

Appunti di Fondamenti di Telecomunicazioni

Giacomo Sturm

AA: 2023/2024 - Ing. Informatica

Sorgente del file LaTeX disponibile su

<https://github.com/00Darxk/Fondamenti-di-Telecomunicazioni>

Indice

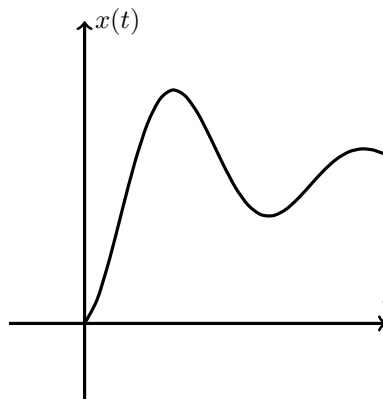
1	Introduzione	4
2	Segnali a Tempo Continuo	6
2.1	Seno Cardinale	6
2.2	Coseno	6
2.3	Gradino Periodico o Onda Quadra	7
2.4	Esponenziale Complesso	7
2.5	Esponenziale	8
2.6	Finestra	8
2.7	Triangolo	9
2.8	Gradino	9
2.9	Gaussiana	9
2.10	Esponenziale Unilatero	10
2.11	Costante	10
2.12	Segno	10
2.13	Operazioni sui Segnali	11
2.14	Energia e Potenza	12
3	Segnali a Tempo Discreto	15
3.1	Gradino	15
3.2	Esponenziale Unilatero	15
3.3	Coseno	16
3.4	Impulso Matematico Tempo Discreto	16
3.5	Energia e Potenza	17
4	Convoluzione e Correlazione	19
4.1	Impulso Matematico Tempo Continuo	19
4.2	Convoluzione	21
4.2.1	Proprietà	21
4.2.2	Convoluzione Tempo Discreto	22
4.3	Correlazione	22
4.4	Sistema Ingresso-Uscita	23
4.5	Convoluzione tra Due Gaussiane	27
4.6	Convoluzione a Media Mobile	28
4.7	Esercizi su Convoluzioni, Correlazioni e Sistemi	29
5	Serie di Fourier	37
5.1	Spazio Vettoriale	37
5.2	Serie Notevoli	39
5.3	Proprietà	41
5.3.1	Linearità	41
5.3.2	Traslazione nel Tempo	43
5.3.3	Traslazione in Frequenza	43
5.3.4	Teorema della Modulazione	44
5.3.5	Teroema della Derivazione	44

5.3.6	Teorema di Parseval	45
5.4	Serie di Un'Onda Quadra	45
5.5	Segnale Treno di Impulsi o Campionatore	47
5.6	Serie del Modulo di Coseno	47
5.7	Segnali Reali	48
5.8	Esercizi sulla Serie di Fourier	49
6	Traformata di Fourier	54
6.1	Trasformate Notevoli	55
6.2	Proprietà di Linearità	57
6.3	Proprietà di Dualità	57
6.4	Proprietà di Scala	58
6.5	Altre Trasformate Notevoli	59
6.6	Funzioni di Trasferimento	61
6.7	Traslazione nel Tempo	62
6.8	Traslazione in Frequenza	62
6.9	Trasformate della Finestra	63
6.10	Proprietà Operative della Trasformata	63
6.10.1	Proprietà della Derivazione	63
6.10.2	Duale della Derivazione	64
6.10.3	Proprietà dell'Integrazione	65
6.10.4	Proprietà del Coniugato	65
6.10.5	Proprietà della Correlazione	65
6.11	Finestra e Triangolo tramite Derivata	65
6.12	Teorema della Convoluzione	66
6.13	Filtri	67
6.14	Teorema di Parseval	68
6.15	Trasformata di Segnali Reali	69
6.16	Trasformata di Segnali Periodici	69
6.17	Esercizi sulle Trasformate	70
7	Trasformata di Fourier Tempo Discreto	79
7.1	Trasformate Notevoli	80
7.2	Proprietà del Valor Medio	83
7.3	Traslazione nel Tempo Discreto ed in Frequenza	83
7.4	Teorema della Convoluzione	83
7.5	Teorema di Parseval	85
7.6	Teorema della Correlazione	86
7.7	Campionamento	87
7.8	Esercizi sulle Trasformate Discrete	88

1 Introduzione

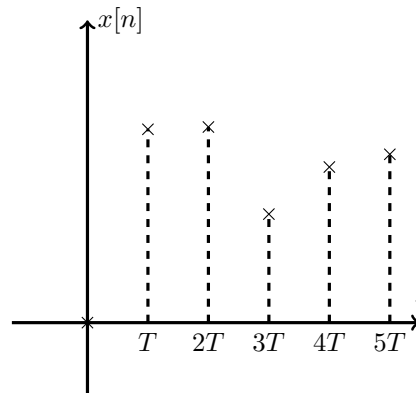
Un segnale è definito come una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo in maniera deterministica o aleatoria. Può essere un'onda di pressione come la voce, o un'onda elettromagnetica come segnali wireless e bluetooth. Un segnale è in grado di contenere informazioni come una sequenza di bit. Generalmente un segnale analogico viene convertito in digitale come un segnale elettrico tramite un trasduttore, per facilitare la processazione, per poi essere riconvertito in analogico; alcuni segnali sono creati direttamente in digitale. Un segnale è definito dalla sua banda, o spettro di banda, che ne determina la capacità di trasmettere informazione. L'occupazione in frequenza di un segnale è analoga al numero di bit di un dato digitale.

Un segnale comune è il segnale voce, definito da un'onda di pressione, per cui è sempre strettamente positivo. Questo segnale è analogico, quindi continuo, ed il suo valore è noto in ogni istante di tempo t , e si identifica come $x(t)$.



Campionando un segnale analogico si crea un segnale digitale, considerando prima alcune condizioni definite dal teorema del campionamento. Per campionare un segnale si estraggono valori, o campioni, dal segnale analogico ogni intervallo T . Il segnale così ottenuto è un segnale discreto x_n o $x[n]$, che presenta un valore ogni multiplo del tempo di campionamento T scelto.

$$x[n] := \{x(n \cdot T) \forall n \in \mathbb{N}\}$$



Questi valori vengono poi convertiti in digitale assegnando un certo numero di bit per rappresentare l'intervallo massimo di valori descritti dal segnale. Questo processo viene chiamato quantizzazione, si divide l'intervallo dei valori in piccoli intervalli ognuno con un univoco valore in bit, in modo da convertire tutti i valori in quell'intervallo in una sequenza di bit. Aumentando il numero di bit, quindi il numero di suddivisioni dell'intervallo di partenza, aumenta la precisione, ma aumenta anche il costo per processare lo stesso segnale. Dopo aver convertito tutti i valori in una sequenza di bit, questo segnale in bit viene trasmesso, ed in seguito decodificato in analogico. Spesso i segnali vengono creati in digitale, per cui non è necessario campionare un segnale analogico.

Campionando un segnale si perdono le informazioni contenute tra i campioni, ma è possibile applicare filtri e trasformazioni in digitale utili a giustificare la questa perdita di informazioni, per cui la maggior parte dei segnali vengono trasmessi in digitale.

I segnali possono essere classificati in certi (deterministici) o aleatori (non deterministici). I segnali certi sono segnali di cui è noto tutto l'andamento, come file salvati su un supporto, per cui non è necessario trasmetterli. Mentre i segnali aleatori non sono noti a priori e vengono studiati dal punto di vista della statistica.

In generale un sistema di trasmissione di segnali è formato da un trasmettitore che processa e codifica il segnale, un canale che lo trasmette, ed un ricevitore che lo decodifica:



2 Segnali a Tempo Continuo

Vengono definiti in questa sezione una serie di segnali canonici, e le operazioni attuabili su questo tipo di segnali:

2.1 Seno Cardinale

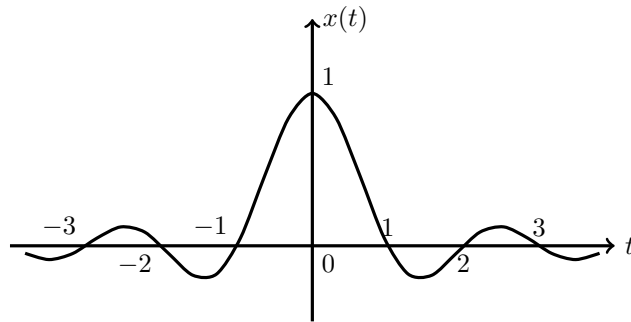
$$x(t) = \text{sinc}(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (2.1.1)$$

Questo segnale si attenua asintoticamente come $1/t$:

$$-\frac{1}{t} \leq \text{sinc}(t) \leq \frac{1}{t}$$

Viene incluso il fattore π nell'argomento in modo che la funzione si annulli per ogni valore intero:

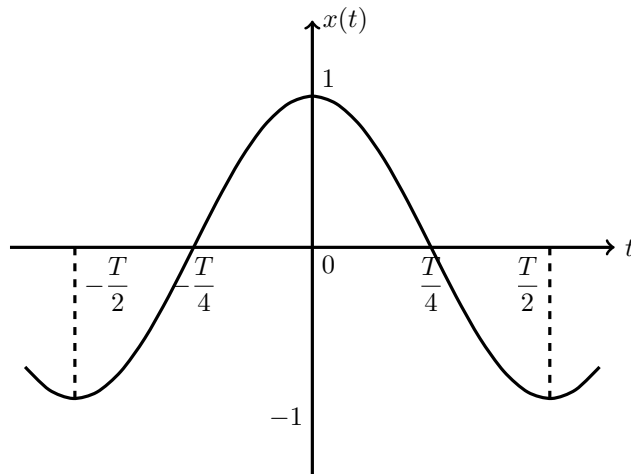
$$\text{sinc}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$



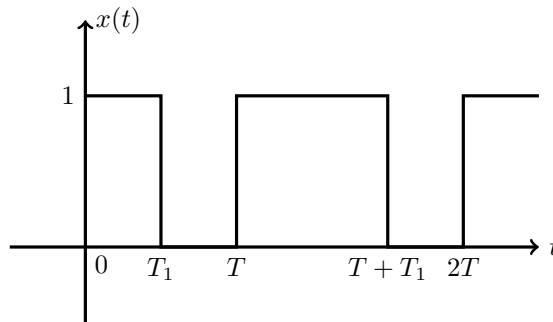
2.2 Coseno

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (2.2.1)$$

Il parametro T rappresenta il periodo della funzione, per cui il valore della funzione ad un certo valore t corrisponde al valore in $t - T$. Invece del periodo si può usare la frequenza f_0 , inverso del periodo.



2.3 Gradino Periodico o Onda Quadra



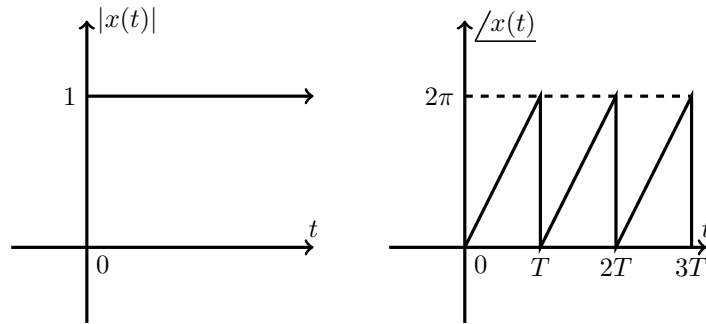
2.4 Esponenziale Complesso

$$x(t) = e^{i\frac{2\pi t}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (2.4.1)$$

Un segnale complesso può essere analizzato mediante la sua fase ed il suo modulo in funzione del tempo:

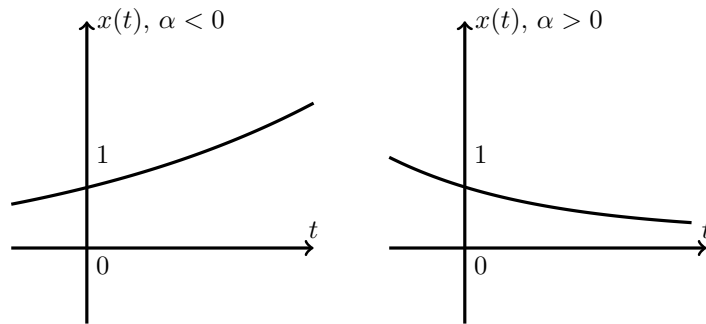
$$x(t) = |x(t)|e^{j\angle x(t)}$$

Dato che la fase è periodica si può rappresentare come una serie di rampe.



2.5 Esponenziale

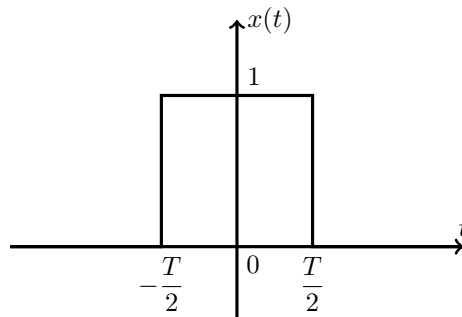
$$x(t) = e^{-\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.5.1)$$



2.6 Finestra

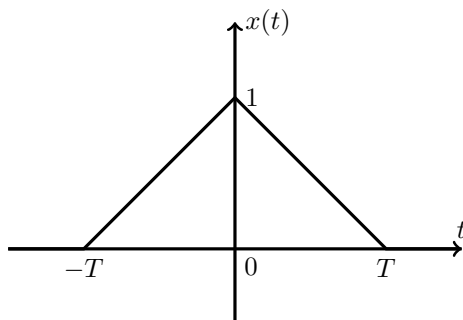
$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & t < -\frac{T}{2} \wedge t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

T viene chiamata base della finestra. Questo segnale presenta una discontinuità di salto per $t = \pm \frac{T}{2}$. La funzione finestra viene usata quando si vuole analizzare solo una parte di un segnale, poiché il restante sarà pari a 0. La trasformata di questa funzione rappresenta un filtro in frequenza.



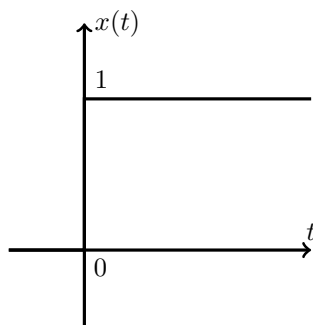
2.7 Triangolo

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1 - |t| & -T \leq t < T \\ 0 & t < -T \wedge t \geq T \end{cases} \quad (2.7.1)$$



2.8 Gradino

$$x(t) = u(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.8.1)$$



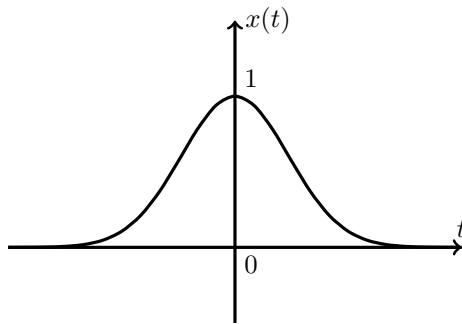
2.9 Gaussiana

$$x(t) = e^{-\alpha t^2} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.9.1)$$

La larghezza della campana centrale dipende dal fattore α . Nello studio delle probabilità, si usa la sua forma normalizzata:

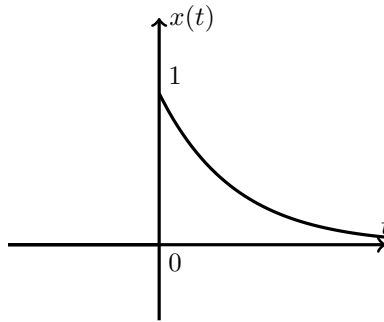
$$x(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Il valore σ rappresenta la deviazione standard, mentre il suo quadrato σ^2 descrive la varianza.



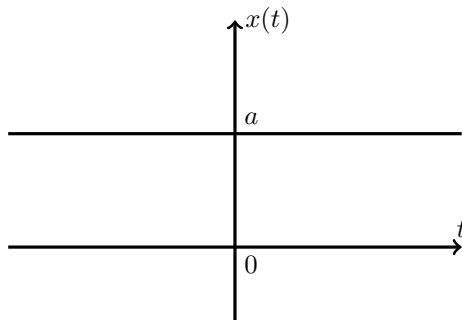
2.10 Esponenziale Unilatero

$$x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.10.1)$$



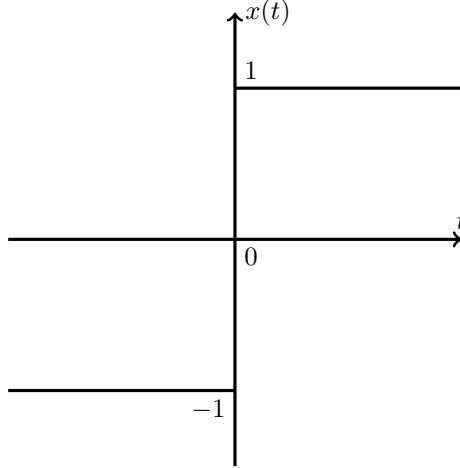
2.11 Costante

$$x(t) = a \quad (2.11.1)$$



2.12 Segno

$$x(t) = \text{sign}(t) := \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (2.12.1)$$



2.13 Operazioni sui Segnali

Le operazioni sui segnali vengono computate istante per istante. L'operazione di somma produce un segnale $z(t)$, tale che ogni valore che assume equivale alla somma di altri due segnali $x(t)$ e $y(t)$ nello stesso istante:

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

Analogamente si considera l'operazione prodotto, come un prodotto istante per istante tra i due segnali:

$$z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

L'operazione di ribaltamento corrisponde ad una riflessione della funzione lungo l'asse delle ascisse di un segnale $x(t)$ tramite una sostituzione di variabile $t \rightarrow -t$:

$$z(t) = x(-t)$$

Quest'operazione non produce risultati per segnali pari, poiché presentano la proprietà $x(t) = x(-t)$. Tramite l'operazione di ribaltamento si può esprimere il segnale segno tramite la differenza di due gradini:

$$\text{sign}(t) = u(t) - u(-t)$$

L'operazione di traslazione, sposta un segnale $x(t)$ lungo l'asse delle ascisse di un fattore τ :

$$z(t) = x(t - \tau)$$

L'operazione di cambio di scala corrisponde ad un rimpicciolimento o allargamento di un segnale $x(t)$ di un fattore $a \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = x(at)$$

2.14 Energia e Potenza

L'energia e la potenza di un segnale rappresentano caratteristiche utili nella loro analisi e procesamiento.

Viene definita energia E_x di un segnale $x(t)$, come il limite per $\Delta t \rightarrow \infty$ dell'integrale del modulo quadro del segnale:

$$E_x := \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.14.1)$$

L'energia di un segnale è sempre strettamente positiva, poiché si considera tutta l'area sottesa dal quadrato del modulo del segnale, necessariamente positivo; mentre è nulla solo se lo è anche il segnale analizzato. Teoricamente non esiste un limite per l'energia contenuta in un segnale, ma sono fisicamente realizzabili solo segnali con energia finita.

Se l'energia di un segnale è finita $E_x \neq \infty$ e diversa da zero $E_x \neq 0$, il segnale $x(t)$ si chiama segnale di energia.

Viene definita la potenza P_x di un segnale $x(t)$ in maniera simile alla sua energia:

$$P_x := \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt \right) \quad (2.14.2)$$

Anche la potenza di un segnale è strettamente positiva $P_x \geq 0$, se la potenza assume valori diversi da zero e finiti, il segnale $x(t)$ si chiama segnale di potenza.

Vengono così create due classi di segnali, di potenza e di energia. Per la definizione, queste due grandezze sono antisimmetriche poiché se un segnale è di potenza non può essere di energia, e viceversa:

$$\begin{aligned} x \in E &\implies x \notin P \\ x \in P &\implies x \notin E \end{aligned}$$

Si determina l'energia di una gaussiana di ampiezza A :

$$E_x = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} A^2 e^{-2\alpha t^2} dt = A^2 \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{-2\alpha t^2} dt$$

Si considera il cambio di variabile $\tau = \sqrt{2\alpha}t$:

$$E_x = A^2 \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\alpha}} d\tau = \frac{A^2}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

L'integrale ottenuto è l'integrale di Gauss, risolubile applicando un cambio di coordinate polari al quadrato dell'integrale dato, il risultato dell'integrazione della gaussiana sull'intero asse dei reali \mathbb{R} corrisponde alla radice di pi greco:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Per cui l'energia di una gaussiana risulta essere:

$$E_x = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \quad (2.14.3)$$

Moltiplicando un segnale $x(t)$ per un gradino e calcolandone l'integrale su tutti i reali \mathbb{R} , equivale a calcolare l'integrale del segnale originario sui soli reali positivi \mathbb{R}^+ , poiché il segnale assume valori nulli da $-\infty$ a 0:

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot u(t) dt = \int_{\mathbb{R}^+} x(t) dt$$

Si determina l'energia e la potenza di un esponenziale complesso. Il segnale ha un modulo unitario $|x(t)| = 1$, per cui la sua energia risultante è:

$$E_x = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} \right) = \infty$$

Per cui l'esponenziale complesso non è un segnale di energia. La potenza risulta essere:

$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t \right) = 1$$

L'esponenziale complesso è quindi un segnale di potenza.

Si determina l'energia di un esponenziale unilatero:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-\alpha t} u(t)]^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} \left(e^{-\infty} - e^0 \right) = \frac{1}{2\alpha}$$

Per cui questo segnale non è né di energia né di potenza.

I segnali periodici non possono essere di energia poiché l'integrale assume sempre valori non finiti, per cui un segnale periodico senza attenuazione non è fisicamente realizzabile. Possono essere solo di potenza, si determina la potenza di un segnale periodico:

$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt \right)$$

In un segnale periodico si può esprimere l'intervallo di tempo Δt come n volte il periodo T :

$$P_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nT} \int_{-\frac{nT}{2}}^{\frac{nT}{2}} |x(t)|^2 dt \right)$$

L'integrale di un segnale perfettamente periodico, ovvero senza smorzamenti, su n periodi equivale ad n volte l'integrale su un singolo periodo T :

$$P_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nT} n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right)$$

Questo integrale è indipendente dalla variabile n , per cui si può trascurare il limite, la potenza risulta quindi essere:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (2.14.4)$$

Quest'ultimo integrale può essere espresso in termini della frequenza naturale: $f_0 = \frac{1}{T}$.

Si determina la potenza del segnale coseno, di ampiezza A e frequenza naturale f_0 :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$P_x = A^2 f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} \cos^2(2\pi f_0 t) dt$$

Per esprimere il quadrato del coseno, si considera la formula di bisezione del coseno:

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

$$A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A^2}{2} (\cos(4\pi f_0 t) + 1)$$

Si può esprimere inoltre mediante la notazione complessa delle funzioni trigonometriche:

$$A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} (e^{2i\pi f_0 t} + e^{-2i\pi f_0 t})$$

$$|x + y|^2 \quad x, y \in \mathbb{C}$$

$$(x + y) \cdot (x + y)^* = (x + y) \cdot (x^* + y^*)$$

$$xx^* + xy^* + yx^* + yy^* = |x|^2 + |y|^2 + xy^* + yx^*$$

$$xy^* + yx^* = (a_x + ib_x) \cdot (a_y - ib_y) + (a_x - ib_x) \cdot (a_y + ib_y) = 2(a_x a_y + b_x b_y) = 2\Re\{x^* y\}$$

$$|x|^2 + |y|^2 + 2\Re\{|x|e^{-i\varphi_x} + |y|e^{i\varphi_y}\}$$

$$|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|\cos(|\varphi_y - \varphi_x|)$$

$$\left| \frac{A}{2} (e^{2i\pi f_0 t} + e^{-2i\pi f_0 t}) \right|^2 = \frac{A^2}{4} (1 + 1 + 2\Re\{e^{2i\pi f_0 t} \cdot (e^{-2i\pi f_0 t})^*\})$$

$$A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A^2}{2} (1 + \cos(4\pi f_0 t))$$

Considerando questa sostituzione, l'integrale diventa:

$$P_x = \frac{A^2 f_0}{2} \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} (\cancel{\cos(4\pi f_0 t)} + 1) dt = \frac{A^2 f_0}{2} \left(\frac{1}{2f_0} + \frac{1}{2f_0} \right) = \frac{A^2}{2}$$

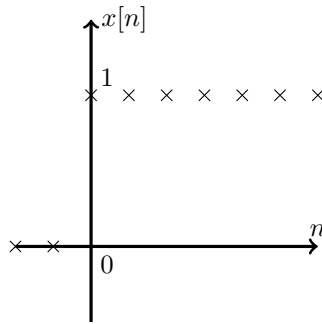
L'integrale su un periodo del coseno è nullo, poiché è una funzione pari, per cui la componente $\cos(4\pi f_0 t)$ fornisce un contributo nullo.

3 Segnali a Tempo Discreto

Poiché la maggior parte dei segnali vengono trasmessi o generati in tempo discreto, è necessario essere a conoscenza del comportamento dei segnali continui campionati a tempo discreto.

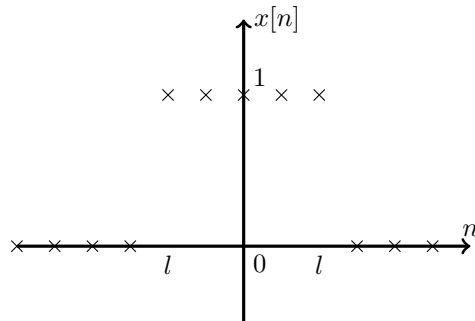
3.1 Gradino

$$x[n] = u[n] := \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$



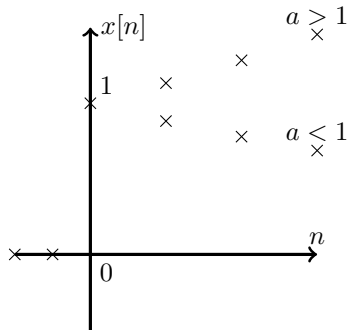
Non avendo un segnale finestra a tempo discreto, essa può essere descritta come la differenza di due gradini discreti. Una finestra di base $2l$ nel discreto si esprime come:

$$u[n+l] - u[n-(l+1)]$$



3.2 Esponenziale Unilatero

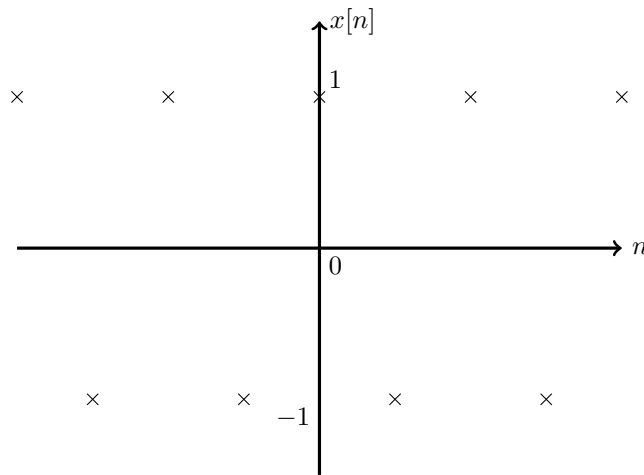
$$x[n] = a^n u[n] \quad (3.2.1)$$



3.3 Coseno

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n) \quad (3.3.1)$$

Il segnale è periodico nel discreto, solo se la frequenza è un numero intero $f_0 \in \mathbb{Z}$.



3.4 Impulso Matematico Tempo Discreto

L'impulso matematico o delta di Dirac, nel discreto assume solo un valore di 1 per $n = 0$.

$$\delta[n] := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Questo segnale presenta varie proprietà utili:

L'area della delta è unitaria, poiché presenta un unico campione per $n = 0$ di valore 1:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

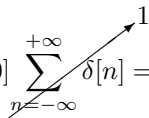
Il prodotto di un qualsiasi segnale $x[n]$ per la delta equivale al valore del segnale in 0 per la delta. Poiché l'unico valore della delta diverso da zero si trova in $n = 0$ e vale 1, per cui estrae dal segnale x il campione in posizione $n = 0$. Questo campione viene moltiplicato per la delta, poiché non è un segnale continuo, ma si presenta solo in quell'istante. Questa caratteristica viene chiamata proprietà di campionamento della delta di Dirac:

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$$

Questo campione può essere estratto ad un arbitraria posizione m :

$$x[n] \cdot \delta[n - m] = x[m] \cdot \delta[n - m]$$

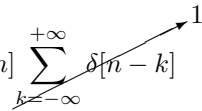
L'area del prodotto di un qualsiasi segnale $x[n]$ per la delta risulta nel valore del segnale in 0, ciò si dimostra tramite la proprietà di campionamento della delta:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[0] \cdot \delta[n] = x[0] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = x[0]$$


Invertendo la proprietà di campionamento, ovvero partendo da tutti i campioni di un segnale $x[n]$ e sommandoli tra di loro, è possibile ottenere il segnale originario:

$$\dots + x[-N]\delta[n + N] + \dots + x[0]\delta[n] + \dots + x[N]\delta[n - N] + \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k] = x[n]$$

La convoluzione di un qualsiasi segnale $x[n]$ per la delta risulta nel segnale x stesso:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n - k] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - k]$$


La delta può essere rappresentata come la differenza tra due gradini, considerando un unico campione in posizione m :

$$\delta[n - m] = u[n - m] - u[n - (m + 1)]$$

Analogamente un gradino può essere espresso come una somma di impulsi traslati ognuno di un diverso fattore. Questa relazione viene espressa in forma canonica come:

$$u[n - m] = \sum_{n=-\infty}^{-m} \delta[n + 1]$$

3.5 Energia e Potenza

L'energia di un segnale tempo discreto si calcola come:

$$E_x := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

La potenza di un segnale tempo discreto è definita come:

$$P_x := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \right)$$

La potenza per segnali periodici tempo discreti si ottiene mediante:

$$P_x := \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |x[n]|^2$$

Dove M è il periodo del segnale.

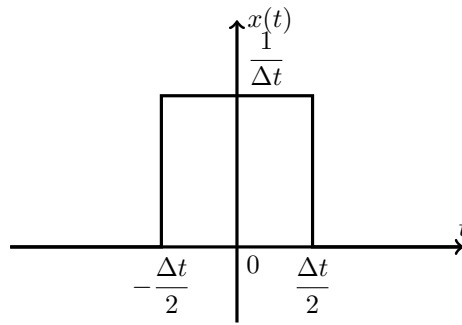
4 Convoluzione e Correlazione

Prima di analizzare queste due importanti operazioni tra segnali tempo continuo e discreto, bisogna fornire una definizione adeguata per l'impulso matematico tempo continuo, segnale utile nello studio, e nel calcolo di queste operazioni.

4.1 Impulso Matematico Tempo Continuo

Per definire l'impulso o delta di Dirac nel tempo continuo, si parte da un segnale finestra con una base Δt e ampiezza inverso della base:

$$x(t) = \frac{1}{\Delta t} \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta t} \right)$$



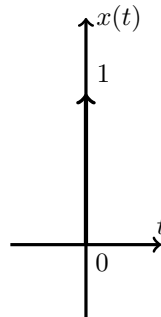
Al diminuire di Δt , la base si restringe, mentre l'ampiezza del segnale aumenta, ma complessivamente l'area del segnale rimane costante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} dt = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} \right) = 1$$

Viene definito l'impulso o delta di Dirac come il limite di questa finestra per Δt che tende ad un valore nullo:

$$\delta(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta t} \right) \quad (4.1.1)$$

Viene rappresentata graficamente come una freccia di altezza unitaria, poiché non è una funzione ma un funzionale, ma questa differenza non verrà trattata nei seguenti studi.



Possiede delle proprietà analoghe alla delta nel tempo discreto:
 L'integrale sui reali della delta è unitario in base alla sua definizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

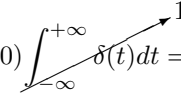
Il prodotto di un qualsiasi segnale per la delta equivale al valore del segnale in 0 moltiplicato per l'impulso, poiché per tutti gli altri valori nel tempo questo prodotto è nullo. Proprietà analoga a quella del campionamento, per il continuo:

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$

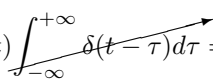
Questa proprietà può essere estesa considerando un impulso traslato di un fattore τ :

$$x(t) \cdot \delta(t - \tau) = x(\tau) \cdot \delta(t - \tau)$$

Segue da quest'ultima che l'integrale del prodotto di un segnale qualunque $x(t)$ per l'impulso equivale al valore del segnale x in 0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(0) \cdot \delta(t) dt = x(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = x(0)$$


La convoluzione di un qualsiasi segnale $x(t)$ con l'impulso risulta nel segnale originario $x(t)$, per l'inverso della proprietà precedente:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$


Poiché il segnale finestra può essere espresso come la differenza tra due gradini, allora anche la definizione dell'impulso può essere espressa come tale:

$$\delta(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(u \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) - u \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right)$$

L'impulso corrisponde alla derivata rispetto al tempo del gradino. Analogamente il gradino corrisponde alla funzione integrale dell'impulso:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

L'impulso è una funzione pari:

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

L'impulso scalato di un fattore a corrisponde al rapporto tra l'impulso non scalato ed il modulo del fattore a , se negativo. Questa proprietà di scala si dimostra considerando la definizione

dell'impulso:

$$\begin{aligned}\delta(at) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \text{rect}\left(\frac{at}{\Delta t}\right) \\ \Delta \tau &= \frac{\Delta t}{a} \\ \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{a\Delta \tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta \tau}\right) &= \frac{1}{a} \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta \tau}\right) \\ \delta(at) &= \frac{\delta(t)}{a}\end{aligned}$$

L'impulso è un segnale né di energia né di potenza. I funzionali, come l'impulso, vengono descritti in base agli effetti che provocano sulle funzioni

4.2 Convoluzione

La convoluzione rappresenta un'operazione tra due segnali, generandone uno nuovo. L'operazione si indica con il simbolo $*$:

$$x(t) * y(t) = z(t)$$

La convoluzione tra due segnali tempo continui produce sempre un segnale continuo:

$$z(t) = x(t) * y(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

Il segnale convoluzione è una funzione nella stessa variabile dei segnali convoluti, questa variabile di uscita compare all'interno dell'integrale. Il segnale convoluzione rappresenta l'area sottesa dal prodotto tra il segnale x ed il segnale y , ribaltato e traslato di un fattore t , per ogni istante di tempo t . La convoluzione è un'operazione commutativa, per cui è arbitraria la scelta di quale dei due segnali debba traslare.

Si rappresenta il segnale x originario rispetto alla variabile τ , al di sotto si grafica il segnale y ribaltato e traslato di un fattore t , per individuare gli intervalli dove il prodotto tra i due segnali è nullo. La maggior parte dei segnali reali si attenuano nel tempo, per cui avranno un valore diverso da zero solo per un intervallo finito di valori, ed in questi intervalli la convoluzione restituisce un valore non nullo. Anche i segnali puramente matematici spesso presentano valori finiti non nulli solo per certi intervalli di tempo. Si considerano tutti i possibili casi di sovrapposizione, quindi di prodotto non nullo, tra i due segnali, per ottenere il segnale convoluzione in forma analitica. Da notare che la convoluzione è un segnale continuo per cui non possono essere presenti discontinuità nella sua espressione in forma analitica. Verranno forniti alcuni esempi di convoluzioni in coda a questa sezione.

4.2.1 Proprietà

La convoluzione è un'operazione commutativa:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \rightarrow T = t - \tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} y(T) x(t - T) dT = y(t) * x(t)$$

Vale la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned}(x_1(t) + x_2(t)) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(\tau) + x_2(\tau))y(t - \tau)d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)y(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)y(t - \tau)d\tau &= x_1(t) * y(t) + x_2(t) * y(t)\end{aligned}$$

Se uno dei due segnali convoluti, o entrambi, sono traslati allora il segnale convoluzione risultante è traslato della traslazione complessiva dei due segnali originali:

$$\begin{aligned}x(t - t_{x0}) * y(t - t_{y0}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_{x0})y[t - (\tau + t_{y0})]d\tau \\ T &= \tau - t_{x0} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)y[(t - t_{x0} - t_{y0}) + T]dT &= z(t - t_{x0} - t_{y0})\end{aligned}$$

4.2.2 Convoluzione Tempo Discreto

$$x[n] * y[n] := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n - k]$$

Nel discreto, quando si applica la convoluzione, il numero di campioni totali della convoluzione è uguale alla somma dei campioni dei due segnali meno uno. Per le convoluzioni a tempo continuo si usa la continuità, per quelle a tempo discreto il numero dei campioni, per indentificare se sono convoluzioni valide. Per le convoluzioni a tempo discreto valgono le proprietà commutativa e distributiva. I singoli campioni di un segnale nel discreto possono essere rappresentati come una costante che moltiplica un impulso traslato di un certo fattore:

$$x[n] = \sum_{k=1}^N x_k \delta[n - k]$$

Ciò è possibile per ogni segnale discreto, per cui la convoluzione di due segnali discreti si può esprimere come:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^N x_i \delta[k - i] \sum_{j=1}^N y_j \delta[n - k - j] \right]$$

Una convoluzione quindi rappresenta una media tra una serie di campioni, può essere estesa a segnali multidimensionali come delle immagini, dove la convoluzione viene usata negli algoritmi di compressione dell'immagini per diminuire il costo della trasmissione del segnale, diminuendo l'informazione necessaria.

4.3 Correlazione

La correlazione è un'operazione simile alla convoluzione, calcolabile come una convoluzione. Le convoluzioni vengono usate per modellare l'effetto del passaggio di un segnale attraverso un sistema,

ciò corrisponde al processamento di un segnale. Alcuni di questi sistemi corrispondono nel dominio della frequenza in filtri.

Una correlazione si applica quando due segnali sono simili tra loro, viene definita come un segnale continuo nel dominio del tempo:

$$R_{xy}(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)d\tau \quad (4.3.1)$$

Viene definito R_{xy} il fattore di correlazione tra i due segnali x e y . La correlazione al contrario della convoluzione non commuta:

$$\begin{aligned} R_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)d\tau \\ T &= t + \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(T)y^*(-t+T)dT &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T)y(-t+T)dT \right]^* = R_{yx}^*(-t) \end{aligned}$$

Il fattore di convoluzione $R_{xy}(t)$ tra due segnali x e y corrisponde al complesso coniugato del fattore di convoluzione ribaltato dei segnali y e x $R_{yx}^*(-t)$, quindi la correlazione è un'operazione anticommutativa. La correlazione tra due segnali x e y equivale alla convoluzione dei segnali y^* e x

$$\begin{aligned} x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(\tau)d\tau \\ x(t) * y^*(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(-(t-\tau))d\tau \\ T &= \tau - t \\ - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t+T)y^*(T)dT &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+T)y^*(T)dT = R_{xy}(t) \\ x(t) \otimes y(t) &= x(t) * y^*(-t) \end{aligned}$$

Quando si analizza la correlazione tra due segnali x e y , uno dei quali pari $y(t) = y(-t)$ e reale $y \in \mathbb{R}$, la correlazione tra di loro è uguale alla convoluzione tra di loro:

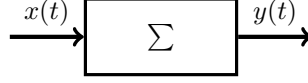
$$x(t) \otimes y(t) = x(t) * y^*(-t) = x(t) * y(-t) = x(t) * y(t)$$

L'autocorrelazione di un segnale x nell'istante di tempo $t = 0$, corrisponde all'energia del segnale:

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2d\tau = E_x$$

4.4 Sistema Ingresso-Uscita

Un sistema di ingresso-uscita applica determinate trasformazioni al segnale x in entrata, per ottenere un altro segnale y in uscita, questo segnale è un funzionale del segnale di ingresso $y(t) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Questa trasformazione si basa su dei parametri interni \sum al sistema per cui passa l'ingresso.



Un sistema ingresso-uscita si definisce lineare, se ad una combinazione lineare degli ingressi, corrisponde una combinazione lineare delle uscite:

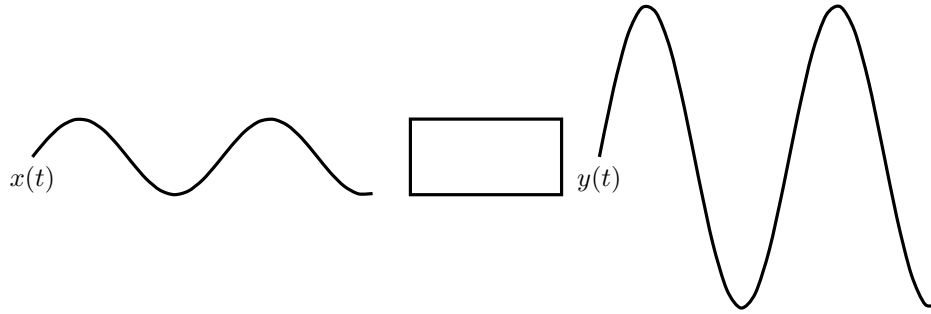
$$x(t) = a_1(t)x_1(t) + \dots + a_n(t)x_n(t) \rightarrow y(t) = b_1(t)y_1(t) + \dots + b_n(t)y_n(t)$$

Un amplificatore rappresenta un sistema lineare, poiché moltiplica di un fattore A un segnale in entrata:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = Ax_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = Ax_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t) = A(ax_1(t) + bx_2(t))$$



Un sistema lineare non distorce gli ingressi. Un sistema che restituisce il segnale originario sommato per una costante A non è lineare:

$$x(t) \rightarrow y(t) = x(t) + A$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t) + A \neq y_1(t) + y_2(t)$$

Un sistema tempo invariante o permanente, non dipende da quando viene inserito il segnale in entrata:

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

La linearità e la permanenza sono due proprietà indipendenti tra di loro. Un sistema può essere lineare e non permanente e viceversa, oppure nessuno delle due. L'operazione di modulazione di un segnale, il prodotto tra l'entrata ed una funzione sinusoidale, è un sistema lineare e non permanente:

$$x(t) \rightarrow y(t) = x(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau) = x(t - \tau) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \neq x(t - \tau) \cos\left(\frac{2\pi(t - \tau)}{T}\right)$$

Per cui dipende dall'istante di tempo quando viene inserito il segnale.

Un sistema può presentare un'altra proprietà chiamata causalità, che presenta un senso fisico. Un sistema si definisce causale se per ogni uscita all'istante t_0 , dipende da valori entrati al massimo fino al tempo t_0 :

$$y(t_0) \propto x(t), \quad t \leq t_0$$

L'uscita non può dipendere da entrate future, se il sistema è causale. Data un'uscita y dipendente dall'entrata x traslata di un fattore τ $y(t) = x(t + \tau)$, se questo fattore di traslazione τ è negativo, l'uscita dipende da entrate ritardate per cui dipende da entrate passate, mentre se il fattore τ è positivo l'uscita dipende da entrate anticipate, quindi per un certo istante t l'uscita dipende da entrate future.

La linearità e la permanenza sono due proprietà fondamentali per cui un sistema si identifica come filtro, o SLI, Sistema Lineare Invariante. L'uscita di un filtro dipende solo da una funzione $h(t)$, chiamata risposta impulsiva, e si ottiene mediante la convoluzione tra l'entrata e quest'ultima:

$$x(t) \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Si chiama risposta impulsiva, poiché se è presente un impulso in entrata, l'uscita è la funzione $h(t)$ stessa, per la proprietà della convoluzione di un impulso:

$$\delta(t) \rightarrow y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

Per dimostrare l'uscita di un filtro, si considera il segnale x come la somma integrale di impulsi moltiplicati per il valore della funzione in $x(\tau)$, ovvero la sua convoluzione:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} dx(t)$$

Poiché il filtro è lineare si può considerare l'uscita y come la somma integrale di tutte le uscite dy per ogni entrata $dx = x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$. Poiché il fattore $x(\tau)$ non dipende dal tempo si considera una costante, per cui l'uscita dy uguale al prodotto tra la costante $x(\tau)$ per la convoluzione tra l'impulso e la risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ dy(t) &= x(\tau) (\delta(t - \tau) * h(t)) d\tau = x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

L'uscita totale si ottiene integrando su tutti i reali l'uscita infinitesima $dy(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

Per cui l'uscita di un filtro corrisponde alla convoluzione tra l'entrata e la sua risposta impulsiva.

Per determinare la risoluzione di uno schermo, dispositivo che opera come un filtro, si inserisce in entrata un impulso bidimensionale, rappresentato come un singolo punto su una superficie. L'uscita di questa entrata risulta in una macchia formata da vari pixel; più questa macchia è piccola maggiore è la risoluzione del dato schermo.

Nel tempo discreto un sistema può essere caratterizzato dalle stesse proprietà. Linearità:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\rightarrow y_1[n] \\ x_2[n] &\rightarrow y_2[n] \\ a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] &\rightarrow a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] \end{aligned}$$

Tempo invarianza:

$$x[n + N] \rightarrow y[n + N]$$

Causalità:

$$y[n_0] \propto x[n], \quad n \leq n_0$$

Si può esprimere formalmente questa condizione di causalità considerando un filtro con una risposta impulsiva $h[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Se questo filtro fosse causale allora la variabile k non potrebbe superare il valore n , poiché ciò implicherebbe che l'uscita dipenda da entrate future:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k]$$

Inoltre la risposta impulsiva deve essere nulla se il valore di k è maggiore di n :

$$h[n-k] = 0, \quad k > n \rightarrow n-k = N \rightarrow h[N], \quad N < 0$$

Si può attuare lo stesso ragionamento per la causalità a tempo continuo. Un filtro è causale solo se:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$h(t-\tau) = 0, \quad \tau > t \rightarrow t-\tau = T \rightarrow h(T) = 0, \quad T < 0$$

Per cui si definisce un filtro di uscita y causale se e solo se:

$$y(t) : \text{causale} \iff \begin{cases} h[n] = 0 & n < 0 \\ h(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

Un filtro operante su tempo discreto viene definito, come nel continuo, da un'unica funzione risposta impulsiva $h[n]$:

$$\delta[n] * h[n] = h[n]$$

Si esprime per la proprietà di campionamento dell'impulso, un qualsiasi segnale x come:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Poiché il filtro è un sistema lineare, si possono considerare le singole entrate della sommatoria e poi sommare le loro uscite corrispondenti per ottenere l'uscita complessiva. Si considera l'uscita per un qualsiasi k , pari alla convoluzione tra l'impulso $\delta[n-k]$ e la risposta impulsiva $h[n]$, si considera il parametro $x[k]$ costante poiché non dipende dalla variabile n :

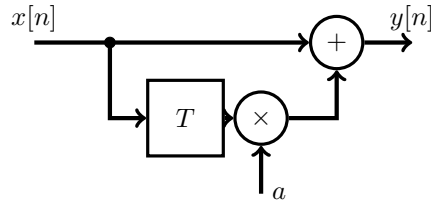
$$y_k[n] = x[k](\delta[n-k] * h[n]) = x[k]h[n-k]$$

La somma su tutti gli interi di questo valore y_k corrisponde all'uscita totale y del sistema per l'entrata x :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Questa uscita y corrisponde alla convoluzione tra l'entrata x e la risposta impulsiva h .

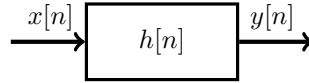
Data la struttura del sistema è possibile individuare l'uscita in forma analitica rispetto ad una generica entrata. Dopo aver determinato la risposta impulsiva inserendo al posto di una generica entrata x l'impulso δ , è possibile sostituire l'intero modello strutturale del sistema con un singolo blocco funzionale, un'oggetto che applica all'entrata la convoluzione per i parametri contenuti, contenente la risposta impulsiva. Si considera un generico schema di un circuito sommatore, un tipo di sistema controllore a feedforward:



Per ottenere l'uscita si somma il segnale originario allo stesso segnale ritardato di un campione e moltiplicato per un fattore a :

$$y[n] = x[n] + ax[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$$



4.5 Convoluzione tra Due Gaussiane

Date due gaussiane definite dai parametri α_1 e α_2 , con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$, si vuole determinare la convoluzione tra questi due segnali:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-\alpha_1 t^2} * e^{-\alpha_2 t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_1 \tau^2} e^{-\alpha_2 (t-\tau)^2} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_1 \tau^2} e^{-\alpha_2 (t^2 - 2t\tau + \tau^2)} d\tau \\ &= e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\tau^2} e^{2\alpha_2 t\tau} d\tau = e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\left[\tau^2 - 2\alpha_2 \frac{t\tau}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]} d\tau \end{aligned}$$

Si somma e si sottrae il fattore $\left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2$ nell'esponentiale all'interno dell'integrale:

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) \left[\tau^2 - 2\alpha_2 \frac{t\tau}{\alpha_1 + \alpha_2} + \left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 \right]} d\tau \\ & e^{-\alpha_2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) \left[\left(\tau - \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 \right]} d\tau \\ & e^{-\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) \left[\tau - \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2} \right]^2} d\tau \end{aligned}$$

Si applica la sostituzione $T = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\tau + \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$:

$$e^{-\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-T^2}}{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}} dT = \frac{e^{-\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)t^2}}{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-T^2} dT$$

Il fattore integrale corrisponde all'integrale di Gauss, precedentemente discusso, che risulta su tutti i reali in un'area di $\sqrt{\pi}$:

$$e^{-\alpha_1 t^2} * e^{-\alpha_2 t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} t^2}$$

Esprimendo le due gaussiane in forma normalizzata, risulta che la varianza della convoluzione equivale alla somma delle varianze delle due gaussiane $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (4.5.1)$$

4.6 Convoluzione a Media Mobile

Calcolare la convoluzione tra una finestra ed un segnale periodico y , per semplificare i calcoli si considera il segnale coseno, ma le proprietà ottenute da quest'operazione valgono per ogni funzione periodica, non attenuata nel tempo.

$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi \tau}{T_2}\right) \text{rect}\left(\frac{t - \tau}{T_1}\right) d\tau$$

La funzione è periodica per cui non è necessario valutare quando la convoluzione è nulla. Il prodotto tra i due segnali è non nullo per valori di τ compresi tra $\frac{T_1}{2} - t$ e $-\frac{T_1}{2} - t$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\frac{T_1}{2} - t}^{\frac{T_1}{2} - t} \cos\left(\frac{2\pi \tau}{T_2}\right) d\tau = \frac{T_2}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi \tau}{T_2}\right) \Bigg|_{-\frac{T_1}{2} - t}^{\frac{T_1}{2} - t} \\ &= \frac{T_2}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi(t + \frac{T_1}{2})}{T_2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(t - \frac{T_1}{2})}{T_2}\right) \right] \end{aligned}$$

Per la seconda formula di prostaferesi si ottiene:

$$z(t) = \frac{T_2}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}\frac{T_1}{2}\right) = \left[\frac{T_2}{2\pi} \sin\left(\pi\frac{T_1}{T_2}\right)\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right)$$

Se il periodo del coseno è uguale alla base della finestra, il seno è sempre nullo, quindi anche la convoluzione è nulla per ogni valore di t . I fattori invarianti nel tempo si possono esprimere come una costante A , ampiezza del segnale ottenuto:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right)$$

Il risultato della convoluzione è il segnale periodico originario moltiplicato per un fattore costante, che dipende dal periodo T_2 e dalla base del segnale finestra T_1 . Il segnale di convoluzione quindi oscilla come la funzione periodica di partenza. In generale il risultato della convoluzione di una finestra con una funzione periodica è un fattore A moltiplicato per il segnale originario:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * y(t) = A(T_1, T_2)y(t) \quad (4.6.1)$$

Questa proprietà si indica come un'operazione a media mobile, che amplifica o riduce l'ampiezza di un segnale periodico, oppure lo rende nullo.

4.7 Esercizi su Convoluzioni, Correlazioni e Sistemi

Calcolare la convoluzione tra un esponenziale unilatero ed un gradino, Si considera $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$z(t) = e^{-\alpha t}u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Poiché è presente un gradino nell'integrale, la convoluzione assumerà valori nulli per $t < 0$, ciò si può anche individuare graficamente, poiché per gli stessi valori i due grafici del gradino e dell'esponenziale unilatero non si sovrappongono. All'aumentare del valore di t , il valore del segnale $z(t)$ aumenta sempre più lentamente, poiché i contributi dell'esponenziale vanno diminuendo. Poiché entrambi i gradini nell'integrale assumono valori unitari per $t > 0$, il valore del segnale in questo intervallo dipende dalla funzione integrale dell'esponenziale, da 0 al valore di t corrente:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau & t \geq 0 \end{cases}$$

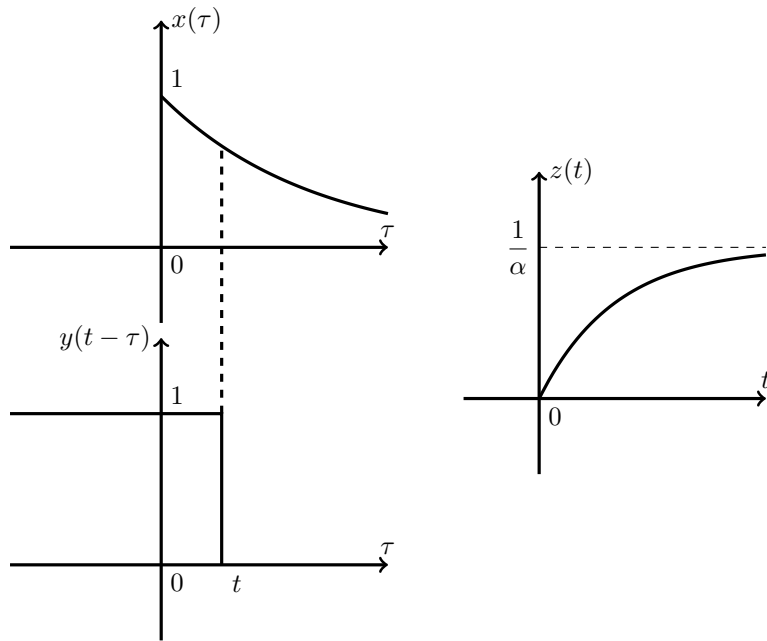
Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$\int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau = \left| -\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \right|_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

Per cui il segnale convoluzione in forma analitica risulta:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & t \geq 0 \end{cases}$$

Questo segnale tende asintoticamente a $1/\alpha$ per $t \rightarrow +\infty$.



Calcolare l'autoconvoluzione di un esponenziale unilatero

$$z(t) = e^{-\alpha t} u(t) * e^{-\alpha t} u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

Poiché sono unilateri, non si sovrappongono per $t < 0$, quindi la convoluzione è nulla per quei valori di tempo. Può essere spiegato tramite la proprietà del gradino di cambiare i limiti di integrazione, per cui invece di integrare da $-\infty$ a $+\infty$, si integra nell'intervallo dove si trova il gradino $u(\tau)$, ovvero da 0 a $+\infty$:

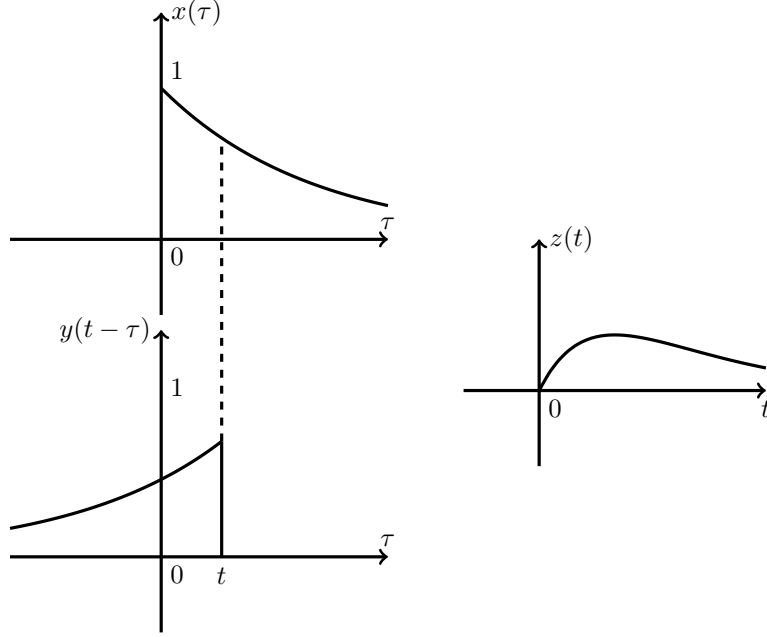
$$z(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t-\tau) d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^{+\infty} u(t-\tau) d\tau$$

L'area sottesa da un gradino ribaltato e traslato di un fattore $t > 0$ da 0 a $+\infty$ equivale all'area di un rettangolo di altezza 1 e di base t :

$$z(t) = e^{-\alpha t} \int_0^t d\tau = t e^{-\alpha t}$$

In forma analitica risulta:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$$



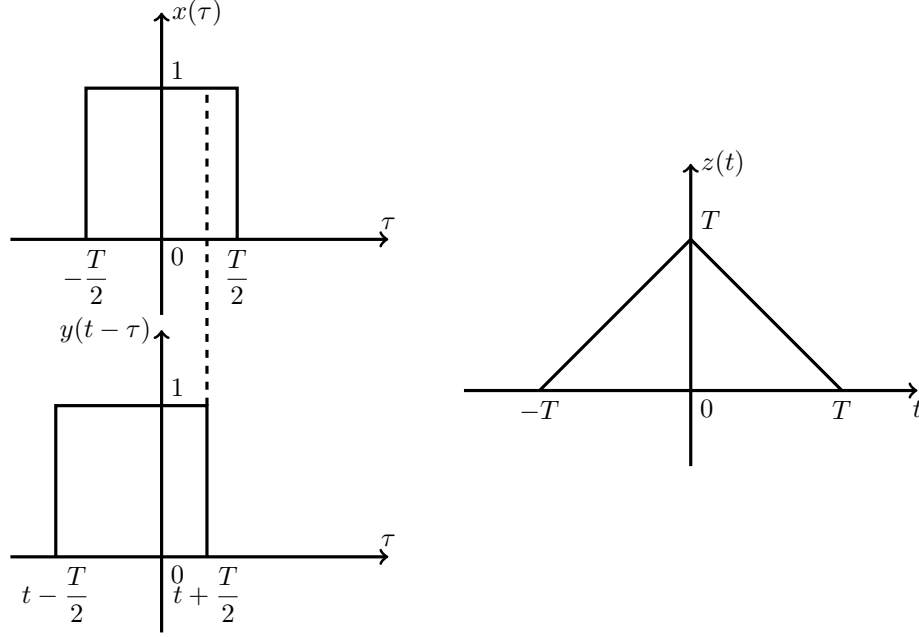
Calcolare la convoluzione tra due finestre. Si considerano due casi, dove le due finestra hanno base uguale, ed un caso dove hanno base differente. Si considera il caso $T_1 = T_2$:

$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La convoluzione assume valori nulli quando non si sovrappongono, ovvero per un valore $t + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \rightarrow t < -T$. L'area sottesa dal prodotto di queste due finestre aumenta linearmente fino a quando non si sovrappongono per $t = 0$, dove l'area assume valore massimo $T \cdot 1$, dopo il quale decresce linearmente fino a $t = T$. Se una delle due fosse stata traslata di un fattore t_0 , l'intera convoluzione sarebbe stata traslata dello stesso fattore. Da notare che la convoluzione di due segnali pari genera un segnale pari.

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \int_{-T}^t d\tau & -T \leq t < 0 \\ \int_t^T d\tau & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -T \wedge t > T \\ T - |t| & -T \leq t < T \end{cases} = T \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La convoluzione tra due finestre di base uguale risulta in un triangolo di base doppia $2T$, e scalata di un fattore pari alla base T .



Si considera ora il caso dove le due finestre hanno basi $T_1 > T_2$:

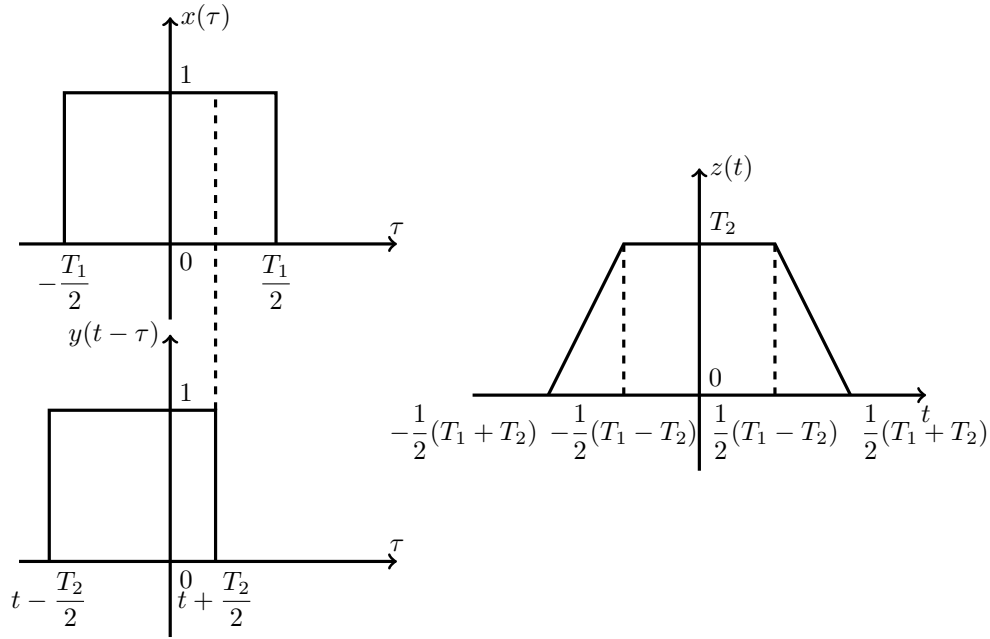
$$z(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Poiché le due finestre sono simmetriche, si analizzano solo i casi per $t < 0$, per poi aggiungere per simmetria l'equazione analitica per $t \geq 0$. Le due finestre non si sovrappongono per $t + \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \rightarrow t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, per cui in quell'intervallo la convoluzione assume valore nullo. Il valore della convoluzione aumenta linearmente fino a quando la finestra più piccola trasla fino ad essere completamente interna alla finestra di base T_1 per un valore $t - \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \rightarrow t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2)$. Quando le due finestre si sovrappongono, il valore della convoluzione è costante, e corrisponde all'area di un rettangolo di base, base della finestra più piccola T_2 ed altezza unitaria $T_2 \cdot 1$ fino a

raggiungere t_0 . Ribaltando questo segnale ottenuto si ottiene il segnale per valori $t \geq 0$:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ \int_{-\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}^t d\tau & -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \leq t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \\ T_2 & -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \\ -\int_{-\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}^t d\tau & \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ 0 & t \geq \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \wedge t \geq \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - |t| & -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \leq t < -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \wedge \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \\ T_2 & -\frac{1}{2}(T_1 - T_2) \leq t < \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \end{cases}$$



Il grafico di questa convoluzione rappresenta un trapezio di altezza T_2 , base maggiore $T_1 + T_2$ e base minore $T_1 - T_2$. Si nota come l'autoconvoluzione di due finestre di base uguali rappresenta un caso speciale di questo trapezio, avente base minore nulla $T - T = 0$ e base doppia rispetto alla finestra $T + T = 2T$, ciò equivale ad un triangolo di altezza T e base $2T$.

Calcolare la convoluzione tra i segnali x e y :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= t \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) \\
 y(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right) \\
 z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \operatorname{rect}\left(\frac{\tau-T}{2T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau+T}{2T}\right) d\tau \\
 z(t) &= \begin{cases} 0 & t < -2T \\ \int_0^{t+2T} \tau d\tau & -2T \leq t < 0 \\ \int_t^{2T} \tau d\tau & 0 \leq t < 2T \\ 0 & t \geq 2T \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -2T \wedge t \geq 2T \\ \frac{1}{2}t^2 + 2Tt + 2T^2 & -2T \leq t < 0 \\ 2T^2 - \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 2T \end{cases}
 \end{aligned}$$

Calcolare la convoluzione tra queste due finestre:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z(t) * y(t) \\
 x(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t-3T}{4T}\right) \\
 y(t) &= -\operatorname{rect}\left(\frac{t+2T}{2T}\right) \\
 z(t) &= \begin{cases} 0 & t < -2T \\ -\int^{3T+t} T d\tau & -2T \leq t < 0 \\ -2T & 0 \leq t < 2T \\ -\int_{T+t}^{5T} d\tau & 2T \leq t < 4T \\ 0 & t \geq 4T \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -2T \wedge t \geq 4T \\ -2T - t & -2T \leq t < 0 \\ -2T & 0 \leq t < 2T \\ -4T + t & 2T \leq t < 4T \end{cases}
 \end{aligned}$$

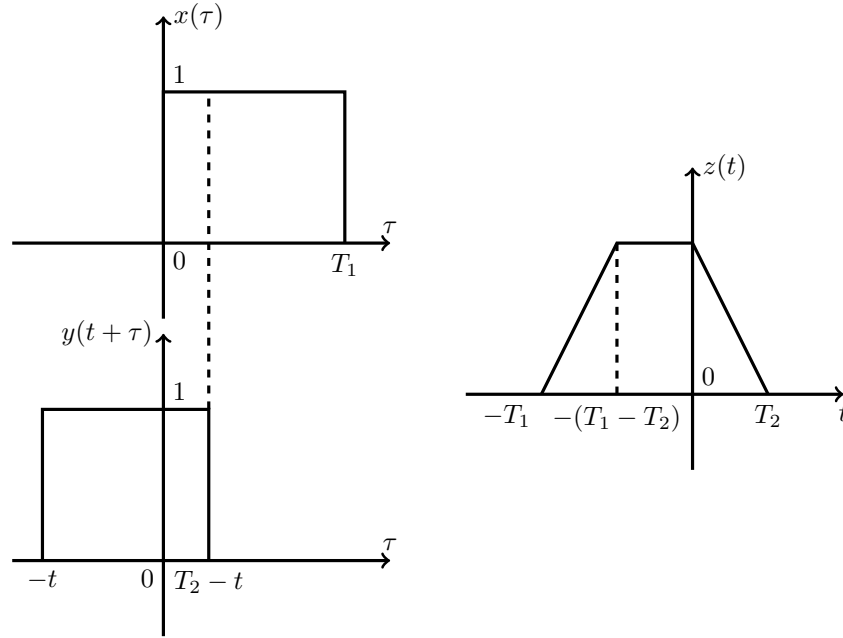
Calcolare la correlazione tra due finestre:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \otimes \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T_2}{2}}{T_2}\right)$$

Si considera la prima finestra di base maggiore $T_1 > T_2$. Per facilitare il calcolo si esprime come una convoluzione. I due segnali non si sovrappongono per valori $T_2 - t < 0 \rightarrow t \geq T_2$, per cui la correlazione è nulla. Cominciano a sovrapporsi da $t < T_2$ fino a quando la finestra più piccola non si trova interamente nella prima finestra per $-t < 0 \rightarrow t \geq 0$. La finestra più piccola si trova interamente in quella più grande, risultando in un'area di T_2 , fino ad un valore $T_2 - t < T_1 \rightarrow t \geq -(T_1 - T_2)$. L'area comincia a scendere fino ad un valore $-t < T_1 \rightarrow t \geq -T_1$.

Per valori più piccoli di $-T_1$ le due finestre non si sovrappongono e la correlazione risulta nulla.

$$R_{xy}(t) = \begin{cases} 0 & t \geq T_2 \\ \int_t^{T_2} dt & 0 \leq t < T_2 \\ T_2 & -(T_1 + T_2) \leq t < 0 \\ \int_{-T_1}^t dt & -T_1 \leq t < -(T_1 - T_2) \\ 0 & t < -T_1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < -T_1 \wedge t \geq T_2 \\ T_1 + t & T_1 \leq t < -(T_1 - T_2) \\ T_2 & -(T_1 - T_2) \leq t < 0 \\ T_2 - t & 0 \leq t < T_2 \end{cases}$$



Dato il sistema definito dall'equazione y :

$$y(t) = x(t) + 3u(t - 1)$$

Si dimostra che non è lineare:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 3u(t - 1) \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 3u(t - 1) \\ ax_1(t) + bx_2(t) &\rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) + 3u(t - 1) \neq ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Si dimostra che non è tempo invariante:

$$x(t - \tau) \rightarrow x(t - \tau) + 3u(t - 1) \neq y(t - \tau) = x(t - \tau) + 3u(t - \tau - 1)$$

Sicuramente non è un filtro. Mentre è causale, poiché il gradino è ritardato, e quindi l'uscita non dipende da valori futuri.

Calcolare l'uscita di un filtro discreto $h[n]$, con un entrata parametrizzata $x[n]$:

$$h[n] = \frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

$$x[n] = \cos(2\pi\phi n)$$

$$\phi_1 = 0 \rightarrow x_1[n] = 1$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \left[\frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] \right] * x[n]$$

$$\frac{1}{4}x[n+1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4} \rightarrow x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$y[n] = \left[\frac{1}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] \right] * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$y[n] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \rightarrow x[n] = \cos(\pi n)$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \cos(\pi(n+1)) + \frac{1}{2} \cos(\pi n) + \frac{1}{4} \cos(\pi(n-1)) = 0$$

5 Serie di Fourier

Dati due segnali di frequenza doppia come il La4 a $\approx 440Hz$ ed il La5 a $\approx 880Hz$, non si nota la differenza poiché sono esattamente una il doppio dell'altra. In generale segnali musicali affinché suonino bene devono avere frequenze tra di loro o multipli oppure relati da frazioni semplici, non possono essere scelte arbitrariamente. Queste frequenze sono associate a varie note, inserendo una serie di queste note è possibile scrivere un segnale musicale. Viene attuato un processo analogo tramite la serie di Fourier. Questo tipo di analisi venne introdotta da Fourier nella sua teoria analitica del calore, dove oltre all'omonima serie e trasformata, introdusse molti concetti matematici importanti.

La serie di Fourier è uno strumento per esprimere solo i segnali periodici, se il segnale non è periodico si usa la trasformata di Fourier, se rispetta le condizioni di Dirichlet, ma per i nostri fini si considerano sempre verificate. I segnali si esprimono rispetto alle sue armoniche. Dato un segnale $x(t)$ di periodo T , può essere rappresentato come una serie, ovvero una sommatoria, di alcuni coefficienti di Fourier per un fattore esponenziale, chiamato armonica, di frequenza multiplo della frequenza del segnale originario:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \quad (5.0.1)$$

Il fattore c_k indica se una data frequenza è presente nel segnale analizzato. Le armoniche sono note a priori, dal punto di vista fisico non esistono armoniche di frequenze negative, ma in ambito matematico sono necessarie per esprimere il segnale. Considerando la rappresentazione di Eulero si può esprimere la serie di Fourier come:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left[\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right] \quad (5.0.2)$$

Poiché le armoniche sono le stesse, l'unica differenza tra varie rappresentazioni di Fourier è il valore dei coefficienti c_k assegnati. Lo spazio dei segnali periodici, aventi lo stesso periodo T , può essere scritto come uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare, dove ogni segnale è espresso come un vettore. Questo spazio può essere espresso data una base ortonormale.

5.1 Spazio Vettoriale

Si considera uno spazio euclideo \mathbb{R}^3 descritto da tre vettori ortonormali $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$ e $\hat{z} = (0, 0, 1)$, chiamati base canonica dello spazio vettoriale. Dei vettori di uno spazio vettoriale si dicono base, se sono ortonormali tra di loro, quindi il prodotto scalare tra di loro è nullo ovvero sono linearmente indipendenti, mentre si dicono basi canoniche se il quadrato di un vettore, il prodotto scalare per sé stesso, equivale ad uno. Il prodotto scalare è un'operazione binaria interna ad uno spazio vettoriale V che restituisce uno scalare:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Si definisce come il prodotto matriciale tra il primo vettore per la trasposta del secondo:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w}^T = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Per ottenere una certa componente di un generico vettore \vec{v} si considera il prodotto tra quel vettore e la base della componente desiderata:

$$\langle \vec{v}, \hat{x} \rangle = \vec{v} \cdot \hat{x}^T = (v_x \quad v_y \quad v_z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_x$$

Il segnale periodico $x(t)$ può essere scritto come una somma di coefficienti moltiplicati per una base ortonormale dello spazio vettoriale dei segnali periodici di periodo T . In questo spazio sono presenti infiniti vettori ortonormali tra di loro, a differenza dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , dove sono presenti tre vettori base. Questo spazio è quindi uno spazio euclideo di dimensione numerabile, ma infinita, poiché le basi ortonormali corrispondono alle infinite armoniche di periodo T . Il prodotto scalare tra due segnali x e y viene definito come:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = x(t) \cdot y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$$

Il prodotto scalare tra due segnali periodici viene definito come:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = x(t) \cdot y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t) dt$$

Per cui per ottenere i coefficienti di Fourier c_k rispetto ad una determinata armonica k di un segnale x si considera il prodotto scalare tra quel segnale per l'armonica k :

$$c_k = \langle x(t), e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \quad (5.1.1)$$

Il prodotto tra due basi è nullo, tranne nel caso dove sono la stessa base, in quel caso il risultato è 1. Per dimostrare che le armoniche rappresentano una base dello spazio vettoriale si considera il prodotto scalare tra un'armonica k ed una l :

$$\begin{aligned} \langle e^{i\frac{2\pi kt}{T}}, e^{i\frac{2\pi lt}{T}} \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} e^{-i\frac{2\pi lt}{T}} dt = \frac{1}{T} \left[e^{i\frac{2\pi(k-l)t}{T}} \frac{T}{2i\pi(k-l)} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{e^{i\pi(k-l)} - e^{-i\pi(k-l)}}{2i} \frac{1}{\pi(k-l)} = \frac{\sin(\pi(k-l))}{\pi(k-l)} \end{aligned}$$

Questa funzione risulta essere una sinc, e per definizione è un segnale che si annulla per ogni valore intero, e poiché k e l sono due interi la loro differenza lo è poiché l'insieme degli interi è chiuso rispetto alla somma: $k-l \in \mathbb{Z}$. Quindi il prodotto scalare tra due armoniche k e l , non triviale: $k \neq l$, è di valore nullo:

$$\forall k \neq l \in \mathbb{Z} \implies \langle e^{i\frac{2\pi kt}{T}}, e^{i\frac{2\pi lt}{T}} \rangle = 0$$

È stato dimostrato che le armoniche sono una base dello spazio vettoriale dei segnali periodici di periodo T . Per $k=0$ l'armonica corrispondente è un segnale costante. In generale un'armonica di ordine k si può esprimere mediante la rappresentazione di Eulero:

$$e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

Per cui la parte reale di un'armonica oscilla come un segnale coseno di frequenza dell'armonica.

5.2 Serie Notevoli

Si considera un segnale costante $x(t) = A$. Per determinare i coefficienti della sua serie di Fourier si considera il prodotto scalare tra il segnale ed una generica armonica k :

$$c_k = \langle x(t), e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \left[A \frac{e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}}{-2i\pi k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$\frac{A(e^{-i\pi k} - e^{i\pi k})}{-2i\pi k} = A \frac{-\sin(\pi k)}{-\pi k} = A \text{sinc}[k]$$

L'unico valore per cui il seno cardinale discreto in funzione di k assume un valore non nullo è per $k = 0$:

$$c_0 = A \text{sinc}[0] \xrightarrow{1} x(t) = c_0 e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \xrightarrow{0}$$

Si considera un coseno di periodo T : $x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Si vuole determinare la sua espansione di Fourier, per cui si considera il suo prodotto scalare con una generica armonica k . Si esprime il coseno tramite le formule di Eulero, in questo modo assume la stessa forma di una differenza di due armoniche:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \frac{A}{2T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi t}{T}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\frac{2\pi t}{T}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right)$$

Il prodotto scalare tra due armoniche è stato precedentemente individuato come un seno cardinale:

$$c_k = \frac{A \text{sinc}[1 - k] + A \text{sinc}[-(1 + k)]}{2}$$

Il seno cardinale nel discreto assume gli stessi valori dell'impulso discreto. Quindi il coefficiente è nullo per ogni $k \neq 1 \vee -1$, gli unici coefficienti non nulli della sua serie di Fourier sono c_{-1} e c_1 :

$$c_1 = c_{-1} = \frac{A}{2}$$

$$x(t) = c_{-1} e^{-i\frac{2\pi t}{T}} + c_1 e^{i\frac{2\pi t}{T}}$$

Si applica un processo analogo per determinare l'espansione di Fourier di un segnale sinusoidale $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \frac{A}{2iT} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi t}{T}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\frac{2\pi t}{T}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right)$$

$$c_k = \frac{A \text{sinc}[1 - k] - A \text{sinc}[-(1 + k)]}{2i}$$

$$c_1 = -c_{-1} = \frac{A}{2i}$$

$$x(t) = c_{-1} e^{-i\frac{2\pi t}{T}} + c_1 e^{i\frac{2\pi t}{T}}$$

Altrimenti è possibile calcolare i coefficienti tramite confronto diretto dalla rappresentazione di Eulero delle funzioni trigonometriche, in questo modo si individuano le due armoniche che producono il segnale sinusoidale, di ordine 1 e -1 .

Si considera ora un segnale $x(t) = A \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Per le fomula di duplicazione del coseno si può riscrivere come:

$$A \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{A}{2} \left(\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + 1 \right)$$

Si calcola il valore di un coefficiente generico k :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \frac{A}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + 1 \right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \\ &= \frac{A}{2T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{4\pi t}{T}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\frac{4\pi t}{T}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\ &= \frac{A}{2} (2 \operatorname{sinc}[2 - k] - 2 \operatorname{sinc}[-(2 + k)] + \operatorname{sinc}[k]) \end{aligned}$$

I coefficienti non si annullano per valori di k pari a ± 2 e 0:

$$x(t) = c_{-2} e^{-i\frac{4\pi t}{T}} + c_0 + c_2 e^{i\frac{4\pi t}{T}}$$

Si considera un segnale onda quadra di periodo T e di base τ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t - nT}{\tau}\right)$$

Si determina il valore di un coefficiente generico k :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t - nT}{\tau}\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt$$

Nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ cade una sola finestra di base τ , per $n = 0$, per cui si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt = \left[\frac{e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}}{-2i\pi k} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{e^{-i\pi k \frac{\tau}{T}} - e^{i\pi k \frac{\tau}{T}}}{-2i} \frac{1}{\pi k} = \frac{\tau \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right)}{T \frac{\pi k \tau}{T}} = \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right) \end{aligned}$$

Il seno cardinale non è discreto, poiché l'argomento non necessariamente assume valore intero.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t - nT}{\tau}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right) e^{i\frac{2\pi kt}{T}}$$

All'aumentare di k e quindi della frequenza delle armoniche, il valore dei coefficienti diminuisce, quindi diminuiscono anche i contributi delle armoniche a frequenza maggiore per la ricostruzione del segnale originale. I coefficienti rappresentano il peso di quanto le armoniche contribuiscono al segnale originario. La precisione aumenta sempre di meno per ogni nuova armonica aggiunta, fino a ricostruire completamente il segnale originale se k tende asintoticamente ad infinito. Da notare che

se $T = 2\tau$, per k pari i coefficienti della serie di Fourier dell'onda quadra che ha periodo esattamente il doppio della base sono nulli. In generale se $T = n\tau$, dove $n \in \mathbb{N}$, i contributi delle armoniche con frequenza multiplo di n/T sono nulli, ovvero i coefficienti con k multiplo di n sono nulli:

$$c_k = \frac{1}{n} \text{sinc}\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \quad \forall k = \alpha \cdot n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

In generale se $T/\tau \notin \mathbb{Z}$ e $\tau/T \notin \mathbb{Z}$, i coefficienti dell'espansione di Fourier non sono mai nulli, poiché non comprendono mai zeri triviali della funzione seno cardinale.

Per cui in generale il contenuto informativo del segnale è descritto interamente dai coefficienti della serie di Fourier c_k . A volte viene richiesto di individuare il periodo del segnale trattato per poi individuare i coefficienti della sua serie di Fourier.

5.3 Proprietà

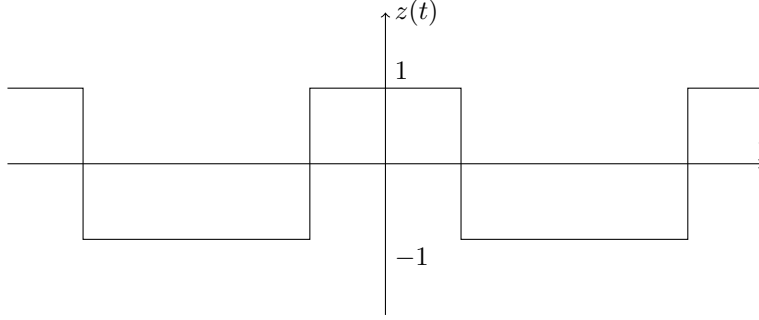
5.3.1 Linearità

Poiché segnali $x(t)$ e $y(t)$, periodici di periodo T , possono essere espressi come espansione di Fourier rispetto alle stesse armoniche, la loro combinazione lineare può essere espressa come una combinazione lineare dei coefficienti delle due serie di Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \\ ax(t) + by(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ac_k + bd_k) e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \\ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (ax(t) + by(t)) dt &= \frac{a}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt + \frac{b}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = ac_k + bd_k \end{aligned}$$

Data un'onda quadra $z(t)$ che assume valori di 1 e -1 periodicamente, con periodo T , può essere espressa come una differenza tra due onde quadre $x(t)$ e $y(t)$ in opposizione di fase che assumono valori di 1 e 0 con periodo T . Una delle quali ha una base di lunghezza τ , mentre l'altra lunghezza di $T - \tau$ e traslata di un semiperiodo $T/2$:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\text{rect}\left(\frac{t - kT}{\tau}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - nT - \frac{T}{2}}{T - \tau}\right) \right]$$



Si calcolano ora i coefficienti dell'espansione di Fourier:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\text{rect} \left(\frac{t - kT}{\tau} \right) - \text{rect} \left(\frac{t - kT - \frac{T}{2}}{T - \tau} \right) \right] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{rect} \left(\frac{t - kT}{\tau} \right) dt - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T-\tau}{2}}^{\frac{T-\tau}{2}} \text{rect} \left(\frac{t - kT - \frac{T}{2}}{T - \tau} \right) dt \\
 &= \frac{e^{-i\pi k \frac{\tau}{T}} - e^{i\pi k \frac{\tau}{T}}}{-2i} \frac{1}{\pi k} \frac{\tau}{T} - \frac{e^{-i2\pi k \frac{T-\tau/2}{T}} - e^{i2\pi k \frac{T-\tau/2}{T}}}{-2i} \frac{1}{\pi k} \frac{\tau}{T}
 \end{aligned}$$

Per $k = 0$ si ottiene una forma indeterminata, per cui bisogna risolvere l'integrale considerando il valor medio assunto dal segnale nell'intervallo $[-T/2, T/2]$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau}{T} \text{sinc} \left(\frac{k\tau}{T} \right) - \frac{e^{i\pi k \frac{\tau}{T}} - e^{-i\pi k \frac{\tau}{T}}}{-2i} \frac{1}{\pi k} \\
 c_k = \frac{2\tau}{T} \text{sinc} \left(\frac{k\tau}{T} \right)
 \end{aligned}$$

Generalmente si differenziano i casi dove l'esponenziale assume valore unitario, per $k = 0$, dai casi dove è presente un'armonica generica.

Il segnale originale può essere espresso come un'onda quadra doppia, di stesso periodo T e base τ , e traslata verso il basso:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[2 \text{rect} \left(\frac{t - kT}{\tau} \right) \right] - 1 = 2x(t) - 1$$

In questo modo si effettuano meno calcoli per determinare i coefficienti di Fourier, usufruendo della proprietà di linearità bisogna tenere conto che il fattore costante -1 , assume un valore non nullo solo per $k = 0$. Si considerano i coefficienti del segnale x come c_k , mentre del segnale costante d_k , per cui in questo caso i coefficienti del segnale z si esprimono come:

$$a_k = \begin{cases} 2c_k + d_k & k = 0 \\ 2c_k & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\tau}{T} - 1 & k = 0 \\ \frac{2\tau}{T} \text{sinc} \left(\frac{k\tau}{T} \right) & k \neq 0 \end{cases}$$

5.3.2 Traslazione nel Tempo

Si considera un segnale ritardato nel tempo di un fattore t_0 : $x(t - t_0)$, dati i coefficienti del segnale non traslato c_k . Per confronto diretto si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \\ x(t - t_0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k (t - t_0)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(c_k e^{-i \frac{2\pi k t_0}{T}} \right) e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \\ x(t - t_0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \end{aligned}$$

Per cui tutti i coefficienti equivalgono ai coefficienti non traslati c_k moltiplicati per un fattore esponenziale, che dipende dalla traslazione t_0 :

$$d_k = c_k e^{-i \frac{2\pi k t_0}{T}}$$

Altrimenti si possono determinare i coefficienti tramite la definizione, attuando una sostituzione $t - t_0 \rightarrow \tau$:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t - t_0) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dT \rightarrow \int_{-\frac{T}{2} - t_0}^{\frac{T}{2} - t_0} x(\tau) e^{-i \frac{2\pi k t_0}{T}} e^{-i \frac{2\pi k \tau}{T}} d\tau \\ d_k &= \frac{1}{T} e^{-i \frac{2\pi k t_0}{T}} \int_{-\frac{T}{2} - t_0}^{\frac{T}{2} - t_0} x(\tau) e^{-i \frac{2\pi k \tau}{T}} d\tau = e^{-i \frac{2\pi k t_0}{T}} c_k \end{aligned}$$

Dove c_k sono i coefficienti del segnale non traslato.

Si considera un'onda quadra di periodo T traslata di un fattore τ , corrispondente alla lunghezza della sua base. Dati i coefficienti di un onda quadra non traslata c_k si possono esprimere direttamente i coefficienti del segnale traslato d_k :

$$d_k = \frac{\tau}{T} \text{sinc} \left(\frac{k\tau}{T} \right) e^{-i \frac{2\pi k \tau}{T}}$$

In caso il periodo sia esattamente il doppio della base $T = 2\tau$:

$$d_k = \frac{1}{2} \text{sinc} \left(\frac{k}{2} \right) e^{-i\pi k} = \frac{1}{2} \frac{e^{i \frac{\pi k}{2}} - e^{-i \frac{\pi k}{2}}}{i\pi k} e^{-i\pi k} = \frac{e^{-i \frac{\pi k}{2}} - e^{-i \frac{3\pi k}{2}}}{2i\pi k}$$

Per cui i coefficienti dell'onda quadra di armoniche di ordine pari risultano nulli.

5.3.3 Traslazione in Frequenza

Si considera un segnale x moltiplicato per un'armonica di ordine n :

$$y(t) = x(t) \cdot e^{i \frac{2\pi n t}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} e^{i \frac{2\pi n t}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi (k+n) t}{T}}$$

Si considera la sostituzione $l = n + k$:

$$y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{l-n} e^{i \frac{2\pi l t}{T}}$$

Per cui i coefficienti dell'espansione di Fourier di y , corrispondono agli stessi coefficienti del segnale originario x , ma ad un generico coefficiente c_k viene associata l'armonica di ordine $k + n$. Tramite la definizione integrale dei coefficienti di Fourier, si arriva allo stesso risultato:

$$\begin{aligned} \langle y(t), e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(x(t) \cdot e^{i \frac{2\pi n t}{T}} \right) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \left(e^{i \frac{2\pi n t}{T}} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{i \frac{2\pi (n-k) t}{T}} dt = d_k = c_{k-n} \end{aligned}$$

Si ottiene lo stesso risultato, i coefficienti associati alle armoniche vengono traslati di un fattore n , fattore del ritardo in frequenza del segnale.

5.3.4 Teorema della Modulazione

Quando un segnale viene moltiplicato per un coseno ad una determinata frequenza si indica quest'operazione come modulazione.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = x(t) \left[\frac{e^{i \frac{2\pi t}{T}} + e^{-i \frac{2\pi t}{T}}}{2} \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \frac{e^{i \frac{2\pi t}{T}} + e^{-i \frac{2\pi t}{T}}}{2} \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi (k+1) t}{T}} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi (k-1) t}{T}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m-1} e^{i \frac{2\pi m t}{T}} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m+1} e^{i \frac{2\pi m t}{T}} \right) \\ d_k &= \frac{1}{2} c_{k-1} + \frac{1}{2} c_{k+1} \end{aligned}$$

5.3.5 Teorema della Derivazione

Espansione di Fourier della derivata di un segnale $x(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \\ d_k &= c_k \frac{2i\pi k}{T} \end{aligned}$$

Tramite la definizione, si risolve tramite integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
 d_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{d}{dt} x(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = \left[\frac{1}{T} x(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \frac{2i\pi k}{T} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \\
 &\quad - \frac{1}{T} x(t) (e^{i\pi k} - e^{-i\pi k}) + c_k \frac{2i\pi k}{T} \\
 &\quad - \frac{2i}{T} \sin(\pi k) + c_k \frac{2i\pi k}{T} \\
 d_k &= c_k \frac{2i\pi k}{T}
 \end{aligned}$$

5.3.6 Teorema di Parseval

Questo teorema permette di calcolare velocemente la potenza di un segnale periodico, la potenza di un segnale periodico è definita come:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}} \right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} \right) dt \\
 P_x &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} c_k c_n^* \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i \frac{2\pi (k-n)t}{T}} dt
 \end{aligned}$$

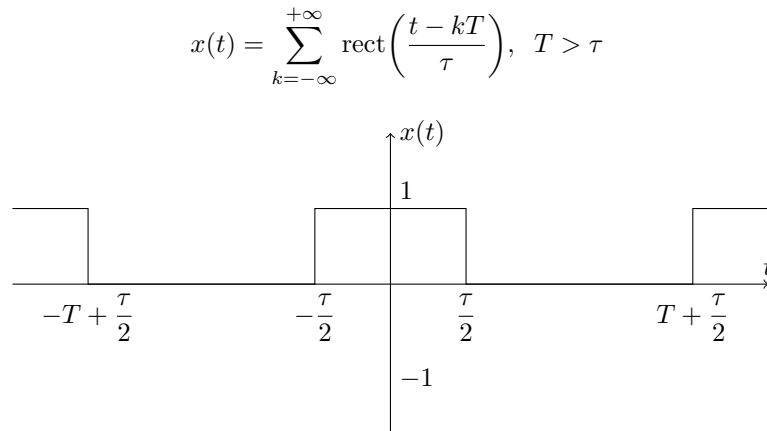
L'integrale corrisponde all'impulso discreto di argomento $k - n$:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} c_k c_n^* \delta[k - n] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k c_k^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

Si possono raggruppare le sommatorie, poiché l'impulso assume valori non nulli solo quando i coefficienti sono uguali.

5.4 Serie di Un'Onda Quadra

Data un'onda quadra:

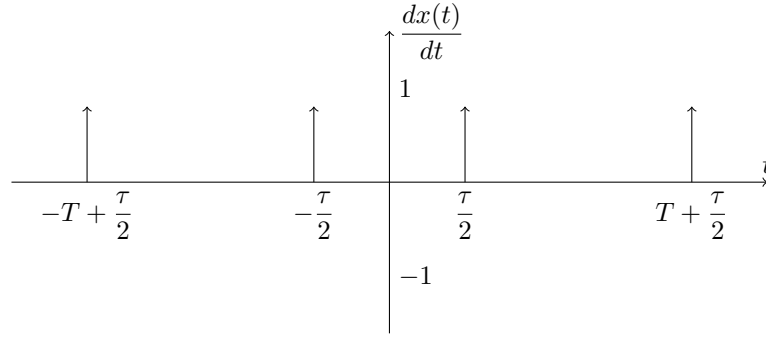


Si vuole descrivere l'espansione di Fourier della derivata di questo segnale. Si esprime come la differenza tra due gradini:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u\left(t - kT + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - kT - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - kT + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - kT - \frac{\tau}{2}\right)$$

Poiché per definizione la derivata di un gradino è l'impulso di Dirac. La derivata corrisponde ad una serie di impulsi nei punti dove l'onda quadra presenta delle discontinuità.



I coefficienti di Fourier corrispondenti alla derivata di x risultano essere:

$$d_k = c_k \frac{2i\pi k}{T} = \frac{\tau}{T} \frac{2i\pi k}{T} \text{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right) = \frac{\tau}{T} \frac{2i\pi k}{T} \frac{\sin(k\pi\tau/T)}{k\pi\tau/T}$$

$$d_k = \frac{2i}{T} \sin\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)$$

Per un'onda quadra avente periodo T pari al doppio della base delle finestre τ : $T = 2\tau$, i suoi coefficienti di Fourier risultano essere:

$$d_k = \frac{i}{\tau} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Poiché $k \in \mathbb{Z}$, il valore dei coefficienti è o ± 1 o assume un valore nullo.

Si calcolano tramite la definizione:

$$d_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta\left(t - kT + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - kT - \frac{\tau}{2}\right) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt$$

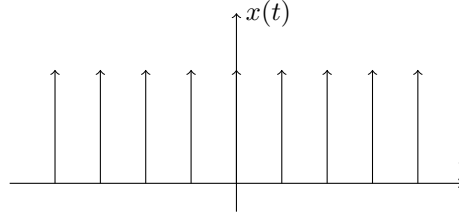
Poiché all'interno dell'intervallo di integrazione cade un singolo impulso

5.5 Segnale Treno di Impulsi o Campionatore

Questo segnale corrisponde ad una serie di impulsi di periodo T . Questo segnale è anche noto come segnale pettine o rastregliera.

$$x(t) = \pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Permette di passare da un segnale analogico ad un segnale digitale, estraendo campioni ad intervalli regolari dal segnale in tempo continuo.



Si calcolano i coefficienti dell'espansione di Fourier del segnale pettine. Si considera l'unico impulso che cade all'interno dell'intervallo di integrazione, centrato in $t = 0$, per la proprietà di campionamento della delta e per l'area della delta si ottiene:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = \frac{1}{T} e^{-i \frac{2\pi k \cdot 0}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt$$

$$c_k = \frac{1}{T}$$

Tutti i coefficienti della serie di Fourier della rastregliera assumono lo stesso valore costante $1/T$.

5.6 Serie del Modulo di Coseno

Dato il segnale:

$$x(t) = \left| \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right|$$

Si determinano i coefficienti dell'espansione di Fourier tramite la definizione:

$$c_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) e^{-i \frac{4\pi k t}{T}} dt$$

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \left[\cos \left(\frac{4\pi k t}{T} \right) - i \sin \left(\frac{4\pi k t}{T} \right) \right] dt$$

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \cos \left(\frac{4\pi k t}{T} \right) dt - i \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \sin \left(\frac{4\pi k t}{T} \right) dt$$

Poiché è una funzione pari, il primo integrale corrisponde al doppio dell'integrale su solo una metà dell'intervallo, mentre il secondo integrale, essendo una funzione dispari, assume valore nullo su un intervallo simmetrico:

$$\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{4\pi kt}{T}\right) dt - i \cdot 0$$

Per le formule di prostaferesi si ottiene una somma di due coseni. Integrandoli separatamente si ottiene:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{4}{T} \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2(2k+1)\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(2k-1)\pi t}{T}\right) dt \\ &= \left[\frac{2}{T} \frac{T}{2(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{2(2k+1)\pi t}{T}\right) + \frac{2}{T} \frac{T}{2(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{2(2k-1)\pi t}{T}\right) \right]_0^{\frac{T}{4}} \\ &= \left[\frac{\sin(2(2k+1)\pi t/T)}{(2k+1)\pi} + \frac{\sin(2(2k-1)\pi t/T)}{(2k-1)\pi} \right]_0^{\frac{T}{4}} \\ c_k &= \frac{\sin(2(2k+1)\pi/2)}{(2k+1)\pi} + \frac{\sin(2(2k-1)\pi/2)}{(2k-1)\pi} \end{aligned}$$

L'argomento del seno, lo rende tale che assume solo valori pari a ± 1 . Per valori pari di k , il primo seno assume valore di 1, mentre l'altro -1 , accade l'opposto per valori dispari di k . I due seni assumono sempre valori discordi e unitari, quindi si possono esprimere come:

$$c_k = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} (-1)^k$$

5.7 Segnali Reali

Se un segnale è reale, i suoi coefficienti possono essere espressi in un altro modo. Considerando la forma integrale dei coefficienti, e la formula di Eulero per gli esponenziali

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \left[\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] dt \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt - \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Si definiscono due coefficienti a_k e b_k pari alla parte reale ed immaginaria dei coefficienti c_k :

$$\begin{aligned} c_k &= a_k + ib_k \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ b_k &= -\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

I coefficienti a_k sono pari, mentre i coefficienti b_k sono dispari:

$$\begin{aligned}a_k &= a_{-k} \\b_k &= -b_{-k} \\c_{-k} &= a_{-k} + ib_{-k} = a_k - ib_k = c_k^*\end{aligned}$$

In forma polare si può esprimere come:

$$\begin{aligned}c_k &= \rho_k e^{i\phi_k} \\c_{-k} &= \rho_{-k} e^{i\phi_{-k}} = \rho_k e^{-i\phi} = c_k^*\end{aligned}$$

Un qualsiasi segnale reale può essere espresso come:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} + c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} + c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \\&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^* e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} + c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \right) + c_0 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k e^{-i\phi} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} + \rho_k e^{i\phi} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \right) + c_0 \\x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k \left(e^{i\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right)} \right) + c_0 = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right)\end{aligned}$$

Questa rappresentazione è possibile solo per segnali x reali. Considerando le formule del coseno della somma si può esprimere come:

$$\begin{aligned}c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right) &= c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho_k \cos(\phi_k) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - 2\rho_k \sin(\phi_k) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \\x(t) &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \\a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\b_k &= -\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt\end{aligned}$$

Se il segnale x è reale e pari, allora i coefficienti b_k sono nulli, se il segnale è immaginario e dispari, i coefficienti a_k sono nulli. Per cui i coefficienti c_k di Fourier di un segnale reale e pari sono pari e reali, i coefficienti c_k di Fourier di un segnale immaginario e dispari sono immaginari e dispari.

5.8 Esercizi sulla Serie di Fourier

Dato un segnale periodico:

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin\left(\frac{2\pi t}{3T}\right)$$

Il primo passaggio nella rappresentazione di Fourier corrisponde all'individuazione del periodo del segnale x . Il periodo della somma di due segnali periodici corrisponde al minimo comune multiplo tra il periodo dei due segnali. In questo caso il periodo del segnale x è $T' = 3T$. Per cui si può riscrivere come:

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{6\pi t}{T'} + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin\left(\frac{2\pi t}{T'}\right) \\ e^{i\left(\frac{6\pi t}{T'} + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{6\pi t}{T'} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{3}{i}e^{i\frac{2\pi t}{T'}} - \frac{3}{i}e^{-i\frac{2\pi t}{T'}}$$

Per confronto diretto si ottengono i seguenti coefficienti:

$$c_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1 \wedge \pm 3 \\ c_1 = -c_{-1} = \frac{3}{i} = -3i = -3e^{\frac{\pi}{2}} \\ c_3 = c_{-3}^* = e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

Dato un segnale:

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(4\pi t + \phi)$$

Questo segnale ha un periodo $T = 1$. Per confronto diretto si ottengono dei coefficienti:

$$x(t) = \frac{e^{2i\pi t} - e^{-2i\pi t}}{2i} + \frac{e^{i\phi}e^{4i\pi t} + e^{-i\phi}e^{-4i\pi t}}{2} \\ c_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1 \wedge \pm 2 \\ c_1 = -c_{-1} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \\ c_2 = c_{-2}^* = \frac{e^{i\phi}}{2}$$

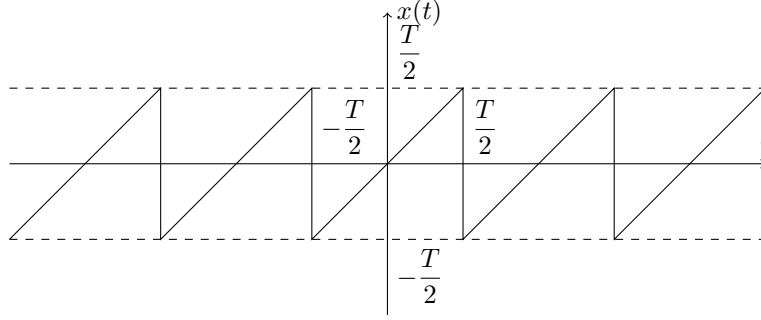
Dato il segnale:

$$x(t) = \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\phi\right)\right)$$

Questo segnale ha periodo $T/2$. Per confronto diretto si ottengono i coefficienti:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2i\phi}e^{i\frac{4\pi t}{T}} - \frac{1}{4}e^{-2i\phi}e^{-i\frac{4\pi t}{T}} \\ c_k = 0 \quad \forall k \neq 0 \wedge \pm 2 \\ c_0 = \frac{1}{2} \\ c_1 = c_{-1}^* = -\frac{1}{4}e^{2i\phi}$$

Dato il seguente segnale dente di sega:



Si calcolano i coefficienti di Fourier tramite la definizione, e si calcola l'integrale per parti:

$$\begin{aligned}
 c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt &= \left[-\frac{1}{T} \frac{T}{2i\pi k} t e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\frac{T}{2i\pi k} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \\
 &\quad - \frac{T}{2i\pi k} \left(\frac{e^{-i\pi k} + e^{i\pi k}}{2} \right) + \frac{1}{2i\pi k} \left[\frac{T}{2i\pi k} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &\quad - \frac{T}{2i\pi k} \left(\frac{e^{i(-\pi k)} + e^{-i(-\pi k)}}{2} \right) - \frac{2iT}{4\pi^2 k^2} \left(\frac{e^{i(-\pi k)} - e^{-i(-\pi k)}}{2i} \right) \\
 &\quad - \frac{T}{2i\pi k} \cos(-\pi k) + \frac{2iT}{4\pi^2 k^2} \sin(-\pi k)
 \end{aligned}$$

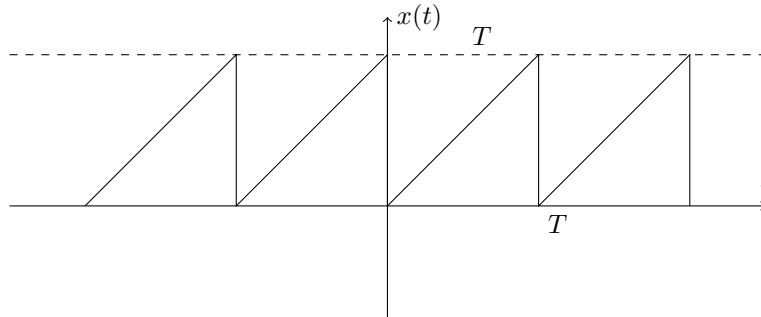
La componente sinusoidale è nulla per ogni valore di k , per cui il coefficiente generico si esprime come:

$$c_k = -\frac{T}{2i\pi k} \cos(-\pi k) = \frac{Ti}{2\pi k} \cos(\pi k) = \frac{Ti}{2\pi k} (-1)^k$$

Il coefficiente c_0 è nullo, poiché rappresenta il valor medio del periodo. In questo caso essendo un segnale dispari, il valor medio nel periodo è nullo:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t dt = 0$$

Dato il seguente segnale dente di sega:



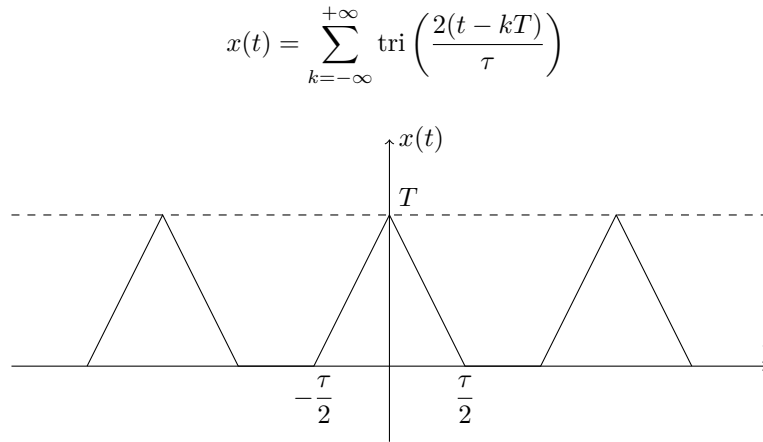
Si può esprimere come il precedente segnale analizzato, traslato nel tempo e nello spazio di uno stesso fattore $T/2$. La traslazione nello spazio può essere sia un ritardo che un anticipo, poiché si ottiene lo stesso segnale risultante:

$$y(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2}$$

Si considera in questo caso un ritardo di $T/2$. Conoscendo i coefficienti di c_k , si può attuare una traslazione nel tempo, per ottenere i coefficienti della serie di Fourier del segnale y :

$$d_k = \begin{cases} c_0 + \frac{T}{2} = \frac{T}{2} & k = 0 \\ c_k e^{-i \frac{2\pi k}{T} \frac{T}{2}} = \frac{T}{2i\pi k} (-1)^k e^{-i\pi k} & k \neq 0 \end{cases}$$

Dato un segnale treno di triangoli:



Si calcolano i coefficienti tramite la definizione. Poiché è presente un solo triangolo nell'intervallo di integrazione, si può restringere l'intervallo:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{tri}\left(\frac{2t}{T}\right) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 - \left|\frac{2t}{T}\right|\right) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\left|\frac{2t}{T}\right| e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt - \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 -\frac{2t}{T} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \right) \end{aligned}$$

Il primo integrale corrisponde all'integrale ai coefficienti di una finestra, ed è stato già precedentemente calcolato, per cui si omette la risoluzione. Si considera la sostituzione $t = -t'$ nel secondo

integrale:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 -\frac{2(-t)}{\tau} e^{-i\frac{2\pi k(-t)}{T}} d(-t) + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \left(-\int_{\frac{\tau}{2}}^0 \frac{2t}{\tau} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2t}{\tau} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt \right) \\
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{1}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{4t}{\tau} \frac{e^{i\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}}{2} dt \\
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{4}{\tau T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} t \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt
\end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale così ottenuto si risolve mediante integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{4}{\tau T} \left[\frac{T}{2\pi k} t \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{4}{\tau T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{T}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{\tau}{T} \frac{T}{\pi k \tau} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) + 0 + \frac{4}{\tau T} \left[-\left(\frac{T}{2\pi k}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]_0^{\frac{\tau}{2}} \\
& \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) - \frac{T}{\pi^2 k^2 \tau} \left[\cos\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) - 1 \right] \\
& \frac{2T}{\pi^2 k^2 \tau} \sin^2\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) = \frac{\tau}{2T} \left[\frac{2T}{\pi k \tau} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) \right] \left[\frac{2T}{\pi k \tau} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{2T}\right) \right] \\
& c_k = \frac{\tau}{2T} \text{sinc}^2\left(\frac{k\tau}{2T}\right)
\end{aligned}$$

I coefficienti di un treno di triangoli risultano essere dei seni cardinali quadrati.

6 Trasformata di Fourier

Quando si trattano segnali non periodici, non si possono esprimere mediante una serie di Fourier, quindi si analizzano mediante la trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier si può applicare solamente a segnali impulsivi. Segnali impulsivi sono definiti dalla seguente espressione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \neq \infty$$

Come la serie di Fourier la trasformata di Fourier è uno strumento per analizzare i segnali. Questi segnali possono essere nel dominio del tempo $x(t)$ o dominio della frequenza $X(f)$. La trasformata è quindi un funzionale che dipende dalla variabile della frequenza, non più dalla variabile del tempo del segnale originale $x(t)$. La trasformata $X(f)$ è univoca per ogni segnale $x(t)$ nel tempo. Questa trasformata associa univocamente un segnale nel dominio del tempo ad un segnale nel dominio della frequenza:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$$

Ricordando la serie di un segnale periodico x di periodo T :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k t}{T}}$$

Nello spazio vettoriale dei segnali periodico è stato definito il prodotto scalare:

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) x_2^*(t) dt$$

Nello spazio vettoriale di Fourier, la base ortonormale è formata da tutte le armoniche:

$$\langle e^{i \frac{2\pi k t}{T}}, e^{i \frac{2\pi n t}{T}} \rangle = \begin{cases} 0 & \forall k \neq n \\ 1 & \forall k = n \end{cases}$$

Da queste armoniche si può ricavare il coefficiente di ordine k di un qualsiasi segnale periodico di periodo T :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt$$

Si considereranno per semplicità tutti i segnali trattati come impulsivi. Per cui non sarà necessario dimostrare l'esistenza della trasformata di un certo segnale $x(t)$ non necessariamente periodico. Si vuole rappresentare questo segnale in modo equivalente alla serie di Fourier. Per rappresentare questo segnale sono necessarie un numero infinito non numerabile di armoniche, per cui si considera un integrale, dove il coefficiente dipende dalla variabile dell'integrale. E l'armonica non dipende dal parametro k , ma dalla stessa variabile dell'integrale:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi f t} df$$

Il segnale si esprime quindi tramite un insieme infinito non numerabile di armoniche, sempre uguali per ogni segnale. Per cui la differenza tra due segnali, come per l'espansione di Fourier, è il

peso di ogni armonica $X(f)$. Bisogna comunque dimostrare che queste armoniche siano una base ortonormale in questo spazio di Fourier. Si introduce il prodotto scalare nello spazio dei segnali impulsivi:

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt$$

Questo prodotto scalare corrisponde alla correlazione tra due segnali a ritardo nullo.

Per determinare se due armoniche di frequenze diverse f_1 e f_2 sono una base si considera il loro prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \langle e^{2i\pi f_1 t}, e^{2i\pi f_2 t} \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} e^{2i\pi f_1 t} e^{-2i\pi f_2 t} dt \\ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{2i\pi(f_1 - f_2)t}}{2i\pi(f_1 - f_2)} \right]_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} &= \Delta t \frac{\sin(\pi(f_1 - f_2)\Delta t)}{\pi(f_1 - f_2)\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \Delta t \operatorname{sinc}(\Delta t(f_1 - f_2)) & \end{aligned}$$

Per $\Delta t \rightarrow \infty$, la sinc diventa un impulso tempo continuo:

$$\langle e^{2i\pi f_1 t}, e^{2i\pi f_2 t} \rangle = \delta(f_1 - f_2)$$

Per cui tutte le armoniche di frequenza diversa hanno prodotto scalare nullo, e solo due armoniche di frequenza uguale hanno prodotto scalare di valore unitario. Bisogna dimostrare che i coefficienti trasformata di Fourier $X(f)$ si ottengono analogamente ai coefficienti c_k :

$$X(f) = \langle x(t), e^{2i\pi f t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

Nello spazio di Fourier si può poi analizzare la banda di un segnale, ovvero il contenuto informativo rispetto alla frequenza. Quest'informazione è necessaria per poter trasmettere un determinato segnale. I due domini del tempo e della frequenza sono due domini separati. Il nucleo o kernel della trasformata di Fourier corrisponde all'armonica, ovvero il componente esponenziale complesso nell'integrale.

6.1 Trasformate Notevoli

Dato un segnale finestra:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-2i\pi f t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi f t}}{2i\pi f} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \\ \frac{e^{-i\pi f \tau} - e^{-i\pi f \tau}}{-2i\pi f} &= \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \operatorname{sinc}(f \tau) \end{aligned}$$

Quindi la trasformata di un segnale finestra di base τ è un seno cardinale moltiplicato per la base, di argomento moltiplicato per la base:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow X(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

La trasformata in $f = 0$, corrisponde al valore medio del segnale finestra:

$$X(0) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = \tau$$

Questa proprietà si chiama teorema del valor medio. Ovvero per ogni segnale x , la trasformata per la frequenza nulla $f = 0$ corrisponde al valore medio del segnale.

Dato un segnale impulso di Dirac:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2i\pi ft} dt = 1$$

Per la proprietà di campionamento dell'impulso e per l'area dell'impulso, si ottiene che la trasformata di Fourier dell'impulso è sempre costante è unitario per ogni frequenza.

Tanto più è limitato nel tempo, tanto più è largo il contenuto spettrale o la banda del segnale. Dove lo spettro di un segnale indica la sua trasformata di Fourier \mathcal{F} .

Dato un segnale costante:

$$x(t) = 1$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ft} dt = \delta(f)$$

Analogamente al prodotto scalare tra due armoniche. Tanto più è esteso un segnale nel dominio del tempo, tanto più è limitato nel dominio della frequenza.

Dato il segnale impulso traslato:

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-2i\pi ft} dt = e^{-2i\pi ft_0}$$

Dato il segnale armonica di frequenza f_0 :

$$x(t) = e^{2i\pi f_0 t}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(f_0 - f)t} dt = \delta(f_0 - f)$$

Analogamente al prodotto scalare tra due armoniche di frequenza diversa.

Dato il segnale coseno:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\pi f_0 t} + e^{-2i\pi f_0 t}) e^{-2i\pi ft} dt = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Nella notazione di Fourier un coseno viene rappresentato come due frequenze $\pm f_0$. Analogamente per il seno:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i} (e^{2i\pi f_0 t} - e^{-2i\pi f_0 t}) e^{-2i\pi f t} dt = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2i}$$

Dato un coseno di ampiezza A con un anticipo di fase ϕ :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\pi f_0 t} e^{i\phi} + e^{-2i\pi f_0 t} e^{-i\phi}) e^{-2i\pi f t} dt$$

$$X(f) = \frac{A\delta(f - f_0)e^{i\phi} + A\delta(f + f_0)e^{-i\phi}}{2}$$

6.2 Proprietà di Linearità

La trasformata di Fourier è un operatore lineare. Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) \rightarrow X(f)$$

$$y(t) \rightarrow Y(f)$$

$$ax(t) + by(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax(t) + by(t)) e^{-2i\pi f t} dt$$

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2i\pi f t} dt = aX(f) + bY(f)$$

6.3 Proprietà di Dualità

La trasformata di Fourier accoppia due segnali nei due domini. Se la trasformata di un segnale x nel tempo è una funzione y nella frequenza, la trasformata di un segnale y nel tempo è un segnale x nella frequenza, di variabile opposta $-f$.

Per dimostrare questa proprietà si considerano la formula di trasformazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

E la formula di antitrasformazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi f t} df$$

Data la trasformata di un segnale $x(t)$ $X(f)$, per riportarla nel dominio del tempo, si considera l'integrale di trasformazione di $X(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

Si considera la sostituzione $f = t'$ e $t = f'$, l'integrale diventa l'integrale di antitrasformazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f') e^{-2i\pi f' t'} df' = x(-t')$$

Allora:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= X(f) \\ \mathcal{F}\{X(t)\} &= x(-f)\end{aligned}$$

6.4 Proprietà di Scala

Si considera la trasformata di un segnale:

$$\begin{aligned}x(at) &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-2i\pi f t} dt \\ t' &= at \\ \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-2i\pi \frac{f}{a} t'} dt' &= \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)\end{aligned}$$

Se $a = -1$, la trasformata corrisponde a:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-2i\pi f t} dt \\ t' &= -t \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-2i\pi (-f) t'} dt' &= X(-f)\end{aligned}$$

Per cui quando $a < 0$:

$$\begin{aligned}x(at) &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \\ t' &= at \\ \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-2i\pi (-\frac{f}{a}) t'} dt' &= \frac{1}{|a|} X\left(-\frac{f}{a}\right)\end{aligned}$$

Per cui in generale dato un segnale scalato di un fattore a , la sua trasformata è:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

6.5 Altre Trasformate Notevoli

Si considera la trasformata del segnale gaussiano:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\alpha t^2} \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(\frac{2i\pi f t}{\alpha} + t^2 \right)} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left[t^2 + \frac{2i\pi f t}{\alpha} + \left(\frac{i\pi f}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{i\pi f}{\alpha} \right)^2 \right]} dt \\
 &= e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(t + \frac{i\pi f}{\alpha} \right)^2} dt
 \end{aligned}$$

Si applica la sostituzione $\tau = \sqrt{\alpha}(t + i\pi f/\alpha)$, l'integrale diventa allora:

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha}} &= e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
 X(f) &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

In forma normalizzata la gaussiana si esprime direttamente rispetto alla deviazione standard σ e alla sua varianza σ^2 :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \\
 X(f) &= \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}
 \end{aligned}$$

L'area sottesa dalla gaussiana risulta essere il valor medio, esprimibile tramite il valore della trasformata per $f = 0$:

$$X(0) = \sqrt{2\pi}\sigma$$

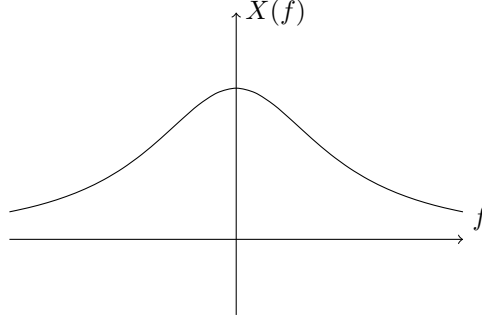
La gaussiana è una delle pochissime funzioni che si autotrasforma.

Si determina la trasformata dell'esponenziale unilatero:

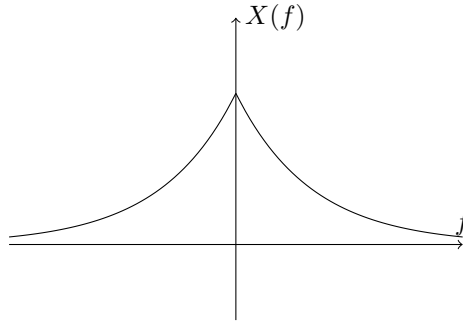
$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\alpha t} u(t) \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-2i\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(2i\pi f + \alpha)t} dt \\
 &= \left[\frac{e^{-(2i\pi f + \alpha)t}}{-(\alpha + 2i\pi f)} \right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} \\
 X(f) &= \frac{1}{\alpha + 2i\pi f}
 \end{aligned}$$

Il modulo quadro del segnale corrisponde ad una Lorentziana, una funzione simile ad una gaussiana:

$$|X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$



Dato il segnale esponenziale del modulo. Si può esprimere il segnale come due esponenziali unilateri:



$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= e^{-\alpha|t|} \\
 x_1(t) &= x(t) + x(-t) \\
 X_1(f) &= X(f) + X(-f) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} + \frac{1}{\alpha - 2i\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}
 \end{aligned}$$

Per cui la sua trasformata corrisponde alla Lorentziana.

Dato il segnale Lorentziana, si può calcolare la sua trasformata tramite la proprietà di dualità della trasformata:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \frac{1}{\alpha + 2i\pi t} \\
 X(f) &= x(-f) = e^{\alpha f} u(-f)
 \end{aligned}$$

Dato il segnale gradino, si può esprimere come il limite di un esponenziale unilatero:

$$x_3(t) = u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} u(t)$$

Poiché non è un segnale impulsivo, questo risultato non rappresenta la trasformata su tutte le frequenze.

$$X(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} = \frac{1}{2i\pi f}$$

Razionalizzando l'argomento del limite si osserva come il risultato ottenuto per frequenze nulle perda informazioni sulla trasformata:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} - \frac{2i\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \right)$$

Per cui si esprime la trasformata di un gradino come il limite ottenuto sommato ad una costante A moltiplicata per l'impulso, per considerare il valore della trasformata per frequenze nulle:

$$X(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} = \frac{1}{2i\pi f} + \delta(f)A$$

Il fattore A si ottiene integrando il fattore che si annulla nel limite:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2} \right)} dt \\ f' &= \frac{2\pi f}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + f'^2} df' &= \left[\frac{1}{2\pi} \arctan f' \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per cui la trasofrmata di un gradino, segnale non impulsivo, risulta essere:

$$X_3(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f}$$

Si considera il segnale segno, e si vuole determinare la sua trasformata:

$$\begin{aligned} x_4(t) &= \text{sign}(t) = u(t) - u(-t) \\ X_4(f) &= X_3(f) - X_3(-f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f} - \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f} = \frac{1}{i\pi f} \end{aligned}$$

6.6 Funzioni di Trasferimento

Per determinare la risposta impulsiva di un filtro si considera in entrata un impulso, ma inviare un segnale infinitesimo in un sistema non è semplice. Per cui generalmente si inserisce in ingresso un armonica a frequenza costante f_0 :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{2i\pi f_0(t-\tau)} d\tau \\ e^{2i\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-2i\pi f_0 \tau} d\tau &= e^{2i\pi f_0 t} H(f_0) \end{aligned}$$

Si definisce la risposta impulsiva nel dominio della frequenza la funzione di trasferimento del sistema. I filtri sono sistemi che filtrano nel dominio delle frequenze.

Per cui un filtro è caratterizzato dalla risposta impulsiva o dalla sua funzione di trasferimento, che indica quale frequenze vengono eliminate dal filtro.

Una Lorentziana è un segnale dove la maggior parte del contenuto informativo è all'interno di un'intervallo finito. Si definiscono quindi dei segnali passa basso, ovvero dei segnali il cui contenuto informativo è presente nell'intorno dell'origine. Se un filtro ha funzione di trasferimento passa basso, allora si definisce segnale passa basso. La banda del segnale è legata alla frequenza massima f_{max} , non è necessario sia una finestra in frequenza, una qualsiasi funzione che assume valori nulli per frequenze maggiori della frequenza massima è una funzione passa basso valida per essere funzione di trasferimento di un filtro.

Tutti i segnali inviati per cavi presentano una banda base, ovvero sono segnali passa basso.

Esistono altri segnali chiamati passa banda, o modulati. Il segnale è centrato in una frequenza $\pm f_0$, chiamata portante. Si usano per la trasmissioni di segnali che vengono inviati nell'etere, tutti questi segnali devono essere modulati.

6.7 Traslazione nel Tempo

Data la trasformata di Fourier di un segnale tempo continuo, è nota anche la trasformata del segnale ritardato o anticipato:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= X(f) \\ \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-2i\pi f t} dt \\ \tau &= t - t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-2i\pi f(\tau + t_0)} d\tau &= e^{-2i\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau = e^{-2i\pi f t_0} X(f)\end{aligned}$$

Data una gaussiana traslata nel tempo:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\alpha(t-t_0)^2} \\ X(f) &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\left(\frac{\pi^2 f^2}{\alpha} + 2i\pi f t_0\right)}\end{aligned}$$

6.8 Traslazione in Frequenza

Questa proprietà si indica anche come proprietà di modulazione. Si considera un segnale moltiplicato per un armonica di frequenza costante f_0 :

$$\mathcal{F}\{e^{2i\pi f_0 t} x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi(f-f_0)t} dt = X(f - f_0)$$

Quest'operazione si chiama modulazione di ampiezza (AM). Il segnale trasmesso corrisponde ad un coseno di ampiezza pari al segnale originario.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t) \cos(2\pi f_0 t)\} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [e^{2i\pi f_0 t} + e^{-2i\pi f_0 t}] e^{-2i\pi f t} dt \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi(f-f_0)t} dt &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi(f+f_0)t} dt = \frac{X(f-f_0)}{2} + \frac{X(f+f_0)}{2}\end{aligned}$$

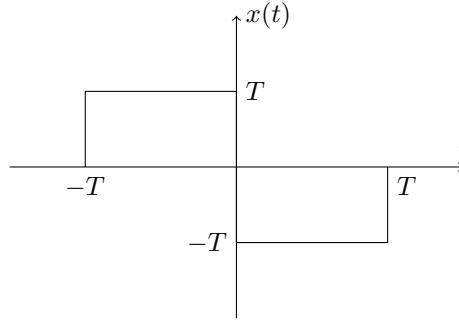
6.9 Trasformate della Finestra

Si considera una finestra di base T moltiplicata per un coseno di frequenza costante f_0 , ovvero modulata di una frequenza f_0 :

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{T}{2} \text{sinc}((f - f_0)T) + \frac{T}{2} \text{sinc}((f + f_0)T)$$

Si considera il seguente segnale:



Si vuole calcolare la sua trasformata:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Per la linearità della trasformata e per la proprietà di traslazione nel tempo la trasformata si ottiene come:

$$X(f) = T(e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}) \text{sinc}(Tf) = 2Ti \sin(\pi fT) \text{sinc}(Tf)$$

$$2iT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \sin(\pi fT) = 2i \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi f}$$

6.10 Proprietà Operative della Trasformata

6.10.1 Proprietà della Derivazione

La trasformata, nel trasportare una funzione da un dominio all'altro, può offrire una serie di semplificazioni ad operazioni come integrali e derivate nei due domini. Si vuole determinare la trasformata della derivata di un noto segnale x , di trasformata X .

Si considera il segnale derivata x_1 :

$$x_1(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) e^{-2i\pi ft} dt$$

Si considera l'antitrasformata del segnale originale x e si derivano entrambi i lati rispetto al tempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2i\pi ft} df$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi f X(f) e^{2i\pi ft} df = x_1$$

Quest'integrale rappresenta l'antitrasformata del segnale derivata x_1 , per cui la sua trasformata può essere espressa come:

$$X_1(f) = 2i\pi f X(f)$$

6.10.2 Duale della Derivazione

Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$, si dimostra che vale la proprietà duale della derivazione:

$$x_1(t) = 2i\pi t x(t)$$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi t x(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

$$\frac{d}{df} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t x(t) e^{2i\pi ft} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{2i\pi ft} dt = -X_1(f)$$

$$\frac{d}{df} X(f) = -X_1(f)$$

Si considera il seguente segnale in frequenza:

$$X_1(f) = \frac{1}{(\alpha + 2i\pi f)^2}$$

Per ottenere la trasformata del segnale, si considera il duale della proprietà della derivazione della trasformata. Si considera il segnale esponenziale unilatero e la sua trasformata:

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi f}$$

$$\frac{d}{df} X(f) = \frac{-2i\pi}{(\alpha + 2i\pi f)^2}$$

$$X_1(f) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{df} X(f) = -\frac{1}{2i\pi} (-2i\pi t x(t)) = t e^{-\alpha t} u(t)$$

6.10.3 Proprietà dell'Integrazione

Dato un segnale x di trasformata X , si considera il suo integrale fino ad un valore τ , ciò equivale ad attuare una convoluzione con il gradino $u(t)$:

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\tau} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t - \tau)x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

Nel dominio della frequenza la trasformata del segnale x_1 è quindi il prodotto tra la trasformata di x e del segnale gradino:

$$X_1(f) = X(f) \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f} \right] = \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{2i\pi f}$$

6.10.4 Proprietà del Coniugato

Dato un segnale x di trasformata X , si considera il suo coniugato x^* , e si vuole calcolare la sua trasformata:

$$x_1(t) = x^*(t)$$
$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{2i\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi ft} dt \right)^* = X^*(-f)$$

La coniugazione ha quindi una simmetria ermetiana, nella trasformata di Fourier.

6.10.5 Proprietà della Correlazione

Dato una correlazione z tra due segnali x e y , si può esprimere come una convoluzione. Tramite il teorema della convoluzione e del coniugato, la sua trasformata può essere espressa come il prodotto tra due trasformate:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)y^*(\tau) d\tau = x(t) * y^*(-t)$$
$$Z(f) = X(f) \cdot Y^*(f)$$

6.11 Finestra e Triangolo tramite Derivata

Dato un segnale finestra e la sua trasformata:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$
$$X(f) = T \text{sinc}(Tf)$$

Si considera ora la derivata del segnale finestra. Questo segnale è costante per tutti valori eccetto per le discontinuità in $\pm T/2$, dove presenta una variazione istantanea. Esprimendola come due gradini, questa variazione viene espressa nella derivata come la differenza tra due impulsi, nota la derivata di un gradino:

$$x(t) = u(t - T/2) - u(t + T/2)$$
$$\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t - T/2) - \delta(t + T/2)$$

La trasformata della derivata risulta essere:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= 2i\pi f T \operatorname{sinc}(Tf) = 2i\pi f T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} \\
 2i \sin(\pi T f) &= 2i \frac{e^{i\pi T f} - e^{-i\pi T f}}{2i} \\
 X(f) &= e^{i\pi T f} - e^{-i\pi T f}
 \end{aligned}$$

Si considera ora un segnale triangolo di base T , e si attua un processo analogo. La sua derivata è quindi la differenza tra due finestre, poiché aumenta costantemente da $-T$ a 0 e decresce costantemente da 0 a T .

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{1}{T}\operatorname{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{1}{T}\operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\
 X'(f) &= 2i\pi f \left(\frac{1}{T}T\operatorname{sinc}(Tf)e^{i\pi T f} - \frac{1}{T}T\operatorname{sinc}(Tf)e^{-i\pi T f} \right) \\
 2i \operatorname{sinc}(Tf) \sin(Tf) &= 2i \frac{\sin^2(Tf)}{\pi T f}
 \end{aligned}$$

Per ottenere la trasformata del segnale triangolo, si considera la trasformata della sua derivata:

$$\begin{aligned}
 X'(f) &= 2i\pi f X(f) \\
 X(f) &= 2i \frac{\sin^2(Tf)}{\pi f T} \frac{1}{2i\pi f} = T \operatorname{sinc}^2(Tf)
 \end{aligned}$$

La derivata nel dominio del tempo corrisponde a moltiplicare nel dominio della frequenza per il fattore $2i\pi f$.

6.12 Teorema della Convoluzione

Data la convoluzione tra due segnali x e y :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

Si esprime il segnale y antitrasformato:

$$\begin{aligned}
 y(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{2i\pi f \tau} df \\
 x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{2i\pi f \tau} df \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Si inverte l'ordine di integrazione, possibile poiché i due integrali sono indipendenti tra di loro, e si applica la sostituzione $t' = t - \tau$:

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) e^{2i\pi f \tau} d\tau \right) df \\ &\quad t' = t - \tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{2i\pi f t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-2i\pi f t'} dt' \right) df \\ x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) X(f) e^{2i\pi f t} df \end{aligned}$$

6.13 Filtri

I filtri sono sistemi ingresso-uscita caratterizzati da un'unica funzione chiamata risposta impulsiva $h(t)$, che permette di calcolare l'uscita come la convoluzione tra l'entrata e la risposta impulsiva. Per cui considerando il teorema appena dimostrato, l'uscita si può rappresentare nel dominio della frequenza più semplicemente come un prodotto:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) H(f) e^{2i\pi f t} df \\ Y(f) &= X(f) \cdot H(f) \end{aligned}$$

Per cui si può rappresentare molto più semplicemente l'uscita di un sistema nel dominio della frequenza, ovvero analizzando lo spettro dell'uscita.

Si considera un segnale x in entrata ad un filtro h :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{T} \text{sinc} \left(\frac{t}{T} \right) \\ x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Per la proprietà di scala:

$$\begin{aligned} H(f) &= \text{rect}(Tf) \\ X(f) &= \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \\ Y(f) &= \frac{1}{2} \text{rect}(Tf) (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\ &= \frac{1}{2} \text{rect}(Tf_0) \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \text{rect}(-Tf_0) \delta(f + f_0) \end{aligned}$$

Dato un sistema definito dall'espressione:

$$\frac{d}{dt} y(t) + \alpha y(t) = x(t)$$

Si può semplificare l'analisi passando per il dominio della frequenza:

$$\begin{aligned} 2i\pi f Y(f) + \alpha Y(f) &= X(f) \\ Y(f) &= \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} X(f) \end{aligned}$$

Quindi la funzione di trasferimento del sistema risulta essere:

$$H(f) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi f}$$

E la sua antitrasformata è la risposta impulsiva del sistema, in questo caso un esponenziale unitario:

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

6.14 Teorema di Parseval

Si considera una convoluzione z , ed il suo valore nell'origine:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)e^{2i\pi ft}df \\ z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df \end{aligned}$$

Si considera ora la convoluzione tra $x(t)$ e $y^*(-t)$, sempre calcolata nell'origine

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(-(t - \tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)e^{2i\pi ft}df \\ z(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y^*(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df \end{aligned}$$

Se si considera $y = x$, allora la convoluzione diventa un'autoconvoluzione. Calcolata nell'origine corrisponde all'energia di un segnale:

$$\begin{aligned} z(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x^*(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f)df \\ E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2df \end{aligned}$$

Per cui l'energia di un segnale si calcola esattamente allo stesso modo sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza.

6.15 Trasformata di Segnali Reali

Se un segnale $x(t)$ è reale, la sua trasformata di Fourier, gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
 x(t) &\in \mathbb{R} \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-2i\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) [\cos(2\pi ft) - i \sin(2\pi ft)] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \sin(2\pi ft) dt \\
 \Re\{X(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cos(2\pi ft) dt \\
 \Im\{X(f)\} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \sin(2\pi ft) dt
 \end{aligned}$$

La parte reale della trasformata di un segnale reale è pari, mentre la sua parte immaginaria è dispari:

$$\begin{aligned}
 \Re\{X(-f)\} &= \Re\{X(f)\} \\
 \Im\{X(-f)\} &= -\Im\{X(f)\}
 \end{aligned}$$

Per cui la trasformata di un segnale reale ha simmetria ermetiana:

$$X(-f) = \Re\{X(-f)\} + i\Im\{X(-f)\} = \Re\{X(f)\} - i\Im\{X(f)\} = X^*(f)$$

Se il segnale x è reale e pari, allora la sua trasformata è anch'essa reale e pari, poiché $\Im\{X(f)\} = 0$. Analogamente se x è reale e dispari, allora la sua trasformata è puramente immaginaria e dispari, poiché $\Re\{X(f)\} = 0$.

6.16 Trasformata di Segnali Periodici

Data l'espansione di Fourier di un segnale periodico x , di periodo T :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2i\pi kt/T}$$

La sua trasformata di Fourier corrisponde ad un treno di impulsi, centrati nei multipli della frequenza naturale $f_0 = 1/T$, di ampiezza pari al valore del coefficiente k -esimo:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

La trasformata di un segnale periodico è sempre un treno di impulsi, moltiplicati ciascuno per un coefficiente c_k .

Si considera la formula del coefficiente di Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

Poiché considera un singolo componente nell'intervallo, si può ottenere lo stesso coefficiente, considerando il segnale $\dot{x}(t)$, replica del segnale $x(t)$ nel solo periodo centrato in $t = 0$, e nullo fuori dal periodo:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) e^{-2i\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \dot{X} \left(\frac{k}{T} \right)$$

Assume il valore della trasformata del segnale \dot{x} , rispetto alla frequenza $f_k = k/T$.

Si dimostra in questo modo, nella sezione successiva, che il treno campionario è uno dei pochi segnali che si autotrasforma, insieme con la gaussiana.

6.17 Esercizi sulle Trasformate

Calcolare l'energia del dato segnale:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cos(2\pi\alpha t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(t) (e^{2i\pi\alpha t} + e^{-2i\pi\alpha t})$$

Per il teorema della traslazione in frequenza, la trasformata del segnale x risulta essere:

$$X(f) = \frac{1}{2} \text{rect}(f + \alpha) + \frac{1}{2} \text{rect}(f - \alpha)$$

La sua energia si calcola come:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{rect}(f + \alpha) + \text{rect}(f - \alpha)]^2 df \right) \\ E_x &= \begin{cases} \frac{1}{4} \int_{-\alpha-1/2}^{-\alpha+1/2} df + \frac{1}{4} \int_{\alpha-1/2}^{\alpha+1/2} df & \alpha \geq 1/2 \\ \frac{1}{4} \int_{-\alpha-1/2}^{\alpha-1/2} df + \frac{1}{2} \int_{\alpha-1/2}^{-\alpha+1/2} df + \frac{1}{4} \int_{-\alpha+1/2}^{\alpha+1/2} df & \alpha < 1/2 \end{cases} \\ E_x &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha \geq 1/2 \\ \frac{2\alpha}{4} + \frac{2\alpha}{4} + 1 - 2\alpha = 1 - \alpha & \alpha < 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Calcolare la trasformata del segnale x , tramite la proprietà di ribaltamento e di scala:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} u(-t) \\ x_1(t) &= e^{-3t} u(t) \\ X_1(f) &= X(-f) = \frac{1}{3 + 2i\pi f} \\ X(f) &= \frac{1}{3 - 2i\pi f} \end{aligned}$$

Calcolare la trasformata del segnale x , per la proprietà della traslazione del tempo:

$$x(t) = e^{-2t+4}u(t-2) = e^{-2*(t-2)}u(t-2)$$

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$X_1(f) = \frac{1}{2 + 2i\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1}{2 + 2i\pi f} e^{-4i\pi f}$$

Calcolare la trasformata del segnale x , si applica la proprietà di modulazione:

$$x(t) = e^{-t/2} \cos(100\pi t) u(t)$$

$$x_1(t) = e^{-t/2} u(t)$$

$$X_1(f) = \frac{1}{1/2 + 2i\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1}{2} (X_1(f-50) + X_1(f+50))$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \frac{1}{1/2 + 2i\pi(f-50)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1/2 + 2i\pi(f+50)}$$

$$X(f) = \frac{1}{1 + 4i\pi(f-50)} + \frac{1}{1 + 4i\pi(f+50)}$$

Calcolare l'autoconvoluzione del segnale x , passando per la sua trasformata:

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{2(t-3T/4)}{T}\right) - A \operatorname{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right)$$

$$X(f) = \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) e^{-3i\pi fT/2} - \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) e^{-i\pi fT/2}$$

$$X(f) = \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) (e^{-3i\pi fT/2} - e^{-i\pi fT/2})$$

$$X^2(f) = \frac{A^2T^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) (e^{-3i\pi fT} + e^{-i\pi fT} - 2e^{-2i\pi fT})$$

$$x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(f) e^{2i\pi ft} df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A^2T^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) (e^{-3i\pi fT} + e^{-i\pi fT} - 2e^{-2i\pi fT}) \right] e^{2i\pi ft} df$$

Un prodotto nel dominio delle frequenze corrisponde ad una convoluzione nel dominio del tempo, per cui si può esprimere l'autoconvoluzione come la convoluzione tra un segnale triangolo e una

combinazione lineare di impulsi:

$$\begin{aligned}
X_1(f) &= \frac{A^2 T^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) \\
x_1(t) &= \frac{A^2 T^2}{4} \frac{2}{T} \operatorname{tri}\left(\frac{2t}{T}\right) \\
X_2(f) &= e^{-3i\pi f T} + e^{-i\pi f T} - 2e^{-2i\pi f T} \\
x_2(t) &= \delta(t - 3T/2) + \delta(t - T/2) - 2\delta(t - T) \\
x(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^2 e^{2i\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f) X_2(f) e^{2i\pi f t} df = x_1(t) * x_2(t) \\
&= \frac{A^2 T^2}{4} \frac{2}{T} \operatorname{tri}\left(\frac{2t}{T}\right) * [\delta(t - 3T/2) + \delta(t - T/2) - 2\delta(t - T)] \\
&= \frac{A^2 T^2}{4} \left(\operatorname{tri}\left(\frac{2}{T}(t - 3T/2)\right) + \operatorname{tri}\left(\frac{2}{T}(t - T/2)\right) - 2 \operatorname{tri}\left(\frac{2}{T}(t - T)\right) \right)
\end{aligned}$$

Calcolare la trasformata del segnale x , per la proprietà di scala e di traslazione nel tempo:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \operatorname{rect}(3t - 1/2) = \operatorname{rect}(3(t - 1/6)) \\
X(f) &= \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{3}\right) e^{-i\pi f/3}
\end{aligned}$$

Calcolare la trasformata del segnale x , esprimibile come un segnale triangolo moltiplicato per un gradino, oppure una retta moltiplicata per una finestra, si sceglie quest'ultima rappresentazione per facilitare il calcolo:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A \operatorname{tri}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) u(t + T/2) \vee x(t) = A \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
&= \frac{A}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{A}{T} t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)
\end{aligned}$$

Per la proprietà duale alla derivazione, si calcola il secondo componente:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -2i\pi t x_2(t) \\
X_1(f) &= \frac{dX_2}{df} \\
x_1(t) &= -\frac{A}{T} t \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
x_2(t) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{A}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
X_2(f) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{A}{T} T \operatorname{sinc}(Tf) = \frac{A}{\pi T} \frac{\sin(\pi T f)}{f} \\
X_1(f) &= \frac{dX_2}{df} = \frac{1}{2i\pi} \frac{A}{\pi T} \frac{\cos(\pi T f) \pi T f - \sin(\pi T f)}{f^2}
\end{aligned}$$

Per cui la trasformata complessiva è:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \frac{AT}{2} \text{sinc}(Tf) + \frac{A}{\pi T f^2 (2\pi i)} [\cos(\pi T f) \pi T f - \sin(\pi T f)] \\
 &= \frac{AT}{2\pi T f} \frac{i}{i} \sin(\pi T f) + \frac{A}{2i\pi f} \cos(\pi T f) - \frac{A}{2i\pi f} \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} \\
 &= \frac{A}{2i\pi f} \frac{i}{i} [\cos(\pi T f) + i \sin(\pi T f)] - \frac{A}{2i\pi f} \frac{i}{i} \text{sinc}(Tf) \\
 X(f) &= -\frac{Ai}{2\pi f} [e^{i\pi f T} - \text{sinc}(fT)]
 \end{aligned}$$

Calcolare ora questa trasformata usando la proprietà alla derivazione:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{A}{2} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{A}{T} t \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t)
 \end{aligned}$$

Il segnale x_1 presente una discontinuità in $-T/2$, e rimane costante fino al valore $T/2$:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= A\delta(t + T/2) - \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\
 X_2(f) &= Ae^{i\pi f T} - \frac{A}{T} T \text{sinc}(Tf) \\
 X_2(f) &= 2i\pi f X_1(f) \\
 X_1(f) &= \frac{A}{2i\pi f} \frac{i}{i} [e^{i\pi f T} - \text{sinc}(Tf)] \\
 X_1(f) &= -\frac{Ai}{2\pi f} [e^{i\pi f T} - \text{sinc}(Tf)]
 \end{aligned}$$

Calcolare l'antitrasformata di X_1 :

$$X_1(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)] \cos(2\pi f / f_0)$$

Per l'inverso della proprietà di modulazione, e per la proprietà di convoluzione:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= [x(t) \cos(2\pi t f_0)] * \left[\frac{1}{2} \delta(t + 1/f_0) + \frac{1}{2} \delta(t - 1/f_0) \right] \\
 x_1(t) &= \frac{1}{2} x\left(t + \frac{1}{f_0}\right) \cos\left[2\pi f_0 \left(t + \frac{1}{f_0}\right)\right] + \frac{1}{2} x\left(t - \frac{1}{f_0}\right) \cos\left[2\pi f_0 \left(t - \frac{1}{f_0}\right)\right] \\
 x_1(t) &= \left[\frac{1}{2} x\left(t + \frac{1}{f_0}\right) + \frac{1}{2} x\left(t - \frac{1}{f_0}\right) \right] \cos(2\pi t f_0)
 \end{aligned}$$

Poiché il coseno è traslato di un periodo $1/f_0$.

Calcolare la trasformata del segnale x :

$$x(t) = 2\text{rect}(2t) - \text{rect}(t) = \text{rect}(2t) - \text{rect}\left[4\left(t - \frac{3}{2}\right)\right] - \text{rect}\left[4\left(t - \frac{3}{8}\right)\right]$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) - \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\frac{f}{4}\right)e^{-3i\pi f/4} - \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\frac{f}{4}\right)e^{-3i\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{sinc}\left(\frac{f}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi f}{4}\right)\right]$$

Per le formule di duplicazione del coseno.

Calcolare la trasformata del seguente segnale onda quadra di base τ e di periodo T :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{\tau}\right)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$c_k = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\tau k}{T}\right)$$

Calcolare la trasformata del treno campionatore, o segnale pettine:

$$\pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$c_k = \frac{1}{k}$$

$$\pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{2i\pi kt/T}$$

$$\Pi(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Questo è uno dei pochi segnali oltre alla gaussiana che si autotrasforma.

Calcolare la trasformata di un treno di trapezi di base maggiore $2T$, di base minore T e di altezza T , di periodo $\bar{T} = 5T/2$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{\bar{T}}\right)$$

Per calcolare i coefficienti della serie, si può esprimere un singolo trapezio come l'autoconvoluzione di un segnale finestra. Inoltre è sufficiente calcolare la trasformata di un singolo trapezio per ottenere

i coefficienti:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2\text{rect}\left(\frac{2t}{3T}\right) \\
x_2(t) &= \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) \\
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} x_1(t) * x_2(t) e^{-2i\pi kt/\bar{T}} dt \\
c_k &= \frac{1}{T} X_1\left(\frac{k}{T}\right) X_2\left(\frac{k}{T}\right) \\
c_k &= \frac{2}{T} \left[\frac{3T}{2} \text{sinc}\left(\frac{3T}{2} \frac{k}{T}\right) \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{T}{2} \frac{k}{T}\right) \right] \\
c_k &= \frac{6T^2}{4} \frac{2}{5T} \text{sinc}\left(\frac{3T}{2} \frac{k}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{T}{2} \frac{k}{T}\right) \\
c_k &= \frac{3T}{5} \text{sinc}\left(\frac{3k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)
\end{aligned}$$

Calcolare la seguente convoluzione:

$$\begin{aligned}
x(t) &= [\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] * \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{\pi t} \\
&= [\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] * 3f_0 \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{3\pi f_0 t} \\
&= [\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] * 3f_0 \text{sinc}(3f_0 t)
\end{aligned}$$

Si applica la formula di duplicazione del seno, e si passa per il dominio della frequenza:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3f_0}{2} \sin(4\pi f_0 t) * \text{sinc}(3f_0 t) \\
X(f) &= \frac{1}{4i} [\delta(f - 2f_0) - \delta(f + 2f_0)] \frac{3f_0}{3f_0} \text{rect}\left(\frac{f}{3f_0}\right) \\
&= \frac{1}{4i} \left[\text{rect}\left(-\frac{2f_0}{3f_0}\right) \delta(f - 2f_0) - \text{rect}\left(\frac{2f_0}{3f_0}\right) \delta(f + 2f_0) \right] \\
&= \frac{1}{4i} \text{rect}\left(\frac{2}{3}\right) [\delta(f - 2f_0) - \delta(f + 2f_0)]
\end{aligned}$$

Poiché il valore $2/3$ è esterno all'intervallo di valori non nulli del segnale finestra $[-1/2, 1/2]$, la trasformata assume valore nullo.

Calcolare il segnale x , passando per il dominio della frequenza:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \left[\sin(2\pi f_0 t) * \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{\pi t} \right] \\
 x_1(t) &= \sin(2\pi f_0 t) * \frac{\sin(3\pi f_0 t)}{\pi t} \\
 X_1(f) &= \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \cdot \frac{3f_0}{3f_0} \text{rect} \left(\frac{f}{3f_0} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \delta(f - f_0) \text{rect} \left(-\frac{f_0}{3f_0} \right) - \frac{1}{2i} \delta(f + f_0) \text{rect} \left(\frac{f_0}{3f_0} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \text{rect} \left(\frac{1}{3} \right) [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \\
 X_1(f) &= \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \\
 x_1(t) &= \sin(2\pi f_0 t) \\
 x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) = \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2}
 \end{aligned}$$

Per la formula di duplicazione del seno.

Dato il segnale x , calcolare il periodo, i coefficienti di Fourier, la potenza, e la sua trasformata:

$$x(t) = 2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-i\pi t/2T_0} = 2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-2i\pi t/4T_0}$$

Il periodo di un segnale combinazione lineare di altri segnali è il minimo comune multiplo tra i periodi dei segnali considerati:

$$T = 4T_0$$

Si calcola la potenza del segnale:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} \left| 2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-2i\pi t/4T_0} \right|^2 dt \\
 &= \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} \left(4 + 1 + 4 \cos \left[\frac{2\pi t}{T_0} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right] \right) dt \\
 &= \frac{20T_0}{4T_0} + \frac{2T_0}{5\pi} \left[\sin \left(\frac{5\pi t}{2T_0} \right) \right]_{-2T_0}^{2T_0} \xrightarrow{0} 0 \\
 P_x &= 5
 \end{aligned}$$

Si determinano i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} \left(2e^{2i\pi t/T_0} - e^{-2i\pi t/4T_0} \right) e^{-2i\pi kt/4T_0} dt \\
 c_k &= \frac{2}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} e^{2i\pi t(1-k/4)/T_0} dt + \frac{1}{4T_0} \int_{-2T_0}^{2T_0} 2e^{-2i\pi t(1+k)/4T_0} dt \\
 c_k &= 0 \forall k \neq 4 \vee -1 \\
 c_{-1} &= \frac{1}{4T_0} \wedge c_4 = \frac{1}{2T_0}
 \end{aligned}$$

Si ottiene lo stesso risultato, più velocemente, per confronto diretto. La sua trasformata si ottiene, sia trasformando la sua serie di Fourier, sia attuando l'integrale di trasformazione:

$$X(f) = c_{-1}\delta\left(f + \frac{1}{4T_0}\right) + c_4\delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right)$$

Calcolare la trasformata del segnale x :

$$x(t) = \cos\left[\frac{\pi(t-T)}{2T}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \cos\left[\frac{2\pi(t-T)}{4T}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Questo segnale ha periodo $4T$. Espandendo l'argomento del primo coseno si ottiene:

$$x(t) = \cos\left[\frac{2\pi t}{4T} - \frac{\pi}{2}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{4T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Si rappresenta il segnale in forma esponenziale:

$$x(t) = \frac{1}{2i} \left(e^{2i\pi t/4T} - e^{-2i\pi t/4T} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(e^{2i\pi t/T} + e^{-2i\pi t/T} \right) \\ \frac{1}{4i} \left[e^{\frac{2\pi t}{T}(\frac{1}{4}+1)} - e^{\frac{2\pi t}{T}(1-\frac{1}{4})} + e^{\frac{2\pi t}{T}(\frac{1}{4}-1)} - e^{-\frac{2\pi t}{T}(1+\frac{1}{4})} \right] \\ \frac{1}{4i} \left[e^{\frac{2\pi t}{T}\frac{5}{4}} - e^{\frac{2\pi t}{T}\frac{3}{4}} + e^{-\frac{2\pi t}{T}\frac{3}{4}} - e^{-\frac{2\pi t}{T}\frac{5}{4}} \right] \\ X(f) = \frac{1}{4i} \left[\delta\left(f + \frac{5}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{3}{4T}\right) + \delta\left(f - \frac{3}{4T}\right) - \delta\left(f - \frac{5}{4T}\right) \right] \\ X(f) = \frac{1}{4i} \left[\delta\left(f + \frac{5}{4T}\right) - \delta\left(f - \frac{5}{4T}\right) \right] - \frac{1}{4i} \left[\delta\left(f + \frac{3}{4T}\right) - \delta\left(f - \frac{3}{4T}\right) \right]$$

Per cui il segnale originale corrisponde ad una differenza di due seni, considerando operazioni trigonometriche del segnale originario. Alternativamente, per la proprietà della convoluzione, si può calcolare come convoluzione tra le due trasformate dei segnali moltiplicati:

$$x(t) = \cos\left[\frac{\pi(t-T)}{2T}\right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = x_1(t) \cdot x_2(t) \\ X(f) = X_1(f) * X_2(f) \\ X_1(f) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(f + \frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) \right] e^{-2i\pi f T} \\ \frac{1}{2} e^{-2i\pi/4} \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right) + \frac{1}{2} e^{2i\pi/4} \delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) \\ -\frac{i}{2} \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right) + \frac{i}{2} \delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) \\ X_2(f) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{T}\right) \right]$$

Si attua quindi una convoluzione nel dominio della frequenza per ottenere la trasformata del segnale originale:

$$X(f) = \frac{i}{2} \left[\delta \left(f - \frac{1}{4T} \right) - \delta \left(f + \frac{1}{4T} \right) \right] * \frac{1}{2} \left[\delta \left(f + \frac{1}{T} \right) + \delta \left(f - \frac{1}{T} \right) \right]$$

$$X(f) = \frac{i}{4} \left[-\delta \left(f + \frac{5}{4T} \right) + \delta \left(f + \frac{3}{4T} \right) - \delta \left(f - \frac{3}{4T} \right) + \delta \left(f - \frac{5}{4T} \right) \right]$$

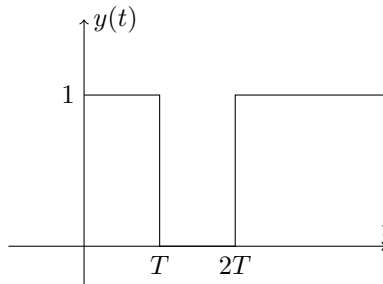
Dato un filtro di risposta impulsiva $h(t)$, calcolare la sua funzione di trasferimento, e la risposta ad un gradino:

$$h(t) = \delta(t - 2T) + \delta(t) - \delta(t - T)$$

$$H(f) = e^{-4i\pi fT} + 1 - e^{-2i\pi fT}$$

$$y(t) = h(t) * u(t) = \delta(t - 2T) + \delta(t) - \delta(t - T) * u(t)$$

$$y(t) = \delta(t - 2T)u(t - 2T) + \delta(t)u(t) - \delta(t - T)u(t - T)$$



7 Trasformata di Fourier Tempo Discreto

Si considera un filtro descritto da una risposta impulsiva $h(t)$, definita come la risposta $y(t) = x(t) * h(t)$ corrispondente ad un impulso in entrata $x(t) = u(t)$. Se viene inserita un'armonica nel sistema:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2i\pi f_0 t} \\ y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{2i\pi f_0 (t-\tau)} d\tau = e^{2i\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{2i\pi f_0 \tau} d\tau \\ H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{2i\pi f_0 \tau} d\tau \\ y(t) &= e^{2i\pi f_0 t} H(f_0) \end{aligned}$$

Si è definita la trasformata della risposta impulsiva la funzione di trasferimento del filtro. L'uscita del sistema in frequenza si esprime quindi come il prodotto tra le trasformate delle due entrate. Poiché agisce selettivamente sulle varie frequenze in entrata si definisce questo tipo di sistema filtro.

Si considera ora un filtro tempo discreto, descritto da una risposta impulsiva $h[n]$, definita come nel continuo dall'uscita del sistema ad un impulso in entrata. L'uscita $y[n]$ di un sistema tempo discreto si ottiene come la convoluzione tra l'entrata $x[n]$ e la risposta impulsiva:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Continuando le analogie con il tempo continuo, sarà quindi possibile riportare questa relazione in frequenza, considerando un'armonica tempo discreta in entrata:

$$x[n] = e^{2i\pi f_0 nT}$$

Poiché spesso un segnale tempo discreto corrisponde ad un segnale tempo continuo $x(t)$ campionato ad intervalli regolari T , creando così una sequenza di valori equamente distribuiti rispetto al tempo $x[n]$. Per cui questo segnale viene definito rispetto al tempo di campionamento, periodico, T . Si considera ora l'uscita del sistema data quest'entrata:

$$y[n] = e^{2i\pi f_0 nT} * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{2i\pi f_0 (n-k)T} = e^{2i\pi f_0 nT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-2i\pi f_0 kT}$$

Si definisce quindi la trasformata di Fourier discreta come la sommatoria così ottenuta, equivalente alla funzione di trasferimento tempo discreto della risposta impulsiva $h[n]$:

$$\begin{aligned} H(f_0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-2i\pi f_0 kT} \\ y[n] &= e^{2i\pi f_0 nT} H(f_0) \end{aligned}$$

Analogamente al tempo continuo, il sistema filtra l'armonica in entrata rispetto alla funzione di trasferimento del sistema. La prima informazione ricavabile da questo processo è che la trasformata di Fourier di una sequenza di valori, il segnale in discreto, è una funzione continua, nella variabile

f_0 . Per cui dato un generico segnale $x[n]$, la sua trasformata si ottiene come:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-2i\pi f k T} = X(f)$$

Questo segnale risultante è periodico e di periodo $1/T$, si dimostra considerando la trasformata ritardata di un fattore $1/T$:

$$X\left(f - \frac{1}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{2i\pi(f-1/T)T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-2i\pi f k T} \overset{1}{\cancel{e^{2i\pi k}}} = X(f)$$

Per analizzare un segnale periodico in frequenza, si considera la frequenza normalizzata Φ , definita come il prodotto tra la frequenza ed il reciproco del periodo:

$$\Phi = TF$$

La funzione di trasferimento può essere espressa come:

$$X(\Phi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-2i\pi k \Phi}$$

La funzione misurata rispetto alla frequenza normalizzata ha periodo unitario. Se la trasformata tempo discreta è un segnale periodico rispetto alla frequenza, allora per confronto diretto è la sua stessa rappresentazione di Fourier, nel dominio della frequenza di periodo $1/T$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-2i\pi k f T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-2i\pi k f T}$$

$$c_k = x[k]$$

La sequenza stessa coincide esattamente con i coefficienti della serie di Fourier del segnale trasformata. Si considera ora la definizione di un coefficiente di Fourier, per ottenere la relazione inversa, ovvero l'antitrasformata dal dominio della frequenza al dominio tempo discreto:

$$c_k = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) e^{2i\pi k f T} df = x[k]$$

7.1 Trasformate Notevoli

Si considera un impulso discreto $\delta[n]$, e si vuole calcolare la sua trasformata di Fourier tramite la definizione:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k]e^{2i\pi f k T} = \delta[0]e^{-2i\pi 0 f T} = 1$$

Poiché l'unico campione non nullo dell'impulso si trova in $k = 0$, e l'armonica assume valore unitario. Quindi la trasformata assume valore unitario e costante.

Si considera un segnale discreto, analogo ad una finestra traslata, che presenta campioni di valore unitario da $k = 0$, fino a $k = N - 1$. La sua trasformata è quindi:

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-2i\pi kfT}$$

Corrisponde ad una somma di potenze di base $x = e^{-2i\pi fT}$, per cui converge ad un valore:

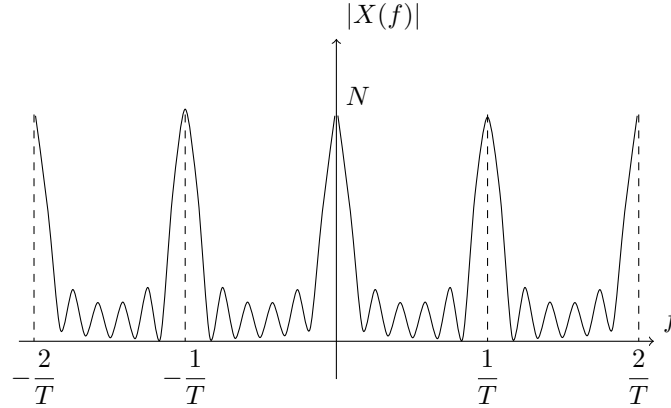
$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1 - x^N}{1 - x} = \frac{1 - e^{-2i\pi NfT}}{1 - e^{-2i\pi fT}}$$

$$\frac{e^{-i\pi NfT}}{e^{-i\pi fT}} \frac{e^{i\pi NfT} - e^{-i\pi NfT}}{e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}} = e^{-i\pi(N-1)fT} \frac{\sin(\pi fNT)}{\sin(\pi fT)}$$

Il modulo della trasformata corrisponde ad un rapporto tra due seni:

$$|X(f)| = \frac{\sin(\pi fNT)}{\sin(\pi fT)}$$

Il segnale si annulla ogni multiplo del fattore $1/NT$, un valore massimo N per $f = 0$, ed ha un periodo di $1/T$:

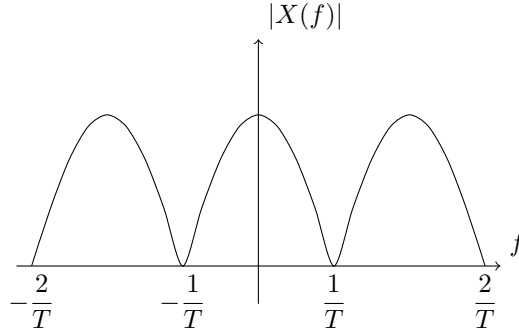


Si considerano due campioni in $k = 0, 1$. La trasformata corrispondente si ottiene come:

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$$

$$X(f) = \sum_{k=0}^1 e^{-2i\pi kfT} = 1 + e^{-2i\pi fT} = e^{-i\pi fT} (e^{i\pi fT} + e^{-i\pi fT}) = 2e^{-i\pi fT} \cos(\pi fT)$$

$$|X(f)| = 2 \cos(\pi fT)$$

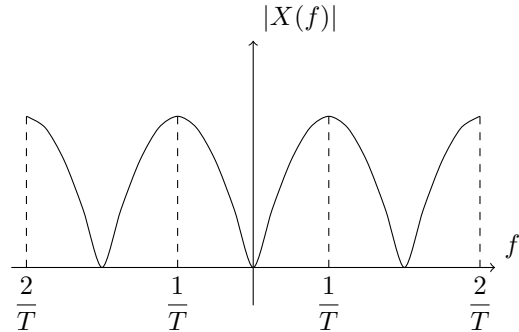


Questa trasformata corrisponde ad un filtro passa basso, ovvero filtra le alte frequenze, e permette alle basse frequenze di passare. Si considera invece la differenza tra due impulsi, la sua trasformata corrisponde ad un filtro passa alto:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$$

$$X(f) = \sum_{k=0}^1 e^{-2i\pi k f T} = 1 - e^{-2i\pi f T} = e^{-i\pi f T} (e^{i\pi f T} - e^{-i\pi f T}) = 2ie^{-i\pi f T} \sin(\pi f T)$$

$$|X(f)| = 2 \sin(\pi f T)$$



Data una trasformata di Fourier X :

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

Non può essere la trasformata di una sequenza, poiché deve essere necessariamente periodica. Per cui deve essere espressa come un treno di finestre:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{f - k/T}{2f_c}\right)$$

Per determinare la sequenza associata a questa trasformata si applica l'integrale di antitrasformazione:

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) e^{2i\pi n f T} df = T \int_{-f_c}^{f_c} e^{2i\pi n f T} df$$

$$\left[T \frac{e^{2i\pi n f T}}{2i\pi f T} \right]_{-f_c}^{f_c} = \frac{2f_c T}{2f_c T} \frac{\sin(2\pi n f_c T)}{\pi n} = 2f_c T \text{sinc}(2n f_c T)$$

7.2 Proprietà del Valor Medio

Il valor della trasformata di Fourier calcolata in $f = 0$ corrisponde al valor medio della sequenza di campioni:

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$$

Analogamente vale la proprietà duale; il valore del campione in $k = 0$, corrisponde al valore medio della trasformata:

$$x[0] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) df$$

7.3 Traslazione nel Tempo Discreto ed in Frequenza

Dato un segnale tempo discreto $x[n]$ e la sua trasformata $X(f)$, si considera un ritardo di n_0 campioni e si calcola la sua trasformata rispetto alla trasformata del segnale non traslato:

$$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - n_0] e^{-2i\pi f n T} = e^{-2i\pi f n_0 T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-2i\pi m f T} = X(f) e^{-2i\pi f n_0 T}$$

Si considera la proprietà duale della traslazione in frequenza, nota una sequenza di campioni $x[n]$ e la sua trasformata di Fourier $X(f)$:

$$\mathcal{F}\{x[n] e^{2i\pi f_0 n T}\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{2i\pi f_0 k T} e^{-2i\pi f k T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-2i\pi (f - f_0) k T} = X(f - f_0)$$

7.4 Teorema della Convoluzione

Data un segnale y convoluzione tra due segnali tempo discreti x e h :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k]$$

Applicando la definizione si ottiene:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-2i\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] \right) e^{-2i\pi n f T}$$

Si applica la sostituzione $m = n - k$:

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[k]h[m]e^{-2i\pi kfT}e^{-2i\pi mfT} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{-2i\pi mfT} \right) e^{-2i\pi kfT}$$

$$Y(f) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-2i\pi kfT} \right) H(f) = X(f)H(f)$$

Dato un segnale y prodotto tra due segnali tempo discreti x e h :

$$y[n] = x[n] \cdot h[n]$$

Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di Y nota X e H . Si esprime Y tramite la definizione:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]h[n]e^{-2i\pi nfT}$$

Si esprime il segnale x come l'antitrasformata del suo spettro in frequenza:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\theta)e^{2i\pi n\theta T} d\theta \right) h[n]e^{-2i\pi nfT}$$

$$T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\theta) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-2i\pi n(f-\theta)T} \right) d\theta$$

$$Y(f) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\theta)H(f-\theta)d\theta$$

Si considera ora la convoluzione tra due segnali \overline{X} e \overline{H} :

$$\overline{X}(f) * \overline{H}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X}(\theta)\overline{H}(f-\theta)d\theta$$

Mentre si definisce la convoluzione circolare tra due segnali periodici di periodo uguale $1/T$, la convoluzione tra un loro periodo:

$$T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\theta)H(f-\theta)d\theta$$

Si considerano i segnali X e H di periodo $1/T$ una ripetizione di un segnale replicato \overline{X} e \overline{H} :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{X}\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{H}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

La convoluzione \bar{Y} tra queste repliche si ottiene come:

$$\bar{Y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(\theta) \bar{H}(f - \theta) d\theta$$

Da cui si ottiene il segnale convoluzione tra i due segnali X e H :

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{Y}\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Si dimostra considerando la convoluzione circolare, esprimendo i segnali come treni di repliche:

$$Y(f) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(\theta) H(f - \theta) d\theta = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}\left(\theta - \frac{n}{T}\right) \bar{H}\left(f - \theta - \frac{k}{T}\right) d\theta$$

Si applica la sostituzione $\theta' = \theta - n/T$:

$$Y(f) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T-n/T}^{1/2T-n/T} \bar{X}(\theta') \bar{H}\left(f - \theta' - \frac{k+n}{T}\right) d\theta'$$

La sommatoria presenta sempre contributi nulli eccetto per $n = 0$, poiché il segnale replicato è presente solo nel periodo centrato in 0:

$$Y(f) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(\theta') \bar{H}\left(f - \theta' - \frac{k}{T}\right) d\theta'$$

Per cui si ottiene esattamente la convoluzione circolare, poiché si integra all'interno di un periodo, e le repliche sono non nulle solo all'interno del periodo base, si possono espandere gli intervalli di integrazione arbitrariamente, per cui si ottiene:

$$Y(f) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{Y}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

7.5 Teorema di Parseval

Prima di dimostrare il teorema di Parseval, si determina la trasformata del coniugato di un segnale noto y :

$$y[n] \rightarrow Y(f)$$

Si esprime tramite la definizione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^*[n] e^{-2i\pi n f T} = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{2i\pi n f T} \right]^* = Y^*(-f)$$

Si considera il duale del teorema della convoluzione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]x[n]e^{-2i\pi n f T} = T \int_{-1/2T}^{1/2T} Y(\theta)X(f - \theta)d\theta$$

Si pone $f = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} Y(\theta)X(-\theta)d\theta$$

Si considera ora $y = y^*$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^*[n]x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} Y^*(-\theta)X(-\theta)d\theta$$

Si sostituisce ora $x = y$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]x[n] &= T \int_{-1/2T}^{1/2T} X^*(-\theta)X(-\theta)d\theta \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 &= T \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(\theta)|^2 d\theta \end{aligned}$$

Per cui l'energia di un segnale x si può calcolare sia nel tempo discreto che nel dominio della frequenza:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = T \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 df$$

7.6 Teorema della Correlazione

Si considera la correlazione tra due segnali tempo discreti x e y , e si esprime rispetto alla convoluzione:

$$R_{xy}[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+k]y^*[k]$$

Si vuole calcolare la trasformata del segnale correlazione, tramite la definizione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+k]y^*[k]e^{-2i\pi n f T}$$

Si applica la sostituzione $m = n + k$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y^*[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-2i\pi m f T} \right) e^{2i\pi k f T} = X(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y^*[k]e^{2i\pi k f T} = X(f)Y^*(f)$$

Nel caso in cui $y = x$, allora l'autocorrelazione ha una trasformata di Fourier pari al modulo al quadrato della sua trasformata:

$$R_{xx}[n] \rightarrow X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$$

7.7 Campionamento

Un segnale introdotto precedentemente necessario per il campionamento di un segnale è il treno di delta, esprimibile tramite serie di Fourier, poiché periodico:

$$\pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2i\pi n t/T}$$

I suoi coefficienti si esprimono come:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \pi(t) e^{-2i\pi n t/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-2i\pi n t/T} dt = \frac{1}{T} e^{-2i\pi n \theta/T} \rightarrow 1$$

Un treno di delta rappresenta una serie armonica, di ragione $e^{2i\pi t/T}$. La sua trasformata si ottiene come:

$$\Pi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi n f T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

La sua trasformata è quindi anch'essa un treno campionario, con ogni impulso distanziato di un fattore $1/T$ in frequenza.

Per campionare un segnale si considera un DAC, "Digital to Analog Converter", un circuito composto da un interruttore che si chiude ad intervalli regolari per misurare il valore in entrata:



Si indica il segnale campionato con $x_C(t)$, mentre il segnale originario con $x(t)$:

$$x_C(t) = x(t)\pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta\left(t - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta\left(t - \frac{n}{T}\right)$$

Il segnale campionato è un segnale tempo continuo, ma si comporta a tutti gli effetti come fosse una sequenza di valori $x[n]$ tempo discreto.

Si considera ora un campionario nel dominio della frequenza:



Nel dominio della frequenza il segnale campionato si ottiene come:

$$x_C(t) = x(t)\pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$X_C(f) = X(f) * \Pi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-2i\pi n f T}$$

$$X(f) * \Pi(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Per cui la trasformata del segnale campionato è un segnale periodico nella frequenza, di periodo $1/T$. La trasformata di Fourier di una sequenza coincide con la trasformata di Fourier di un segnale campionato. Quando le repliche del segnale si sovrappongono, avviene un fenomeno noto come "aliasing", dove a frequenze alte si perdono delle informazioni, poiché si sovrappone con la replica del periodo successivo a basse frequenze.

Si considera una sequenza $x[n]$ e la sua trasformata:

$$x[n] \rightarrow X_C(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2i\pi n f T}$$

Si può rappresentare la sequenza come un segnale tempo continuo x ad intervalli regolari T , chiamato tempo di campionamento:

$$\begin{aligned} x[n] &= x(nT) \\ t &= nT \\ x(t) \end{aligned}$$

Per evitare di calcolare la sommatoria si considera la trasformata di questo segnale da cui si è estratta la sequenza:

$$x(t) \rightarrow X(f)$$

Per esprimere la trasformata della sequenza si replica questa trasformata ad intervalli $1/T$ in frequenza:

$$X_C(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

7.8 Esercizi sulle Trasformate Discrete

Data una sequenza di valore costante:

$$x[n] = 1$$

Si determina la trasformata della sequenza:

$$X_C(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi n f T}$$

Altrimenti si considera il segnale da cui si è campionata la sequenza:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \\ X(f) &= \delta(f) \end{aligned}$$

Per cui la trasformata del segnale campionato si può esprimere come un treno di delta:

$$X_C(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Poiché la sequenza considerata coincide con il treno campionario $x[n] = \pi(t)$.

Calcolare la trasformata della sequenza $x[n]$:

$$x[n] = \left[\frac{\sin(2\pi f_C n T)}{\pi n} \right]^2 = 4f_C^2 T^2 \text{sinc}^2(2f_C n T)$$

Questa sequenza si può considerare estratta dal segnale tempo continuo x :

$$x(t) = 4f_C^2 T^2 \text{sinc}(2f_C t)$$

$$X(f) = 2f_C T^2 \text{tri} \left(\frac{f}{2f_C} \right)$$

Per cui si esprime la trasformata della sequenza come:

$$X_C(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X \left(f - \frac{n}{T} \right) = 2f_C T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tri} \left(\frac{f - \frac{n}{T}}{2f_C} \right)$$

Se T il passo di campionamento non è abbastanza grande, i triangoli si sovrappongono tra di loro.

Calcolare la convoluzione y tempo discreta tra x e h , esponenziali unilateri:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$h[n] = b^n u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] b^{n-k} u[n-k] = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

$$b^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{b} \right)^k = b^n \frac{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}}$$

$$y[n] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} u[n]$$

Si può calcolare analogamente nel dominio della frequenza, poi attuando un antitrasformata:

$$Y_C(f) = X_C(f) H_C(f)$$

$$X_C(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-2i\pi n f T} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-2i\pi f T})^n = \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f T}}$$

$$H_C(f) = \frac{1}{1 - b e^{-2i\pi f T}}$$

Poiché le due sommatorie diventano delle serie geometriche. Si considera ora il loro prodotto:

$$Y_C(f) = X_C(f) H_C(f) = \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f T}} \frac{1}{1 - b e^{-2i\pi f T}}$$

Si può riscrivere mediante i fratti semplici in una somma di due frazione:

$$Y_C(f) = \frac{A}{1 - ae^{-2i\pi fT}} + \frac{B}{1 - be^{-2i\pi fT}}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ Ab + Ba = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ b - Bb + Ba = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{a-b} \\ B = \frac{b}{b-a} \end{cases}$$

Per cui il segnale convoluzione si esprime come:

$$Y_C(f) = \frac{a}{a-b} \frac{1}{1 - ae^{-2i\pi fT}} + \frac{b}{b-a} \frac{1}{1 - be^{-2i\pi fT}}$$

$$y[n] = \frac{a}{a-b} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n]$$

Calcolare la trasformata di Fourier della sequenza x :

$$x[n] = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right)$$

Si considera $T = 1$, e si esprime il segnale da cui è stata campionata la sequenza:

$$x(t) = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{t}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right)$$

Si determina la trasformata di questo segnale tempo continuo:

$$X(f) = \text{rect}(3f) * \frac{1}{2} \left[\delta\left(f - \frac{1}{6}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{6}\right) \right]$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f + \frac{1}{2}\right)$$

$$X_C(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f - \frac{1}{2} - 3n\right) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(3f + \frac{1}{2} - 3n\right)$$

Calcolare la trasformata di Fourier della sequenza x :

$$x[n] = \left[\frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n} \right]^2 = \frac{1}{9} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$T = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{9} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{3} \text{tri}(3f)$$

$$X_C(f) = \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tri}(3f - n)$$