

Esercizi Svolti di Fondamenti di Telecomunicazioni

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su

<https://github.com/00Darxk/Fondamenti-di-Telecomunicazioni>

Indice

1	Convoluzioni, Correlazioni e Sistemi Ingresso-Uscita	1
2	Serie di Fourier	10
3	Trasformata di Fourier	16
4	Trasformata di Fourier Tempo Discreto	27
5	Campionamento	30
6	Fenomeni Aleatori	38

1 Convoluzioni, Correlazioni e Sistemi Ingresso-Uscita

Calcolare la convoluzione tra un esponenziale unilatero ed un gradino, Si considera $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$z(t) = e^{-\alpha t} u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Poiché è presente un gradino nell'integrale, la convoluzione assumerà valori nulli per $t < 0$, ciò si può anche individuare graficamente, poiché per gli stessi valori i due grafici del gradino e dell'esponenziale unilatero non si sovrappongono. All'aumentare del valore di t , il valore del segnale $z(t)$ aumenta sempre più lentamente, poiché i contributi dell'esponenziale vanno diminuendo. Poiché entrambi i gradini nell'integrale assumono valori unitari per $t > 0$, il valore del segnale in questo intervallo dipende dalla funzione integrale dell'esponenziale, da 0 al valore di t corrente:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau & t \geq 0 \end{cases}$$

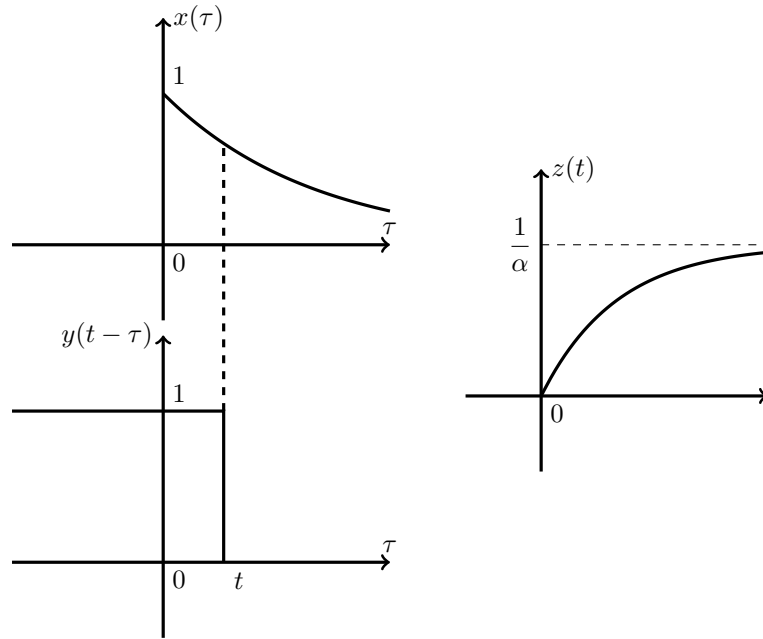
Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$\int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau = \left| -\frac{e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \right|_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

Per cui il segnale convoluzione in forma analitica risulta:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Questo segnale tende asintoticamente a $1/\alpha$ per $t \rightarrow +\infty$.



Calcolare l'autoconvoluzione di un esponenziale unilatero

$$z(t) = e^{-\alpha t} u(t) * e^{-\alpha t} u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

Poiché sono unilateri, non si sovrapporranno per $t < 0$, quindi la convoluzione è nulla per quei valori di tempo. Può essere spiegato tramite la proprietà del gradino di cambiare i limiti di integrazione, per cui invece di integrare da $-\infty$ a $+\infty$, si integra nell'intervallo dove si trova il gradino $u(\tau)$, ovvero da 0 a $+\infty$:

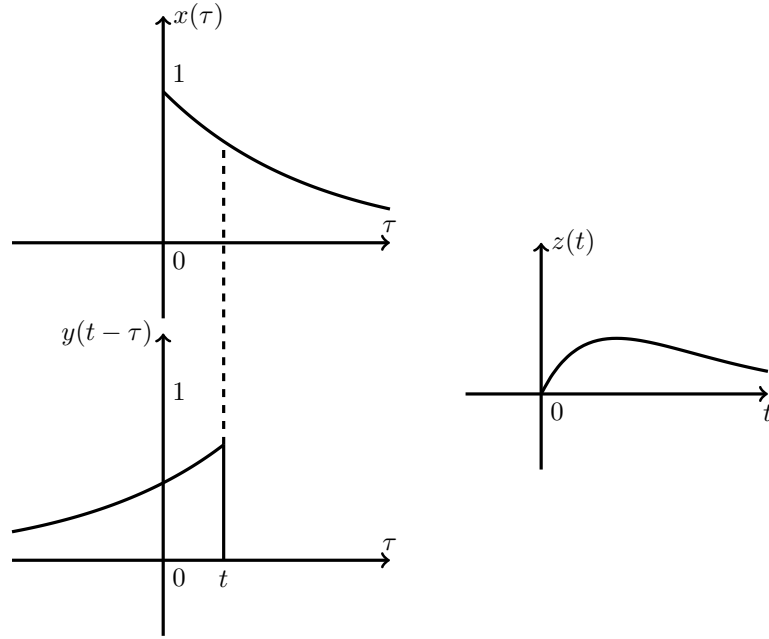
$$z(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t-\tau) d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^{+\infty} u(t-\tau) d\tau$$

L'area sottesa da un gradino ribaltato e traslato di un fattore $t > 0$ da 0 a $+\infty$ equivale all'area di un rettangolo di altezza 1 e di base t :

$$z(t) = e^{-\alpha t} \int_0^t d\tau = t e^{-\alpha t}$$

In forma analitica risulta:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$



Calcolare la convoluzione tra due finestre. Si considerano due casi, dove le due finestra hanno base uguale, ed un caso dove hanno base differente. Si considera il caso $T_1 = T_2$:

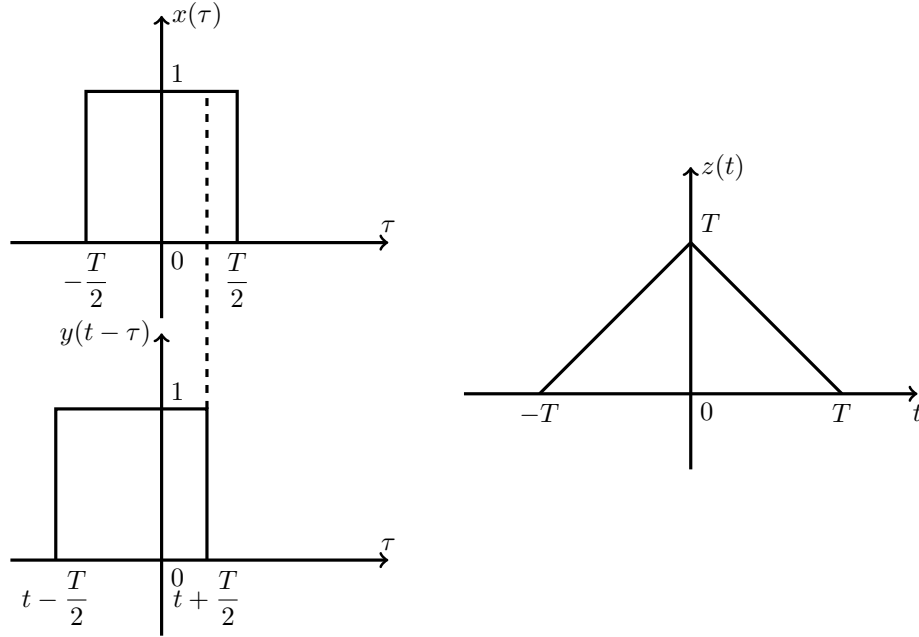
$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La convoluzione assume valori nulli quando non si sovrappongono, ovvero per un valore $t + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \rightarrow t < -T$. L'area sottesa dal prodotto di queste due finestre aumenta linearmente fino a quando non si sovrappongono per $t = 0$, dove l'area assume valore massimo $T \cdot 1$, dopo il quale decresce linearmente fino a $t = T$. Se una delle due fosse stata traslata di un fattore t_0 , l'intera convoluzione sarebbe stata traslata dello stesso fattore. Da notare che la convoluzione di due segnali pari genera un segnale pari.

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \int_{-T}^t d\tau & -T \leq t < 0 \\ \int_t^T d\tau & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -T \wedge t > T \\ T - |t| & -T \leq t < T \end{cases}$$

$$z(t) = T \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (3)$$

La convoluzione tra due finestre di base uguale risulta in un triangolo di base doppia $2T$, e scalata di un fattore pari alla base T .



Si considera ora il caso dove le due finestre hanno basi $T_1 > T_2$:

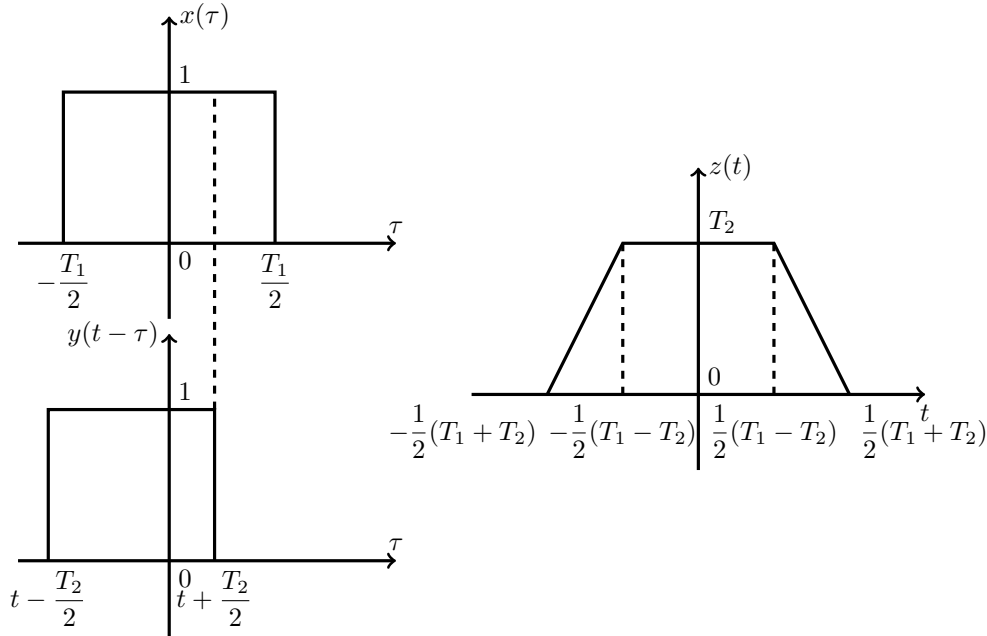
$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Poiché le due finestre sono simmetriche, si analizzano solo i casi per $t < 0$, per poi aggiungere per simmetria l'equazione analitica per $t \geq 0$. Le due finestre non si sovrappongono per $t + \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \rightarrow t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, per cui in quell'intervallo la convoluzione assume valore nullo. Il valore della convoluzione aumenta linearmente fino a quando la finestra più piccola trasla fino ad essere completamente interna alla finestra di base T_1 per un valore $t - \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \rightarrow t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2)$. Quando le due finestre si sovrappongono, il valore della convoluzione è costante, e corrisponde all'area di un rettangolo di base, base della finestra più piccola T_2 ed altezza unitaria $T_2 \cdot 1$ fino a

raggiungere t_0 . Ribaltando questo segnale ottenuto si ottiene il segnale per valori $t \geq 0$:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ \int_{-\frac{1}{2}(T_1+T_2)}^t d\tau & -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \leq t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \\ T_2 & -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \\ -\int_{-\frac{1}{2}(T_1+T_2)}^t d\tau & \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ 0 & t \geq \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \wedge t \geq \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - |t| & -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \leq t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \wedge \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ T_2 & -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \end{cases} \quad (4)$$



Il grafico di questa convoluzione rappresenta un trapezio di altezza T_2 , base maggiore $T_1 + T_2$ e base minore $T_1 - T_2$. Si nota come l'autoconvoluzione di due finestre di base uguali rappresenta un caso speciale di questo trapezio, avente base minore nulla $T - T = 0$ e base doppia rispetto alla finestra $T + T = 2T$, ciò equivale ad un triangolo di altezza T e base $2T$.

Calcolare la convoluzione tra i segnali x e y :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= t \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) \\
 y(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right) \\
 z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \operatorname{rect}\left(\frac{\tau-T}{2T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau+T}{2T}\right) d\tau \\
 z(t) &= \begin{cases} 0 & t < -2T \\ \int_0^{t+2T} \tau d\tau & -2T \leq t < 0 \\ \int_t^{2T} \tau d\tau & 0 \leq t < 2T \\ 0 & t \geq 2T \end{cases} \\
 z(t) &= \begin{cases} 0 & t < -2T \wedge t \geq 2T \\ \frac{1}{2}t^2 + 2Tt + 2T^2 & -2T \leq t < 0 \\ 2T^2 - \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 2T \end{cases} \tag{5}
 \end{aligned}$$

Calcolare la convoluzione tra queste due finestre:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z(t) * y(t) \\
 x(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t-3T}{4T}\right) \\
 y(t) &= -\operatorname{rect}\left(\frac{t+2T}{2T}\right) \\
 z(t) &= \begin{cases} 0 & t < -2T \\ -\int^{3T+t} -T d\tau & -2T \leq t < 0 \\ -2T & 0 \leq t < 2T \\ -\int_{T+t}^{5T} d\tau & 2T \leq t < 4T \\ 0 & t \geq 4T \end{cases} \\
 z(t) &= \begin{cases} 0 & t < -2T \wedge t \geq 4T \\ -2T - t & -2T \leq t < 0 \\ -2T & 0 \leq t < 2T \\ -4T + t & 2T \leq t < 4T \end{cases} \tag{6}
 \end{aligned}$$

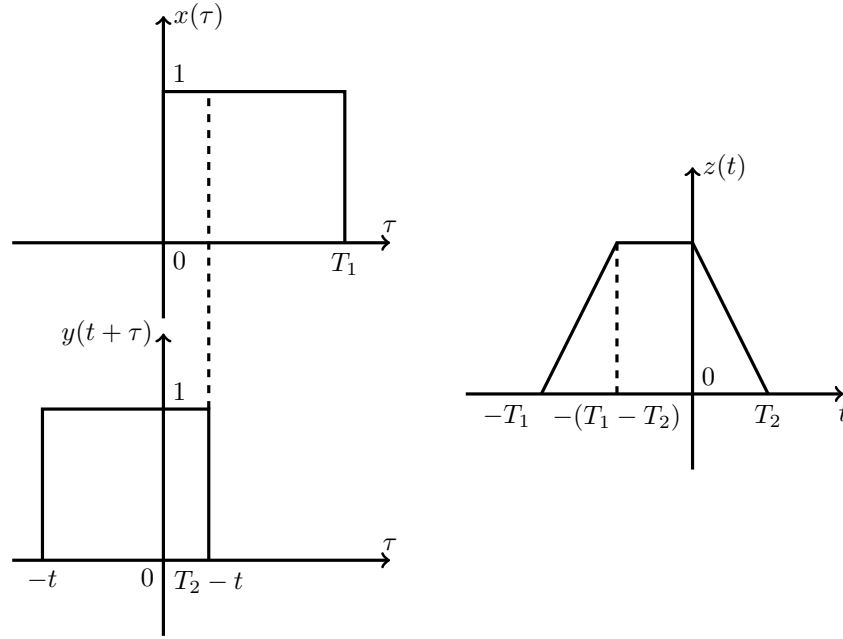
Calcolare la correlazione tra due finestre:

$$\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$$

Si considera la prima finestra di base maggiore $T_1 > T_2$. Per facilitare il calcolo si esprime come una convoluzione. I due segnali non si sovrappongono per valori $T_2 - t < 0 \rightarrow t \geq T_2$, per cui la correlazione è nulla. Cominciano a sovrapporsi da $t < T_2$ fino a quando la finestra più piccola non si trova interamente nella prima finestra per $-t < 0 \rightarrow t \geq 0$. La finestra più piccola si trova interamente in quella più grande, risultando in un'area di T_2 , fino ad un valore $T_2 - t < T_1 \rightarrow t \geq -(T_1 - T_2)$. L'area comincia a scendere fino ad un valore $-t < T_1 \rightarrow t \geq -T_1$. Per valori più piccoli di $-T_1$ le due finestre non si sovrappongono e la correlazione risulta nulla.

$$R_{xy}(t) = \begin{cases} 0 & t \geq T_2 \\ \int_t^{T_2} dt & 0 \leq t < T_2 \\ T_2 & -(T_1 + T_2) \leq t < 0 \\ \int_{-T_1}^t dt & -T_1 \leq t < -(T_1 - T_2) \\ 0 & t < -T_1 \end{cases}$$

$$R_{xy}(t) = \begin{cases} 0 & t < -T_1 \wedge t \geq T_2 \\ T_1 + t & T_1 \leq t < -(T_1 - T_2) \\ T_2 & -(T_1 - T_2) \leq t < 0 \\ T_2 - t & 0 \leq t < T_2 \end{cases} \quad (7)$$



Dato il sistema definito dall'equazione y :

$$y(t) = x(t) + 3u(t-1)$$

Si dimostra che non è lineare:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 3u(t-1)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 3u(t-1)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) + 3u(t-1) \neq ay_1(t) + by_2(t)$$

Si dimostra che non è tempo invariante:

$$x(t-\tau) \rightarrow x(t-\tau) + 3u(t-1) \neq y(t-\tau) = x(t-\tau) + 3u(t-\tau-1)$$

Sicuramente non è un filtro. Mentre è causale, poiché il gradino è ritardato, e quindi l'uscita non dipende da valori futuri.

Calcolare l'uscita di un filtro discreto di risposta impulsiva $h[n]$, con un'entrata parametrizzata

$x[n]$:

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] \\
 x[n] &= \cos(2\pi\phi n) \\
 \phi_1 = 0 &\rightarrow x_1[n] = 1 \\
 y_1[n] &= h[n] * x_1[n] = \left[\frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] \right] * x_1[n] \\
 \frac{1}{4}x_1[n+1] + \frac{1}{2}x_1[n] + \frac{1}{4}x_1[n-1] &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \\
 y_1[n] &= 1
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2 = \frac{1}{4} &\rightarrow x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\
 y_2[n] &= \left[\frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] \right] * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\
 \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right) \\
 \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right) &= -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 y_2[n] &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3 = \frac{1}{2} &\rightarrow x_3[n] = \cos(\pi n) \\
 y[n] &= \frac{1}{4}\cos(\pi(n+1)) + \frac{1}{2}\cos(\pi n) + \frac{1}{4}\cos(\pi(n-1)) = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

2 Serie di Fourier

Dato il segnale:

$$x(t) = \left| \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right|$$

Si determinano i coefficienti dell'espansione di Fourier tramite la definizione:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) e^{-i\frac{4\pi kt}{T}} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \left[\cos\left(\frac{4\pi kt}{T}\right) - i \sin\left(\frac{4\pi kt}{T}\right) \right] dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{4\pi kt}{T}\right) dt - i \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{4\pi kt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Poiché è una funzione pari, il primo integrale corrisponde al doppio dell'integrale su solo una metà dell'intervallo, mentre il secondo integrale, essendo una funzione dispari, assume valore nullo su un intervallo simmetrico:

$$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{4\pi kt}{T}\right) dt - i \cdot 0$$

Per le formule di prostaferesi si ottiene una somma di due coseni. Integrandoli separatamente si ottiene:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{4}{T} \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2(2k+1)\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(2k-1)\pi t}{T}\right) dt \\ &= \left[\frac{2}{T} \frac{T}{2(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{2(2k+1)\pi t}{T}\right) + \frac{2}{T} \frac{T}{2(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{2(2k-1)\pi t}{T}\right) \right]_0^{\frac{T}{4}} \\ &= \left[\frac{\sin(2(2k+1)\pi/4)}{(2k+1)\pi} + \frac{\sin(2(2k-1)\pi/4)}{(2k-1)\pi} \right]_0^{\frac{T}{4}} \\ c_k &= \frac{\sin(2(2k+1)\pi/2)}{(2k+1)\pi} + \frac{\sin(2(2k-1)\pi/2)}{(2k-1)\pi} \end{aligned}$$

L'argomento del seno, lo rende tale che assume solo valori pari a ± 1 . Per valori pari di k , il primo seno assume valore di 1, mentre l'altro -1 , accade l'opposto per valori dispari di k . I due seni assumono sempre valori discordi e unitari, quindi si possono esprimere come:

$$c_k = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} (-1)^k \quad (11)$$

Dato un segnale periodico:

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin\left(\frac{2\pi t}{3T}\right)$$

Il primo passaggio nella rappresentazione di Fourier corrisponde all'individuazione del periodo del segnale x . Il periodo della somma di due segnali periodici corrisponde al minimo comune multiplo tra il periodo dei due segnali. In questo caso il periodo del segnale x è $T' = 3T$. Per cui si può riscrivere come:

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{6\pi t}{T'} + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin\left(\frac{2\pi t}{T'}\right) \\ e^{i\left(\frac{6\pi t}{T'} + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{6\pi t}{T'} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{3}{i}e^{i\frac{2\pi t}{T'}} - \frac{3}{i}e^{-i\frac{2\pi t}{T'}}$$

Per confronto diretto si ottengono i seguenti coefficienti:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \forall k \neq \pm 1 \wedge \pm 3 \\ \frac{3}{i} = -3i = -3e^{\frac{\pi}{2}} & k = 1 \\ -\frac{3}{i} = 3i = 3e^{\frac{\pi}{2}} & k = -1 \\ e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & k = 3 \\ e^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & k = -3 \end{cases} \quad (12)$$

Dato un segnale:

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(4\pi t + \phi)$$

Questo segnale ha un periodo $T = 1$. Per confronto diretto si ottengono dei coefficienti:

$$x(t) = \frac{e^{2i\pi t} - e^{-2i\pi t}}{2i} + \frac{e^{i\phi}e^{4i\pi t} + e^{-i\phi}e^{-4i\pi t}}{2}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & \forall k \neq \pm 1 \wedge \pm 2 \\ \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} & k = 1 \\ -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} & k = -1 \\ \frac{e^{i\phi}}{2} & k = 2 \\ \frac{e^{-i\phi}}{2} & k = -2 \end{cases} \quad (13)$$

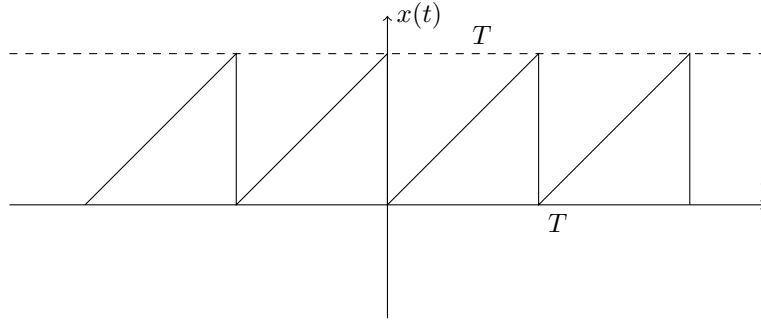
Dato il segnale:

$$x(t) = \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\phi\right)\right)$$

Il coefficiente c_0 è nullo, poiché rappresenta il valor medio del periodo. In questo caso essendo un segnale dispari, il valor medio nel periodo è nullo:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \, dt = 0 \quad (16)$$

Dato il seguente segnale dente di sega:



Si può esprimere come il precedente segnale analizzato, traslato nel tempo e nello spazio di uno stesso fattore $T/2$. La traslazione nello spazio può essere sia un ritardo che un anticipo, poiché si ottiene lo stesso segnale risultante:

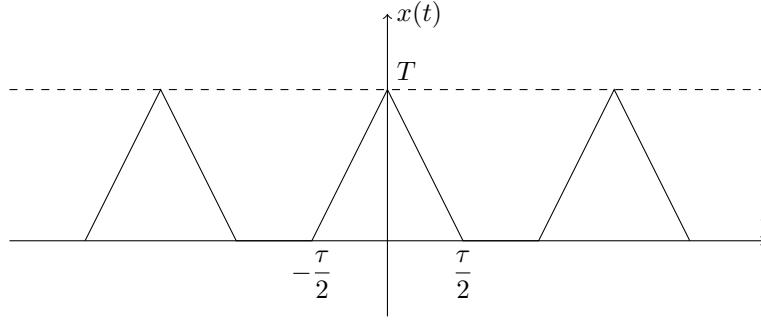
$$y(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2}$$

Si considera in questo caso un ritardo di $T/2$. Conoscendo i coefficienti di c_k , si può attuare una traslazione nel tempo, per ottenere i coefficienti della serie di Fourier del segnale y :

$$d_k = \begin{cases} c_0 + \frac{T}{2} = \frac{T}{2} & k = 0 \\ c_k e^{-i \frac{2\pi k}{T} \frac{T}{2}} = \frac{T}{2i\pi k} (-1)^k e^{-i\pi k} & k \neq 0 \end{cases} \quad (17)$$

Dato un segnale treno di triangoli:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{tri}\left(\frac{2(t - kT)}{\tau}\right)$$



Si calcolano i coefficienti tramite la definizione. Poiché è presente un solo triangolo nell'intervallo di integrazione, si può restringere l'intervallo:

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \text{tri}\left(\frac{2t}{\tau}\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left(1 - \left|\frac{2t}{\tau}\right|\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} -\left|\frac{2t}{\tau}\right| e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt - \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 -\frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right)
 \end{aligned}$$

Il primo integrale corrisponde all'integrale ai coefficienti di una finestra, ed è stato già precedentemente calcolato, per cui si omette la risoluzione. Si considera la sostituzione $t = -t'$ nel secondo integrale:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 -\frac{2(-t)}{\tau} e^{-i\frac{2\pi k(-t)}{T}} d(-t) + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\
 &= \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \left(-\int_{\frac{\tau}{2}}^0 \frac{2t}{\tau} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\
 &= \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\
 &= \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{4t}{\tau} \frac{e^{i\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}}{2} dt \\
 &= \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{4}{\tau T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} t \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt
 \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale così ottenuto si risolve mediante integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{4}{\tau T} \left[\frac{T}{2\pi k} t \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right]_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{4}{\tau T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{T}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt \\
 & \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{\tau}{T} \frac{T}{\pi k \tau} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) + 0 + \frac{4}{\tau T} \left[-\left(\frac{T}{2\pi k}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right]_0^{\frac{\tau}{2}} \\
 & \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{T}{\pi^2 k^2 \tau} \left[\cos\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) - 1 \right] \\
 & \frac{2T}{\pi^2 k^2 \tau} \sin^2\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) = \frac{\tau}{2T} \left[\frac{2T}{\pi k \tau} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) \right] \left[\frac{2T}{\pi k \tau} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) \right] \\
 & \frac{\tau}{2T} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k \tau}{2T}\right) \right] \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k \tau}{2T}\right) \right] \\
 & c_k = \frac{\tau}{2T} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k \tau}{2T}\right) \tag{18}
 \end{aligned}$$

I coefficienti di un treno di triangoli risultano essere dei seni cardinali quadrati.

3 Trasformata di Fourier

Calcolare l'energia del dato segnale:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cos(2\pi \alpha t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(t) (e^{2i\pi \alpha t} + e^{-2i\pi \alpha t})$$

Per il teorema della traslazione in frequenza, la trasformata del segnale x risulta essere:

$$X(f) = \frac{1}{2} \text{rect}(f + \alpha) + \frac{1}{2} \text{rect}(f - \alpha)$$

La sua energia si calcola come:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{rect}(f + \alpha) + \text{rect}(f - \alpha)]^2 df \right) \\ E_x &= \begin{cases} \frac{1}{4} \int_{-\alpha-1/2}^{-\alpha+1/2} df + \frac{1}{4} \int_{\alpha-1/2}^{\alpha+1/2} df & \alpha \geq 1/2 \\ \frac{1}{4} \int_{-\alpha-1/2}^{\alpha-1/2} df + \frac{1}{2} \int_{\alpha-1/2}^{-\alpha+1/2} df + \frac{1}{4} \int_{-\alpha+1/2}^{\alpha+1/2} df & \alpha < 1/2 \end{cases} \\ E_x &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha \geq 1/2 \\ \frac{2\alpha}{4} + \frac{2\alpha}{4} + 1 - 2\alpha = 1 - \alpha & \alpha < 1/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Calcolare la trasformata del segnale x , tramite la proprietà di ribaltamento e di scala:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} u(-t) \\ x_1(t) &= e^{-3t} u(t) \\ X_1(f) &= X(-f) = \frac{1}{3 + 2i\pi f} \end{aligned}$$

$$X(f) = \frac{1}{3 - 2i\pi f} \quad (20)$$

Calcolare la trasformata del segnale x , per la proprietà della traslazione del tempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t+4} u(t-2) = e^{-2*(t-2)} u(t-2) \\ x_1(t) &= e^{-2t} u(t) \\ X_1(f) &= \frac{1}{2 + 2i\pi f} \end{aligned}$$

$$X(f) = \frac{1}{2 + 2i\pi f} e^{-4i\pi f} \quad (21)$$

Calcolare la trasformata del segnale x , si applica la proprietà di modulazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/2} \cos(100\pi t) u(t) \\ x_1(t) &= e^{-t/2} u(t) \\ X_1(f) &= \frac{1}{1/2 + 2i\pi f} \\ X(f) &= \frac{1}{2} (X_1(f - 50) + X_1(f + 50)) \\ X(f) &= \frac{1}{2} \frac{1}{1/2 + 2i\pi(f - 50)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1/2 + 2i\pi(f + 50)} \end{aligned}$$

$$X(f) = \frac{1}{1 + 4i\pi(f - 50)} + \frac{1}{1 + 4i\pi(f + 50)} \quad (22)$$

Calcolare l'autoconvoluzione del segnale x , passando per la sua trasformata:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \operatorname{rect}\left(\frac{2(t - 3T/4)}{T}\right) - A \operatorname{rect}\left(\frac{2(t - T/4)}{T}\right) \\ X(f) &= \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) e^{-3i\pi fT/2} - \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) e^{-i\pi fT/2} \\ X(f) &= \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) (e^{-3i\pi fT/2} - e^{-i\pi fT/2}) \\ X^2(f) &= \frac{A^2T^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) (e^{-3i\pi fT} + e^{-i\pi fT} - 2e^{-2i\pi fT}) \\ x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(f) e^{2i\pi ft} df \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A^2T^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) (e^{-3i\pi fT} + e^{-i\pi fT} - 2e^{-2i\pi fT}) \right] e^{2i\pi ft} df \end{aligned}$$

Un prodotto nel dominio delle frequenze corrisponde ad una convoluzione nel dominio del tempo, per cui si può esprimere l'autoconvoluzione come la convoluzione tra un segnale triangolo e una

combinazione lineare di impulsi:

$$\begin{aligned}
 X_1(f) &= \frac{A^2 T^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) \\
 x_1(t) &= \frac{A^2 T^2}{4} \frac{2}{T} \operatorname{tri}\left(\frac{2t}{T}\right) \\
 X_2(f) &= e^{-3i\pi f T} + e^{-i\pi f T} - 2e^{-2i\pi f T} \\
 x_2(t) &= \delta(t - 3T/2) + \delta(t - T/2) - 2\delta(t - T) \\
 x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^2 e^{2i\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f) X_2(f) e^{2i\pi f t} df = x_1(t) * x_2(t) \\
 &= \frac{A^2 T^2}{4} \frac{2}{T} \operatorname{tri}\left(\frac{2t}{T}\right) * [\delta(t - 3T/2) + \delta(t - T/2) - 2\delta(t - T)] \\
 x(t) * x(t) &= \frac{A^2 T^2}{4} \left(\operatorname{tri}\left(\frac{2}{T}(t - 3T/2)\right) + \operatorname{tri}\left(\frac{2}{T}(t - T/2)\right) - 2 \operatorname{tri}\left(\frac{2}{T}(t - T)\right) \right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

Calcolare la trasformata del segnale x :

$$x(t) = \operatorname{rect}(3t - 1/2) = \operatorname{rect}(3(t - 1/6))$$

Per la proprietà di scala e di traslazione nel tempo:

$$X(f) = \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{3}\right) e^{-i\pi f/3} \quad (24)$$

Calcolare la trasformata del segnale x , esprimibile come un segnale triangolo moltiplicato per un gradino, oppure una retta moltiplicata per una finestra, si sceglie quest'ultima rappresentazione per facilitare il calcolo:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \operatorname{tri}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) u(t + T/2) \vee x(t) = A \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 &= \frac{A}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{A}{T} t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)
 \end{aligned}$$

Per la proprietà duale alla derivazione, si calcola il secondo componente:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -2i\pi t x_2(t) \\
 X_1(f) &= \frac{dX_2}{df} \\
 x_1(t) &= -\frac{A}{T} t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 x_2(t) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{A}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 X_2(f) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{A}{T} T \operatorname{sinc}(Tf) = \frac{A}{\pi T} \frac{\sin(\pi Tf)}{f} \\
 X_1(f) &= \frac{dX_2}{df} = \frac{1}{2i\pi} \frac{A}{\pi T} \frac{\cos(\pi Tf)\pi T f - \sin(\pi Tf)}{f^2}
 \end{aligned}$$

Per cui la trasformata complessiva è:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}(Tf) + \frac{A}{\pi T f^2 (2\pi i)} [\cos(\pi Tf)\pi T f - \sin(\pi Tf)] \\
 &= \frac{AT}{2\pi T f} \frac{i}{i} \sin(\pi Tf) + \frac{A}{2i\pi f} \cos(\pi Tf) - \frac{A}{2i\pi f} \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi T f} \\
 &= \frac{A}{2i\pi f} \frac{i}{i} [\cos(\pi Tf) + i \sin(\pi Tf)] - \frac{A}{2i\pi f} \frac{i}{i} \operatorname{sinc}(Tf) \\
 X(f) &= -\frac{Ai}{2\pi f} [e^{i\pi f T} - \operatorname{sinc}(fT)] \tag{25}
 \end{aligned}$$

Calcolare ora questa trasformata usando la proprietà alla derivazione:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{A}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{A}{T} t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t)
 \end{aligned}$$

Il segnale x_1 presente una discontinuità in $-T/2$, e rimane costante fino al valore $T/2$:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= A\delta(t + T/2) - \frac{A}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 X_2(f) &= Ae^{i\pi f T} - \frac{A}{T} T \operatorname{sinc}(Tf) \\
 X_2(f) &= 2i\pi f X_1(f) \\
 X_1(f) &= \frac{A}{2i\pi f} \frac{i}{i} [e^{i\pi f T} - \operatorname{sinc}(Tf)]
 \end{aligned}$$

$$X_1(f) = -\frac{Ai}{2\pi f} [e^{i\pi f T} - \text{sinc}(Tf)] \quad (26)$$

Calcolare l'antitrasformata di X_1 :

$$X_1(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)] \cos(2\pi f / f_0)$$

Per l'inverso della proprietà di modulazione, e per la proprietà di convoluzione:

$$x_1(t) = [x(t) \cos(2\pi t f_0)] * \left[\frac{1}{2} \delta(t + 1/f_0) + \frac{1}{2} \delta(t - 1/f_0) \right]$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x \left(t + \frac{1}{f_0} \right) \cos \left[2\pi f_0 \left(t + \frac{1}{f_0} \right) \right] + \frac{1}{2} x \left(t - \frac{1}{f_0} \right) \cos \left[2\pi f_0 \left(t - \frac{1}{f_0} \right) \right]$$

Poiché il coseno è traslato di un periodo $1/f_0$:

$$x_1(t) = \left[\frac{1}{2} x \left(t + \frac{1}{f_0} \right) + \frac{1}{2} x \left(t - \frac{1}{f_0} \right) \right] \cos(2\pi t f_0) \quad (27)$$

Calcolare la trasformata del segnale x :

$$x(t) = 2 \text{rect}(2t) - \text{rect}(t) = \text{rect}(2t) - \text{rect} \left[4 \left(t - \frac{3}{2} \right) \right] - \text{rect} \left[4 \left(t - \frac{3}{8} \right) \right]$$

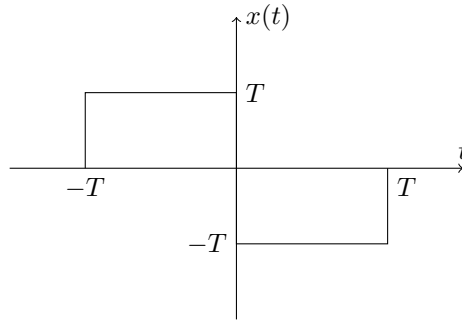
$$X(f) = \frac{1}{2} \text{sinc} \left(\frac{f}{2} \right) - \frac{1}{4} \text{sinc} \left(\frac{f}{4} \right) e^{-3i\pi f/4} - \frac{1}{4} \text{sinc} \left(\frac{f}{4} \right) e^{-3i\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \left[\text{sinc} \left(\frac{f}{2} \right) - \text{sinc} \left(\frac{f}{4} \right) \cos \left(\frac{3\pi f}{4} \right) \right] \quad (28)$$

Si considera una finestra di base T moltiplicata per un coseno di frequenza costante f_0 , ovvero modulata di una frequenza f_0 :

$$x(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{T}{2} \text{sinc}((f - f_0)T) + \frac{T}{2} \text{sinc}((f + f_0)T)$$



Calcolare la sua trasformata:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Per la linearità della trasformata e per la proprietà di traslazione nel tempo la trasformata si ottiene come:

$$\begin{aligned} X(f) &= T(e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}) \text{sinc}(Tf) = 2Ti \sin(\pi fT) \text{sinc}(Tf) \\ &= 2iT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \sin(\pi fT) = 2i \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi f} \end{aligned}$$

Calcolare la trasformata del seguente segnale onda quadra di base τ e di periodo T :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{\tau}\right)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (29)$$

$$c_k = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) \quad (30)$$

Calcolare la trasformata del treno campionario, o segnale pettine:

$$\pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$c_k = \frac{1}{k}$$

$$\pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{2i\pi kt/T}$$

$$\Pi(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (31)$$

Questo è uno dei pochi segnali oltre alla gaussiana che si auto-trasforma.

Calcolare la trasformata di un treno di trapezi di base maggiore $2T$, di base minore T e di altezza T , di periodo $\bar{T} = 5T/2$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{\bar{T}}\right)$$

Per calcolare i coefficienti della serie, si può esprimere un singolo trapezio come l'autoconvoluzione di un segnale finestra. Inoltre è sufficiente calcolare la trasformata di un singolo trapezio per ottenere i coefficienti:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 2\text{rect}\left(\frac{2t}{3T}\right) \\
 x_2(t) &= \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) \\
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} x_1(t) * x_2(t) e^{-2i\pi kt/T} dt \\
 c_k &= \frac{1}{T} X_1\left(\frac{k}{T}\right) X_2\left(\frac{k}{T}\right) \\
 c_k &= \frac{2}{T} \left[\frac{3T}{2} \text{sinc}\left(\frac{3T}{2} \frac{k}{T}\right) \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{T}{2} \frac{k}{T}\right) \right] \\
 c_k &= \frac{6T^2}{4} \frac{2}{5T} \text{sinc}\left(\frac{3T}{2} \frac{k}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{T}{2} \frac{k}{T}\right) \\
 c_k &= \frac{3T}{5} \text{sinc}\left(\frac{3k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \\
 X(f) &= \frac{2}{5T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{3T}{5} \text{sinc}\left(\frac{3k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \right] \delta\left(f - \frac{2k}{5T}\right) \tag{32}
 \end{aligned}$$

Calcolare la seguente convoluzione:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= [\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] * \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{\pi t} \\
 &= [\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] * 3f_0 \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{3\pi f_0 t} \\
 &= [\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] * 3f_0 \text{sinc}(3f_0 t)
 \end{aligned}$$

Si applica la formula di duplicazione del seno, e si passa per il dominio della frequenza:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{3f_0}{2} \sin(4\pi f_0 t) * \text{sinc}(3f_0 t) \\
 X(f) &= \frac{1}{4i} [\delta(f - 2f_0) - \delta(f + 2f_0)] \frac{3f_0}{3f_0} \text{rect}\left(\frac{f}{3f_0}\right) \\
 &= \frac{1}{4i} \left[\text{rect}\left(-\frac{2f_0}{3f_0}\right) \delta(f - 2f_0) - \text{rect}\left(\frac{2f_0}{3f_0}\right) \delta(f + 2f_0) \right] \\
 &= \frac{1}{4i} \text{rect}\left(\frac{2}{3}\right) [\delta(f - 2f_0) - \delta(f + 2f_0)]
 \end{aligned}$$

Poiché il valore $2/3$ è esterno all'intervallo di valori non nulli del segnale finestra $[-1/2, 1/2]$, la trasformata assume valore nullo.

$$x(t) = 0 \quad (33)$$

Calcolare il segnale x , passando per il dominio della frequenza:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \left[\sin(2\pi f_0 t) * \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{\pi t} \right] \\ x_1(t) &= \sin(2\pi f_0 t) * \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{\pi t} \\ X_1(f) &= \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \cdot \frac{3f_0}{3f_0} \text{rect}\left(\frac{f}{3f_0}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \delta(f - f_0) \text{rect}\left(-\frac{f_0}{3f_0}\right) - \frac{1}{2i} \delta(f + f_0) \text{rect}\left(\frac{f_0}{3f_0}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \text{rect}\left(\frac{1}{3}\right) [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \\ X_1(f) &= \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \\ x_1(t) &= \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) = \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2} \quad (34)$$

Per la formula di duplicazione del seno.

Dato il segnale x , calcolare il periodo, i coefficienti di Fourier, la potenza, e la sua trasformata:

$$x(t) = 2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-i\pi t/2T_0} = 2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-2i\pi t/4T_0}$$

Il periodo di un segnale combinazione lineare di altri segnali è il minimo comune multiplo tra i periodi dei segnali considerati:

$$T = 4T_0 \quad (35)$$

Si calcola la potenza del segnale:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} \left| 2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-2i\pi t/4T_0} \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} \left(4 + 1 + 4 \cos \left[\frac{2\pi t}{T_0} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right] \right) dt \\ &= \frac{20T_0}{4T_0} + \frac{2T_0}{5\pi} \left[\sin \left(\frac{5\pi t}{2T_0} \right) \right]_{-2T_0}^{2T_0} \end{aligned}$$

$$P_x = 5 \quad (36)$$

Si determinano i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} \left(2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-2i\pi t/4T_0} \right) e^{-2i\pi kt/4T_0} dt \\ c_k &= \frac{2}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} e^{2i\pi t(1-k/4)/T_0} dt + \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} 2e^{-2i\pi t(1+k)/4T_0} dt \\ c_k &= \begin{cases} 0 & \forall k \neq 4 \vee -1 \\ \frac{1}{4T_0} & k = -1 \\ \frac{1}{2T_0} & k = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Si ottiene lo stesso risultato, più velocemente, per confronto diretto. La sua trasformata si ottiene sia trasformando la sua serie di Fourier, sia attuando l'integrale di trasformazione:

$$X(f) = \frac{1}{4T_0} \delta\left(f + \frac{1}{4T_0}\right) + \frac{1}{2T_0} \delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right) \quad (38)$$

Calcolare la trasformata del segnale x :

$$x(t) = \cos\left[\frac{\pi(t-T)}{2T}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \cos\left[\frac{2\pi(t-T)}{4T}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Questo segnale ha periodo $4T$. Espandendo l'argomento del primo coseno si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\left[\frac{2\pi t}{4T} - \frac{\pi}{2}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi t}{4T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \end{aligned}$$

Si rappresenta il segnale in forma esponenziale:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2i} \left(e^{2i\pi t/4T} - e^{-2i\pi t/4T} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(e^{2i\pi t/T} + e^{-2i\pi t/T} \right) \\ &= \frac{1}{4i} \left[e^{\frac{2\pi t}{T}(\frac{1}{4}+1)} - e^{\frac{2\pi t}{T}(1-\frac{1}{4})} + e^{\frac{2\pi t}{T}(\frac{1}{4}-1)} - e^{-\frac{2\pi t}{T}(1+\frac{1}{4})} \right] \\ &= \frac{1}{4i} \left[e^{\frac{2\pi t}{T}\frac{5}{4}} - e^{\frac{2\pi t}{T}\frac{3}{4}} + e^{-\frac{2\pi t}{T}\frac{3}{4}} - e^{-\frac{2\pi t}{T}\frac{5}{4}} \right] \\ X(f) &= \frac{1}{4i} \left[\delta\left(f + \frac{5}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{3}{4T}\right) + \delta\left(f - \frac{3}{4T}\right) - \delta\left(f - \frac{5}{4T}\right) \right] \end{aligned}$$

$$X(f) = \frac{1}{4i} \left[\delta \left(f + \frac{5}{4T} \right) - \delta \left(f - \frac{5}{4T} \right) \right] - \frac{1}{4i} \left[\delta \left(f + \frac{3}{4T} \right) - \delta \left(f - \frac{3}{4T} \right) \right] \quad (39)$$

Per cui il segnale originale corrisponde ad una differenza di due seni, considerando operazioni trigonometriche del segnale originario. Alternativamente, per la proprietà della convoluzione, si può calcolare come convoluzione tra le due trasformate dei segnali moltiplicati:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \left[\frac{\pi(t-T)}{2T} \right] \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) = x_1(t) \cdot x_2(t) \\ X(f) &= X_1(f) * X_2(f) \\ X_1(f) &= \frac{1}{2} \left[\delta \left(f + \frac{1}{4T} \right) + \delta \left(f - \frac{1}{4T} \right) \right] e^{-2i\pi f T} \\ &\quad \frac{1}{2} e^{-2i\pi/4} \delta \left(f + \frac{1}{4T} \right) + \frac{1}{2} e^{2i\pi/4} \delta \left(f - \frac{1}{4T} \right) \\ &\quad - \frac{i}{2} \delta \left(f + \frac{1}{4T} \right) + \frac{i}{2} \delta \left(f - \frac{1}{4T} \right) \\ X_2(f) &= \frac{1}{2} \left[\delta \left(f + \frac{1}{T} \right) + \delta \left(f - \frac{1}{T} \right) \right] \end{aligned}$$

Si attua quindi una convoluzione nel dominio della frequenza per ottenere la trasformata del segnale originale:

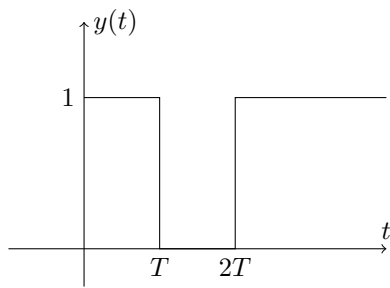
$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{i}{2} \left[\delta \left(f - \frac{1}{4T} \right) - \delta \left(f + \frac{1}{4T} \right) \right] * \frac{1}{2} \left[\delta \left(f + \frac{1}{T} \right) + \delta \left(f - \frac{1}{T} \right) \right] \\ X(f) &= \frac{i}{4} \left[-\delta \left(f + \frac{5}{4T} \right) + \delta \left(f + \frac{3}{4T} \right) - \delta \left(f - \frac{3}{4T} \right) + \delta \left(f - \frac{5}{4T} \right) \right] \quad (40) \end{aligned}$$

Dato un filtro di risposta impulsiva $h(t)$, calcolare la sua funzione di trasferimento, e la la risposta ad un gradino:

$$h(t) = \delta(t - 2T) + \delta(t) - \delta(t - T)$$

$$H(f) = e^{-4i\pi f T} + 1 - e^{-2i\pi f T} \quad (41)$$

$$h(t) * u(t) = \delta(t - 2T) + \delta(t) - \delta(t - T) * u(t) = \delta(t - 2T)u(t - 2T) + \delta(t)u(t) - \delta(t - T)u(t - T) \quad (42)$$



4 Trasformata di Fourier Tempo Discreto

Data una sequenza di valore costante:

$$x[n] = 1$$

Si determina la trasformata della sequenza tramite la definizione:

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi n f T} \quad (43)$$

Altrimenti si considera il segnale da cui si è campionata la sequenza:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \\ X(f) &= \delta(f) \end{aligned}$$

Per cui la trasformata del segnale campionato si può esprimere come un treno di delta:

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (44)$$

Poiché la sequenza considerata coincide con il treno campionario $x[n] = \pi(t)$.

Calcolare la trasformata della sequenza $x[n]$:

$$x[n] = \left[\frac{\sin(2\pi f_c n T)}{\pi n} \right]^2 = 4f_c^2 T^2 \text{sinc}^2(2f_c n T)$$

Questa sequenza si può considerare estratta dal segnale tempo continuo x :

$$\begin{aligned} x(t) &= 4f_c^2 T^2 \text{sinc}(2f_c t) \\ X(f) &= 2f_c T^2 \text{tri}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \end{aligned}$$

Per cui si esprime la trasformata della sequenza come:

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = 2f_c T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tri}\left(\frac{f - \frac{n}{T}}{2f_c}\right) \quad (45)$$

Se T il passo di campionamento non è abbastanza grande, i triangoli si sovrappongono tra di loro.

Calcolare la convoluzione y tempo discreta tra x e h , esponenziali unilateri:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 x[n] &= a^n u[n] \\
 h[n] &= b^n u[n] \\
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] b^{n-k} u[n-k] = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \\
 &= b^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}} \\
 y[n] &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} u[n]
 \end{aligned} \tag{46}$$

Si può calcolare analogamente nel dominio della frequenza, poi attuando un antitrasformata:

$$\begin{aligned}
 Y_c(f) &= X_c(f) H_c(f) \\
 X_c(f) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-2i\pi n f T} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-2i\pi f T})^n = \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f T}} \\
 H_c(f) &= \frac{1}{1 - b e^{-2i\pi f T}}
 \end{aligned}$$

Poiché le due sommatorie diventano delle serie geometriche. Si considera ora il loro prodotto:

$$Y_c(f) = X_c(f) H_c(f) = \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f T}} \frac{1}{1 - b e^{-2i\pi f T}}$$

Si può decomporre in fratti semplici come:

$$\begin{aligned}
 Y_c(f) &= \frac{A}{1 - a e^{-2i\pi f T}} + \frac{B}{1 - b e^{-2i\pi f T}} \\
 \begin{cases} A + B = 1 \\ Ab + Ba = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ b - Bb + Ba = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{a - b} \\ B = \frac{b}{b - a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Per cui il segnale convoluzione si esprime come:

$$\begin{aligned}
 Y_c(f) &= \frac{a}{a - b} \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f T}} + \frac{b}{b - a} \frac{1}{1 - b e^{-2i\pi f T}} \\
 y[n] &= \frac{a}{a - b} a^n u[n] + \frac{b}{b - a} b^n u[n]
 \end{aligned} \tag{47}$$

Calcolare la trasformata di Fourier della sequenza x :

$$x[n] = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right)$$

Si considera $T = 1$, e si esprime il segnale da cui è stata campionata la sequenza:

$$x(t) = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{t}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right)$$

Si determina la trasformata di questo segnale tempo continuo:

$$\begin{aligned} X(f) &= \text{rect}(3f) * \frac{1}{2} \left[\delta\left(f - \frac{1}{6}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{6}\right) \right] \\ X(f) &= \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \text{rect}\left(3f - \frac{1}{2} - 3n\right) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f + \frac{1}{2} - 3n\right) \right] \quad (48)$$

Calcolare la trasformata di Fourier della sequenza x :

$$x[n] = \left[\frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n} \right]^2 = \frac{1}{9} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$T = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{9} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{3} \text{tri}(3f)$$

$$X_c(f) = \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tri}(3f - n) \quad (49)$$

5 Campionamento

Dato un segnale coseno di frequenza f_0 si determina la frequenza di Nyquist:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Per cui la frequenza massima corrisponde a f_0 , per cui la frequenza di Nyquist si ottiene come:

$$f_c = 2f_0 \quad (50)$$

Il segnale campionato corrisponde a:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi n) \delta\left(t - \frac{n}{2f_0}\right)$$

Ma utilizzando la frequenza di Nyquist come la frequenza di campionamento gli impulsi coincidono per $f = 2f_0$, per cui questa sequenza non individua univocamente il segnale coseno, per cui è necessaria una frequenza di campionamento maggiore. Si considera allora:

$$f_c = 4f_0$$

Si suppone sia presente aliasing nel segnale campionato in frequenza. Per cui si ha una frequenza $f_c < 2f_0$, e sono presenti degli impulsi in più nell'intervallo $[-f_0, f_0]$, corrispondenti alle repliche antecedenti e posteriori alla replica centrata in $f = 0$. Lo spettro si sovrappone, quindi ricomponendo il segnale non si ricostruisce il segnale coseno originario. Il segnale ricostruito si ottiene antitrasformando il segnale ottenuto in frequenza:

$$Y(f) = X_c(f)H(f) = \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{T} - f_0\right) + \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{T} + f_0\right)$$

$$y(t) = \cos \left[2\pi \left(f_0 - \frac{1}{T}\right) t \right]$$

Dato il segnale campionato $x(t)$, determinare la frequenza di Nyquist:

$$x(t) = 1 + \left[\frac{\sin(20\pi t)}{\pi t} \right]^2 = 1 + 400 \operatorname{sinc}^2(20\pi t)$$

Lo spettro del segnale corrisponde a:

$$X(f) = \delta(f) + 20 \operatorname{tri} \left(\frac{f}{20} \right)$$

Per cui la frequenza minima di campionamento corrisponde a $f_c > 40 \text{ Hz}$, mentre il tempo di campionamento massimo corrisponde a: Non è presente aliasing quando la frequenza assume valori maggiori di:

$$f > \frac{2}{\frac{1}{20}} = 40 \text{ Hz}$$

Il tempo di campionamento deve essere:

$$T > \frac{2}{f_{max}} = \frac{2}{40 \text{ Hz}} = 25 \text{ ms} \quad (51)$$

Si suppone si stia campionando con un passo di campionamento doppio al valore massimo $\bar{T} = 2T = 50 \text{ ms}$. Lo spettro del segnale campionato corrisponde a:

$$X_c(f) = \frac{1}{\bar{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{\bar{T}}\right) = 20 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - 20n) + 20 \text{tri}\left(\frac{f - 20n}{20}\right)$$

Se il tempo di campionamento fosse pari a $T = 50 \times 10^{-3} \text{ s}$, i triangoli in frequenza sarebbero sfasati tra di loro di esattamente metà della loro base, per cui la somma di tutti i triangoli assume valore costante in frequenza. Lo spettro del segnale campionato diventa una costante sommata ad un treno di delta:

$$X_c(f) = 400 + 20 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{20}\right) \quad (52)$$

Si effettua ora quest'analisi nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= x(t)\pi(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [1 + 400 \text{sinc}^2(20t)] \delta(t - 50 \times 10^{-3}n) \\ x_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 50 \times 10^{-3}n) + 400 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(20t)\delta(t - 50 \times 10^{-3}n) \\ x_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 50 \times 10^{-3}n) + 400\delta(t) \end{aligned}$$

La sua trasformata corrisponde a:

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{50 \times 10^{-3}}\right) \frac{1}{50 \times 10^{-3}} + 400$$

Dato il segnale x , si vuole calcolare il massimo intervallo di campionamento:

$$x(t) = \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right)$$

Il periodo del segnale corrisponde a $T = \frac{T_0}{2}$. La sua trasformata equivale a:

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{2}{T_0}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{2}{T_0}\right)$$

Quindi la frequenza di Nyquist corrisponde a:

$$f < 2\frac{2}{T_0} = \frac{4}{T_0}$$

Per cui il passo di campionamento del segnale è:

$$T > \frac{1}{f_c} = \frac{T_0}{4} \quad (53)$$

Si considera un passo di campionamento minore rispetto al valore necessario per non avere aliasing:

$$T = \frac{4}{9}T_0$$

Si vuole calcolare lo spettro del segnale considerando questo tempo di campionamento:

$$\begin{aligned} X_c(f) &= \frac{9}{4T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{9n}{4T_0}\right) \\ X_c(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{9}{8T_0} \delta\left(f - \frac{9n}{4T_0}\right) + \frac{9}{16T_0} \delta\left(f + \frac{2}{T_0} - \frac{9n}{4T_0}\right) + \frac{9}{16T_0} \delta\left(f - \frac{2}{T_0} - \frac{9n}{4T_0}\right) \right] \\ X_c(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{9}{8T_0} \delta\left(f - \frac{9n}{4T_0}\right) + \frac{9}{16T_0} \delta\left(f + \frac{8-9n}{4T_0}\right) + \frac{9}{16T_0} \delta\left(f - \frac{8+9n}{4T_0}\right) \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Dato il segnale x calcolare il periodo di campionamento:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2f_0 \text{sinc}(2f_0 t) \cos(6\pi f_0 t) \\ X(f) &= 2 \text{tri}\left(\frac{f}{f_0}\right) * \left[\frac{1}{2} \delta(f - 3f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + 3f_0) \right] \\ X(f) &= \text{tri}\left(\frac{f - 3f_0}{f_0}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 3f_0}{f_0}\right) \end{aligned}$$

La frequenza di Nyquist corrisponde a $6f_0$, per cui il tempo di campionamento corrisponde a $T = \frac{1}{6f_0}$. Si considera il segnale campionato con un passo di campionamento:

$$T = \frac{1}{4f_0}$$

Per cui la trasformata del segnale campionato corrisponde a:

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tri}\left(\frac{f - (4n+3)f_0}{f_0}\right) + \text{tri}\left(\frac{f - (4n-3)f_0}{f_0}\right)$$

Si ricostruisce il segnale inserendolo in un filtro ricostruttore DAC di funzione di trasferimento $H(f)$, filtro passa basso ideale, che si estende tra le frequenze $[-2f_0, +2f_0]$, si considera un tempo di campionamento pari ad 1:

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$

$$X(f) = X_c(f)H(f) = \text{tri}\left(\frac{f-f_0}{f_0}\right) + \text{tri}\left(\frac{f+f_0}{f_0}\right)$$

$$x(t) = 2f_0 \text{sinc}^2(f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (55)$$

Dato un segnale che occupa una banda $[-6 \text{ kHz}, 6 \text{ kHz}]$. Il segnale viene campionato con passo T . Il segnale viene filtrato per essere ricostruito da un filtro la cui funzione di trasferimento assume una forma trapezoidale in frequenza:

$$H(f) = \begin{cases} 0 & f < -2K_f \wedge f \geq 2K_f \\ A \left(2 - \left|\frac{f}{K_f}\right|\right) & -2K_f \leq f < -K_f \wedge K_f \leq f < 2K_f \\ A & -K_f \leq f < K_f \end{cases}$$

Calcolare il valore massimo di T , K_f e A affinché il segnale ricostruito coincida con il segnale di partenza. Il parametro A affinché si ritorni al segnale originario deve essere necessariamente:

$$A = \frac{1}{T} \quad (56)$$

Il massimo passo di campionamento se fosse presente un filtro ideale sarebbe $T = 1/12 \times 10^{-3} \text{ s}$, ma per ricostruire il segnale originale con un filtro trapezoidale, bisognerebbe assegnare al valore $K_f = 6 \text{ kHz}$. Ma in questo modo il filtro del DAC considera altre repliche, poiché la sua banda arriva fino ad un valore di $2K_f = 12 \text{ kHz}$. La frequenza di campionamento deve essere quindi:

$$f \geq \frac{1}{T} + K_f = 12 + 6 = 18 \text{ kHz}$$

Il passo di campionamento è quindi:

$$T = \frac{1}{f} = 55 \mu\text{Hz} \quad (57)$$

Un segnale viene campionato con frequenza di campionamento (di Nyquist) $f_c = 100 \text{ Hz}$, dando origine ai seguenti campioni:

$$T_c = \frac{1}{100} \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

$$f_{max} = \frac{f_c}{2} = 50 \text{ Hz}$$

$$x(nT) = \begin{cases} -1 & n = -2, -1 \\ 1 & n = 1, 2 \\ 0 & \forall n \neq \pm 1, \pm 2 \end{cases}$$

Il segnale viene ricostruito con un filtro ideale di funzione di trasferimento H :

$$H(f) = T \text{rect}(Tf) \rightarrow h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Calcolare il valore del segnale ricostruito al tempo $t = 5 \text{ ms}$. Il segnale campionato si esprime come:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$x(2T)\delta(t - 2T) + x(T)\delta(t - T) + x(-T)\delta(t + T) + x(-2T)\delta(t + 2T)$$

$$x_c(t) = \delta(t - 2T) + \delta(t - T) - \delta(t + T) - \delta(t + 2T)$$

Si calcola l'uscita del filtro DAC:

$$y(t) = x_c(t) * h(t) = [\delta(t - 2T) + \delta(t - T) - \delta(t + T) - \delta(t + 2T)] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\text{sinc}\left(\frac{t - 2T}{T}\right) + \text{sinc}\left(\frac{t - T}{T}\right) - \text{sinc}\left(\frac{t + T}{T}\right) - \text{sinc}\left(\frac{t + 2T}{T}\right)$$

$$y(5 \text{ ms}) = \text{sinc}\left(\frac{5 - 20}{10}\right) + \text{sinc}\left(\frac{5 - 10}{10}\right) - \text{sinc}\left(\frac{5 + 10}{10}\right) - \text{sinc}\left(\frac{5 + 20}{10}\right)$$

$$\text{sinc}\left(\frac{15}{10}\right) + \text{sinc}\left(\frac{5}{10}\right) - \text{sinc}\left(\frac{15}{10}\right) - \text{sinc}\left(\frac{25}{10}\right)$$

$$\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{sinc}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{\frac{5\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{5\pi}$$

$$y(5 \text{ ms}) = \frac{8}{5\pi} \tag{58}$$

Dato un segnale x di banda $[-\omega, \omega]$, campionato con un passo $T_c = \frac{1}{2\omega}$. Si considerano tre filtri, di risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow H_1(f) = T \text{sinc}(Tf) \\ h_2(t) &= \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \\ h_3(t) &= \text{tri}\left(\frac{t}{2T}\right) \end{aligned}$$

Il segnale campionato si ottiene come:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \\ y_1(t) &= x_c(t) * h_1(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

Questo caso corrisponde al teorema del campionamento, poiché il passo di campionamento corrisponde esattamente al reciproco del doppio della frequenza massima del segnale:

$$y_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) = x(t) \quad (59)$$

Per cui il segnale ricostruito corrisponde esattamente al segnale originario.

Considerando il secondo filtro:

$$y_2(t) = x_c(t) * h_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{tri}\left(\frac{t - nT}{T}\right) \quad (60)$$

Questo filtro ricostruisce il segnale, ma presenta degli errori alle alte frequenze.

Considerando il terzo filtro:

$$y_3(t) = x_c(t) * h_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{tri}\left(\frac{t - nT}{2T}\right) \quad (61)$$

Questo filtro non ricostruisce a pieno il segnale.

Dato il segnale x :

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) - \text{tri}\left(\frac{t+T}{T}\right)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} - 2T \leq t < -T \\ 1 + \frac{3t}{T} - T \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{T} 0 \leq t < 2T \end{cases}$$

Viene campionato con intervallo di campionamento $T_c = T$. Il segnale campionato viene ricostruito con un filtro passa basso ideale di ampiezza 1 di banda $[-1/2T_c, 1/2T_c]$. Calcolare il segnale ricostruito nel tempo continuo $y(t)$ e la sua trasformata $Y(f)$.

Sicuramente lo spettro del segnale originario non è limitato in banda, per cui la sua ricostruzione non potrà coincidere con il segnale originale. Il segnale è invece limitato nel tempo, per cui il suo campionamento produce una sequenza limitata, ovvero non nulla solo per un numero limitato di campioni:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) = x(-T)\delta(t + T) + x(0)\delta(t) = \delta(t) - \delta(t + T)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$y(t) = x_c(t) * h(t) = [\delta(t) - \delta(t + T)] * \frac{1}{T}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{1}{T}\text{sinc}\left(\frac{t+T}{T}\right) \quad (62)$$

$$Y(f) = \text{rect}(Tf) - \text{rect}(Tf)e^{2i\pi fT} \quad (63)$$

Dato il segnale x :

$$x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Il segnale viene campionato con un passo \bar{T} pari a quattro volte il periodo di Nyquist T_c :

$$\bar{T} = 4T_c$$

Si considera la trasformata di Fourier del segnale x per determinare la sua frequenza massima:

$$X(f) = 2T\text{rect}(2Tf) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right)$$

La banda del segnale è limitata nell'intervallo $[-1/T, 1/T]$, per cui la frequenza di Nyquist corrisponde a $2/T$:

$$T_c = \frac{T}{2}$$

$$\bar{T} = 2T$$

Determinare il segnale campionato x_c e la sua trasformata di Fourier X_c :

$$\begin{aligned}
 x_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\bar{T})\delta(t - n\bar{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\text{sinc}\left(\frac{2nT}{2T}\right) + \cos\left(\frac{4\pi nT}{T}\right) \right] \delta(t - 2nT) \\
 x_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\text{sinc}(n) + \cancel{\cos(4\pi n)} \right] \delta(t - 2nT) \\
 x(t) &= \delta(t) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2nT)
 \end{aligned} \tag{64}$$

Si svolge ora la medesima analisi in frequenza:

$$\begin{aligned}
 X_c(f) &= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{2T}\right) \\
 &= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2T \text{rect}\left[2T\left(f - \frac{n}{2T}\right)\right] + \frac{1}{4T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{1}{T} - \frac{n}{T}\right) + \frac{1}{4T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f + \frac{1}{T} - \frac{n}{T}\right) \\
 X_c(f) &= 1 + \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)
 \end{aligned} \tag{65}$$

Si ottiene lo stesso risultato della trasformata del segnale campionato nel tempo.

6 Fenomeni Aleatori

Si consideri una sorgente S ed un destinatario D che possono trasmettere e ricevere solamente 1 o 0. La probabilità che si ricevi uno 0, quando viene trasmesso uno 0 è dell'80%, mentre la probabilità che si ricevi un 1 quando viene trasmesso uno 0 è del 20%:

$$P(D = 0|S = 0) = 0.8$$

$$P(D = 1|S = 1) = 0.2$$

Mentre la probabilità di errore nella trasmissione di un 1 è:

$$P(D = 1|S = 1) = 0.7$$

$$P(D = 0|S = 1) = 0.3$$

Per cui si conoscono le probabilità di errore del canale di trasmissione. I simboli 0 e 1 non sono equiprobabili alla sorgente:

$$P(S = 0) = 0.6$$

$$P(S = 1) = 0.4$$

Si vuole calcolare la probabilità sia stato trasmesso un 1 dalla sorgente quando viene misurato un 1:

$$P(S = 1|D = 1)$$

Si esprime tramite il teorema di Bayes:

$$P(S = 1|D = 1) = \frac{P(D = 1|S = 1)P(S = 1)}{P(D = 1)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{P(D = 1)}$$

Per determinare la probabilità che il ricevitore misuri 1 si determina tramite il teorema delle proprietà totali:

$$P(D = 1) = P(D = 1|S = 1)P(S = 1) + P(D = 1|S = 0)P(S = 0) = 0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6$$

La probabilità che si misuri un 1 quando viene effettivamente trasmesso un 1 dalla sorgente risulta essere:

$$P(S = 1|D = 1) = \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6} = 0.7 \quad (66)$$

Sia data la probabilità di una variabile aleatoria X :

$$P_X(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}$$

Nota la sua relazione con un'altra variabile aleatoria Y :

$$y = ax + b$$

Si calcola la densità di probabilità della variabile aleatoria Y :

$$P_Y(y) = \frac{e^{-\left(\frac{y-b}{a}\right)^2 \frac{1}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \left| \frac{1}{a} \right| \quad (67)$$

Per cui se X ha una statistica gaussiana, anche Y ha una statistica gaussiana, ma non centrata nell'origine.

La densità di probabilità della variabile aleatoria X è uniformemente distribuita sull'intervallo $[2, 3]$. Sia data una variabile aleatoria Y legata da una relazione lineare:

$$Y = aX + b$$

Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Y :

$$P_X(x) = \text{rect}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$P_Y(y) = P_X(g(y))|g'(y)| = \frac{1}{|a|} \text{rect}\left(\frac{2y - 2b - 5a}{2a}\right) \quad (68)$$

Data la densità di probabilità gaussiana di una variabile aleatoria X , calcolare la densità di probabilità di una variabile Y legata dalla relazione:

$$y = x^3$$

$$P_X(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}$$

$$P_Y(y) = P_X(g(y))|g'(y)| = \frac{e^{-\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad (69)$$

Sia data una variabile aleatoria X uniformemente distribuita sull'intervallo $[0, \pi]$ ed una variabile Y dipendente dalla prima, tramite la seguente relazione:

$$y = \cos(x)$$

$$P_X(x) = \frac{1}{\pi} \text{rect}\left(\frac{x - \pi/2}{\pi}\right)$$

Determinare la densità di probabilità della variabile Y $P_Y(y)$. Noto l'andamento della funzione coseno, la densità di probabilità di y è una funzione compresa nell'intervallo $[-1, +1]$. Si applica quindi la formula su questo intervallo:

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= P_X(\arccos(y)) \frac{d}{dy} \arccos(y) \\ P_Y(y) &= \frac{1}{\pi} \text{rect} \left(\frac{\arccos(y) - \pi/2}{\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ P_Y(y) &= \text{rect} \left(\frac{y}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned} \quad (70)$$

Date due variabili aleatori legate dalla relazione $y = f(x) = \cos(x)$, con X uniformemente distribuita sull'intervallo $[0, 2\pi]$, calcolare la densità di probabilità della variabile y :

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \text{rect} \left(\frac{x - \pi}{2\pi} \right)$$

Poiché il coseno non è invertibile sull'intero intervallo dove è definita la variabile X , si divide in $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$, e si definiscono due funzioni aggiuntive che legano le variabili aleatorie nei due intervalli:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(x) \\ g_1(y) &= \arccos(y) \\ g_2(y) &= -g_1(y) \end{aligned}$$

La densità di probabilità sull'intervallo $[0, \pi]$, è già stata calcolata nell'esercizio precedente, in questo caso la variabile X è distribuita uniformemente su un intervallo di ampiezza doppia, per cui si divide in un due funzioni centrate nei due intervalli:

$$\begin{aligned} P_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\text{rect} \left(\frac{x - \pi/2}{\pi} \right) + \text{rect} \left(\frac{x - 3\pi/2}{\pi} \right) \right] \\ P_{Y,1}(y) &= \frac{1}{2\pi} \text{rect} \left(\frac{\arccos(y) - \pi/2}{\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ P_{Y,2}(y) &= \frac{1}{2\pi} \text{rect} \left(\frac{-\arccos(y) - 3\pi/2}{\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ P_{Y,1}(y) + P_{Y,2}(y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left[\text{rect} \left(\frac{y}{2} \right) + \text{rect} \left(\frac{y}{2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \text{rect} \left(\frac{y}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = P_Y(y) \end{aligned} \quad (71)$$

Si vuole calcolare il valore atteso, può essere calcolato sul dominio y o x :

$$\begin{aligned}
 E[\cos(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x) P_X(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(x) dx = 0 \\
 E[\cos(x)] &= E[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y P_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \operatorname{rect}\left(\frac{y}{2}\right) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &\quad \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0 \\
 \mu_x &= 0
 \end{aligned} \tag{72}$$

Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria Y , nota la densità di una variabile indipendente X e la loro relazione:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &= \begin{cases} x+2 & -4 \leq x < -1 \\ -x & -1 \leq x < +1 \\ x-2 & x \geq +1 \end{cases} \\
 P_X(x) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{8}\right)
 \end{aligned}$$

Si studiano i tre casi separatamente, per cui si scompone la densità di probabilità della variabile X :

$$\begin{aligned}
 P_{X,1}(x) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{x+5/2}{3}\right) \\
 P_{X,2}(x) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{2}\right) \\
 P_{X,3}(x) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{x-5/2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Si ottengono quindi le seguenti densità di probabilità per la variabile Y :

$$\begin{aligned}
 P_{Y,1}(y) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{y-2+5/2}{3}\right) \\
 P_{Y,2}(y) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{-y}{3}\right) \\
 P_{Y,3}(y) &= \frac{1}{8} \operatorname{rect}\left(\frac{y+2+5/2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Per cui la densità della variabile Y si ottiene dalla somma di quest'ultime:

$$P_Y(y) = \frac{1}{8} \left(\operatorname{rect}\left(\frac{y-1/2}{3}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{y}{2}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{y+1/2}{3}\right) \right) \tag{73}$$

Sia data la densità di probabilità $P_X(x)$ e la relazione con la variabile aleatoria Y , determinare la densità di probabilità di Y :

$$P_X(x) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Si divide l'intervallo in $[-1/2, 0]$ e $[0, 1/2]$:

$$P_X(x) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$P_{Y,1}(y) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(-y + \frac{1}{2}\right)$$

$$P_{Y,2}(y) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{rect}\left(y - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (74)$$

Si considera la seguente densità di probabilità per la variabile X :

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2}$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2} u(y) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma_x} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}} u(y)$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \left(e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}} \right) u(y) \quad (75)$$

Sia data una variabile aleatoria discreta X , la sua densità di probabilità e la relazione con la variabile aleatoria Y . Determinare la densità di probabilità di Y :

$$P_X(x) = \frac{1}{4} \delta(x+1) + \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{4} \delta(x-1)$$

$$y = x^2$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{4} \delta(y-1) + \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{4} \delta(y-1) = \frac{1}{2} [\delta(y) + \delta(y-1)] \quad (76)$$

Sia data la variabile aleatoria X di statistica gaussiana centrata in $x = 1$, e la relazione con la variabile aleatoria Y , tramite un rettificatore:

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\left(\frac{x-1}{\sigma_x}\right)^2}$$

$$y = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Poiché la statistica di X è centrata in 1, la probabilità che sia maggiore o minore di 1 è pari a $1/2$, per cui la densità di probabilità di Y corrisponde a due impulsi:

$$\int_{-\infty}^1 P_X(x < 1)dx = \int_1^{+\infty} P(x > 1)dx = \frac{1}{2}$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y-2) + \frac{1}{2}\delta(y+1) \quad (77)$$

Sia data la distribuzione di probabilità della variabile X , e la funzione che la associa alla variabile aleatoria Y . Determinare la densità della probabilità Y :

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right) y = \begin{cases} \pi & x < \pi \\ x & x \geq \pi \end{cases}$$

La variabile aleatoria Y è una variabile mista:

$$P_Y(y) = \int_0^{\pi} P_X(x \leq \pi)dx \delta(y-\pi) + \int_{\pi}^{2\pi} P_X(x \geq \pi)dx \frac{1}{2\pi} \text{rect}\left(\frac{y-\pi-\pi/2}{\pi}\right)$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y-\pi) + \frac{1}{4\pi} \text{rect}\left(\frac{y-3\pi/2}{\pi}\right) \quad (78)$$

Sia data la variabile aleatoria X e la sua relazione con la variabile aleatoria Y , determinare la densità di probabilità di quest'ultima:

$$P_X(x) = \frac{1}{4a} \text{rect}\left(\frac{x}{4a}\right) y = \begin{cases} -a & x < -a \\ x & -a \geq x < a \\ a & x \geq a \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \int_{-2a}^{-a} \frac{1}{4a} dx \delta(y+a) + \int_{-a}^a \frac{1}{4a} dx \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{y}{2a}\right) + \int_a^{2a} \frac{1}{4a} dx \delta(y-a)$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{4} \left[\delta(y+a) + \delta(y-a) + \frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{y}{2a}\right) \right] \quad (79)$$

Determinare il valore medio e deviazione standard della seguente densità di probabilità:

$$P_x(x) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(t + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right)$$

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\frac{1}{2} \text{rect}\left(t + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right) \right] dx$$

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 0$$

$$\mu_x = 0 \quad (80)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left[\frac{1}{2} \text{rect} \left(t + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 x^2 dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\
 \sigma_x^2 &= \frac{7}{3}
 \end{aligned} \tag{81}$$

Date due variabili aleatorie indipendenti X e Y di statistica gaussiana, determinare la densità di probabilità della variabile dipendente $Z = X + Y$. Si può risolvere sia nel dominio di z oppure in frequenza tramite la funzione caratteristica:

$$\begin{aligned}
 P_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \\
 P_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \\
 P_Z(z) &= P_X(x) * P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{z-\mu_x-\mu_y}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \\
 P_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z-\mu_z}{2\sigma_z^2}}
 \end{aligned}$$

Data la variabile aleatoria Z data dalla combinazione lineare di due variabili aleatorie uniformemente distribuite sull'intervallo $[-1/2, 1/2]$:

$$z = ax + by + c$$

Per ritornare ad un caso noto si applicano le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned}
 x' &= ax \\
 y' &= by + c \\
 z &= x' + y'
 \end{aligned}$$

Si calcolano le densità di probabilità di queste nuove variabili aleatorie:

$$\begin{aligned}
 P_{X'}(x') &= \text{rect} \left(\frac{x'}{a} \right) \left| \frac{1}{a} \right| \\
 P_{Y'}(y') &= \text{rect} \left(\frac{y' - c}{b} \right) \left| \frac{1}{b} \right| \\
 P_Z(z) &= P_{X'}(x') * P_{Y'}(y') = \left| \frac{1}{ab} \right| \text{rect} \left(\frac{x'}{a} \right) * \text{rect} \left(\frac{y' - c}{b} \right)
 \end{aligned}$$

$$P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < c - \frac{a+b}{2} \wedge z \geq c + \frac{a+b}{2} \\ \left| \frac{1}{ab} \right| \frac{1}{a} \left(\frac{a+b}{2} - |z-c| \right) & c - \frac{a+b}{2} \leq z < c - \frac{b-a}{2} \wedge c + \frac{b-a}{2} \leq z < c + \frac{a+b}{2} \\ \left| \frac{1}{ab} \right| & c - \frac{b-a}{2} \leq z < c + \frac{b-a}{2} \end{cases} \quad (82)$$

Data la variabile aleatoria dipendente Y , combinazione lineare di due variabili aleatorie X_1 e X_2 . Determinare date le densità di probabilità di queste ultime la densità di probabilità di Y :

$$\begin{aligned} y &= 7x_1 + x_2 - 3 \\ P_{X_1}(x_1 = -2) &= 0.6 \\ P_{X_1}(x_1 = 2) &= 0.4 \\ P_{X_2}(x_2 = -1) &= 0.5 \\ P_{X_2}(x_2 = 1) &= 0.5 \end{aligned}$$

Poiché sono possibili solo 4 realizzazioni della variabile Y , è possibile creare una tabella caratterizzata dai quattro possibili valori:

	$x_1 = -2, P = 0.6$	$x_1 = 2, P = 0.4$
$x_2 = -1, P = 0.5$	$-18, P = 0.3$	$10, P = 0.2$
$x_2 = 1, P = 0.5$	$-16, P = 0.3$	$12, P = 0.2$

Si esprime quindi la densità di probabilità della variabile discreta Y :

$$P_Y(y) = \frac{3}{10}\delta(y+18) + \frac{1}{5}\delta(y-10) + \frac{3}{10}\delta(y+16) + \frac{1}{5}\delta(y-12) \quad (83)$$

Si può ottenere lo stesso risultato lavorando con le densità discrete delle due variabili X_1 e X_2 :

$$\begin{aligned} P_{X_1}(x_1) &= \frac{3}{5}\delta(x_1+2) + \frac{2}{5}\delta(x_1-2) \\ P_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{2}\delta(x_2+1) + \frac{1}{2}\delta(x_2-1) \end{aligned}$$

Si sostituiscono due variabili di appoggio:

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= 7x_1 \\
 x'_2 &= x_2 - 3 \\
 P_{X'_1}(x'_1) &= \frac{1}{7} \left[\frac{3}{5} \delta(x'_1/7 + 2) + \frac{2}{5} \delta(x'_1/7 - 2) \right] = \frac{3}{5} \delta(x'_1 + 14) + \frac{2}{5} \delta(x'_1 - 14) \\
 P_{X'_2}(x'_2) &= \frac{1}{2} \delta(x'_2 + 4) + \frac{1}{2} \delta(x'_2 + 2) \\
 P_Y(y) &= P_{X'_1}(x'_1) * P_{X'_2}(x'_2) = \left[\frac{3}{5} \delta(x'_1 + 14) + \frac{2}{5} \delta(x'_1 - 14) \right] * \left[\frac{1}{2} \delta(x'_2 + 4) + \frac{1}{2} \delta(x'_2 + 2) \right] \\
 P_Y(y) &= \frac{3}{10} \delta(y + 18) + \frac{1}{5} \delta(y - 10) + \frac{3}{10} \delta(y + 16) + \frac{1}{5} \delta(y - 12)
 \end{aligned}$$

Dato il processo aleatorio $x(t)$ stazionario, avente densità di probabilità uniforme sull'intervallo $[-2, 10]$, ed ha una covarianza:

$$C_X(\tau) = A \text{tri} \left(\frac{\tau}{2} \right)$$

Calcolare il valor medio e A :

$$\begin{aligned}
 \mu_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x) dx = \int_{-2}^{10} \frac{x}{12} dx = 4 \\
 C_X(\tau) &= E[(x(t + \tau) - \mu_x)(x(t) - \mu_x)] \\
 C_X(0) &= E[(x(t) - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 \\
 \mu_x^{(2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_X(x) dx = \int_{-2}^{10} \frac{x^2}{12} dx = 28 \\
 \sigma_x^2 &= \mu_x^{(2)} - \mu_x^2 = 28 - 16 = 12 \\
 C_X(0) &= A = 12
 \end{aligned} \tag{84}$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione di X :

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + \mu_x^2 = 12 \text{tri} \left(\frac{\tau}{2} \right) + 16 \tag{85}$$

Sia:

$$y(t) = x(t) + x(t - 1)$$

Determinare il valore medio e la funzione di autocorrelazione di $y(t)$:

$$\mu_y = E[y(t)] = E[x(t)] + E[x(t - 1)] = 2\mu_x = 8 \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= E[t(t+\tau)y(t)] = E[(x(t+\tau) + x(t+\tau-1))(x(t) + x(t-1))] \\
 &= E[x(t+\tau)x(t)] + E[x(t+\tau)x(t-1)] + E[x(t+\tau-1)x(t)] + E[x(t+\tau-1)x(t-1)] \\
 &= R_X(\tau) + R_X(\tau-1) + R_X(\tau+1) + R_X(\tau) = 2R_X(\tau) + 2R_X(\tau+1) \\
 R_Y(\tau) &= 24\text{tri}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 32 + 24\text{tri}\left(\frac{\tau+1}{2}\right) + 32 \\
 R_Y(\tau) &= 24\text{tri}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 24\text{tri}\left(\frac{\tau+1}{2}\right) + 64 \tag{87}
 \end{aligned}$$

Determinare la potenza di Y :

$$P_Y = R_Y(0) = 24 + 24\frac{1}{2} + 64 = 100 \tag{88}$$

Date tre variabili aleatorie indipendenti tra di loro A , B e θ , determinare il valore medio e la densità spettrale di potenza del processo $x(t)$:

$$x(t) = (A + 2B) \cos(300\pi t + \theta) + n(t)$$

Le tre variabili aleatorie hanno distribuzione uniforme rispettivamente in $[-1, +1]$, $[-2, +2]$ e $[0, 4\pi]$:

$$\begin{aligned}
 P_A(a) &= \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{a}{2}\right) \\
 P_B(b) &= \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{b}{4}\right) \\
 P_\theta(\theta) &= \frac{1}{4\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta - 2\pi}{4\pi}\right)
 \end{aligned}$$

Il rumore è un rumore bianco a valor medio nullo, è anch'esso indipendente dalle variabili aleatorie A , B e θ , ed ha una funzione di autocorrelazione:

$$R_n(\tau) = 10\delta(\tau)$$

Il rumore ha quindi potenza:

$$P_n = R_n(0) = 10$$

Si calcola il valore atteso tramite la definizione:

$$\mu_x = E[x(t)] = E[(A + 2B) \cos(300\pi t + \theta) + n(t)]$$

Poiché sono variabili indipendenti, si può usufruire della proprietà di linearità della funzione “expectation”:

$$(E[A] + 2E[B])E[\cos(300\pi t + \theta)] + \cancel{E[n(t)]} \rightarrow 0$$

Poiché le variabili A e B sono distribuite uniformemente su un intervallo centrato nell'origine, i loro valori attesi sono nulli, per cui:

$$\mu_x = 0 \cdot E[\cos(300\pi t + \theta)] = 0$$

Per calcolare la densità spettrale di potenza si calcola la funzione di autocorrelazione e si pone $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[x(t + \tau)x^*(t)] \\ &= E[\{(A + 2B) \cos[300\pi(t + \tau) + \theta] + n(t + \tau)\} \{(A + 2B) \cos[300\pi t + \theta] + n(t)\}] \\ &= E[(A + 2B)^2 \cos\{300\pi(t + \tau) + \theta\} \cos(300\pi t + \theta)] + E[(A + 2B) \cos\{300\pi(t + \tau) + \theta\} n(t)] \\ &\quad + E[(A + 2B) \cos(300\pi t + \theta) n(t + \tau)] + E[n(t + \tau)n(t)] \end{aligned}$$

Poiché sono indipendenti tra di loro, si possono calcolare i contributi di ciascuna variabile indipendentemente:

$$\begin{aligned} E[(A + 2B)^2] &= E[A^2] + 4E[B^2] + \cancel{2E[A]E[B]} \xrightarrow{0} = \int_{-1}^1 \frac{a^2}{2} da + 4 \int_{-2}^2 \frac{b^2}{4} db = \frac{1}{3} + 4 \frac{4}{3} = \frac{17}{3} \\ E[\cos\{300\pi(t + \tau) + \theta\} \cos(300\pi t + \theta)] &= \int_0^{4\pi} \frac{1}{4\pi} \cos[300\pi(t + \tau) + \theta] \cos(300\pi t + \theta) d\theta \\ &\quad \xrightarrow{0} \frac{1}{8\pi} \int_0^{4\pi} \cos[300\pi(2t + \tau) - 2\theta] d\theta + \frac{1}{8\pi} \int_0^{4\pi} \cos(300\pi\tau) d\theta = \frac{1}{2} \cos(300\pi\tau) \\ E[(A + 2B)^2 \cos\{300\pi(t + \tau) + \theta\} \cos(300\pi t + \theta)] &= \frac{17}{3} \frac{1}{2} \cos(300\pi\tau) = \frac{17}{6} \cos(300\pi\tau) \\ E[n(t)] &= E[n(t + \tau)] = 0 \\ E[(A + 2B) \cos\{300\pi(t + \tau) + \theta\} n(t)] &= E[(A + 2B) \cos(300\pi t + \theta) n(t + \tau)] = 0 \\ E[n(t + \tau)n(t)] &= R_n(\tau) = 10\delta(\tau) \end{aligned}$$

Per cui la funzione di autocorrelazione del processo $x(t)$ risulta essere:

$$R_X(\tau) = \frac{17}{6} \cos(300\pi\tau) + 10\delta(\tau)$$

Si applica quindi la trasformata di Fourier per ottenere la densità spettrale di potenza:

$$G_X(f) = \frac{17}{12} [\delta(f - 150) + \delta(f + 150)] + 10 \quad (89)$$

Dato il segnale stocastico $x(t)$, sia $y(t)$ il segnale definito dalla seguente espressione:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t+T} x(t') dt'$$

Calcolare la densità spettrale di potenza di $y(t)$ in funzione di $x(t)$, e la potenza di $y(t)$. Il segnale $y(t)$ può essere espresso come un integrale su $[-\infty, +\infty]$, moltiplicato per una finestra:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \text{rect}\left(\frac{t' - t}{2T}\right) dt' = x(t) * \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Per cui la finestra rappresenta la risposta impulsiva $h(t)$ di un filtro, per cui la densità spettrale di potenza dell'uscita di un filtro si ottiene come:

$$G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f) = 4T^2 \text{sinc}^2(2Tf) G_X(f) \quad (90)$$

Calcolare la potenza del segnale $y(t)$, nel caso in cui $x(t)$ sia un segnale bianco e densità spettrale di potenza:

$$G_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Si calcola la potenza integrando la densità spettrale di y , oppure si calcola la funzione di autocorrelazione di y in $\tau = 0$:

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ 4T^2 \text{sinc}^2(2Tf) \frac{N_0}{2} \right\} = 2T \text{tri}\left(\frac{\tau}{2T}\right) \frac{N_0}{2}$$

La potenza è quindi:

$$P_Y(0) = N_0 T \quad (91)$$

Dato un processo $y(t)$:

$$y(t) = 4x(t-3) + 4x(t+3)$$

Dove $x(t)$ è un processo stazionario a valor medio nullo, e di funzione di autocorrelazione:

$$R_X(\tau) = 3e^{-|\tau|}$$

Calcolare la densità spettrale di potenza di $y(t)$, il suo valore atteso, la sua funzione di autocorrelazione e la sua potenza. Si calcola il valore atteso:

$$\mu_y = E[y(t)] = E[4x(t-3) + 4x(t+3)] = 4E[x(t-3)] + 4E[x(t+3)] = 0 \quad (92)$$

Si calcola ora la funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[y(t+\tau)y^*(t)] = E[\{4x(t+\tau-3) + 4x(t+\tau+3)\}\{4x(t-3) + 4x(t+3)\}] \\ &= 16E[x(t+\tau-3)x(t-3)] + 16E[x(t+\tau-3)x(t+3)] \\ &\quad + 16E[x(t+\tau+3)x(t-3)] + 16E[x(t+\tau+3)x(t+3)] \\ &= 16R_X(\tau-6) + 16R_X(\tau) + 16R_X(\tau) + 16R_X(\tau+6) \\ &= R_Y(\tau) = 16R_X(\tau-6) + 32R_X(\tau) + 16R_X(\tau+6) \end{aligned}$$

$$R_Y(\tau) = 16 \left(3e^{-|\tau-6|} + 6e^{-|\tau|} + 3e^{-|\tau+6|} \right) \quad (93)$$

Si calcola ora la potenza:

$$P_Y = R_Y(0) = 16(3e^{-6} + 6 + 3e^{-6}) = 96 + 96e^{-6} \quad (94)$$

Si calcola la densità spettrale di potenza come il transito attraverso un filtro, poiché il segnale $y(t)$ può essere espresso come:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * [4\delta(t-3) + 4\delta(t+3)] \\ h(t) &= 4\delta(t-3) + 4\delta(t+3) \\ H(f) &= 8 \cos(6\pi f) \\ G_X(f) &= \mathcal{F} \left\{ 3e^{-|\tau|} \right\} = \frac{3}{1+2i\pi f} + \frac{3}{1-2i\pi f} = \frac{6}{1+4\pi^2 f^2} \\ G_Y(f) &= 64 \cos^2(6\pi f) \frac{6}{1+4\pi^2 f^2} \end{aligned} \quad (95)$$

Dato un processo $x(t)$ stazionario, avente potenza $P_X = 19$ e covarianza $C_X(\tau) = 3\text{tri}(\tau)$, determinare il valor medio e la varianza:

$$C_X(0) = E[(x(t) - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 = 3 \quad (96)$$

$$R_X(0) = E[x^2(t)] = P_X = \mu_x^{(2)} = 19$$

$$\mu_x = \sqrt{\sigma_x^2 - \mu_x^{(2)}} = \sqrt{16} = 4 \quad (97)$$

Si suppone il segnale attraversa un filtro di risposta impulsiva $h(t) = \text{rect}(t/3)$, calcola il valore medio dell'uscita $y(t)$:

$$\mu_y = E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = E[x(t)] * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x \text{rect}\left(\frac{t}{3}\right) dt = 4 \int_{-3}^3 dt = 24 \quad (98)$$

Dato un processo $x(t)$ stazionario, di valore medio $\mu_x = -3$, potenza $P_X = 12$ e coefficiente di correlazione $\rho_X(\tau) = \text{sinc}(\tau/4)$, calcolare la densità spettrale di potenza:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= P_X - \mu_x^2 = 12 - 9 = 3 \\ C_X(\tau) &= \rho_X(\tau) \sigma_x^2 = 3 \text{sinc}\left(\frac{\tau}{4}\right) \\ R_X(\tau) &= C_X(\tau) + \mu_x^2 = 3 \text{sinc}\left(\frac{\tau}{4}\right) + 9 \\ G_X(f) &= \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = 12 \text{rect}(4f) + 9\delta(f) \end{aligned} \quad (99)$$

Questo processo viene filtrato con un filtro avente una funzione di trasferimento $H(f) = \cos(4\pi f)$, calcolare la potenza di $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 G_Y(f) &= |H(f)|^2 G_X(f) = \cos^2(4\pi f) [12\text{rect}(4f) + 9\delta(f)] \\
 P_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_Y(f) df = 12 \int_{-1/8}^{1/8} \cos^2(4\pi f) df + 9 = 6 \int_{-1/8}^{1/8} \cos(8\pi f) df + 6 \int_{-1/8}^{1/8} df + 9 \\
 &= 6 \frac{2}{8} + 9 \\
 P_Y &= \frac{21}{2}
 \end{aligned} \tag{100}$$

Sia il processo $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + x(t - 6)$$

Determinare il valore medio, la varianza e la funzione di autocorrelazione di $z(t)$:

$$\mu_z = E[z(t)] = E[x(t) + x(t - 6)] = 2\mu_x = -6 \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
 R_Z(\tau) &= E[z(t + \tau)z(t)] = E[x(t + \tau)x(t)] + E[x(t + \tau - 6)x(t)] + E[x(t + \tau)x(t - 6)] \\
 &\quad + E[x(t + \tau - 6)x(t - 6)] = R_X(\tau) + R_X(\tau - 6) + R_X(\tau + 6) + R_X(\tau) \\
 &= 2R_X(\tau) + 2R_X(\tau - 6) + R_X(\tau - 6) \\
 &= 6\text{sinc}\left(\frac{\tau}{4}\right) + 18 + 3\text{sinc}\left(\frac{\tau - 6}{4}\right) + 9 + 3\text{sinc}\left(\frac{\tau + 6}{4}\right) + 9 \\
 R_Z(\tau) &= 6\text{sinc}\left(\frac{\tau}{4}\right) + 6\sin\left(\frac{\tau + 6}{4}\right) + 36
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$\sigma_z^2 = P_Z - \mu_z^2 = R_Z(0) - 36 = 42 + 6\text{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) - 36 = 6 \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) \right] \tag{103}$$

Dato un processo $x(t) = A + n(t)$, il rumore è bianco, ha varianza σ_n^2 nota e valor medio nullo $\mu_n = 0$, calcolare la potenza del processo x :

$$P_X = E[x^2(t)] = E[A^2] + 2AE[n(t)] + E[n^2(t)] = A^2 + \sigma_n^2 \tag{104}$$

Il segnale viene filtrato in un filtro istantaneo:

$$y(t) = x(t) + x(t - 1)$$

Calcolare la potenza del segnale in uscita dal filtro:

$$\begin{aligned}
 P_Y &= E[y^2(t)] = E[(x(t) + x(t - 1))^2] = E[x^2(t)] + 2E[x(t)x(t - 1)] + E[x^2(t - 1)] \\
 &= P_X + 2R_X(1) + P_X = 2A^2 + 2\sigma_n^2 + 2R_X(1) \\
 R_X(\tau) &= E[(A + n(t + \tau))(A + n(t))] = A^2 + AE[n(t)] + AE[n(t + \tau)] + R_n(\tau) = A^2 + \sigma_n^2\delta(\tau) \\
 P_Y &= 2A^2 + \sigma_n^2 + 2A^2 + 2\sigma_n^2\delta(1)
 \end{aligned}$$

$$P_Y = 4A^2 + 2\sigma_n^2 \quad (105)$$