Lección 11

Datos cuantitativos agrupados

En nuestro lenguaje cotidiano, solemos agrupar datos cuantitativos sin que seamos conscientes de ello. Cuando decimos, por ejemplo, que la edad de alguien es de 18 años, no queremos decir que nació justo hoy hace 18 años, sino que ya ha cumplido los 18 años, pero aún no ha cumplido los 19; es decir, que agrupamos todas las edades que caen dentro del intervalo $[18, 19)$ en una misma clase, que llamamos «18 años». Del mismo modo, que alguien mida 1.72 no significa que esta sea su altura exacta, con la precisión del grueso de un cabello, sino que su altura pertenece a un intervalo de valores en torno a 1.72 metros que identificamos con «1.72». Bajo la calificación de «aprobado» agrupamos todas las notas mayores o iguales que 5 y menores que 7. Y estamos seguros de que se os ocurren otros ejemplos.

Cuando trabajamos en estadística con datos cuantitativos, puede haber varios motivos por los que nos interese agruparlos. Una posibilidad es que queramos estudiar la distribución de una cierta variable (pongamos, la altura) en una muestra de individuos, y que los valores que pueda tomar esta variable sean muy heterogéneos; en esta situación, lo normal sería que obtuviéramos muy pocas repeticiones, por lo que las frecuencias de los valores individuales serían muy bajas y por lo tanto muy similares. Esto daría lugar a un diagrama de barras difícil de interpretar.

Veamos un ejemplo: consideremos la siguiente muestra de 30 alturas de estudiantes:

$$1.71, 1.62, 1.72, 1.76, 1.78, 1.73, 1.67, 1.64, 1.63, 1.68, 1.68, 1.70, 1.67, 1.56, 1.66, 1.57, 1.69,$$
$$1.68, 1.67, 1.75, 1.61, 1.60, 1.74, 1.70, 1.65, 1.55, 1.82, 1.70, 1.69, 1.81.$$

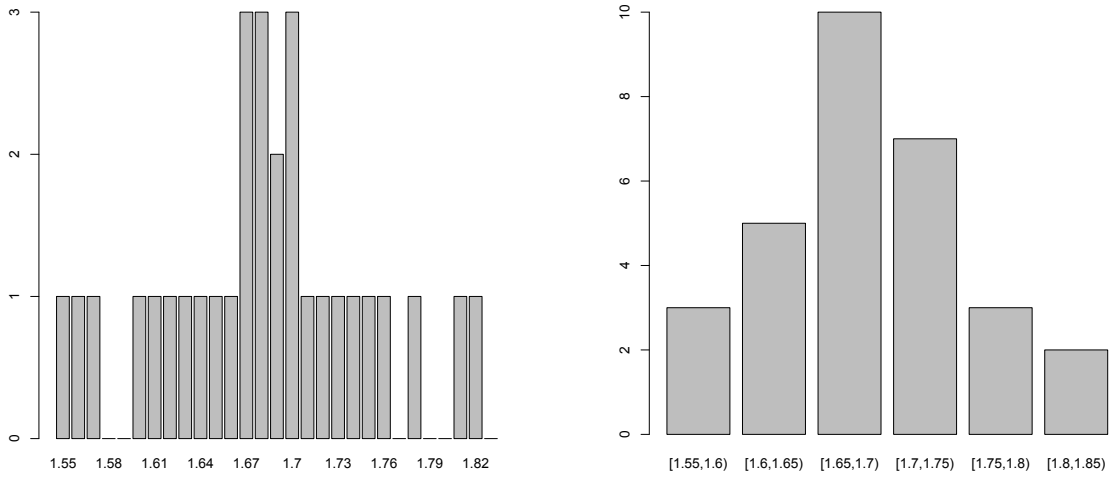
El diagrama de barras de sus frecuencias (tomando como posibles niveles todas las alturas entre su mínimo y su máximo, redondeadas a cm) es la Figura 11.1.(a). Todas la barras tienen alturas entre 0 y 3, y salvo una mayor presencia de los valores centrales (entre 1.67 y 1.70), no hay mucho más que salte a la vista en este gráfico.

En situaciones como esta, es recomendable dividir los posibles valores de la variable en intervalos y contar cuántos valores caen dentro de cada intervalo: habitualmente, las frecuencias que se obtienen de esta manera son más fáciles de interpretar que las de los valores individuales. Así, siguiendo con nuestro ejemplo de las alturas, el diagrama de barras de la Figura 11.1.(b) representa sus frecuencias cuando las agrupamos en intervalos de 5 cm. La distribución de estas alturas es mucho más fácil de entender mediante este gráfico que con el primero.

Otro motivo por el que puede ser conveniente agrupar datos es la imposibilidad física de medir de manera exacta algunas magnitudes continuas como alturas, pesos o tiempos; esto hace que los datos obtenidos sean sólo aproximaciones o redondeos de los valores reales y que cada medida diferente represente todo un intervalo de posibles valores.

En general, hay tres situaciones concretas en las cuales conviene agrupar datos cuantitativos en intervalos de valores, también llamados *clases*:

- Cuando los datos son continuos y no se pueden medir de manera exacta: su redondeo ya define un agrupamiento.
- Cuando los datos son discretos, pero con un número muy grande de posibles valores: números de aminoácidos en proteínas, números de bases en cadenas de ADN...



(a) (b)

Figura 11.1. Diagramas de barras de un mismo conjunto de alturas: (a) con los datos sin agrupar; (b) con los datos agrupados en intervalos de 5 cm.

- Cuando tenemos muchos datos y nos interesa estudiar las frecuencias de sus valores; hay autores que consideran que *muchos*, en este contexto, significa *30 o más*.

11.1. Cómo agrupar datos

El paso previo al estudio de unos datos agrupados es, naturalmente, agruparlos. El proceso es el siguiente:

(1) Se decide el número de intervalos que se van a usar.

(2) Se decide su amplitud.

(3) Se calculan los extremos de los intervalos.

(4) Finalmente, en algunas aplicaciones, se calcula un valor representativo de cada intervalo, llamado su *marca de clase*.

No hay una manera de agrupar datos mejor que otra; por ejemplo, para estudiar las calificaciones de un curso podemos agruparlas en Suspenso, $[0, 5)$, Aprobado, $[5, 7)$ Notable, $[7, 9)$, y Sobresaliente, $[9, 10]$, o podemos redondear por defecto las notas a su parte entera y usar los intervalos $[0, 1)$, $[1, 2)$, $\ldots$, $[9, 10]$. Podría ser que cada uno de estos agrupamientos saque a la luz características diferentes del conjunto de datos.

La función básica de `R` para estudiar datos agrupados, `hist`, implementa todo el proceso: si le entramos el vector de datos y el número de intervalos, o el método para determinarlo (véase más adelante), agrupará los datos en, más o menos, el número de clases que le hemos especificado, sin ningún control por nuestra parte sobre los intervalos que produce. Para un análisis somero de los datos, esto suele ser más que suficiente, pero para una descripción más cuidadosa es conveniente que nosotros controlemos el proceso de agrupamiento, y en particular

que calculemos los extremos de los intervalos, en lugar de dejárselos calcular a `R`. En esta sección explicamos *nuestra receta* para agrupar datos y calcular marcas de clase; no es ni mejor ni peor que otras, pero es la que os recomendamos que uséis, sobre todo en el test si queréis obtener las respuestas correctas.

Lo primero que tenemos que hacer es establecer el número k de clases en las que vamos a dividir los datos. Podemos decidir este número de clases en función de nuestros intereses concretos, o podemos usar alguna de las reglas que se han propuesto con este fin; las más populares son las siguientes, donde n denota el número de datos en la muestra:[1]

- *Regla de la raíz cuadrada*: $k = \lceil \sqrt{n} \rceil$.
- *Regla de Sturges*: $k = \lceil 1 + \log_2(n) \rceil$.
- *Regla de Scott*: Se determina primero la *amplitud teórica* A_S de las clases mediante la fórmula
$$A_S = 3.5 \cdot \widetilde{s} \cdot n^{-\frac{1}{3}}$$
(donde $\widetilde{s}$ es la desviación típica muestral del conjunto de datos), y entonces se toma
$$k = \left\lceil \frac{\text{máx}(x) - \text{mín}(x)}{A_S} \right\rceil.$$
- *Regla de Freedman-Diaconis*: Se determina primero la *amplitud teórica* A_{FD} de las clases por medio de la fórmula
$$A_{FD} = 2 \cdot (Q_{0.75} - Q_{0.25}) \cdot n^{-\frac{1}{3}}$$
(recordad que $Q_{0.75} - Q_{0.25}$ es el rango intercuartílico), y entonces se toma de nuevo
$$k = \left\lceil \frac{\text{máx}(x) - \text{mín}(x)}{A_{FD}} \right\rceil.$$

Como podéis ver, las dos primeras sólo dependen de n, mientras que las dos últimas tienen en cuenta, de maneras diferentes, su dispersión; no hay una regla mejor que las otras y, además, números de clases diferentes pueden revelar características diferentes de los datos. Las tres últimas reglas están implementadas en las funciones `nclass.Sturges`, `nclass.scott` y `nclass.FD` de `R`, respectivamente.

Ejemplo 11.1. Mucha gente manifiesta reacciones alérgicas sistémicas a las picaduras de insecto; estas reacciones varían entre pacientes, no sólo en lo que se refiere a la gravedad de la reacción, sino también en el tiempo que tarda en manifestarse. En un estudio se midió, en 40 pacientes que experimentaron una reacción sistémica a una picadura de abeja, el tiempo de inicio de esta reacción desde la picadura, y se obtuvieron los datos siguientes, que expresamos en minutos:

10.5, 11.2, 9.9, 15.0, 11.4, 12.7, 16.5, 10.1, 12.7, 11.4, 11.6, 6.2, 7.9, 8.3, 10.9, 8.1, 3.8, 10.5, 11.7, 8.4, 12.5, 11.2, 9.1, 10.4, 9.1, 13.4, 12.3, 5.9, 11.4, 8.8, 7.4, 8.6, 13.6, 14.7, 11.5, 11.5, 10.9, 9.8, 12.9, 9.9.

Según las diferentes reglas que hemos explicado, los números de intervalos en los que tendríamos que dividir estos datos son los siguientes:

[1] Recordad en lo que sigue que $\lceil x \rceil$ denota el menor entero que es mayor o igual que x, y que con `R` se calcula mediante la función `ceiling`.

- *Regla de la raíz cuadrada*: $k = \lceil \sqrt{40} \rceil = \lceil 6.3245 \rceil = 7$.
- *Regla de Sturges*: $k = \lceil 1 + \log_2(40) \rceil = \lceil 6.321928 \rceil = 7$.
- *Regla de Scott*: Mediante

```
> alergia=c(10.5,11.2,9.9,15.0,11.4,12.7,16.5,10.1,12.7,11.4,11.6,
  6.2,7.9,8.3,10.9,8.1,3.8,10.5,11.7,8.4,12.5,11.2,9.1,10.4,9.1,
  13.4,12.3,5.9,11.4,8.8,7.4,8.6,13.6,14.7,11.5,11.5,10.9,9.8,
  12.9,9.9)
> sd(alergia)
[1] 2.533609
> diff(range(alergia))
[1] 12.7
```

  vemos que la desviación típica muestral de estos datos es $\widetilde{s} = 2.533609$ y su rango, 12.7; por lo tanto, $A_S = 3.5 \cdot 2.533609 \cdot 40^{-\frac{1}{3}} = 2.592911$ y $k = \lceil 12.7/2.560294 \rceil = \lceil 4.96 \rceil = 5$.

- *Regla de Freedman-Diaconis*: Mediante

```
> IQR(alergia)
[1] 2.825
```

  obtenemos que $Q_{0.75} - Q_{0.25} = 2.825$; por lo tanto, $A_{FD} = 2 \cdot 2.825 \cdot 40^{-\frac{1}{3}} = 1.65207$ y $k = \lceil 12.7/1.65207 \rceil = \lceil 7.687 \rceil = 8$.

Como podéis ver, reglas diferentes puede que den valores diferentes, y puede que no.

Con `R`, hubiéramos podido calcular los tres últimos números de clases de la manera siguiente:

```
> nclass.Sturges(alergia)
[1] 7
> nclass.scott(alergia)
[1] 5
> nclass.FD(alergia)
[1] 8
```

Una vez determinado el número k de clases, tenemos que decidir su amplitud; la forma más sencilla, y que adoptaremos por defecto,[2] es tomar todos los intervalos de la misma amplitud A. Para calcular esta amplitud, dividiremos el rango de los datos entre el número k de clases y redondearemos por exceso a un valor de la precisión de la medida: si medimos edades con una precisión de años, redondearemos este cociente por exceso a años, si medimos alturas con una precisión de centímetros, redondearemos por exceso a centímetros, etc. En el caso improbable de que el cociente del rango entre el número de clases dé un valor exacto en la precisión de la medida, tomaremos como A este cociente más una unidad de precisión; así, por ejemplo, si hemos medido unas alturas en metros con una precisión de centímetros y obtenemos que el cociente del rango entre k da un número exacto de centímetros, tomaremos como amplitud A este cociente más 1 cm.

[2] Pero no la única. Recordad, por ejemplo, el agrupamiento de las calificaciones en Suspenso, Aprobado, Notable y Sobresaliente, que representan intervalos de notas de amplitudes diferentes.

Ejemplo 11.2. Seguimos con el Ejemplo 11.1; vamos a continuar el proceso de agrupamiento de los datos en $k = 7$ clases. Recordemos que el rango del conjunto de datos en cuestión es 12.7 y que los datos están expresados en minutos con una precisión de una cifra decimal; por lo tanto, la amplitud será el cociente $12.7/7 = 1.8143$ redondeado por exceso a una cifra decimal: $A = 1.9$.

Ahora hemos de calcular los extremos de los intervalos. En este curso, tomaremos estos intervalos siempre cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha, y los denotaremos por

$$[L_1, L_2), [L_2, L_3), \ldots, [L_k, L_{k+1}).$$

Sin entrar en detalles, el motivo por el que tomamos los intervalos de esta forma y no al revés (abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha, que es como los construye `R` por defecto) es porque así es como se usan en Teoría de Probabilidades al definir la distribución de una variable aleatoria discreta, y también en muchas situaciones cotidianas (calificaciones, edades...). En todo caso, queremos haceros notar que, con la regla que explicamos a continuación, los extremos de los intervalos nunca van a coincidir con valores del conjunto de datos: si la usáis, tanto dará si consideráis los intervalos abiertos o cerrados en sus extremos.

Los extremos $L_1, \ldots, L_{k+1}$ de estos intervalos se calculan de la manera siguiente: tomamos como extremo izquierdo L_1 del primer intervalo el valor

$$L_1 = \text{mín}(x) - \frac{1}{2} \cdot \text{precisión};$$

es decir, si la precisión son las unidades en las que hemos medido los datos, $L_1 = \text{mín}(x) - 0.5$; si la precisión son décimas de unidad, $L_1 = \text{mín}(x) - 0.05$; etc. A partir de este extremo inferior, cada uno de los extremos siguientes se obtiene sumando la amplitud al anterior: $L_2 = L_1 + A$, $L_3 = L_2 + A$ y así sucesivamente, hasta llegar a $L_{k+1} = L_k + A$. Por consiguiente, estos extremos forman una progresión aritmética de paso A:

$$L_i = L_1 + (i-1)A, \quad i = 2, \ldots, k+1.$$

Como decíamos, de esta manera se garantiza que los extremos de los intervalos nunca coincidan con valores del conjunto de datos: por ejemplo, si los datos están expresados con una sola cifra decimal, estos extremos tienen todos un 5 en su segunda cifra decimal.

Ejemplo 11.3. Continuemos con el Ejemplo 11.1 y $k = 7$, de manera que tomamos $A = 1.9$. El valor mínimo del conjunto de datos es 3.8:

```
> min(alergia)
[1] 3.8
```

Además, los datos están expresados con una precisión de décimas de unidad. El extremo inferior del primer intervalo será, entonces, $L_1 = 3.8 - 0.05 = 3.75$, y a partir de aquí obtendremos el resto de extremos mediante una progresión aritmética de paso 1.9:

$$\begin{aligned}
L_1 &= 3.75 \\
L_2 &= 3.75 + 1.9 = 5.65 \\
L_3 &= 3.75 + 2 \cdot 1.9 = 7.55 \\
L_4 &= 3.75 + 3 \cdot 1.9 = 9.45 \\
L_5 &= 3.75 + 4 \cdot 1.9 = 11.35 \\
L_6 &= 3.75 + 5 \cdot 1.9 = 13.25 \\
L_7 &= 3.75 + 6 \cdot 1.9 = 15.15 \\
L_8 &= 3.75 + 7 \cdot 1.9 = 17.05
\end{aligned}$$

Los intervalos son, por lo tanto,

$$[3.75, 5.65),\ [5.65, 7.55),\ [7.55, 9.45),\ [9.45, 11.35),\ [11.35, 13.25),\\ [13.25, 15.15),\ [15.15, 17.05).$$

Finalmente, hemos de determinar la *marca de clase* X_i de cada intervalo $[L_i, L_{i+1})$; se trata de un valor del intervalo que usaremos para identificar la clase y para calcular algunos estadísticos. Como regla general, en este curso marcaremos el punto medio del intervalo,

$$X_i = \frac{L_i + L_{i+1}}{2};$$

de esta manera, el error máximo que se comete al describir cualquier elemento del intervalo por medio de su marca de clase es mínimo e igual a la mitad de la amplitud del intervalo.

Como todos los intervalos tienen la misma amplitud A, la diferencia entre dos puntos medios consecutivos será también A, y por consiguiente las marcas de clase formarán de nuevo una progresión aritmética de paso A:

$$X_1 = \frac{L_1 + L_2}{2} \quad \text{y} \quad X_i = X_1 + (i-1)A, \quad i = 2, \ldots, k.$$

Ejemplo 11.4. Continuemos con el Ejemplo 11.1 para $k = 7$. Las marcas de clase serán los puntos medios de los intervalos que hemos determinado en el ejemplo anterior; formarán una progresión aritmética de origen el punto medio del primer intervalo y paso la amplitud de las clases:

$$\begin{aligned} X_1 &= (3.75 + 5.65)/2 = 4.7 \\ X_2 &= 4.7 + 1.9 = 6.6 \\ X_3 &= 4.7 + 2 \cdot 1.9 = 8.5 \\ X_4 &= 4.7 + 3 \cdot 1.9 = 10.4 \\ X_5 &= 4.7 + 4 \cdot 1.9 = 12.3 \\ X_6 &= 4.7 + 5 \cdot 1.9 = 14.2 \\ X_7 &= 4.7 + 6 \cdot 1.9 = 16.1 \end{aligned}$$

Ejemplo 11.5. Volvamos a la situación inicial del Ejemplo 11.1, y esta vez vamos a agrupar los datos siguiendo la regla de Scott. Ya calculamos en su momento que, con esta regla, tenemos que usar $k = 5$ intervalos. Como el rango de los datos es 12.7 y $12.7/5 = 2.54$, redondeando por exceso este cociente a una décima obtenemos que la amplitud de los intervalos ha de ser $A = 2.6$.

Calculemos los extremos de los intervalos: el extremo inferior del primero es, de nuevo, $L_1 = 3.8 - 0.05 = 3.75$, y a partir de este valor, los otros extremos se obtienen sumando consecutivamente la amplitud hasta llegar a L_6:

```
> L=3.75+2.6*(0:5)
> L
[1]  3.75  6.35  8.95 11.55 14.15 16.75
```

Los intervalos son, por lo tanto,

$$[3.75, 6.35),\ [6.35, 8.95),\ [8.95, 11.55),\ [11.55, 14.15),\ [14.15, 16.75).$$

La marca de clase del primer intervalo es su punto medio:

$$X_1 = \frac{3.75 + 6.35}{2} = 5.05.$$

A partir de este valor, las otras marcas se obtienen sumando consecutivamente la amplitud hasta llegar a X_5:

```
> X=5.05+2.6*(0:4)
> X
[1]  5.05  7.65 10.25 12.85 15.45
```

También podríamos haber calculado estas marcas de clase definiéndolas directamente como los puntos medios de los intervalos:

```
> X=(L[1:(length(L)-1)]+L[2:length(L)])/2
> X
[1]  5.05  7.65 10.25 12.85 15.45
```

Observad que, en esta última construcción, `L[1:(length(L)-1)]` es el vector $L_1, L_2, \ldots, L_k$ y `L[2:length(L)]` es el vector $L_2, L_3, \ldots, L_{k+1}$, por lo que

`(L[1:(length(L)-1)]+L[2:length(L)])/2`

define el vector

$$\frac{L_1+L_2}{2}, \frac{L_2+L_3}{2}, \ldots, \frac{L_k+L_{k+1}}{2}$$

formado por las marcas de clase.

Una vez agrupados los datos, ya podemos empezar a estudiarlos. Una primera posibilidad es considerar las clases como los niveles de una variable ordinal y calcular sus frecuencias; así, la *frecuencia absoluta* de una clase será el número de datos originales que pertenecen a esta clase, la *frecuencia absoluta acumulada* de una clase será el número de datos originales que pertenecen a esta clase o a alguna de las anteriores, etc. La manera usual de representar las frecuencias de un conjunto de datos agrupados es la mostrada en la Tabla 11.1, donde X_j indica la marca de clase, n_j la frecuencia absoluta de la clase, N_j su frecuencia absoluta acumulada, f_j su frecuencia relativa y F_j su frecuencia relativa acumulada. Recordad que N_k será igual al número total de datos recogidos y F_k siempre valdrá 1.

intervalos	X_j	n_j	N_j	f_j	F_j
$[L_1, L_2)$	X_1	n_1	N_1	f_1	F_1
$[L_2, L_3)$	X_2	n_2	N_2	f_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[L_k, L_{k+1})$	X_k	n_k	N_k	f_k	F_k

Tabla 11.1. Modelo de tabla de frecuencias para datos agrupados.

Ejemplo 11.6. Continuemos con el Ejemplo 11.1; recordemos que los datos son

> 10.5, 11.2, 9.9, 15.0, 11.4, 12.7, 16.5, 10.1, 12.7, 11.4, 11.6, 6.2, 7.9, 8.3, 10.9, 8.1, 3.8, 10.5, 11.7, 8.4, 12.5, 11.2, 9.1, 10.4, 9.1, 13.4, 12.3, 5.9, 11.4, 8.8, 7.4, 8.6, 13.6, 14.7, 11.5, 11.5, 10.9, 9.8, 12.9, 9.9.

Las frecuencias de este conjunto de datos para su agrupamiento en 7 clases se muestran en la Tabla 11.2. Para construir esta tabla, primero hemos calculado las frecuencias absolutas de

cada clase: sólo hay 1 valor dentro de $[3.75, 5.65)$, por lo que $n_1 = 1$; hay 3 valores dentro de $[5.65, 7.55)$, por lo que $n_2 = 3$; etc. A partir de estas frecuencias absolutas, hemos calculado el resto de la manera usual.

intervalos	X_j	n_j	N_j	f_j	F_j
$[3.75, 5.65)$	4.7	1	1	0.025	0.025
$[5.65, 7.55)$	6.6	3	4	0.075	0.100
$[7.55, 9.45)$	8.5	8	12	0.200	0.300
$[9.45, 11.35)$	10.4	11	23	0.275	0.575
$[11.35, 13.25)$	12.3	12	35	0.300	0.875
$[13.25, 15.15)$	14.2	4	39	0.100	0.975
$[15.15, 17.05)$	16.1	1	40	0.025	1.000

Tabla 11.2. Frecuencias de los datos del Ejemplo 11.1 agrupados en 7 clases.

Ejemplo 11.7. Supongamos que los siguientes valores son números de árboles frutales afectados por la mosca de la fruta en 50 terrenos rústicos de las mismas dimensiones:

$$8, 11, 11, 8, 9, 10, 16, 6, 12, 19, 13, 6, 9, 13, 15, 9, 12, 16, 8, 7, 14, 11, 15, 6, 14, 14, 17, 11, 6,$$
$$9, 10, 19, 12, 11, 12, 6, 15, 16, 16, 12, 13, 12, 12, 8, 17, 13, 7, 12, 14, 12.$$

Para estudiar estos valores, vamos a agruparlos; usaremos la regla de Freedman-Diaconis.[3]

```
> fruta=c(8,11,11,8,9,10,16,6,12,19,13,6,9,13,15,9,12,16,8,7,14,
  11,15,6,14,14,17,11,6,9,10,19,12,11,12,6,15,16,16,12,13,12,12,
  8,17,13,7,12,14,12)
> nclass.FD(fruta)
[1] 5
> diff(range(fruta))/5
[1] 2.6
> min(fruta)
[1] 6
```

Por consiguiente, usaremos 5 clases. Como hemos dado las medidas con una precisión de unidades, para calcular su amplitud A hemos de redondear por exceso a unidades el cociente entre el rango de la variable y el número de clases; este cociente vale 2.6, y por lo tanto $A = 3$.[4]

El extremo inferior de la primera clase será $6 - 0.5 = 5.5$, y a partir de aquí calculamos los 5 extremos siguientes sumando sucesivamente la amplitud:

```
> 5.5+3*(0:5)
[1]  5.5  8.5 11.5 14.5 17.5 20.5
```

[3] Si os preguntáis por qué, la respuesta es... ¿por qué no? Ya lo hemos dicho, no hay una regla mejor que las otras. En todo caso, se puede comprobar que esta regla suele dar un mayor número de clases.

[4] Recordad que, si la precisión hubiera sido de décimas de unidad, como este cociente ha dado exactamente 2.6, hubiéramos tenido que tomar como amplitud el cociente más una unidad de precisión: 2.7.

Por consiguiente, los intervalos son

$$[5.5, 8.5),\ [8.5, 11.5),\ [11.5, 14.5),\ [14.5, 17.5),\ [17.5, 20.5).$$

Las marcas de clase serán los puntos medios de estos intervalos, que calcularemos sumando múltiplos consecutivos de la amplitud al primer punto medio:

```
> (5.5+8.5)/2+3*(0:4)
[1]  7 10 13 16 19
```

Es decir,

$$X_1 = 7,\ X_2 = 10,\ X_3 = 13,\ X_4 = 16,\ X_5 = 19.$$

Finalmente, contamos cuántos datos pertenecen a cada clase (serán las frecuencias absolutas) y a partir de aquí calculamos el resto de frecuencias y obtenemos la Tabla 11.3. Lo que nos interesa ahora es que R calcule esta tabla por nosotros.

intervalos	X_j	n_j	N_j	f_j	F_j
$[5.5, 8.5)$	7	11	11	0.22	0.22
$[8.5, 11.5)$	10	11	22	0.22	0.44
$[11.5, 14.5)$	13	17	39	0.34	0.78
$[14.5, 17.5)$	16	9	48	0.18	0.96
$[17.5, 20.5)$	19	2	50	0.04	1.00

Tabla 11.3. Frecuencias de los datos del Ejemplo 11.7 agrupados según la regla de Freedman-Diaconis.

11.2. Agrupamiento de datos con R

Al agrupar un conjunto de datos con R, lo que hacemos es codificarlos, convirtiendo la variable cuantitativa en un factor cuyos niveles son las clases en las que hemos agrupado los valores e identificando cada dato con su clase. Las etiquetas de estos niveles pueden ser de diferentes tipos, en función de los intereses o el gusto del usuario; a modo de ejemplo, supongamos que agrupamos los valores de una variable cuantitativa en los intervalos

$$[0.5, 3.5), [3.5, 6.5), [6.5, 9.5).$$

Las etiquetas que se usan para identificar estos intervalos suelen ser las siguientes:

Codificación 1. Los intervalos mismos: $[0.5, 3.5), [3.5, 6.5), [6.5, 9.5)$.

Codificación 2. Las marcas de clase, que para cada intervalo sería su punto medio: $2, 5, 8$.

Codificación 3. El número de orden de cada intervalo: $1, 2, 3$.

Naturalmente, en la práctica podemos usar cualquier otra codificación que se nos ocurra.

La función básica de R para agrupar un vector de datos numéricos y codificar sus valores con las clases a las que pertenecen es

`cut(`x`, breaks=..., labels=..., right=...)`,

donde:

- x es el vector numérico.
- El parámetro `breaks` puede ser un vector numérico formado por los extremos de los intervalos en los que queremos agrupar los datos y que habremos calculado previamente. También podemos igualar este parámetro a un número k, en cuyo caso `R` agrupa los datos en k clases; para ello, divide el intervalo comprendido entre los valores mínimo y máximo de x en k intervalos y, a continuación, desplaza ligeramente el extremo inferior del primero a la izquierda y el extremo superior del último, a la derecha.[5]
- El parámetro `labels` es un vector con las etiquetas de los intervalos. Su valor por defecto, el que utiliza si no lo especificamos, es la codificación 1: usa como etiquetas los mismos intervalos.[6] Si especificamos `labels=FALSE`, obtenemos la codificación 3: los intervalos se identifican por medio de números naturales correlativos empezando por 1. Para usar como etiquetas las marcas de clase o cualquier otro vector, hay que entrarlo como valor de este parámetro.
- El parámetro `right` es un parámetro lógico que permite indicar qué tipo de intervalos queremos. Si usamos intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, tenemos que especificar `right=FALSE`, que *no es el valor por defecto*.
- Hay otro parámetro que a veces es útil, `include.lowest`. Combinado con `right=FALSE`, `include.lowest=TRUE` impone que el último intervalo sea cerrado: $[L_k, L_{k+1}]$. Usualmente lo tomaremos abierto a la derecha, que es el efecto global de `right=FALSE`; pero en algunos agrupamientos *ad hoc* puede que L_{k+1} coincida con el máximo de la variable numérica y entonces es necesario usar `include.lowest=TRUE` para no excluirlo: véase el Ejemplo 11.9 más adelante.

Podéis consultar `help(cut)` para conocer otros parámetros que os puedan ser de utilidad y para saber cómo se pueden especificar otros tipos de intervalos.

Ejemplo 11.8. En un experimento hemos recogido los datos siguientes:

$$10, 9, 8, 7, 3, 5, 6, 8, 9, 5, 2, 1, 3, 1, 1.$$

Vamos a agruparlos en los intervalos

$$[0.5, 4.5), [4, 5, 8.5), [8.5, 12.5).$$

Son $k = 3$ intervalos de amplitud $A = 4$.

```
> #Creamos un vector x con los datos
> x=c(10,9,8,7,3,5,6,8,9,5,2,1,3,1,1)
> #Definimos un vector L con los extremos de los intervalos
```

[5] Por consiguiente, estos intervalos no tienen todos la misma amplitud, y además puede pasar que algún extremo intermedio coincida con algún dato del conjunto.

[6] Aunque puede que escriba sus extremos redondeados, para que tengan todos el mismo número de cifras.

```
> L=0.5+4*(0:3)
> #Definimos x_int como el resultado de la codificación en
   intervalos empleando como etiquetas los intervalos
> x_int=cut(x, breaks=L, right=FALSE)
> x_int
 [1] [8.5,12.5) [8.5,12.5) [4.5,8.5)  [4.5,8.5)  [0.5,4.5)
 [6] [4.5,8.5)  [4.5,8.5)  [4.5,8.5)  [8.5,12.5) [4.5,8.5)
[11] [0.5,4.5)  [0.5,4.5)  [0.5,4.5)  [0.5,4.5)  [0.5,4.5)
Levels: [0.5,4.5) [4.5,8.5) [8.5,12.5)
> #Definimos x_MC como el resultado de la codificación en
   intervalos empleando como etiquetas las marcas de clase
> MC=(L[1]+L[2])/2+4*(0:2)  #Las marcas de clase
> x_MC=cut(x, breaks=L, labels=MC, right=FALSE)
> x_MC
 [1] 10.5 10.5 6.5  6.5  2.5  6.5  6.5  6.5  10.5 6.5  2.5  2.5
[13] 2.5  2.5  2.5
Levels: 2.5 6.5 10.5
> #Definimos x_Num como el resultado de la codificación en
   intervalos empleando como etiquetas 1, 2, 3
> x_Num=cut(x, breaks=L, labels=FALSE, right=FALSE)
> x_Num
[1] 3 3 2 2 1 2 2 2 3 2 1 1 1 1 1
```

El resultado de `cut` ha sido, en cada caso, una lista con los elementos del vector original codificados con las etiquetas de las clases a las que pertenecen. Podemos observar que las dos primeras aplicaciones de `cut` han producido factores (cuyos niveles son los intervalos y las marcas de clase, respectivamente, en ambos casos ordenados de manera natural), mientras que aplicándolo con `labels=FALSE` hemos obtenido un vector.

Antes de continuar, ¿que habría pasado si hubiéramos pedido a `R` que cortase los datos en 3 grupos?

```
> x
 [1] 10  9  8  7  3  5  6  8  9  5  2  1  3  1  1
> cut(x, breaks=3, right=FALSE)
 [1] [7,10)     [7,10)     [7,10)     [4,7)      [0.991,4) [4,7)
 [7] [4,7)      [7,10)     [7,10)     [4,7)      [0.991,4) [0.991,4)
[13] [0.991,4) [0.991,4) [0.991,4)
Levels: [0.991,4) [4,7) [7,10)
```

`R` ha repartido los datos en tres intervalos de longitud 3, y ha desplazado ligeramente a la izquierda el extremo izquierdo del primer intervalo. Fijaos en que, según el resultado que muestra `R`, $10 \in [7, 10)$. Aunque así escrito resulte contradictorio, la realidad es que `R` ha tomado como extremo derecho del último intervalo el valor 10.009, tal y como se explica en `help(cut)`.

Una vez agrupados los datos y codificados con las etiquetas de las clases, ya podemos calcular las tablas de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de los datos agrupados. Una posibilidad es usar las funciones `table`, `prop.table` y `cumsum` tal como lo hacíamos en las Lecciones 8 y 9. Otra posibilidad es usar la función `hist`, a la que dedicaremos la Sección 11.4. Esta función sirve para dibujar el *histograma* de la variable cuantitativa agrupada (una especie de diagrama de barras para las clases del agrupamiento), pero internamente da lugar a una `list`

cuya componente `count` es el vector de frecuencias absolutas de las clases. Por consiguiente, para calcular estas frecuencias absolutas, podemos usar la instrucción

`hist(`x`, breaks=..., right=FALSE, plot=FALSE)$count`.

En esta instrucción, es conveniente igualar el parámetro `breaks` al vector de los extremos de los intervalos (porque `cut` y `hist` usan métodos diferentes para agrupar los datos cuando se especifica sólo el número de clases); el significado de `right=FALSE` (y, si es necesario, `include.lowest=TRUE`) es el mismo que en `cut`; y `plot=FALSE` impide que se dibuje el histograma. Por ahora es interesante también saber que el resultado de `hist` incluye la componente `mids` que contiene el vector de puntos medios de los intervalos, nuestras marcas de clase.

Ejemplo 11.9. Supongamos que tenemos las 50 calificaciones siguientes, obtenidas por los estudiantes de una asignatura:

> 5.1, 1.1, 6.4,5.3, 10, 5.4, 1.9, 3.1, 5.1, 0.8, 9.6, 6.6, 7.0, 9.6, 10, 1.2, 4.2, 8.8, 2.4, 1.8, 5.6, 6.8, 6.7, 2.2, 8.6, 3.9, 5.6, 5.9, 8.4, 4.9, 0.7, 8.2, 3.7, 4.8, 5.8, 3.3, 9.7, 7.8, 9.3, 4.5, 6.2, 3.9, 4.7, 6.2, 6.3, 9.4, 9.3, 2.3, 8.5, 1.4.

Vamos a agruparlas en Suspenso, Aprobado, Notable, y Sobresaliente, y calcularemos las frecuencias de estas clases. Observad que las clases no tienen la misma amplitud, y que además la última ha de ser cerrada a la derecha (ha de contener los dieces), por lo que tendremos que usar `include.lowest=TRUE`.

```
> Notas=c(5.1,1.1,6.4,5.3,10,5.4,1.9,3.1,5.1,0.8,9.6,6.6,7.0,9.6,
  10,1.2,4.2,8.8,2.4,1.8,5.6,6.8,6.7,2.2,8.6,3.9,5.6,5.9,8.4,4.9,
  0.7,8.2,3.7,4.8,5.8,3.3,9.7,7.8,9.3,4.5,6.2,3.9,4.7,6.2,6.3,9.4,
  9.3,2.3,8.5,1.4)
> Notas_cut=cut(Notas, breaks=c(0,5,7,9,10),
  labels=c("Suspenso","Aprobado","Notable","Sobresaliente"),
  right=FALSE, include.lowest=TRUE)
 [1] Aprobado       Suspenso       Aprobado       Aprobado
 [5] Sobresaliente  Aprobado       Suspenso       Suspenso
 [9] Aprobado       Suspenso       Sobresaliente  Aprobado
[13] Notable        Sobresaliente  Sobresaliente  Suspenso
[17] Suspenso       Notable        Suspenso       Suspenso
[21] Aprobado       Aprobado       Aprobado       Suspenso
[25] Notable        Suspenso       Aprobado       Aprobado
[29] Notable        Suspenso       Suspenso       Notable
[33] Suspenso       Suspenso       Aprobado       Suspenso
[37] Sobresaliente  Notable        Sobresaliente  Suspenso
[41] Aprobado       Suspenso       Suspenso       Aprobado
[45] Aprobado       Sobresaliente  Sobresaliente  Suspenso
[49] Notable        Suspenso
Levels: Suspenso Aprobado Notable Sobresaliente
> table(Notas_cut)  #Frecuencias absolutas
Notas_cut
     Suspenso       Aprobado        Notable  Sobresaliente
           20             15              7              8
> cumsum(table(Notas_cut))  #Frecuencias absolutas acumuladas
     Suspenso       Aprobado        Notable  Sobresaliente
           20             35             42             50
> prop.table(table(Notas_cut))  #Frecuencias relativas
```

```
Notas_cut
     Suspenso       Aprobado       Notable Sobresaliente
         0.40           0.30          0.14          0.16
> cumsum(prop.table(table(Notas_cut))) #Frecuencias relativas
   acumuladas
     Suspenso       Aprobado       Notable Sobresaliente
         0.40           0.70          0.84          1.00
```

También podríamos haber obtenido estas frecuencias usando la función `hist` para calcular el vector de frecuencias absolutas y operando con este vector para obtener el resto:

```
> frec_abs=hist(Notas, breaks=c(0,5,7,9,10), right=FALSE,
  include.lowest=TRUE, plot=FALSE)$count  #Frecuencias absolutas
> frec_abs
[1] 20 15  7  8
> cumsum(frec_abs) #Frecuencias absolutas acumuladas
[1] 20 35 42 50
> frec_abs/length(Notas) #Frecuencias relativas
[1] 0.40 0.30 0.14 0.16
> cumsum(frec_abs/length(Notas)) #Frecuencias relativas acumuladas
[1] 0.40 0.70 0.84 1.00
```

Ahora podemos construir un *data frame* que contenga las frecuencias de estas calificaciones con la estructura de la Tabla 11.1. Como ya explicamos en el Ejemplo 10.2, si calculamos las frecuencias absolutas con `table`, no es conveniente usar el resultado como columna del *data frame*: es mejor utilizar el vector que se obtiene al aplicar `as.vector` a la `table`, y así no se generan columnas espurias con los nombres de los niveles.

```
> intervalos=c("[0,5)","[5,7)","[7,9)","[9,10)")
> calificaciones=c("Suspenso","Aprobado","Notable","Sobresaliente")
> marcas=c(2.5,6,8,9.5) #Marcas de clase
> f.abs=as.vector(table(Notas_cut)) #Frecuencias absolutas
> f.abs.cum=cumsum(f.abs)  #Frecuencias absolutas acumuladas
> f.rel=f.abs/length(Notas) #Frecuencias relativas
> f.rel.cum=cumsum(f.rel) #Frecuencias relativas acumuladas
> tabla.frec=data.frame(intervalos, calificaciones, marcas, f.abs,
   f.abs.cum, f.rel, f.rel.cum)  #Construimos el data frame
> tabla.frec
  intervalos calificaciones marcas f.abs f.abs.cum f.rel f.rel.cum
1      [0,5)       Suspenso    2.5    20        20  0.40      0.40
2      [5,7)       Aprobado    6.0    15        35  0.30      0.70
3      [7,9)        Notable    8.0     7        42  0.14      0.84
4     [9,10)  Sobresaliente    9.5     8        50  0.16      1.00
```

También hubiéramos podido usar

```
> Hist_notas=hist(Notas, breaks=c(0,5,7,9,10), right=FALSE,
  include.lowest=TRUE, plot=FALSE)
> f.abs=Hist_notas$count
> marcas=Hist_notas$mids
```

y usar el vector `f.abs` como arranque para calcular las columnas de frecuencias del *data frame* y el vector `marcas` como columna de marcas de clase.

Ejemplo 11.10. Continuemos con el Ejemplo 11.8; vamos a calcular las diferentes frecuencias para la codificación `x_int`:

```
> table(x_int)
x_int
 [0.5,4.5)   [4.5,8.5) [8.5,12.5)
         6           6           3
> prop.table(table(x_int))
x_int
 [0.5,4.5)   [4.5,8.5) [8.5,12.5)
       0.4         0.4         0.2
> cumsum(table(x_int))
 [0.5,4.5)   [4.5,8.5) [8.5,12.5)
         6          12          15
> cumsum(prop.table(table(x_int)))
 [0.5,4.5)   [4.5,8.5) [8.5,12.5)
       0.4         0.8         1.0
```

Ahora, vamos a construir un *data frame* que contenga la tabla de frecuencias de esta variable agrupada:

```
> intervalos=levels(x_int)
> marcas=MC  #Las hemos calculado en el Ejemplo 11.8
> f.abs=as.vector(table(x_int))
> f.abs.cum=cumsum(f.abs)
> f.rel=f.abs/length(x)
> f.rel.cum=cumsum(f.rel)
> tabla.frec=data.frame(intervalos, marcas, f.abs, f.abs.cum,
   f.rel, f.rel.cum)
> tabla.frec
  intervalos marcas f.abs f.abs.cum f.rel f.rel.cum
1  [0.5,4.5)    2.5     6         6   0.4       0.4
2  [4.5,8.5)    6.5     6        12   0.4       0.8
3 [8.5,12.5)   10.5     3        15   0.2       1.0
```

Podemos automatizar el cálculo de esta tabla de frecuencias, usando las dos funciones siguientes. La primera sirve en el caso en que vayamos a tomar todas las clases de la misma amplitud; sus parámetros son: x, el vector con los datos; k, el número de clases; A, su amplitud; y p, la precisión de los datos ($p = 1$ si la precisión son unidades, $p = 0.1$ si la precisión son décimas de unidad, etc.).

```
> Tabla_frec_agrup=function(x,k,A,p){
    L=min(x)-p/2+A*(0:k)
    x_int=cut(x, breaks=L, right=FALSE)
    intervalos=levels(x_int)
    marcas=(L[1]+L[2])/2+A*(0:(k-1))
    f.abs=as.vector(table(x_int))
    f.rel=f.abs/length(x)
```

```
    f.abs.cum=cumsum(f.abs)
    f.rel.cum=cumsum(f.rel)
    tabla_x=data.frame(intervalos, marcas, f.abs, f.abs.cum, f.rel,
    f.rel.cum)
    tabla_x
  }
```

Si de las clases conocemos de entrada sus extremos, podemos usar la función siguiente; sus parámetros son: x, el vector con los datos; L, el vector de extremos de clases; y V, un valor lógico, que ha de ser `TRUE` si queremos que el último intervalo sea cerrado, y `FALSE` en caso contrario.

```
> Tabla_frec_agrup_L=function(x,L,V){
    x_int=cut(x, breaks=L, right=FALSE, include.lowest=V)
    intervalos=levels(x_int)
    marcas=(L[1:(length(L)-1)]+L[2:length(L)])/2
    f.abs=as.vector(table(x_int))
    f.rel=f.abs/length(x)
    f.abs.cum=cumsum(f.abs)
    f.rel.cum=cumsum(f.rel)
    tabla_x=data.frame(intervalos, marcas, f.abs, f.abs.cum, f.rel,
    f.rel.cum)
    tabla_x
  }
```

Ejemplo 11.11. Volviendo al Ejemplo 11.1, vamos a calcular, para el agrupamiento en 7 clases, su tabla de frecuencias en forma de *data frame* usando la función `Tabla_frec_agrup`. Ya sabemos que $k = 7$ y $A = 1.9$ y que los datos están expresados con una precisión de décimas de unidad. Obtendremos la Tabla 11.2.

```
> alergia=c(10.5,11.2,9.9,15.0,11.4,12.7,16.5,10.1,12.7,11.4,11.6,
  6.2,7.9,8.3,10.9,8.1,3.8,10.5,11.7,8.4,12.5,11.2,9.1,10.4,9.1,
  13.4,12.3,5.9,11.4,8.8,7.4,8.6,13.6,14.7,11.5,11.5,10.9,9.8,
  12.9,9.9)
> Tabla_frec_agrup(alergia, 7, 1.9, 0.1)
   intervalos marcas f.abs f.abs.cum f.rel f.rel.cum
1 [3.75,5.65)    4.7     1         1 0.025     0.025
2 [5.65,7.55)    6.6     3         4 0.075     0.100
3 [7.55,9.45)    8.5     8        12 0.200     0.300
4 [9.45,11.3)   10.4    11        23 0.275     0.575
5 [11.3,13.2)   12.3    12        35 0.300     0.875
6 [13.2,15.1)   14.2     4        39 0.100     0.975
7   [15.1,17)   16.1     1        40 0.025     1.000
```

Observad que, como advertíamos en su momento, ha escrito los extremos de los intervalos redondeados para que tengan como máximo 3 cifras.

Ejemplo 11.12. Vamos a calcular la tabla de frecuencias de los datos del Ejemplo 11.7 usando la función `Tabla_frec_agrup`. Ya habíamos decidido que $k = 5$ y que en este caso la amplitud era 3. Los datos estaban expresados en unidades. Obtendremos la Tabla 11.3.

```
> fruta=c(8,11,11,8,9,10,16,6,12,19,13,6,9,13,15,9,12,16,8,7,14,
```

```
  11,15,6,14,14,17,11,6,9,10,19,12,11,12,6,15,16,16,12,13,12,12,
  8,17,13,7,12,14,12)
> Tabla_frec_agrup(fruta, 5, 3, 1)
   intervalos marcas f.abs f.abs.cum f.rel f.rel.cum
1   [5.5,8.5)      7    11         11  0.22      0.22
2  [8.5,11.5)     10    11         22  0.22      0.44
3 [11.5,14.5)     13    17         39  0.34      0.78
4 [14.5,17.5)     16     9         48  0.18      0.96
5 [17.5,20.5)     19     2         50  0.04      1.00
```

Ejemplo 11.13. Vamos a volver a calcular la tabla de frecuencias de las notas del Ejemplo 11.9, usando esta vez una de nuestras funciones: como las clases tienen amplitudes diferentes y la última es cerrada, usaremos la función `Tabla_frec_agrup_L` con V igual a `TRUE`.

```
> Notas=c(5.1,1.1,6.4,5.3,10,5.4,1.9,3.1,5.1,0.8,9.6,6.6,7.0,9.6,
  10,1.2,4.2,8.8,2.4,1.8,5.6,6.8,6.7,2.2,8.6,3.9,5.6,5.9,8.4,4.9,
  0.7,8.2,3.7,4.8,5.8,3.3,9.7,7.8,9.3,4.5,6.2,3.9,4.7,6.2,6.3,9.4,
  9.3,2.3,8.5,1.4)
> Tabla_frec_agrup_L(Notas,c(0,5,7,9,10),TRUE)
  intervalos marcas f.abs f.abs.cum f.rel f.rel.cum
1      [0,5)    2.5    20         20  0.40      0.40
2      [5,7)    6.0    15         35  0.30      0.70
3      [7,9)    8.0     7         42  0.14      0.84
4     [9,10]    9.5     8         50  0.16      1.00
```

11.3. Estadísticos para datos agrupados

Si tenemos una muestra de datos numéricos, para calcular sus estadísticos es conveniente usar los datos *brutos*, sin agrupar, ya que al agruparlos perdemos información; pero hay ocasiones en que los datos se obtienen ya agrupados: por ejemplo, mediante encuestas en las que se pida marcar un grupo de edad o una franja salarial en una lista de intervalos prefijados. En este tipo de situaciones, sigue siendo posible calcular los estadísticos de la muestra obtenida y usarlos como aproximaciones de los estadísticos de los datos «reales», que en realidad no conocemos.

La media $\overline{x}$, la varianza s^2, la varianza muestral $\tilde{s}^2$, la desviación típica s y la desviación típica muestral $\tilde{s}$ de un conjunto de datos agrupados se calculan con las mismas fórmulas que para los datos sin agrupar, excepto que sustituimos cada clase por su marca y la contamos con su frecuencia. Supongamos, en concreto, que tenemos k clases, sus respectivas marcas son $X_1, \ldots, X_k$ y sus respectivas frecuencias absolutas son $n_1, \ldots, n_k$, de manera que la longitud total de la muestra es $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$; entonces

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{n},\ s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i^2}{n} - \overline{x}^2,\ \tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2,\ s = \sqrt{s^2},\ \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}.$$

Por lo que se refiere a la moda, se sustituye por el *intervalo modal*, que es la clase con mayor frecuencia (absoluta o relativa). Si es necesario un valor numérico, se toma su marca de clase.

Ejemplo 11.14. Hemos descargado de la web del Instituto Nacional de Estadística[7] una tabla

[7] En concreto, del *url* `http://www.ine.es/jaxi/tabla.do?path=/t20/e243/e01/a1981/l0/&file=01006.px&type=pcaxis&L=0`.

con la población censal española de 1981 por grupos quinquenales de edad y la hemos guardado en el fichero en formato CSV

`http://bioinfo.uib.es/~recerca/RMOOC/tablaine.csv`

Este fichero contiene dos columnas: una con los grupos de edad y otra con las poblaciones. Vamos a usar estos datos agrupados para calcular algunos estadísticos de la distribución de la población española por edades en ese año.

Lo primero que hacemos es importarlo en un *data frame*; para ello podemos usar la función `read.csv` o la función `read.table` con `header=TRUE` y `sep=","`. Como la variable de grupos de edad tiene todos sus valores diferentes y no la usaremos para clasificar otros valores, la importaremos como un vector de palabras con `stringsAsFactors=FALSE`.

```
> tabla=read.csv("http://bioinfo.uib.es/~recerca/RMOOC/tablaine.csv
   ",
  stringsAsFactors=FALSE)
> str(tabla)
'data.frame': 18 obs. of  2 variables:
 $ Edades   : chr "De 0 a 4 años" "De 5 a 9 años" "De 10 a 14 años"
    "De 15 a 19 años" ...
 $ Población: int 3075352 3308049 3302328 3263312 2942178 2537428
   2455314 2245806 2056009 2361225 ...
> tabla
             Edades Población
1     De 0 a 4 años   3075352
2     De 5 a 9 años   3308049
3   De 10 a 14 años   3302328
4   De 15 a 19 años   3263312
5   De 20 a 24 años   2942178
6   De 25 a 29 años   2537428
7   De 30 a 34 años   2455314
8   De 35 a 39 años   2245806
9   De 40 a 44 años   2056009
10  De 45 a 49 años   2361225
11  De 50 a 54 años   2265091
12  De 55 a 59 años   2038002
13  De 60 a 64 años   1596543
14  De 65 a 69 años   1445606
15  De 70 a 74 años   1213807
16  De 75 a 79 años    852180
17  De 80 a 84 años    461960
18 De 85 y más años    263171
```

Hay que recordar que, en esta tabla, la clase «De 0 a 4 años» representa el intervalo de edades $[0, 5)$, la clase «De 5 a 9 años» representa el intervalo de edades $[5, 10)$, y así sucesivamente.

Para calcular las diferentes medidas estadísticas, hemos de asignar a cada grupo de edades un valor numérico como marca de clase: para los 17 primeros grupos, de amplitud 5, tomaremos su edad media, y para el último, de amplitud indeterminada, tomaremos 90 como marca. Añadiremos estas marcas al *data frame* anterior como una nueva variable.

```
> tabla$marcas=c(2.5+5*(0:16),90)
```

```
> head(tabla)
           Edades Población marcas
1   De 0 a 4 años   3075352    2.5
2   De 5 a 9 años   3308049    7.5
3 De 10 a 14 años   3302328   12.5
4 De 15 a 19 años   3263312   17.5
5 De 20 a 24 años   2942178   22.5
6 De 25 a 29 años   2537428   27.5
```

Ahora ya podemos calcular los estadísticos:

```
> Total=sum(tabla$Población)  #Población total
> Total
[1] 37683361
> Edad.media=sum(tabla$Población*tabla$marcas)/Total  #Media
> Edad.media
[1] 33.95994
> Edad.varianza=sum(tabla$Población*tabla$marcas^2)/Total
    -Edad.media^2 #Varianza
> Edad.varianza
[1] 505.2943
> Edad.desv.tip=sqrt(Edad.varianza)  #Desviación típica
> Edad.desv.tip
[1] 22.47875
> Int.modal=tabla$Edades[which(tabla$Población
    ==max(tabla$Población))]  #Intervalo modal
> Int.modal
[1] "De 5 a 9 años"
```

Por lo tanto, con los datos de los que disponemos, podemos afirmar que la edad media de los españoles censados en 1981 era de unos 34 años, con una desviación típica de unos 22.5 años, y que el grupo de edad más numeroso era el de los niños y niñas de 5 a 9 años.

Se han propuesto muchos métodos para aproximar la mediana y los otros cuantiles de una variable cuantitativa agrupada a partir de las tablas de frecuencias de sus clases. Aquí explicaremos una de las más sencillas, y la ilustraremos con el ejemplo anterior; para empezar, vamos a completar el *data frame* con las frecuencias absolutas acumuladas, relativas y relativas acumuladas:

```
> tabla$FA.acum=cumsum(tabla$Población)
> tabla$FR=round(tabla$Población/Total, 3)
> tabla$FR.acum=round(tabla$FA.acum/Total, 3)
> tabla
             Edades Población marcas  FA.acum    FR FR.acum
1     De 0 a 4 años   3075352    2.5  3075352 0.082   0.082
2     De 5 a 9 años   3308049    7.5  6383401 0.088   0.169
3   De 10 a 14 años   3302328   12.5  9685729 0.088   0.257
4   De 15 a 19 años   3263312   17.5 12949041 0.087   0.344
5   De 20 a 24 años   2942178   22.5 15891219 0.078   0.422
6   De 25 a 29 años   2537428   27.5 18428647 0.067   0.489
7   De 30 a 34 años   2455314   32.5 20883961 0.065   0.554
```

```
8    De 35 a 39 años    2245806    37.5 23129767 0.060    0.614
9    De 40 a 44 años    2056009    42.5 25185776 0.055    0.668
10   De 45 a 49 años    2361225    47.5 27547001 0.063    0.731
11   De 50 a 54 años    2265091    52.5 29812092 0.060    0.791
12   De 55 a 59 años    2038002    57.5 31850094 0.054    0.845
13   De 60 a 64 años    1596543    62.5 33446637 0.042    0.888
14   De 65 a 69 años    1445606    67.5 34892243 0.038    0.926
15   De 70 a 74 años    1213807    72.5 36106050 0.032    0.958
16   De 75 a 79 años     852180    77.5 36958230 0.023    0.981
17   De 80 a 84 años     461960    82.5 37420190 0.012    0.993
18 De 85 y más años      263171    90.0 37683361 0.007    1.000
```

Llamaremos *intervalo crítico para la mediana* al primer intervalo donde la frecuencia relativa acumulada sea mayor o igual que 0.5. En este caso, el intervalo crítico es la clase «De 30 a 34 años», es decir, $[30, 35)$.

Sean $[L_c, L_{c+1})$ este intervalo crítico; N_{c-1}, la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior al crítico (si el intervalo crítico es el primero, tomamos $N_{c-1} = 0$); n_c, la frecuencia absoluta del intervalo crítico; y $A_c = L_{c+1} - L_c$, su amplitud. Entonces, la fórmula siguiente nos da una *aproximación* M para la mediana de los datos «reales» a partir de los datos agrupados:

$$M = L_c + A_c \cdot \frac{\frac{n}{2} - N_{c-1}}{n_c}.$$

La justificación de esta fórmula es la siguiente: lo que hacemos es unir con una recta las frecuencias absolutas acumuladas en L_c y en L_{c+1}, y aproximar la mediana por medio de la abscisa del punto sobre esta recta cuya ordenada es $n/2$ (véase la Figura 11.2).

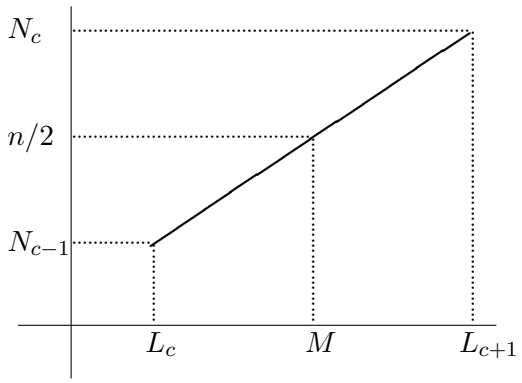


Figura 11.2. Aproximación lineal de la mediana a partir de las frecuencias de los datos agrupados.

En nuestro ejemplo, $n = 37683361$, $L_c = 30$, $A_c = 5$, $N_{c-1} = 18428647$ y $n_c = 2455314$; por lo tanto,

$$M = 30 + 5 \cdot \frac{0.5 \cdot 37683361 - 18428647}{2455314} = 30.8411.$$

Esto nos permite estimar que, en 1981, aproximadamente la mitad de la población española tenía menos de 30.84 años.

En general, este método permite aproximar el cuantil Q_p de los datos «reales» a partir de los datos agrupados con la fórmula siguiente:

$$Q_p = L_c + A_c \cdot \frac{p \cdot n - N_{c-1}}{n_c},$$

donde ahora el intervalo crítico $[L_c, L_{c+1})$ es el primer intervalo con frecuencia relativa acumulada mayor o igual que p y el resto de valores se definen relativos a este intervalo crítico. De este modo, en nuestro ejemplo, el intervalo crítico para $Q_{0.25}$ es «De 10 a 14 años», y en este caso $L_c = 10$, $A_c = 5$, $N_{c-1} = 6383401$ y $n_c = 3302328$, por lo que

$$Q_{0.25} = 10 + 5 \cdot \frac{0.25 \cdot 37683361 - 6383401}{3302328} = 14.59894.$$

En cuanto al tercer cuantil, $Q_{0.75}$, el intervalo crítico es «De 50 a 54 años», por lo que $L_c = 50$, $A_c = 5$, $N_{c-1} = 27547001$ y $n_c = 2265091$, y, por consiguiente,

$$Q_{0.75} = 50 + 5 \cdot \frac{0.75 \cdot 37683361 - 27547001}{2265091} = 51.57945.$$

11.4. Histogramas

Los datos agrupados se describen gráficamente por medio de unos diagramas de barras específicos llamados *histogramas*, donde se dibuja sobre cada clase una barra cuya área representa la frecuencia de dicha clase. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 11.15. Supongamos que tenemos los datos

$$10, 9, 8, 1, 9, 8, 2, 5, 7, 3, 5, 6, 1, 3, 7, 8, 9, 8, 5, 6, 2, 4, 1, 3, 5, 4, 6, 7, 10, 8, 5, 4, 2, 7, 8$$

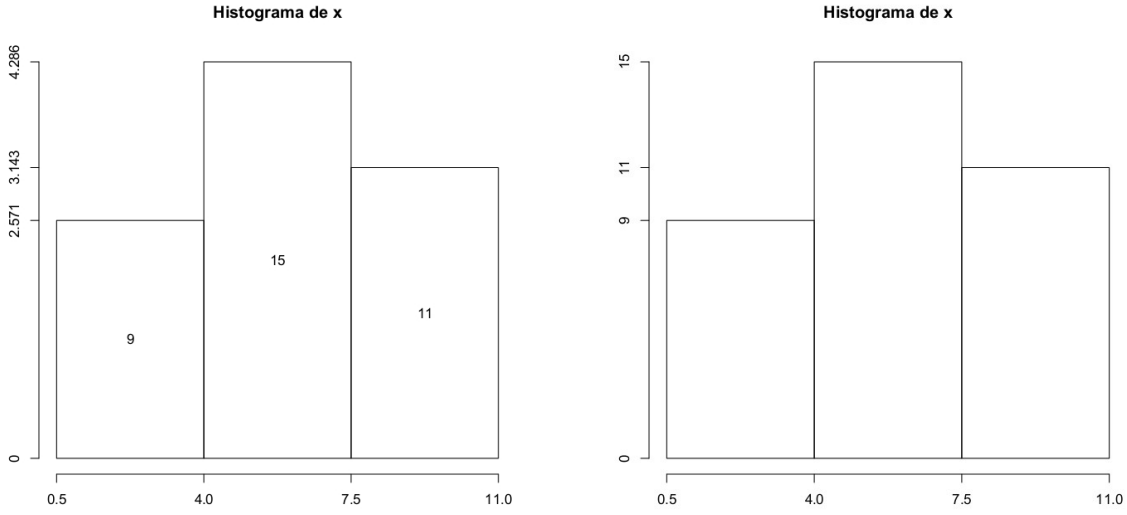
y que los agrupamos en los intervalos

$$[0.5, 4), [4, 7.5), [7.5, 11).$$

Calculemos las frecuencias absolutas de estas clases:

```
> x=c(10,9,8,1,9,8,2,5,7,3,5,6,1,3,7,8,9,8,5,6,2,4,1,3,5,4,6,7,
  10,8,5,4,2,7,8)
> L=c(0.5,4,7.5,11)
> x_int=cut(x,breaks=L,right=FALSE)
> table(x_int)
x_int
 [0.5,4)   [4,7.5) [7.5,11)
       9        15        11
```

La Figura 11.3.(a) muestra un histograma de las frecuencias absolutas de estos datos con este agrupamiento. Podéis comprobar que el producto de la base por la altura de cada barra es igual a la frecuencia de la clase correspondiente, que hemos escrito dentro de la barra para facilitar su lectura. Como todas las clases tienen la misma amplitud, las alturas de estas barras son proporcionales a las frecuencias de sus clases (son estas frecuencias divididas por la amplitud) y las representan correctamente, de forma que habríamos podido marcar sin ningún problema las frecuencias sobre el eje vertical, como hemos hecho en la Figura 11.3.(b).



(a) (b)

Figura 11.3. Histogramas del Ejemplo 11.15: (a) Histograma real; (b) Histograma con las frecuencias marcadas en el eje de ordenadas.

Pero si las amplitudes de las clases no son iguales, las alturas de las barras en un histograma no representan correctamente las frecuencias de las clases. A modo de ejemplo, supongamos que los datos anteriores son notas y que las agrupamos en suspensos, aprobados, notables y sobresalientes:

$$[0,5), [5,7), [7,9), [9,10].$$

Recordad que, en este caso, el último intervalo ha de ser cerrado.

```
> L2=c(0,5,7,9,10)
> x_int2=cut(x,breaks=L2,right=FALSE,include.lowest=TRUE)
> table(x_int2)
x_int2
   [0,5)    [5,7)    [7,9)   [9,10]
      12        8       10        5
```

En la Figura 11.4 podéis ver un histograma de frecuencias absolutas de estos datos con este agrupamiento. Comprobaréis que las alturas de las barras son las necesarias para que el área de cada barra sea igual a la frecuencia de la clase correspondiente; como las bases son de amplitudes diferentes, estas alturas no son proporcionales a las frecuencias de las clases, por lo que no tiene sentido marcar las frecuencias en el eje vertical; ¡el 12 de la primera barra estaría por debajo del 5 de la última!

También se usan histogramas para representar frecuencias acumuladas de datos agrupados; en este caso, y a diferencia del anterior, las alturas representan las frecuencias independientemente de la base. El motivo es que estas alturas tienen que ir creciendo. Así, los histogramas de frecuencias absolutas acumuladas de nuestros datos para los dos agrupamientos anteriores serían los mostrados en la Figura 11.5.

La Figura 11.6 muestra la estructura básica de dos histogramas, el izquierdo para las frecuencias absolutas y el derecho para las frecuencias absolutas acumuladas. En un histograma, el eje

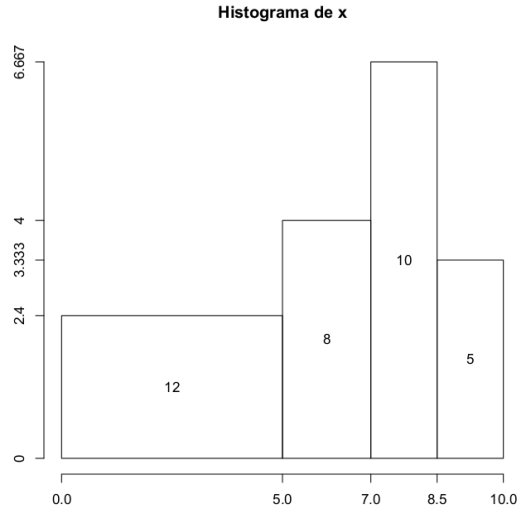


Figura 11.4. Histograma del Ejemplo 11.15 con clases de diferentes amplitudes.

de las abscisas representa los datos, donde marcamos los extremos de las clases, y se dibuja una barra sobre cada clase; esta barra tiene un significado diferente según el tipo de histograma, pero en general representa la frecuencia de su clase:

- En los histogramas de frecuencias absolutas, la altura de cada barra es la necesaria para que el área de la barra sea igual a la frecuencia absoluta de la clase. Si todas las clases tienen la misma amplitud, esto implica que las alturas de las barras sean proporcionales a las frecuencias de las clases y que, por tanto, las representen bien; si las clases no son todas de la misma amplitud, estas alturas ya no representan las frecuencias. Tanto en un caso como en otro, para facilitar la comprensión del histograma es conveniente indicar de alguna manera las frecuencias que representan las barras; este consejo se extiende a los histogramas de frecuencias relativas.

- En los histogramas de frecuencias relativas, la altura de cada barra es la necesaria para que el área de la barra sea igual a la frecuencia relativa de la clase; en particular, la suma de las áreas de las barras ha de ser igual a 1. En este contexto, llamamos a las alturas de las barras *densidades*.

- En los histogramas de frecuencias acumuladas (absolutas o relativas), las alturas de las barras son iguales a las frecuencias acumuladas de la clases, independientemente de su amplitud.

De este modo, en el histograma de la izquierda de la Figura 11.6, el área de la barra sobre cada clase $[L_j, L_{j+1})$ es igual a la frecuencia absoluta n_j de esta clase; es decir, el producto de la altura h_j de la barra por la amplitud $L_{j+1} - L_j$ es lo que representa la frecuencia, no la altura de la barra. En cambio, en el histograma de la derecha, la barra sobre cada clase $[L_j, L_{j+1})$ tiene una altura igual a la frecuencia absoluta acumulada N_j de esta clase.

Una observación: en la práctica, no es conveniente que en un histograma aparezcan clases con frecuencia nula, excepto cuando represente dos poblaciones muy diferentes y separadas, sin individuos «intermedios». Si aparecen clases vacías, conviene usar un número menor de clases

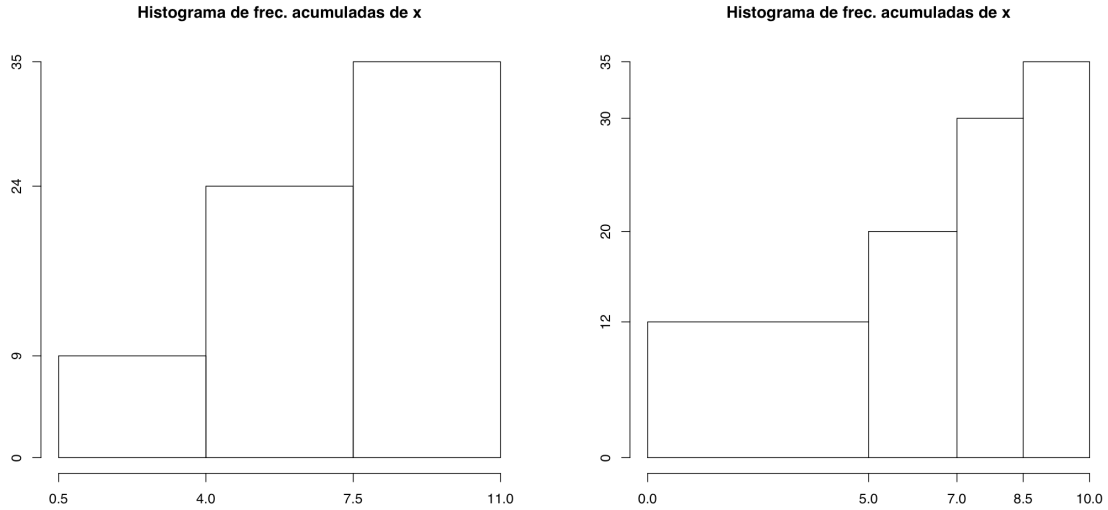


Figura 11.5. Histogramas de frecuencias acumuladas de los datos del Ejemplo 11.15 para dos agrupamientos diferentes.

o unir las clases vacías con alguna de sus adyacentes, aunque de esta última manera rompamos la regla básica de usar clases de la misma amplitud.

La función para dibujar histogramas con `R` es `hist`. Su estructura básica es

`hist(`x`, breaks=..., freq=..., right=..., ...)`,

donde:

- x es el vector formado por los datos que queremos representar.
- El parámetro `breaks` es similar al de la función `cut`: con él podemos establecer los valores de los extremos de los intervalos o el número de intervalos; incluso se puede indicar, entre comillas, el método para calcular el número de clases: `"Scott"`, `"Sturges"`, etc. Tanto si entráis el número de clases como el método para calcularlo, `R` lo considerará sólo como una sugerencia, por lo que no siempre obtendréis el número deseado de intervalos; además, el método que usa para calcular los intervalos es diferente del usado en `cut`; por todo ello, os recomendamos que especifiquéis los extremos, salvo en el caso de un estudio preliminar.
- El parámetro `freq` es un parámetro lógico: igualado a `TRUE` (que es el valor por defecto, por lo que en este caso no hace falta incluirlo), produce el histograma de frecuencias absolutas si los intervalos son todos de la misma longitud, y el de frecuencias relativas en caso contrario; igualado a `FALSE`, produce siempre el de frecuencias relativas.
- El parámetro `right` funciona como en `cut`: si queremos nuestros intervalos cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha, tenemos que especificar `right=FALSE`.
- Como ya pasaba en `cut`, se tiene que añadir `include.lowest=TRUE` si el máximo del conjunto de datos coincide con el extremo superior del último intervalo.
- Aparte, podéis usar los parámetros usuales de la función `plot` para poner un título, cambiar las etiquetas de los ejes, colorear las barras, etc. Recordad también el parámetro `plot`, que ha salido hace unas páginas: igualado a `FALSE`, calcula el histograma, pero no lo dibuja.

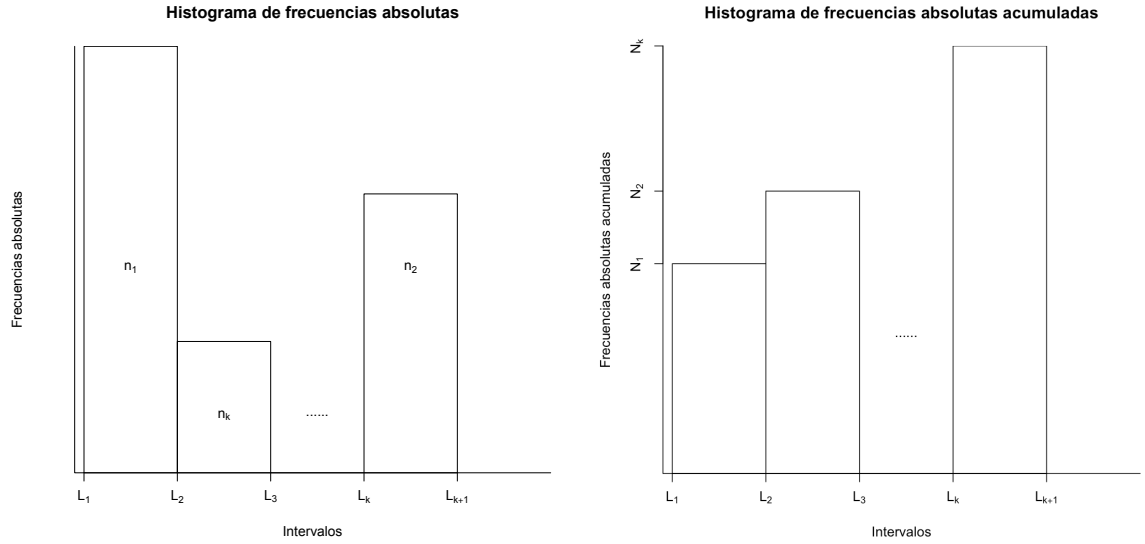


Figura 11.6. Estructura básica de un histograma de frecuencias absolutas (izquierda) y absolutas acumuladas (derecha).

Podéis consultar el resto de parámetros con `help(hist)`.

Ejemplo 11.16. Seguimos con el Ejemplo 11.7, sobre árboles frutales afectados por la mosca de la fruta; vamos a producir el histograma por defecto de los datos para dos agrupamientos diferentes: el que dábamos en dicho ejemplo, en tres clases de amplitud 3, y el que los agrupa en las clases

$$[5, 8), [8, 12), [12, 14), [14, 20),$$

de amplitudes diferentes. Los resultados son los de la Figura 11.7:

```
> fruta=c(8,11,11,8,9,10,16,6,12,19,13,6,9,13,15,9,12,16,8,7,
  14,11,15,6,14,14,17,11,6,9,10,19,12,11,12, 6,15,16,16,12,
  13,12,12,8,17,13,7,12,14,12)
> L1=5.5+3*(0:5)
> hist(fruta, breaks= L1, right=FALSE)
> L2=c(5,8,12,14,20)
> hist(fruta, breaks= L2, right=FALSE)
```

Como podéis ver, `hist` ha dibujado los ejes y las barras, pero en el eje horizontal no ha marcado los extremos de las clases; por lo que refiere al eje vertical, en el histograma con las clases de las mismas amplitudes, ha marcado las frecuencias absolutas, pero en el otro ha marcado las densidades, lo que dificulta su comprensión. Además, fijaos en los títulos: `hist` titula por defecto los histogramas «Histogram of» seguido del nombre del vector de datos, lo que no es muy adecuado si no estáis escribiendo en inglés.

Por suerte, el resultado de `hist` contiene mucha información escondida, que podemos usar para mejorar este histograma.

```
> h=hist(fruta, breaks=L1, right=FALSE, plot=FALSE) #Para que no lo
    dibuje; es el histograma de la izquierda de la Fig. 11.7
> h
$breaks
[1]  5.5  8.5 11.5 14.5 17.5 20.5
```

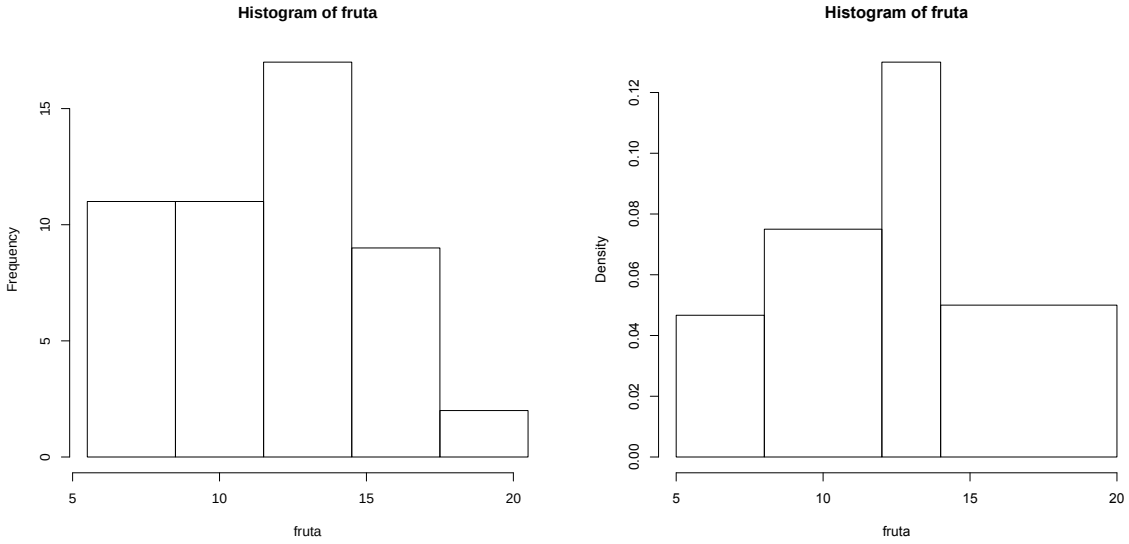


Figura 11.7. Dos histogramas de los datos del Ejemplo 11.16.

```
$counts
[1] 11 11 17  9  2

$density
[1] 0.07333333 0.07333333 0.11333333 0.06000000 0.01333333

$mids
[1]  7 10 13 16 19

$xname
[1] "fruta"

$equidist
[1] TRUE

attr(,"class")
[1] "histogram"
```

En concreto:

- La componente `breaks` contiene el vector de extremos de los intervalos: $L_0, L_1, \ldots, L_k$, L_{k+1}.
- La componente `mids` contiene el vector de puntos medios de los intervalos (que usamos como marcas de clase): $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
- La componente `counts` contiene el vector de frecuencias absolutas de los intervalos: $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
- La componente `density` contiene el vector de las densidades de los intervalos. Estas densidades son las alturas de las barras del histograma de frecuencias relativas; por lo tanto, la densidad de cada intervalo es su frecuencia relativa dividida por su amplitud.

Podemos servirnos de toda esta información para mejorar el histograma producido por defecto.

Por ejemplo, para histogramas de frecuencias absolutas, podéis usar la función siguiente; sus parámetros son: x, el vector de datos, y L, el vector de extremos de los intervalos.

```
> hist_abs=function(x,L){
h=hist(x, breaks=L, right=FALSE, freq=FALSE,
    xaxt="n", yaxt="n", col="lightgray",
    main="Histograma de frecuencias absolutas",
    xlab="Intervalos y marcas de clase",
    ylab="Frecuencias absolutas")
axis(1, at=L)
text(h$mids, h$density/2, labels=h$counts, col="blue")
}
```

Si la aplicamos a los valores de `fruta` y `L1` anteriores,

```
> hist_abs(fruta, L1)
```

produce la Figura 11.8.

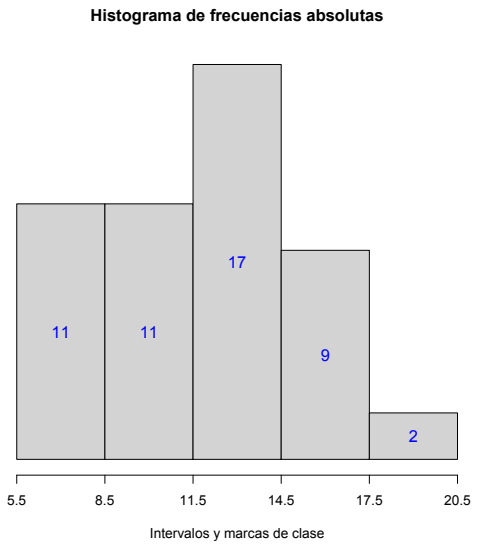


Figura 11.8. Histograma de frecuencias absolutas producido con la función `hist_abs`.

Algunos comentarios sobre la manera como hemos definido esta función, por si queréis modificarla:

- Los parámetros `xaxt="n"` e `yaxt="n"` especifican que, por ahora, no dibuje los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente.
- La instrucción `axis(`i`, at=...)` dibuja el eje correspondiente al valor de i ($i = 1$, el de abscisas; $i = 2$, el de ordenadas) con marcas en los lugares indicados por el vector definido mediante `at`; por lo tanto, la instrucción `axis(1, at=L)` añade un eje de abscisas (que no habíamos dibujado) con marcas en los extremos de las clases.
- Con `freq=FALSE` en realidad hemos dibujado un histograma de frecuencias relativas, pero como hemos omitido el eje de ordenadas, tanto da; en cambio, esto nos ha servido para

poder añadir, con la función `text`, la frecuencia absoluta de cada clase, sobre el punto medio de su intervalo (los valores `h$mids`) y a media altura de su barra correspondiente (con `freq=FALSE`, estas alturas son siempre los valores `h$density`).

Naturalmente, podéis adaptar a vuestro gusto esta función `hist_abs` o las otras que daremos: podéis cambiar el título, cambiar los colores, etc. Por ejemplo, si usamos muchas clases, es probable que las barras queden muy estrechas y no tenga sentido escribir en su interior las frecuencias absolutas. Si todas las clases son de la misma amplitud, podemos representar estas frecuencias en el eje de ordenadas: para ello basta con eliminar, en la definición de `hist_abs`, el parámetro `yaxt="n"` de `hist` y la instrucción `text`.

Otra posibilidad para indicar las frecuencias absolutas de las barras es usar la función `rug`, que permite añadir al histograma una «alfombra» con marcas en todos los valores del vector; el grosor de cada marca es proporcional a la frecuencia del valor que representa. Así, por ejemplo,

```
> hist_abs(fruta, L1)
> rug(fruta)
```

produce el gráfico de la izquierda de la Figura 11.9. Observaréis que, en este histograma, es difícil deducir de la «alfombra» que la tercera clase tiene una frecuencia mayor que las dos primeras debido a un mayor número de empates. Si encontráis difícil ver los empates, `help(rug)` os recomienda combinar `rug` con la función `jitter`, que añade un poco de «ruido» a los datos de un vector, deshaciendo empates. Así,

```
> hist_abs(fruta, L1)
> rug(jitter(fruta))
```

produce el gráfico de la derecha de la Figura 11.9.

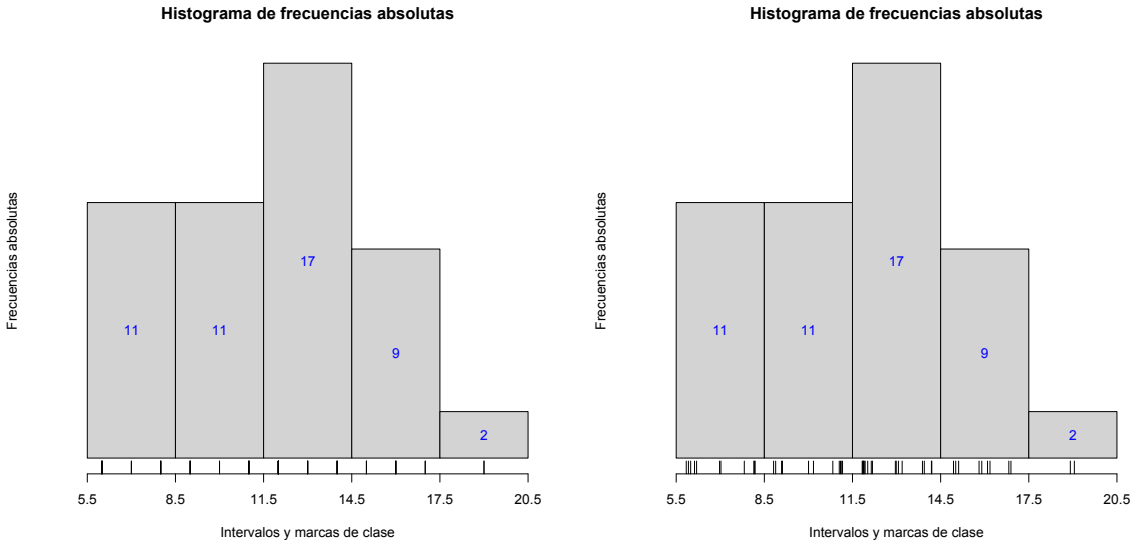


Figura 11.9. Histogramas de frecuencias absolutas con los valores representados en una «alfombra».

Para dibujar histogramas de frecuencias absolutas acumuladas, podéis usar la siguiente función:

```
> hist_abs.cum=function(x,L){
```

```
h=hist(x, breaks=L, right=FALSE, plot=FALSE)
h$density=cumsum(h$density)
plot(h, freq=FALSE, xaxt="n", yaxt="n", col="lightgray",
  main="Histograma de frecuencias absolutas acumuladas",
  xlab="Intervalos", ylab="Frec. absolutas acumuladas")
axis(1, at=L)
text(h$mids, h$density/2, labels=cumsum(h$counts), col="blue")
}
```

Aplicándola a los valores de `fruta` y `L1` anteriores,

```
> hist_abs.cum(fruta,L1)
```

obtenemos la Figura 11.10.

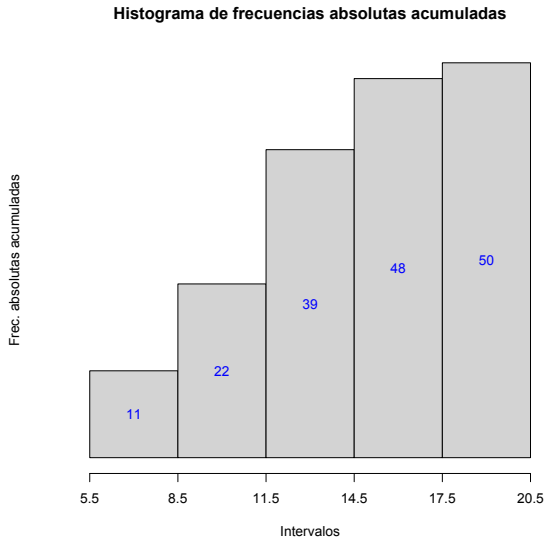


Figura 11.10. Histograma de frecuencias absolutas acumuladas producido con la función `hist_abs.cum`.

Con esta función producimos el histograma «básico» de los datos, sin dibujarlo, y a continuación modificamos su componente `density` para que contenga las sumas acumuladas de la componente `density` del histograma original. Luego dibujamos el nuevo histograma resultante, aplicándole la función `plot`; los parámetros del gráfico se tienen que añadir a este `plot`, no al histograma original. Finalmente, completamos el gráfico añadiendo el eje de abscisas y las frecuencias acumuladas.

Pasemos a los histogramas de frecuencias relativas. En ellos, es costumbre superponer una curva que estime la *densidad* de la distribución de la variable definida por la característica que medimos.

La densidad de una variable es una curva tal que el área comprendida entre el eje de abscisas y la curva sobre un intervalo es igual a la fracción de individuos de la población que caen dentro de ese intervalo. Visualmente, imaginemos que vamos aumentando el tamaño de la muestra y que agrupamos los datos en un conjunto cada vez mayor de intervalos; si el rango de los datos se mantiene más o menos constante, la amplitud de los intervalos del histograma irá decreciendo; cuando el tamaño del conjunto de datos tiende a infinito, los intervalos tienden a ser puntos y,

las barras, a ser líneas verticales. Los extremos superiores de estas líneas dibujarán una curva: ésta es la densidad de la variable.

La densidad más famosa es la llamada *campana de Gauss*, y corresponde a una variable que tenga una *distribución normal* (véase la Figura 11.11). Hay muchas variables que suelen tener distribuciones normales: características morfológicas y fisiológicas de individuos de una especie, calificaciones en exámenes, errores de medida... En cada caso, la forma concreta de la campana depende de dos parámetros: el valor medio μ de la variable y su desviación típica σ.

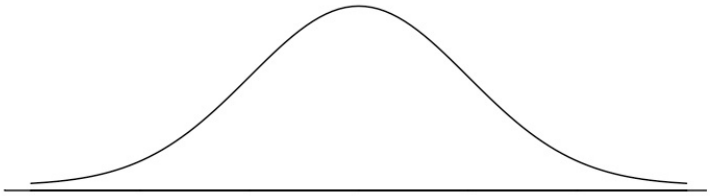


Figura 11.11. Campana de Gauss.

Hay muchos métodos alternativos para estimar la densidad de la distribución a partir de una muestra; la manera más sencilla de hacerlo con `R` es usar la función `density`. Cuando aplicamos esta función, con sus parámetros por defecto, a un vector númerico, produce una `list` que incluye los vectores `x` e `y` de primeras y segundas coordenadas de una secuencia de 512 puntos (x, y) sobre la curva densidad estimada.[8] Aplicando `plot`, con `type="l"`, o `lines` (si hay que añadirla a un gráfico anterior) al resultado de `density`, obtenemos el gráfico de esta curva.

```
> str(density(fruta))
List of 7
 $ x         : num [1:512] 1.69 1.73 1.78 1.82 1.86 ...
 $ y         : num [1:512] 0.000326 0.000356 0.000388 0.000424
   0.000462 ...
 $ bw        : num 1.44
 $ n         : int 50
 $ call      : language density.default(x = fruta)
 $ data.name: chr "fruta"
 $ has.na    : logi FALSE
 - attr(*, "class")= chr "density"
> plot(density(fruta), type="l",
  main="Densidad de la variable \"fruta\"",
  xlab="Número de árboles", ylab="Densidad")
```

La instrucción del `plot` produce la Figura 11.12

Para dibujar un histograma de frecuencias relativas más informativo que el que produce `R` por defecto y que incluya la estimación de la densidad, podéis usar la función siguiente:

```
> hist_rel=function(x,L){
h=hist(x, breaks=L, right=FALSE, plot=FALSE)
```

[8] Explicar el método que usa esta función `density` para estimar la densidad cae fuera del nivel de este curso. Los curiosos pueden consultar el artículo de la *Wikipedia* `http://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation` y luego el `help` de la función.

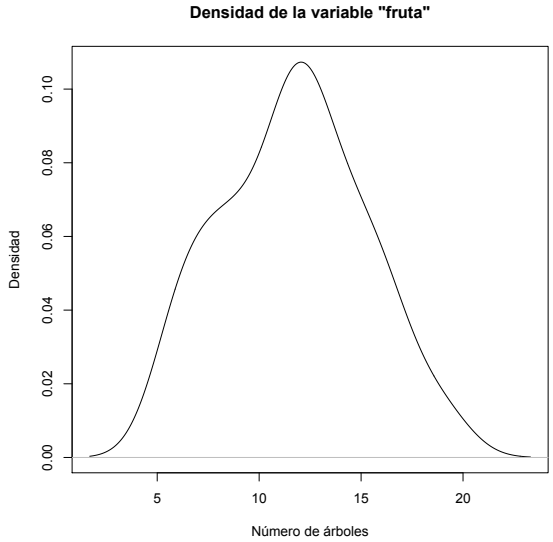


Figura 11.12. Densidad estimada de los datos del Ejemplo 11.7.

```
t=round(1.1*max(max(density(x)[[2]]),h$density),2)
plot(h, freq=FALSE, col="lightgray",
 main="Histograma de frec. relativas y curva de densidad estimada",
 xaxt="n", ylim=c(0,t),
 xlab="Intervalos", ylab="Densidades")
axis(1, at=L)
text(h$mids, h$density/2,
  labels=round(h$counts/length(x),2), col="blue")
lines(density(x), col="red", lwd=2)
}
```

Si la aplicamos a los valores de `fruta` y `L1` anteriores,

```
> hist_rel(fruta, L1)
```

obtenemos la Figura 11.13.

En los histogramas de frecuencias relativas acumuladas, se suele superponer una curva que estime la *función de distribución* de la variable definida por la característica que medimos; esta función de distribución de una variable nos da, en cada punto, la fracción de individuos de la población que caen a la izquierda de este punto, es decir, la frecuencia relativa acumulada por la variable sobre la población en ese punto. En general, la función de distribución en un valor determinado se obtiene hallando el área de la función de densidad que hay a la izquierda del valor.

Para dibujar un histograma de frecuencias relativas acumuladas que incluya la función de distribución estimada, podéis usar la función siguiente:

```
> hist_rel.cum=function(x,L){
h=hist(x, breaks=L, right=FALSE, plot=FALSE)
h$density=cumsum(h$counts)/length(x) #calculamos las f. relativas
plot(h, freq=FALSE, main="Histograma de frec. rel. acumuladas\n y
  curva de distribución estimada", xaxt="n", col="lightgray",
```

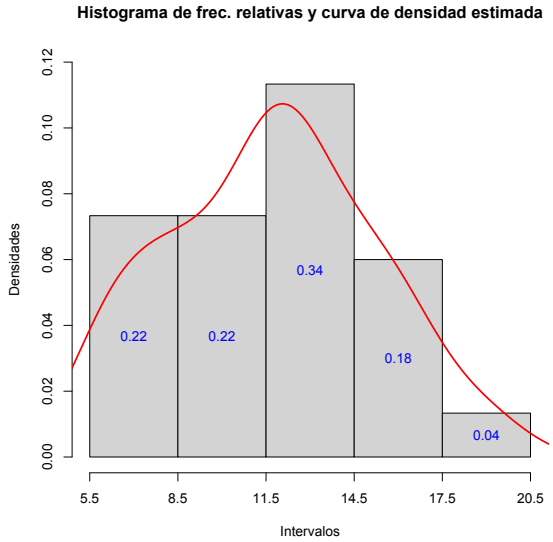


Figura 11.13. Histograma de frecuencias relativas producido con la función `hist_rel`.

```
  xlab="Intervalos", ylab="Frec. relativas acumuladas")
axis(1, at=L)
text(h$mids, h$density/2,
  labels=round(h$density,2), col="blue")
dens.x=density(x)
dens.x$y=cumsum(dens.x$y)*(dens.x$x[2]-dens.x$x[1])
lines(dens.x,col="red",lwd=2)
}
```

Aplicándola a los valores de `fruta` y `L1` anteriores,

```
> hist_rel.cum(fruta,L1)
```

obtenemos la Figura 11.14.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 11.17. Consideremos los datos de tiempos de inicio de reacción alérgica a una picadura del Ejemplo 11.1. Queremos dibujar los histogramas de frecuencias relativas y relativas acumuladas para el agrupamiento según la regla de Sturges. Por completitud, empezaremos de cero.

```
> alergia=c(10.5,11.2,9.9,15.0,11.4,12.7,16.5,10.1,12.7,11.4,11.6,
  6.2,7.9,8.3,10.9,8.1,3.8,10.5,11.7,8.4,12.5,11.2,9.1,10.4,9.1,
  13.4,12.3,5.9,11.4,8.8,7.4,8.6,13.6,14.7,11.5,11.5,10.9,9.8,
  12.9,9.9)
> nclass.Sturges(alergia)
[1] 7
> diff(range(alergia))
[1] 12.7
> 12.7/7
[1] 1.814286
> #Tomamos A=1.9
```

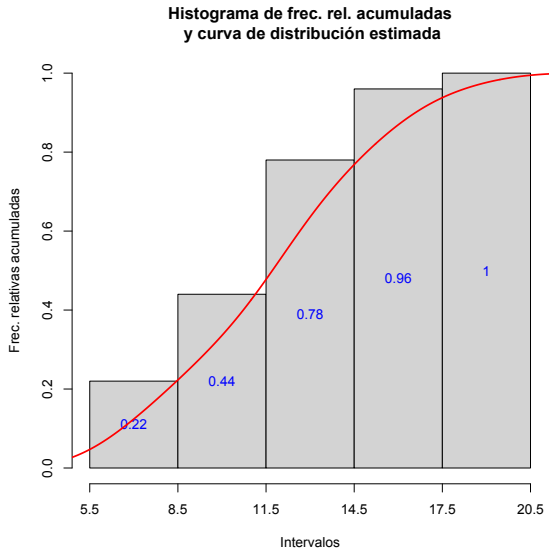


Figura 11.14. Histograma de frecuencias relativas acumuladas producido con la función `hist_rel.cum`.

```
> L.al=min(alergia)-0.05+1.9*(0:7)
> L.al
[1]  3.75  5.65  7.55  9.45 11.35 13.25 15.15 17.05
> #usamos las funciones definidas antes
> hist_rel(alergia, L.al)
> hist_rel.cum(alergia, L.al)
```

y obtenemos los histogramas de la Figura 11.15.

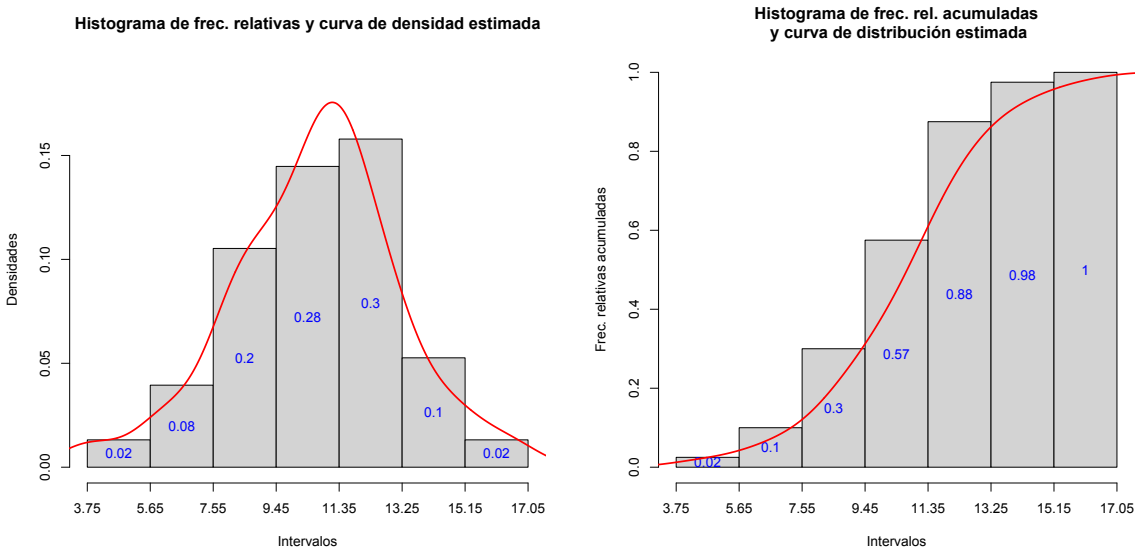


Figura 11.15. Histogramas de frecuencias relativas de los datos del Ejemplo 11.1.

Veamos un último ejemplo.

Ejemplo 11.18. El fichero `datacrab.txt`, del cual hemos guardado una copia en

`http://bioinfo.uib.es/~recerca/RMOOC/datacrab.txt`

recoge los datos sobre hembras de límula del Atlántico analizadas en el artículo «Satellite male groups in horseshoe crabs, *Limulus polyphemus*» de H. J. Brockmann (*Ethology* 102 (1996), pp. 1–21). Una de las variables que incluye esta tabla de datos es la amplitud, *width*, de los especímenes analizados. Vamos a dibujar un histograma de las frecuencias relativas de estas amplitudes que incluya su curva de densidad estimada; para variar, agruparemos estas amplitudes usando la regla de Scott. Aprovecharemos para calcular la tabla de frecuencias de este agrupamiento.

Empezamos importando esta tabla en un *data frame* y definiendo un vector con la variable correspondiente a la amplitud.

```
> crab=read.table("http://bioinfo.uib.es/~recerca/RMOOC/datacrab.
   txt",
 header=TRUE)
> str(crab)
'data.frame': 173 obs. of  5 variables:
 $ input      : int  3 4 2 4 4 3 2 4 3 4 ...
 $ color.spine: int  3 3 1 3 3 3 1 2 1 3 ...
 $ width      : num  28.3 22.5 26 24.8 26 23.8 26.5 24.7 23.7 25.6
   ...
 $ satell     : int  8 0 9 0 4 0 0 0 0 0 ...
 $ weight     : int  3050 1550 2300 2100 2600 2100 2350 1900 1950
   2150 ...
> crw=crab$width
```

Observamos que las amplitudes están expresadas con una precisión de décimas de unidad. A continuación, determinamos el número de clases, amplitud, etc. del agrupamiento de este vector `crw` siguiendo la regla de Scott.

```
> nclass.scott(crw)
[1] 10
> diff(range(crw))/10
[1] 1.25
> #Tomaremos A=1.3
> L.cr=min(crw)-0.05+1.3*(0:10)
> L.cr
[1] 20.95 22.25 23.55 24.85 26.15 27.45 28.75 30.05 31.35 32.65
   33.95
> MC.cr=(L.cr[1]+L.cr[2])/2+1.3*(0:9)
> MC.cr
[1] 21.6 22.9 24.2 25.5 26.8 28.1 29.4 30.7 32.0 33.3
> crw_int=cut(crw, breaks=L.cr, right=FALSE)
```

Ahora calcularemos la tabla de frecuencias para este agrupamiento `crw_int`. Usaremos la función `Tabla_frec_agrup` de la página 11-14.

```
> Tabla_frec_agrup(crw,10,1.3,0.1)
    intervalos marcas f.abs f.abs.cum       f.rel  f.rel.cum
1  [20.9,22.2)   21.6     2         2 0.011560694 0.01156069
2  [22.2,23.6)   22.9    14        16 0.080924855 0.09248555
3  [23.6,24.9)   24.2    27        43 0.156069364 0.24855491
4  [24.9,26.1)   25.5    44        87 0.254335260 0.50289017
```

```
5   [26.1,27.4)    26.8     34         121  0.196531792  0.69942197
6   [27.4,28.8)    28.1     31         152  0.179190751  0.87861272
7     [28.8,30)    29.4     15         167  0.086705202  0.96531792
8     [30,31.4)    30.7      3         170  0.017341040  0.98265896
9   [31.4,32.6)    32.0      2         172  0.011560694  0.99421965
10    [32.6,34)    33.3      1         173  0.005780347  1.00000000
```

Por lo que se refiere al histograma,

```
> hist_rel(crw, L.cr)
```

produce la Figura 11.16.

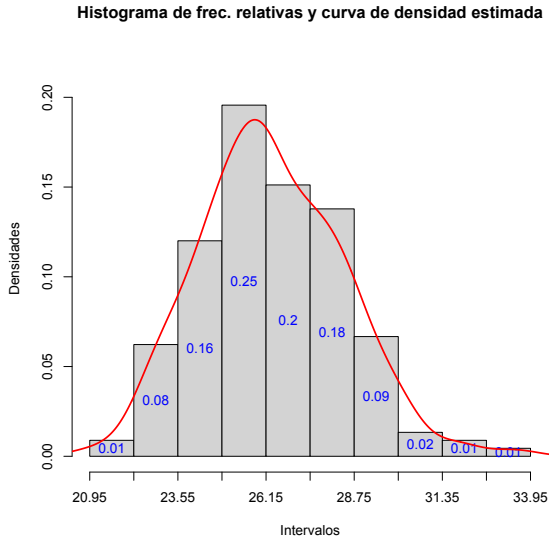


Figura 11.16. Histograma de frecuencias relativas de los datos del Ejemplo 11.18.

La curva de densidad que obtenemos en este gráfico tiene una forma de campana que nos recuerda la campana de Gauss. Para explorar este parecido, vamos a añadir al histograma la gráfica de la función densidad de una distribución normal de media y desviación típica las del conjunto de datos original; esta función se define mediante

`dnorm(x, mu=`*media*`, sd=`*desviación típica*`)`.

Así,

```
> hist_rel(crw, L.cr, "light green")
> curve(dnorm(x, mean(crw), sd(crw)), col="purple", lty=3, lwd=2,
   add=TRUE)
> legend("topright", lwd=c(2,2), lty=c(1,2), col=c("red","purple"),
  legend=c("densidad estimada","densidad normal"))
```

produce la Figura 11.17. Se observan una ligera diferencia entre la densidad estimada y la campana de Gauss en la zona central.

11.5. Guía rápida

- `nclass.Sturges` calcula el número de clases de un agrupamiento según la regla de Sturges.

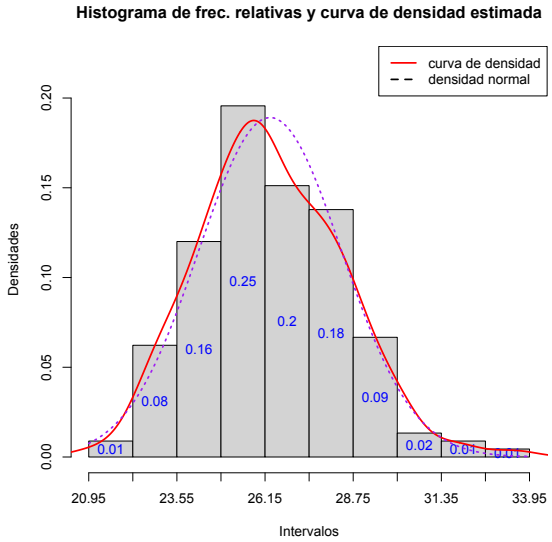


Figura 11.17. Histograma de frecuencias relativas de los datos del Ejemplo 11.18 y campana de Gauss.

- `nclass.scott` calcula el número de clases de un agrupamiento según la regla de Scott.
- `nclass.FD` calcula el número de clases de un agrupamiento según la regla de Freedman-Diaconis.
- `cut` sirve para agrupar un vector numérico y codificar sus valores con las clases a las que pertenecen. Algunos parámetros importantes:
  - `breaks` sirve para especificar los puntos de corte, o el número de clases.
  - `labels` sirve para especificar las etiquetas de las clases.
  - `right=FALSE` especifica que las clases son intervalos cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha.
  - `include.lowest=TRUE`, combinado con el anterior, impone que la última clase se tome cerrada a ambos lados.
- `hist` dibuja un histograma de un vector numérico. Algunos parámetros importantes:
  - `breaks` sirve para especificar los puntos de corte, el número de clases, o el método para calcularlo; en estos dos últimos casos, no siempre se obtiene el número de clases especificado.
  - `freq` igualado a `TRUE` produce el histograma de frecuencias absolutas si los intervalos son todos de la misma amplitud, y el de frecuencias relativas en caso contrario; igualado a `FALSE`, produce siempre el de frecuencias relativas.
  - `plot` igualado a `FALSE` impide que se dibuje el histograma.
  - `right` y `include.lowest` tienen el mismo significado que en `cut`.

  Internamente, el resultado de `hist` es una `list` que incluye los siguientes vectores:
  - `breaks`: los extremos de los intervalos.
  - `mids`: los puntos medios de los intervalos.

    - `counts`: las frecuencias absolutas de los intervalos.
    - `density`: las densidades de los intervalos.
- `axis` añade a un gráfico un eje, con marcas en los lugares indicados por el vector entrado en el parámetro `at`.
- `rug` permite añadir una «alfombra» a un histograma.
- `jitter` añade «ruido» estocástico aa los datos de un vector numérico.
- `density` calcula una secuencia de puntos sobre la curva de densidad estimada a partir de un vector numérico.
- `dnorm` define la curva de densidad de una distribución normal. Tiene los dos parámetros siguientes:
    - `mu`: la media.
    - `sd`: la desviación típica.

11.6. Ejercicio

La tabla `lobsters.txt`, que hemos guardado en

`http://bioinfo.uib.es/~recerca/RMOOC/lobsters.txt`

está formada por los pesos de langostas capturadas en dos zonas; estos pesos están expresados en kg, con una precisión de 0.01 kg. Las separaciones entre columnas son espacios en blanco y tiene una primera fila con los nombres de las columnas.

Definid un *data frame* con esta tabla. Echadle un vistazo (y comprobad que se ha importado). Definid dos vectores con los pesos de las langostas de la zona 1 y de la zona 2, respectivamente.

(a) Agrupad los pesos de la zona 1 y de la zona 2 siguiendo la regla de Scott.

(b) Para cada zona, y con este agrupamiento, construid un *data frame* que contenga la tabla de frecuencias agrupadas.

(c) Para cada zona, y con este mismo agrupamiento, dibujad el correspondiente histograma de frecuencias relativas incluyendo la curva de densidad estimada. Comparad los dos histogramas: ¿se observa alguna diferencia?