

Soluzioni Esonero del 24 Novembre

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su

<https://github.com/00Darxk/Fondamenti-di-Telecomunicazioni>

Indice

1	Soluzioni Svolte	3
1.1	Serie di Fourier	3
1.2	Convoluzioni	6
1.3	Proprietà Sistemi	7
1.4	Sistemi Ingresso-Uscita	7

1 Soluzioni Svolte

1.1 Serie di Fourier

Calcolare i coefficienti di Fourier del segnale x , la sua potenza e la sua trasformata:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \cos^2 \left[\frac{\pi(t - 2T_0)}{4T_0} \right]$$

Per la proprietà di bisezione del coseno e per il coseno della differenza si ottiene la seguente espressione equivalente:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos \left[\frac{\pi(t - 2T_0)}{2T_0} \right] = -\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi t}{2T_0} \right) \cos \left(\frac{-2T_0\pi}{2T_0} \right) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi t}{2T_0} \right)$$
$$T = 4T_0$$

Si esprime il coseno in forma esponenziale per determinare i coefficienti per confronto diretto:

$$x(t) = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{j\pi t}{2T_0}} - e^{-\frac{j\pi t}{2T_0}} \right)$$

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$c_n = 0 \quad \forall n \neq \pm 1 \quad (2)$$

Si calcola la potenza tramite Parseval:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{8} \quad (3)$$

Dato un segnale periodico la sua trasformata si può esprimere come:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) = \frac{1}{4} \delta \left(f - \frac{1}{4T_0} \right) + \frac{1}{4} \delta \left(f + \frac{1}{4T_0} \right) \quad (4)$$

Calcolare la trasformata del segnale x :

$$x(t) = \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right) & -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & n \notin \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4} \right) \end{cases}$$

Si può esprimere il segnale replicato come un coseno moltiplicato per una finestra:

$$\dot{x}(t) = \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right) \text{rect} \left(\frac{2t}{T} \right)$$

Si individua il periodo \bar{T} , e si determinano i coefficienti tramite la definizione:

$$\bar{T} = 2T$$

$$c_n = \frac{1}{\bar{T}} \int_{-\frac{\bar{T}}{2}}^{\frac{\bar{T}}{2}} x(t) e^{-2i\pi n t / \bar{T}} dt$$

Altrimenti si determinano rispetto alla trasformata di Fourier del segnale replicato $\dot{x}(t)$:

$$c_n = \frac{1}{\bar{T}} \dot{X} \left(\frac{n}{\bar{T}} \right)$$

Si considera la trasformata di \dot{x} :

$$\dot{X}(f) = \frac{T}{2} \text{sinc} \left(\frac{T}{2} f \right) * \left[\frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{2T} \right) + \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{2T} \right) \right]$$

$$\dot{X}(f) = \frac{T}{4} \text{sinc} \left[\frac{T}{2} \left(f - \frac{1}{2T} \right) \right] + \frac{T}{4} \text{sinc} \left[\frac{T}{2} \left(f + \frac{1}{2T} \right) \right]$$

I coefficienti sono quindi:

$$c_n = \frac{1}{\bar{T}} \dot{X} \left(\frac{n}{\bar{T}} \right) \frac{T}{4} \text{sinc} \left[\frac{T}{2} \left(\frac{n}{\bar{T}} - \frac{1}{2T} \right) \right] + \frac{T}{4} \text{sinc} \left[\frac{T}{2} \left(\frac{n}{\bar{T}} + \frac{1}{2T} \right) \right]$$

$$\bar{T} = 2T$$

$$c_n = \frac{1}{8} \text{sinc} \left(\frac{n-1}{4} \right) + \frac{1}{8} \text{sinc} \left(\frac{n+1}{4} \right) \quad (5)$$

La trasformata del segnale completo x si esprime come:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{8} \text{sinc} \left(\frac{n-1}{4} \right) + \frac{1}{8} \text{sinc} \left(\frac{n+1}{4} \right) \right] \delta \left(f - \frac{n}{\bar{T}} \right) \quad (6)$$

Calcolare i coefficienti del segnale x , la trasformata e la potenza:

$$x(t) = \frac{2}{3} - i \cos \left(\frac{\pi t}{3T_0} \right)$$

$$T = 6T_0$$

Per confronto diretto si ottengono i coefficienti:

$$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{i}{2} e^{i \frac{\pi t}{3T_0}} - \frac{i}{2} e^{-i \frac{\pi t}{3T_0}}$$

$$c_0 = \frac{2}{3} \quad (7)$$

$$c_1 = c_{-1} = -\frac{i}{2} \quad (8)$$

La trasformata di ottiene come:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{2}{3} \delta(f) - \frac{i}{2} \delta\left(f - \frac{1}{6T_0}\right) - \frac{i}{2} \delta\left(f + \frac{1}{6T_0}\right) \quad (9)$$

La potenza si calcola con il teorema di Parseval:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (10)$$

Calcolare i coefficienti e la trasformata di Fourier del segnale periodico x , di periodo T :

$$x(t) = \begin{cases} t & -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0 & t \notin \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \end{cases}$$

I coefficienti si possono calcolare con la definizione, altrimenti si calcola rispetto al segnale replicato \dot{x} :

$$c_n = \frac{1}{T} \dot{X}\left(\frac{n}{T}\right)$$

$$\dot{x}(t) = t \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

Questa trasformata si può calcolare mediante la proprietà della derivazione della trasformata:

$$\dot{x}(t) = t \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

$$\dot{X}(f) = -\frac{1}{2\pi i} X_1(f)$$

$$x_1(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) X_1(f) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2} f\right)$$

$$\dot{X}(f) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{df} \left[\frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2} f\right) \right] = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{df} \left[\frac{T}{2} \frac{\sin\left(\frac{T}{2} \pi f\right)}{\frac{T}{2} \pi f} \right]$$

$$\dot{X}(f) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\cos\left(\frac{T}{2} \pi f\right) \frac{T}{2} \pi f - \sin\left(\frac{T}{2} \pi f\right)}{f^2} = \frac{iT}{4\pi f} \cos\left(\frac{\pi f T}{2}\right) - \frac{i}{2\pi^2 f^2} \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right)$$

I coefficienti di Fourier sono allora:

$$c_n = \frac{1}{T} \frac{iT}{4\pi \frac{n}{T}} \cos\left(\frac{\pi \frac{n}{T} T}{2}\right) - \frac{i}{2\pi^2 \left(\frac{n}{T}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi \frac{n}{T} T}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{iT}{4\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{iT^2}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (11)$$

Per cui per $n = 2k$ si annulla il coseno, mentre per $n = 2k - 1$ si annulla il seno. Mentre la trasformata del segnale risulta essere:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{iT}{4\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{iT^2}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (12)$$

1.2 Convoluzioni

Calcolare l'autoconvoluzione del segnale x :

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2] \\
 x[n] * x[n] &= (\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2]) * (\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2]) \\
 &= \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2] - \delta[n-2] + \delta[n-4] - \delta[n] + \delta[n+2] - \delta[n] + \delta[n+4] \\
 x[n] * x[n] &= 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 2\delta[n+2] + \delta[n-4] + \delta[n+4]
 \end{aligned} \tag{13}$$

Calcolare l'autoconvoluzione di x :

$$\begin{aligned}
 x[n] &= 2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1] \\
 x[n] * x[n] &= (2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1]) * (2\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1]) \\
 &= 2\delta[n] - 2\delta[n-1] - 2\delta[n+1] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n] - 2\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n+2] \\
 x[n] * x[n] &= 6\delta[n] - 4\delta[n-1] - \delta[n+1] + \delta[n-2] + \delta[n+2]
 \end{aligned} \tag{14}$$

Calcolare la convoluzione tra i segnali x e y :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= u(t) \\
 y(t) &= t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \\
 x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) y(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \int_{-T}^t \tau d\tau = \frac{t^2 - T^2}{2} & -T \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases} \\
 x(t) * y(t) &= \begin{cases} 0 & t < -T \wedge t \geq T \\ \frac{t^2 - T^2}{2} & -T \leq t < T \end{cases}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Calcolare la convoluzione tra i segnali x e y :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= u(t) - u(-t) \\
 y(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \\
 x(t) * y(t) &= \begin{cases} -2T & t < -T \\ -\int_{t-T}^0 d\tau + \int_0^{t+T} d\tau & -T \leq t < T \\ 2T & t \geq T \end{cases} \\
 x(t) * y(t) &= \begin{cases} -2T & t < -T \\ 2t & -T \leq t < T \\ 2T & t \geq T \end{cases}
 \end{aligned} \tag{16}$$

1.3 Proprietà Sistemi

Dati i sistemi seguenti, definite le loro proprietà:

$$y(t) = x^2(t) - x(t+1)$$

Non lineare, invariante nel tempo, non causale

$$y(t) = x(t-1)u(t-1)$$

Lineare, non invariante nel tempo e causale.

$$y(t) = x(t+1) + u(t-1)$$

Non lineare, non invariante nel tempo non è causale

$$y(t) = x(t)x(t-1)$$

Non lineare, invariante nel tempo, causale

1.4 Sistemi Ingresso-Uscita

Data la funzione di trasferimento H calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$H(f) = [\text{sinc}(2Tf) - 2\text{sinc}(4Tf)] e^{-2i\pi ft}$$

$$h(t) = \frac{1}{2T} \text{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) - \frac{1}{2T} \text{rect}\left(\frac{t-T}{4T}\right) \quad (17)$$

L'uscita del sistema con un gradino in entrata risulta:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \left[\frac{1}{2T} \text{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) - \frac{1}{2T} \text{rect}\left(\frac{t-T}{4T}\right) \right] * u(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \int_{-T}^t -\frac{1}{2T} d\tau & -T \leq t < 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \leq t < 2T \\ -\frac{1}{2} - \int_{2T}^t \frac{1}{2T} d\tau = -\frac{1}{2} - \frac{t-2T}{2T} & 2T \leq t < 3T \\ -1 & t \geq 3T \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ -\frac{t+T}{2T} & -T \leq t < 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \leq t < 2T \\ 1 - \frac{t}{2T} & 2T \leq t < 3T \\ -1 & t \geq 3T \end{cases} \quad (18)$$

Data la risposta impulsiva h calcolare la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= e^{-t} \cos(2\pi f_0 t) u(t) \\
 H(f) &= \frac{1}{1 + 2i\pi f} * \left[\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \right] \\
 H(f) &= \frac{1}{2 + 4i\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2 + 4i\pi(f + f_0)}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Calcolare l'uscita del sistema con una delta centrata in $1/f_0$ in entrata:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h(t) * \delta\left(t - \frac{1}{f_0}\right) = e^{-t + \frac{1}{f_0}} \cos(2\pi f_0 t + 2\pi) u\left(t - \frac{1}{f_0}\right) \\
 y(t) &= e^{-t + \frac{1}{f_0}} \cos(2\pi f_0 t) u\left(t - \frac{1}{f_0}\right)
 \end{aligned} \tag{20}$$

Data la risposta impulsiva h , determinare la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{\sin^2(2\pi f_0 t)}{\pi t} = \sin(2\pi f_0 t) 2T_0 \text{sinc}(2f_0 t) \\
 H(f) &= \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) * \left[\frac{1}{2i} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2i} \delta(f + f_0) \right] \\
 H(f) &= \frac{1}{2i} \text{rect}\left(\frac{f - f_0}{2f_0}\right) - \frac{1}{2i} \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{2f_0}\right)
 \end{aligned} \tag{21}$$

Calcolare l'uscita del sistema con una delta centrata in $1/f_0$ in entrata:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h(t) * \delta\left(t - \frac{1}{f_0}\right) = \frac{\sin^2(2\pi f_0 t - 2\pi)}{\pi\left(t - \frac{1}{f_0}\right)} \\
 y(t) &= \frac{\sin^2(2\pi f_0 t)}{\pi\left(1 - \frac{1}{f_0}\right)}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Data la risposta impulsiva h , calcolare la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \text{rect}\left(\frac{t - 2T}{2T}\right) - \text{rect}\left(\frac{t + 2T}{2T}\right) \\
 H(f) &= 2T \text{sinc}(2fT) e^{-4i\pi fT} - 2T \text{sinc}(2fT) e^{4i\pi fT} \\
 H(f) &= -4iT \text{sinc}(2fT) \sin(4\pi fT)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Calcolare l'uscita del sistema quando è presente un gradino in entrata:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \left[\text{rect} \left(\frac{t - 2T}{2T} \right) - \text{rect} \left(\frac{t + 2T}{2T} \right) \right] * u(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3T \\ -\int_{-3T}^t d\tau & -3T \leq t < -T \\ -2T & -T \leq t < T \\ -2T + \int_T^t d\tau & T \leq t < 3T \\ 0 & t \geq 3T \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3T \\ -t - 3T & -3T \leq t < -T \\ -2T & -T \leq t < T \\ t - 3T & T \leq t < 3T \\ 0 & t \geq 3T \end{cases} \quad (24)$$