Soluzioni Esonero del 24 Novembre

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su
https://github.com/00Darxk/Fondamenti-di-Telecomunicazioni

Indice

1 Soluzioni Svolte **3**
1.1 Serie di Fourier 3
1.2 Convoluzioni 6
1.3 Proprietà Sistemi 7
1.4 Sistemi Ingresso-Uscita 7

1 Soluzioni Svolte

1.1 Serie di Fourier

Calcolare i coefficienti di Fourier del segnale x, la sua potenza e la sua trasformata:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \cos^2\left[\frac{\pi(t - 2T_0)}{4T_0}\right]$$

Per la proprietà di bisezione del coseno e per il coseno della differenza si ottiene la seguente espresisone equivalente:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos\left[\frac{\pi(t - 2T_0)}{2T_0}\right] = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2T_0}\right)\cos\left(\frac{-2T_0\pi}{2T_0}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2T_0}\right)$$
$$T = 4T_0$$

Si esprime il coseno in forma esponenziale per determinare i coefficienti per confronto diretto:

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{i\pi t}{2T_0}} - e^{-\frac{i\pi t}{2T_0}}\right)$$

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4} \tag{1}$$
$$c_n = 0\,\forall n \neq \pm 1 \tag{2}$$

Si calcola la potenza tramite Parceval:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{8} \tag{3}$$

Dato un segnale periodico la sua trasformata si può esprimere come:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{4}\left(f - \frac{1}{4T_0}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{4T_0}\right) \tag{4}$$

Calcolare la trasformata del segnale x:

$$x(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & n \notin [\,-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\,) \end{cases}$$

Si può esprimere il segnale replicato come un coseno moltiplicato per una finestra:

$$\dot{x}(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

Si individua il periodo $\overline{T}$, e si determinano i coefficienti tramite la definizione:

$$\overline{T} = 2T$$
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\overline{T}}{2}}^{\frac{\overline{T}}{2}} x(t)e^{-2i\pi nt/\overline{T}}dt$$

Altrimenti si determinano rispetto alla trasformata di Fourier del segnale replicato $\dot{x}(t)$:

$$c_n = \frac{1}{\overline{\overline{T}}}\dot{X}\left(\frac{n}{\overline{\overline{T}}}\right)$$

Si considera la trasformata di $\dot{x}$:

$$\dot{X}(f) = \frac{T}{2}\text{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right) * \left[\frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]$$
$$\dot{X}(f) = \frac{T}{4}\text{sinc}\left[\frac{T}{2}\left(f - \frac{1}{2T}\right)\right] + \frac{T}{4}\text{sinc}\left[\frac{T}{2}\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]$$

I coefficienti sono quindi:

$$c_n = \frac{1}{\overline{\overline{T}}}\dot{X}\left(\frac{n}{\overline{\overline{T}}}\right)\frac{T}{4}\text{sinc}\left[\frac{T}{2}\left(\frac{n}{\overline{\overline{T}}} - \frac{1}{2T}\right)\right] + \frac{T}{4}\text{sinc}\left[\frac{T}{2}\left(\frac{n}{\overline{\overline{T}}} + \frac{1}{2T}\right)\right]$$
$$\overline{T} = 2T$$

$$c_n = \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{n-1}{4}\right) + \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{n+1}{4}\right) \tag{5}$$

La trasformata del segnale completo x si esprime come:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{n-1}{4}\right) + \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{n+1}{4}\right)\right]\delta\left(f - \frac{n}{\overline{\overline{T}}}\right) \tag{6}$$

Calcolare i coefficienti del segnale x, la trasofrmata e la potenza:

$$x(t) = \frac{2}{3} - i\cos\left(\frac{\pi t}{3T_0}\right)$$
$$T = 6T_0$$

Per confronto diretto si ottengono i coefficienti:

$$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi t}{3T_0}} - \frac{i}{2}e^{-i\frac{\pi t}{3T_0}}$$

$$c_0 = \frac{2}{3} \tag{7}$$
$$c_1 = c_{-1} = -\frac{i}{2} \tag{8}$$

La trasformata di ottiene come:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{2}{3}\delta(f) - \frac{i}{2}\delta\left(f - \frac{1}{6T_0}\right) - \frac{i}{2}\delta\left(f + \frac{1}{6T_0}\right) \tag{9}$$

La potenza si calcola con il teorema di Parceval:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{18} \tag{10}$$

Calcolare i coefficienti e la trasformata di Fourier del segnale periodico x, di periodo T:

$$x(t) = \begin{cases} t & -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & t \notin \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \end{cases}$$

I coefficienti si possono calcolare con la definizione, altrimenti si calcola rispetto al segnale replicato $\dot{x}$:

$$c_n = \frac{1}{\overline{\overline{T}}}\dot{X}\left(\frac{n}{\overline{\overline{T}}}\right)$$

$$\dot{x}(t) = t \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

Questa trasformata si può calcolare mediante la proprietà della derivazione della trasformata:

$$\dot{x}(t) = t \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

$$\dot{X}(f) = -\frac{1}{2\pi i}X_1(f)$$

$$x_1(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) X_1(f) = \frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)$$

$$\dot{X}(f) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{df}\left[\frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)\right] = -\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{df}\left[\frac{T}{2}\frac{\sin\left(\frac{T}{2}\pi f\right)}{\frac{T}{2}\pi f}\right]$$

$$\dot{X}(f) = \frac{i}{2\pi^2}\frac{\cos\left(\frac{T}{2}\pi f\right)\frac{T}{2}\pi f - \sin\left(\frac{T}{2}\pi f\right)}{f^2} = \frac{iT}{4\pi f}\cos\left(\frac{\pi f T}{2}\right) - \frac{i}{2\pi^2 f^2}\sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right)$$

I coefficienti di Fourier sono allora:

$$c_n = \frac{1}{T}\frac{iT}{4\pi\frac{n}{T}}\cos\left(\frac{\pi\frac{n}{T}T}{2}\right) - \frac{i}{2\pi^2\left(\frac{n}{T}\right)^2}\sin\left(\frac{\pi\frac{n}{T}T}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{iT}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{iT^2}{2\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{11}$$

Per cui per $n = 2k$ si annulla il coseno, mentre per $= 2k-1$ si annulla il seno. Mentre la trasformata del segnale risulta essere:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{iT}{4\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{iT^2}{2\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \tag{12}$$

1.2 Convoluzioni

Calcolare l'autoconvoluzione del segnale x:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2]$$
$$x[n] * x[n] = (\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2]) * (\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2])$$
$$\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2] - \delta[n-2] + \delta[n-4] - \delta[n] + \delta[n+2] - \delta[n] + \delta[n+4]$$

$$x[n] * x[n] = -\delta[n] - 2\delta[n-2] + 2\delta[n+2] + \delta[n-4] + \delta[n+4] \tag{13}$$

Calcolare l'autoconvoluzione di x:

$$x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-1]$$
$$x[n] * x[n] = (2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1]) * (2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1])$$
$$2\delta[n] - 2\delta[n-1] - 2\delta[n+1] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n] - 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n+2]$$

$$x[n] * x[n] = 6\delta[n] - 4\delta[n-1] - \delta[n+1] + \delta[n-2] + \delta[n-2] \tag{14}$$

Calcolare la convoluzione tra i segnali x e y:

$$x(t) = u(t)$$
$$y(t) = t \,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) y(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \displaystyle\int_{-T}^{t} \tau d\tau = \frac{t^2 - T^2}{2} & -T \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \wedge t \geq T \\ \dfrac{t^2 - T^2}{2} & -T \leq t < T \end{cases} \tag{15}$$

Calcolare la convoluzione tra i segnali x e y:

$$x(t) = u(t) - u(-t)$$
$$y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} -2T & t < -T \\ \displaystyle -\int_{t-T}^{0} d\tau + \int_{0}^{t+T} d\tau & -T \leq t < T \\ 2T & t \geq T \end{cases}$$

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} -2T & t < -T \\ 2t & -T \leq t < T \\ 2T & t \geq T \end{cases} \tag{16}$$

1.3 Proprietà Sistemi

Dati i sistemi seguenti, definite le loro proprietà:

$$y(t) = x^2(t) - x(t+1)$$

Non lineare, invariante nel tempo, non causale

$$y(t) = x(t-1)u(t-1)$$

Lineare, non invariante nel tempo e causale.

$$y(t) = x(t+1) + u(t-1)$$

Non lineare, non invariante nel tempo non è causale

$$y(t) = x(t)x(t-1)$$

Non lineare, invariante nel tempo, causale

1.4 Sistemi Ingresso-Uscita

Data la funzione di trasferimento H calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$H(f) = [\text{sinc}(2Tf) - 2\text{sinc}(4Tf)]\, e^{-2i\pi ft}$$

$$h(t) = \frac{1}{2T}\text{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) - \frac{1}{2T}\text{rect}\left(\frac{t-T}{4T}\right) \tag{17}$$

L'uscita del sistema con un gradino in entrata risulta:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \left[\frac{1}{2T}\text{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) - \frac{1}{2T}\text{rect}\left(\frac{t-T}{4T}\right)\right] * u(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \int_{-T}^{t} -\frac{1}{2T} d\tau & -T \leq t < 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \leq t < 2T \\ -\frac{1}{2} - \int_{2T}^{t} \frac{1}{2T} d\tau = -\frac{1}{2} - \frac{t-2T}{2T} & 2T \leq t < 3T \\ -1 & t \geq 3T \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ -\frac{t+T}{2T} & -T \leq t < 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \leq t < 2T \\ 1 - \frac{t}{2T} & 2T \leq t < 3T \\ -1 & t \geq 3T \end{cases} \tag{18}$$

Data la risposta impulsiva h calcolare la funzione di trasferimento:

$$h(t) = e^{-t}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$$
$$H(f) = \frac{1}{1+2i\pi f} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$
$$H(f) = \frac{1}{2+4i\pi(f-f_0)} + \frac{1}{2+4i\pi(f+f_0)} \tag{19}$$

Calcolare l'uscita del sistema con una delta centrata in $1/f_0$ in entrata:

$$y(t) = h(t) * \delta\left(t - \frac{1}{f_0}\right) = e^{-t+\frac{1}{f_0}}\cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi\right) u\left(t - \frac{1}{f_0}\right)$$
$$y(t) = e^{-t+\frac{1}{f_0}}\cos\left(2\pi f_0 t\right) u\left(t - \frac{1}{f_0}\right) \tag{20}$$

Data la risposta impulsiva h, determinare la funzione di trasferimento del sistema:

$$h(t) = \frac{\sin^2(2\pi f_0 t)}{\pi t} = \sin(2\pi f_0 t) 2T_0 \mathrm{sinc}(2f_0 t)$$
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) * \left[\frac{1}{2i}\delta\left(f-f_0\right) - \frac{1}{2i}\delta(f+f_0)\right]$$
$$H(f) = \frac{1}{2i}\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2f_0}\right) - \frac{1}{2i}\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{2f_0}\right) \tag{21}$$

Calcolare l'uscita del sistema con una delta centrata in $1/f_0$ in entrata:

$$y(t) = h(t) * \delta\left(t - \frac{1}{f_0}\right) = \frac{\sin^2\left(2\pi f_0 t - 2\pi\right)}{\pi\left(t - \frac{1}{f_0}\right)}$$
$$y(t) = \frac{\sin^2(2\pi f_0 t)}{\pi\left(1 - \frac{1}{f_0}\right)} \tag{22}$$

Data la risposta impulsiva h, calcolare la funzione di trasferimento del sistema:

$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-2T}{2T}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t+2T}{2T}\right)$$
$$H(f) = 2T\mathrm{sinc}(2fT)e^{-4i\pi fT} - 2T\mathrm{sinc}(2fT)e^{4i\pi fT}$$
$$H(f) = -4iT\mathrm{sinc}(2fT)\sin(4\pi fT) \tag{23}$$

Calcolare l'uscita del ssitema quando è presente un gradino in entrata:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t-2T}{2T}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t+2T}{2T}\right)\right] * u(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3T \\ -\int_{-3T}^{t} d\tau & -3T \leq t < -T \\ -2T & -T \leq t < T \\ -2T + \int_{T}^{t} d\tau & T \leq t < 3T \\ 0 & t \geq 3T \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3T \\ -t-3T & -3T \leq t < -T \\ -2T & -T \leq t < T \\ t-3T & T \leq t < 3T \\ 0 & t \geq 3T \end{cases} \tag{24}$$