z}{1+F}$. Il rumore ha un fattore di riduzione $1+F$, per determinare l'effetto del rumore sul ciclo chiuso si considera $\frac{y_{z,W}}{y_{z,F}}$. Si considera l'errore massimo causato dal rumore in quell'intervallo di frequenze K , per poter filtrare il rumore in quell'intervallo di frequenze bisogna che il suo effetto sul ciclo chiuso sia minore di questo errore: $\left| \frac{y_{z,W}}{y_{z,F}} \right| = \frac{1}{|1+F|} < \frac{1}{K} \Rightarrow |1+F| > K$. Per poter rigettare l'errore la funzione a ciclo aperto deve avere modulo maggiore di K nell'intervallo di frequenze su cui agisce l'errore. In caso sia presente un errore di aliasing, allora bisognerà avere un modulo minore di un certo valore, in un intervallo di frequenze.

Questi tipi di errori vengono rappresentati nel diagramma di Bode del modulo come una finestra o rettangolo di base l'intervallo di frequenza nel cui sono presenti, e di altezza il modulo che la funzione deve superare per evitare l'errore. Quando si usano reti correttive per traslare la pulsazione di taglio bisogna considerare se la funzione intersechi completamente o in parte questa finestra, in caso bisogna diminuire le aspettative del sistema e scegliere specifiche che permettano la stabilità in quella situazione.

5.12 Teoria di Lyapunov

Lyapunov alle fine dell'800 descrisse i sistemi non lineari ed un criterio sulla loro stabilità.

Per un sistema lineare autonomo $\dot{x} = f(x)$, si può considerare come un sistema a controreazione con un controllore che ne calcola l'entrata per cui non ha bisogno di un entrata esterna. Il sistema è in uno stato di equilibrio per $\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, può presentare un numero infinito di punti di equilibrio. Se per un valore di ε arbitrariamente piccolo, raggio di un intorno circolare di un punto di equilibrio del sistema, esiste un intorno circolare di raggio δ_ε che contiene l'effetto del sistema, il sistema ha un'evoluzione limitata. Un sistema si dice quindi semplicemente stabile se:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|x - x_{eq}\| < \varepsilon \Rightarrow \|x(t) - x_{eq}\| < \delta_\varepsilon \quad (5.12.1)$$

Per ogni intorno δ_ε del punto di equilibrio deve esistere un punto tale che la sua evoluzione rimanga contenuta in quel intorno circolare. Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_{eq}$ il sistema si dice asintoticamente stabile.

Poiché i sistemi lineari convergono esponenzialmente, se un sistema non lineare converge più velocemente di un qualsiasi esponenziale, si dice stabile esponenzialmente. Un sistema non lineare è stabile se esiste un intorno di stabilità, dove ogni evoluzione del sistema è almeno semplicemente stabile. Se esiste un unico punto di equilibrio del sistema è possibile che l'intorno sia infinito.

Sia $V(x)$ la funzione di stato del sistema, positiva per ogni valore di x , questa funzione avrà un valore vicino allo zero solo nell'intorno del punto di equilibrio, minimo della funzione. Si rappresenta con delle curve di livello, curve dove il valore di $V(x)$ è costante fino al valore $V(x_{eq})$, se il sistema è stabile nel punto X_{eq} allora le curve di livello tenderanno a restringersi intorno a quel punto.

Se la derivata della funzione di stato, in ogni punto del sistema, è definita e negativa, allora il sistema è asintoticamente stabile, per ogni stato del sistema V la sua evoluzione non potrà che diminuire.

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} f(x) < 0, \forall x \quad (5.12.2)$$

Questa funzione di stato viene chiamata funzione di Lyapunov, dopo aver determinato la funzione di Lyapunov di un sistema non lineare si può controllare la sua stabilità. Il teorema di LaSalle afferma che lo stato di un sistema non lineare tende asintoticamente al valore del suo invariante massimo, dove l'invariante massimo M è un sottoinsieme dell'insieme E dei punti per cui la derivata della funzione di Lyapunov si annulla: $M \subset E := \{x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_{eq}) | \dot{V}(x) = 0\}$.

Un sistema non lineare si può linearizzare intorno ad un suo punto di equilibrio, con $\Delta x = x - x_{eq}$, considerando l'espansione di Taylor della funzione $f(x)$ che definisce il sistema:

$$f(x) = \cancel{f(x_{eq})} + \frac{0}{1!} f'(x_{eq})(x - x_e) + \dots \quad (5.12.3)$$

$$f(x) \approx f'(x_{eq})\Delta x \quad (5.12.4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f(x_{eq}) = 0 \end{cases} \quad (5.12.5)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = f(x) \\ f(x_{eq}) = f'(x_{eq})\Delta x \end{cases} \quad (5.12.6)$$

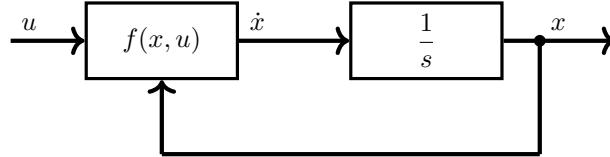
$$\Delta \dot{x} = f'(x_{eq})\Delta x \quad (5.12.7)$$

Considerando un sistema non lineare con un'entrata $u(t)$, definito da $\dot{x} = f(x, u)$, si può linearizzare considerando:

$$\Delta \dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{eq}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u_{eq}} \Delta u = \left(\mathbf{J}f \right|_{(x_{eq}, u_{eq})} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta u \end{bmatrix} \right) \quad (5.12.8)$$

Dove $\mathbf{J}f$ è il Jacobiano della funzione f .

Se il sistema \sum_L linearizzato è asintoticamente stabile allora anche il sistema non lineare \sum_{NL} è asintoticamente stabile, se \sum_L è instabile lo è anche \sum_{NL} , se \sum_L è al limite di stabilità, non si può stabilire il comportamento di \sum_{NL} . Per cui il sistema \sum_{NL} si può stabilizzare localmente, agendo sul sistema linearizzato \sum_L . Per controllare l'intorno di stabilità, si simula l'evoluzione del sistema.



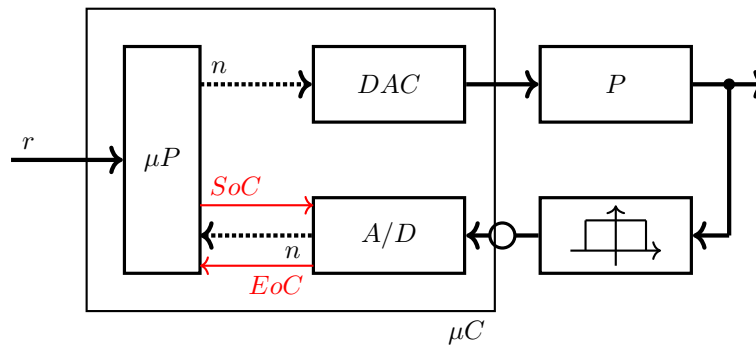
6 Sistemi a Segnali Campionati

6.1 Microcontrollore

Un microcontrollore è un oggetto fisico input-output capace di dialogare con l'ambiente esterno, all'interno di un chip, anche molto economico. Sono oggetti che presenta all'interno un controllore, quindi sono in grado di risolvere piccoli problemi di automazione. Dei PLC sono invece dei controllori più sofisticati che permettono di avere frequenze di aggiornamento molto elevate e trasmissione di dati costante.

Un microcontrollore è composto da un microprocessore μP , convertitori da digitale ad analogico DAC , per poter dialogare con un certo processo P da controllare, convertendo i dati del processo in livelli di tensione. La tensione in uscita dal DAC è di bassa potenza, per cui è presente a cascata un amplificatore alimentato da un generatore di tensione esterno, per avere in uscita livelli di tensione adeguati. Per ricevere dati dal processo, si usa in catena di misura un filtro-antialiasing, per pulire il segnale che poi viene passato ad un convertitore A/D che trasforma il segnale continuo in un segnale discreto. Il microprocessore informa il convertitore A/D con un segnale SoC per iniziare la conversione, il quale invia un segnale EoC al microprocessore per segnalare la fine della conversione del dato. A quel punto il microprocessore leggerà sul bus il dato convertito. Si può inserire un circuito di adattamento tra il filtro antialiasing ed il convertitore A/D , per adattare l'uscita in tensione del processo all'ingresso in tensione dei convertitori. Poiché i convertitori hanno un certo intervallo di ingresso accettabile in Volt, il dato ottenuto operando su quello grezzo del sensore viene chiamato dato ingegnerizzato.

Il valore di riferimento del microcontrollore può essere computato o inserito da un segnale esterno. Il microcontrollore μC comprende il microprocessore, ed i convertitori DAC e A/D , anche su un singolo chip.



6.1.1 Conversione Dati

Un dato digitale viene rappresentato da un certo numero n di bit, per cui può rappresentare valori nell'intervallo $[0, 2^n - 1]$. Viene suddiviso l'intervallo di tensione in entrata in 2^n intervalli uguali e ogni valore che un bit può rappresentare corrisponderà quindi ad un intervallo di tensione. Non è possibile determinare in questo modo la tensione esatta, questo effetto viene chiamato quantizzazione, ed è quantificabile dal passo di quantizzazione, ovvero la grandezza di un singolo intervallo

di tensione:

$$q = \frac{\Delta V}{2^n} \quad (6.1.1)$$

Per cui è impossibile determinare a meno del passo di quantizzazione una certa uscita, e quindi la precisione del controllore non potrà mai essere minore del passo di quantizzazione, poiché non può agire su ciò che non può misurare. È necessario decidere a priori il passo di quantizzazione necessario per l'applicazione del controllore. Poiché la quantizzazione è un processo non lineare, si considererà sempre nelle successive analisi come se si fosse scelto il numero di bit sufficiente per le applicazioni considerate. Verrà considerato alla fine un rumore di quantizzazione dovuto alla differenza tra la suddivisione in gradini e l'andamento lineare.

Per scegliere il numro di bit adatto, si analizza l'oscillazione del segnale e si misura la varianza rispetto al valor medio e si calcola il valore di rumore in percentuale $e[\%]$, e si sceglie un numero di bit abbastanza piccolo da non campionare il rumore n t.c. $\frac{1}{n} > \frac{e}{100}$, poiché essendo casuale il controllore non potrà agire su di esso.

Se si scelgono troppi pochi bit, il segnale potrebbe variare senza una variazione nella sua rappresentazione.

6.1.2 Equazione alle Differenze

Il microcontrollore misura l'ingresso come una serie di valori $\{y_i\}$, legati ognuno ad un tempo t_i , in base all'entrata il microcontrollore genera una sequenza di uscita $\{c_i\}$, che non può calcolare in base al controllore $C(s)$, poiché dovrebbe risolvere un'equazione differenziale, per cui lavora su un'equazione alle differenze:

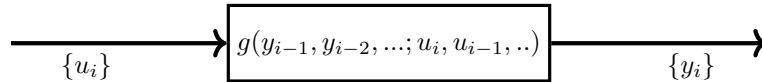
$$c_i = c_{i-1} + f(e_i) \quad (6.1.2)$$

Dove l'errore e_i è calcolato come la differenza tra l'entrata ed il riferimento in quell'intervallo di tempo t_i : $e_i = r_i - y_i$.

In generale in un'equazione alle differenze, l'uscita dipende dallo stato e dai valori in entrata che gli si applicano:

$$y_i = g(y_{i-1}, y_{i-2}, \dots; u_i, u_{i-1}, \dots) \quad (6.1.3)$$

Per cui anche l'equazione alle differenze come le equazioni differenziali possono essere usate per descrivere sistemi con memoria, mentre le equazioni differenziali agiscono su sistemi continui, le equazioni alle differenze operano in un ambiente discreto.



Un microprocessore può simulare un'equazione alle differenze in base ai dati in entrata e così calcolarsi il controllore per ogni t_i , questo calcolo verrà inviato al convertitore DAC . Dopo aver inviato i dati in uscita, il microcontrollore aspetterà la fine del tempo di campionamento T_c prima

di eseguire nuovamente il calcolo del controllore. Se il processo da controllare è molto sensibile a ritardi temporali, allora non si può usare un software che potrebbe impedire a questa routine di avviarsi nel tempo desiderato.

6.1.3 Tempo di Campionamento

Il microcontrollore leggerà i dati dal bus nell'intervallo tra il segnale *SoC* ed il segnale *EoC*, dopo aver letto il segnale *EoC* il controllore elaborerà i dati in un certo intervallo di tempo. Dopo aver elaborato i dati li invierà al convertitore *DAC* per trasformarli in dati analogici in un altro intervallo di tempo. A questo punto il microprocessore si fermerà fino al prossimo tempo di campionamento. La lunghezza di questo intervallo di tempo complessivo è un ritardo che può influire in diversa maniera sul sistema in base al tempo di campionamento. Se questo ritardo è relativamente lungo allora il controllore calcolato c_i non corrisponderà esattamente allo stato del sistema all'istante t_i , dato che è passato un intervallo di tempo equivalente al ritardo. Per cui il controllore calcolato è approssimato. Mentre se il ritardo è trascurabile poiché è relativamente corto, non si tiene conto del ritardo.

In caso di ritardo basso si può usare un'equazione alle differenze del controllore $c_i = f(c_{i-1}, e_i)$ mentre se il ritardo è elevato, si considera un'equazione alle differenze $c_i = f(c_{i-1}, e_{i-1})$. Poiché quest'ultima calcola il controllore successivo, può inviare il dato alla fine del tempo di campionamento, per avere più tempo per calcolare il controllore.

6.2 Rappresentazione Segnali Campionati

Dato lo stato nel tempo di un sistema $x(t)$, se si implementa un controllore digitale, si avrà accesso solo ad una sequenza di stati $\{x_k\}$ dove ogni stato è dato dallo stato del sistema in un tempo multiplo del tempo di campionamento $x_k = x(kT_c)$. Per rappresentare questa sequenza di punti può essere usato l'impulso di ampiezza uguale al valore in quell'istante, per cui il segnale campionato può essere descritto da:

$$x_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta_0(t - kT_c) \quad (6.2.1)$$

La sequenza di impulsi ha esattamente il contenuto informativo della sequenza di valori misurati $\{x_k\}$. Per cui è possibile usarlo per lavorare sul tempo discreto. Da questo segnale campionato è possibile ottenere la sua trasformata di Laplace:

$$x_c(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skT_c} \quad (6.2.2)$$

Per cui ha una sua risposta in frequenza, e probabilmente un suo diagramma di Bode. Considerando $s = \sigma + j\omega$, si può riscrivere come:

$$x_c(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-\sigma kT_c} e^{-j\omega kT_c} \quad (6.2.3)$$

Data una pulsazione di campionamento $\omega_c = 2\pi\nu_c = \frac{2\pi}{T_c}$, per cui si potrà riscrivere la parte complessa dell'esponenziale come:

$$e^{-j\omega_k T_c} = e^{-j\omega_k \frac{2\pi}{\omega_c}} \quad (6.2.4)$$

Questo oggetto avrà come esponente un multiplo di 2π per ogni valore di k intero, poiché è sempre intero rappresentando un numero di tempi di campionamento, questo esponenziale si ripeterà ogni ω_c . Per cui il piano di Guass sarà diviso in delle fasce di ampiezza ω_c uguali tra loro, allora si considera solamente una singola striscia per analizzare il comportamento in frequenza del segnale campionato. Questo segnale presenta una ripetizione in frequenza generale anche per ogni valore reale.

Si definisce un nuovo segnale $\delta_T(t)$, formato da una rastregliera di impulsi unitari ogni T_c :

$$\delta_t(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(t - kT_c) \quad (6.2.5)$$

Moltiplicando la rastregliera con il segnale da campionare $x(t)$, si ottiene il segnale campionato. Da tenere conto del fatto che una rastregliera non è una funzione, essendo discreta, mentre il segnale da campionare essendo nel continuo è una funzione.

$$x_c(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) \quad (6.2.6)$$

La funzione rastregliera è periodica, dall'analisi di Fourier, ogni funzione periodica può essere scritta come una sommatoria di funzioni sinusoidali e cosinusoidali:

$$\delta_T(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(k\omega_c t) + b_k \cos(k\omega_c t)) \quad (6.2.7)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega_c t} \quad (6.2.8)$$

Per ottenere le componenti della serie di Fourier rispetto ad un sistema di coordinate ortogonali, si usano due versori (\hat{i}_1, \hat{i}_2). Per ottenere la proiezione di un vettore rispetto ad una coordinata si definisce un prodotto interno, dato dal prodotto scalare: $v_k = \langle v, \hat{i}_k \rangle = \vec{v} \cdot \hat{i}$. Per scomporre una funzione in una somma di funzioni bisogna avere funzioni indipendenti tra di loro, se sono ortogonali è più facilmente computabile, viene definito un prodotto interno che restituisce la componente c_k dell'espansione di Fourier:

$$c_k = \langle f(t), \varphi^*(t) \rangle = \frac{1}{T_c} \int_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} f(t) \cdot \varphi^*(t) dt \quad (6.2.9)$$

L'integrale soddisfa i requisiti per essere un prodotto interno. Questa applicazione funziona fino a quando le funzioni sono indipendenti tra di loro, per determinare se sono ortogonali tra di loro,

si controlla che il prodotto interno tra due funzioni di base $f(t) = e^{jk\omega_c t}$ e $\varphi(t) = e^{jl\omega_c t}$ per $l \neq k$ sia zero:

$$\frac{1}{T_c} \int_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} e^{jl\omega_c t} e^{-jk\omega_c t} dt = \frac{1}{T_c} \left[\frac{e^{j(l-k)\omega_c t}}{j(l-k)\omega_c} \right]_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} = \frac{1}{T_c} \frac{e^{j(l-k)\pi} - e^{-j(l-k)\pi}}{j(l-k)\omega_c} = \frac{2}{T_c(l-k)\omega_c} \sin((l-k)\pi) = 0 \quad (6.2.10)$$

$$\frac{1}{T_c} \frac{e^{j(l-k)\pi} - e^{-j(l-k)\pi}}{j(l-k)\omega_c} = \frac{2}{T_c(l-k)\omega_c} \sin((l-k)\pi) = 0 \quad (6.2.11)$$

Si è verificato che il prodotto interno definito precedentemente tra due funzioni di base è zero per $l \neq k$.

Per determinare i coefficienti dell'espansione di Fourier c_k rispetto alla rastregliera $\delta_T(t)$, si considera:

$$c_k = \frac{1}{T_c} \int_{-\frac{T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}} \delta_T(t) e^{-jk\omega_c t} dt \quad (6.2.12)$$

L'unico impulso della rastregliera che cade in quell'intervallo è nell'istante $t = 0$. L'integrale di un prodotto tra una funzione e l'impulso, equivale a calcolare il valore della funzione in quel punto, per cui si ha:

$$c_k = \frac{1}{T_c} e^{-jk\omega_c \cdot 0} = \frac{1}{T_c} \quad (6.2.13)$$

Per cui si può scrivere la rastregliera come:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_c t} \quad (6.2.14)$$

Il segnale campionato sarà allora:

$$x_c(t) = x(t) \delta_T(t) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_c t} \quad (6.2.15)$$

$$x_c(s) = \mathcal{L}\{x_c(t)\} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_c t} \right\} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(s - k\omega_c j) \quad (6.2.16)$$

6.2.1 Teorema di Shannon

La sua trasformata in Laplace si chiama teorema di Shannon, espressa rispetto alla risposta armonica:

$$x_c(j\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(j(\omega - k\omega_c)) \quad (6.2.17)$$

Per cui l'oggetto che si ripete in frequenza, quando è stato analizzato prima il segnale nel dominio della frequenza, si è scoperto essere la trasformata di Laplace del segnale originario. Considerando la risposta armonica, si potrà disegnare il diagramma di Bode, il lobo centrale del modulo di $x_c(j\omega)$ sarà uguale al modulo del segnale originario $x(j\omega)$, ripetuto ogni ω_c . In caso la metà della pulsazione di campionamento è maggiore della frequenza massima del segnale, allora i lobi saranno

separati. Allora il segnale sarà multiplato in sequenza, uguale al segnale non campionato. Per cui si può usare un filtro passa basso fino a $\frac{\omega_c}{2}$, per isolare solamente il lobo centrale, per ottenere il segnale originario, amplificato di T_c . Questo segnale viene chiamato segnale ricostruito.

Sorge un problema poiché il segnale che si vuole passare attraverso un filtro passa basso è una serie di numeri, e successivamente quella oggetto viene usato per essere questo filtro. L'antitrasformata di questo filtro, un oggetto che ha modulo T_c nell'intervallo $[-\frac{\omega_c}{2}, \frac{\omega_c}{2}]$ e modulo nullo per tutte le altre frequenze, risulta essere:

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right)}{\frac{\omega_c}{2}t} = \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{2}t\right) \quad (6.2.18)$$

Ma questa risposta impulsiva è diversa da zero anche per tempi negativi, per cui comincia ad oscillare prima di un entrata, di conseguenza è anticausale. Ma se sono già noti tutti i campioni è possibile ricostruire il segnale, poiché si conoscono tutte le entrate future. L'uscita sarà una sommatoria di risposte impulsive, moltiplicate per la risposta impulsiva del filtro passa-basso, sommando punto per punto si ottiene in uscita il segnale continuo di partenza. Per eseguire questa operazione su un processore, si considera una frequenza di campionamento maggiore, quindi si inseiscono altri impulsi tra i camiponi noti, ricavati dalle *sinc*. Alternativamente, poiché l'effetto della *sinc* diminuisce nella distanza dal campione, per cui il processore calcola un certo numero di *sinc* in avanti e le somma a quelle passate per ottenere il valore in quel punto. Il numero di *sinc* che precalcola il processore dipende interamente dalla sua velocità nel calcolarle. Più *sinc* in avanti si calcola il processore, più aumenta la qualità dell'audio correggendo il valore del campione in quel punto.

Il teorema di Shannon prevede un ricostruttore ideale, se questa condizione non è rispettata, i lobi si intersecano tra di loro, per cui si campiona una parte minore del lobo centrale, e la parte rimanente crea delle distorsioni nel campione di partenza, ovvero delle frequenze che non esistevano. Questo fenomeno viene detto aliasing. Per evitare l'aliasing si aumenta la frequenza di campionamento, oppure si ignorano queste frequenze elevate, riducendo la banda del segnale prima del campionamento attraverso un filtro passa-basso, che verrà chiamato filtro anti-aliasing.

Se si usa un ricostruttore semplificato, diverso da quello di Shannon, diminuirà la precisione del segnale in uscita. Il più semplice ricostruttore possibile è composto da una gradinata che assume tensione costante per ogni intervallo di campionamento, definito ricostruttore di ordine zero o tenuta di origine zero.