

Fisica

Indice

1	Introduzione: Grandezze Fisiche	5
1.1	Tempo	5
1.2	Lunghezza	5
1.3	Massa	5
2	Vettori	6
2.1	Somma tra Vettori	6
2.2	Prodotto tra un Vettore ed un Scalare	7
2.3	Versore di un Vettore	7
2.4	Prodotto Scalare tra due Vettori	7
2.5	Componenti di un Vettore	8
2.6	Coordinate Polari	8
2.7	Prodotto Vettoriale tra due Vettori	9
2.8	Coordinate Sferiche	10
3	Cinematica	12
3.1	Traiettoria	12
3.2	Moto nello Spazio	13
3.2.1	Moto Rettilineo Uniforme	14
3.2.2	Moto Uniformemente Accelerato	15
3.2.3	Caduta di un Grave	16
3.2.4	Moto Armonico o Oscillatorio	17
3.2.5	Moto Parabolico	18
3.2.6	Moto Circolare Uniforme	21
3.2.7	Moto Circolare Periodico	23
3.2.8	Moto Circolare non Uniforme	24
3.2.9	Approssimazione mediante Serie di Taylor della Legge Oraria	25
3.2.10	Moto Vario	25
4	Dinamica	27
4.1	I Principio	27
4.2	II Principio	27
4.3	III Principio	28
4.4	Equilibrio	29
4.5	Forze	29
4.5.1	Teoria della Gravitazione Universale	29
4.5.2	Forza Peso	34
4.5.3	Reazione Vincolare	35
4.5.4	Forza di Attrito Radente	35
4.5.5	Forza di Attrito Dinamico	36
4.5.6	Piano Inclinato	36
4.5.7	Tensione	38
4.5.8	Pendolo Semplice	39
4.5.9	Forza Elastica	40
4.5.10	Forza di Attrito Viscoso	43

4.6	Oscillatore Armonico	45
4.6.1	Moto Oscillatorio con Attrito Viscoso	45
4.6.2	Moto Oscillatorio con Attrito Viscoso ed una Forzante	48
4.7	Moti Relativi e Forze Apparenti	50
4.7.1	Sistemi Inerziali	50
4.7.2	Sistemi non Inerziali	51
4.7.3	Sistemi non Inerziali con Rotazione e Trascinamento	52
5	Meccanica	53
5.1	Lavoro	53
5.2	Forze Conservative	54
5.3	Forze non Conservative	56
5.4	Potenza	56
5.5	Energia Cinetica	57
5.6	Energia Potenziale	57
5.7	Teorema della Conservazione dell'Energia	58
5.8	Energia Meccanica	58
5.9	Potenziale	59
5.10	Equilibrio e Stabilità	60
6	Dinamica dei Sistemi di Punti Materiali	62
6.1	Centro di Massa	63
6.2	Sistema Isolato	64
6.3	Sistema di Riferimento del Centro di Massa	64
6.4	II Teorema di Köning	65
6.5	Urti	66
6.5.1	Forze Impulsive	66
6.5.2	Elastici	67
6.5.3	Anaelastici	69
6.6	Momento	69
6.7	Momento di un Sistema di Punti	72
6.8	I Teorema di Köning	73
6.9	Coppie di Forze	73
6.10	Densità	74
6.11	Corpo Rigido	75
6.12	Teorema di Huygens-Steiner	77
6.13	Pendolo Fisico	78
7	Termodinamica	80
7.1	Termometria	80
7.2	Principio Zero e Stato Termodinamico	80
7.3	Sistema Termodinamico	81
7.4	Cenni di Calorimetria	83
7.5	Lavoro di un Sistema Termodinamico	83
7.6	Trasformazioni Termodinamiche	84
7.6.1	Isocora	85
7.6.2	Isobora	86

7.6.3	Isoterma	86
7.6.4	Adiabatica	86
7.7	Calori Specifici dei Gas Ideali	87
7.8	Trasformazioni di Gas Ideali	89
7.8.1	Ciclo Termodinamico	90
7.9	Teoria Cinetica	92
7.9.1	Teoria dell'Equipartizione dell'Energia	94
7.10	Secondo Principio della Termodinamica	95
7.10.1	Enunciato di Kelvin	95
7.10.2	Enunciato di Clausius	96
7.11	Ciclo di Carnot	98
7.11.1	Teorema di Carnot	99
7.12	Teorema di Clausius ed Entropia	101

1 Introduzione: Grandezze Fisiche

1.1 Tempo

Nel Sistema Internazionale il tempo viene misurato mediante il secondo (s). Un secondo viene definito come il tempo necessario per un fotone emesso da un atomo di $Cesio - 133$ per compiere $9,192631770 \times 10^9$ oscillazioni.

Sapendo che l'energia emessa dal fotone è: $E_{Ce133\varphi} = \lambda_{Ce133\varphi} h$, la sua lunghezza d'onda λ è data dal prodotto della velocità del fotone per la sua frequenza: $\lambda = cf$.

Quindi si può ricavare la frequenza, e di conseguenza il periodo, dal fotone sostituendo nell'equazione per l'energia:

$$\begin{aligned} E_{Ce133\varphi} &= cf_{Ce133\varphi} h \\ f_{Ce133\varphi} &= \frac{E_{Ce133\varphi}}{ch} \\ T_{Ce133\varphi} &= \frac{ch}{E_{Ce133\varphi}} \\ 1s &:= 9,192631770 \times 10^9 \times T_{Ce133\varphi} = 9,192631770 \times 10^9 \times \frac{ch}{E_{Ce133\varphi}} \end{aligned}$$

dove h è la costante di Plank, c è la velocità della luce nel vuoto, e $E_{Ce133\varphi}$ è l'energia emessa dal fotone, misurabile.

1.2 Lunghezza

Nel Sistema Internazionale la lunghezza viene misurata mediante il metro (m). Un metro viene definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/(2,99792458 \times 10^8)s$:

$$1m := \frac{c}{2,99792458 \times 10^8} s$$

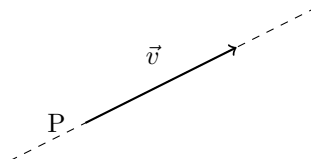
1.3 Massa

Nel Sistema Internazionale la massa viene misurata mediante il chilogrammo (kg). Un chilogrammo viene definito come la massa necessaria per equilibrare in una bilancia di Watt una quantità di corrente proporzionale alla costante di Planck:

$$1kg := \left(\frac{h}{6,62607015 \times 10^{-34}} \right) \frac{s}{m^2}$$

2 Vettori

Un vettore è un oggetto matematico definito da modulo, direzione e verso. Poiché la sua definizione non dipende dal punto di applicazione tutti i vettori aventi gli stessi moduli, direzioni e versi vengono definiti equipollenti:



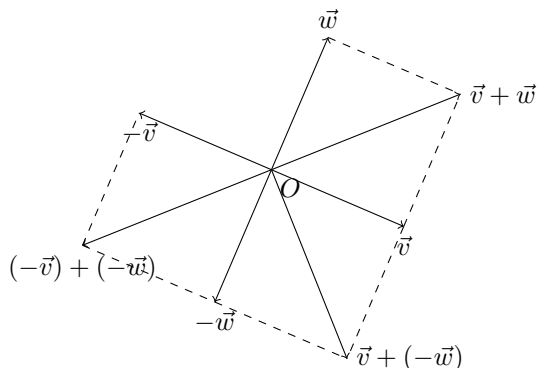
Il vettore \vec{v} , applicato sul punto P , in figura viene definito del modulo ($|\vec{v}| = v$) rappresentato dalla lunghezza del segmento, dalla direzione rappresentata dalla retta su cui poggia, e dal verso rappresentato dalla freccia alla fine del segmento. Si usa la notazione $\vec{v} \in \vec{V}(P)$ per indicare che il dato vettore appartiene alla classe di vettori applicati su P . Poiché il punto di applicazione di un vettore non cambia il comportamento delle operazioni tra vettori per convenzione si considera, se non viene specificato, il punto di applicazione coincidente con l'origine uno spazio vettoriale di dimensione n : $\vec{V}^n(O)$.

2.1 Somma tra Vettori

Dati due vettori appartenenti allo stesso spazio vettoriale: $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{V}^n(O)$, viene definita l'operazione binaria interna somma (+) secondo le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{w} &\in \vec{V}^n(O) \\ \vec{v} + \vec{w} &= \vec{w} + \vec{v} \\ \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) &= (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} \\ \vec{v} + \vec{0} &= \vec{v} \\ \vec{v} + (-\vec{v}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Graficamente la somma può essere rappresentata mediante il metodo punta-coda o metodo del parallelogramma, è possibile dimostrare graficamente che $-(\vec{v} + \vec{w}) = -\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$:



2.2 Prodotto tra un Vettore ed un Scalare

Dato un vettore $\vec{v} \in \vec{V}^n(O)$, ed uno scalare $k \in \mathbb{R}$, viene definita l'operazione binaria esterna prodotto per uno scalare (\cdot) secondo le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} k\vec{v} &\in \vec{V}^n(O) \\ k(\vec{v} + \vec{w}) &= k\vec{v} + k\vec{w} \\ (k + h)\vec{v} &= k\vec{v} + h\vec{v} \\ k(h\vec{v}) &= (kh)\vec{v} \\ k\vec{v} = \vec{0} &\iff k = 0 \vee \vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

2.3 Versore di un Vettore

Dato un vettore $\vec{v} \in \vec{V}^n(O)$, il suo versore viene definito come un vettore di modulo unitario: $\hat{v} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Un vettore può quindi essere rappresentato come $\vec{v} = v\hat{v}$.

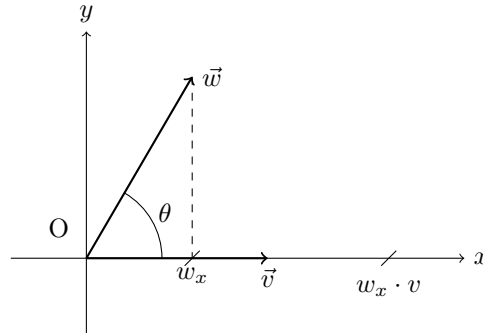
Considerando gli assi di un sistema di riferimento cartesiano, possono essere definiti i versori paralleli e aventi stessa direzione di quegli assi come: \hat{x} e \hat{y} .

2.4 Prodotto Scalare tra due Vettori

Dati due vettori \vec{v} , \vec{w} , viene definito il prodotto scalare (\cdot) tra i due come: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \cos \theta |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \in \mathbb{R}$. Dove θ rappresenta l'angolo compreso tra i due vettori, è indifferente se si considera l'angolo interno (θ) o esterno ($\gamma = 2\pi - \theta$) poiché si avrebbe:

$$\cos \gamma = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

Se viene considerato il primo dei due vettori parallelo ad un asse del sistema di riferimento usato, allora si può considerare il prodotto scalare tra i due come la proiezione del secondo sull'asse indicato moltiplicato per il modulo del primo vettore:



Quindi la proiezione rispetto all'asse x del vettore \vec{w} è data da: $w_x = \vec{w} \cdot \hat{x} = \cos \theta |\vec{w}| \cdot 1$, in generale la proiezione ortogonale di un vettore rispetto ad un altro vettore è data dal prodotto scalare tra il primo vettore per il versore del secondo: $w_v = \vec{w} \cdot \hat{v}$. Il prodotto scalare è massimo quando i due vettori sono paralleli ovvero quando $\cos \theta = 1$, ed è nullo quando i due vettori sono

perpendicolari: $\cos 0 = 0$. Perciò: $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$, mentre $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$. Per il prodotto scalare valgono le proprietà distributiva, associativa e transitiva.

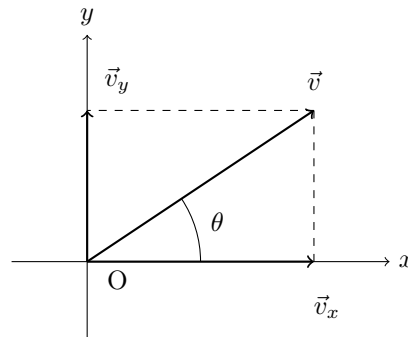
2.5 Componenti di un Vettore

Dato un vettore, vengono definiti componenti del vettore le sue proiezioni ortogonali rispetto agli assi del sistema di riferimento usato:

$$\vec{v} \cdot \hat{x} = \cos \theta v = v_x \quad (2.5.1)$$

$$\vec{v} \cdot \hat{y} = \cos(2\pi - \theta) v = \sin \theta v = v_y \quad (2.5.2)$$

È possibile rappresentare un vettore tramite i suoi componenti: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$, dove \vec{v}_x e \vec{v}_y sono i vettori componenti di \vec{v} .

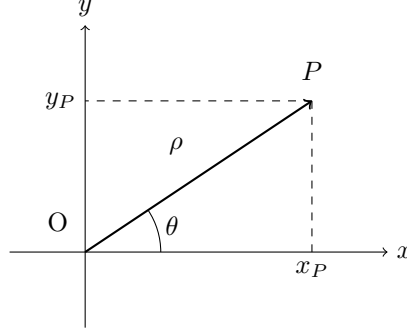


A differenza del vettore le sue componenti dipendono dal sistema di riferimento usato per ottenerle.

2.6 Coordinate Polari

In coordinate cartesiane il punto P viene indicato con (x_P, y_P) ; in coordinate polari viene indicato con (ρ_P, θ_P) , dove ρ rappresenta la distanza del punto dall'origine e θ rappresenta l'angolo che forma il segmento OP con il semiasse uscente dall'origine e parallelo a l'asse x . Per cambiare sistema di coordinate del punto P :

$$\begin{aligned} x_P &= \rho \cos \theta \\ y_P &= \rho \sin \theta \\ \rho &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \\ \theta &= \arctan \left(\frac{y_P}{x_P} \right) \end{aligned}$$



Si può rappresentare un vettore in coordinate polari: $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} = \rho \cos \theta \hat{x} + \rho \sin \theta \hat{y}$, dove ρ è la distanza dall'origine e θ l'angolo che forma con il semiasse x . Considerando $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta$, ci si può ricavare il valore di θ :

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_y}{v_x} \right) \quad (2.6.1)$$

Per ottenere la distanza dall'origine ρ si considera:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{v} &= v^2 \\ (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \cdot (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) & \\ v_x v_x \hat{x} \cdot \hat{x} + v_x v_y \hat{x} \cdot \hat{y} + v_y v_x \hat{y} \cdot \hat{x} + v_y v_y \hat{y} \cdot \hat{y} & \\ v_x^2 + v_y^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \\ \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= \rho^2 \\ v^2 &= \rho^2 \\ v &= \rho \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

si è dimostrato che il modulo del vettore \vec{v} è uguale alla distanza dall'origine ρ .

2.7 Prodotto Vettoriale tra due Vettori

Dati due vettori \vec{v} e \vec{w} , viene definito il vettore prodotto vettoriale:

$$\vec{v} \times \vec{w} := v \cdot w \sin \theta \hat{v} \times \hat{w} \quad (2.7.1)$$

La direzione del vettore $\hat{v} \times \hat{w}$ viene ottenuta mediante la regola della mano destra di conseguenza l'ordine dei vettori determina il verso del vettore prodotto vettoriale, e si ha: $\hat{v} \times \hat{w} = -\hat{w} \times \hat{v}$.

Poiché si considera il seno dell'angolo tra i due vettori se essi sono paralleli, il prodotto vettoriale risultante è nullo, mentre se essi sono perpendicolari il prodotto vettoriale risultante è massimo.

Il modulo del prodotto vettoriale tra due vettori risulta essere l'area del parallelogramma descritto dai vettori applicati su uno stesso punto, come se si stesse applicando il metodo del parallelogramma, per cui il prodotto vettoriale risulta essere l'area con segno descritta dai due vettori.

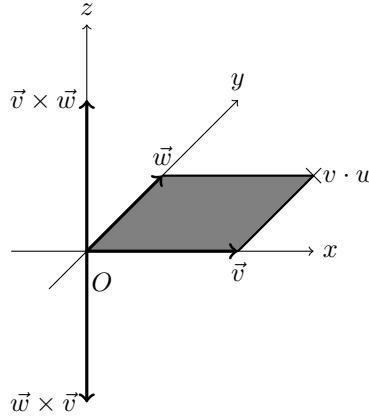
Per il prodotto vettoriale vale la proprietà distributiva $\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}$, ma essendo dipendente dall'ordine dei vettori, la proprietà associativa non è valida: $\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) \neq (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) &= (\vec{v}_x + \vec{v}_y) \times ((\vec{w}_x + \vec{w}_y) \times (\vec{u}_x + \vec{u}_y)) \\
&= (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \times (w_x u_x \hat{x} \times \hat{x} + w_x u_y \hat{x} \times \hat{y} + w_y u_x \hat{y} \times \hat{x} + w_y u_y \hat{y} \times \hat{y}) \\
&= (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \times (w_x u_y \hat{z} + w_y u_x (-\hat{z})) \\
&= v_x w_x u_y \hat{x} \times \hat{z} + v_x w_y u_x \hat{x} \times (-\hat{z}) + v_y w_x u_y \hat{y} \times \hat{z} + v_y w_y u_x \hat{y} \times (-\hat{z}) \\
&= v_x w_x u_y (-\hat{y}) + v_x w_y u_x \hat{y} + v_y w_x u_y \hat{x} + v_y w_y u_x (-\hat{x}) \\
\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) &= (v_y w_x u_y - v_x w_y u_x) \hat{x} + (v_x w_y u_x - v_y w_x u_y) \hat{y}
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} &= ((\vec{v}_x + \vec{v}_y) \times (\vec{w}_x + \vec{w}_y)) \times (\vec{u}_x + \vec{u}_y) \\
&= (v_x w_x \hat{x} \times \hat{x} + v_x w_y \hat{x} \times \hat{y} + v_y w_x \hat{y} \times \hat{x} + v_y w_y \hat{y} \times \hat{y}) \times (u_x \hat{x} + u_y \hat{y}) \\
&= (v_x w_y \hat{z} + v_y w_x (-\hat{z})) \times (u_x \hat{x} + u_y \hat{y}) \\
&= v_x w_y u_x \hat{z} \times \hat{x} + v_x w_y u_y \hat{z} \times \hat{y} + v_y w_x u_x (-\hat{z}) \times \hat{x} + v_y w_x u_y (-\hat{z}) \times \hat{y} \\
&= v_x w_y u_x \hat{y} + v_x w_y u_y (-\hat{x}) + v_y w_x u_x (-\hat{y}) + v_y w_x u_y \hat{x} \\
(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} &= (v_y w_x u_y - v_x w_y u_x) \hat{x} + (v_x w_y u_x - v_y w_x u_y) \hat{y}
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

$$(v_y w_x u_y - v_x w_y u_x) \hat{x} + (v_x w_y u_x - v_y w_x u_y) \hat{y} \neq (v_y w_x u_y - v_x w_y u_x) \hat{x} + (v_x w_y u_x - v_y w_x u_y) \hat{y}$$

$$\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) \neq (\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} \tag{2.7.4}$$



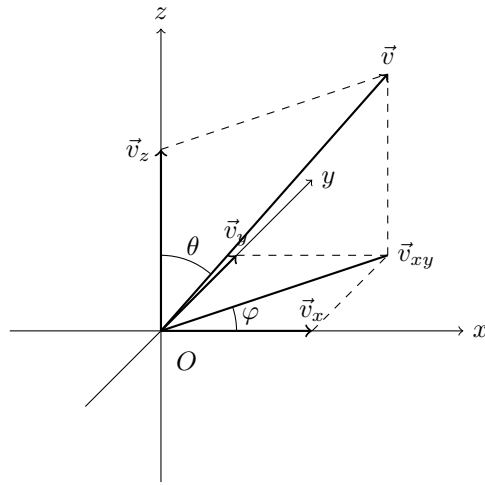
2.8 Coordinate Sferiche

Considerando un sistema di riferimento tridimensionale x, y, z , si può rappresentare un vettore usando le sue componenti: $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$, oppure si può rappresentare mediante coordinate

sferiche. Si considera la proiezione del vettore rispetto al piano formato da due assi, e scompone quel vettore con coordinate polari, in seguito si considera l'angolo formato dal vettore con il terzo asse perpendicolare al piano $\vec{v}(\rho, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}v_x &= \rho \cos \varphi \\v_y &= \rho \sin \varphi \\ \rho &= v_{xy} = v \sin \theta \\ v_z &= v \cos \theta\end{aligned}$$

$$\vec{v} = v \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + v \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + v \cos \theta \hat{z} \quad (2.8.1)$$



3 Cinematica

La cinematica è la scienza che analizza l'andamento del moto di un corpo nel tempo.

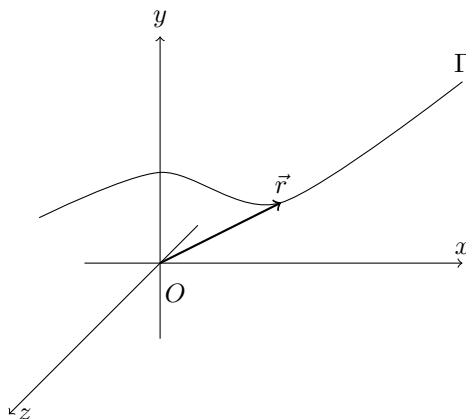
3.1 Traiettoria

In cinematica una traiettoria Γ è l'insieme di tutti i punti Q dove il corpo analizzato si può trovare in un istante di tempo Δt :

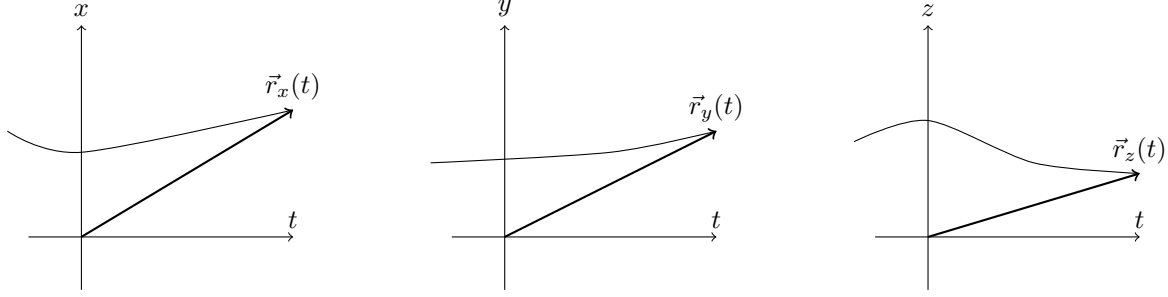
$$\Gamma := \{Q \text{ t.c } Q = P(t)\} \quad (3.1.1)$$

Un punto materiale rappresenta il centro di massa di un corpo, approssimando il suo andamento come se tutta la massa fosse accumulata in unico punto. La traiettoria di un corpo è indipendente dal sistema di riferimento usato per analizzarla. Convenzionalmente si usano sistemi di riferimento aventi assi ortogonali e destrorsi, in modo tale che: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ per un sistema di riferimento avente tre assi (i, j, k) .

Considerando una traiettoria Γ in un sistema di riferimento (i, j, k) , si può definire un vettore posizione $\vec{r}(t)$, che rappresenta in funzione del tempo la posizione del punto materiale che segue quella data traiettoria Γ .

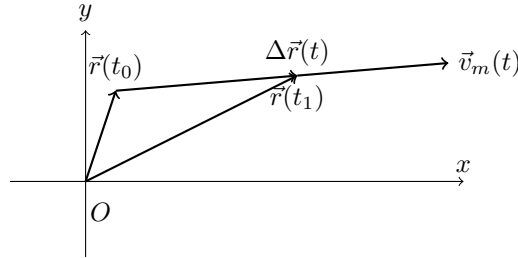


Aggiungendo un altro asse ortogonale si può analizzare la posizione del corpo nel tempo, definito moto. La posizione in funzione del tempo viene definita legge oraria del corpo e descrive come il corpo si muove nello spazio rispetto al tempo. Si può analizzare la legge oraria nei suoi componenti $\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y} + r_z(t)\hat{z}$, in questo modo si ottiene la legge oraria del corpo nelle tre direzioni dello spazio, ognuna descrive il comportamento del corpo in una singola direzione:



3.2 Moto nello Spazio

Dati due istanti di tempo, è possibile approssimare la quantità di spazio percorsa dal corpo tramite: $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$, questa differenza approssima lo spostamento: $\vec{s}(t) = \Delta \vec{r}(t)$, quando la posizione iniziale è nulla, allora si ha $\vec{s}(t) = \Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t) - \vec{0} = \vec{r}(t)$.



Viene definita velocità media di un corpo $\vec{v}_m(t)$:

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (3.2.1)$$

Contiene informazioni sullo spostamento ed il tempo impiegato per compierlo, ma non sulla traiettoria. Per ottenere informazioni sulla traiettoria si definisce la velocità istantanea:

$$\vec{v}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (3.2.2)$$

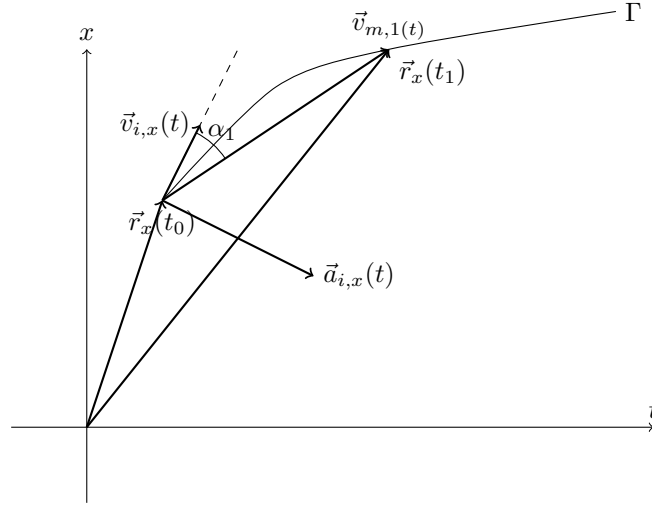
Al diminuire di $\Delta \vec{r}_x(t)$, l'angolo α tra la tangente alla legge oraria e lo spostamento diminuisce, quindi per $\Delta t \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ lo spostamento $d\vec{r}_x(t)$ diventa un vettore parallelo alla traiettoria Γ_x nell'istante di tempo t_0 . La velocità istantanea $\vec{v}_x(t)$ di conseguenza, avendo stessa direzione e verso di $d\vec{r}_x(t)$ è anch'essa tangente alla traiettoria lungo Γ_x nel punto $r_x(t_0)$.

Per ogni componente di $\vec{r}(t)$ si può effettuare lo stesso ragionamento, quindi è possibile definire una velocità istantanea $\vec{v}(t) = \dot{r}_x(t)\hat{x} + \dot{r}_y(t)\hat{y} + \dot{r}_z(t)\hat{z} = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y} + v_z(t)\hat{z}$, dove $\vec{v}_i(t)$ sono le pendenze dei grafici della legge oraria nella coordinata i , all'istante di tempo t .

Si definisce accelerazione istantanea:

$$\vec{a}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (3.2.3)$$

di direzione perpendicolare alla tangente alla traiettoria nell'istante di tempo t , e verso dipendente dalla convessità o concavità della traiettoria nell'intorno dell'istante di tempo t . L'accelerazione del corpo lungo la traiettoria Γ in tre dimensioni viene espressa come: $\vec{a}(t) = \ddot{r}_x(t)\hat{x} + \ddot{r}_y(t)\hat{y} + \ddot{r}_z(t)\hat{z} = \dot{v}_x(t)\hat{x} + \dot{v}_y(t)\hat{y} + \dot{v}_z(t)\hat{z} = a_x(t)\hat{x} + a_y(t)\hat{y} + a_z(t)\hat{z}$.



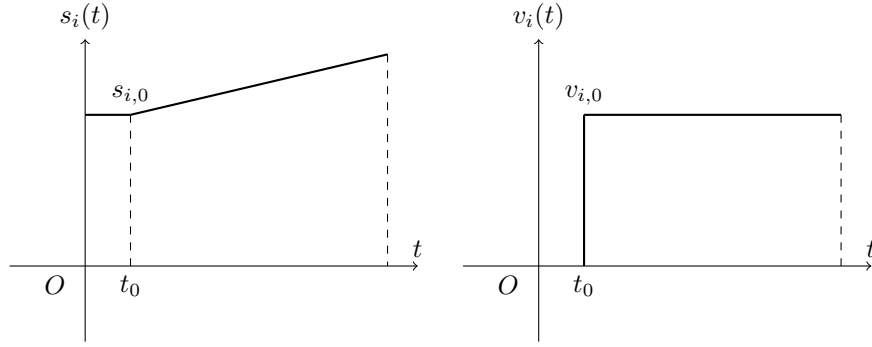
Data un'accelerazione costante, la sua legge oraria sarà data da: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$.

3.2.1 Moto Rettilineo Uniforme

Un corpo che si muove con un'accelerazione nulla $\vec{a} = \vec{0}$ avrà una velocità costante $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ e compierà un moto definito rettilineo uniforme. Se è data la posizione nell'istante di tempo t_0 $\vec{s}(t_0) = \vec{s}_0$, è possibile ottenere la legge oraria della posizione:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}(t)}{dt} &= \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \\ \int_{t_0}^t d\vec{s}(\tau) &= \int_{t_0}^t \vec{v}_0 d\tau \\ \vec{s}(t) - \vec{s}(t_0) &= \vec{v}_0(t - t_0) \\ \vec{s}(t) &= \vec{s}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Questa legge oraria descrive un moto rettilineo uniforme, dove lo spostamento crescerà linearmente rispetto al tempo.

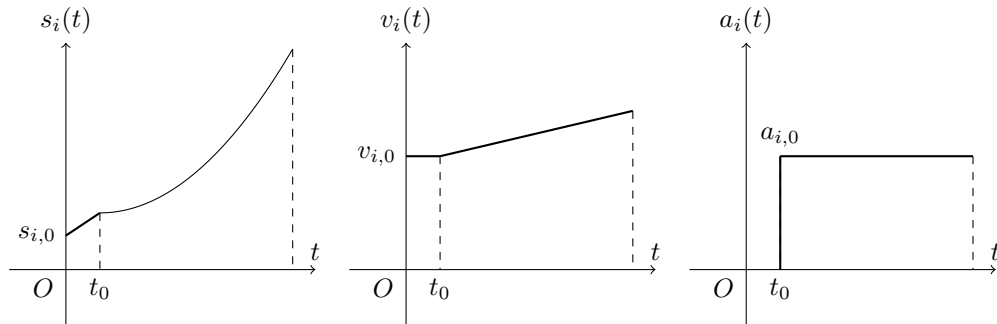


3.2.2 Moto Uniformemente Accelerato

Un corpo che si muove con un'accelerazione costante $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$ si muove di moto uniformemente accelerato. Data l'accelerazione \vec{a}_0 e se è data la posizione e la velocità nell'istante di tempo t_0 : $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$, $\vec{s}(t_0) = \vec{s}_0$, allora è possibile ottenere la legge oraria dello spostamento:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0) = \vec{a}_0 \\
 \int_{t_0}^t d\vec{v}(\tau) &= \int_{t_0}^t \vec{a}_0 d\tau \\
 \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0) \\
 \\
 \frac{d\vec{s}(t)}{dt} &= \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0) \\
 \int_{t_0}^t d\vec{s}(\tau) &= \int_{t_0}^t \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) d\tau \\
 \vec{s}(t) - \vec{s}_0 &= \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 \\
 \vec{s}(t) &= \vec{s}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 \tag{3.2.5}
 \end{aligned}$$

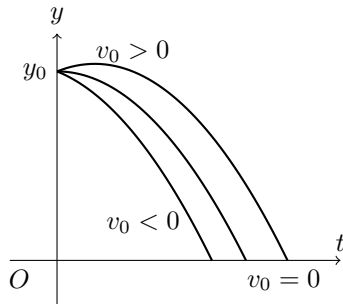
Questa legge oraria descrive un moto uniformemente accelerato, dove la posizione crescerà quadraticamente rispetto al tempo.



3.2.3 Caduta di un Grave

Il moto di caduta di un corpo da un'altezza iniziale y_0 con un'accelerazione $\vec{a}(t) = \vec{g} = -g\hat{y}$, è un moto uniformemente accelerato, con velocità nulla, avrà legge oraria: $\vec{y}(t) = y_0\hat{y} - \frac{1}{2}gt^2\hat{y}$.

Se il corpo viene lanciato, o verso l'alto o verso il basso con una velocità di modulo v_0 la legge oraria sarà: $\vec{y}(t) = y_0\hat{y} \pm v_0t\hat{y} - \frac{1}{2}gt^2\hat{y}$.



Per trovare il punto più alto della traiettoria lungo le y , assumendo che il corpo sia stato lanciato verso l'alto, bisogna trovare il punto dove la velocità si annulla. Il corpo continuerà a salire fino a quando la velocità non si inverte, il punto in cui la velocità cambia di segno è il punto dove la velocità si annulla.

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0), \exists t_{max} \text{ t.c } \vec{v}_y(t_{max}) = \vec{0} \\
 \vec{0} &= v_0\hat{y} - g(t_{max} - t_0)\hat{y} \\
 t_{max} &= \frac{v_0}{g} + t_0 \\
 y_{max} &= y(t_{max}) = y_0 + v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 \\
 y_{max} &= y_0 + \frac{v_0^2}{2g}
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Per trovare il punto dove tocca terra bisogna risolvere la legge oraria rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
& \exists t_{terra} \text{ t.c } y(t_{terra}) = 0 \\
& y_0 + v_0(t_{terra} - t_0) - \frac{1}{2}g(t_{terra} - t_0)^2 = 0 \\
& -\frac{1}{2}gt_{terra}^2 + gt_{terra}t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 + v_0t_{terra} - v_0t_0 + y_0 = 0 \\
& -\frac{1}{2}gt_{terra}^2 + t_{terra}(gt_0 + v_0) + \left(y_0 - v_0t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2\right) = 0 \\
& t_{terra} = \frac{gt_0 + v_0 \mp \sqrt{(gt_0 - v_0)^2 + 2g\left(y_0 - v_0t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2\right)}}{g}
\end{aligned}$$

Poiché il corpo non può toccare terra in un istante di tempo negativo si considera:

$$t_{terra} = \frac{gt_0 + v_0 + \sqrt{(gt_0 - v_0)^2 + 2g\left(y_0 - v_0t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2\right)}}{g} \quad (3.2.7)$$

3.2.4 Moto Armonico o Oscillatorio

Un moto armonico è un tipo di moto in cui il sistema torna alle stesse condizioni dopo un periodo. Il periodo è la quantità di tempo necessaria al sistema per compiere un'oscillazione completa. $T = \Delta t$: $\vec{f}(t) = \vec{f}(t + T)$.

Alcuni moti oscillatori comuni sono il moto di una molla e il moto di un pendolo.

Nel moto armonico due stati sono uguali se la posizione, il vettore velocità e accelerazione sono uguali.

Un moto armonico è definito da varie grandezze fisiche:

- Ampiezza (A): massima distanza dallo stato iniziale in un oscillazione, misurata in metri $[m]$;
- Frequenza (ν): numero di oscillazioni effettuate in un secondo, calcolata in Hertz $[Hz]$, è l'inverso del periodo: $\nu = \frac{1}{T}$;
- Pulsazione (ω): velocità in cui viene effettuata un'oscillazione completa (2π), $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, misurata in radianti al secondo $\left[\frac{rad}{s}\right]$.
- Fase (φ): indica il punto dell'oscillazione da dove comincia il moto, misurata in radianti $[rad]$.

La legge oraria generale di un moto armonico è definita da una funzione sinusoidale o cosinusoidale: $x(t) = A(t) \cos(\varphi + \omega t)$ oppure $x(t) = A(t) \sin(\varphi + \omega t)$

In un moto armonico semplice l'ampiezza massima non diminuisce o aumenta nel tempo quindi la sua

legge oraria sarà: $x(t) = A \cos(\varphi + \omega t) = A \cos(\varphi + 2\pi\nu t) = A \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{T}t\right)$. All'istante $t_0 = 0$, $x(t_0) = A \cos(\varphi + \omega t_0) = A \cos(\varphi)$, se la fase iniziale è nulla, all'istante di tempo iniziale il corpo si trova nella posizione di ampiezza massima: $x(0) = A \cos(0) = A$.

Per convenzione si usa il seno per la legge oraria della posizione di un moto armonico: $x(t) = A \sin(\varphi + \omega t)$, nello stesso istante di tempo $t_0 = 0$, se la fase è nulla: $x(0) = 0$.

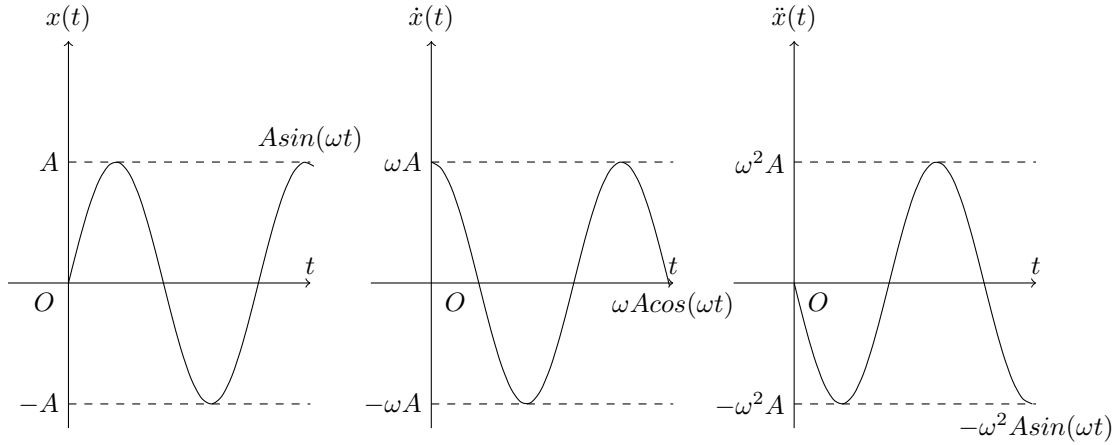
La velocità e l'accelerazione del moto armonico si ottengono derivando la legge oraria dell'accelerazione:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega A \cos(\varphi + \omega t) = \omega x(t) \quad (3.2.8)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\varphi + \omega t) = -\omega^2 x(t) \quad (3.2.9)$$

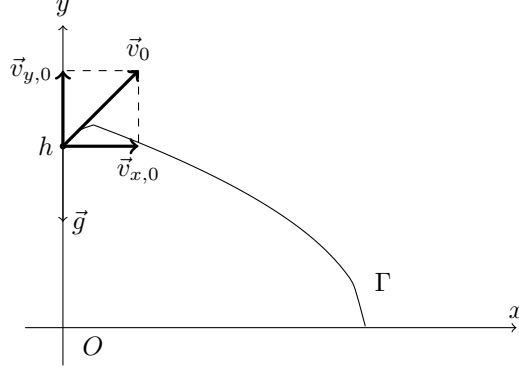
Poiché la legge oraria dell'accelerazione è: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$, si può ricavare la legge oraria della posizione integrando due volte la legge oraria della posizione:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega^2 x(t) \\ d^2 x(t) &= -\omega^2 x(t) dt^2 \\ \iint d^2 x(t) &= -\omega \iint x(t) dt^2 \\ x(t) &= -\omega \iint x(t) dt^2 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$



3.2.5 Moto Parabolico

Quando un corpo si muove, da una posizione iniziale $(h, 0)$ di moto rettilineo uniforme nella componente x , e si muove di moto uniformemente accelerato sulla componente y ; allora si muove di moto parabolico:



Avrà una traiettoria $\Gamma := \{Q \text{ t.c. } Q = \vec{r}(t), \forall t \in [0, t_{terra}]\}$, definita dal vettore posizione $\vec{r}(t)$. Il moto del corpo sarà definito dal vettore posizione $\vec{r}(t)$, dalla velocità $\vec{v}(t)$ e dall'accelerazione $\vec{a}(t)$. Si possono scomporre in componenti:

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = \vec{a}_x \hat{x} + \vec{a}_y \hat{y} \\ \vec{v}(t) = v_x(t) \hat{x} + v_y(t) \hat{y} \\ \vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_x(t) = \vec{0} \\ \vec{v}_x(t) = v_{x,0} \hat{x} + \int_{t_0}^t \vec{a}_x(\tau) d\tau = v_{x,0} \hat{x} + \int_{t_0}^t \vec{0} d\tau = v_{x,0} \hat{x} \\ \vec{x}(t) = x_0 \hat{x} + \int_{t_0}^t \vec{v}_x(\tau) d\tau = x_0 \hat{x} + \int_{t_0}^t v_{x,0} \hat{x} d\tau = x_0 \hat{x} + v_{x,0}(t - t_0) \hat{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_y(t) = -g \hat{y} \\ \vec{v}_y(t) = v_{y,0} \hat{y} + \int_{t_0}^t \vec{a}_y(\tau) d\tau = v_{y,0} \hat{y} + \int_{t_0}^t -g \hat{y} d\tau = v_{y,0} \hat{y} - g(t - t_0) \hat{y} \\ \vec{y}(t) = y_0 \hat{y} + \int_{t_0}^t \vec{v}_y(\tau) d\tau = y_0 \hat{y} + \int_{t_0}^t v_{y,0} \hat{y} - g(\tau - t_0) \hat{y} d\tau = y_0 \hat{y} + v_{y,0}(t - t_0) \hat{y} - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \hat{y} \end{cases}$$

Per $x_0 = 0$, $y_0 = h$ e $t_0 = 0$, allora la traiettoria Γ può essere definita come:

$$\Gamma := \begin{cases} \vec{x}(t) = v_{x,0} t \hat{x} \\ \vec{y}(t) = h \hat{y} + v_{y,0} t \hat{y} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Per ottenere una singola equazione per la traiettoria complessiva del corpo si applica la seguente

sostituzione:

$$\Gamma := \begin{cases} t = \frac{x}{v_{x,0}} \\ y(t)\hat{y} = h\hat{y} + v_{y,0}t\hat{y} - \frac{1}{2}gt^2\hat{y} \\ y(x) = h + v_{y,0}\frac{x}{v_{x,0}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{x,0}}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Gamma : y(x) = -\frac{g}{2v_{x,0}^2}x^2 + \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x + h \quad (3.2.13)$$

La legge oraria del moto $y(x)$ corrisponde ad una parabola rivolta verso il basso.

Per trovare la gittata, bisogna trovare il punto della traiettoria dove si annulla la componente y :

$$\begin{aligned} x(t_g) &= x_g \text{ t.c. } y(t_g) = 0 \\ \begin{cases} x(t_g)\hat{x} = x_g\hat{x} = v_{x,0}t_g\hat{x} \\ y(t_g)\hat{y} = \vec{0} = \left(h + v_{y,0}t_g - \frac{1}{2}gt_g^2\right)\hat{y} \end{cases} \\ \begin{cases} x_g = v_{x,0}t_g \\ t_g = \frac{y_{y,0} \mp \sqrt{v_{y,0}^2 + 2gh}}{g}, t_g > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_g = \frac{v_{x,0}v_{y,0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_{y,0}^2}}\right)}{g} \\ t_g = \frac{v_{y,0} + \sqrt{v_{y,0}^2 + 2gh}}{g} \end{cases} \end{aligned}$$

Per trovare la gittata massima in funzione di una velocità iniziale $\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})$, si considera la gittata x_g come una funzione:

$$x_g(v_0, \theta) = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\theta}}\right)}{g} \quad (3.2.14)$$

Si considera il caso dove il moto parabolico inizia nell'origine degli assi, allora $h = 0$, quindi si ha la funzione della gittata:

$$x_g(v_0, \theta) = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (3.2.15)$$

In questo caso la gittata massima dipende interamente dall'angolo θ tra il vettore velocità e l'orizzontale, poiché è direttamente proporzionale al modulo della velocità iniziale v_0 . Quindi per trovare la gittata massima si considera la derivata della funzione gittata rispetto all'angolo θ :

$$\begin{aligned}\frac{dx_g(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = 0 \\ \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\theta &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

La gittata massima di un corpo in moto parabolico, per $h = 0$, si ha per un vettore velocità:

$$\vec{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \hat{y}\tag{3.2.17}$$

3.2.6 Moto Circolare Uniforme

Quando un corpo ruota intorno ad un punto si muove di moto circolare. Poiché la traiettoria è una circonferenza avente come centro il punto intorno a cui il corpo ruota, il modulo del vettore posizione per qualunque istante di tempo rimane invariato, ciò che cambia nel tempo è la sua direzione e verso: $\vec{r}(t) = r \cdot \hat{r}(t)$. Il versore $\hat{r}(t)$ può essere scritto in componenti:

$$\hat{r}(t) = 1 \cdot \cos \theta(t) \hat{x} + 1 \cdot \sin \theta(t) \hat{y}\tag{3.2.18}$$

Da questa relazione è possibile ottenere il versore del vettore velocità:

$$\begin{aligned}\hat{v}(t) &= \frac{d\hat{r}(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (\cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y}) \\ &= -\sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{x} + \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \hat{y} \\ \hat{v}(t) &= (\cos \theta(t) \hat{y} - \sin \theta(t) \hat{x}) \dot{\theta}(t)\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

$\dot{\theta}(t)$ viene chiamata velocità angolare $\omega(t)$, viene definito un nuovo versore:

$$\hat{\tau}(t) = (\cos \theta(t) \hat{y} - \sin \theta(t) \hat{x})\tag{3.2.20}$$

$$\hat{v}(t) = \hat{\tau}(t) \cdot \omega(t)\tag{3.2.21}$$

Il vettore velocità sarà:

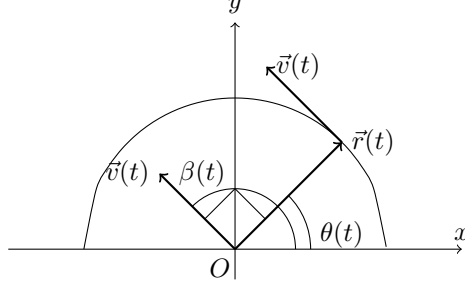
$$\vec{v}(t) = r \cdot \frac{d}{dt} \hat{r}(t) = r \cdot \hat{\tau}(t) \omega(t)\tag{3.2.22}$$

Considerando le componenti del versore velocità: $\hat{v}(t) = \cos(\beta(t)) \hat{x} + \sin(\beta(t)) \hat{y}$ e uguagliandole alle componenti del versore $\hat{\tau}(t)$:

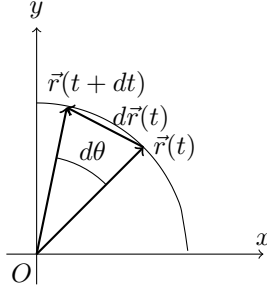
$$\begin{cases} \cos \beta(t) \hat{x} = -\sin \theta(t) \hat{x} \\ \sin \beta(t) \hat{y} = \cos \theta(t) \hat{y} \end{cases}$$

$$\beta(t) = \theta(t) + \frac{\pi}{2} \quad (3.2.23)$$

Allora è facile notare che il vettore velocità così ottenuto è perpendicolare al vettore posizione nell'istante t . Dato che sono equipollenti si può applicare il vettore velocità alla posizione del corpo nell'istante t sulla traiettoria. Il vettore velocità sarà sempre tangente alla traiettoria circolare del corpo.



Si può dimostrare questa proprietà senza analizzare le componenti dei versori, considerando la differenza infinitesima tra due vettori posizione in due istanti di tempo t e $t + \Delta t$. Il vettore velocità $\vec{v}(t)$ è dato dalla derivata: $r \cdot \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{r}(t + \Delta t) - \hat{r}(t)}{\Delta t}$. Per $\Delta t \rightarrow 0$, l'angolo $d\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$, tra $\hat{r}(t)$ e $\hat{r}(t + \Delta t)$ anch'esso tende a 0. Si può approssimare la differenza per $\Delta t \rightarrow 0$ tra i due vettori posizione come $\hat{r}(t + \Delta t) - \hat{r}(t) = d\hat{r} \approx \sin(d\theta)\hat{\tau}(t)$, dato che $d\theta \rightarrow 0$, $\sin(d\theta) = d\theta \implies d\hat{r}(t) = d\theta\hat{\tau}(t)$, quindi $\vec{v}(t) = r \cdot \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = r \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\tau}(t) = r \cdot \omega(t)\hat{\tau}(t)$:



Se il corpo si muove con velocità angolare costante, e quindi si muove di moto circolare uniforme:

$$\vec{v}(t) = r\omega\hat{\tau}(t), v = \omega r \quad (3.2.24)$$

Si può trovare l'accelerazione del corpo derivando il vettore velocità:

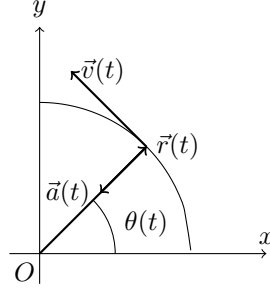
$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = r\omega \frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} \\ &= r\omega \frac{d}{dt}(\cos \theta(t)\hat{y} - \sin \theta(t)\hat{x}) \end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega^2(-\sin\theta(t)\hat{y} - \cos\theta(t)\hat{x}) \quad (3.2.25)$$

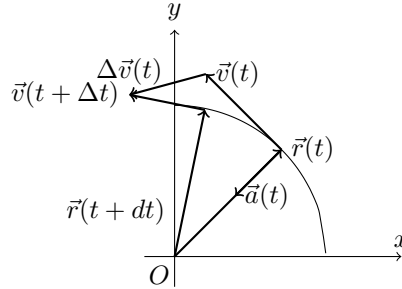
Si definisce il versore $\hat{v}(t) = -(\cos\theta(t)\hat{x} + \sin\theta(t)\hat{y}) = -\hat{r}(t)$, allora il vettore accelerazione può essere espresso come:

$$\vec{a}(t) = r\omega^2\hat{v}(t) = -\omega^2 r \cdot \hat{r}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t), \quad a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad (3.2.26)$$

Il vettore accelerazione ha la stessa direzione del vettore posizione $\vec{r}(t)$, ma verso opposto:



Questa proprietà si può dimostrare analizzando la derivata come rapporto incrementale: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$. Il vettore differenza $\Delta\vec{v}(t) = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$, al diminuire di Δt tende a diventare ortogonale alla velocità:



Questa accelerazione viene chiamata accelerazione centripeta.

3.2.7 Moto Circolare Periodico

Dato un corpo in moto circolare uniforme, se dopo un periodo $T = \Delta t$, ritorna alla posizione iniziale, si definisce moto periodico. Si può la posizione angolare considerando $\theta(t_0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \omega \\ \int_{t_0}^t d\theta(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t \omega d\tau \\ \theta(t) - \theta(t_0) &= \omega \Delta t \end{aligned}$$

$$\theta(t) = \omega \Delta t \quad (3.2.27)$$

Sapendo la posizione angolare ad ogni istante è possibile calcolare il periodo di una rotazione:

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = r \cos \theta(t) \hat{x} = \vec{x}(t+T) \\ \vec{y}(t) = r \sin \theta(t) \hat{y} = \vec{y}(t+T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta(t+T)) = \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t+T)) = \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\omega t + \omega T) = \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t + \omega T) = \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\omega t + \omega T = \omega t + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$T = \frac{2k\pi}{\omega} [s] \quad (3.2.28)$$

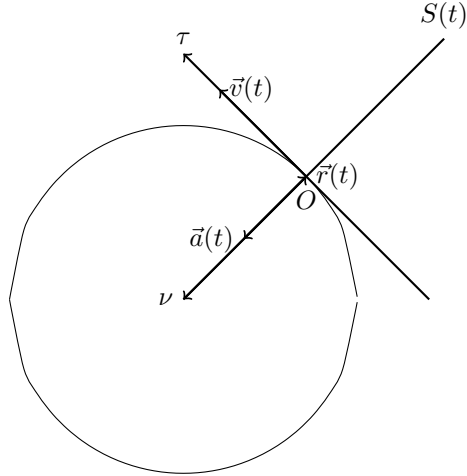
3.2.8 Moto Circolare non Uniforme

Se un corpo si muove su una traiettoria circolare con una velocità angolare variabile nel tempo $\omega(t)$, si muove di moto circolare non uniforme. Allora il moto non avrà un periodo di rotazione fisso, sarà descritto dalle leggi orarie:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = -r\hat{\nu}(t) \\ \vec{v}(t) = r\omega(t)\hat{\tau}(t) \\ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = r\frac{d}{dt}(\omega(t)\hat{\tau}(t)) = r(\dot{\omega}(t)\hat{\tau}(t) + \omega(t)^2\hat{\nu}(t)) \end{cases} \quad (3.2.29)$$

$\dot{\omega}(t)$ viene definita accelerazione angolare $\alpha(t)$, $r\alpha(t)\hat{\tau}(t)$ viene definita accelerazione tangenziale $\vec{a}_{tan}(t)$ mentre $r\omega^2(t)\hat{\nu}(t)$ viene definita accelerazione centripeta $\vec{a}_{cen}(t)$.

Il moto del corpo viene definito dai versori $\hat{\tau}(t)$ e $\hat{\nu}(t)$, perciò si può usare un sistema di riferimento centrato nel corpo e con gli assi concordi per direzione e verso ai versori $\hat{\tau}(t)$ e $\hat{\nu}(t)$:



L'utilizzo di questo sistema di riferimento locale facilita l'analisi di moti vari, poiché è una rappresentazione sempre valida essendo dipendente dall'istante di tempo in cui ci si trova.

3.2.9 Approssimazione mediante Serie di Taylor della Legge Oraria

Una funzione $f(t)$ può essere espressa in un intorno $I_{t_0}(\delta)$ di un punto t_0 mediante la serie di Taylor:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!} + O((t-t_0)^k) \quad (3.2.30)$$

Viene definita la funzione \tilde{f}_k che approssima la funzione f :

$$\tilde{f}_k(t, t_0) = \sum_{i=0}^k f^{(i)}(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!} \quad (3.2.31)$$

e la funzione errore R_k che determina l'imprecisione della funzione \tilde{f} rispetto alla funzione f :

$$R_k = |f(t) - \tilde{f}_k(t-t_0)| = f^{(k+1)}(\xi) \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \text{ per } \xi \in [t, t_0] \quad (3.2.32)$$

La funzione errore R_k è un infinitesimo di ordine k : $R_k \leq O((t-t_0)^k)$.

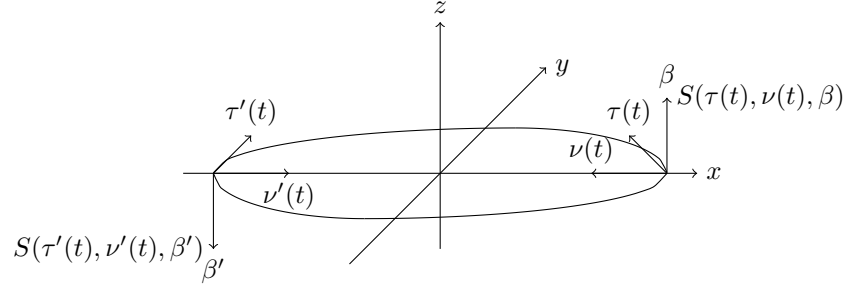
Data lo spostamento $\vec{s}(t)$, si può esprimere tramite la sua serie di Taylor:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \sum_{i=0}^2 \vec{r}^{(i)}(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!} + O((t-t_0)^3) \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \vec{r}^{(1)}(t_0)(t-t_0) + \vec{r}^{(2)}(t_0) \frac{(t-t_0)^2}{2} + O((t-t_0)^3) \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \vec{a}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + R_k \\ \tilde{\vec{r}}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \vec{a}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

In questo modo dati i valori della posizione, della velocità e dell'accelerazione nell'istante di tempo t_0 , è possibile approssimare la traiettoria del corpo nell'intorno di t_0 .

3.2.10 Moto Vario

Si può aggiungere al sistema di riferimento $S(\tau(t), \nu(t))$, un altro asse, chiamato β ortogonale al piano ($\hat{\beta} = \hat{\tau}(t) \times \hat{\nu}(t)$) creato dai primi due che rappresenta una rotazione in senso antiorario se è diretto verso l'alto (β), orario se è diretto verso il basso (β'):



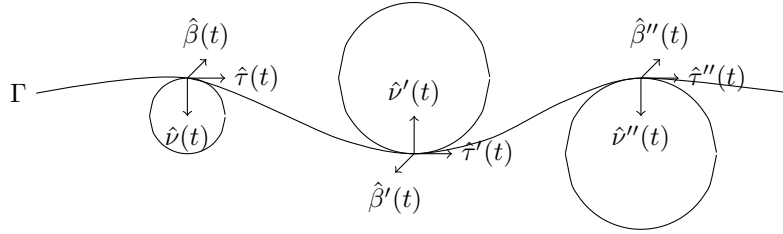
Nel sistema di riferimento $S(\tau(t), \nu(t), \beta)$, si può rappresentare la velocità angolare e l'accelerazione angolare come vettori:

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t) \cdot \hat{\beta}, \quad \vec{\alpha}(t) = \alpha(t) \cdot \hat{\beta} \quad (3.2.34)$$

Quindi si possono riscrivere le equazioni del moto circolare come:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = -r\hat{\nu}(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = r\omega(t)\hat{\beta} \times (-\hat{\nu}(t)) = r\omega(t)\hat{\tau}(t) \\ \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t) = r\alpha(t)\hat{\tau}(t) + r\omega(t)^2\hat{\nu}(t) \end{cases} \quad (3.2.35)$$

Dati 3 punti esiste una sola circonferenza passante per essi, quindi si può approssimare una qualsiasi traiettoria come una serie di moti circolari in ogni intorno della posizione all'istante t , dove il versore $\hat{\beta}(t)$ determina il cambiamento di piano della traiettoria in 3 dimensioni:



4 Dinamica

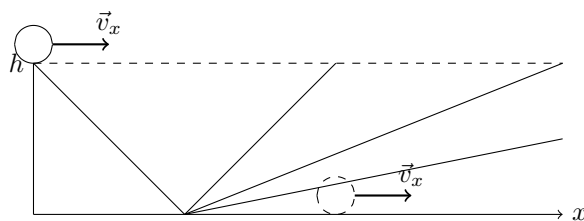
La dinamica è la scienza che analizza le forze agenti su un sistema. I 3 principi della dinamica furono enunciati da Newton.

4.1 I Principio

Un corpo rimane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se la somma delle forze agenti su di esso è nulla:

$$\vec{v} : \text{cost.} \iff \sum \vec{F} = \vec{0} \quad (4.1.1)$$

Viene chiamato Principio di Inerzia il caso dove la velocità del corpo sia nulla. L'intuizione per il I principio viene attribuita a Galileo e ai suoi esperimenti sul piano inclinato. Un corpo su un piano inclinato sufficientemente liscio se viene lasciato cadere avrà una certa velocità che, in seguito a evidenze sperimentali, gli permette di raggiungere la quota di partenza se è presente un altro piano inclinato sufficientemente liscio dopo il primo, indipendentemente dalla pendenza del secondo. Perciò se il piano inclinato di arrivo viene abbassato progressivamente, la distanza complessiva percorsa dal corpo tenderà ad aumentare, fino a diventare infinita per un piano parallelo al vettore velocità, poiché non potrà mai raggiungere la quota iniziale. Per cui un corpo mantiene la sua velocità iniziale in assenza di forze che ne impediscono il moto.



Newton in seguito definì la grandezza fisica forza, anch'essa un vettore: $\vec{F} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right] = [\text{N}]$ e ne descrisse la sua relazione con la velocità nel secondo principio.

4.2 II Principio

La forza agente su un corpo è data dalla prima derivata rispetto al tempo della quantità di moto.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (4.2.1)$$

Viene definita un'altra grandezza fisica, la quantità di moto di un corpo: \vec{p} , la variazione di quantità di moto viene ricavata dalla seguente equazione:

$$\Delta \vec{p}(t) = m \Delta \vec{v} \quad (4.2.2)$$

In seguito ad evidenze sperimentali Newton scoprì un legame proporzionale tra la variazione della velocità in un istante di tempo ed il modulo della forza agente sul corpo. La costante di

proporzionalità scoprì essere la massa stessa del corpo, quindi la forza agente su un corpo è la derivata rispetto al tempo della quantità di moto:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}(t)}{dt} &\propto \vec{F} \\ \left| \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right| &= c_0 \left| \vec{F} \right| \\ \frac{1}{c_0} \left| \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right| &= \left| \vec{F} \right|, \quad \frac{1}{c_0} = m \\ \frac{dmv}{dt} &= \frac{dp}{dt} = ma = F\end{aligned}$$

La costante di proporzionalità $\frac{1}{c_0}$ viene chiamata massa inerziale m e quantifica quanto un corpo si oppone al moto ovvero l'inerzia del corpo, e coincide nella meccanica newtoniana alla massa stessa del corpo.

Questo legame tra accelerazione e forza agente sul corpo è valido anche in campo vettoriale:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (4.2.3)$$

Il secondo principio può essere espresso anche in forma integrale considerando:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{F}dt &= d\vec{p} \\ \int_{t_0}^t \vec{F}d\tau &= \int_{p_0}^{p(t)} d\vec{p} \\ \vec{J} = \vec{F}\Delta t &= \Delta\vec{p}\end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Viene definito il vettore impulso \vec{J} che quantifica la quantità di forza che agisce su un corpo in un dato intervallo di tempo.

4.3 III Principio

Ad ogni azione equivale una reazione uguale e contraria.

Questo principio può essere espresso anche considerando la risultante delle forze interne ad un sistema. Se non sono presenti forze esterne agenti su di esso, le forze rimaste saranno tutte uguali e contrarie tra di loro a coppie, quindi la forza risultante agente sul sistema sarà nulla:

La risultante delle forze interne agenti su un sistema è nulla.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} \quad (4.3.1)$$

4.4 Equilibrio

Viene definita risultante delle forze, la somma di tutte le forze agenti su un corpo. Un corpo si dice sia in uno stato di equilibrio se la risultante delle forze è nulla. Applicando il primo principio della dinamica si individuano due tipi di equilibrio:

- Equilibrio Statico: Si applica il principio di inerzia, il corpo si trova in uno stato di quiete;
- Equilibrio Dinamico: Si applica il primo principio, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

Un corpo in moto circolare uniforme si trova in equilibrio dinamico, avendo una velocità costante. Ma avrà un'accelerazione centripeta costante. La risultante delle forze sarà comunque nulla poiché sul corpo agirà una forza apparente che bilancia la forza centripeta.

4.5 Forze

Esistono 4 forze fondamentali:

- Forza di Gravità;
- Forza Elettromagnetica;
- Forza Nucleare Forte;
- Forza Nucleare Debole.

Da queste forze, derivano tutte le forze studiate dalla dinamica.
Dalla forza di gravità derivano:

- Forza Peso;
- Reazione Vincolare;
- Forza di Attrito;
- Tensione;
- Forza Elastica.

4.5.1 Teoria della Gravitazione Universale

All'inizio del 500 Copernico descrisse il sistema solare come un sistema di pianeti in orbita intorno al Sole come centro. In seguito Brahe studiò il moto dei pianeti e ottenne i dati sperimentali necessari per l'analisi dei loro moti. In seguito Keplero studiando i dati ottenuti da Brahe enunciò le sue 3 leggi sul moto dei pianeti:

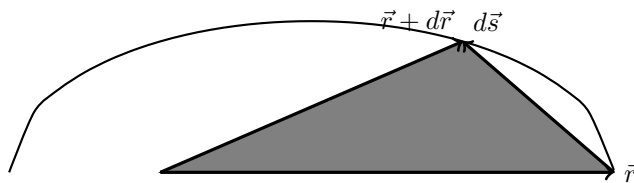
- i) I pianeti compiono delle orbite piane ellittiche, di cui il sole occupa uno dei due fuochi.

Un'ellisse è una conica, ovvero un insieme di punti ottenuto sezionando un cono infinito tridimensionale con un piano. Un'ellisse viene definita come il luogo geometrico dei punti del piano dove la somma delle distanze dai due fuochi dell'ellisse è invariante. Viene definita l'eccentricità di un'ellisse ε , una misura che quantifica quanto l'ellisse è schiacciata, ovvero di quanto l'asse maggiore a è più grande dell'asse minore b dell'ellisse, il valore sarà 0 per un cerchio mentre tenderà ad 1 per un'ellisse avente un'asse a di lunghezza infinita, o un asse minore b di lunghezza nulla.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1)$$

ii) La velocità areolare del pianeta lungo l'orbita è costante.

Viene definita velocità areolare, la variazione di area descritta da uno spostamento del pianeta lungo l'orbita in un dato intervallo di tempo: $\frac{dA(t)}{dt} = \text{cost.}$



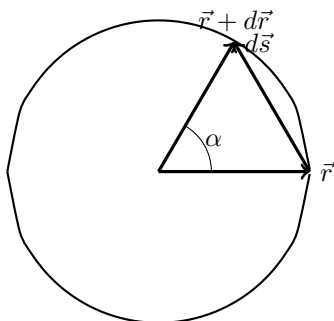
L'area descritta in uno stesso intervallo di tempo rimane invariata, per cui dovrà cambiare la velocità dell'orbita del pianeta, per mantenere l'area costante, per cui quando i pianeti si trovano vicini al sole, si muoveranno più velocemente poiché descriveranno un'area maggiore, mentre quando si trovano lontani dal sole si muoveranno più lentamente.

La terza legge di Keplero descrive la relazione tra il periodo dell'orbita e la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse, tramite una costante k , che varia per ogni pianeta in base all'eccentricità della loro orbita:

iii) Il quadrato del periodo dell'orbita di un pianeta è proporzionale al cubo dell'asse maggiore della sua orbita ellittica.

$$T^2 = ka^3 \quad (4.5.1)$$

Newton fornì una dimostrazione dinamica delle leggi di Keplero nel 1666, approssimando le orbite ellittiche a delle circonferenze, poiché per tutti i pianeti $\varepsilon_p \ll 1$, eccetto per Mercurio che percorre un'orbita di eccentricità $\varepsilon_M = 0.02$.



Per ottenere l'area descritta dall'orbita si considera il modulo del prodotto vettoriale, che rappresenta l'area del parallelogramma di lati $d\vec{s}$ e \vec{r} . Considerando un'area infinitesima:

$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{2} = \frac{r ds \sin \alpha}{2}$$

La variazione di area nel tempo sarà data da:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r}{2} \sin \alpha \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{r^2 \omega}{2} \sin \alpha = \text{cost.}$$

Affinché la velocità areolare rimanga costante allora la velocità angolare dovrà essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra il pianeta ed il sole. La sua orbita genererà un'accelerazione centripeta $\vec{a}_c = r\omega^2 \hat{r}$. Per cui esisterà una forza diretta verso il sole dal pianeta $\vec{F} = m_p \vec{a}_c = m_p r \omega^2 \hat{r}$. Per la terza legge di Keplero si può esprimere la relazione tra il braccio maggiore dell'ellisse con il periodo, per cui si può ottenere la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{ka^3}}$$

La forza agente sul pianeta avrà modulo:

$$F = m_p r \frac{4\pi^2}{ka^3}$$

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b = r, F = m_p \frac{4\pi^2}{kr^2}$$

Anche la forza agente sul pianeta sarà allora inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra il pianeta ed il sole. Per il secondo principio il pianeta eserciterà sul sole una forza uguale e contraria: $\vec{F}_{s \rightarrow p} = -\vec{F}_{p \rightarrow s}$.

$$F_{s \rightarrow p} = m_p \frac{4\pi^2}{k_p r^2} = -m_s \frac{4\pi^2}{k_s r^2} = F_{p \rightarrow s}$$

$$m_s k_p = m_p k_s$$

Si suppone esista una costante $k_s \neq k_p$ anche per il sole.

Viene definita la costante di gravitazione universale, indipendente dalla coppia di pianeti considerati:

$$G := \frac{4\pi^2}{m_s k_p} = \frac{4\pi^2}{m_p k_s} = \text{cost.} \quad (4.5.2)$$

Per cui la forza agente si può esprimere la forza rispetto a questa nuova costante:

$$F = m_p \frac{4\pi^2}{kr^2} \cdot \frac{m_s}{m_s} = G \frac{m_s m_p}{r^2} \quad (4.5.3)$$

Questa forza viene espressa in generale senza sapere a priori il valore delle masse gravitazionali, poiché è possibile calcolare G rispetto a due corpi qualsiasi che si attraggono.

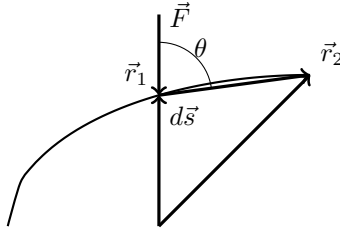
A fine settecento Karendish misurò con estrema precisione il valore della costante G , usando una bilancia di torsione, formata da un filo avvolto su sé stesso connesso ad un'asta in grado di ruotare

sull'asse del filo, con due masse alle estremità. Le due masse agli estremi vengono esposte a dei corpi aventi una massa molto elevata, provocando una forza gravitazionale sulle due masse sull'asta, facendola ruotare. Ruotando sul filo agirà un momento torcente, fino ad una nuova posizione di equilibrio del sistema, dovuta a questo momento torcente calcolabile.

Si dimostra come la forza di attrazione gravitazionale è una forza conservativa.

Data $\vec{F} = F(r)d\hat{r}$, si considera l'integrale del lavoro: $W = \int_{\Gamma} F(r)\hat{r} \cdot d\vec{s}$. Analizzando la traiettoria compiuta dal pianeta è possibile notare come il prodotto scalare $\hat{r} \cdot d\vec{s}$, corrisponda al modulo della variazione infinitesima del vettore posizione nella traiettoria, per cui:

$$\hat{r} \cdot d\vec{s} = 1 \cdot ds \cos \theta = dr$$



Essendo $F(r)$ una funzione di stato avrà sempre una primitiva, quindi è una forza conservativa ed il suo lavoro risultante sarà:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = f(r_2) - f(r_1)$$

Date due masse m e M di distanza r , la forza di attrazione gravitazionale tra i due corpi produrrà un lavoro:

$$F(r) = -GmM \frac{1}{r^2} \Rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (4.5.4)$$

Essendo una forza conservativa si può ricavare l'energia potenziale integrando la forza gravitazionale:

$$U(r) = -F(r) = \int GmM \frac{1}{r^2} dr = -\frac{GmM}{r} \quad (4.5.5)$$

Data l'energia potenziale è possibile calcolarsi, se si considera l'energia meccanica conservata, la velocità necessaria per un corpo di massa m per uscire dall'orbita terrestre. Ovvero si considera raggiunga, in un intervallo di tempo infinito, una distanza infinita dalla terra, per cui la sua energia potenziale in quel punto sarà nulla:

$$\begin{aligned} U(r_0) + K(v_0) &= U(r_f) + K(v_f) \\ -\frac{GmM}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2GM}{r_0} + v_f^2} \end{aligned}$$

Se si considera la velocità finale nulla, ovvero il corpo si trova in uno stato di quiete a distanza infinita dalla terra, dovrà avere una velocità iniziale:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (4.5.6)$$

Questa velocità viene definita velocità di fuga dalla terra.

In caso si consideri un sistema di riferimento avente centro nel sole, sul corpo analizzato agirà una forza apparente, poiché le analisi precedenti sono state effettuate rispetto al sistema di riferimento intrinseco del corpo. Sul corpo agirà una forza centripeta, calcolata precedentemente $m\omega^2 r$, per cui la risultante delle forze agenti sul pianeta sarà:

$$F = -\frac{GmM}{r^2} + m\omega^2 r$$

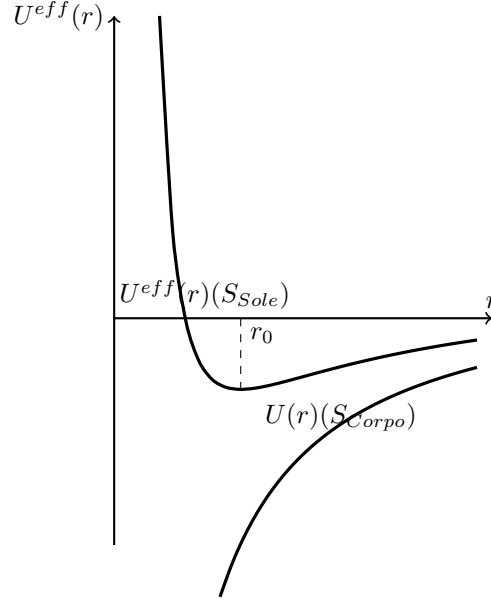
Il corpo avrà un certo momento angolare $L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m\omega r^2$, poiché si tratta di un'orbita ellittica il vettore direzione sarà perpendicolare al vettore velocità. Si potrà quindi esprimere la forza risultante rispetto al modulo del momento angolare:

$$F = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

Poiché il momento angolare dipende solamente dalla distanza, essendo la velocità angolare costante, la forza risultante sarà conservativa, e si potrà calcolare l'energia potenziale. Si definisce energia potenziale efficace l'energia potenziale calcolata in questo sistema di riferimento:

$$U^{eff}(r) = -\int F(r)dr = -\frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (4.5.7)$$

Per cui per dei corpi vicini al sole, l'energia potenziale efficace dipenderà dalla componente $\frac{L^2}{2mr^2}$, e sarà positiva, quindi il corpo si dirigerà verso il sole. Diminuerà all'aumentare di r fino al raggiungimento di un punto di equilibrio stabile per un valore r_0 , dopo il quale l'energia potenziale tenderà asintoticamente a 0^- . Un corpo ad una distanza r_0 dal sole quindi sarà in un'orbita attorno al punto di energia minima $U(r_0)$, formando piccole oscillazioni, per cui la funzione potenziale potrà essere approssimata con una parabola in tutto il semipiano negativo. Per $U(r) \geq 0$, il potenziale continuerà a crescere fino ad infinito, potrà quindi essere approssimato come un'iperbole.



Se si considera il sole in movimento, allora si avrà un problema dei due corpi. Si considera il sistema di due punti isolato, per cui:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{tot} &= cost. = m\vec{v}_p + M\vec{v}_s \\ \vec{L}_{tot} &= cost.\end{aligned}$$

Il corpo con massa maggiore avrà quindi una velocità relativamente minore. Poiché l'energia cinetica del sistema è costante, per una quantità di moto costante, se l'energia potenziale efficace è costante, l'energia meccanica del sistema si conserverà. Il moto viene analizzato rispetto alla distanza del centro di massa dal sole $\vec{R}_{(c.d.m.)}$ e la distanza relativa tra i due corpi $\vec{r} = \vec{r}_s - \vec{r}_p$.

4.5.2 Forza Peso

Viene definita la forza peso la forza di attrazione gravitazionale tra un corpo sulla superficie ed il pianeta dove si trova, approssimato come un punto avente la stessa massa del pianeta nel suo centro:

$$\vec{F}_P = G \frac{M_{terra}m}{r_{terra}^2} \hat{r} = \left(G \frac{M_{terra}}{r_{terra}^2} \hat{r} \right) m = m\vec{g} \quad (4.5.8)$$

Viene definito il vettore di accelerazione gravitazionale: $\vec{g} = G \frac{M}{r^2} \hat{r}$.

Poiché la massa inerziale è diversa dalla massa gravitazionale l'accelerazione di un corpo in caduta libera è indipendente dalla massa inerziale del corpo. Su un corpo in caduta libera agirà solamente la forza peso, dipendente dalla massa gravitazionale, per il terzo principio, la somma delle forze è uguale alla massa inerziale del corpo moltiplicata alla sua accelerazione, quindi si ottiene:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_P = m_i \vec{a}$$

Per cui si avrà che la forza peso di un corpo sia direttamente proporzionale alla forza agente su un corpo in caduta libera di un'accelerazione \vec{a} , per cui anche le masse saranno tra di loro direttamente proporzionali rispetto ad una costante di proporzionalità c_0 :

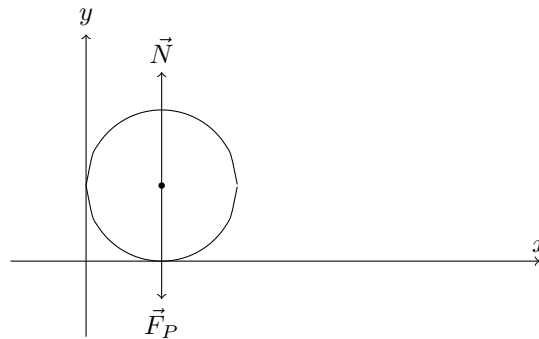
$$m_g \vec{g} = m_i \vec{a} \Rightarrow m_g = c_0 m_i$$

Sulla base di evidenze sperimentali si è scoperto che la costante di proporzionalità vale 1, per cui un corpo allo stato di quiete su cui agisce solamente la forza peso, sarà soggetto alla stessa accelerazione di un corpo in caduta libera $\vec{a} = \vec{g}$. Quindi si avrà che la massa gravitazionale sia esattamente uguale alla massa inerziale, nonostante rappresentino due fenomeni distinti: la resistenza di un corpo ad uno spostamento e l'attrazione gravitazionale tra due corpi.

4.5.3 Reazione Vincolare

Un corpo in quiete poggiato sopra un piano è in uno stato di equilibrio statico, quindi esiste un'altra forza uguale e opposta alla forza peso tale che la risultante sia nulla, questa forza viene chiamata reazione vincolare \vec{N} :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_P + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_P \quad (4.5.9)$$



Il tipo di reazione vincolare dipende dal tipo di vincolo imposto al corpo. Se il corpo è poggiato ad un piano, il vincolo rimuove un solo grado di libertà dal corpo per cui la reazione vincolare \vec{R} sarà solamente la normale al piano, $\vec{R} = \vec{N}$.

Se il corpo è vincolato tramite una cerniera allora il vincolo rimuove due gradi di libertà al corpo, impedendogli di traslare, per cui la reazione vincolare sarà data dalla somma vettoriale della normale $\vec{N} = \vec{R}_y$ al piano e la forza opposta alla traslazione del corpo \vec{R}_x , $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$.

Esistono vincoli che rimuovono tre gradi di libertà, ovvero impediscono al corpo di ruotare sull'asse del vincolo, per cui la sua reazione vincolare avrà anche una componente torcente.

4.5.4 Forza di Attrito Radente

La forza di attrito statico, o secco, o radente, è una forza che agisce su un corpo in quiete, cercando di mantenerlo in quiete, quindi si oppone alla forza esterna agente su di esso, ed ha direzione uguale alla direzione del moto, ma verso opposto. Il suo modulo aumenta fino al raggiungimento

di un valore massimo, dopo il quale non riesce più a impedire che il corpo si muova.

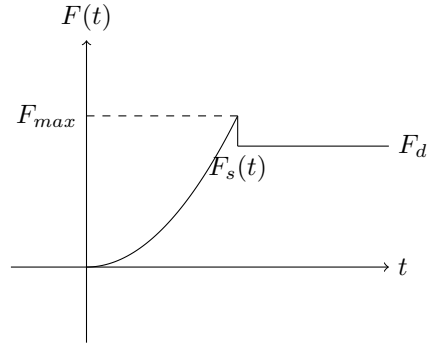
È proporzionale all'inerzia del corpo: $F_A \propto F_P$. Il modulo massimo che può assumere dipende dalla costante di attrito statico μ_s tra il corpo ed il piano di appoggio:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{max} \text{ t.c. } \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ F_{max}\hat{x} + F_A(-\hat{x}) &= \vec{0} \\ F_{max} &= \mu_s N = \mu_s mg\end{aligned}\tag{4.5.10}$$

La forza massima che l'attrito statico può resistere è di modulo: $F_{A,max} = \mu_s mg$.

4.5.5 Forza di Attrito Dinamico

La forza di attrito dinamico si oppone in verso al moto di un corpo in movimento, è di modulo costante pari a: $F_d = \mu_d N$. La costante di attrito dinamico è generalmente minore della costante di attrito statico: è necessaria più forza per mettere in moto un corpo che per mantenerlo in movimento:

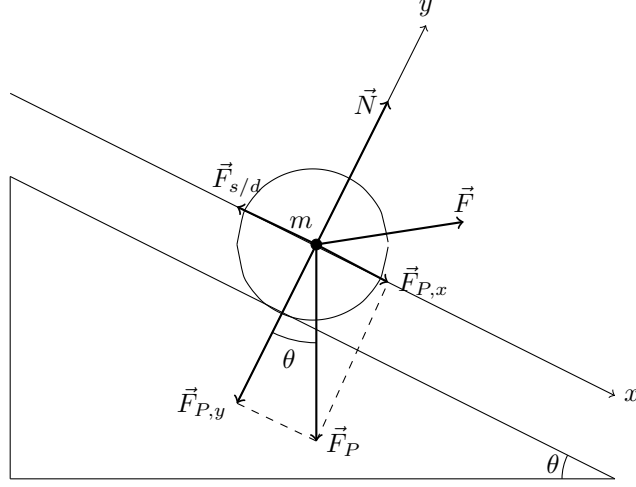


4.5.6 Piano Inclinato

Un sistema molto comune che coinvolge la forza di attrito è un piano inclinato. Dove un corpo, su cui agisce una forzante \vec{F} , viene posto su un piano inclinato di un angolo θ e una costante di attrito μ_s e μ_d . Su questo piano il corpo può essere in uno stato di equilibrio statico o dinamico: $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$.

Per analizzare questo sistema viene convenzionalmente scelto un sistema di riferimento con un asse parallelo i al piano, un altro asse j perpendicolare ad esso ed il centro O nella posizione attuale del corpo. Il sistema sarà descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_i &= \vec{0} \\ \begin{cases} \sum \vec{F}_{i,x} = \vec{F}_{P,x} + \vec{F}_{s/d} + \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_{i,y} = \vec{F}_{P,y} + \vec{N} + \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \\ \begin{cases} F_P \sin \theta - \mu_{s/d} N + |\vec{F}_x| = 0 \\ -F_P \cos \theta + N + |\vec{F}_y| = 0 \end{cases}\end{aligned}$$



Considerando una curva inclinata, sarà possibile ruotare intorno alla curva solamente utilizzando la forza di attrito statico tra il singolo punto delle ruota in contatto con il suolo in ogni istante, si considera la ruota incompressibile. Se la curva non fosse inclinata, sarebbe possibile attraversarla solo con l'attrito se esso bilancia la forza derivante dall'accelerazione centripeta $a_c = \frac{v^2}{r}$ della ruota:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x &= \vec{0} = \vec{F}_s + \vec{F} \\ -\mu_s mg + m \frac{v^2}{r} &= 0\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\mu_s g r} \quad (4.5.11)$$

Considerando una curva inclinata ad una certa angolazione α , la ruota attraverserà la curva se vale il primo principio della dinamica:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} = \vec{F}_{P,x} + \vec{F}_s \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} = \vec{F}_{P,y} + \vec{N} \end{cases} \\ \begin{cases} mg \sin \alpha - \mu_s mg \cos \alpha = 0 \\ N = mg \cos \alpha \end{cases} \\ \mu_s = \tan(\alpha) \\ \alpha = \arctan(\mu_s) \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

la curva dovrà quindi avere un'angolazione $\alpha = \arctan(\mu_s)$.

Se invece fosse applicata una forzante \vec{F}_y sulla ruota durante la rotazione sulla curva si avrà:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} = \vec{F}_{P,x} + \vec{F}_s \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} = \vec{F}_{P,y} + \vec{N} + \vec{F}_y \\ mg \sin \alpha - \mu_s (mg \cos \alpha + \vec{F} \cdot \hat{y}) = 0 \\ N = mg \cos \alpha + \vec{F} \cdot \hat{y} \end{cases}$$

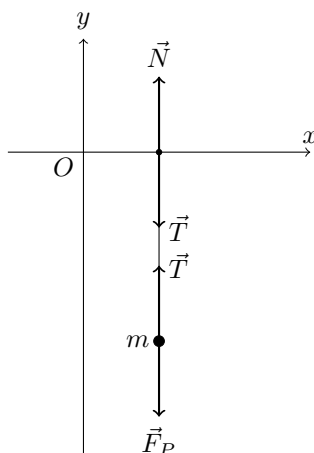
$$F = mg \left(\frac{\sin \alpha}{\mu_s} - \cos \alpha \right) \quad (4.5.13)$$

Una macchina potrà attraversare una curva inclinata di un angolo α , e di costante di attrito statico μ_s , se applicasse ad ognuna delle sue ruote una forza di modulo $F = mg \left(\frac{\sin \alpha}{\mu_s} - \cos \alpha \right)$, dove m è la massa della ruota.

4.5.7 Tensione

Considerando un filo non elastico, di massa trascurabile che lega un corpo ad un vincolo. Per il terzo principio nell'estremo dove è collegata la massa ci sarà una forza di modulo uguale a F_P e di verso opposto, mentre sul vincolo ci sarà una forza di modulo uguale a N e di verso opposto. Queste forze interne al filo si bilanciano e trasmettono la forza dalla massa al vincolo dove è legato il filo.

Questa forza viene chiamata tensione T :



Per dimostrare la proprietà di trasmissione di forze di una fune, si può approssimare come molti blocchetti in serie, di masse anch'essi trascurabile. Partendo dalla massa all'estremo inferiore, essa è legata ad un blocchetto che sarà soggetto alla forza peso della massa e alla sua reazione vincolare. Ora considerando la massa ed il primo blocchetto come un sistema unico, essendo collegato al blocchetto successivo su di esso agiranno la forza peso del sistema massa-blocchetto, uguale alla forza peso della massa, e una reazione vincolare derivante dalla forza peso. Continuando questo processo, poiché i blocchetti hanno massa trascurabile e non sono deformabili, si arriverà all'estremo

superiore collegato al vincolo, dove agiranno la forza peso del sistema massa-blocchetti, uguale alla forza peso della massa, e la sua relativa reazione vincolare.

4.5.8 Pendolo Semplice

Un pendolo semplice è un sistema formato da una massa collegata ad un filo di lunghezza l , che oscilla senza smorzamento da una posizione iniziale, inclinata di un angolo θ . Sulla massa agiscono due accelerazioni: una centripeta ed una tangenziale al moto: \vec{a}_{tan} , \vec{a}_{cen} . Il sistema, rispetto al sistema di riferimento $S(\tau, \nu)$ verrà quindi descritto dall'equazione:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a}_{cen} + m\vec{a}_{tan} \\ \begin{cases} \sum \vec{F}_\nu = \vec{T} + \vec{F}_{P,\nu} = m\vec{a}_{cen} \\ \sum \vec{F}_\tau = \vec{F}_{P,\tau} = m\vec{a}_{tan} \end{cases} \\ \begin{cases} ma_{cen}\hat{\nu} = T\hat{\nu} + F_P \cos(\theta(t))(-\hat{\nu}) \\ ma_{tan}\hat{\tau} = F_P \sin(\theta(t))(-\hat{\tau}) \end{cases} \\ \begin{cases} a_{cen} = \omega^2(t)l = \dot{\theta}^2(t)l \\ a_{tan} = \alpha(t)l = \ddot{\theta}(t)l \end{cases} \\ \begin{cases} m\dot{\theta}(t)^2l = T - mg \cos(\theta(t)) \\ m\ddot{\theta}(t)l = -mg \sin(\theta(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

Considreando l'equazione sull'asse τ :

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin\theta(t) \quad (4.5.14)$$

si definisce $\omega_p^2 = \frac{g}{l}$ la pulsazione del pendolo.

Considerando l'intorno $[0, \theta(t_0)]$, con $\theta(t_0) < 1$, si può approssimare $\sin\theta(t)$ mediante la sua serie di Taylor: $\sin\theta(t) = \theta(t) + O(\theta^3(t)) \Rightarrow \ddot{\theta}(t) \approx -\theta(t)\omega_p^2$, quindi si può approssimare il moto del pendolo ad un moto armonico:

$$\begin{cases} \theta(t) = A \sin(\varphi + \omega_p t) \\ \dot{\theta}(t) = A\omega_p \cos(\varphi + \omega_p t) \\ \ddot{\theta}(t) = -A\omega_p^2 \sin(\varphi + \omega_p t) \end{cases}$$

e avrà un periodo:

$$T_p = 2\pi\omega_p = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.5.15)$$

Si considera θ_0 la posizione iniziale del pendolo:

$$\theta_0 = \theta(0) = A \sin\varphi$$

Si considera il pendolo in uno stato di quiete nell'istante $t = 0$, quindi:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t=0) &= 0 = \omega_p A \cos\varphi \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

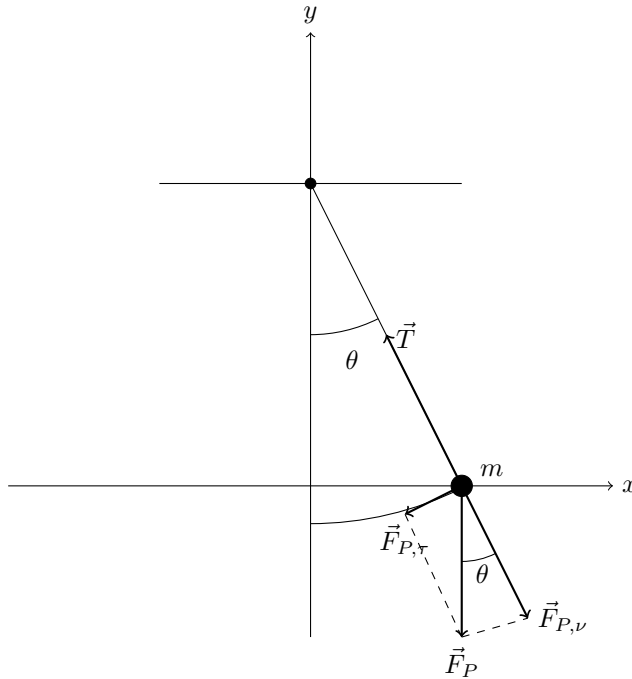
$$\theta_0 = A \sin \frac{\pi}{2} = A \quad (4.5.16)$$

Date queste condizioni le equazioni del moto del pendolo diventano:

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \omega_p t \right) = \theta_0 \cos(\omega_p t) \\ \dot{\theta}(t) = \theta_0 \omega_p \cos \left(\frac{\pi}{2} + \omega_p t \right) = -\theta_0 \omega_p \sin(\omega_p t) \\ \ddot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega_p^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \omega_p t \right) = -\theta_0 \omega_p^2 \cos(\omega_p t) \end{cases}$$

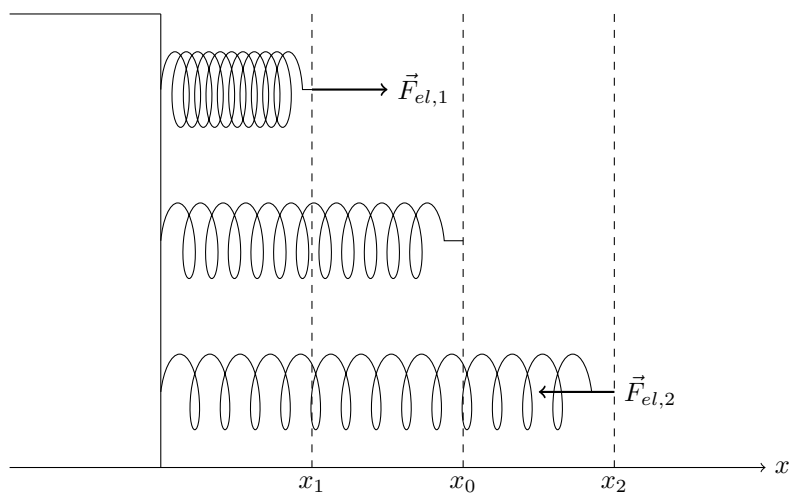
La tensione esercitata sul filo in funzione del tempo sarà per piccole oscillazioni:

$$T(t) = mg \cos(\theta_0 \cos(\omega_p t)) + ml \frac{d}{dt}(\theta_0 \cos(\omega_p t))^2 = mg \cos(\theta_0 \cos(\omega_p t)) + ml \theta_0^2 \sin^2(\omega_p t) \quad (4.5.17)$$



4.5.9 Forza Elastica

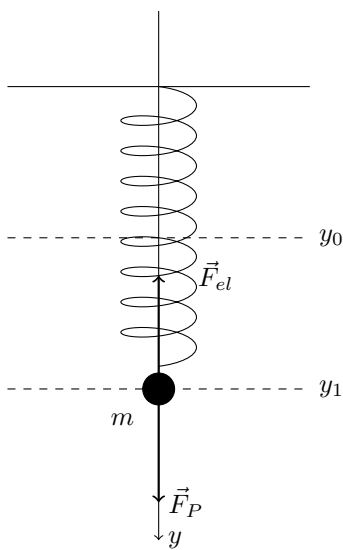
Un oggetto che, se deformato, tende a ritornare alla sua posizione di riposo risente di una forza elastica \vec{F}_{el} . Un oggetto comune che ha questa caratteristica è la molla. Una molla ha una posizione di riposo \vec{r}_0 , quando la molla si sposta di $\Delta \vec{r}$, risente di una forza di verso opposto allo spostamento e di modulo proporzionale ad esso: $\vec{F}_{el} \propto \Delta \vec{r}$.



La forza elastica sarà quindi data dalla seguente equazione, per masse ideali di massa trascurabile:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{r} \quad (4.5.18)$$

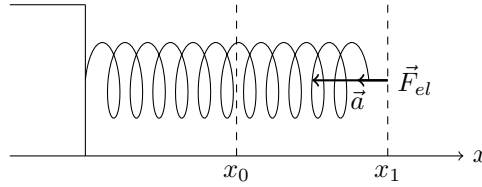
k viene chiamata costante elastica, si misura in Newton per metro $\left[\frac{N}{m}\right]$. Si può usare una molla, con una costante elastica k nota, per misurare la forza applicata sulla molla, in base alla sua deformazione, questo strumento di misura viene chiamato dinamometro. Nel caso sia presente una massa all'estremo della molla:



Se la molla si trova in equilibrio stabile nel punto $y = y_1$: $\sum \vec{F}_y = 0\hat{y}$, allora:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_y &= \vec{F}_P + \vec{F}_{el} = \vec{0} \\ F_P(-\hat{y}) + F_{el}\hat{y} &= 0\hat{y} \\ m &= -\frac{k\Delta y}{g}\end{aligned}\tag{4.5.19}$$

Considerando una molla su cui è applicata una forza \vec{F} nell'istante di tempo $t = 0$, in uno stato di equilibrio stabile: $\vec{F} + \vec{F}_{el} = \vec{0} \Rightarrow F = k\Delta x$. Nell'istante subito successivo viene rimossa la forza \vec{F} , la molla risente della sola forza elastica, e quindi di un'accelerazione risultante, indirizzata verso la posizione di riposo della molla:



Ne risulterà per il secondo principio della dinamica:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{el} &= m\vec{a} \\ F_{el}(-\hat{x}) &= ma(-\hat{x}) = -k\Delta\vec{x}(t) \\ -k(x_0 - x(t)) &= m\ddot{x}(t)\end{aligned}$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{k}{m}x_0\tag{4.5.20}$$

Viene definita la pulsazione della molla $\omega_M^2 = \frac{k}{m}$, si applica la sostituzione $x'(t) = \Delta x(t) = x(t) - x_0$:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_M(x(t) - x_0) \Rightarrow \ddot{x}'(t) = -\omega_M x'(t)$$

Quindi il moto di una molla è un moto armonico:

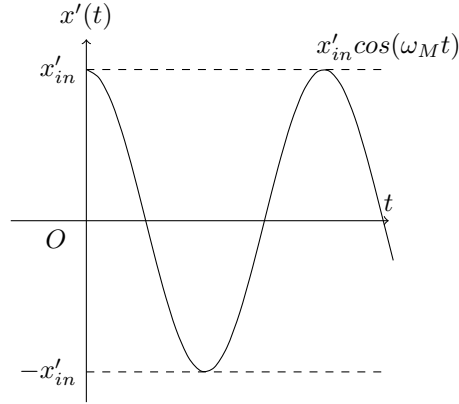
$$x'(t) = A\sin(\varphi + \omega_M t)$$

Si considera x'_{in} l'ampiezza della molla nell'istante $t = 0$: $x'_{in} = x'(0) = A\sin\varphi$. Essendo in uno stato di equilibrio nell'istante $t = 0$, allora: $\dot{x}'(0) = \omega_M A\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x'_{in} = A$

L'equazione del moto della molla sarà:

$$x'(t) = x'_{in}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega_M t\right) = x'_{in}\cos(\omega_M t)\tag{4.5.21}$$

La molla oscillerà con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_M}$ se l'oscillazione non si smorza nel tempo, allora continuerà ad oscillare tra $-x'_{in}$ e x'_{in} :

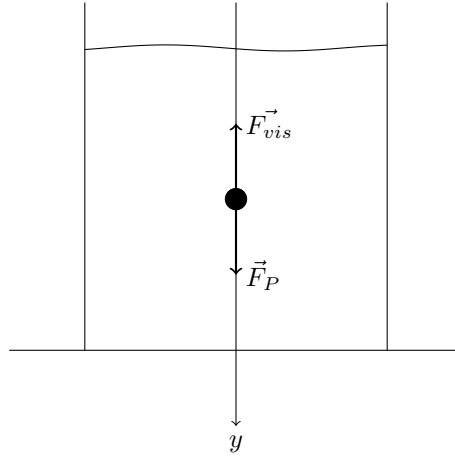


4.5.10 Forza di Attrito Viscoso

Quando un corpo si muove con una velocità $v(t)$ attraverso un fluido, esso risente di una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità del corpo che si oppone al suo spostamento: $\vec{F}_{vis} = -b\vec{v}(t)$.

b viene chiamata costante di attrito viscoso, si misura in Newton al secondo per metro $\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$.

Considerando un corpo che si muove dentro un liquido con una velocità iniziale $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$, per cui il corpo risente di una forza di attrito viscoso $\vec{F}_{vis} = -b\vec{v} = -bv\hat{y}$. Se si muovesse anche in un'altra direzione x , il corpo sarebbe soggetto ad un attrito viscoso $\vec{F}_{vis} = -F_{vis,x}\hat{x} - F_{vis,y}\hat{y}$.

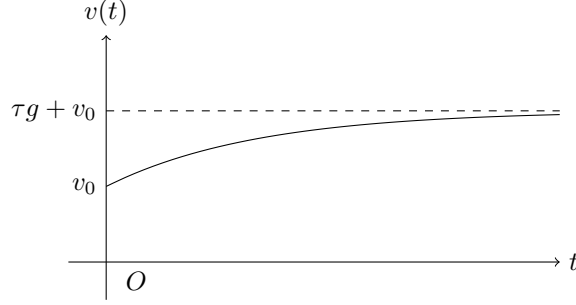


$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_y &= m\vec{a}_y \\
F_P \hat{y} + |F_{vis}|(-\hat{y}) &= m\dot{v}(t)\hat{y} \\
mg - bv(t) &= m\dot{v}(t) \\
dv(t) &= (g - \frac{b}{m}v(t))dt \\
\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv(\tau)}{g - \frac{b}{m}v(\tau)} &= \int_0^t d\tau \\
\frac{b}{m} \left(\ln \left| g - \frac{b}{m}v_0 \right| - \ln \left| g - \frac{b}{m}v(t) \right| \right) &= t \\
\ln \left| g - \frac{b}{m}v(t) \right| &= \ln \left| g - \frac{b}{m}v_0 \right| - t \frac{m}{b} \\
(g - \frac{b}{m}v(t)) &= (g - \frac{b}{m}v_0) e^{-t \frac{m}{b}} \\
-bv(t) &= m g e^{-t \frac{b}{m}} - m g - b v_0 e^{-t \frac{b}{m}} \\
v(t) &= \left(1 - e^{-t \frac{b}{m}} \right) \frac{m}{b} g + v_0 e^{-t \frac{b}{m}}, \quad \frac{m}{b} = \tau \\
v(t) &= \tau g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - \frac{v_0}{\tau g} \right) \right) \tag{4.5.22}
\end{aligned}$$

τ viene chiamato tempo caratteristico (o costante di tempo) quantifica quanto il corpo accelera lentamente dentro al liquido.

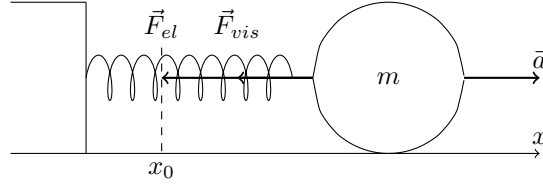
Nell'istante di tempo $t = 0$, la velocità del corpo sarà: $v(0) = \tau g \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}} \left(1 - \frac{v_0}{\tau g} \right) \right) = v_0$,
mentre avrà un valore limite v_{lim} tale che:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_y &= \vec{0} \\
mg\hat{y} - b(v_{lim} - v_0)\hat{y} &= 0\hat{y} \\
v_{lim} &= \tau g + v_0 \tag{4.5.23}
\end{aligned}$$



4.6 Oscillatore Armonico

Un oscillatore armonico è un oggetto composto da una molla e da una massa ad essa collegata. La massa si muove di moto oscillatorio semplice: $x(t) = x_{in} \sin\left(\omega_M t + \frac{\pi}{2}\right)$. Oscilla con una frequenza $\nu_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$. Si scegli un sistema di riferimento dove la posizione di riposo della molla coincide con l'origine degli assi.



4.6.1 Moto Oscillatorio con Attrito Viscoso

Se la massa attaccata al corpo è soggetta ad un attrito viscoso allora:

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{F}_x &= m\vec{a}_x \\
 \vec{F}_{el} + \vec{F}_{vis} &= m\vec{a}_x \\
 -kx(t) - b\dot{x}(t) &= m\ddot{x}(t) \\
 \ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

L'equazione del moto del corpo è un'equazione differenziale di secondo ordine e primo grado, la soluzione di questo tipo di equazione si trova considerando:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + a\dot{y} + y &= 0 \\
 \lambda^2 + a\lambda + b &= 0 \\
 \begin{cases} y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, & A, B \in \mathbb{R} \text{ se } \Delta > 0 \\ y(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}, & A, B \in \mathbb{R} \text{ se } \Delta = 0 \\ y(t) = Ce^{(Re(\lambda_1) + iIm(\lambda_1))t} + De^{(Re(\lambda_2) + iIm(\lambda_2))t}, & C, D \in \mathbb{C} \text{ se } \Delta < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\frac{b}{m}$ viene chiamato tempo caratteristico γ e $\frac{k}{m}$ la pulsazione della molla ω_M^2 :

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_M^2 x(t) = 0 \quad (4.6.2)$$

Se il polinomio caratteristico ha due soluzioni complesse, la massa tende al punto di riposo, oscillando. Se ha due soluzioni reali, la massa tende alla posizione di riposo senza oscillare.

Se $\Delta = 1 - \frac{4\omega_M^2}{\gamma^2} < 0 \Rightarrow \gamma^2 < 4\omega_M^2$, la massa oscilla fino alla posizione di riposo, le due soluzioni del polinomio caratteristico saranno:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega_M^2}{\gamma^2}} \frac{\gamma}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà quindi:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\Omega\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} - i\Omega\right)t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t})$$

Poiché $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, mentre la posizione $x(t)$ è una funzione $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \Im(x(t)) = 0$$

$$\Im \left(e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 \cos(\Omega t) + iC_1 \sin(\Omega t) + C_2 \cos(\Omega t) - iC_2 \sin(\Omega t)) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \Im((C_1 + C_2) \cos(\Omega t)) = 0 \\ \Re(i(C_1 - C_2) \sin(\Omega t)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Im(C_1 + C_2) = 0 \Rightarrow \Im(C_1) = -\Im(C_2) \\ \Re(C_1 - C_2) = 0 \Rightarrow \Re(C_1) = \Re(C_2) \end{cases}$$

$$C_1 = C_2^* = A e^{i\varphi}$$

Allora l'equazione del moto sarà:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 e^{i\Omega t} + C_1^* e^{-i\Omega t})$$

$$x(t) = 2A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\frac{e^{i(\Omega t + \varphi)} + e^{-i(\Omega t + \varphi)}}{2} \right)$$

$$x(t) = 2A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.6.3)$$

Se consideriamo la massa in uno stato di quiete nell'istante di tempo $t = 0$ allora:

$$x(0) = x_{in} = 2A \cos(\varphi)$$

$$\dot{x}(0) = -2A\Omega \sin(\varphi) = 0$$

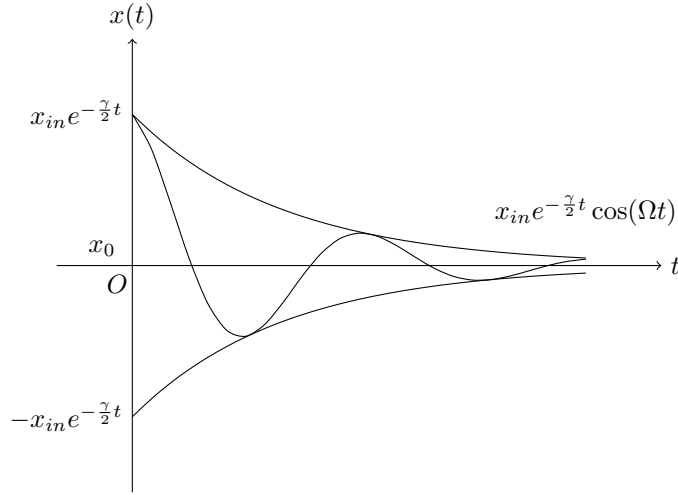
$$\varphi = 0$$

$$x_{in} = 2A \cos(0) = 2A$$

$$A = \frac{x_{in}}{2}$$

La legge oraria del moto, con un'oscillazione di semiperiodo $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, sarà:

$$x(t) = x_{in} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\Omega t) \quad (4.6.4)$$



Se $\gamma^2 < 4\omega_M^2$, allora l'oscillazione è fortemente smorzata e la legge oraria della posizione sarà:

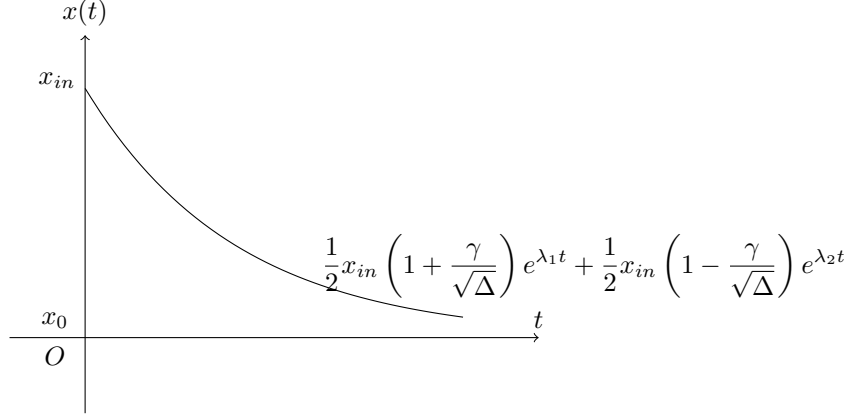
$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Considerando la massa in quiete nell'istante di tempo $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_{in} &= x(0) = A + B \\ \dot{x}(0) &= A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0 = -\frac{\gamma}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}(A - B) \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}x_{in} + B &= A \\ B &= \frac{1}{2}x_{in} \left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}\right) \\ A &= \frac{1}{2}x_{in} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}\right) \end{aligned}$$

La legge oraria sarà quindi:

$$x(t) = \frac{1}{2}x_{in} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}\right) e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{2}x_{in} \left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}\right) e^{\lambda_2 t} \quad (4.6.5)$$



4.6.2 Moto Oscillatorio con Attrito Viscoso ed una Forzante

Se viene applicata una forzante $F(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_f t)$ al corpo, il moto sarà descritto da:

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_M^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_f t) \quad (4.6.6)$$

La soluzione particolare $x_p(t)$ dell'equazione si ottiene considerando:

$$\begin{cases} x_p(t) = A \sin(\omega_f t + \varphi) \\ \dot{x}_p(t) = A \omega_f \cos(\omega_f t + \varphi) \\ \ddot{x}_p(t) = -A \omega_f^2 \sin(\omega_f t + \varphi) \end{cases}$$

$$-A \omega_f^2 \sin(\omega_f t + \varphi) + A \omega_f \gamma \cos(\omega_f t + \varphi) + A \omega_M^2 \sin(\omega_f t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_f t)$$

Espandendo la somma dei coseni e seni si ottiene:

$$-A \omega_f^2 (\sin(\omega_f t) \cos \varphi + \sin \varphi \cos(\omega_f t)) + A \omega_f \gamma (\cos(\omega_f t) \cos \varphi - \sin(\omega_f t) \sin \varphi) +$$

$$A \omega_M^2 (\sin(\omega_f t) \cos \varphi + \sin \varphi \cos(\omega_f t)) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_f t)$$

$$\begin{cases}
\sin(\omega_f t)((\omega_M^2 - \omega_f^2)A \cos \varphi - A\omega_f \gamma \sin \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_f t) \\
\cos(\omega_f t)((\omega_M^2 - \omega_f^2)A \sin \varphi + A\omega_f \gamma \cos \varphi) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(\omega_M^2 - \omega_f^2)A \cos \varphi - A\omega_f \gamma \sin \varphi = \frac{F_0}{m} \\
(\omega_M^2 - \omega_f^2)A \sin \varphi + A\omega_f \gamma \cos \varphi = 0 \Rightarrow \tan \varphi = \frac{-\omega_f \gamma}{(\omega_M^2 - \omega_f^2)}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A \frac{\omega_M^2 - \omega_f^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\omega_f \gamma}{(\omega_M^2 - \omega_f^2)}\right)^2}} - A\omega_f \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\omega_f \gamma}{(\omega_M^2 - \omega_f^2)}\right)^2}}\right)^2} = \frac{F_0}{m} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\omega_f \gamma}{(\omega_M^2 - \omega_f^2)}\right)^2}} = \cos \varphi
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A \left(\frac{(\omega_M^2 - \omega_f^2)^2 + \omega_f^2 \gamma^2}{\sqrt{(\omega_M^2 - \omega_f^2)^2 + \omega_f^2 \gamma^2}} \right) = A \sqrt{(\omega_M^2 - \omega_f^2)^2 + \omega_f^2 \gamma^2} = \frac{F_0}{m} \\
\tan \varphi = \frac{-\omega_f \gamma}{(\omega_M^2 - \omega_f^2)}
\end{cases}$$

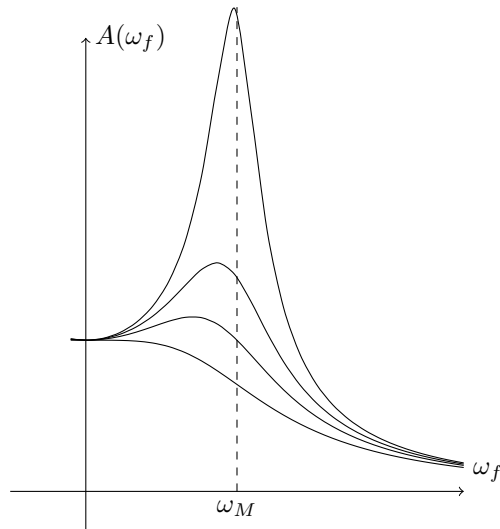
$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_M^2 - \omega_f^2)^2 + \omega_f^2 \gamma^2}} \quad (4.6.7)$$

L'ampiezza della soluzione particolare $x_p(t)$ dipenderà dalla pulsazione della forzante, della molla e dal tempo caratteristico: $x_p(t) = A(\omega_f) \sin(\omega_f t + \varphi)$

Se i valori della costante di tempo $\gamma \approx 0$ allora l'ampiezza in funzione della pulsazione della forzante diventa:

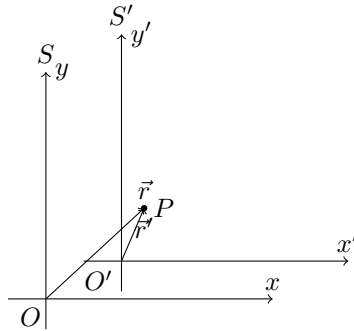
$$A(\omega_f) \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_M^2 - \omega_f^2} \quad (4.6.8)$$

Quando la forza agente sul corpo ha una pulsazione $\omega_f \in I_{\omega_M}(\delta)$ allora l'ampiezza tende ad aumentare all'infinito: si verifica il fenomeno della risonanza. Per valori di γ vicini allo zero, è presente il fenomeno di risonanza, ma con ampiezza minore:



4.7 Moti Relativi e Forze Apparenti

Un corpo analizzato in un sistema di riferimento sarà descritto tramite le coordinate di quel sistema, considerando un altro sistema cambierà l'espressione in coordinate del comportamento del corpo interno al sistema.



4.7.1 Sistemi Inerziali

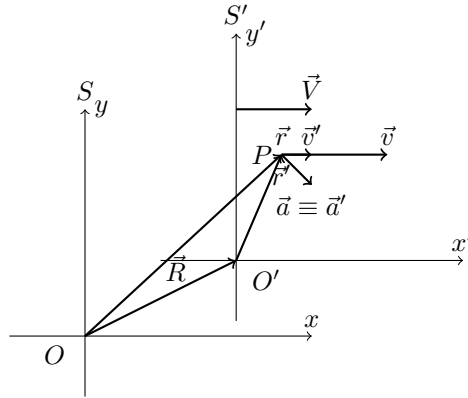
Per il primo principio della dinamica è impossibile poter determinare sperimentalmente se il sistema di riferimento dove avviene la misura sia in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un osservatore esterno. Questo tipo di sistema di riferimento viene chiamato inerziale, rispetto ad un altro sistema. Per attuare un cambiamento di coordinate da un sistema ad un altro si considera la

distanza tra le due origini $\vec{R} = |\overline{OO'}| \hat{R}$, e la velocità del sistema S' rispetto ad S \vec{V} :

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}' + \vec{0} = \vec{a}' \end{cases} \quad (4.7.1)$$

Anche i versori delle componenti vettoriali potrebbero variare nel tempo a causa del moto del sistema S' rispetto a S . In quel caso sarà presente un'accelerazione A del sistema S' a causa del cambio di direzione della velocità, causato dal cambio di direzione dei vettori componenti. Considerando il sistema inerziale S' , non avendo un'accelerazione relativa a S allora anche la forza risultante agente su un corpo, descritta in entrambi i sistemi di riferimento sarà uguale:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}'_{tot} \quad (4.7.2)$$



4.7.2 Sistemi non Inerziali

Se un sistema si muove di moto rettilineo non uniforme, rispetto ad un altro, allora i due sistemi non sono inerziali tra di loro. S' avrà un'accelerazione A relativa al sistema S , le espressioni per il cambio di coordinate saranno:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \end{cases} \quad (4.7.3)$$

Poiché cambia l'accelerazione del corpo, cambierà anche la sua forza risultante. Quindi deve esistere una forza apparente, poiché dipende interamente dal cambiamento tra due sistemi di riferimento non inerziali tra di loro, per spiegare la differenza della forza risultante agente sul corpo nei due sistemi:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m(\vec{a}' + \vec{A}) \\ m\vec{a}' &= m\vec{a} - m\vec{A} \\ \vec{F}'_{tot} &= \vec{F}_{tot} - m\vec{A} \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

$m\vec{A}$ rappresenta questa forza apparente.

4.7.3 Sistemi non Inerziali con Rotazione e Trascinamento

Se il sistema S' non inerziale ruota intorno al centro del sistema S , allora i versori di S' rispetto a S cambieranno rispetto al tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}' + \vec{R} \quad (4.7.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{x}' + x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\hat{z}' + z'\frac{d\hat{z}'}{dt} + \vec{V} \\ &\quad \vec{v}'_x\hat{x}' + x'\omega\hat{\tau}_{x'} + \vec{v}'_y\hat{y}' + y'\omega\hat{\tau}_{y'} + \vec{v}'_z\hat{z}' + z'\omega\hat{\tau}_{z'} + \vec{V} \\ &\quad v'_x\hat{x}' + v'_y\hat{y}' + v'_z\hat{z}' + x'\vec{\omega} \times \hat{x}' + y'\vec{\omega} \times \hat{y}' + z'\vec{\omega} \times \hat{z}' + \vec{V} \\ &\quad \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{V} \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &\quad \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{A} \\ &\quad \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{A} \\ &\quad \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{A} \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Viene definita l'accelerazione di trascinamento dovuta al moto circolare e di traslazione di S' intorno al centro O e ad alla posizione del corpo nel sistema S' :

$$\vec{a}_{tr} = \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.7.8)$$

dove $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ viene definita accelerazione centrifuga. Viene definita accelerazione di Coriolis dovuta al moto del corpo nel sistema S' ed alla rotazione del sistema S' intorno a O :

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.7.9)$$

Il moto di un corpo in S' analizzato rispetto al sistema di riferimento S sarà dato da:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_C \end{cases} \quad (4.7.10)$$

Se il corpo è soggetto ad una forza \vec{F}_{tot} nel sistema S , allora in S' sarà soggetto ad una forza:

$$\vec{F}'_{tot} = m(\vec{a} - \vec{a}_{tr} - \vec{a}_C) = \vec{F}_{tot} - \vec{F}_{tr} - \vec{F}_C \quad (4.7.11)$$

5 Meccanica

La meccanica studia le relazioni energetiche dei corpi. L'energia è una proprietà locale di ogni corpo, non dipende dal sistema di riferimento dove si trova il corpo.

5.1 Lavoro

Il lavoro è una grandezza fisica, misurata in Joule $[J]$, che quantifica la forza \vec{F} necessaria per compiere un certo spostamento Δs :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} [N \cdot s] = [J] \quad (5.1.1)$$

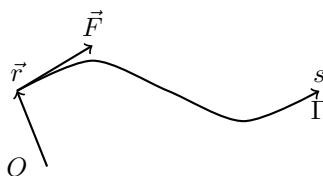
Il lavoro lega diversi stati in cui si puoi trovare il corpo, indipendentemente dal tempo, può effettuare quei cambiamenti di stato in un qualsiasi intervallo di tempo. Il lavoro dipende dalla solo componente della forza concorde allo spostamento. Se lo spostamento è una traiettoria curva, si considera la traiettoria divisa in segmenti Δs , su cui si applica la forza \vec{F} . Il lavoro totale sarà allora dato dalla somma di tutti i lavori su ogni segmento della traiettoria, se il numero di segmenti tende all'infinito $n \rightarrow \infty$ allora i segmenti diventeranno di lunghezza infinitesima, e la sommatoria diventa un integrale lungo la traiettoria:

$$W_{A \rightarrow B} \approx \sum_{i=0}^n \vec{F} \cdot \vec{\Delta s}_i$$

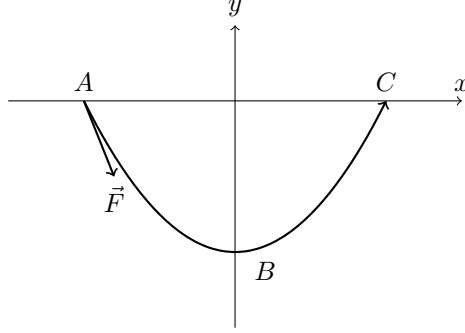
$$W_{A \rightarrow B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \vec{F} \cdot \vec{\Delta s}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot \hat{s} ds = \int_A^B F_s ds \quad (5.1.2)$$

Dove F_s è il modulo della componente della forza parallela all'asse curvilineo s , coincidente alla traiettoria Γ del corpo nello spostamento dal punto A al punto B . Considerando lo spostamento come variazione di posizione del corpo lungo l'intera traiettoria:

$$W_\Gamma = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.1.3)$$



Se il lavoro effettuato è positivo allora la forza ha una componente concorde allo spostamento. Se il lavoro effettuato è negativo allora ha una componente che si oppone allo spostamento. Se il lavoro è nullo, la forza è perpendicolare allo spostamento effettuato. Il lavoro totale può compensarsi lungo l'intera traiettoria:



Il lavoro complessivo sarà dato dalla somma dei lavori sulle due traiettorie $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$:
 $W_{A \rightarrow C} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C}$.

Se la forza \vec{F} agente sul corpo è conservativa, allora il lavoro da A a B sarà uguale e contrario del lavoro da B a C , quindi il lavoro complessivo sarà nullo.

Se agiscono più forze sul corpo, il lavoro sarà dato dal lavoro della risultante, quindi dalla risultante dei lavori:

$$W_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{F}_{tot} d\vec{r} = \sum_{i=0}^n \int_{\Gamma} \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_{i=0}^n W_i \quad (5.1.4)$$

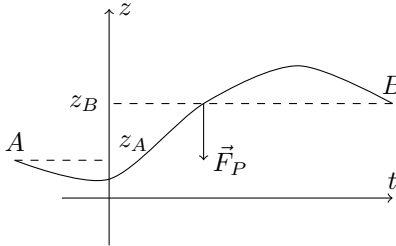
Dato un sistema di riferimento $d\vec{r} = \hat{s} ds$, si potrà scomporre la forza agente sul corpo come: $\vec{F} = F_{\parallel} \hat{s} + F_{\perp} \hat{s}_{\perp}$ il lavoro risultante sarà quindi:

$$W = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} F_{\parallel} \hat{s} \cdot \hat{s} + F_{\perp} \hat{s}_{\perp} \cdot \hat{s} ds = \int_{s_A}^{s_B} F_{\parallel} ds \quad (5.1.5)$$

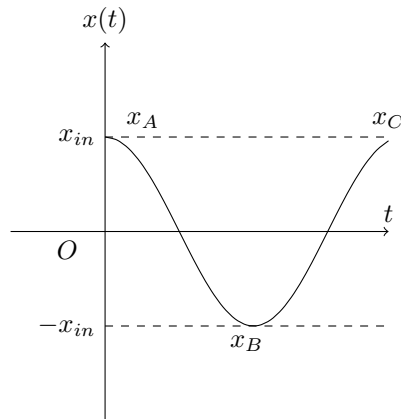
5.2 Forze Conservative

Considerando un corpo di massa m che cade, esso sarà soggetto ad una forza peso $\vec{F}_P = mg(-\hat{z})$, che causa uno spostamento lungo l'asse z , il suo lavoro sarà:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_P \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{z_A}^{z_B} mg(-\hat{z})(dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= - \int_{z_A}^{z_B} mg dz = -mg\Delta z \\ W_{A \rightarrow B} &= -mg\Delta z \end{aligned} \quad (5.2.1)$$



Se la variazione di altezza è negativa, allora il corpo scende e la forza peso avrà un lavoro positivo, mentre se la variazione di altezza è positiva il corpo sale e avrà lavoro negativo. Considerando un oscillatore armonico senza attrito, la massa sarà soggetta ad una forza elastica \vec{F}_{el} che causerà uno spostamento lungo l'asse x , con un certo lavoro.



Il lavoro dello spostamento $x_A \rightarrow x_C$ è nullo, poiché la molla ritorna alla stessa posizione iniziale. Viene considerata la posizione iniziale coincidente con l'origine dell'asse x . Il lavoro $W_{A \rightarrow B}$ sarà:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_{el} \cdot \hat{x} dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = -k \frac{\Delta x^2}{2} \quad (5.2.2)$$

La forza peso e la forza elastica sono due forze conservative, in generale una forza conservativa è una forza che produce un lavoro indipendente dal percorso effettuato, dipende solo dagli stati iniziali e finali del corpo. Per cui esisterà una primitiva della forza in funzione della posizione $\vec{F}(\vec{r})$, questa primitiva $-U(\vec{r})$ viene chiamata energia potenziale. Il lavoro generato da una forza conservativa lungo la traiettoria Γ dal punto A al punto B sarà dato da:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(U(B) - U(A)) = -\Delta U_{AB} \quad (5.2.3)$$

Se una forza è conservativa il lavoro sarà dato da una differenza di due stati, per cui la componente $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ rappresenterà un differenziale esatto dW , per cui si avrà:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_{AB}} dW = -\Delta U_{AB} \quad (5.2.4)$$

Se la forza non è conservativa allora il componente $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ rappresenterà un differenziale inesatto δW , poiché l'integrale dipenderà dal percorso e non dalla differenza di due stati.

Una forza è conservativa se il lavoro compiuto non dipende dal percorso compiuto dallo spostamento, se indipendentemente dal percorso il lavoro complessivo per compiere uno spostamento nullo $A \rightarrow B \rightarrow A$ è nullo, se il lavoro può essere espresso come una differenza di energia potenziale oppure se

il differenziale δW rappresenta un differenziale esatto. Una forza è conservativa se:

- (i) W_{AB} non dipende da Γ_{AB} ;
- (ii) $W_{ABA} = 0$;
- (iii) $W_{AB} = -\Delta U_{AB}$;
- (iv) $\delta W = -dU$.

Se la forza è conservativa allora:

$$\begin{aligned}
 (i), (iii) \quad W_{AB} &= \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 d\vec{r} &= \hat{s} ds \\
 W_{AB} &= \int_{s_A}^{s_B} \vec{F} \cdot \hat{s} ds = \int_{s_A}^{s_B} F ds = -\Delta U_{AB} \\
 (ii) \quad W_{\Gamma_{AB}} &= \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F} \cdot \hat{s} ds = - \int_{s_B}^{s_A} \vec{F} \cdot \hat{s} ds = -W_{\Gamma_{BA}} \\
 W_{\Gamma_{ABA}} &= W_{\Gamma_{AB}} + W_{\Gamma_{BA}} = -W_{\Gamma_{BA}} + W_{\Gamma_{BA}} = 0
 \end{aligned}$$

5.3 Forze non Conservative

La forza di attrito è una forza non conservativa, poiché dipende dal percorso del corpo, il suo lavoro generato sarà:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F}_{att} d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} -\mu mg ds = -\mu g \int_{s_A}^{s_B} ds = -\mu g \mathcal{L}(\Gamma_{AB}) \quad (5.3.1)$$

Dove \mathcal{L} rappresenta la lunghezza dello spostamento effettuato dal corpo. In generale una forza non conservativa sarà proporzionale alla distanza percorsa dal corpo su cui agisce la forza

5.4 Potenza

Il lavoro non considera l'intervallo di tempo in cui viene effettuato lo spostamento, per cui viene definita la grandezza fisica potenza media che quantifica la quantità di lavoro scambiata in un intervallo di tempo Δt , viene misurata in Watt corrispondenti a Joule per secondi:

$$\mathcal{P}_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \left[\frac{J}{s} \right] = [W]$$

Se viene considerato un intervallo di tempo infinitesimo dt , allora si considera la potenza istantanea:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.4.1)$$

L'energia può essere espressa anche come kilowatt-ora kWh . $1 kWh$ rappresenta l'energia necessaria per fornire una potenza di un kilowatt per un ora. Può essere convertita in Joule considerando:

$$kWh = 10^3 W \cdot 3,6 \times 10^3 h = 3,6 \times 10^6 J = 3,6 MJ$$

Per cui corrisponde a 3,6 megajoule di energia.

5.5 Energia Cinetica

Considerando $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$ allora si può esprimere il differenziale come:

$$\delta W = m\dot{\vec{v}} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v} \cdot d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Il lavoro calcolato rispetto alla velocità del corpo sarà:

$$W = \int_{\Gamma_{AB}} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{v_A}^{v_B} v dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Viene definita energia cinetica K la funzione di stato corrispondente all'energia necessaria per compiere questo lavoro, indipendente dal tipo di forza agente sul corpo. Se si considera $v_A = 0$, allora l'energia cinetica in B sarà uguale al lavoro necessario per spostare un corpo dallo stato 0 allo stato v_B :

$$W_{0 \rightarrow B} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2m}p_B^2 = K(B) \quad (5.5.1)$$

Si può esprimere il lavoro compiuto da una forza tra due stati A e B rispetto all'energia cinetica del corpo nei due stati:

$$W_{\Gamma_{AB}} = \Delta K^{AB} \quad (5.5.2)$$

Ne segue il teorema delle forze vive:

Se in un sistema agiscono solo forze conservative, il lavoro prodotto da esse sarà dato dalla sola variazione di energia cinetica:

$$W = \Delta K \quad (5.5.3)$$

5.6 Energia Potenziale

Considerando un corpo in due sistemi di riferimento diversi, distanti $\overline{OO'} = \vec{R}$ tra di loro, il lavoro compiuto da una forza conservativa nel sistema S e nel sistema S' sarà:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) \\ W'_{AB} &= U(\vec{r}'_B) - U(\vec{r}'_A) \\ U(\vec{r}_B - \vec{R}) - U(\vec{r}_A - \vec{R}) \\ U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) + U(\vec{R}) - U(\vec{R}) &= W_{AB} \end{aligned}$$

La distanza tra i due punti A e B non dipende dal sistema di riferimento. Il lavoro quindi non dipenderà dal sistema di riferimento usato per analizzare il comportamento del corpo. Se invece fosse stata una forza non conservativa, allora il lavoro sarebbe dipendente dalla lunghezza del percorso $\mathcal{L}(\Gamma_{AB})$, indipendente anch'essa dal sistema di riferimento scelto.

Lo stesso vale per l'energia cinetica, dipendente dalla velocità del corpo nei punti A e B .

Viene definita energia potenziale in un punto, il lavoro necessario per spostare un corpo da uno stato di riferimento allo stato in un punto P . Essendo l'energia potenziale definita come una variazione sarà sempre definita a meno di una costante $c = U(O)$, dove O è il centro del sistema di

riferimento usato per calcolare l'energia potenziale, convenzionalmente si considera l'energia nello stato di riferimento $U(O) = 0$. L'energia potenziale sarà quindi espressa come:

$$\Delta U_{OP} = U(P) - \overset{0}{\cancel{U(O)}} = -W_{0 \rightarrow P} \quad (5.6.1)$$

considerando l'energia potenziale nulla in 0.

5.7 Teorema della Conservazione dell'Energia

Se in un sistema agiscono solo forze conservative allora la variazione di energia cinetica è uguale all'opposto la variazione di energia potenziale.

$$\begin{cases} W_{AB} = \Delta K_{AB} > 0 \\ -W_{AB} = \Delta U_{AB} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K(B) > K(A) \\ U(B) < U(A) \end{cases}$$

$$\Delta K_{AB} = -\Delta U_{AB} \quad (5.7.1)$$

Se l'energia potenziale è nulla nel punto B , e l'energia cinetica è nulla nel punto A , allora:

$$U(B) = K(A) \quad (5.7.2)$$

l'energia potenziale in B verrà convertita in energia cinetica in A . Se Γ è sempre alla stessa quota rispetto ad un sistema di riferimento allora $\Delta U = 0$, e l'energia cinetica è costante $\Delta K = \text{cost.}$, se non ci sono altre forze anche l'energia cinetica è nulla.

5.8 Energia Meccanica

Viene definita la grandezza energia meccanica, somma tra l'energia potenziale e cinetica in un punto P :

$$E = K + U \quad (5.8.1)$$

Se su un corpo agiscono solo forze conservative allora:

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U = \Delta K \\ K_B + U_B &= K_A + U_A \\ E_B &= E_A \\ E_B - E_A &= 0 \\ \Delta E &= 0 \end{aligned} \quad (5.8.2)$$

quindi in un sistema dove agiscono solo forze conservative la variazione di energia meccanica è nulla, ovvero l'energia si trasforma solamente da potenziale a cinetica e viceversa.

Se su un corpo agiscono sia forze conservative che non conservative, il suo lavoro totale sarà dato dalla somma dei lavori dovuti alla forza conservativa ed alla forza non conservativa:

$$\begin{aligned} W &= W^{n.c.} + W^c = \Delta K \\ W^c &= -\Delta U \\ W^{n.c.} &= \Delta K + \Delta U \\ W^{n.c.} &= \Delta E \end{aligned} \tag{5.8.3}$$

quindi in un sistema dove agiscono forze non conservative, il lavoro derivato da esse sarà uguale alla variazione di energia meccanica del sistema. Analogamente se in un sistema la variazione di energia meccanica è diversa da zero, allora agiscono anche forze non conservative.

5.9 Potenziale

Se su un corpo agiscono solo forze conservative allora:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} -dU \\ \vec{F} &= -\frac{dU}{d\vec{r}} = -\vec{\nabla} \cdot U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} \right) \end{aligned}$$

Viene definita la funzione di stato potenziale $V(x)$. In una dimensione corrisponde ad una qualsiasi primitiva della forza conservativa \vec{F} :

$$\int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(x_B) - V(x_A)$$

In 2 dimensioni il potenziale dipenderà da due variabili $V(x, y)$ quindi sarà una superficie. Si può analizzare considerando una variabile costante, in questo modo si considera una "fetta" della superficie bidimensionale.

Si può considerare il suo andamento rispetto ad una singola variabile tramite la derivata parziale: $\frac{\partial V}{\partial x}$, questa analisi equivale all'analisi a "fette" poiché considera il cambiamento del potenziale rispetto ad una sola variabile, se invece si deriva questa derivata appena ottenuta rispetto all'altra variabile si ottiene una derivata mista della funzione V , che tiene conto del cambiamento della funzione sulle x rispetto alla variazione delle y : $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$.

Non necessariamente queste derivate miste sono uguali: $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$. Per il Teorema di Schwarz:

Se le derivate prime di una funzione $F(x, y)$ sono continue, allora le sue derivate miste saranno uguali.

è possibile risolvere questo problema.

Si definisce differenziale totale o esatto del potenziale V :

$$dV(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

Si definisce differenziale parziale di una funzione F :

$$\delta F = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

Se $F_1(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}$ e $F_2(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}$, allora il differenziale parziale δF sarà uguale al differenziale esatto ed il suo integrale sarà dato da: $\int \delta F = \int dV = V + c$. Affinché il differenziale parziale ed il differenziale esatto siano uguali, deve valere il teorema di Schwarz per la superficie V : $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \iff \frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial y} F_1$. Questa condizione è verificata se il potenziale V è una superficie sufficientemente connessa. Analogamente si può considerare una funzione in 3 dimensioni, come il lavoro, che avrà un differenziale parziale:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$$

se questo differenziale è uguale al differenziale esatto del potenziale: $\delta W = dV$, allora la forza è conservativa poiché si ha:

$$\int_{\Gamma_{AB}} \delta W = \int_{\Gamma_{AB}} dV = V(B) - V(A) \quad (5.9.1)$$

dove il potenziale V corrisponde all'opposto dell'energia potenziale: $U = -V$. Segue la seguente relazione:

$$F : \text{conservativa} \iff \delta W = -dU \quad (5.9.2)$$

5.10 Equilibrio e Stabilità

Un sistema dinamico, può essere in equilibrio statico o dinamico, in entrambi i casi la risultante delle forze agenti sul sistema deve essere nulla, allora:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U = \vec{0}$$

Questa funzione avrà punti di minimo corrispondenti a punti di equilibrio stabile del sistema e punti di massimo corrispondenti a punti di equilibrio instabile del sistema.

Per trovare questi punti si deriva nuovamente la funzione ottenendo:

$$-\nabla^2 U = \nabla F(\vec{r})$$

segue che il sistema è in uno stato di equilibrio stabile nella posizione \vec{r} t.c. $\nabla F(\vec{r}) < 0$, poiché corrisponde ad un punto di minimo, mentre è in stato di equilibrio instabile se $\nabla F(\vec{r}) > 0$.

Viene definito l'operatore Jacobiano \mathbf{J} , una matrice contenente tutte le possibili derivate miste. Se le derivate miste sono uguali, allora il Jacobiano è una matrice simmetrica. Tramite lo Jacobiano $\mathbf{J}U$ si può analizzare il comportamento di U per trovare punti di equilibrio.

Hopfield dimostrò che nell'intorno di un punto di stabilità il sistema tende all'equilibrio, ovvero resiste agli errori. In 1 dimensione il comportamento di un sistema attorno ad un punto di equilibrio x_0 sarà definito da:

$$F(x_0) = -\frac{dU}{dx}(x_0) = 0 \quad (5.10.1)$$

si considerano valori di $x \approx x_0$, allora la forza può essere approssimata mediante la sua serie di Taylor:

$$\begin{aligned} F(x) &\approx F(x_0) + \frac{dF}{dx}(x_0)(x - x_0) \\ F(x) &\approx 0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} \right) (x_0)(x - x_0) \\ F(x) &\approx -\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

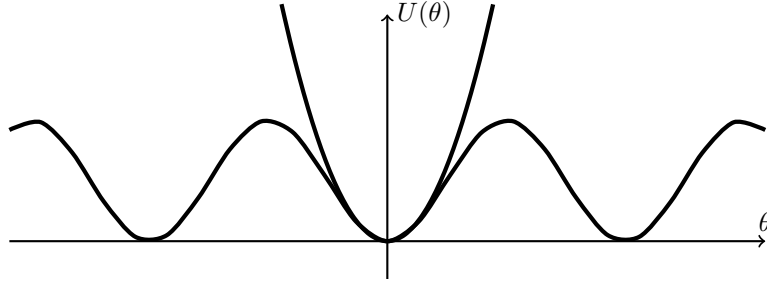
Se x_0 è un punto di equilibrio instabile allora $\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)$ sarà minore di zero, quindi la forza sarà concorde allo spostamento, allontanando il sistema dal punto di equilibrio, mentre se il punto x_0 è un punto di equilibrio stabile, si avrà un comportamento della forza discorde allo spostamento, quindi la forza tenderà al punto di equilibrio. Questo andamento è simile al comportamento di una molla:

$$F(x) \approx - \left(\frac{d^2U}{dx^2}(x_0) \right) (x - x_0) = -k(x - x_0) \quad (5.10.2)$$

Il sistema si comporterà come se fosse attaccato ad una molla avente posizione di riposo in x_0 e sarà soggetto ad una forza di richiamo indirizzata verso tale punto in presenza di uno spostamento. Considerando un pendolo semplice, si può approssimare il suo comportamento intorno al punto di equilibrio stabile:

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) \approx mgl \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) = mgl \frac{\theta^2}{2}$$

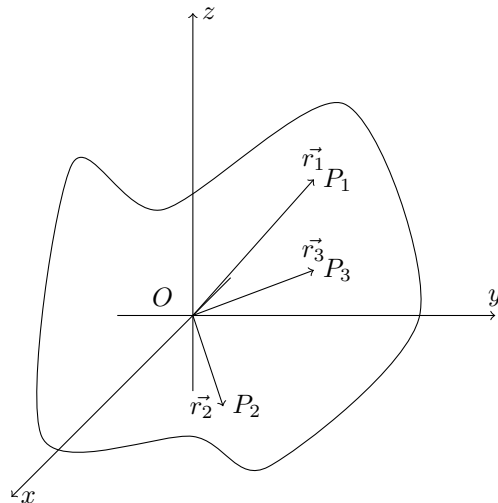
l'energia potenziale del pendolo avrà un comportamento parabolico nell'intorno del punto di equilibrio $\theta_0 = 0$.



6 Dinamica dei Sistemi di Punti Materiali

Un sistema di punti materiali è un insieme di punti definiti in un sistema di riferimento, aventi ognuno un suo comportamento nello spazio:

$$\mathcal{S} := \{P_i, \forall i \in [1, N] \cap \mathbb{N}\} \quad (6.0.1)$$



per ogni punto P_i sarà possibile descrivere il suo comportamento tramite la dinamica e o cinematica. Per trovare la forza totale agente su un unico punto P_i , si considerano tutte le interazioni tra quel punto e i restanti punti appartenenti al sistema \mathcal{S} :

$$\vec{F}_i^{tot} = \sum_{j=1}^{i-1} \vec{F}_{j \rightarrow i} + \sum_{k=i+1}^N \vec{F}_{k \rightarrow i} \quad (6.0.2)$$

Vengono definite forze interne al sistema, tutte le forze dovute ad interazioni tra elementi appartenenti ad esso. Mentre vengono definite forze esterne al sistema, tutte le forze dovute all'interazione tra punti appartenenti al sistema con oggetti non appartenenti ad esso.

È facile notare che per il terzo principio della dinamica la somma di tutte le forze interne al sistema è nulla. Per ogni forza $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ generata da un punto i verso un punto j esisterà una forza uguale e contraria $-\vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{F}_{j \rightarrow i}$, per cui la somma di tutte le coppie di forze tra loro opposte sarà uguale alla somma di tutte le forze interne, e sarà quindi nulla:

$$\vec{F}_{tot}^{int} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^{int} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_{i \rightarrow j} \right) = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(N,N)} \vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0} \quad (6.0.3)$$

considerando nulla la forza: $\vec{F}_{i \rightarrow i}$. Quindi la forza totale di un sistema \mathcal{S} sarà data da:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{tot}^{est} + \vec{F}_{tot}^{int} = \vec{F}_{tot}^{est} \quad (6.0.4)$$

Se la somma delle forze esterne applicate sul sistema è nulla allora: $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$, quindi il sistema si troverà in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

6.1 Centro di Massa

Il centro di massa di un sistema \mathcal{S} è definito come un punto, non necessariamente appartenente al sistema, che può essere usato per approssimare tutto il sistema. Il centro di massa si trova in una posizione \vec{r}_c rispetto ad un sistema di riferimento S definita come:

$$\vec{r}_{c.d.m.} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (6.1.1)$$

Può essere calcolato proceduralmente:

$$\vec{r}_{c.d.m.} = \vec{r}'_{c.d.m.} + \frac{m_{N+1} \vec{r}_{N+1}}{m_{N+1}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} + \frac{m_{N+1} \vec{r}_{N+1}}{m_{N+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N+1} m_i}$$

Se viene traslato il sistema di \vec{R} , la posizione del centro di massa verrà anch'essa traslata della stessa quantità:

$$\vec{r}'_{c.d.m.} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i + \vec{R})}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{R}}{\sum_{i=1}^N m_i} + \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \vec{R} + \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \vec{R} + \vec{r}_{c.d.m.}$$

Se le masse sono costanti, ed i punti sono mobili nel tempo, allora il centro di massa si muoverà nel tempo ed avrà una sua velocità

$$\vec{v}_{c.d.m.} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (6.1.2)$$

Analogamente si può ottenere l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{c.d.m.} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (6.1.3)$$

La quantità di moto del sistema coincide con la quantità di moto del centro di massa:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{c.d.m.} &= \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{p}^{tot}}{M} \\ M \vec{v}_{c.d.m.} &= \vec{p}_{c.d.m.} = \vec{p}^{tot} \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

con $M = \sum_{i=1}^N m_i$. Considerando la forza risultante agente su un punto P_i :

$$\begin{aligned} m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i^{tot} \\ \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{tot} \end{aligned}$$

$$M \vec{a}_{c.d.m.} = \vec{F}^{tot} \quad (6.1.5)$$

Poiché la somma totale delle forze interne è nulla, la somma delle forze esterni agenti sul sistema è uguale alla forza necessaria per muovere un corpo di massa M di un'accelerazione $\vec{a}_{c.d.m.}$. Viene quindi definita prima equazione cardinale la relazione tra le forze esterne agenti su un sistema e l'accelerazione del centro di massa del sistema:

$$(i) M\vec{a}_{c.d.m.} = \vec{F}^{est}$$

6.2 Sistema Isolato

Viene definito sistema isolato un sistema dove la somma delle forze esterni agenti su di esso è nulla $\vec{F}^{est} = \vec{0}$, allora per la prima equazione cardinale $M\vec{a}_{c.d.m.} = \vec{0}$. Segue che il centro di massa, quindi il sistema, si muoverà di moto rettilineo uniforme o sarà in stato di quiete. La quantità di moto interna del sistema \vec{p}^{int} sarà conservata, poiché $\frac{d}{dt}\vec{p}_{c.d.m.} = \vec{0}$.

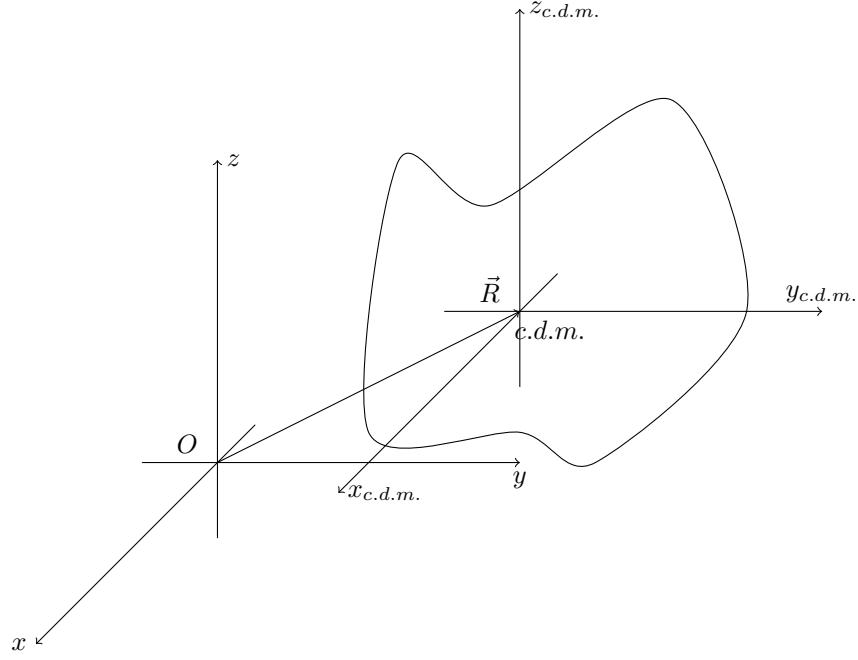
Se la quantità di moto totale è nulla $\vec{p}^{tot} = \vec{0}$, i punti appartenenti al sistema o divergeranno con quantità di moto tali da bilanciarsi, oppure convergeranno nel centro di massa. In quest'ultimo caso la posizione dei punti convergerà ad una posizione \vec{r} , la posizione del centro di massa sarà:

$$\vec{r}_{c.d.m.} = \frac{\sum_{i_1}^N m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r} \frac{\sum_{i_1}^N m_i}{M} = \vec{r} \quad (6.2.1)$$

6.3 Sistema di Riferimento del Centro di Massa

Se si sceglie un sistema di riferimento $S_{c.d.m.}$ con origine nel centro di massa, che si muove di sola traslazione con un'accelerazione $\vec{A} = \vec{a}_{c.d.m.} = \frac{\vec{F}^{est}}{M}$. La velocità del centro di massa relativa al sistema di punti espresso rispetto a $S_{c.d.m.}$ sarà nulla, quindi avrà una quantità di moto nulla e una quantità di moto totale nulla. Segue che in un sistema \mathcal{S} espresso rispetto a $S_{c.d.m.}$ gli elementi si muoveranno con una quantità di moto tale da bilanciarsi a vicenda.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{c.d.m.} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{c.d.m.} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{c.d.m.} \end{cases}$$



6.4 II Teorema di Köning

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali in un sistema di riferimento inerziale è data dalla somma tra l'energia cinetica del sistema di punti in un sistema di riferimento concorde al centro di massa, sommata all'energia cinetica del centro di massa:

$$K = K' + K_{c.d.m.} \quad (6.4.1)$$

Si rappresenta l'energia cinetica del sistema: $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$, e si rappresenta rispetto al sistema di riferimento concorde al centro di massa $S_{c.d.m.}$:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \quad v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{v}' + \vec{v}_{c.d.m.}) \cdot (\vec{v}' + \vec{v}_{c.d.m.}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_i'^2 + 2\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{c.d.m.} + v_{c.d.m.}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{c.d.m.} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{c.d.m.}^2 \\
 &= K' + \vec{p}_{tot}' \cdot \vec{v}_{c.d.m.} + K_{c.d.m.}, \quad \vec{p}_{tot}'(S_{c.d.m.}) = \vec{0} \\
 &K = K' + K_{c.d.m.}
 \end{aligned}$$

6.5 Urti

Quando due corpi si scontrano con due velocità iniziali \vec{v}_i , si verifica un fenomeno chiamato urto in un intervallo di tempo Δt , dopo lo scontro i corpi avranno velocità finali non necessariamente uguali alle velocità iniziali \vec{v}_f . Nell'intorno di tempo $[0, \varepsilon]$ i due corpi sono a contatto e il sistema si trova in uno stato di equilibrio instabile, poiché i corpi si separeranno dopo l'urto. Il sistema è isolato e quindi la quantità di moto totale del sistema rimarrà costante nell'intorno di tempo $[0, \varepsilon]$.

6.5.1 Forze Impulsive

Nell'intervallo di tempo dell'urto sui due corpi agisce una forza impulsiva, proporzionale all'inverso dell'intervallo di tempo in cui avviene l'urto $F(t) \propto \frac{1}{\varepsilon}$. Poiché la forza è una grandezza che non dipende esplicitamente dall'intervallo di tempo in cui è stata applicata si usa l'impulso, grandezza definita nella rappresentazione integrale del secondo principio della dinamica, per quantificare l'intensità dell'impulso:

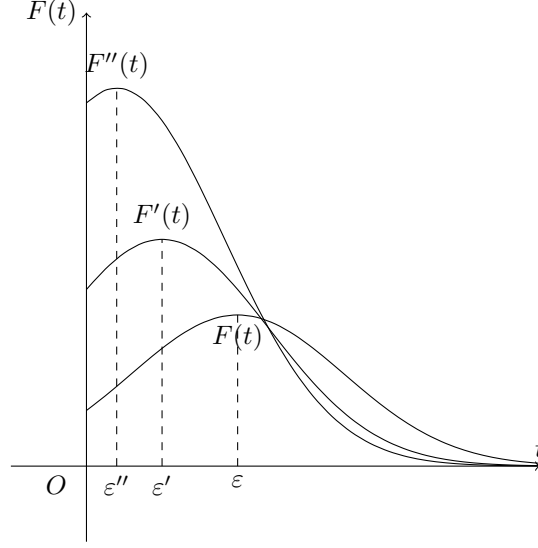
$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \\ \int_0^\varepsilon d\vec{p} &= \int_0^\varepsilon \vec{F} dt \\ \Delta\vec{p} &= \int_0^\varepsilon \vec{F} dt = \vec{J}\end{aligned}$$

Poiché la quantità di moto totale del sistema viene conservata durante l'urto, viene scambiata una quantità di moto $\Delta\vec{p}$ tra i due corpi durante l'intervallo di tempo $[0, \varepsilon]$.

Per una forza impulsiva F al diminuire dell'intervallo di tempo, la sua intensità aumenterà fino a tendere asintoticamente per un urto in un tempo infinitesimo, per cui l'impulso avrà un valore non nullo per un intervallo di tempo infinitesimo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \vec{F} dt \approx \vec{F} \cdot \varepsilon = \vec{J} \neq \vec{0}$$

Per una forza non impulsiva, nello stesso intervallo l'impulso dovuto a quella forza sarà nullo $\vec{F} \cdot \varepsilon = \vec{0}$.



6.5.2 Elastici

Gli urti possono essere rappresentati come uno scambio di quantità di moto tra due corpi. Se il sistema composto da i due corpi è isolato allora l'energia e la quantità di moto vengono conservate durante l'urto, mentre se non è isolato una parte dell'energia viene dissipata nell'ambiente esterno, per cui si definiscono due tipi di urti:

- Urti Elastici, dove l'energia del sistema si conserva;
- Urti Anelastici, dove l'energia del sistema non si conserva, ma una parte viene dissipata nell'ambiente esterno.

Considerando un urto elastico nel sistema di riferimento del centro di massa dei due corpi, allora la quantità di moto complessiva sarà nulla nell'istante iniziale e finale dell'urto, e si conserverà l'energia, ovvero l'energia cinetica iniziale sarà uguale all'energia cinetica finale:

$$\begin{cases} \vec{p}^{tot} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{1,i} = \vec{p}_{2,i} \wedge \vec{p}_{1,f} = \vec{p}_{2,f} \\ K_i = K_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1,i} = -m_2 v_{2,i} \wedge m_1 v_{1,f} = -m_2 v_{2,f} \\ \frac{1}{m_1} (m_1 v_{1,i})^2 + \frac{1}{m_2} (m_2 v_{2,i})^2 = \frac{1}{m_1} (m_1 v_{1,f})^2 + \frac{1}{m_2} (m_2 v_{2,f})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1,i}^2 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) = v_{1,f}^2 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \\ v_{1,i}^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) = v_{2,f}^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1,i} = \pm v_{1,f} \\ v_{2,i} = \pm v_{2,f} \end{cases}$$

Poiché i corpi convergono prima dell'urto e divergono subito dopo, la velocità di un corpo cambia verso dopo l'urto, quindi l'unica soluzione possibile è:

$$\begin{cases} v_{1,i} = -v_{1,f} \\ v_{2,i} = -v_{2,f} \end{cases} \quad (6.5.1)$$

Queste velocità sono calcolate nel sistema di riferimento $S_{c.d.m.}$. Per esprimere le velocità finali rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento inerziale S si considera: $v(S) = v(S_{c.d.m.}) + v_{c.d.m.}$,
 $v_{c.d.m.} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

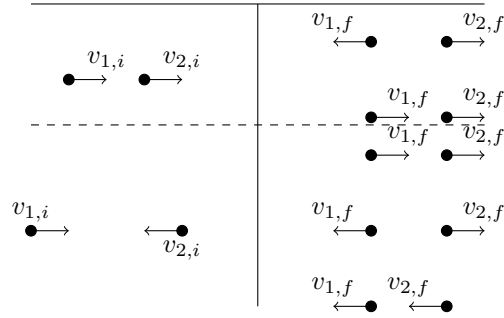
$$\begin{aligned} \begin{cases} v_{1,f}(S) = v_{1,f}(S_{c.d.m.}) + v_{c.d.m.} = -v_{1,i}(S_{c.d.m.}) + v_{c.d.m.} = 2v_{c.d.m.} - v_{1,i}(S) \\ v_{2,f}(S) = v_{2,f}(S_{c.d.m.}) + v_{c.d.m.} = -v_{2,i}(S_{c.d.m.}) + v_{c.d.m.} = 2v_{c.d.m.} - v_{2,i}(S) \end{cases} \\ \begin{cases} v_{1,f}(S) = \frac{2(m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}) - (m_1 + m_2)v_{1,i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,f}(S) = \frac{2(m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}) - (m_1 + m_2)v_{2,i}}{m_1 + m_2} \end{cases} \\ \begin{cases} v_{1,f}(S) = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,f}(S) = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Le velocità iniziali possono avere la stessa direzione, ma il corpo colpito dovrà essere raggiunto dal primo $v_{1,i} > v_{2,i}$, le velocità risultante del corpo colpito non potrà cambiare verso, poiché entrambe le velocità hanno lo stesso verso, mentre la velocità finale del primo corpo potrà rimanere concorde a quella iniziale o potrà essere di verso opposto.

$$\begin{aligned} v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2} \quad \begin{cases} < 0 & \frac{m_1 - m_2}{2m_2} < \frac{v_{2,i}}{v_{1,i}} < 1 \\ > 0 & \frac{m_1 - m_2}{2m_2} > \frac{v_{2,i}}{v_{1,i}} \end{cases} \\ v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2} > 0 \quad m_2 v_{2,i} + m_1((2v_{1,i} - v_{2,i})) > 0 \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Se i due corpi convergono con velocità iniziali aventi versi opposti, i versi delle velocità finale potranno avere verso opposto, oppure concorde ad una delle due velocità iniziali.

$$\begin{aligned} v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2} \quad \begin{cases} < 0 & \frac{m_1 - m_2}{2m_2} < \frac{v_{2,i}}{v_{1,i}} \\ > 0 & \frac{m_1 - m_2}{2m_2} > \frac{v_{2,i}}{v_{1,i}} \end{cases} \\ v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2} \quad \begin{cases} < 0 & \frac{m_2 - m_1}{2m_1} < \frac{v_{1,i}}{v_{2,i}} \\ > 0 & \frac{m_2 - m_1}{2m_1} > \frac{v_{1,i}}{v_{2,i}} \end{cases} \end{aligned}$$



Se un corpo si scontra contro un oggetto immobile all'urto, allora si può analizzare come se avesse una massa inerziale tendente all'infinito, poiché si oppone al moto dell'oggetto. In questo caso il corpo che si scontra rimbalzerà contro l'oggetto con una velocità:

$$v_{1,f} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i}}{m_1 + m_2} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_{1,i}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{-1 \cdot v_{1,i}}{1} = -v_{1,i} \quad (6.5.3)$$

6.5.3 Anaelastici

Un urto anaelastico è un urto dove non viene conservata l'energia: $K_f < K_i$, si disperde nell'ambiente una porzione dell'energia cinetica iniziale. Di conseguenza, le velocità finali saranno minori dei loro valori in un urto elastico.

Un urto viene definito perfettamente anaelastico se i due corpi dopo la collisione rimangono a contatto. Per cui la velocità dei due corpi corrisponde alla velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto. L'energia cinetica non viene conservata, per cui una porzione verrà dissipata nell'ambiente esterno sotto forma di calore, mentre la quantità di moto viene conservata come in tutti gli urti.

Dati due corpi che si urtano di urto perfettamente anaelastico, avranno una velocità finale:

$$\begin{aligned} \vec{q}_{1,i} + \vec{q}_{2,i} &= \vec{q}_{1,f} + \vec{q}_{2,f} \\ m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} &= (m_1 + m_2) \vec{v}_f \\ \vec{v}_f &= \frac{m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i}}{2(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Poiché la velocità dei corpi coincide alla velocità del centro di massa, l'energia cinetica del sistema sarà nulla nel sistema di riferimento concorde al centro di massa $S_{c.d.m.}$, mentre sarà uguale all'energia cinetica del centro di massa in un qualsiasi sistema inerziale ad esso $K(S) = K_{c.d.m.}$. Per cui l'energia dissipata durante l'urto può essere calcolata come la differenza tra l'energia cinetica prima dell'urto e l'energia cinetica del centro di massa.

$$E_{dis.} = K_i - K_{c.d.m.} \quad (6.5.5)$$

6.6 Momento

Lo stato di un punto può essere descritto mediante variabili lineari, ma per analizzare lo stato di un sistema di punti sono necessarie anche componenti rotazionali. Sono già state introdotte θ , $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$,

corrispettivi delle variabili lineari \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} , ma mancano i corrispettivi rotazionali della forza $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

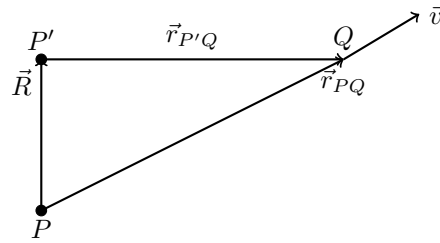
e del lavoro $W_{\Gamma_{AB}} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} d\vec{r}$.

Viene definito il momento \vec{M} di un vettore \vec{v} rispetto ad un polo P il prodotto vettoriale tra la distanza dal punto P al punto dove è applicato il vettore per il vettore \vec{v} stesso:

$$\vec{M}_P = \vec{r}_{PQ} \times \vec{v} = r_{PQ} v \sin \theta \hat{r}_{PQ} \times \vec{v}$$

In caso si volesse ottenere il momento rispetto ad un altro polo P' , dato il vettore distanza tra i due poli \vec{R} : $\vec{r}_{P'Q} = \vec{r}_{PQ} - \vec{R}$. Il momento sarà:

$$\vec{M}_{P'} = \vec{r}_{P'Q} \times \vec{v} = (\vec{r}_{PQ} - \vec{R}) \times \vec{v} = \vec{M}_P - \vec{R} \times \vec{v}$$



Viene definito il momento angolare, il momento della quantità di moto applicato in un polo P :

$$\vec{L}_P = \vec{r}_P \times \vec{p} \left[\frac{m^2 \cdot kg}{s} \right] \quad (6.6.1)$$

Viene definito il momento torcente $\vec{\tau}_P$ o (\vec{M}_P) , il momento della forza applicato ad un polo P :

$$\vec{\tau}_P = \vec{r}_P \times \vec{F} [m \cdot N] = [J] \quad (6.6.2)$$

Derivando il momento angolare si ottiene applicato su un polo P :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_P}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}_P \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}_P \times \vec{p} + \vec{r}_P \times \vec{F} = \vec{\tau}_P + \vec{v}_P \times (m\vec{v}) = \vec{\tau}_P + \vec{0} = \vec{\tau}_P \quad (6.6.3)$$

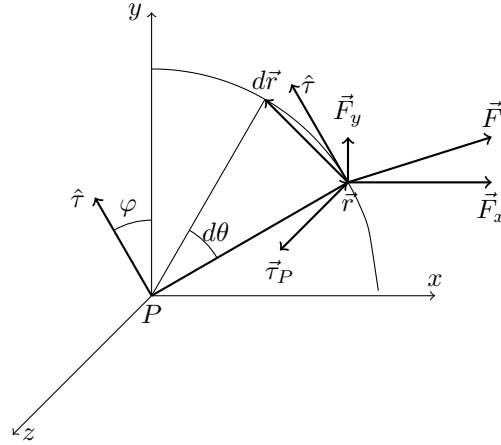
Poiché la velocità del punto P e della velocità \vec{v} sono parallele, il loro prodotto vettoriale è nullo. Viene definita seconda equazione cardinale la relazione tra il momento angolare e il momento torcente di un sistema, se il momento torcente di un sistema è nullo, allora si conserva il momento angolare.

$$(ii) \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_P$$

Feynman analizzò la relazione tra le variabili lineari e rotazionali nel seguente modo. Si considera un punto che si muove su una traiettoria circolare su cui agisce una forza \vec{F} , e la variazione del vettore posizione del punto $d\vec{r}$. Per variazioni infinitesime dell'angolo $d\theta$, si può approssimare la variazione della posizione come $d\vec{r} \approx r \sin d\theta \hat{\tau}$. Per $d\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \sin d\theta \approx d\theta$, allora si può approssimare la variazione di posizione come $d\vec{r} = r d\theta \hat{\tau}$.

Il differenziale del lavoro sarà allora $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \hat{\tau} r d\theta$, si scompone \vec{F} nei suoi componenti $\delta W = (F_x \hat{x} + F_y \hat{y}) \cdot \hat{\tau} r d\theta$. Si considera l'angolo φ tra il versore $\hat{\tau}$ e l'asse verticale, allora:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \hat{x} \cdot \hat{\tau} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi \\ \hat{y} \cdot \hat{\tau} = \cos \varphi \end{cases} \\
 & \delta W = (F_x \hat{x} \cdot \hat{\tau} + F_y \hat{y} \cdot \hat{\tau}) r d\theta \\
 & \quad (-F_x r \sin \varphi + F_y r \cos \varphi) d\theta \\
 & \quad (-F_x r_y + F_y r_x) \hat{z} \cdot \hat{z} d\theta \\
 & \quad (r_x F_y \cdot \hat{z} - r_y F_x \cdot \hat{z} + 0 + 0) \cdot \hat{z} d\theta \\
 & \quad (r_x F_x \hat{x} \times \hat{x} + r_x F_y \hat{x} \times \hat{y} + r_y F_x \hat{y} \times \hat{x} + r_y F_y \hat{y} \times \hat{y}) \cdot \hat{z} d\theta \\
 & \quad (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{z} d\theta \\
 & W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{z} d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \vec{\tau}_P \cdot \hat{z} d\theta
 \end{aligned} \tag{6.6.4}$$



In un insieme di punti, si calcolano i momenti rispetto al sistema di riferimento inerziale concorde al centro di massa del sistema $S_{c.d.m.}$. La somma di tutti i momenti angolari del sistema sarà:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \text{ derivandola si otterrà la somma dei momenti torcenti del sistema:}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{\tau}^{tot} \tag{6.6.5}$$

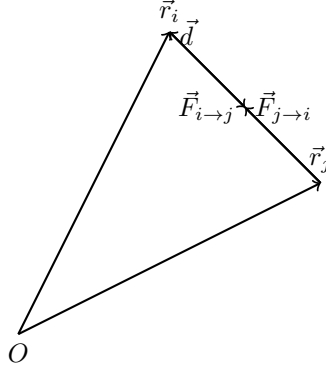
Il momento torcente totale non è uguale al momento torcente della forza totale del sistema,

$$\vec{\tau}^{tot} \neq \vec{r} \times \vec{F}^{tot} \tag{6.6.6}$$

Poiché la posizione individuata dal vettore \vec{r} non corrisponde ad alcun punto del sistema, né al suo centro di massa, per cui non è definito il valore a cui corrisponde. Considerando $\vec{F}^{tot} =$

$\vec{F}^{est} + \vec{F}^{int}$, la somma dei momenti torcenti interni al sistema è nulla, poiché le forze interne sono opposte a coppie, e la somma di momenti torcenti di due forze opposte è nulla. Date due forze opposte $\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$, applicate su due punti \vec{r}_i e \vec{r}_j , la somma dei momenti delle due forze sarà: $\vec{r}_j \times \vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{j \rightarrow i} = (r_i - r_j) \times \vec{F}_{j \rightarrow i}$, il vettore distanza $\vec{d} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ è parallelo alla direzione su cui agiscono le forze per cui il prodotto vettoriale $\vec{d} \times \vec{F}_{j \rightarrow i}$ sarà nullo. Il momento torcente sarà allora dato da:

$$\vec{\tau}_P = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{est} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int}) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{est} \quad (6.6.7)$$



6.7 Momento di un Sistema di Punti

Dato un insieme di punti \mathcal{S} , aventi momenti espressi rispetto al sistema di riferimento S_P centrato nel polo dove sono applicati i momenti, se si vuole esprimere rispetto ad un altro sistema di riferimento S inerziale centrato in O , distante \vec{R}_{OP} dal centro del sistema di riferimento S_P , si considera un vettore posizione generale in S $\vec{r}_i = \vec{r}_{P,i} + \vec{R}_{OP}$. Il momento angolare calcolato in S_P sarà:

$$\begin{aligned} \vec{L}_P &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_{P,i} \times \vec{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}_{OP}) \times \vec{p}_i \end{aligned}$$

Il momento torcente sarà:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{R}_{OP}) \times \vec{p}_i + (\vec{r}_i - \vec{R}_{OP}) \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \times \vec{p}_i - \vec{V}_{OP} \times \sum_{i=1}^N \vec{p}_i + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{P,i} \times \vec{F}_i) \\ &= \vec{0} - \vec{V}_{OP} \times \vec{p}^{tot} + \vec{\tau}_P \\ \frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \vec{\tau}_P - \vec{V}_{OP} \times \vec{p}^{tot} \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

Se il polo è fermo, la quantità di moto totale del sistema è nulla, la velocità del polo e la quantità di moto totale del sistema sono paralleli, oppure il polo coincide con il centro di massa del sistema

allora: $\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \vec{\tau}_P$

6.8 I Teorema di Köning

Il momento angolare di un insieme di punti materiali in un sistema di riferimento generico   dato dalla somma tra il momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa con il momento angolare del centro di massa.

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{c.d.m.} \quad (6.8.1)$$

I punti nel sistema S espressi rispetto al sistema $S_{c.d.m.}$: $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{c.d.m.}$, $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{c.d.m.}$. Il momento angolare nel sistema S   dato da $\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$, espresso rispetto al sistema $S_{c.d.m.}$ sar :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}'_i + \vec{r}_{c.d.m.}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{c.d.m.}) \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{c.d.m.} + \vec{r}_{c.d.m.} \times m_i \vec{v}'_i + \vec{r}_{c.d.m.} \times m_i \vec{v}_{c.d.m.}) \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i)' + \sum_{i=1}^N (\vec{r}'_i m_i) \times \vec{v}_{c.d.m.} + \vec{r}_{c.d.m.} \times \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}'_i) + \vec{r}_{c.d.m.} \times \sum_{i=1}^N (m_i) \vec{v}_{c.d.m.} \\ &= \vec{L}' + \vec{L}_{c.d.m.} \end{aligned}$$

poich  in $S_{c.d.m.}$ $\vec{r}_{c.d.m.} = \vec{0}$, si ha che $\vec{r}'_{c.d.m.} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i}{M} = \vec{0}$ quindi $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0}$, analogamente per la velocit : $\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = \vec{0}$.

Segue che un sistema di punti \mathcal{S} espresso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale S , potr  essere espresso rispetto ad un sistema di riferimento $S_{c.d.m.}$ con centro nel centro di massa del sistema:

$$\begin{cases} \vec{p}^{tot}(S) = \vec{p}_{c.d.m.}(S) \\ \vec{L}^{tot}(S) = \vec{L}^{tot}(S_{c.d.m.}) + \vec{L}_{c.d.m.}(S) \\ K^{tot}(S) = K^{tot}(S_{c.d.m.}) + K_{c.d.m.}(S) \end{cases} \quad (6.8.2)$$

6.9 Coppie di Forze

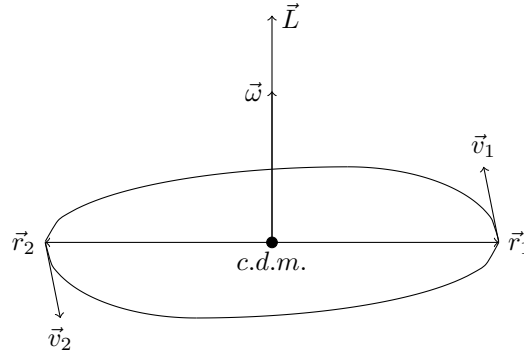
Dato sistema composto da due punti materiali, perfettamente isolato $\vec{F}^{est} = \vec{0}$, descritto rispetto a $S_{c.d.m.}$ dove la posizione del centro di massa rimane costante $\vec{p}_{c.d.m.} = \vec{p}^{tot} = \vec{0}$. Il sistema ruota intorno al centro di massa con una certa velocit  angolare $\vec{\omega}$. Il momento angolare del sistema sar  dato dalla somma dei momenti angolari dei due punti:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = (r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2) \hat{z}$$

Se i due punti hanno masse uguali, la loro distanza dal centro di massa è uguale, e avranno una velocità uguale poiché hanno la stessa velocità angolare e distanza dal centro $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{\omega} \perp \vec{r} \rightarrow v = \omega r$, il momento angolare sarà $\vec{L} = 2mrv\hat{z} = 2mr^2\omega\hat{z} = 2mr^2\vec{\omega}$. Si considera b la distanza tra le due masse r_{m_1, m_2} , il momento angolare può essere espresso come:

$$\vec{L} = 2m \left(\frac{b}{2} \right)^2 \vec{\omega} = \frac{mb^2}{2} \vec{\omega} = I\vec{\omega} \quad (6.9.1)$$

dove $I = \frac{mb^2}{2}$ viene definito momento di inerzia e rappresenta la resistenza del sistema ad una rotazione, analogamente a come la massa inerziale rappresenta quanto un corpo resiste ad uno spostamento.



In generale si può rappresentare il momento angolare di un sistema come il prodotto tra il momento di inerzia I del sistema e la velocità angolare del sistema. La prima equazione cardinale sarà quindi strettamente collegata alla traslazione di un sistema $\vec{a}_{c.d.m.} = \frac{d\vec{p}_{c.d.m.}}{Mdt} = \frac{\vec{F}^{est}}{M}$, mentre la seconda equazione cardinale sarà strettamente collegata alla rotazione di un sistema $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}^{est}$.

6.10 Densità

Dato un corpo, di massa totale M e volume V . Viene diviso in volumetti di volume uguale dV , distanti \vec{r}_i dal centro del sistema di riferimento con una massa dm . La suddivisione del corpo sarà $dV = dx dy dz$ in 3 dimensioni, $dS = dx dy$ in 2 dimensioni, $dL = dx$ in 1 dimensione. Si definisce la densità di uno di questi volumetti il rapporto tra la loro massa e la grandezza della loro suddivisione, quindi in base alla dimensione del corpo si avrà densità volumica $\frac{dm}{dV}$, densità superficiale

$\frac{dm}{dS}$ e densità lineare $\frac{dm}{dL}$.

Un corpo viene definito omogeneo se la densità di ogni suddivisione del corpo è uguale $\rho_i = \rho_j \forall (i, j) \in [(1, 2), (N - 1, N)]$, la densità di un corpo omogeneo può essere calcolata dal rapporto

tra la massa totale e la sua dimensione $\rho = \frac{M}{V}$. Per un corpo generico si ha:

$$M = \int dm = \int \rho dV \quad (6.10.1)$$

Data una suddivisione sempre più piccola del corpo, le sue suddivisioni tenderanno a diventare infinitesime $dV \rightarrow 0$ e la massa di una suddivisione tenderà a $dm \rightarrow 0$. Il centro di massa calcolato rispetto a tutte le divisioni sarà:

$$\vec{r}_{c.d.m.} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dV \quad (6.10.2)$$

6.11 Corpo Rigido

Viene definito corpo rigido un insieme di punti materiali la cui distanza relativa non varia nel tempo $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{cost}$. La distanza di ogni punto del corpo con il centro di massa rimarrà costante $|\vec{r}_i - \vec{r}_{c.d.m.}| = \text{cost}$. $\forall i \in [1, N]$, quindi è possibile ottenere la posizione del corpo rigido, dati due punti del corpo rigido. Per cui un corpo rigido ha sei gradi di libertà corrispondenti alla posizione dei due punti in uno spazio tridimensionale. Viene definito corpo esteso un corpo rigido formato da un'infinità di punti materiali.

Considerando un corpo rigido, su cui agisce una forza peso $\vec{F}_{P,i}$, su ogni punto del corpo, il momento torcente causato dalla forza peso del corpo sarà dato da:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{P,i} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{g} \frac{M}{M} = M \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} \times \vec{g} = \vec{r}_{c.d.m.} \times M \vec{g} = \vec{r}_{c.d.m.} \times \vec{F}_P^{tot}$$

In questo caso la somma dei momenti torcenti è uguale al momento totale agente sul centro di massa. In generale questa relazione è valida solo la forza è costante nel tempo e le forze agenti sui vari punti del sistema sono parallele tra di loro:

$$\vec{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N F_i} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (6.11.1)$$

dove $\frac{\sum_{i=1}^N F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N F_i}$ è il centro delle forze.

Data un'asta rigida di lunghezza L e di densità lineare omogenea $\rho = \frac{M}{L}$, il suo centro di massa sarà dato da:

$$x_{c.d.m.} = \frac{1}{M} \int_0^L x \rho dx = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{x^2}{L} \Big|_0^L = \frac{L}{2}$$

Se un corpo rigido si muove di velocità costante \vec{V} , il centro di massa avrà velocità $\vec{v}_{c.d.m.} = \frac{\int \vec{V} dm}{\int dm} = \vec{V}$. La quantità di moto del corpo rigido sarà quindi $\vec{p}^{tot} = \vec{p}_{c.d.m.} = M \vec{V}$. Essendo la velocità costante, per la prima equazione cardinale si ha $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{tot} = \vec{0}$.

Se un corpo rigido si muove di moto rotazionale con una velocità angolare costante $\vec{\omega}$, si analizza mediante la seconda equazione cardinale:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{0} \quad (6.11.2)$$

Se il corpo si muove di moto di rototraslazione il moto sarà descritto da:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{tot} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_P - \vec{v}_P \times \vec{p} \end{cases} \quad (6.11.3)$$

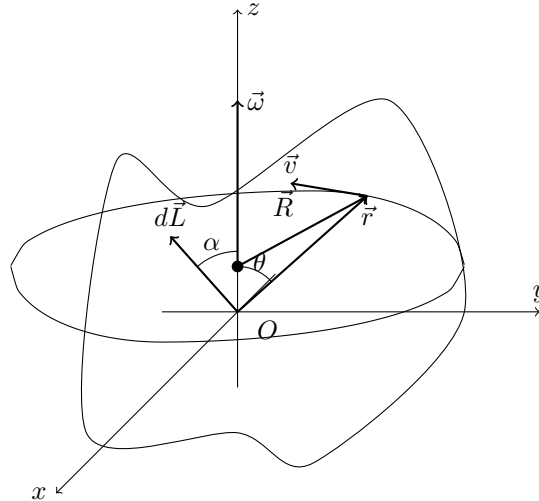
Segue che un corpo rigido si trova in uno stato di quiete se $\vec{F}^{tot} = \vec{0}$ e $\vec{\tau}_P = \vec{0}$.

Dato un corpo rigido che ruota intorno ad un asse z con una velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = vR\hat{z}$, dove R è il raggio della rotazione che compie un punto del corpo, ovvero la distanza del punto dal centro della rotazione su un piano x, y perpendicolare all'asse z , quindi parallelo alla rotazione del corpo. Considerando una variazione infinitesima di momento angolare $d\vec{L}$ dovuta ad una variazione di quantità di moto dovuta alla rotazione del corpo $d\vec{p}$, si avrà:

$$\begin{aligned} d\vec{L} &= \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm \\ dL &= r \cdot v \sin \frac{\pi}{2} dm = \omega R r dm \\ dL_z &= dL \cos \alpha = dL \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \omega R r \sin \theta dm = \omega R^2 dm \\ L_z &= \int \omega R^2 dm = \omega \int R^2 dm = \omega I_z \end{aligned}$$

Viene definito momento d'inerzia I_z :

$$I_z = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV \quad (6.11.4)$$



Se il corpo è formato da un numero discreto di punti allora il momento di inerzia sarà dato dalla somma dei momenti di inerzia dei punti per lo stesso asse di rotazione: $I_z = \sum_{i=1}^N R_i^2 m_i$. Se dovesse cambiare la direzione dell'asse z , cambierebbe il momento di inerzia, quindi si studia il momento d'inerzia rispetto corpi fissi. Se corpo ruota su rispetto al solo asse z , allora il momento angolare del corpo sarà dato dal solo momento angolare lungo l'asse di rotazione z :

$$\vec{L}_{x,y} = \vec{0} \iff \vec{L} = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z = \vec{L}_z = I_z \vec{\omega} \quad (6.11.5)$$

Se il corpo ruotasse rispetto a tre assi di rotazione, il momento angolare sarebbe dato dalla somma dei momenti angolari nelle tre direzioni (x, y, z) , ognuna avente un suo momento di inerzia diverso. Si può rappresentare il momento di inerzia complessivo come un tensore I tale che:

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}_x + I_y \vec{\omega}_y + I_z \vec{\omega}_z = I \vec{\omega} \Rightarrow \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Dato un corpo rigido è sempre possibile esprimere il suo momento di inerzia rispetto ad un asse di rotazione z in funzione del raggio d'inerzia o raggio di girazione k . Può essere definito come la distanza necessaria dall'asse z ad un polo contenente tutta la massa del corpo rigido affinché il momento d'inerzia rimanga invariato.

$$I_z = mk^2$$

Per un singolo asse di rotazione z , il momento torcente di un corpo rigido sarà:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI_z \vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{\tau} \quad (6.11.6)$$

Per più di un asse di rotazione si avrà:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_z + \vec{L}_{x,y})}{dt} = \vec{\tau}_z + \vec{\tau}_{x,y}$$

L'energia cinetica del corpo in rotazione è data dalla somma delle energie cinetiche dei singoli punti, considerando un corpo esteso il numero di punti tenderà all'infinito:

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \int \frac{v^2}{2} dm = \int \frac{\omega^2 R^2}{2} dm = \frac{\omega^2}{2} \int R^2 dm = \frac{\omega^2 I_z}{2} \quad (6.11.7)$$

Viene così definita l'energia cinetica rotazionale di un corpo rigido.

6.12 Teorema di Huygens-Steiner

Il momento d'inerzia di un corpo rispetto a un asse di rotazione qualsiasi è uguale alla somma del momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo a quello dato e passante per il centro di massa, e del prodotto della massa per il quadrato della distanza tra i due assi:

$$I_z(S_O) = I_z(S_{c.d.m.}) + M \cdot R_{O(c.d.m.)}^2 \quad (6.12.1)$$

Si considera un asse z di un sistema di riferimento S , e un asse $z_{c.d.m.}$ parallelo di un sistema di riferimento $S_{c.d.m.}$. I centri dei due sistemi O e $c.d.m.$ sono distanti $\vec{R}_{O(c.d.m.)}$, la distanza dall'asse z di un punto del corpo in S espresso rispetto al sistema $S_{c.d.m.}$ sarà: $\vec{r}_O = \vec{r}_{(c.d.m.)} + \vec{R}_{O(c.d.m.)}$, dove $\vec{r}_{(c.d.m.)}$ è la stessa distanza nel sistema $S_{c.d.m.}$. Considerando il momento di inerzia nel sistema S_O :

$$\begin{aligned}
I_z &= \int (\vec{r}_O)^2 dm \\
&= \int (\vec{r}_{(c.d.m.)} + \vec{R}_{O(c.d.m.)})^2 dm \\
&= \int r_{(c.d.m.)}^2 + R_{O(c.d.m.)}^2 dm \\
&= \int r_{(c.d.m.)}^2 dm + R_{O(c.d.m.)}^2 \int dm \\
&= I_z(S_{c.d.m.}) + R_{O(c.d.m.)}^2 M
\end{aligned}$$

6.13 Pendolo Fisico

Quando un corpo rigido è vincolato ad un asse, soggetto alla sua forza peso tenderà a ruotare attorno ad esso. Poiché la forza peso agisce su un'unica direzione, il momento torcente generato sarà solamente sull'asse z , per cui $\vec{\tau}_{x,y} = \vec{0}$, la somma delle forze agenti sul sistema è nulla, poiché la forza peso viene bilanciata dalla reazione vincolare sul vincolo intorno a cui ruota: $\vec{N} + \vec{F}_P = \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ allora il sistema non trasla, è soggetto alla sola rotazione. Per determinare il moto del corpo si applica la seconda equazione cardinale. Poiché l'unica forza applicata sul sistema è la forza peso si può usare la relazione $\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i$, rispetto al centro delle forze, di posizione coincidente al centro di massa del sistema $\vec{r} = \vec{r}_{c.d.m.}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{\tau}_z \\
I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \vec{r} \times \vec{F}_P \\
I_z \ddot{\theta} \hat{z} &= -rMg \sin \theta \hat{z} \\
\text{per } \theta \ll 1 \rightarrow \sin \theta &\approx \theta \Rightarrow \\
I_z \ddot{\theta} &= -rMg\theta
\end{aligned}$$

Il moto del corpo approssimato a piccole oscillazioni avrà una velocità angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{rMg}{I_z}} \quad (6.13.1)$$

ed un periodo di oscillazione

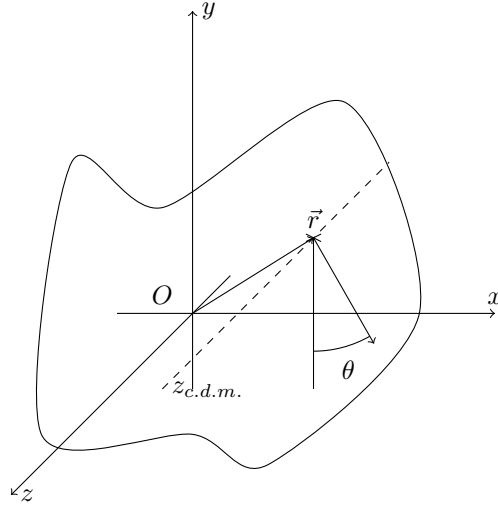
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z(S_O)}{rMg}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z(S_{c.d.m.}) + Mr^2}{rMg}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z(S_{c.d.m.})}{rMg} + \frac{r}{g}} \quad (6.13.2)$$

per il teorema di Huygens-Steiner.

L'energia cinetica del corpo rigido risultante sarà data dalla somma dell'energia cinetica di traslazione e rotazionale in un singolo punto del corpo. Si considera l'energia cinetica del punto coincidente all'asse di rotazione z , si muoverà di solo moto rotazionale:

$$K = \frac{1}{2}I_z(S_O)\omega^2 = \frac{1}{2}(I_z(S_{c.d.m.}) + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_z(S_{c.d.m.}) + \frac{1}{2}Mv_{c.d.m.}^2 = K_{\omega, c.d.m.} + K_{v, c.d.m.}$$

Per cui l'energia cinetica di un corpo rigido è data dalla somma dell'energia cinetica rotazionale e di traslazione del centro di massa del corpo rigido.



7 Termodinamica

7.1 Termometria

Viene definita la grandezza fisica temperatura T . Nella meccanica statistica quantifica a livello microscopico l'agitazione delle molecole di un sistema. In termodinamica rappresenta uno stato di un sistema rispetto ad una temperatura di riferimento. La temperatura si misura in gradi Celsius $[^{\circ}C]$ o Fahrenheit $[^{\circ}F]$, oppure in Kelvin $[K]$.

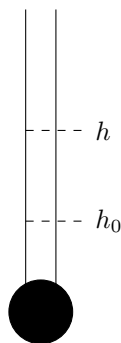
Per misurare la temperatura di un sistema si usa un termometro, strumento che usufruisce della proprietà di alcuni materiali di espandersi o contrarsi a causa di un cambiamento di temperatura. Un termometro è formato da un materiale suscettibile ai cambiamenti di temperatura ed una scala graduata che misura la sua espansione rispetto all'aumento di temperatura. Viene definita una temperatura di riferimento arbitrariamente, corrispondente ad un'altezza base h_0 .

Si definisce un grado 1° della scala in base alla distanza h il materiale si espande nel termometro ad un'altra temperatura scelta arbitrariamente.

$$1^{\circ} \propto h - h_0 \Rightarrow T = a(h - h_0)$$

L'altezza di riferimento h_0 per i gradi Celsius viene definita alla temperatura di fusione del ghiaccio, mentre si definisce l'altezza relativa all'ebollizione dell'acqua ad una distanza di 100° rispetto all'altezza di riferimento.

I gradi Kelvin vengono definiti in base all'agitazione termica delle molecole di un sistema. Viene definito lo zero assoluto la temperatura dove a livello microscopico è assente agitazione termica. Per definire un grado della scala si considera il punto triplo dell'acqua, dove coesistono in equilibrio i tre stati dell'acqua, ad una temperatura di $273.15K$, corrispondente ad una temperatura di $0^{\circ}C$.



7.2 Principio Zero e Stato Termodinamico

Viene definito principio zero della termodinamica un postulato descritto successivamente ai primi tre, poiché considerato non necessario. Il postulato zero descrive l'equilibrio termico, definito come uno stato raggiunto da due corpi dove non avviene nessun cambiamento di temperatura tra i due.

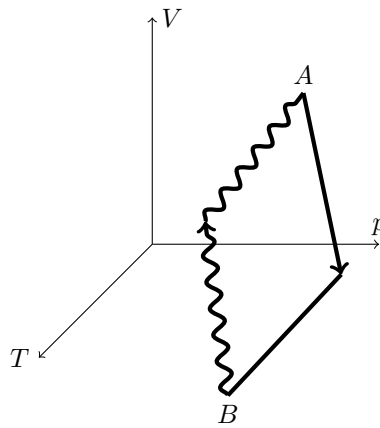
I due corpi si possono scambiare una certa temperatura per conduzione, quando si trovano a contatto, convezione, quando un gas trasferisce la temperatura fra i due, o per irraggiamento, grazie ad onde elettromagnetiche. Lo stato di equilibrio termico è transitivo, se due corpi sono in equilibrio termico con un terzo, allora quei due corpi sono in equilibrio termico tra di loro.

Lo stato termodinamico di un sistema dipende dalla temperatura, dal volume e dalla pressione applicata al sistema. Dove la pressione è la forza esercitata su una data superficie $p = \frac{F}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]$.

Viene rappresentato lo stato termodinamico di un sistema in un sistema di riferimento $S(p, V, T)$. Una trasformazione termodinamica viene rappresentata come una linea che collega due punti in questo sistema di riferimento. Se la trasformazione è reversibile, allora viene rappresentata come una curva continua, poiché il corpo durante la trasformazione ha uno stato definito, ovvero è in uno stato di equilibrio, per ogni punto della trasformazione tra gli stati iniziali e finali.

Se una trasformazione è irreversibile viene rappresentata come una curva ondulata, poiché il sistema non presenta uno stato definito in ogni punto della trasformazione, quindi non può essere misurato il suo stato in un punto intermedio della trasformazione.

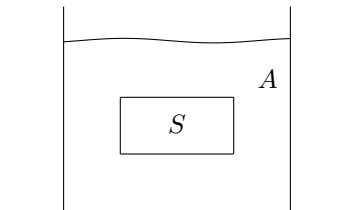
Se un sistema ha due stati definiti e può presentare stati definiti in ogni punto intermedio tra i due stati, allora è possibile trasformare il sistema da uno stato all'altro. Se non presente stati definiti intermedi, il suo stato sarà descritto da fenomeni microscopici, non reversibili. Si analizza il sistema dividendolo in vari domini ognuno di uno stato approssimativamente definito.



7.3 Sistema Termodinamico

Viene definito ambiente il sistema di riferimento considerato all'interno del quale è presente il sistema analizzato, viene definito universo complessivamente il sistema e l'ambiente.

Un sistema viene definito chiuso rispetto all'ambiente se non possono avvenire scambi di materia tra i due, viene definito isolato quando non possono avvenire scambi di calore tra i due.



Viene definita sorgente un oggetto che può scambiare calore, mentre la sua temperatura rimane costante.

Si definisce la grandezza fisica calore misurata in calorie $[cal]$, rappresenta una forma di energia scambiata durante le trasformazioni termodinamiche.

Affinché un sistema passi da una temperatura ad un'altra bisogna applicare calore al sistema, questo calore può essere applicato in un intervallo di tempo arbitrariamente lungo, poiché la trasformazione termodinamica non dipende dall'intervallo di tempo impiegato.

Sperimentalmente si è dimostrato che il differenziale parziale del calore è proporzionale alla differenza di temperatura tra i due stati del sistema $\delta Q \propto \Delta T$. Sempre sperimentalmente si è definita la costante di proporzionalità C la capacità termica di un sistema, data dal prodotto tra il calore specifico c di un materiale per la sua massa $C = c \cdot m$.

Poiché la variazione di calore non è un differenziale esatto, il calore scambiato tra due corpi A e B sarà dipendente dal cammino Γ_{AB} percorso dalla trasformazione nel sistema $S(p, V, T)$:

$$\int_{\Gamma_{AB}} \delta Q = \int_{\Gamma_{AB}} C dT \quad (7.3.1)$$

Se la capacità termica è costante durante la trasformazione allora il calore scambiato non dipenderà dalla trasformazione effettuata:

$$\begin{aligned} C &= \text{cost.} \\ \int_{\Gamma_{AB}} \delta Q &= \int_{\Gamma_{AB}} C dT = C \int_{\Gamma_{AB}} dT = C \Delta T_{AB} \\ Q &= C \Delta T \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Dati due corpi a temperature diverse T_A e T_B in grado di poter scambiare calore tra di loro allora se il sistema è isolato il calore totale scambiato durante la trasformazione è nullo. Corrisponde alla somma dei calori scambiati tra i due corpi fino al raggiungimento dell'equilibrio termico alla temperatura T_g :

$$\begin{aligned} Q_{tot} &= Q_A + Q_B = 0 \\ C_A(T_A - T_g) + C_B(T_B - T_g) &= 0 \\ C_B(T_B - T_g) &= C_A(T_g - T_A) \\ T_g &= \frac{C_A T_A + C_B T_B}{C_A + C_B} \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Nel caso di una sorgente la sua temperatura sarà costante quindi si avrà $T_g = T_A$, ciò è possibile solo se avesse una capacità termica tendente all'infinito: Per cui si definisce una sorgente un oggetto che presente una capacità termica $C_A \rightarrow \infty$.

Se la temperatura del sistema aumenta $dT > 0$ allora la quantità di calore scambiata con l'ambiente è positiva, quindi l'ambiente fornisce calore al sistema. Se invece la temperatura diminuisce, l'ambiente assorbirebbe calore dal sistema.

$$\delta Q \propto dT$$

$$\begin{cases} dT > 0 \Rightarrow \delta Q_{A \rightarrow S} > 0 \\ dT < 0 \Rightarrow \delta Q_{A \rightarrow S} < 0 \end{cases} \quad (7.3.4)$$

7.4 Cenni di Calorimetria

Durante i suoi esperimenti sul calore Joule lo descrisse come un fluido calorico. A livello microscopico i fenomeni analizzati da Joule hanno le loro origini dall'agitazione delle molecole che, urtandone altre, trasmettono la loro velocità. Per cui il processo di trasferimento di calore richiede tempo, prima che si propaghi per tutto il corpo.

La grandezza fisica calore è difficile da definire poiché quantifica qualcosa che dipende dal modello usato per descrivere la temperatura. Viene definita la caloria come unità di misura della grandezza calore come l'energia necessaria per aumentare di un grado centigrado la temperatura di un grammo di acqua, contemporaneamente viene assegnato al calore specifico dell'acqua il valore $1 \frac{cal}{g^{\circ}C}$:

$$[1cal] = \left[1 \frac{cal}{g^{\circ}C} \cdot 1g \cdot 1^{\circ}C \right] \quad (7.4.1)$$

7.5 Lavoro di un Sistema Termodinamico

Un gas che si espande in un pistone idraulico eserciterà una pressione p , e di conseguenza una forza F che sposta il pistone di un'altezza dh , per cui produrrà un lavoro δW . Il lavoro prodotto dal gas sarà allora:

$$\delta W = Fdh = pSdh = pdV \quad (7.5.1)$$

Di conseguenza un sistema termodinamico eserciterà un lavoro positivo sull'ambiente circostante se si espande, mentre subirà un lavoro negativo dall'ambiente esterno se si contrae. Il lavoro dipenderà dal tipo di trasformazione che ha provocato il cambiamento di pressione, quindi dipenderà dal percorso compiuto dalla trasformazione Γ_{AB} :

$$W = \int_{\Gamma_{AB}} \delta W = \int_{\Gamma_{AB}} p(V, T) dV \quad (7.5.2)$$

Joule definì l'energia interna del sistema come la somma tra lavoro ed energia potenziale del sistema. Tramite una serie di esperimenti riuscì a scoprire la relazione tra lavoro, energia potenziale e calore. Considerò due modi per poter cambiare la temperatura di un sistema, esercitando lavoro in un sistema isolato e fornendo calore ad un sistema senza esercitare lavoro. Uno di questi esperimenti consiste nel generare lavoro facendo cadere dei gravi legati ad una corda per far ruotare delle palette in un contenitore di acqua, in modo che l'attrito aumenti la temperatura dell'acqua.

Indipendentemente dal tipo di trasformazione di energia impiegata tutte generano un cambiamento di temperatura.

Per una trasformazione adiabatica, ovvero con uno scambio di calore nullo, Joule scoprì che l'aumento della temperatura viene causato dal solo lavoro esercitato sul sistema. Inoltre scoprì che il lavoro necessario per alterare la temperatura del sistema è indipendente dal cammino intrapreso dalla trasformazione e costante.

Per una trasformazione con scambio di lavoro nullo, l'aumento della temperatura viene causato dal calore assorbito dal sistema, ed è indipendente dal cammino intrapreso dalla trasformazione e costante.

Per una trasformazione con scambi di calore e lavoro non nulli, queste grandezze non saranno costanti.

Sulla base di queste ed altre evidenze sperimentali, Joule descrisse una funzione di stato del sistema U che rappresenta l'energia interna del sistema. Nel caso di una trasformazione adiabatica il calore scambiato sarà nullo ed il lavoro esercitato sarà dato da:

$$W = -\Delta U_{AB} \quad (7.5.3)$$

Joule scoprì che allo stesso modo anche il calore scambiato può essere espresso rispetto alla funzione di stato, in caso il lavoro esercitato è nullo:

$$Q = \Delta U_{AB} \quad (7.5.4)$$

Analizzando una trasformazione generale Joule scoprì che la differenza tra il calore scambiato ed il lavoro esercitato è costante ed è uguale alla variazione di energia interna, da cui postulò il primo principio delle termodinamiche:

In una trasformazione termodinamica generale la variazione di energia interna del sistema è uguale alla differenza tra il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente e il lavoro esercitato dal sistema sull'ambiente:

$$(i) \quad Q - W = \Delta U$$

Il lavoro esercitato dal sistema sull'ambiente si può esprimere come il lavoro esercitato dall'ambiente sul sistema ad una pressione p_0 a causa della variazione di volume del sistema:

$$W_S = -W_A = p_0 \Delta V$$

Segue dal primo principio che la variazione della funzione di stato di un sistema in uno stato di equilibrio dipende solamente dalle condizioni iniziali e finali del sistema: $U(p, V, T)$.

7.6 Trasformazioni Termodinamiche

Per il primo principio data una qualsiasi trasformazione, indipendentemente dal fatto sia reversibile o meno, è possibile trovare la variazione di energia interna del sistema poiché dipende solamente dallo stato iniziale e finale del sistema.

$$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = \Delta U_{AB}$$

Dal punto di vista meccanico l'energia interna di un sistema termodinamico agisce come una batteria, immagazzinando lavoro analogamente all'energia potenziale. Applicata una trasformazione infinitesima, si avrà:

$$\delta Q - \delta W = dU$$

Per alcuni sistemi il lavoro può essere espresso come la pressione p necessaria per una variazione di volume ΔV .

Allora si potrà descrivere il calore in termini dell'energia interna e del lavoro:

$$\delta Q = \delta W + dU = p dV + dU$$

Il calore infinitesimo può essere espresso come: $\delta Q = c m dT$, si può quindi esprimere il calore specifico come:

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$$

Per i gas, è più conveniente esprimere il calore specifico rispetto al numero di moli n . Una mole è definita come un numero di Avogadro $N_A \approx 6 \times 10^{23}$ di molecole $1 [mol] := \frac{N}{N_A}$, dove N è il numero di molecole totali nel gas, uguali al numero di Avogadro N_A per una mole. In caso il gas contenga un numero di molecole differente N , corrisponderà ad un numero di moli n e avrà calore specifico $c = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT}$.

Per approssimare il comportamento di un gas viene definito un gas ideale, una rappresentazione di un gas molto rarefatto in un grande volume, a pressioni relativamente piccole e temperature relativamente alte. Poiché è molto rarefatto le molecole urtano solamente con le pareti, quindi il calore trasmesso da un gas ideale dipende dall'energia cinetica delle molecole.

Un gas ideale può essere definito come un qualsiasi gas che rispetta l'equazione di stato dei gas ideali:

$$pV = nRT \quad (7.6.1)$$

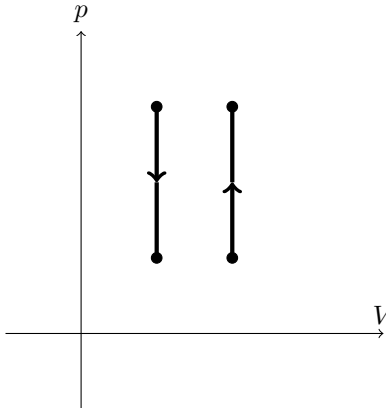
dove n è il numero di moli, T è la temperatura in Kelvin, R è la costante dei gas. Se il gas viene espresso rispetto al numero di moli, si usa la costante di Boltzmann $k = \frac{R}{N_A}$.

L'equazione di stato dei gas ideali è un'equazione a 3 variabili, se il numero di moli non è costante sono 4 variabili. In un sistema chiuso il numero di moli rimane costante $n = \text{cost.}$. Viene considerata una delle 3 variabili costante, nella rappresentazione di Clayperon viene scelta la temperatura. Le trasformazioni vengono quindi rappresentate nel piano di Clayperon (p, V) . Vengono descritte le seguenti trasformazioni notevoli:

7.6.1 Isocora

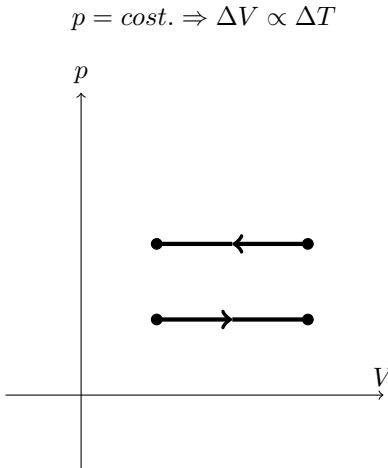
Una trasformazione isocora è una trasformazione termodinamica a volume costante, nel piano di Clayperon viene rappresentata come una verticale, di verso verso l'alto se la temperatura aumenta, verso il basso se la temperatura diminuisce.

$$V = \text{cost.} \Rightarrow \frac{p}{T} = \text{cost.} \Rightarrow \Delta p \propto \Delta T$$



7.6.2 Isobora

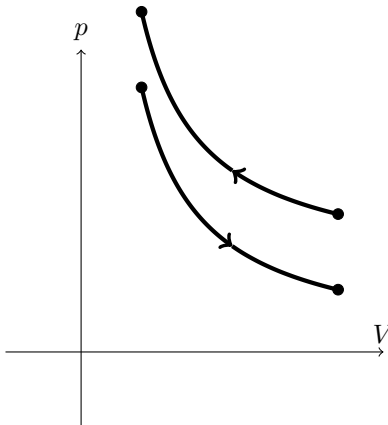
Una trasformazione isobora è una trasformazione termodinamica a pressione costante, per cui il volume è direttamente proporzionale alla variazione di temperatura. Viene rappresentata sul piano di Clayperon come una curva orizzontale, diretta verso sinistra se la temperatura diminuisce, oppure verso destra se la temperatura aumenta.



7.6.3 Isoterma

Una trasformazione isoterma è una trasformazione termodinamica a temperatura costante:

$$T = \text{cost.} \Rightarrow pV = \text{cost.} \Rightarrow \Delta p \propto \frac{1}{\Delta V}$$



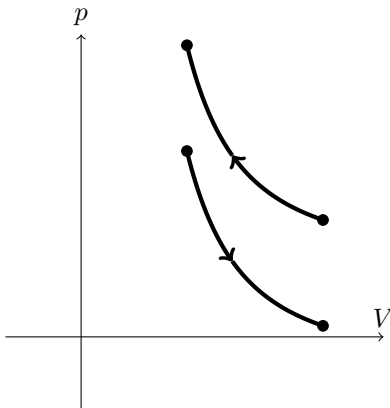
7.6.4 Adiabatica

Una trasformazione adiabatica è una trasformazione termodinamica dove il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente è nullo, per cui il lavoro esercitato è uguale all'opposto della variazione

dell'energia interna.

$$Q = 0 \Rightarrow W \propto \Delta V \Rightarrow W = \int p dV$$

Nel piano di Clayperon una trasformazione adiabatica è simile ad una trasformazione isoterma, ma l'adiabatica presenta una pendenza sempre maggiore.



7.7 Calori Specifici dei Gas Ideali

Joule eseguì alcuni esperimenti dove dei gas venivano compressi in un sistema ed in seguito lasciati fluire nel volume rimanente del sistema, provocando un fenomeno chiamato evoluzione libera. Una trasformazione adiabatica e senza lavoro, poiché il gas non esercita una pressione contro l'ambiente per espandersi, entrando all'interno di un volume già presente.

In base alle condizioni dell'esperimento, Joule scoprì che la temperatura rimane invariata. Inoltre lo stato dell'ambiente rimane invariato, quindi la variazione di energia interna dell'ambiente è nulla $\Delta U^A = 0$. Per il primo principio:

$$Q = W = 0 = \Delta U$$

$$\Delta U^{(S+A)} = \Delta U^A + \Delta U^S = \Delta U^S = 0$$

Allora per un gas ideale la variazione di energia interna dipende dalla sola temperatura: $U = U(T)$.

Considerando una trasformazione qualsiasi $A \rightarrow B$, essa può essere effettuata come una trasformazione isocora ed una isobara, o una isobara. Applicando all'intera trasformazione il primo principio si avrà nella trasformazione isocora:

$$\Delta U_{AC} = Q_{AC} = \int_{T_A}^{T_B} c_V n dT \approx c_V n \int_{T_A}^{T_B} dT = c_V n \Delta T_{AB}$$

In un intorno abbastanza ristretto di temperature ed in una trasformazione isocora, il calore specifico rimane costante, non dipende dalla temperatura.

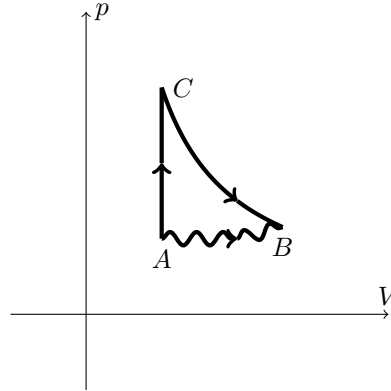
Poiché la seconda trasformazione è isoterma $\Delta T_{AB} = \Delta T_{AC} + \Delta T_{CB} = \Delta T_{AC}$.

In una trasformazione isoterma l'energia interna del sistema si conserva, poiché non avviene un cambiamento di temperatura:

$$\Delta U_{CB}^S = 0$$

Joule verificò sperimentalmente la seguente relazione:

$$\Delta U_{AB}^S = \Delta U_{AC}^S + \overset{0}{\cancel{\Delta U_{CB}^S}} = c_V n \Delta T_{AB} \quad (7.7.1)$$



Data una qualsiasi trasformazione reversibile, si considera uno scambio infinitesimo di calore:

$$\delta Q = \delta W + dU = p dV + c_V n dT$$

$$\delta Q := c_g n dT$$

$$c_g n dT = p dV + c_V n dT$$

$$c_g = \frac{p}{n} \frac{dV}{dT} + c_V \Rightarrow c_g > c_V$$

per $p = \text{cost.}$

$$c_p = \frac{p}{n} \frac{d}{dT} \frac{nRT}{p} + c_V$$

$$c_p = R + c_V \quad (7.7.2)$$

Questa viene definita relazione di Mayer, tra il calore specifico di un gas ideale in una trasformazione isobara e isocora. Viene definito:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} \quad (7.7.3)$$

Se la pressione non è costante, il calore specifico del gas ideale della trasformazione sarà dato da:

$$c_g = \frac{p}{n} \frac{d}{dT} \left(\frac{nRT}{p(T)} \right) + c_V$$

Di conseguenza la trasformazione isocora, avendo il calore specifico minore, spende la minor quantità di calore per cambiare la temperatura di una stessa quantità. A seguito di osservazioni sperimentali Joule scoprì che il calore specifico di un gas monoatomico è dato da: $\frac{3}{2}R$, mentre di

un gas biatomico è dato da: $\frac{5}{2}R$. Per un gas monoatomico $\gamma = \frac{R + \frac{3}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}$. Per un gas biatomico

$$\gamma = \frac{R + \frac{5}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5}.$$

7.8 Trasformazioni di Gas Ideali

Si analizza il comportamento delle varie trasformazioni termodinamiche elementari rispetto al calore specifico.

In una trasformazione isocora valgono le leggi osservate in precedenza per cui il calore scambiato è dato da:

$$Q = W + \Delta U = p \cdot 0 + c_V n \Delta T_{AB} \quad (7.8.1)$$

In una trasformazione isobara, il lavoro generato sarà $W = \int_{V_A}^{V_B} p dV = p \Delta V_{AB}$, mentre il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente sarà dato da:

$$\begin{aligned} Q &= W + \Delta U = p \Delta V_{AB} + c_V n \Delta T_{AB} \\ pV &= nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \\ Q &= \frac{nR \Delta T_{AB}}{\Delta V_{AB}} \Delta V_{AB} + c_V n \Delta T_{AB} \\ (R + c_V) n \Delta T_{AB}, c_p &= R + c_V \\ Q &= c_p n \Delta T_{AB} \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

In una trasformazione isoterma la temperatura rimane costante. Poiché la funzione di stato di un gas ideale dipende solo dalla temperatura essa sarà costante per tutta la reazione, e la sua variazione sarà nulla. Per cui per il principio il calore scambiato è uguale al lavoro scambiato:

$$Q = W + 0 = \int_{V_A}^{V_B} p dV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \quad (7.8.3)$$

Questa trasformazione permette di trasformare interamente il lavoro esercitato sul sistema in calore e viceversa.

In una trasformazione adiabatica il lavoro complessivo sarà dato dall'opposto della variazione di energia interna del sistema. Considerando una variazione infinitesime si avrà:

$$\begin{aligned} \delta W &= -dU \\ p dV &= -c_V n dT \\ \frac{nR T}{V} dV &= -c_V n dT \\ R \frac{dV}{V} &= -c_V \frac{dT}{T} \\ R \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} &= -c_V \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} \\ \frac{R}{c_V} \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) &= \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) \\ \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{R}{c_V}} &= \frac{T_B}{T_A}, \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{R + c_V}{c_V} = \frac{R}{c_V} + 1 \Rightarrow \frac{R}{c_V} = \gamma - 1 \\ \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} &= \frac{T_B}{T_A} \end{aligned}$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \quad (7.8.4)$$

Considerando l'equazione di stato dei gas ideale $pV = nRT$, si può esprimere rispetto ad altre variabili:

$$T_B^\gamma p_B^{1-\gamma} = T_A^\gamma p_A^{1-\gamma} \quad (7.8.5)$$

$$p_B V_B^\gamma = p_A V_A^\gamma \quad (7.8.6)$$

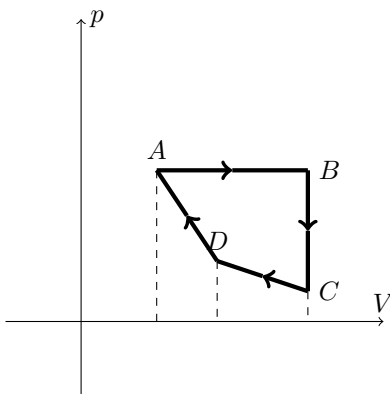
Da quest'ultima è possibile notare come il comportamento di una trasformazione adiabatica sia simile ad una trasformazione isoterma, avendo nel piano di Clayperon una pendenza maggiore, dovuto all'esponente $\gamma > 1$.

Poiché il calore specifico di un gas ideale in una reazione isobara è sempre maggiore del calore specifico in una reazione isocora.

Segue che una reazione adiabatica riduce la pressione in maniera maggiore rispetto ad una trasformazione isoterma per uno stesso cambiamento di volume.

7.8.1 Ciclo Termodinamico

Viene chiamato un ciclo termodinamico, una qualsiasi trasformazione termodinamica il cui stato iniziale e finale coincidono. Avrà quindi una variazione di energia interna nulla, ed il lavoro risultante sarà dato dall'area racchiusa dal ciclo nel piano di Clayperon.



Verrà effettuata una trasformazione isobara per passare dallo stato A allo stato B , una trasformazione isocora per passare da B a C , mentre due trasformazioni o isoterme o adiabatiche per passare da C a D e da D a A . Si può notare come le prime due trasformazioni esercitino lavoro sull'ambiente e assorbano calore da esso, mentre le ultime due trasformazioni cedano calore dall'ambiente e subiscano lavoro dall'ambiente, poiché si ha $W \propto \Delta V$ e si ha una compressione del sistema che subisce la trasformazione da C a A . Non necessariamente se il lavoro esercitato totale è congruente al calore totale assorbito, si avrà che il calore assorbito coincida con il lavoro esercitato o che il calore ceduto sia uguale al lavoro subito. Poiché il lavoro esercitato è un integrale si può

dedurre come il lavoro totale sia coincidente all'area socchiusa dal ciclo, ovvero:

$$W^S = \int_{V_A}^{V_B} p dV + \int_{V_B}^{V_C=V_B} p_0(V) dV + \int_{V_C}^{V_D} p_1(V) dV + \int_{V_D}^{V_A} p_2(V) dV$$

$$p\Delta V_{AB} - \int_{V_A}^{V_D} p_1(V) dV - \int_{V_D}^{V_C} p_2(V) dV$$

Vengono definite:

- Macchina Termica:= ciclo che ruota in senso orario, assorbendo calore e fornendo lavoro all'ambiente;
- Macchina Frigorifera:= ciclo che ruota in senso antiorario, cedendo calore e subendo lavoro dall'ambiente.

Lo stesso ciclo termodinamico può essere sia frigorifero che termico, in base al verso in cui le trasformazioni vengono effettuate. Per misurare quanto un ciclo termico "spreca" energia, ovvero di quanto diminuisce l'energia interna del sistema dopo un ciclo completo, si definisce l'efficienza di un ciclo termodinamico. Per un ciclo termico si considera l'efficienza termica η , definita come il rapporto tra il lavoro totale e ed il calore assorbito dall'ambiente necessario per attivare la macchina termica:

$$\eta := \frac{W^{tot}}{Q_{ass}}$$

$$W^{tot} = Q_{ass} + Q_{ced} = Q_{ass} - |Q_{ced}|$$

$$\eta = \frac{Q_{ass} - |Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} \quad (7.8.7)$$

Poiché il lavoro è positivo si ha che il calore ceduto è minore del calore assorbito dall'ambiente, quindi il loro rapporto è compreso tra 0 e 1: $0 < \left| \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \right| \leq 1$, e l'efficienza η è compresa anch'essa tra 1, per un'efficienza massima e 0 per un'efficienza minima dove il lavoro prodotto dalla macchina è nullo.

Per un ciclo frigorifero si considera l'efficienza frigorifera ε , data dal rapporto tra il calore assorbito Q_{ass} ed il lavoro $|W|$ complessivo subito dalla macchina, in questo caso negativo. Considerando il lavoro come somma tra calore assorbito e calore ceduto $W = Q_{ass} + Q_{ced} < 0$, il calore ceduto sarà maggiore in modulo $|Q_{ass}| < |Q_{ced}|$, l'efficienza sarà quindi:

$$\varepsilon := \frac{Q_{ass}}{|W|} = \frac{Q_{ass}}{Q_{ass} - |Q_{ced}|} = \frac{1}{\frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} - 1} \quad (7.8.8)$$

L'efficienza di un ciclo frigorifero è massima per un valore 0, poiché il calore ceduto sarà tendente all'infinito. È minima per un valore tendente all'infinito, quando il calore assorbito dal sistema coincide con il calore ceduto.

7.9 Teoria Cinetica

La teoria cinetica fornisce una spiegazione microscopica dei fenomeni macroscopici della termodinamica, analizzando un caso molto semplificato di un gas ideale, avente le seguenti caratteristiche:

- Le singole particelle sono approssimate a delle sferette rigide;
- Le particelle si scontrano con l'ambiente di urti elastici;
- Il sistema analizzato è isolato, non sono presenti forze esterne nel sistema, e tutte le forze interne sono impulsive;
- Le traiettorie vengono approssimate come fossero dei moti rettilinei uniformi, a causa dell'elevata velocità delle particelle;
- Le particelle sono distribuite spazialmente uniformemente;
- Hanno velocità isotrope, ovvero la probabilità che il vettore posizione sia in una qualsiasi direzione è uniforme.

Il gas si trova in un contenitore cubico di lato a , si analizza il comportamento di una singola particella.

Il contenitore non si muove dopo l'urto, quindi la particella del gas avrà una velocità finale $\vec{v}_f = -\vec{v}_i$. Una singola particella sarà soggetta ad una forza impulsiva $\vec{F}_{p \rightarrow g}$, per essersi scontrata con la parete. Si misura la forza in un intervallo di tempo Δt , integrando su questo intervallo la forza misurata si ottiene la variazione di quantità di moto in quel dato intervallo di tempo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{p \rightarrow g} d\tau = \Delta \vec{p}$$

Si suppone l'urto avvenga lungo un'unica direzione

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{p \rightarrow g, x} d\tau = \Delta p_x = m(v_{f, x} - v_{i, x}) = -2v_{i, x}$$

Questa forza eserciterà un lavoro sull'ambiente $\delta W = p dV$. Supponendo che le particelle non si urtino tra di loro, il percorso che compiono per ritornare ad urtare la stessa parete equivale a due volte la lunghezza di una parete: $\Delta x = 2a$. L'intervallo di tempo tra due urti equivale al tempo con cui una particella percorre questa distanza:

$$\Delta t_{urto} = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{2a}{v_x}$$

Nell'intervallo di tempo che stiamo misurando avverranno un numero di urti h su una delle pareti del contenitore:

$$h = \frac{\Delta t}{\Delta t_{urto}} = \frac{v_x \Delta t}{2a}$$

Si suppone che la forza impulsiva sia costante nell'intervallo di misurazione, allora per ognuno degli h urti verrà scambiata una quantità di moto:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{p \rightarrow g, x} d\tau = F_{p \rightarrow g, x} \Delta t = -2m v_{i, x}$$

La varazione totale di quantità di moto sarà allora:

$$\Delta p_x = -2hmv_{i,x}$$

Si considera la forza che il gas esercita sull'ambiente: $F_{g \rightarrow p} = -F_{p \rightarrow g}$. Questa forza rappresenta complessivamente tutti gli urti che una singola particella effettua con l'ambiente nell'intervallo di misurazione, causerà una variazione di quantità di moto Δp_x , calcolata precedentemente per $F_{p \rightarrow g}$, quindi sarà:

$$F_{g \rightarrow p} \Delta t = 2hmv_{i,x}$$

La forza esercitata dal gas sull'ambiente in un singolo urto sarà data da:

$$F_{g \rightarrow p} = h \frac{2mv_{i,x}}{\Delta t} = \frac{v_{i,x} \Delta t}{2a} \frac{2mv_{i,x}}{\Delta t} = \frac{mv_{i,x}^2}{a}$$

Una singola particella eserciterà sull'ambiente una pressione:

$$p_i = \frac{F_{g \rightarrow p}}{a^2} = \frac{mv_{i,x}^2}{a^3}$$

La pressione totale sarà data dalla somma di tutte le pressioni esercitate dalle particelle del gas:

$$p^{tot} = \sum_{i=1}^N p_i = \frac{m}{V} \frac{\sum_{i=1}^N v_x^2}{N} N = \frac{mN\bar{v}_x^2}{V}$$

Dove \bar{v}_x^2 o $\langle v_x^2 \rangle$ è la velocità quadratica media, si usa al posto di una media normale, poiché essendo le velocità costanti e isotrope, la loro somma sarebbe stata nulla.

Le particelle hanno tutte la stessa massa, quindi si può considerare la massa del gas come: $M = m \cdot N$, dove m è la massa di una singola particella. La pressione totale può quindi essere espressa come:

$$p = \frac{mN\bar{v}_x^2}{V} = \frac{M}{V} \bar{v}_x^2 = \rho \bar{v}_x^2$$

La velocità media quadratica totale sarà data dalla somma della velocità media quadratica su ogni direzione, ma essendo isotrope le velocità medie quadratiche sono uguali, per cui si può esprimere la velocità media quadratica come:

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2$$

Quindi la pressione totale sarà:

$$p = \frac{\rho \bar{v}^2}{3}$$

Questa pressione rappresenta un effetto macroscopico, espresso rispetto alle caratteristiche delle sue componenti microscopiche. Maggiore è il modulo delle velocità delle particelle, maggiore è la pressione totale esercitata dal gas sull'ambiente $p \propto \bar{v}^2$. Considerando l'equazione di stato di un gas ideale $pV = nRT$, si può esprimere lo stato di un gas ideale rispetto alle caratteristiche microscopiche:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \bar{v}^2}{3} &= \frac{nRT}{V} \\ T &= \frac{\rho \bar{v}^2 V}{3nR} = \frac{M \bar{v}^2}{3nR} \\ K_g &= \frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} RT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} NT \end{aligned}$$

Viene definita la costante di Boltzman $k = \frac{R}{N_A}$, con la quale si può esprimere l'energia cinetica di un gas ideale rispetto alla temperatura del gas:

$$K^{tot} = \frac{3}{2}NkT = NK_{(i)}$$

Si assume l'energia potenziale trascurabile, per cui l'energia totale del sistema è data da:

$$E^S = NK_i = \frac{3}{2}NkT$$

L'energia totale è quindi direttamente proporzionale alla temperatura del sistema in Kelvin, la funzione di stato del sistema sarà quindi:

$$E^S = U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}NT = \frac{3}{2}nRT$$

$$\Delta U = c_V n \Delta T \Rightarrow c_V = \frac{3}{2}R$$

Tramite la teoria cinetica viene dimostrato che il calore specifico per una trasformazione isocora di un gas ideale monoatomico risulta essere: $c_V = \frac{3}{2}R$.

7.9.1 Teoria dell'Equipartizione dell'Energia

Questa teoria lega i gradi di libertà dell'energia con il fattore di proporzionalità tra energia cinetica e temperatura:

$$K = l \times \frac{1}{2}NkT$$

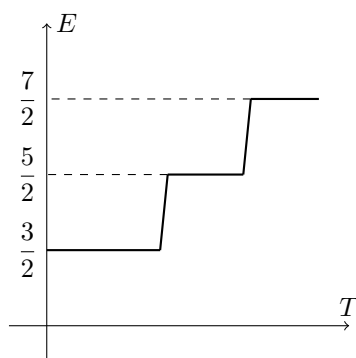
Per un gas monoatomico, ogni particella, approssimata come una sferetta rigida, ha bisogno di 3 gradi di libertà per essere descritta (v_x, v_y, v_z), l'energia cinetica del gas sarà allora: $K = \frac{3}{2}NkT$.

Per un gas biatomico, le sue molecole vengono approssimate come un corpo rigido, quindi potranno ruotare con una certa velocità angolare, quindi saranno necessari 5 gradi di libertà per poter descrivere l'energia: le velocità del centro di massa e le velocità angolare sull'asse z , e su l'asse x perpendicolare ad esso: ($v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z$), l'energia cinetica sarà quindi: $K = \frac{5}{2}NkT$.

Se un gas biatomico viene riscaldato ad una temperatura molto alta, comincerà a vibrare, rendendo necessario usare altri due gradi di libertà per descrivere questa vibrazione, l'energia sarà quindi: $K = \frac{7}{2}NkT$.

Se le molecole sono posizionate in un reticolo, i legami tra la singola molecola e i suoi 6 primi vicini, cominceranno a vibrare di un moto, simile ad un moto armonico, per cui servirà un altro grado di libertà per descrivere la velocità della vibrazione, e altre 6 per descrivere l'energia potenziale elastica che questa vibrazione genererà, l'energia cinetica sarà allora: $K = \frac{12}{2}NkT = 6NkT$.

L'aumento da un livello energetico ad un altro non è continuo, poiché l'energia viene trasmessa discretamente in pacchetti di energia. Nell'intorno dove aumenta il livello energetico, l'energia aumenta rapidamente, per poi rimanere costante per tutto il livello successivo.



7.10 Secondo Principio della Termodinamica

Il primo principio presenta delle limitazioni nella sua descrizione di fenomeni termodinamici.

Per un sistema conservativo, per il lavoro ed il calore nulli, la variazione di energia interna è la variazione di energia meccanica.

Se su un sistema agisce un lavoro meccanico dall'ambiente esterno, ed il sistema è isolato, la variazione di energia interna dipenderà anche dal lavoro esercitato sul sistema S .

In caso non possa essere supposto nulla sul sistema S , si applica il primo principio per determinare la variazione di energia interna del sistema.

Tutte le trasformazioni compatibili con il primo principio possono essere così descritte.

Se si volesse trasformare tutto il lavoro in calore, allora si avrebbe una variazione nulla di energia interna del sistema, avrà quindi temperatura costante e sarà quindi una trasformazione isoterma di un gas ideale. Una trasformazione inversa invece, descrivibile tramite il primo principio, non potrà essere fisicamente possibile, poiché richiederebbe l'esistenza di una trasformazione che trasforma tutto il calore ceduto dal sistema in lavoro esercitato sull'ambiente.

Considerando due corpi a temperature diverse, spontaneamente avviene un trasferimento di calore tra il corpo più caldo al corpo più freddo fino ad uno stato di equilibrio termico. Questa trasformazione non comprende uno scambio di lavoro, si avrà una variazione di energia interna nulla durante la trasformazione.

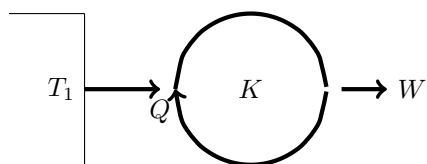
Quindi il calore ceduto dal primo corpo corrisponde interamente al calore assorbito dal secondo. Solamente rispettando il primo principio è possibile descrivere una trasformazione inversa, mantenendo le stesse relazioni, ovvero da due corpi in equilibrio termico, uno dei due spontaneamente cede all'altro una data quantità di calore. Ma ciò non è realizzabile in natura.

Questo dimostra i limiti della descrizione fisica del primo principio della termodinamica. Venne quindi descritto in due forme equivalenti da Kelvin e da Clausius il secondo principio della termodinamica.

7.10.1 Enunciato di Kelvin

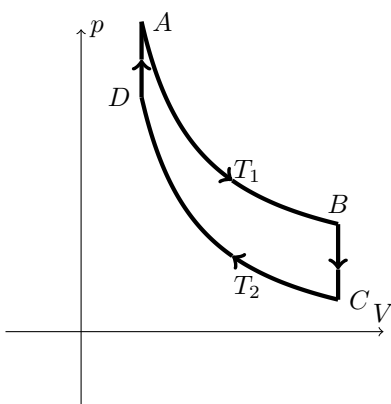
Kelvin sulla base delle limitazioni del primo principio descrisse il secondo principio della termodinamica:

Non esiste una trasformazione termodinamica, il cui unico risultato è assorbire calore e trasformarlo interamente in lavoro.



Un sistema che trasforma tutto il calore assorbito in lavoro cambierà il suo stato, non potrà quindi ripetere la stessa trasformazione. Sarà necessaria un'altra fonte di energia per permettere al sistema di ritornare allo stato iniziale. Vengono quindi considerati solamente cicli termodinamici. Questo è uno dei motivi per cui non può esistere un moto perpetuo, poiché la quantità di energia utilizzabile da un sistema isolato diminuisce nel tempo, per cui non sarà in grado di alimentare costantemente il moto.

Per trasformare il calore interamente in lavoro è necessaria una trasformazione isoterma. Per ritornare allo stato iniziale si possono considerare due trasformazioni isocore, ed un'altra isoterma, ad una temperatura T_1 minore della prima.



Il sistema cederà calore per le trasformazioni da B a D e assorbirà calore durante le trasformazioni da D a B . Per chiudere il ciclo sarà necessario dissipare una parte del calore totale.

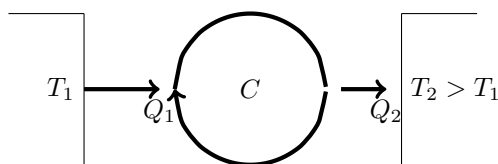
Se al posto di trasformazioni isoterme vengono usate trasformazioni adiabatiche, si avrà una variazione di energia interna del sistema nulla, come il lavoro totale. Quindi il lavoro esercitato sull'ambiente è uguale al lavoro esercitato sul sistema.

Per riportare il sistema alla temperatura iniziale T_1 sarà necessario usare una seconda sorgente ad una temperatura T_2 .

7.10.2 Enunciato di Clausius

Clausius descrisse il secondo principio:

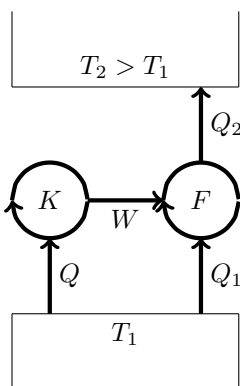
Non esiste un ciclo frigorifero che scambia calore da un corpo di temperatura minore ad un corpo di temperatura maggiore.



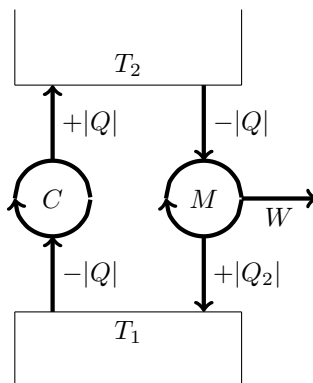
Per dimostrare che sono due forme equivalenti si suppone possa esistere uno di questi due cicli descritti da Kelvin e Clausus, e si dimostra come si possa esprimere l'altro rispetto a questo.

Si suppone possa esistere il ciclo descritto da Kelvin, allora il lavoro generato da esso da una sorgente a temperatura T_1 , potrà essere usato per fornire energia ad un ciclo frigorifero che trasferisce calore dalla sorgente T_1 , ad un'altra sorgente $T_2 > T_1$.

Sarà possibile creare una macchina descritta da Clausus, se questa non dovesse esistere, allora necessariamente non dovrebbe neanche esistere una macchina di Kelvin.



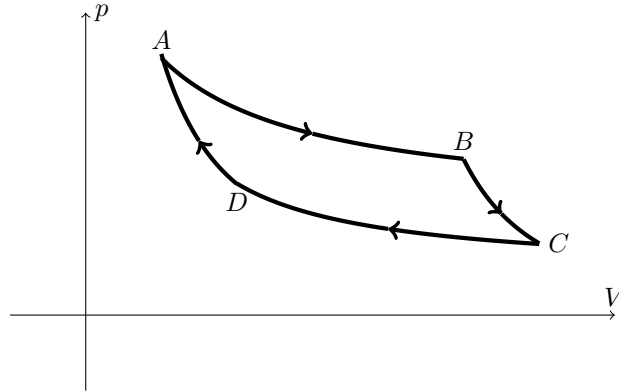
Analogamente, se esistesse una macchina di Clausus sarebbe possibile fornire calore da una sorgente T_1 ad un'altra $T_2 > T_1$, questo calore potrà essere trasferito ad una macchina termica, che ne trasformerà una parte in lavoro W , cedendo l'energia restante come calore alla sorgente T_1 . Per cui la sorgente a temperatura T_2 riceverà e cederà la stessa quantità di calore, per può essere ignorata. Allora il sistema complessivo si comporterà come una macchina di Kelvin che assorbe calore da una sorgente a temperatura T_1 e lo trasforma interamente in lavoro. Quindi se non può esistere una macchina di Kelvin, non potrà neanche esistere la macchina di Clausus.



Si è dimostrato come i due enunciati di Kelvin e Clausius sono due forme equivalenti del secondo principio della termodinamica.

7.11 Ciclo di Carnot

Un ciclo di Carnot è formato da due trasformazioni isoterme e due trasformazioni adiabatiche.



Si vuole calcolare l'efficienza della data macchina termica. Il lavoro della trasformazione AB e della trasformazione CD , entrambe isoterme a temperatura T_1 e T_2 , sarà dato da:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p dV = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0$$

Il lavoro dato dalle due trasformazioni adiabatiche BC e DA sarà dato da:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -c_V n \Delta T_{BC} > 0$$

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -c_V n \Delta T_{DA} < 0$$

Verrà trasferito calore solamente durante le trasformazioni isoterme, per cui Q_{AB} è il calore assorbito dal sistema, mentre Q_{CD} è il calore ceduto dal sistema.

L'efficienza della macchina termica sarà data da:

$$\eta_C = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{\left| T_1 \ln \frac{V_D}{V_C} \right|}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

Poiché BC e DA sono isoterme:

$$T_2 = V_B^{\gamma-1} = T_1 V_A^{\gamma-1}$$

$$T_1 = V_D^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_D}{V_C} \right)^{\gamma-1}$$

L'efficienza del ciclo di Carnot sarà allora:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (7.11.1)$$

La macchina termica avrà quindi efficienza massima per $T_2 \rightarrow \infty$, in generale sarà molto efficiente per T_2 molto maggiore di T_1 .

Se il ciclo viene attraversato in senso antiorario allora, sarà un ciclo frigorifero, la sua efficienza potrà quindi essere calcolata analoga all'efficienza η_C :

$$\varepsilon_C = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \quad (7.11.2)$$

Un ciclo frigorifero sarà più efficiente per temperature simili tra di loro, ed avrà efficienza massima per temperature uguali, rendendo il frigorifero inutile.

7.11.1 Teorema di Carnot

Tutte le macchine termiche hanno un'efficienza minore o uguale ad una macchina di Carnot, che opera sulle stesse sorgenti.

$$\eta \leq \eta_C \quad (7.11.3)$$

Se un ciclo è reversibile, la sua efficienza sarà uguale all'efficienza di una corrispondente macchina di Carnot, se il ciclo è irreversibile, la sua efficienza sarà inferiore.

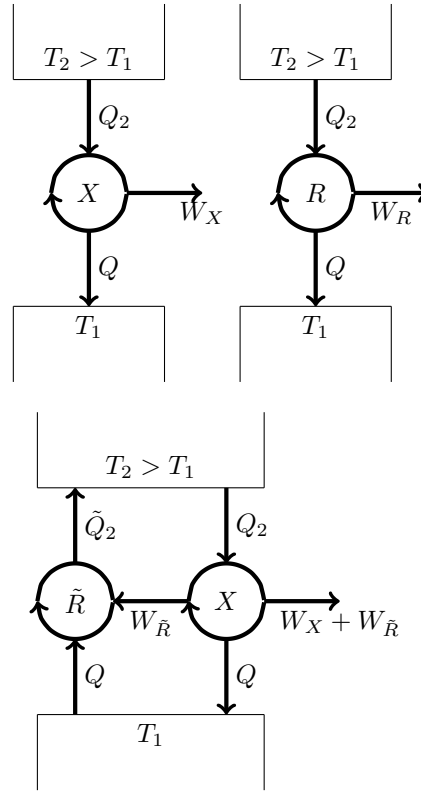
Il teorema di Carnot rappresenta un'altra forma equivalente del secondo principio della termodinamica. Si dimostra per assurdo, assumendo esista una macchina termica X irreversibile, avente un'efficienza $\eta_X > \eta_C$, che produce un lavoro W_X trasferendo calore da una sorgente a temperatura $T_2 > T_1$ ad una sorgente a temperatura T_1 . Il lavoro prodotto da questa macchina sarà dato da:

$$\eta_X = \frac{W_X}{Q_2} \Rightarrow W_X = \eta_X Q_2$$

Considerando una macchina reversibile R , questa avrà un'efficienza:

$$\eta_R = \frac{W_R}{Q_2} \Rightarrow W_R = \eta_R Q_2$$

Poiché è reversibile, si può considerare una macchina inversa \tilde{R} , che produrrà un lavoro $W_{\tilde{R}} = -W_R$, scambiando una quantità di calore $\tilde{Q}_2 = -Q_2$ con la sorgente T_2 . Se si uniscono questa macchina \tilde{R} e X , si può bilanciare il calore assorbito e ceduto alla sorgente T_2 , e si produrrà un lavoro totale $W_{X+\tilde{R}} = W_X + W_{\tilde{R}} = W_X - W_R = (\eta_X - \eta_R)Q_2 > 0$, poiché l'efficienza della macchina X è superiore all'efficienza della macchina di Carnot. Questa macchina $\tilde{R} + X$ sarà una macchina di Kelvin, poiché da una sorgente T_1 , produrrà un lavoro $W_{X+\tilde{R}}$, da un calore Q assorbito da T_1 .



Poiché non può esistere una macchina di Kelvin, non potrà neanche esistere la macchina X . Quindi per ogni macchina R , la sua efficienza sarà $\eta_R \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$. Si può dimostrare che l'efficienza di una macchina frigorifera è $\varepsilon_R \leq \varepsilon_C = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$. Ciò viene dimostrato sezionando il ciclo termodinamico della macchina R .

Per una trasformazione reversibile R tra due temperature T_1 e T_2 , si avrà:

$$\begin{aligned}\eta_R &= \eta_C \\ \frac{|Q_1|}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} &= 0 \\ \frac{|Q_1|}{Q_2} &= \frac{T_1}{T_2} \\ T_2 &= T_1 \frac{|Q_1|}{Q_2}\end{aligned}$$

La temperatura T_2 viene misurata su una scala assoluta, poiché dipende solamente dalla variazione di calore. Quindi sarà impossibile raggiungere una temperatura assoluta nulla, poiché sarebbe necessario che $\frac{|Q_1|}{Q_2} \rightarrow 0$. La temperatura assoluta potrà solamente arrivare asintoticamente al

valore di $0K$. Per il terzo principio della termodinamica una temperatura assoluta di $0K$, viene definita un punto ideale irraggiungibile.

7.12 Teorema di Clausius ed Entropia

Per ogni sorgente di un ciclo termodinamico può essere definita una quantità $\frac{Q_i}{T_i}$, la cui somma tra ogni sorgente sarà minore di zero, se si tratta di una trasformazione irreversibile mentre sarà nulla se si tratta di una trasformazione reversibile.

Il teorema di Clausius viene dimostrato suddividendo un ciclo qualsiasi in cicli di Carnot contigui, che operano su una data coppia di temperature. Clausius dimostrò che la loro somma è minore uguale a 0, in base al tipo di trasformazione. Per un numero di suddivisioni tendenti all'infinito, si potrà considerare un integrale sulla curva definita dal ciclo termodinamico nel piano di Clayperon:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^N Q_i}{T_i} = \oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

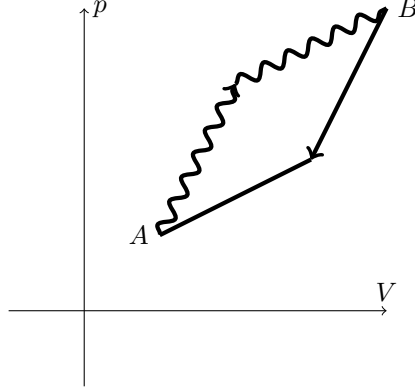
Se la trasformazione Γ è reversibile, allora si avrà $\oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0$, allora l'integrale sarà conservativo, e il differenziale δQ sarà uguale al differenziale esatto di una funzione S chiamata entropia:

$$\Gamma : \text{rev.} \iff \frac{\delta Q}{T} = dS \quad (7.12.1)$$

L'entropia sarà quindi una funzione di stato, dipendente dal calore e dalla temperatura. Quindi viene sempre definita come variazione e, come l'energia potenziale, il suo valore in un dato stato sarà definito a meno di una costante. Considerando una trasformazione reversibile τ_{rev} tra due stati A e B , si potrà applicare l'integrale di Clausius tra i due stati del sistema:

$$\oint_{\tau_{AB}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{S_A}^{S_B} dS = \Delta S_{AB} \quad (7.12.2)$$

Trattandosi di una quantità conservativa, la variazione di entropia tra due stati di un sistema sarà uguale per ogni trasformazioni reversibile tra quei due stati. Per calcolare la variazione di entropia tra due stati di un sistema legati da una trasformazione irreversibile si sceglie una qualsiasi trasformazione reversibile per quei due stati. Per questo alcune trasformazioni vengono rappresentate in un piano (T, S) . Dato un ciclo termodinamico tra due stati A e B , composto da una trasformazione reversibile ed una irreversibile:



Poiché comprende una trasformazione irreversibile la sua efficienza sarà minore dell'efficienza di una macchina di Carnot, per cui l'integrale di Clausius su tutta la trasformazione sarà minore di 0:

$$\begin{aligned}
 \eta &< \eta_C \\
 \oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} &< 0 \\
 \oint_{\Gamma_{\text{rev}}} \frac{\delta Q}{T} + \oint_{\Gamma_{\text{irr}}} \frac{\delta Q}{T} &< 0 \\
 \Delta S_{BA} + \oint_{\Gamma_{\text{irr}}} \frac{\delta Q}{T} &< 0 \\
 \oint_{\Gamma_{\text{irr}}} \frac{\delta Q}{T} &< -\Delta S_{BA} = \Delta S_{AB}
 \end{aligned}$$

Per cui in una qualsiasi trasformazione Γ :

$$\oint_{\Gamma_{AB}} \frac{\delta Q}{T} \leq \Delta S_{AB}$$

Se si considera una trasformazione adiabatica, allora l'entropia del sistema dovrà aumentare o rimanere costante:

$$\oint_{\Gamma_{AB}} \frac{\delta Q}{T} = 0 \leq \Delta S_{AB}$$

Se si espande il sistema analizzato, fino all'intero universo, poiché alcune trasformazioni saranno necessariamente irreversibili, l'entropia dell'universo tenderà ad aumentare spontaneamente nel tempo:

$$\Delta S > 0 \quad (7.12.3)$$

Lo stato di un sistema tenderà quindi al disordine, ovvero ad uno stato di maggiore entropia, solo se il sistema è isolato rispetto all'ambiente esterno. È possibile che in un sistema l'entropia diminuisca,

allora l'entropia dell'ambiente dovrà aumentare.

In una trasformazione isoterma si avrà:

$$\Gamma_{\text{rev}} : \Delta S_{AB} = \oint_{\Gamma_{AB}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \oint \delta Q = \frac{\Delta Q_{AB}}{T} \Rightarrow T \Delta S_{AB} = \Delta Q_{AB}$$

$$\Gamma_{\text{irr}} : \Delta S_{AB} > \frac{\Delta Q_{AB}}{T}$$

Per cui il calore generato da una reazione isoterma reversibile è maggiore del calore generato da una reazione irreversibile.

In una trasformazione adiabatica o isoentropica, l'entropia rimarrà costante:

$$\Delta S_{AB} = \oint_{\Gamma_{AB}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Date due sorgenti a contatto, aventi temperature T_1 e $T_2 > T_1$, la variazione di entropia della prima sorgente sarà: $\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_1}$, mentre la variazione di entropia della seconda sorgente sarà:

$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2}$. Per cui:

$$|\Delta S_1| < \Delta S_2 \Rightarrow \Delta S = Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$$

Per un gas ideale dato il differenziale dell'entropia dS , si potrà esprimere rispetto al lavoro ed all'energia interna del sistema:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta W}{T}$$

$$\delta W = p dV = \frac{nRT}{V} dV, dU = c_V n dT$$

$$dS = \frac{c_V n dT}{T} + \frac{nR dV}{V}$$

$$\Delta S_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{c_V n dT}{T} + \int_{V_A}^{V_B} \frac{nR dV}{V}$$

$$\Delta S_{AB} = nc_V \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \quad (7.12.4)$$

Questa relazione per la variazione di entropia varrà per ogni trasformazione di un gas ideale poiché l'entropia è una funzione di stato. Potrà essere espressa alternativamente, tramite l'equazione di stato dei gas ideali:

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) - nR \ln \left(\frac{p_B}{p_A} \right) \quad (7.12.5)$$

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) + nc_V \ln \left(\frac{p_B}{p_A} \right) \quad (7.12.6)$$