Fondamenti di Telecomunicazioni

Formulario di Fondamenti di Telecomunicazioni

Anno Accademico: 2023/24

Giacomo Sturm

Dipartimento di Ingegneria Civile, Informatica e delle Tecnologie Aeronautiche
Università degli Studi "Roma Tre"

1 Analisi nel Tempo

Energia e Potenza

Dato un segnale tempo continuo $x(t)$, o una sequenza $x[n]$, la sua energia e potenza si ottengono come:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = R_{xx}(0) \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = T \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = R_{xx}[0]$$

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Se il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T o la sequenza $x[n]$ è periodica di periodo M, la loro potenza si calcola come:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \qquad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |x[n]|^2$$

Proprietà della Delta di Dirac

La delta ha area unitaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = 1 \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

Proprietà del Campionamento:

$$x(t) \cdot \delta(t-\tau) = x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \qquad x[n] \cdot \delta[n-m] = x[m] \cdot \delta[n-m]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t-\tau) \mathrm{d}t = x(\tau) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta[n-m] = x[m]$$

Convoluzione per una Delta:

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \qquad x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$u(t - t') = \int_{-\infty}^{t-t'} \delta(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad u[n - m] = \sum_{k=-\infty}^{n-m} \delta[k + 1]$$

$$\delta(t) = \delta(-t) \qquad \delta[n] = \delta[-n]$$

Proprietà di Scala:

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \qquad \delta[an] = \frac{1}{a}\delta[n]$$

Convoluzione

Definizione:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)\mathrm{d}\tau \qquad x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n - k]$$

Proprietà Distributiva:

$$(x(t) + y(t)) * z(t) = x(t) * z(t) + y(y) * z(t) \qquad (x[n] + y[n]) * z[n] = x[n] * z[n] + y[n] * z[n]$$

Traslazione:

$$x(t - t_1) * y(t - t_2) = z(t - t_1 - t_2) \qquad x[n - n_1] * y[n - n_2] = z[n - n_1 - n_2]$$

Correlazione

Definizione:

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)y^*(\tau)\mathrm{d}\tau = R_{xy}(t) \qquad x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n + k]y[k] = R_{xy}[n]$$

$$x(t) \otimes y(t) = x(t) * y^*(-t) \qquad x[n] \otimes y[n] = x[n] * y^*[-n]$$

Proprietà:

$$R_{xy}(t) = R^*_{yx}(-t) \qquad R_{xy}[n] = R^*_{yx}[-n]$$

$$R_{xx}(0) = E_x \qquad R_{xx}[0] = E_x$$

2 Analisi in Frequenza

Serie di Fourier

Definizione per un segnale $x(t)$ periodico di periodo T:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\mathrm{d}t$$

Proprietà di Linearità:

$$ax(t) + by(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(ac_n^{(x)} + bc_n^{(y)} \right) e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Traslazione nel Tempo e di Armonica:

$$x(t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_n^{(x(t))} e^{-i\frac{2\pi n t_0}{T}} \right) e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \qquad x(t) \cdot e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n-k} e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Proprietà della Modulazione:

$$x(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} c_{k-1} + \frac{1}{2} c_{k+1} \right) e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Proprietà della Derivazione:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_n \frac{2i\pi n}{T} \right) e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Potenza di una Serie:

$$P_x = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Serie di Segnali Reali:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t \end{cases}$$

Serie Notevoli:

$$e^{\frac{2i\pi kt}{T}} \rightarrow c_n = \mathrm{sinc}(n-k) = \delta(n-k)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \rightarrow c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \rightarrow c_1 = c_{-1}^* = \frac{1}{2i}$$

$$\pi(t) \rightarrow c_n = \frac{1}{T}$$

Trasformata di Fourier

Definizione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi t f} \mathrm{d}f \qquad\qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi t f} \mathrm{d}t$$

Proprietà di Linearità:

$$ax(t) + by(t) = aX(f) + bY(f)$$

Proprietà di Dualità:

$$x(t) \to X(f) \iff X(t) \to x(-f)$$

Proprietà di Scala:

$$x(at) \to \frac{1}{|a|} X\left(\frac{1}{a}\right)$$

Traslazione nel Tempo ed in Frequenza:

$$x(t - t_0) \to e^{-2i\pi f t_0} X(f) \qquad\qquad e^{2i\pi f_0 t} x(t) \to X(f - f_0)$$

Proprietà della Modulazione:

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \to \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0)$$

Proprietà della Derivazione e dell'Integrazione:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \to 2i\pi f X(f) \qquad\qquad 2i\pi t x(t) \to \frac{\mathrm{d}X(f)}{\mathrm{d}f}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \to \frac{1}{2} X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{2i\pi f}$$

Proprietà della Convoluzione e della Correlazione:

$$\begin{gathered} x^*(t) \to X^*(-f) \\ x(t) \otimes y(t) \to X(f) \cdot Y^*(f) \\ x(t) * y(t) \to X(f) \cdot Y(f) \\ x(t) \cdot y(t) \to X(f) * Y(f) \end{gathered}$$

Energia in Frequenza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = E_x$$

Trasformata di Segnali Reali:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\mathrm{d}t - i\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\mathrm{d}t$$
$$X(-f) = X^*(f)$$

Trasformata di segnali periodici, di periodo T, dove $\overline{X}$ è la trasformata di una replica $\overline{x}(t)$ del segnale $x(t)$ in un unico periodo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nt/T} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\overline{X}\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Trasformate Notevoli:

$e^{2i\pi f_0 t} \rightarrow \delta(f - f_0)$ $\qquad$ $\delta(t - t_0) \rightarrow e^{-2i\pi f t_0}$

$\frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow \mathrm{sinc}(fT)$ $\qquad$ $T\sin(Tt) \rightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$

$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow T\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$ $\qquad$ $T\mathrm{sinc}^2(Tt) \rightarrow \mathrm{tri}\left(\frac{f}{T}\right)$

$\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0)e^{i\phi} + \delta(f + f_0)e^{-i\phi}\right]$ $\qquad$ $\sin(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0)e^{i\phi} - \delta(f + f_0)e^{-i\phi}\right]$

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$
$$e^{-\alpha t}u(t) \rightarrow \frac{1}{\alpha + 2i\pi f}$$
$$e^{-\alpha|t|} \rightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$
$$u(t) \rightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f}$$

Trasformata di Fourier Tempo Discreta

Definizione:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-2i\pi f n T} \qquad x[n] = T\int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)e^{2i\pi n f T}\mathrm{d}f$$

Proprietà del Valor Medio:

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \qquad x[0] = T\int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)\mathrm{d}f$$

Traslazione in Frequenza, e Ritardo di Campioni:

$$x[n-n_0] \to X(f)e^{-2i\pi n_0 fT} \qquad\qquad x[n]e^{2i\pi n_0 fT} \to X(f-f_0)$$

Proprietà della Convoluzione e della Correlazione:

$$x[n] * y[n] \to X(f) \cdot Y(f)$$
$$x[n] \cdot y[n] \to X(f) \circledast Y(f)$$
$$X(f) \circledast Y(f) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\theta)Y(f-\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$X(f) * Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) \circledast Y(f-n/T)$$
$$R_{xy}[n] \to X(f)Y^*(f)$$
$$R_{xx}[n] \to |X(f)|^2$$

Energia in Frequenza:

$$E_x = T \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Trasformate Notevoli:

$$\delta[n] \to 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \to e^{-i\pi(N-1)fT} \frac{\sin(\pi f NT)}{\sin(\pi f T)}$$
$$\delta[n] + \delta[n-1] \to 2ie^{-i\pi fT} \cos(\pi f T)$$
$$\delta[n] - \delta[n-1] \to 2ie^{-i\pi fT} \sin(\pi f T)$$

Campionamento di un Segnale $x(t)$ con Passo T_c:

$$x[n] = x(t) \cdot \pi(t) = x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta(t-nT_c)$$
$$X_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

Frequenza Minima di Campionamento senza Aliasing:

$$f_{c\,\min} = 2f_{X\,\max}$$
$$T_{c\,\max} = \frac{1}{2f_{X\,\max}}$$

Ricostruzione di un Segnale Campionato:

$$x'(t) = x_c(t) * h(t)$$
$$X'(f) = X_c(f) \cdot H(f)$$

3 Fenomeni Aleatori

Distribuzione Cumulativa di Probabilità:

$$D_X(x) = \Pr(X \leq x)$$
$$D_X(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Pr(x = x_i)u(x - x_i)$$

Densità di Probabilità:

$$P_X(x) = \frac{\mathrm{d}D_X(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$D_X(x) = \int_{-\infty}^{x} P_X(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}$$
$$P_X(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Pr(x = x_i)\delta(x - x_i)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x)\mathrm{d}x = 1$$

Variabile Aleatoria Dipendente:

$$Y = f(X) : \; D_Y(y) = D_X(f^{-1}(y))$$
$$Y = f(X) : \; P_Y(y) = P_X(f^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|$$
$$P_Y(y) = \sum_{i=0}^{N} P_X(f_i^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}f_i^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|$$

Valore Medio:

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xP_X(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N} x_i P_i$$

Valore Quadratico Medio:

$$\mu_x^{(2)} = E[n^2]$$

Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \mu_x^{(2)} - \mu_x^2$$

Deviazione Standard:

$$\sigma_x = E[x - \mu_x]$$

Funzione Caratteristica:

$$\mathbf{P}_x(f) = E[e^{-2i\pi f x}]$$
$$\left[-\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_x(f)}{\mathrm{d}f} \right]_{f=0} = \mu_x$$

Proprietà Funzione Valore Atteso:

$$E[y] = E[f(x)]$$
$$E[af(x) + bg(x)] = aE[f(x)] + bE[g(x)]$$

Statistica Uniforme su $[a, b]$

$$P_X(x) = \frac{1}{|b-a|}\mathrm{rect}\left(\frac{x-\mu_x}{|b-a|}\right)$$
$$\mu_x = \frac{b+a}{2}$$
$$\mu_x^{(2)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$
$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\mathbf{P}_x(f) = \mathrm{sinc}[(b-a)f]e^{-i\pi f(b-a)}$$

Statistica Esponenziale

$$P_X(x) = \lambda e^{-\lambda t}u(t)$$
$$\mu_x = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mu_x^{(2)} = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\mathbf{P}_x(f) = \frac{\lambda}{\lambda + 2i\pi f}$$

Statistica Gaussiana

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$
$$\mu_x = \mu_x$$
$$\sigma_x^2 = \sigma_x^2$$
$$\mu_x^{(2)} = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$
$$\mathbf{P}_x(f) = e^{-\pi^2\sigma_x^2 f^2}e^{-2i\pi f\mu_x}$$

Fenomeni Aleatori Bidimensionali

Distribuzione Cumulativa di Probabilità:

$$D_{X,Y}(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} D_{X,Y}(x,y) = P_{X,Y}(x,y)$$

Densità di Probabilità Congiunta:

$$P_{X,Y}(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} P_{i,j}\delta(x-x_i)\delta(y-y_j)$$
$$\iint_{\mathbb{R}^2} P_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

Densità di Probabilità Marginali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = P_X(x)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = P_Y(y)$$

Valore Atteso Bidimensionale:

$$E[f(x,y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)P_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Momento Misto di Ordine $1,1$:

$$\mu_{xy}^{1,1} = E[xy]$$

Se le due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti, la probabilità congiunta fattorizza:

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$
$$E[xy] = \mu_x\mu_y$$

Covarianza:

$$\sigma_{x,y} = E[(x-\mu_x)\cdot(y-\mu_y)] = \mu_{x,y}^{1,1} - \mu_x\mu_y$$

Fattore di Correlazione:

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}$$

Variabile Dipendente Bidimensionale

Data la variabile aleatoria dipendente Z:

$$Z = X + Y$$

Funzione Caratteristica:

$$\mathbf{P}_z(f) = \mathbf{P}_x(f) \cdot \mathbf{P}_y(f)$$

Densità di Probabilità:

$$P_Z(z) = P_X(x) * P_Y(y)$$

Valore Medio:

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y$$

Valore Quadratico Medio:

$$\mu_z^{(2)} = \mu_x^{(2)} + 2\mu_{x,y}^{1,1} + \mu_y^{(2)}$$

Varianza:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

4 Processi Aleatori

Definizione di una variabile aleatoria X discreta, dato un processo aleatorio, composto da N possibili realizzazioni se discreto:

$$X_i : \{x_1(t_i), \cdots, x_N(t_i)\}$$

Oppure una variabile aleatoria continua, se sono possibili infinite realizzazioni di $x(t_i)$:

$$X_i : x(t_i)$$

Gerarchie del Primo Ordine

Valore Medio:

$$\mu_x = E[x(t)]$$

Valore Quadratico Medio:

$$\mu_x^{(2)} = E[x^2(t)]$$

Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[(x(t) - \mu_x)^2]$$

Gerarchie del Secondo Ordine

Funzione di (Auto)-Correlazione:

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$
$$R_x(t_1, t_1) = P_x$$

Funzione di Covarianza:

$$C_x(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - \mu_x(t_1)) \cdot (x(t_2) - \mu_x(t_2))] = R_x(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2)$$

Fattore di Correlazione:

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)}}$$

Processo Stazionario

Le gerarchie del primo ordine sono indipendenti dal tempo:

$$\mu_x(t) = \mu_x$$
$$\mu_x(t)^{(2)} = \mu_x^{(2)}$$
$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$$

Le gerarchie del secondo ordine dipendono dalla differenza tra i due istanti di tempo t_1 e t_2:

$$\tau = t_1 - t_2$$
$$R_x(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)]$$
$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$
$$R_x(0) = P_x$$
$$C_x(\tau) = E[(x(t+\tau) - \mu_x(t+\tau))(x(t) - \mu_x(t))] = R_x(\tau) - \mu_x(t+\tau)\mu_x(t)$$
$$\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sqrt{\sigma_x^2(t+\tau)\sigma_x^2(t)}}$$

Densità Spettrale di Energia:

$$G_x(f) = \mathscr{F}\{R_x(\tau)\}$$
$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\mathrm{d}f$$

Processo Armonico

Definizione:

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$$
$$P_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\varphi}\mathrm{rect}\left(\frac{\varphi - \pi}{2\pi}\right)$$

Valore Medio:

$$\mu_x = 0$$

Valore Quadratico Medio:

$$\mu_x^{(2)} = \frac{1}{2}$$

Varianza:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$$

Correlazione:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$$

Covarianza:

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$$

Densità Spettrale di Potenza:

$$G_x(f) = \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right)$$

Processo Ergotico

Processo descritto da un'unica realizzazione, le caratteristiche del processo dipendono dalla stessa realizzazione traslata nel tempo:

$$E[f(x(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x(t))P_X(x)\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{d}t$$

$$E[x(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{d}t = \mu_x$$

$$E[x^2(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\mathrm{d}t = P_x$$

Processi Dipendenti

I parametri si calcolano analogamente ai fenomeni aleatori bidimensionali, considerando i processi $x(t)$ e $y(t)$ indipendenti tra di loro:

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

Gerarchie del Primo Ordine:

$$\mu_z = a\mu_x + b\mu_y$$
$$\mu_z^{(2)} = a^2\mu_x^{(2)} + 2ab\mu_x\mu_y + b^2\mu_y^{(2)}$$
$$P_z = a^2P_x + 2ab\mu_x\mu_y + b^2P_y$$
$$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$$

Gerarchie del Secondo Ordine:

$$R_z(\tau) = a^2R_x(\tau) + 2ab\mu_x\mu_y + b^2R_y(\tau)$$
$$C_z(\tau) = a^2C_x(\tau) + b^2C_y(\tau)$$
$$G_z(f) = a^2G_x(f) + 2ab\mu_x\mu_y\delta(f) + b^2G_y(f)$$
$$\rho_x(\tau) = \frac{a^2C_x(\tau) + b^2C_y(\tau)}{\sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2}}$$

Rumore

Definito come rumore additivo gaussiano bianco. Ha una statistica gaussiana e valor medio nullo:

$$P_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}$$
$$\mu_n = 0$$
$$\sigma_n^2 = P_n$$

Poiché è un segnale bianco, ha densità spettrale di energia costante, su banda illimitata:

$$G_n(f) = k$$
$$P_n = +\infty$$
$$R_n(\tau) = k\delta(\tau)$$

Oppure limitata in banda:

$$G_n(f) = \frac{k}{2B}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{P_n}{2B}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$P_n = k$$
$$R_n(\tau) = k\mathrm{sinc}\left(2B\tau\right) = P_n\mathrm{sinc}(2B\tau)$$

Transito Attraverso un Sistema

Dato un filtro di risposta impulsiva $h(t)$, si considera l'uscita $y(t)$, con un processo aleatorio $x(t)$ in entrata:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Valore Medio:

$$\mu_y = \mu_x H(0)$$

Correlazione:

$$R_y(\tau) = h(-t) * h(t) * R_X(\tau)$$

Densità Spettrale di Energia:

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$$

Potenza:

$$P_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f) \mathrm{d}f$$