Appunti di Fondamenti di Telecomunicazioni

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

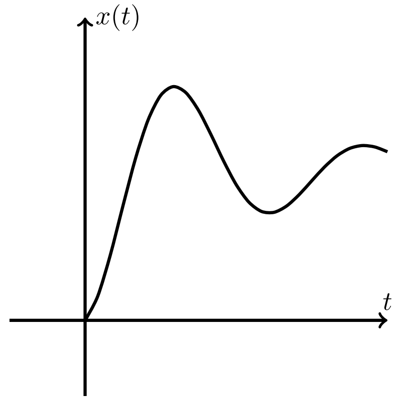
Sorgente del file LaTeX disponibile su
https://github.com/00Darxk/Fondamenti-di-Telecomunicazioni

Indice

1 Segnali

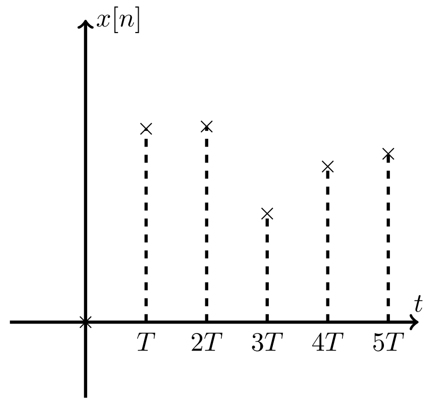
Un segnale è definito come una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo in maniera deterministica o aleatoria. Può essere un'onda di pressione come la voce, o un onda elettromagnetica come segnali wireless e bluetooth. Un segnale è in grado di contenere informazioni come una sequenza di bit. Generalmente un segnale analogico viene convertito in digitale come un segnale elettrico tramite un trasduttore, per facilitare la processazione, per poi essere riconvertito in analogico; alcuni segnali sono creati direttamente in digitale. Un segnale è definito dalla sua banda, o spettro di banda, che ne determina la capicità di trasmettere informazione. L' occupazione in frequenza di un segnale è analoga al numero di bit di un dato digitale.

Un segnale comune è il segnale voce, definito da un'onda di pressione, per cui è sempre strettamente positivo. Questo segnale è analogico, quindi continuo, ed il suo valoro è noto in ogni istante di tempo t, e si identifica come $x(t)$.



Campionando un segnale anlogico si crea un segnale digitale, considerando prima alcune condizioni definite dal teroema del campionamento. Per campionare un segnale si estraggono valori, o campioni, dal segnale analogico ogni intervallo T. Il segnale così ottenuto è un segnale discreto x_n o $x[n]$, che presenta un valore ogni multiplo del tempo di campionamenoto T scelto.

$$x[n] := \{x(n \cdot T)\,\forall n \in \mathbb{N}\}$$



Questi valori vengono poi convertiti in digitale assegnando un certo numero di bit per rappresentare l'intervallo massimo di valori descritti dal segnale. Questo processo viene chiamato quantizzazione, si divide l'intervallo dei valori in piccoli intervalli ognuno con un univoco valore in bit, in modo da convertire tutti i valori in quell' intervallo in una sequenza di bit. Aumentando il numero di bit, quindi il numero di suddivisioni dell'itnervallo di partenza, aumenta la precisione, ma aumenta anche il costo per processare lo stesso segnale. Dopo aver covnertito tutti i valori in una sequenza di bit, questo segnale in bit viene tramesso, ed in seguito decodificato in analogico. Spesso i segnali vengono creati in digitale, per cui non è necessario campionare un segnale analogico.

Campionando un segnale si perdono le informazioni contenute tra i campioni, ma è possibile applicare fitri e trasformazioni in digitale utili da giustificare la questa perdita di informazioni, per cui la maggior parte dei segnali vengono trasmessi in digitale.

I segnali possono essere classificati in certi (deterministici) o aleatori (non deterministici). I segnali certi sono segnali di cui è noto tutto l'andamento, come file salvati su un supporto, per cui non è necessario trasmetterli. Mentre i segnali aleatori non sono noti a priori e vengono studiati dal punto di vista della statistica.

In generale un sistema di trasmissione di segnali è formato da un trasmettitore che processa e codifica il segnale, un canale che lo trasmette, ed un ricevitore che lo decodifica:

1.1 Segnali a Tempo Continuo

Vengono definiti in questa sezione una serie di segnali canonici:

1.1.1 Seno Cardinale

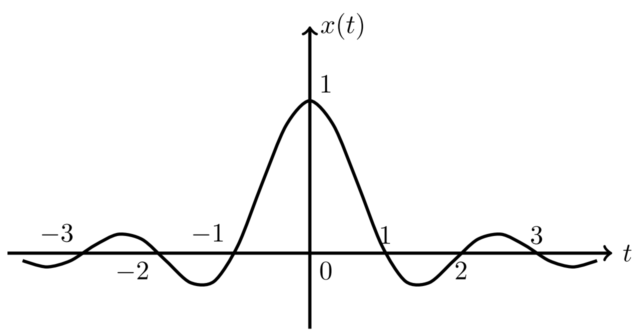
$$x(t) = \text{sinc}(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \tag{1.1.1}$$

Questo segnale si attenua asintoticamente come $1/t$:

$$-\frac{1}{t} \leq \text{sinc}(t) \leq \frac{1}{t}$$

Viene incluso il fattore π nell'argomento in modo che la funzione si annulli per ogni valore intero:

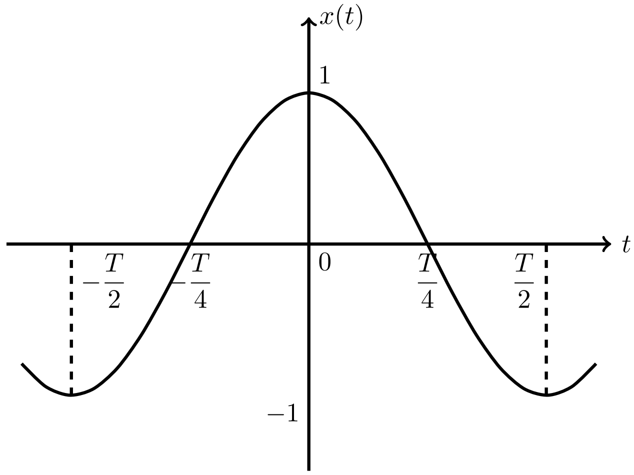
$$\text{sinc}(t) = 0 \, \forall t \in \mathbb{Z}$$



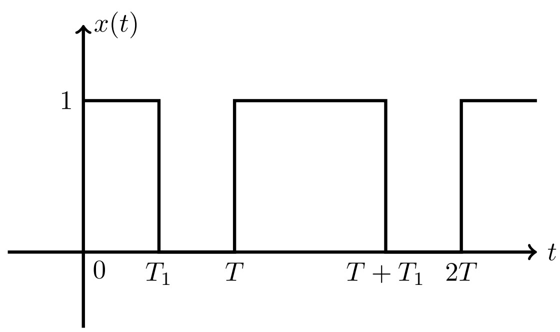
1.1.2 Coseno

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{1.1.2}$$

Il parametro T rappresenta il periodo della funzione, per cui il valore della funzione ad un certo valore t corrisponde al valore in $t - T$. Invece del periodo si può usare la frequenza f_0, inverso del periodo.



1.1.3 Gradino Periodico



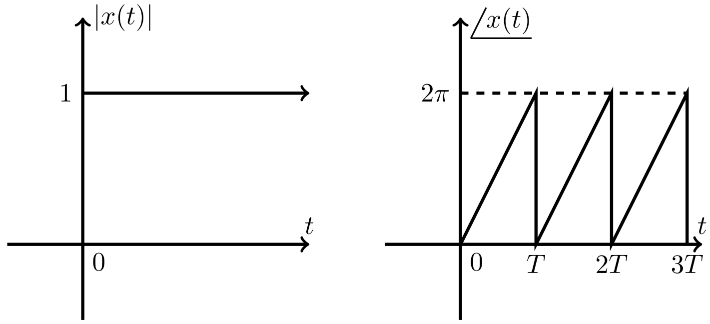
1.1.4 Esponenziale Complesso

$$x(t) = e^{i\frac{2\pi t}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{1.1.3}$$

Un segnale complesso può essere anlizzato mediante la sua fase ed il uso modulo in funzione del tempo:

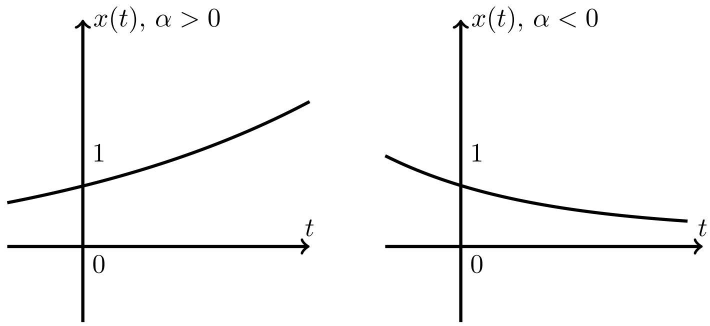
$$x(t) = |x(t)|e^{\angle x(t)}$$

Dato che la fase è periodica si può rappresentare come una serie di rampe.



1.1.5 Esponenziale

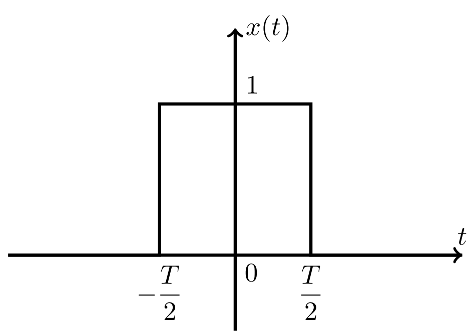
$$x(t) = e^{-\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.1.4}$$



1.1.6 Finestra

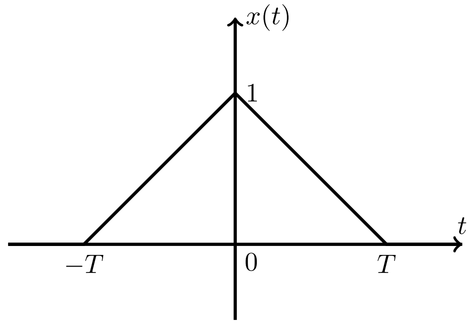
$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & t < -\frac{T}{2} \wedge t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \tag{1.1.5}$$

T viene chiamata base della finestra. Questo segnale presenta una discontinuità di salto per $t = \pm\frac{1}{2}$. La funzione finestra viene usata quando si vuole analizzare solo una parte di un segnale, poiché il restante sarà pari a 0. La trasformata di questa funzione rappresenta un filtro in frequenza.



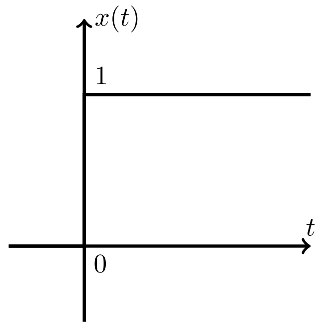
1.1.7 Triangolo

$$x(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1 - |t| & -T \leq t < T \\ 0 & t < -T \wedge t \geq T \end{cases} \tag{1.1.6}$$



1.1.8 Gradino

$$x(t) = u(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$



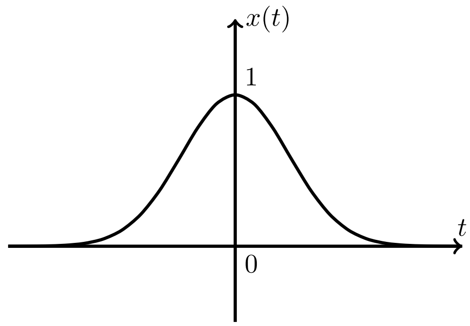
1.1.9 Gaussiana

$$x(t) = e^{-\alpha t^2} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

La larghezza della campana centrale dipende dal fattore α. Nello sturio delle probabiltà, si usa la sua forma normalizzata:

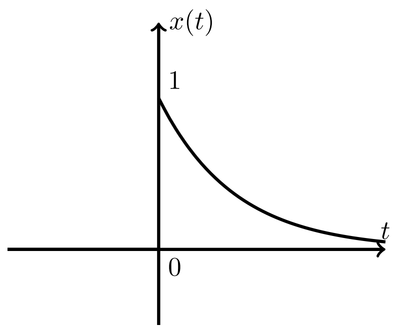
$$x(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Il valore σ rappresenta la deviazione standard, mentre il suo quadrato σ^2 descrive la varianza.



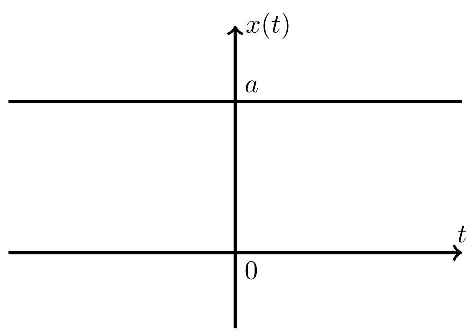
1.1.10 Esponenziale Unilatero

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t) \;\; \alpha \in \mathbb{R}^+$$



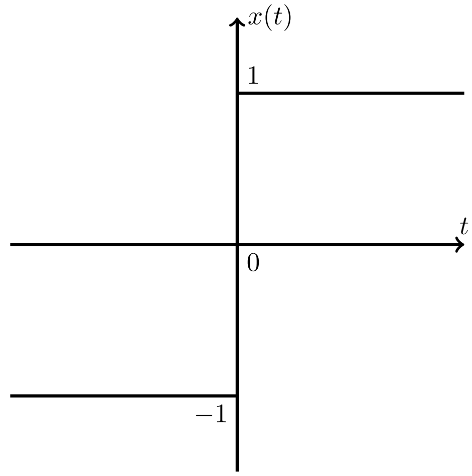
1.1.11 Costante

$$x(t) = a$$



1.1.12 Segno

$$x(t) = \mathrm{sign}(t) := \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



1.2 Operazioni sui Segnali

Le operazioni sui segnali vengono computate istante per istante. L'operazione di somma produce un segnale $z(t)$, tale che ogni valore che assume equivale alla somma di altri due segnali $x(t)$ e $y(t)$ nello stesso istante:

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

Analogamente si considera l'operazione prodotto, come un prodotto istante per istante tra i due segnali:

$$z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

L'operazione di ribaltamento corrisponde ad una riflessione della funzione lungo l'asse delle ascisse di un segnale $x(t)$ tramite una sostituzione di variabile $t \to -t$:

$$z(t) = x(-t)$$

Quest'operazione non produce risultati per segnali pari, poiché presentano la proprietà $x(t) = x(-t)$. Tramite l'operazione di ribaltamento si può esprimere il segnale segno tramite la differenza di due gradini:

$$\text{sign}(t) = u(t) - u(-t)$$

L'operazione di traslazione, sposta un segnale $x(t)$ lungo l'asse delle ascisse di un fattore τ:

$$z(t) = x(t - \tau)$$

L'operazione di cambio di scale corrisponde ad un rimpicciolimento o allargamento di un segnale $x(t)$ di un fattore $a \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = x(at)$$

1.3 Energia e Potenza

L'energia e la potenza di un segnale rappresentano caratteristiche utili nella loro analisi e processazione.

Viene definita energia E_x di un segnale $x(t)$, come il limite per $\Delta t \to 0$ di un integrale:

$$E_x := \lim_{\Delta t \to \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \tag{1.3.1}$$

L'energia di un segnale è sempre strettamente positiva, poiché si considera tutta l'area sottesa dal quadrato del modulo del segnale, necessariamente positivo; mentre è nulla solo se lo è anche il segnale analizzato. Teoricamente non esiste un limite per l'energia contenuta in un segnale, ma sono fisicamente realizzabile solo segnali con energia finita e non infinita.

Se l'energia di un segnale è finita e diversa da zero $E_x \neq \infty$ e $E_x \neq 0$, il segnale $x(t)$ si chiama segnale di energia.

Viene definita la potenza P_x di un segnale $x(t)$ in maniera simile alla sua energia:

$$P_x := \lim_{\Delta t \to \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt \right) \tag{1.3.2}$$

Anche la potenza di un segnale è strettamente positiva $P_x \geq 0$, se la potenza assume valori diversi da zero e finiti, il segnale $x(t)$ si chiama segnale di potenza.

Vengono così create due classi di segnali, di potenza e di energi. Per la definizione delle due grandezze antisimmetriche poiché se un segnale è di potenza, non è di energia e viceversa:

$$\begin{aligned} E &\implies \neg P \\ P &\implies \neg E \end{aligned}$$

Si determina l'energia di una gaussiana di ampiezza A:

$$E_x = \lim_{\Delta t \to \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} A^2 e^{-2\alpha t^2} dt = A^2 \lim_{\Delta t \to \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{-2\alpha t^2} dt$$

Si considera il cambio di variabile $\tau = \sqrt{2\alpha} t$:

$$E_x = A^2 \lim_{\Delta t \to \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\alpha}} d\tau = \frac{A^2}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

L'integrale ottenuto è l'integrale di Gauss, risolubile applicando un cambio di coordinate polari al quadrato dell'integrale dato, il risultato dell'integrazione della gaussiana sull'intero asse dei reali $\mathbb{R}$ corrisponde alla radice di pi greco:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Per cui l'energia di una gaussiana risulta essere:

$$E_x = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \tag{1.3.3}$$

Moltiplicando un segnale $x(t)$ moltiplicato per un gradino e calcolandone l'integrale sui tutti i reali $\mathbb{R}$, equivale all'integrale del segnale originiario sui soli reali positivi $\mathbb{R}^+$, poiché il segnale assume valori nulli da $-\infty$ a 0:

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot u(t) dt = \int_{\mathbb{R}^+} x(t) dt$$

Si determina l'energia e la potenza di un esponenziale complesso. Il segnale ha un modulo unitario $|x(t)| = 1$, per cui la sua energia risultante è:

$$E_x = \lim_{\Delta t \to \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt = \lim_{\Delta t \to \infty} \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} \right) = \infty$$

Per cui l'esponenziale complesso non è un segnale di energia. La potenza risulta essere:

$$P_x = \lim_{\Delta t \to \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt \right) = \lim_{\Delta t \to \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t \right) = 1$$

L'esponenziale complesso è quindi un segnale di potenza.

Si determina l'energia di un esponenziale unilatero:

$$E_x = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$

Per cui questo segnale non è né di energia né di potenza.

I segnali periodici non possono essere di energia, per cui un segnale perdiodico senza attenuazione non è fisicamente realizzabile. Quindi possono essere solo di potenza, si determina la potenza di un segnale periodico:

$$P_x = \lim_{\Delta t \to \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt \right)$$

In un segnale periodico si può esprimere l'intervallo di tempo Δt come n volte il periodo T:

$$P_x = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{nT} \int_{-\frac{nT}{2}}^{\frac{nT}{2}} |x(t)|^2 dt \right)$$

L'integrale di un segnale perfettamente periodico, ovvero senza smorzamenti, su n periodi equivale ad n volte l'integrale su un singolo periodo T:

$$P_x = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{nT} n \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right)$$

Questo integrale è indipendente dalla variabile n, per cui si può trascurare il limite, la potenza risulta quindi essere:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \tag{1.3.4}$$

Quest'ultimo integrale può essere espresso in termini della frequenza naturale: $f_0 = \frac{1}{T}$.

Si determina la potenza del segnale coseno, di ampiezza A e frequenza naturale f_0 $A\cos(2\pi f_0 t)$:

$$P_x = A^2 f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} \cos^2(2\pi f_0 t) dt$$

Per esprimere il quadrato del coseno, si consdira la formula di bisezione del coseno:

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$
$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$
$$A^2\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A^2}{2}(\cos(4\pi f_0 t) + 1)$$

Si può esprimere inoltre mediante la notazione complessa delle funzioni trigonometriche:

$$A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2}(e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t})$$
$$|x+y|^2 \;\; x, y \in \mathbb{C}$$
$$(x+y)\cdot(x+y)^* = (x+y)\cdot(x^*+y^*)$$
$$xx^* + xy^* + yx^* + yy^* = |x|^2 + |y|^2 + xy^* + yx^*$$
$$xy^* + yx^* = (a_x + ib_x)\cdot(a_y - ib_y) + (a_x - ib_x)\cdot(a_y + ib_y) = (a_x a_y + b_x b_y) = 2Re\{x^* y\}$$
$$|x|^2 + |y|^2 + 2Re\{|x|e^{-\varphi_x} + |y|e^{i\varphi_y}\}$$
$$|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|\cos(|\varphi_y - \varphi_x|)$$
$$\left|\frac{A}{2}(e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t})\right|^2 = \frac{A^2}{4}\left(1 + 1 + 2Re\Big\{e^{i2\pi f_0 t}\cdot\left(e^{-i2\pi f_0 t}\right)^*\Big\}\right)$$
$$A^2\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A^2}{2}(1 + \cos(4\pi f_0 t))$$

Considerando questa sostituzione, l'integrale diventa:

$$P_x = \frac{A^2 f_0}{2}\int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} (\cancelto{0}{\cos(4\pi f_0 t)} + 1)dt = \frac{A^2 f_0}{2}\left(\frac{1}{2f_0} + \frac{1}{2f_0}\right) = \frac{A^2}{2}$$

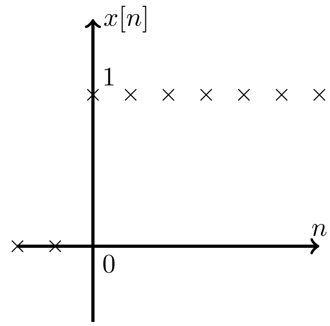
L'integrale su un periodo del coseno è nullo, poiché è una funzione pari, per cui la componente $\cos(4\pi f_0 t)$ fornisce un contributo nullo.

1.4 Segnali a Tempo Discreto

Poiché la maggior parte dei segnali vengono trasmessi o generati in tempo discreto, è necessario essere a conoscenza del comportamento dei segnali continui campionati a tempo discreto.

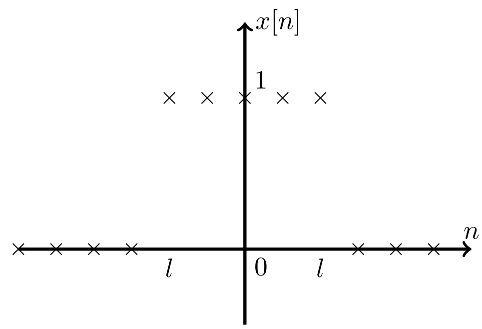
1.4.1 Gradino

$$x[n] = u[n] := \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



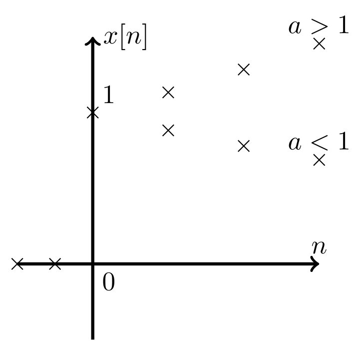
Non avendo un segnale finestra a tempo discreto, essa può essere descritta come la differenza di due gradini discreti. Una finestra di base $2l$ nel discreto si esprime come:

$$u[n+l] - u[n-(l+1)]$$



1.4.2 Esponenziale Unilatero

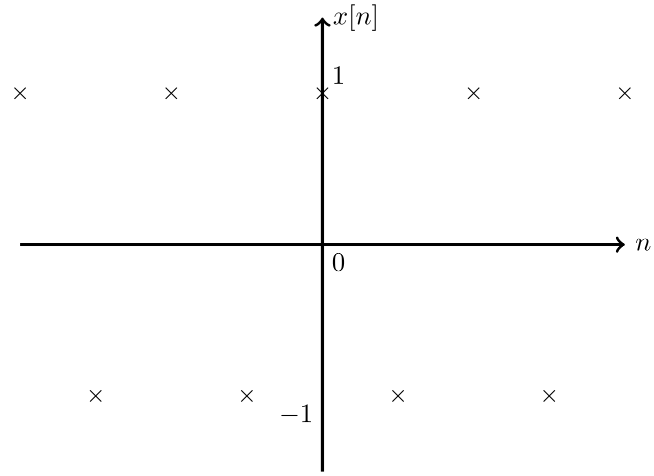
$$x[n] = a^n u[n]$$



1.4.3 Coseno

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n)$$

Il segnale è periodico nel discreto, solo se la frequenza è un numero intero $f_0 \in \mathbb{Z}$.



1.4.4 Impulso Matematico

L'impulso matematico o delta di Dirac, nel discreto assume solo un valore di 1 per $n = 0$.

$$\delta[n] := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Questo segnale presenta varie proprietà utili:
L'area della delta è unitaria, poiché presenta un unico campione per $n = 0$ di valore 1:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

Il prodotto di un qualsiasi segnale $x[n]$ per la delta equivale al valore del segnale in 0 per la delta. Poiché l'unico valore della delta diverso da zero si trova in $n = 0$ e vale 1, per cui estra dal segnale x il campione in posizione $n = 0$. Questo campione viene moltiplicato per la delta, poiché non è un segnale continuo, ma si presenta solo in quell'istante. Questa caratteristica viene chiamata propietà di campionamento della delta di Dirac:

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$$

Questo campione può essere estratto ad un arbitrario valore m:

$$x[n] \cdot \delta[n-m] = x[m] \cdot \delta[n-m]$$

L'area del prodotto di un qualsiasi segnale $x[n]$ per la delta risulta nel valore del segnale in 0, ciò si dimostra tramite la proprietà di campionamento della delta:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[0] \cdot \delta[n] = x[0] \cancelto{1}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]} = x[0]$$

Invertendo la proprietà di campionamendo, ovvero partendo da tutti i campioni di un segnale $x[n]$ e sommandoli tra di loro, è possibile ottenere il segnale originario:

$$\cdots + x[-N]\delta[n+N] + \cdots + x[0]\delta[n] + \cdots + x[N]\delta[n-N] + \cdots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]\delta[n-i] = x[n]$$

La convoluzione di un qualsiasi segnale $x[n]$ per la delta risulta nel segnale x stesso:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-k] = x[n] \cancelto{1}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k]}$$

La delta può essere rappresentata come la differenza tra due gradini, considerando un unico campione in posizione m:

$$\delta[n-m] = u[n-m] - u[n-(m+1)]$$

Analogamente un gradino può essere espresso come una sommatoria di delta traslate ognuna di un diverso fattore. Questa relazione viene espressa in forma canonica come:

$$u[n-m] = \sum_{n=-\infty}^{-m} \delta[n+1]$$

1.4.5 Energia e Potenza

L'energia di un segnale tempo discreto si calcola come:

$$E_x := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

La potenza di un segnale tempo discreto è defintia come:

$$P_x := \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \right)$$

La potenza per segnali periodici tempo discreti si ottiene mediante:

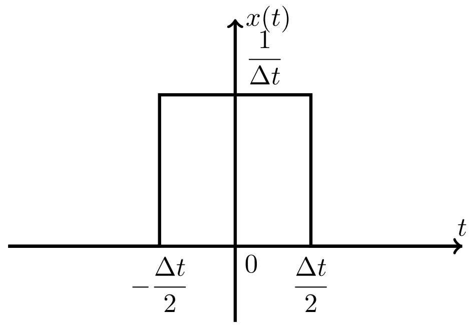
$$P_x := \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |x[n]|^2$$

Dove M è il periodo del segnale

1.5 Impulso Tempo Continuo

Per definire l'impulso o delta di Dirac nel tempo continuo, si parte da un segnale finestra con una base Δt e ampiezza inverso della base:

$$x(t) = \frac{1}{\Delta t} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta t} \right)$$



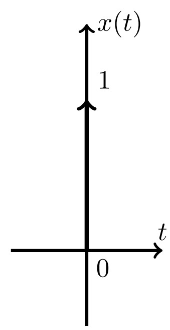
Al diminuire di Δt, la base si restringe, mentre l'ampiezza del segnale aumenta, ma complessivamente l'area del segnale rimane unitaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta t}{2}+\frac{\Delta t}{2}\right) = 1$$

Viene definito l'impulso o dela di Dirac come il limite di questa finestra per Δt che tende ad un valore infinito:

$$\delta(t) := \lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$$

Viene rappresentata graficamente come una freccia di altezza unitaria, poiché non è una funzione ma un funzionale. Si tratta in telecomunicazioni come un segnale qualuneque.



Possiede delle proprietà analoghe alla delta nel tempo discreto:

L'integrale sui reali della delta è unitario in base alla sua definizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Il prodotto di un qualsiasi segnale per la delta equivale al valore del segnale in 0 moltiplicato per l'impulso, poiché per tutti gli altri valori nel tempo questo prodotto è nullo. Proprietà analoga a quella del campionamento per il continuo:

$$x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)$$

Questa proprietà può essere estesa considerando un impulso traslato di un fattore τ:

$$x(t) \cdot \delta(t-\tau) = x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$$

Segue da quest'ultima che l'integrale del prodotto di un segnale qualunque $x(t)$ per l'impulso equivale al valore del segnale x in 0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(0) \cdot \delta(t) dt = x(0) \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt} = x(0)$$

La convoluzione di un qualsiasi segnale $x(t)$ con l'impulso risulta nel segnale originario $x(t)$, per l'inverso della proprietà precedente:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = x(t) \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau} = x(t)$$

Poiché il segnale finestra può essere espresso come la differenza tra due gradini, allora anche la definizione dell'impulso può essere espressa come tale:

$$\delta(t) := \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \left(u\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right)$$

L'impulso corrisponde alla derivata rispetto al tempo del gradino. Analogamente il gradino corrisponde alla funzione integrale dell'impulso:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

L'impulso è una funzione pari:

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

L'impulso scalato di un fattore a corrisponde all'impulso non scalato fratto il modulo del fattore a, se negativo. Questa proprietà di scala si dimostra considerando la definizione dell'impulso.

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{a}$$

L'impulso è un segnale né di energia né di potenza. I funzionali, come l'impulso, vengono descritti in base agli effetti che provocano sulle funzioni

1.6 Convoluzione Tempo Continuo

La convoluzione rappresenta un'operazione tra due segnali, generandone uno nuovo. L'operazione si indica con il simbolo $*$:

$$x(t) * y(t) = z(t)$$

La convoluzione tra due segnali tempo continui produce un altro segnlae tempo continuo. La convoluzione risultante è sempre un segnale continuo:

$$z(t) = x(t) * y(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \tag{1.6.1}$$

Il segnale convoluzione è una funzione nella stessa variabile dei segnali convoluti, questa variabile di uscita compare all'interno dell'integrale. Il segnale conoluzione rappresenta l'area sottesa dal prodotto tra il segnale x ed il segnale y, ribaltato e traslato di un fattore t, per ogni istante di tempo t. La convoluzione è un'operazione commutativa, per cui è arbitraria la scelta di quale dei due segnali debba traslare.

Si rappresenta il segnale x originiario rispetto alla variabile τ, al di sotto si grafica il segnale y ribaltato e traslato di un fattore t, per individuare gli intervalli dove il prodotto tra i due segnali è nullo. La maggior parte dei segnali reali si attenuano nel tempo, per cui avranno un valore solo per un intervallo finito di valori, ed in questi intervalli la convoluzione restituisce un valore non nullo. Anche nei segnali puramente matematici, spesso presentano valori finiti non nulli solo per certi intervalli di tempo. Si considerano tutti i possibili casi di sovrapposizione, quindi di prodotto non nullo, tra i due segnali per ottenere il segnale convoluzione in forma analitica, da ricordare che la convoluzione è un segnale continuo per cui non possono essere presenti discontinuità nella sua espressione in forma anlitica.

Vengono forniti alcuni esempi di convoluzioni:

1.6.1 Esponenziale Unilatero per Gradino

Si considera $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$z(t) = e^{-\alpha t} u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Poiché è presente un gradino nell'integrale, la convoluzione assumerà valori nulli per $t < 0$, ciò si può anche individure graficamente, poiché per gli stessi valori i due graficie del gradino e delò'esponenziale unilatero non si sovrappongono. All'aumentare del valore di t, il valore del segnale $z(t)$ aumenta sempre più lentamente, poiché i contributi dell'esponenziale vanno diminuendo. Poiché entrambi i gradini nell'integrale assumono valori unitari per $t > 0$, il valore del segnale in questo intervallo dipende dalla funzione integrale dell'esponenziale, da 0 al valore di t corrente:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau & t \geq 0 \end{cases}$$

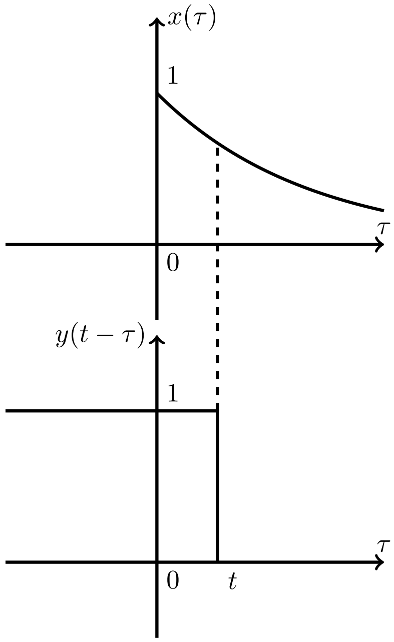
Risolvendo l'integrale si ottiene:

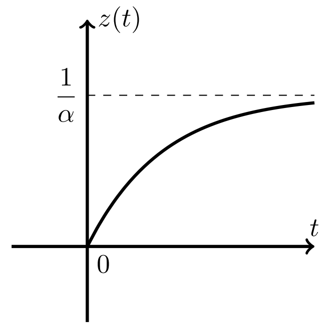
$$\int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \left| -\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \right|_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

Per cui il segnale convoluzione in forma analitica risulta:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & t \geq 0 \end{cases}$$

Questo segnale tende asintoticamente a $1/\alpha$ per $t \to +\infty$.





1.6.2 Autoconvoluzione di Un Esponenziale Unilatero

$$z(t) = e^{-\alpha t}u(t) * e^{-\alpha t}u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

Poiché sono unilateri, non si sovrapporrano per $t < 0$, quindi la convoluzione è nulla per quei valori di tempo. Può essere spiegato tramite la prorpietà del gradino di cambiare i limiti di integrazione, per cui invece di integrare da $-\infty$ a $+\infty$, si integra nell'intervallo dove si trova il gradino $u(\tau)$, ovvero da 0 a $+\infty$:

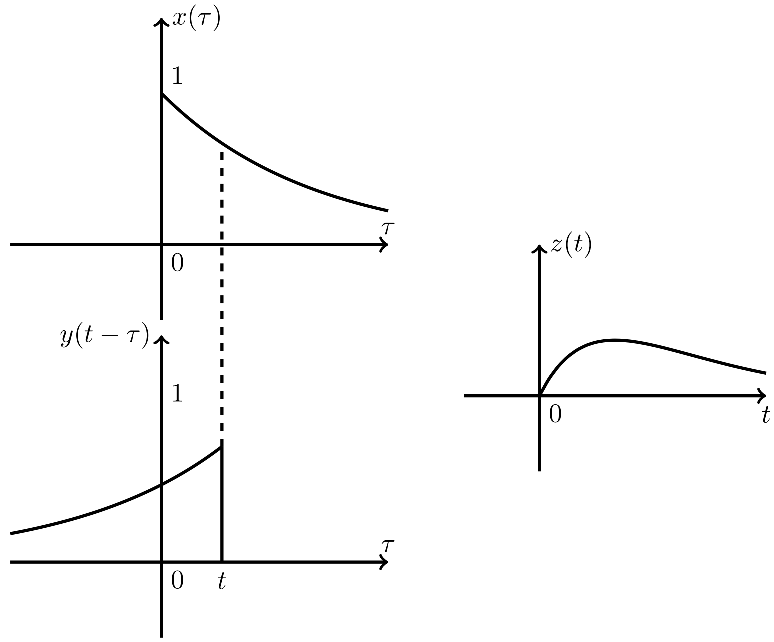
$$z(t) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t-\tau)d\tau = e^{-\alpha t}\int_{0}^{+\infty} u(t-\tau)d\tau$$

L'area sottesa da un gradino ribaltato e traslato di un fattore $t > 0$ da 0 a $+\infty$ equivale all'area di un rettangolo di altezza 1 e di base t:

$$z(t) = e^{-\alpha t}\int_{0}^{t} d\tau = te^{-\alpha t}$$

In forma analitica risulta:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ te^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$$



1.6.3 Convoluzione tra Due Finestre

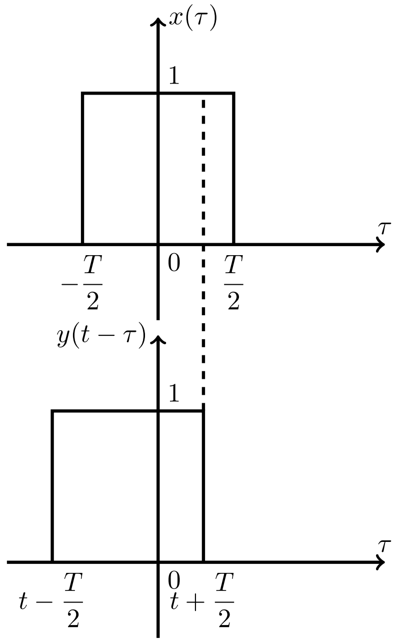
Si considerano due casi, dove le due finestra hanno base uguale, ed un caso dove hanno base differente. Si considera il caso $T_1 = T_2$:

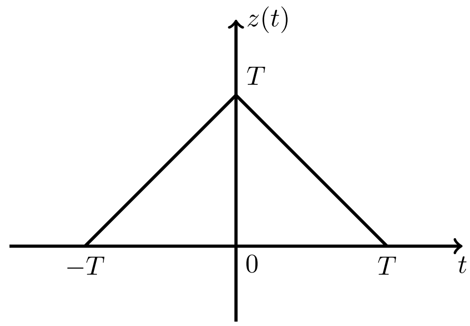
$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La convoluzione assume valori nulli quando non si sovrappongono, ovvero per un valore $t + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \rightarrow t < -T$. L'area sottesa dal prodotto di queste due finestre aumenta linearmente fino a quando non si sovrappongono per $t = 0$, dove l'area assume valore massimo $T \cdot 1$, dopo il quale decresce linearmente fino a $t = T$. Se una delle due fosse stata traslata di un fattore t_0, l'intera convoluzione sarebbe stata traslata dello stesso fattore. Da notare che la convoluzione di due segnali pari genera un segnale pari.

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \displaystyle\int_{-T}^{t} d\tau & -T \leq t < 0 \\ \displaystyle\int_{t}^{T} d\tau & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -T \wedge t > T \\ T - |t| & -T \leq t < T \end{cases} = T\,\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La convoluzione tra due finestre di base uguale risulta in un triangolo di base doppia $2T$, e scalata di un fattore pari alla base T.





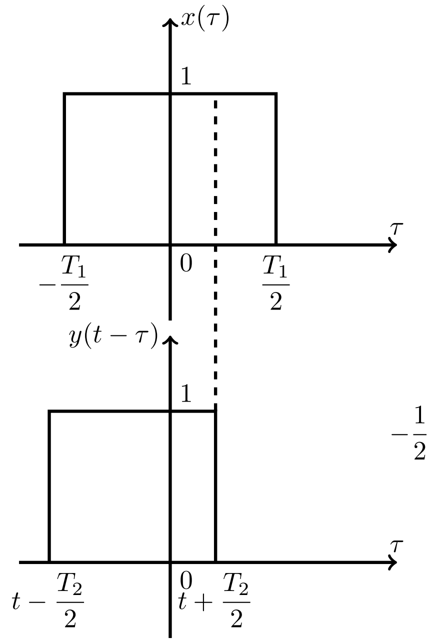
Si considera ora il caso dove le due finestre hanno basi $T_1 > T_2$:

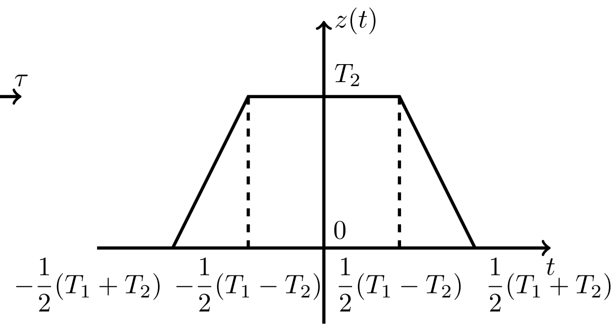
$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Poiché le due finestre sono simmetriche, si analizzano solo i casi per $t < 0$, per poi aggiungere per simmetria l'equazione analitica per $t \geq 0$. Le due finestre non si sovrappongono per $t + \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \rightarrow t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, per cui in quell'intervallo la convoluzione assume valore nullo. Il valore della convoluzione aumenta linearmente fino a quando la finestra più piccola trasla fino ad essere completamente interna alla finestra di base T_1 per un valore $t - \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \rightarrow t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2)$. Quando le due finestre si sovrappongono, il valore della convoluzione è costante, e corrisponde all'area di un rettangolo di base, base della finestra più piccola T_2 ed altezza unitaria $T_2 \cdot 1$ fino a raggiungere t_0. Ribaltando questo segnale ottenuto si ottiene il segnale per valori $t \geq 0$:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -\dfrac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}(T_1+T_2)}^{t} d\tau & -\frac{1}{2}(T_1+T_2) \leq t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \\ T_2 & -\frac{1}{2}(T_1-T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \\ -\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}(T_1+T_2)}^{t} d\tau & \frac{1}{2}(T_1-T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ 0 & t \geq \dfrac{1}{2}(T_1 + T_2) \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -\dfrac{1}{2}(T_1 + T_2) \wedge t \geq \dfrac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ \dfrac{1}{2}(T_1+T_2) - |t| & -\frac{1}{2}(T_1+T_2) \leq t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \wedge \frac{1}{2}(T_1-T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ T_2 & -\dfrac{1}{2}(T_1-T_2) \leq t < \dfrac{1}{2}(T_1 - T_2) \end{cases}$$





Il grafico di questa convoluzione rappresenta un trapezio di altezza T_2, base maggiore $T_1 + T_2$ e base minore $T_1 - T_2$ Si nota come l'autoconvoluzione di due finestre di base uguali rappresenta un caso speciale di questo trapezio, avente base minore nulla $T - T = 0$ e base doppia rispetto alla finestra $T + T = 2T$, ciò equivale ad un triangolo di altezza T e base $2T$.

1.6.4 Convoluzione tra Due Gaussiane

Date due gaussiane definite dai parametri α_1 e α_2, con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$, si vuole determinare la convoluzione tra questi due segnali:

$$z(t) = e^{-\alpha_1 t^2} * e^{-\alpha_2 t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_1 \tau^2} e^{-\alpha_2 (t-\tau)^2} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_1 \tau^2} e^{-\alpha_2 (t^2 - 2t\tau + \tau^2)} d\tau$$

$$e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau^2} e^{2\alpha_2 t \tau^2} d\tau = e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\left[\tau^2 - 2\alpha_2 \frac{t\tau}{\alpha_1+\alpha_2}\right]} d\tau$$

Si somma e si sottrae il fattore $\left(\dfrac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2$ nell'esponenziale all'interno dell'integrale:

$$e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\left[\tau^2 - 2\alpha_2 \frac{t\tau}{\alpha_1+\alpha_2} + \left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2\right]} d\tau$$

$$e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\left[\left(\tau - \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2\right]} d\tau$$

$$e^{-\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\left[\tau - \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right]^2} d\tau$$

Si applica la sostituzione $T = \sqrt{\alpha_1+\alpha_2}\left(\tau + \dfrac{\alpha_2 t}{\alpha_1+\alpha_2}\right)$:

$$e^{-\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T^2}}{\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}} dT = \frac{e^{-\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)t^2}}{\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T^2} dT$$

Il fattore integrale corrisponde all'integrale di Gauss, precedentemente discusso, che risulta su tutti i reali in un area di $\sqrt{\pi}$:

$$e^{-\alpha_1 t^2} * e^{-\alpha_2 t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1+\alpha_2}} e^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}t^2}$$

Esprimendo le due gaussiane in forma normalizzata, risulta che la varianza della convoluzione equivale alla somma delle varianze delle due gaussiane $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \tag{1.6.2}$$

1.6.5 Proprietà

La convoluzione è un'operazione commutativa:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \to^{T=t-\tau}\to \int_{-\infty}^{+\infty} y(T) x(t-T) dT = y(t) * x(t)$$

Vale la proprietà distributiva:

$$(x_1(t) + x_2(t)) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(\tau) + x_2(\tau))y(t-\tau)d\tau$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)y(t-\tau)d\tau = x_1(t) * y(t) + x_2(t) * y(t)$$

Se una dei due segnali, o entrambi, convoluti tra di loro sono traslati allora il segnale convoluzione risultante è traslato della traslazione complessiva dei due segnali originali:

$$x(t-t_{x0}) * y(t-t_{y0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_{x0})y(t-(\tau + t_{y0}))d\tau,\ T = \tau - t_{x0} \rightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(T)y((t-t_{x0}-t_{y0}) + T)dT = z(t-t_{x0}-t_{y0})$$

1.6.6 Convoluzione di Una Finestra per Segnale Periodico

Per semplificare i calcoli, si considera il segnale coseno, ma le proprietà ottenuta da quest'operazione valgono per ogni funzione periodica, non attenuata nel tempo.

$$z(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_2}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau}{T_1}\right) d\tau$$

La funzione è periodica per cui non è necessario valutare quando la convoluzione è nulla. Il prodotto tra i due segnali è non nullo per valori di τ compresi tra $\frac{T_1}{2} - t$ e $-\frac{T_1}{2} - t$:

$$z(t) = \int_{-\frac{T_1}{2}-t}^{\frac{T_1}{2}-t} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_2}\right) d\tau = \frac{T_2}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{T_2}\right)\Bigg|_{-\frac{T_1}{2}-t}^{\frac{T_1}{2}-t}$$
$$\frac{T_2}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi(t+\frac{T_1}{2})}{T_2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(t-\frac{T_1}{2})}{T_2}\right)\right]$$

Per la seconda formula di prostaferesi si ottiene:

$$z(t) = \frac{T_2}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}\frac{T_1}{2}\right) = \left[\frac{T_2}{2\pi}\sin\left(\pi\frac{T_1}{T_2}\right)\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right)$$

Se il periodo del coseno è uguale alla base della finestra, il seno è sempre nullo, quindi anche la convoluzione è nulla per ogni valore di t. I fattori invarianti nel tempo si possono esprimere come una costante A, ampiezza del segnale ottenuto:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right)$$

Il risultato della convoluzione è il segnale periodico originario moltiplicato per un fattore costante, che dipende dal periodo T_2 e dalla base del segnale finestra $_1$. Il segnale di convoluzione quindi oscilla come la funzione periodica di partenza. In generale il risultato della convoluzione di una finestra con una funzione periodica è un fattore A moltiplicato per il segnale originario:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * y(t) = Ay(t)$$

Questa proprietà si indica come un'operazione a media mobile, che amplifica o riduce l'ampiezza di un segnale periodico, oppure lo rende nullo.

1.6.7 Convoluzione Tempo Discreto

$$x[n] * y[n] := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

Nel discreto, quando si applica la convoluzione, il numero di campioni totali della convoluzione è uguale alla somma dei campioni dei due segnali meno uno. Per le convoluzioni a tempo continuo si usa la continuità, per quelle a tempo discreto il numero dei campioni se sono convoluzini valide. Per le convoluzioni a tempo discreto valgono le proprietà commutiativa e distributiava. I singoli campioni di un segnale nel discreto possono essere rappresentati come una costante che moltiplica un impulso traslato di un certo fattore:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} x_k \delta[n-k]$$

Ciò è possibile per ogni segnale discreto, per cui la convoluzione di due segnali discreti si può esprimere come:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} x_i \delta[k-i] \sum_{j=1}^{N} y_j \delta[n-k-j] \right]$$

Una convoluzione quindi rappresenta una media tra una serie di campioni, può essere estesa a segnali multimensionali come delle immagini, dove la convoluzione viene usata negli algoritmi di compressione dell'immagini per diminuire il costo della trasmissione del segnale.

1.7 Correlazione

La correlazione è un'operazione simile alla convoluzione, calcolabile come una convoluzione. Le convoluzioni vengono usate per modellare l'effetto del passaggio di un segnale attraverso un sistema, ciò corrisponde al processamento di un segnale. Alcuni di questi sistemi corrispondono nel dominio della frequenza in filtri.

Una correlazione si applica quando due segnali sono simili tra loro, viene definita come un segnale continuo nel dominio del tempo:

$$R_{xy}(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)d\tau \tag{1.7.1}$$

VIene definito R_{xy} il fattore di correlazione tra i due segnali x e y. La correlazione al contrario della convoluzione non commuta:

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)d\tau \rightarrow T = t+\tau$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(T)y^*(-t+T)dT = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T)y(-t+T)\right]^* = R^*_{yx}(-t)$$

Il fattore di convoluzione $R_{xy}(t)$ tra due segnali x e y corrisponde al complesso coniugato del fattore di convoluzione ribaltato dei segnali y e x $R^*_{yx}(-t)$, quindi la correlazione è una proprietà anticommutativa. La correlazione tra due segnali x e y equivale alla convoluzione dei segnli y^* e x

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)d\tau$$
$$y^*(-t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(-(t-\tau))d\tau \rightarrow T = \tau - t$$
$$-\int_{+\infty}^{-\infty} x(t+T)y^*(T)dT = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+T)y^*(T)dT = R_{xy}(t)$$
$$x(t) \otimes y(t) = y^*(-t) * x(t)$$

Quando si analizza la correlazione tra due segnali x e y, uno dei quali pari $y(t) = y(-t)$ e reale $y \in \mathbb{R}$, la correlazione tra di loro è uguale alla convoluzione tra di loro:

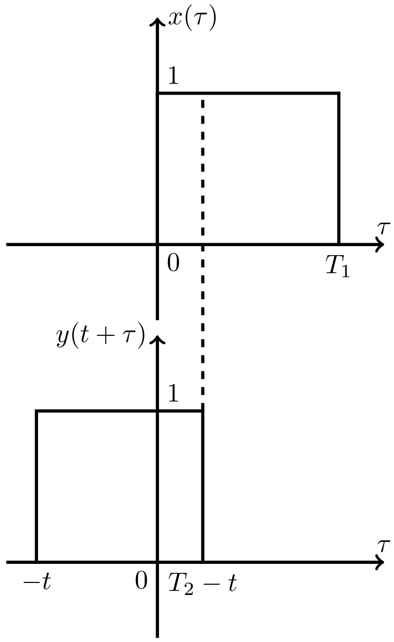
$$x(t) \otimes y(t) = y^*(-t) * x(t) = y(-t) * x(t) = x(t) * y(t)$$

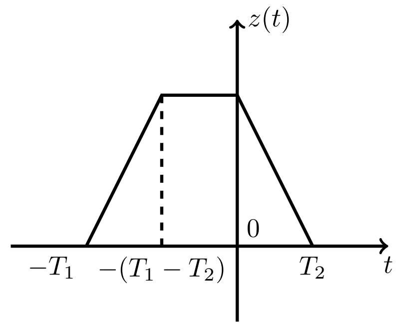
1.7.1 Correlazione tra Due Finestre

$$\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$$

Si considera la prima finestra di base maggiore $T_1 > T_2$. Per facilitare il calcolo si esprime come una convoluzione. I due segnali non si sovrappongono per valori $T_2 - t < 0 \rightarrow t \geq T_2$, per cui la correlazione è nulla. Cominciano a sovrapporsi da $t < T_2$ fino a quando la finestra più piccola non si trova interamente nella prima finestra per $-t < 0 \rightarrow t \geq 0$. La finestra più piccola si trova interamente in quella più grande, risultando in un'area di T_2, fino ad un valore $T_2 - t < T_1 \rightarrow t \geq -(T_1 - T_2)$. L'area comincia a scendere fino ad un valore $-t < T_1 \rightarrow t \geq -T_1$. Per valori più piccoli di $-T_1$ le due finestre non si sovrappongono e la correlazione risulta nulla.

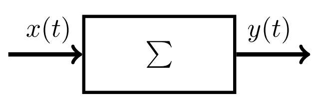
$$R_{xy}(t) = \begin{cases} 0 & t \geq T_2 \\ \int_t^{T_2} dt & 0 \leq t < T_2 \\ T_2 & -(T_1 + T_2) \leq t < 0 \\ \int_{-T_1}^{t} dt & -T_1 \leq t < -(T_1 - T_2) \\ 0 & t < -T_1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -T_1 \wedge t \geq T_2 \\ T_1 + t & T_1 \leq t < -(T_1 - T_2) \\ T_2 & -(T_1 - T_2) \leq t < 0 \\ T_2 - t & 0 \leq t < T_2 \end{cases}$$





1.8 Sistema Ingresso-Uscita

Un sistema di ingress-uscita applica determinate trasformazioni al segnale x in entrata, per ottenere un altro segnale y in uscita, questo segnale è un funzionale del segnale di ingresso x. Questa trasformazione si basa su dei parametri interni $\sum$ al sistema per cui passa l'ingresso.

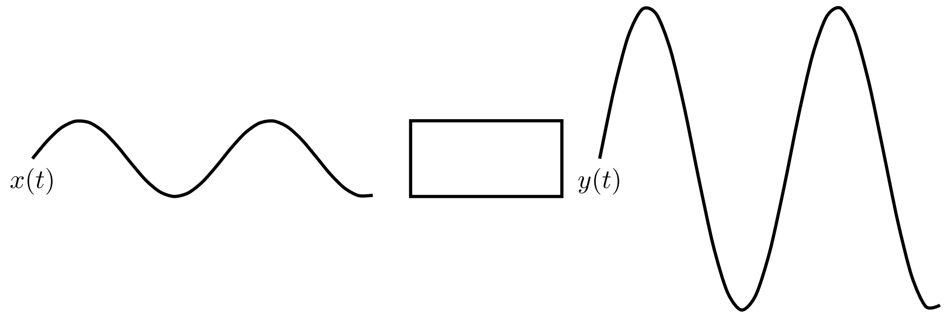


Un sistema ingresso-uscita si definisce lineare, se ad una combinazione lineare degli ingressi, corrisponde una combinazione lineare delle uscite:

$$x(t) = a_1(t)x_1(t) + \cdots + a_n(t)x_n(t) \to y(t) = b(t)_1 y_1(t) + \cdots + b_n(t)y_n(t)$$

Un amplificatore rappresenta un sistema lineare, poiché moltiplica di un fattore A un segnale in entrata:

$$\begin{gathered} x_1(t) \to y_1(t) = Ax_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) = Ax_2(t) \\ ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t) = A(ax_1(t) + bx_2(t)) \end{gathered}$$



Un sistema lineare non distorce gli ingressi. Un sistema che restituisce il segnale originario sommato per una costante A non è lineare:

$$x(t) \to y(t) = x(t) + A$$
$$x_1(t) + x_2(t) \to y(t) = x_1(t) + x_2(t) + A \neq y_1(t) + y_2(t)$$

Un sistema tempo invariante o permanente, non dipende da quando viene inserito il segnale in entrata:

$$x(t) \to y(t)$$
$$x(t-\tau) \to y(t-\tau)$$

La linearità e la permanenza sono due proprietà indipendenti tra di loro. Un sistema può essere lineare e non pemanente e viceversa, oppure nessuno delle due. L'operazione di modulazione di un segnale, il prodotto tra l'entrata ed una funzione sinusoidale, è un sistema lineare e non permanente:

$$x(t) \to y(t) = x(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$
$$x(t-\tau) \to y(t-\tau) = x(t-\tau) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \neq x(t-\tau) \cos\left(\frac{2\pi (t-\tau)}{T}\right)$$

Per cui dipende dall'istante di tempo quando viene inserito il segnale.

La linearità e la permanenza sono due proprietà fondamentali per cui un sistema si identifica come filtro. L'uscita di un filtro dipende solo da una funzione $h(t)$, chiamata risposta impulsiva, e si ottiene mediante la convoluzione tra l'entrata e quest'ultima:

$$x(t) \to y(t) = x(t) * h(t)$$

Si chiama risposta impulsiva, poiché se è presente un impulso in entrata, l'uscita è la funzione $h(t)$ stessa, per la proprietà della convoluzione di un impulso:

$$\delta(t) \to y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

Si considera:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(T)\delta(\tau - T)dt\right) h(t-\tau)d\tau$$

Invertendo l'ordine di integrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(T)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - T)h(t-\tau)d\tau\right)dT = \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)h(t-T)dT = x(t) * h(t)$$

Per cui l'uscita di un filtro corrisponde alla convoluzione tra l'entrata e la sua risposta impulsiva.