球对称性：

在数学物理领域，一个定义域为二维空间的函数，假若只与离某参考点的距离有关，则此函数具有**圆对称性**（circular symmetry）。对于一组以此参考点为圆心的同心圆，在同一个同心圆的每一个位置，函数值都相同。一个具有圆对称性的图案是由同心圆构成的。

延伸至三维空间，对应的术语是**球对称性**（spherical symmetry）。假若，一个标量场只与离某参考点的距离有关，则此标量场具有球对称性。

假若，对于一个矢量场，**方向都是朝内的径向方向或都是朝外的径向方向，大小仅与离参考点的距离有关**，则此矢量场具有球对称性。

球面法向量：

若球心坐标已知，则将**球心坐标与球面某点坐标相减**，即为球面此点的法向量。

散度定理：

一个把向量场通过曲面的流动（即**通量**）与**曲面内部的向量场的表现**联系起来的定理。更加精确地说，散度定理说明向量场穿过曲面的通量，等于散度在曲面围起来的体积上的积分。直观地，所有源点的和减去所有汇点的和，就是流出这区域的净流量。

散度：$\nabla \cdot f$ = 直角坐标系下各一阶偏导数的和，为标量。

拉普拉斯算子即梯度的散度，梯度：

∇f = 模为直角坐标系下的各一阶偏导数，方向为相应坐标轴的多个分量组成的矢量

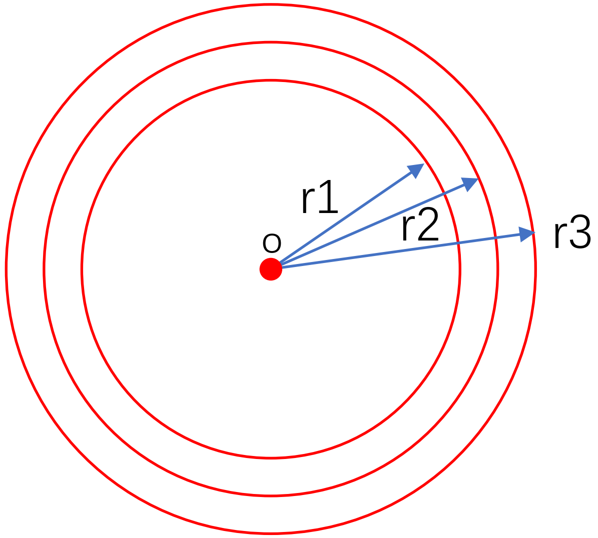


图1

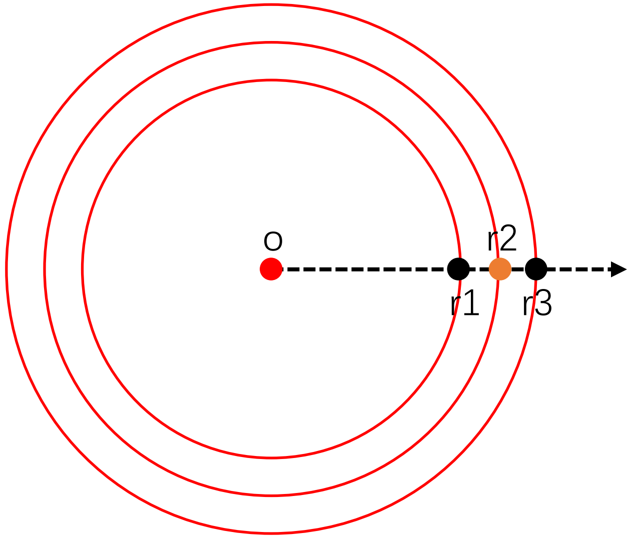


图2

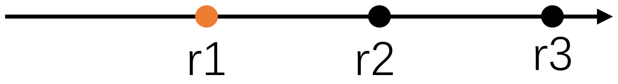


图3

点o为球心，也为此矢量场的源点。此矢量场具有球对称性，则每一球面上任一点的值都相等，则图1，图2同义。

由球对称性，可简化为图3。

（1）球坐标系 (r,θ,ϕ) 与直角坐标系 (x_1,x_2,x_3) 的转换关系

$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi$$

$$x_2 = r\sin\theta\sin\phi$$

$$x_3 = r\cos\theta$$

（2）反之，直角坐标系 (x_1,x_2,x_3) 与球坐标系 (r,θ,ϕ) 的转换关系

$$r = \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

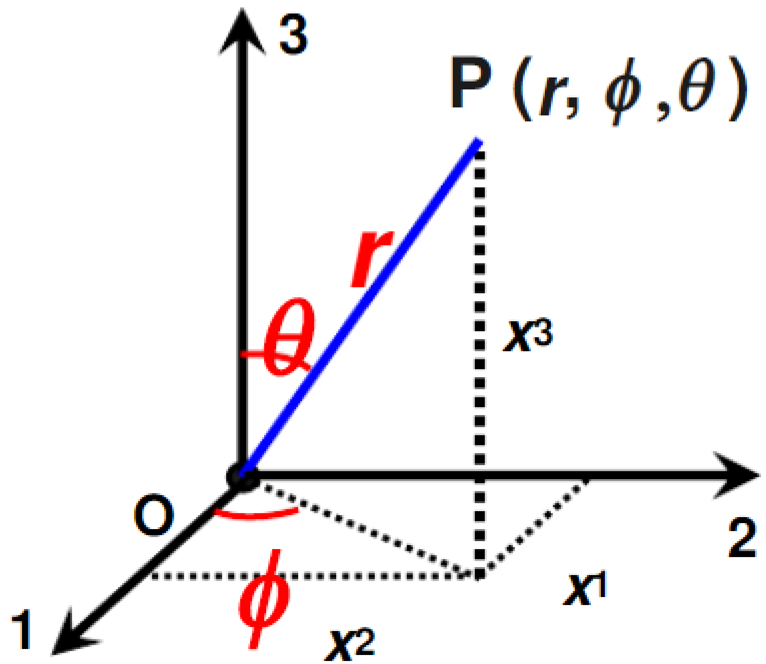
$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

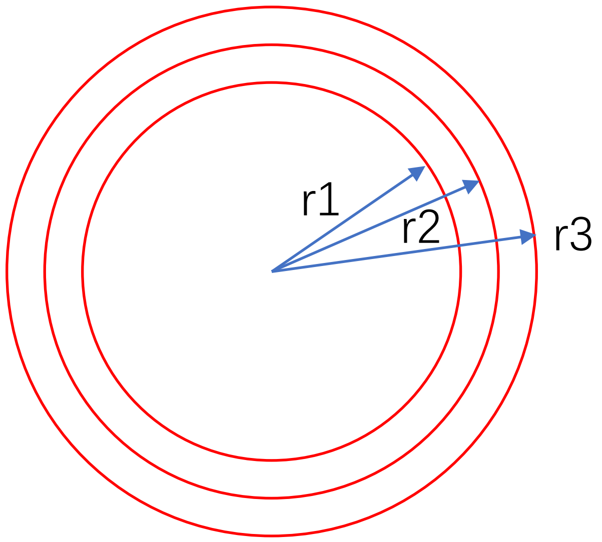
（3）球坐标系与直角坐标系间单位矢量变化关系

$$\vec{e}_r = \vec{e}_1\sin\theta\cos\phi + \vec{e}_2\sin\theta\sin\phi + \vec{e}_3\cos\theta$$

$$\vec{e}_\phi = -\vec{e}_1\sin\phi + \vec{e}_2\cos\phi$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_1\cos\theta\cos\phi + \vec{e}_2\cos\theta\sin\phi - \vec{e}_3\sin\theta$$





r1, r2, r3为半径方向三个相邻节点。对r2:
V为r1点所在球面与r2所在球面嵌套形成的的空间，S则为两球面面积的矢量和。两侧积分得

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV = \iiint_V \nabla^2 f dV \tag{1}$$

式(1)左侧，由体积分几何意义得

$$\frac{4}{3}\pi(r_3^3 - r_1^3)\frac{\partial f}{\partial t} \tag{2}$$

式(2)右侧，由散度定理得

$$\oiint_S (\nabla f \cdot \vec{n}) dS \tag{3}$$

其中，$\nabla f \cdot \vec{n} \cdot dS$为单个微分面元上的通量，$\nabla f$为此点梯度，$\vec{n}$为此点法向量。

此模型具有球对称性，所以有$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$。则

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}$$

同理，

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}$$

则

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}\vec{e}_3 \tag{4}$$

在球坐标下，球面法向量即为$\vec{e}_r$，则有$\vec{n} = \vec{e}_r$　(5)。

扩散方程为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla^2 f$$

计算$\nabla f \cdot \vec{n}$:

由式(4)和式(5)得，

$$\nabla f \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}\vec{e}_3\right) \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \times \left(\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}\vec{e}_1 + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}\vec{e}_3\right) \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \times \left(\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}\vec{e}_1 + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}\vec{e}_3\right) \cdot (\vec{e}_1 \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_3\cos\theta)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \times \left(\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}\cos\theta\right)$$

由

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

得

$$\nabla f \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left(\frac{x}{r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{y}{r}\sin\theta\sin\varphi + \frac{z}{r}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot (\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r}$$

综上可得单个微分面元上的通量

$$\nabla f \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot dS$$

又因球对称性，对于任一球面，此球面上每个点的通量皆为$\frac{\partial f}{\partial r} \cdot dS$。
则式子右侧化为

$$\left. \left(4\pi r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right|_{r_1}^{r_3} \tag{6}$$

最终由式(2)式(6)得

$$\frac{4}{3}\pi(r_3^3 - r_1^3)\frac{\partial f}{\partial t} = \left. \left(4\pi r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right|_{r_1}^{r_3} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 3\frac{{r_3}^2 \frac{\partial f}{\partial r_3} - {r_1}^2 \frac{\partial f}{\partial r_1}}{r_3^3 - r_1^3} \tag{8}$$

更一般地，扩散方程为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 f + J$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 3\frac{D \cdot \left({r_3}^2 \frac{\partial f}{\partial r_3} - {r_1}^2 \frac{\partial f}{\partial r_1} \right)}{r_3^3 - r_1^3} + J$$