初めまして。数学専攻の博士課程大学院生の souji（@souji04261）（https://twitter.com/souji04261）です。今回は私の研究テーマについて紹介させてもらいます。数学の知識は必要ありませんので、気軽に読んでいただければと思います（高校生を想定読者として書いています）。自分の専門分野について高校生を対象に説明する以上、他の記事に比べて文字数は多くなってしまいましたが、じっくりご自身のペースで楽しんでいただければと思います。

私を研究テーマを一言で言うと「囚人と帽子のパズルの無限化」です。この記事では以下の順で書いていきます。

1 囚人と帽子のパズルとは？

囚人と帽子のパズルは様々なバリエーションがあります。今回は一番簡単なものから話を始めます。

パズル 1.

看守があるゲームをするために 2 人の囚人を同じ部屋に入れ, 帽子を 1 人に 1 つずつ被せます. その帽子は黒白どちらかの色で塗られています. 囚人 2 人はそれぞれ自分が被っている帽子の色は分かりませんが, もう 1 人の囚人の帽子の色は見えています. また部屋に入ってからは互いに一切のコミュニケーションが取れません. この状態で帽子の色のどちらかのみを, つまり「黒」か「白」のみを 2 人同時に発言させ, その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり, そんな正解者が 1 人でもいれば囚人側の勝利として 2 人とも釈放されます. もし 2 人とも不正解ならば囚人側の敗北として 2 人とも処刑されます. 当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは, 囚人たちは入室するまで知りません. このゲームのルールや勝利条件については, 部屋に入る前に囚人たちに伝えられ, ゲーム開始までに 2 人で戦略を相談することが可能です. このとき入室後にどのように帽子を被せられても, 常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

パズルの情景がより分かりやすくなるような絵。
既に帽子が被さられた囚人と、今まさに看守より帽子を被せられようとしている囚人。看守は 2 つの帽子を両手に持って、片方を被せようとしている（意図としてはよく白黒の数に決まりがあるように誤解する人が多いので、そういう誤解をこの絵で早期になくしたい）。

このパズルの答えをまだご存じでない方は一度止まって考えてみてください。

このパズルのように、色付けられた帽子を被った何人かの囚人が登場し、自分の帽子の色は分からない状況下で、直接は関係のない他人の帽子の色という情報などから、自分の帽子の色を推測するようなゲームに挑むパズルは、囚人と帽子のパズルや帽子当てゲーム・パズルなどなど様々な呼ばれ方をしています。英語では Hat Problem や Hat（Guessing）Game などと呼ばれています。またパズルによっては囚人ではなく、単なる男だったり数学者だったり、その設定やプレイヤーの背景も変わることがあります。またこの手のパズルは幼稚園や中学受験にも出題されることがあるらしく、その場合は大抵囚人ではなく単なる男になっていることが多いです。この記事では単に帽子パズルと呼んでいくことにします。

ではパズル 1 の答えを述べます。答えは「常に囚人側が勝利する戦略は存在する」です。そしてその戦略とは、1 人の囚人は見えた相手の帽子の色と同じ色を発言し、もう 1 人は見えた色とは違う方の色を発言する、というものです。なのでゲーム開始前に、2 人はどちらがどの役割を担うか相談しておけばよいことになります。

看守がどのように帽子を被せるか分からないのに、本当にそんな戦略で常に 1 人は正解できるのか、疑問の思う方もいるかもしれないので、少し記号なども用いて整理して解説してみます。まず 2 人の囚人を a, b とおくことにします。そして 2 人の相談によって, a は見えた色と同じ色を、b は見えた色と異なる色を発言することになったとします。

2 人の囚人に黒白の 2 色の帽子を被せる組み合わせは以下の表のように計 4 つになります。

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	黒	黒	白	白
b	黒	白	黒	白

表 1: 2 人 2 色パズルの帽子の被せ方

4 つの帽子の被せ方にそれぞれ f_1, f_2, f_3, f_4 と名前を付けておきました。つまり f_1 は看守が 2 人ともに黒と被せた場合にあたります。

例えば f_1 では囚人 a は、自分が見えた相手の帽子の色、つまり囚人 b が被っている帽子の色と同じ色を発言したいので、「黒」と発言します。そして囚人 b は、自分が見えた相手の帽子の色と違う色、つまり囚人 a が被っている帽子の色と違う方の色を発言したいので、「白」と発言します。すると囚人 a は被っている帽子の色と発言した色が一致しているので正解となり、残念ながら囚人 b は不正解でしたが、勝利条件「1 人以上正解である」はみたしているので、囚人側の勝利となり、2 人とも無事釈放されます。

これは f_1 だから勝利できたわけではありません。その他の 3 つの状況においても、必ず 1 人は正解することができています。各帽子の被せ方と、各囚人がどのような色を発言したかをまとめた表は以下のようになります。

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒

表 2: 2 人 2 色パズルの帽子の被せ方とその発言

向かい合っている囚人。a, b と囚人服に書かれている（名札？）。囚人 b には今まさに看守より黒の帽子が被さられたところ。それを見ている囚人 a からは吹き出しがあって、「黒と発言しよう」と書かれている。

それぞれの場合を見てもらえれば、確かに 1 人は正解していることがわかります。

たしかにパズル 1 はこれにて解けていることが分かりました。しかし一部の数学者はなぜ囚人側に必勝戦略があったのか気になります。今回の帽子パズルの設定を変えてしまえばどれくらい同じような結果が成り立つのか、そこから一般化された結果などが知りたくなるのです。私もその 1 人ですが、あとで話す通り私は、この囚人の人数や、色の数という設定を、2 人、3 人、4 人…や 2 色、3 色、4 色…と増やしてくだけでなく、囚人が無限にいたらどうなるか、被せられる帽子の色の候補が無限にあったらどうなるのか、などと設定を変えたりしながら、この帽子パズルを研究している 1 人です。

そもそもパズルに対して数学はどう役立つのか、そして無限というものは数学でどう扱えるのか、などを話さないことには、私の研究の面白さも伝えにくいのではないかと考えました。なので、今回は先ほど述べたような流れで、じっくりと解説していきたいと思います。

2　帽子パズルを研究するとは？

さっそくパズル 1 を拡張してみましょう。パズル 1 にて、囚人の人数を 2 人から 5 人に、そして色の数も 2 色から 5 色にしてみます。パズル 1 における各囚人の帽子の見え方を「自分以外の他囚人の全ての帽子が見えている」と捉えると、新たなパズルでは、5 人の囚人全員は自分以外の 4 人の帽子が全て見えているとします。先ほどのゲーム同様、囚人たちの勝利条件は 1 人でも正解した場合とすることにします。それ以外のゲームの進め方などは、全て先ほどのパズルと同じだとします。さて、これで新たなパズルが 1 つ出来ました。

このパズルを以下のようにまとめおきます。

パズル 2.
囚人の人数が 5 人、帽子の色の数が 5 色であること以外はパズル 1 と同じなゲームにおいて、常に囚人側が勝利する戦略は存在するでしょうか？ ■

パズル 1 では囚人側に必勝戦略が存在しましたが、人数・色の数が変わったこのパズルでも、必勝戦略は存在するでしょうか？

ここでも先を読むのを止めて、一度考えてみてください。

実はパズル 2 にも囚人側に必勝戦略が存在します。しかしその戦略はパズル 1 のようには簡単に説明することはできません。そしてその戦略でなぜ必勝なのか、つまりどのように帽子を被せても 1 人は最低でも正解するかを考えるため、まずパズル 1 についてもう少し詳しく考えてみることにします。

ではあなたがもしパズル 1 で「なぜ 1 人が見えた色と同じ色を、もう 1 人が見えた色と違う色を発言することで、必ず 1 人は正解するのか？」と聞かれれば何と答えますか？

答え方はいくつもあると思いますが、今回は数学を使わない答え方、あえて数学を使った答え方を紹介します。もし数学を使った答え方が理解できたならば、パズル 2 にもすぐに応用できるはずです。

まずは数学を使わない答え方です。パズル 1 における帽子の被せ方のパターン 4 つ（表 1）を見ると、2 人が同じ色を被っているもの（f_1 と f_4）と、2 人が別々の色を被っているもの（f_2 と f_3）の 2 つに分かれます。そして看守がどのように帽子を被せても、2 人が同じ色を被っているか、別々の色を被っているかのどちらかになります。つまり見えた色と同じ色を答えていた囚人 a は、2 人ともが同じ色を被っていると思って発言している、見えた色と違う色を答えていた囚人 b は、2 人が違う色を被っていると思って発言しているということになり、必ずどちらかの思惑通りになるわけですから、常に 1 人が正解することになります。

先ほどの表 1 に、各囚人の思惑と、各帽子の被せ方が 2 人とも色が同じなのか違っているのかの情報も加えた表が以下になります。各囚人の思惑通りになっているときに、確かにその囚人が正解することが確認できると思います。

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a 同じ色を被っている	黒	黒	黒	白	白	黒	白	白
b 違う色を被っている	黒	白	白	白	黒	黒	白	黒
実際の色の状態	2 人は同じ色		2 人は違う色		2 人は違う色		2 人は同じ色	

しかし「何故必勝なのか？」という問いに対して、この答え方では 5 人 5 色の場合になったときには応用できそうにありません。なので少し数学の力を借りることにしましょう。

これまで 2 人の囚人を a, b と名付けてきましたが、ここからはあえて a_0, a_1 とすることにします。別にそのまま a, b でも問題ないのですが、これの意図は後々説明します。そしてここからは色を単に黒・白ではなく、数の $0, 1$ に置き換えます。ここまでの名前の置き換えによって、先ほどの帽子の被せ方の表 1 は以下のように変わります。

	f_1	f_2	f_3	f_4
a_0	0	0	1	1
a_1	0	1	0	1

帽子の色が数に置き換わったことで、囚人の発言した色という情報も数に置き換わります。

	f_1		f_2		f_3		f_4	
	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色	帽子色	発言色
a_0	0	0	0	1	1	0	1	1
a_1	0	1	1	1	0	0	1	0

そこから、各囚人ごとにその見えていた色（数）と発言した色（数）の合計という情報を先ほどの表に追加します。

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

例えば f_1 部分の「合計」項目に 0 という数が入っているかというと、a_0 が見えた a_1 の被っている色（数）である 0 と、a_0 の発言した色（数）である 0 の和が 0 だからです。他の部分にも同じように計算して書き込んであります。

さらに各帽子の被せ方ごとに、その帽子の色（数）の合計という情報も最下段に追加したものが以下の表です。

	f_1			f_2			f_3			f_4		
	帽子色	発言色	合計	帽	発	合	帽	発	合	帽	発	合
a_0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	2
a_1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
帽子色の合計	0			1			1			2		

まず帽子色の合計に書かれている数字を見ると、その合計は $0, 1, 2$ のいずれかです。そして各帽子の被せ方における正解者を見ると、先ほど追加した「合計」項目と帽子色の合計が一致しています。これはどういうことかというと、まず事実として帽子色の合計は必ず偶数（2 で割り切れる数）か奇数（2 で割って 1 余る数）のいずれかになります。そして囚人 a_0 は自分と相手の帽子色の合計が偶数になると思って発言していることになり、逆に囚人 a_1 は自分と相手の帽子色の合計が奇数になると思って発言しているということになります。先ほど囚人の名前を a, b から a_0, a_1 に変えたのは、それぞれの添え字 $0, 1$ が、2 で割って 0 余る数・2 で割って 1 余る数、つまり偶数・奇数を表しています。よって囚人たちは作戦会議では、各色への $0, 1$ の数の割り当てと、それぞれが偶数か奇数かの担当を決めておけばよい、ということになります。もっというと a_0 は帽子色の合計が 2 で割って余り 0 になる場合を担当し、a_1 は帽子色の合計が 2 で割って余り 1 になる場合を担当しています。

向き合って考え込んでいる 2 人の囚人。色が付いた帽子でなく数字が書かれた帽子。囚人には a_0, a_1 って書かれた囚人服。a_0 からは吹き出しがあって、そこには「$a_0 + 0$：偶数ならば a_0？」という内容が書かれている。

たしかに 1 つ前の考え方の方が説明のしやすさはダントツに分かりやすいでしょう。でもこの考え方を理解できれば 5 人 5 色に拡張するのは容易になります。

つまりパズル 2 でも囚人側に必勝戦略は存在します。それは、囚人たちは作戦会議にて 5 色の色に 0 から 4 の数字を割り当てる。そして自分たちにも a_0 から a_4 という役割を 1 つずつ割り当てます。例えば囚人 a_0 の役割とは、見えた色の合計と自分の発言した色の合計を 5 で割った結果が余り 0 になるように発言します。

では試しに以下のように部屋に入ってから看守に帽子を被せられたとします。

	帽子色
a_0	0
a_1	1
a_2	2
a_3	4
a_4	3

そして各囚人が計算した、自分以外の見えた帽子の色の合計を追加します。

	帽子色	見えた色の合計
a_0	0	10
a_1	1	9
a_2	2	8
a_3	4	6
a_4	3	7

そしてそれを元に各囚人が役割に沿って、どのように発言したか、そして正解したかどうかを書き込みます。それが以下のようになります。

	帽子色	見えた色の合計	発言した色	正解？
a_0	0	10	0	○
a_1	1	9	2	×
a_2	2	8	4	×
a_3	4	6	2	×
a_4	3	7	2	×

例えば a_0 はなぜ 0 と発言したかというと、見えた色の合計が 10、そして発言できる 0 から 4 の数のうち、10 と足して 5 で割った時に余りが 0 になるのは 0 だけです。なので 0 と発言しました。またこの時の全囚人の帽子の色の合計は、5 で割って 0 余る数の 10 になっており、そのことからも a_0 が正解できたのが分かります。正解したかどうかを見ると a_0 以外の囚人は不正解でしたが、1 人は正解したので囚人側の勝利です。これ以外にも紙とペンを用意して、好きに帽子を被せてみて、同じように各囚人たちの発言をメモしていってみてください。必ず 1 人は正解していることが確認できます。そして先に全囚人の帽子の色の合計を計算しておけば、どの囚人が正解するかも予想をつけることもできるでしょう。

今回はパズル 1 の人数と帽子の色の数を同時に、2 つから 5 つへ変えて別のパズル（パズル 2）を作りました。そしてどちらのパズルも同様に常に 1 人以上が正解する戦略が存在することが分かりました。なので囚人たちの勝利条件が、正解者が 1 人以上ということならば、どちらのゲームにも囚人側に必勝戦略が存在することになります。帽子パズルでは、「どの囚人も色付きの（もしくは互いに区別のつくどの囚人から見ても判別できる何か、例えば数字とか）帽子を被せられる」と、「どの囚人も自身の帽子の色はわからない」、「どの囚人も自身の色について推測する、または色のいずれか 1 つを発言する」ということが共通している様々なバリエーションがあります。あとでもその具体例を紹介しますが、例えば一定の正解数を要求されるというルールが変わったもの、ルールはこれまで同様なものの、囚人数・色の数の組み合わせが変わったもの（例えば囚人は 2 人、色の数は 5 色なんてのもアリ）、各囚人の帽子の見え方が変わったもの、色の発言が同時でないもの、などなどです。各囚人の帽子の見え方が変わるとは、これまではどの囚人も自分以外の囚人の帽子が全て見えていましたが、例えば（立ち位置を変えるなどして）ある囚人が見えない帽子があるようにしたり、発言が同時でないとは、これまでは全ての囚人が同時に色を発言していましたが、例えばある囚人が発言した後にそれを聞いた残りの囚人が同時に発言するとか、パズル 2 のような状況で a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 の順番に 1 人ずつ発言していく（もちろん自分より前の発言はすべて聞くことができる）などです。動画ならば例えば『Can you solve the prisoner hat riddle? - Alex Gendler』 （https://www.youtube.com/watch?v=N5vJSNXPEwA&t=58s ）や『Prisoner Hat PUZZLE —— 10 Prisoners —— RED & BLUE Hats』（https://www.youtube.com/watch?v=RtidKw-qDxY ）を紹介しておきます。どちらもナレーションは英語ですが、丁寧に作られたアニメーションのおかげでなんとなく意味は分かると思います。

するとルールや設定を組み合わせることで、無限にたくさんのゲームを作ることができ、その中で囚人たちがルールに対する必勝戦略をもつかどうかなどを議論することができます。そして数学を使えば、ある程度一般化された結果を作ることも可能です。例えばパズル 2 の必勝戦略の作り方を再度見てもらうと、別に囚人と色の数は 5 つとは言わず 10 でも 100 でも 1 億でも同じことができます。もちろん例えば 100 ならば、全囚人が 0 から 99 までの数の 99 回の足し算をすることになるので、全員が一度も計算を間違うことがないのか？なんて気になってしまいますが、囚人たちはそんなミスをしないということにしておきましょう。なのでパズル 1 のようなゲームならば、囚人と色の数が同じならば、どんな数になっても囚人側は必勝戦略を持つという一般的な定理が得られます。

帽子パズルは数学に限らず、実は色んな分野の研究者が興味を持っています。どんな研究者がどのように興味を持っているのかなどは 4 節にて後述しますが、最初に述べた通り、囚人の人数や色の数が無限になったらどうなるのかを私は研究してます。そして（公理的）集合論という無限を研究対象とした数学があります。なので集合論の知識を活かしながら、帽子パズルの無限化というテーマに取り組んでいます。では無限にするとどんな定理が成り立つのか、それを紹介するために少しだけ集合の話に寄り道します。とは言っても、数学 A などで学ぶ集合と同じところから出発するので、気軽に読み進めてもらえばと思います。

3　囚人を無限に　-集合をパズルに応用する-

集合とはモノの集まりのことです。なんともふわっとした定義ですが、今回はこれでいきます。この「モノ」というのは何でもいいです。私が持っている文房具のような現実的なモノでも、自然数（$0, 1, 2, 3, \ldots$ という数のこと）という抽象的・概念的なモノでも OK です。ある集合があったとき、その集合を構成しているモノのことを、その集合の要素といいます。そして中学に入って変数を x や y というアルファベットを使って表したように、集合にも名前をつける要領で文房具の集合を S（Stationary から）、数の集合は N（自然数は英語で Natural number なので）とおくことにしましょう。すると集合 S の要素として、私が実際に持っているシャーペンや消しゴムなどがあります。そして集合 N の要素としては $0, 1, 2, 3, \ldots$ がそれに当たります。そして要素の数が有限な集合のことを有限集合、そうでない集合のことを無限集合といいます。だから集合とは必ず有限集合か無限集合かのどちらかになっています。私は文房具を無限に持っているわけではないので、集合 S は有限集合、自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ はどこまでも続くので、そんな自然数全てを要素に持っている集合 N は無限集合です。この集合 N は数学でもよく登場し、$\mathbb{N}$ と表記することが多いです。なのでそれにあわせて、この記事でも以降、全ての自然数の集合を $\mathbb{N}$ で表すことにします。

するとあるゲームに参加する囚人の集合なんてのも考えることができます。そんな集合を P（prisoner から）で表すことにしたならば、パズル 1 では P は a, b のみを要素とした集合、パズル 2 では（役割をその名前と思えば）P は a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 のみを要素とした集合です。では囚人が無限にいる帽子パズルとは P が無限集合になっているようなパズルと考えることができます。なのでいきなり囚人が無限になったらどうなるか考える前に具体的な分かりやすい無限集合を考えてみて、それが P になっているような状況を考えてみましょう。例えば先ほど登場した全ての自

然数の集合 $\mathbb{N}$ が P になっている（すなわち $P=\mathbb{N}$）としましょう。たとえば自然数の 0 を単なる数ではなく、1 人の囚人と思うのです。もっというと、ゲームに参加する各囚人に自然数が 1 つずつ過不足なく割り振られているとします。なので割り振られた数でもってその囚人を表すことにします。先ほどは囚人たちを a や b なんて呼んでいたわけですが、これからは囚人 0、囚人 1、囚人 2、…となるわけです。

では他の設定も決めていきます。まず色の数は今回も 2 色にしておきましょう。そしてどの囚人も自分以外の全ての（つまり無限に）囚人の帽子が見えているとします。そもそも無限に囚人がいる世界ってどうなのか？とか、無限の囚人が入る部屋ってどんな部屋なのか？とか、無限に帽子が見えるとはどんな景色なのか？とか、作戦会議を無限の囚人でやって意見がまとまるのか？とか、この状況にツッコミを入れだすとキリがないのですが、ここでは考えすぎないようにしておきます。

では無事に？ゲームが始められたとしましょう。そして看守が決めた勝利条件はパズル 1 と同じ正解者が 1 人以上というものだったとしましょう。ではパズル 1 と同じように囚人は必勝戦略を持つでしょうか？設定が無限になって一気に状況が想像しにくくなったと思いますが、そう身構えなくてもこれは簡単に必勝戦略が囚人側に存在すると分かります。囚人 0 と囚人 1 にだけ注目すると、囚人 0 は当然囚人 1 の帽子が見えています。すると他の囚人のことは一旦無視して、この 2 人だけに注目すれば、これはパズル 1 と同じになっています。なので囚人 0 と囚人 1 の 2 人は、パズル 1 の囚人 a,b のように役割を決めておけば、この 2 人の中で必ず 1 人が正解します。別にそれ以外の囚人でも状況は変わらないので、別にどの 2 人の囚人がその役割を担っても問題ありません。なので作成会議では、囚人たちはどの 2 人がその役割で発言するかだけ決めておけばよいだけです。ちなみにその 2 人以外の囚人は正解しようが不正解になろうが、勝利することには変わらないため、どんな風に発言するかはてテキトーでよくて、例えば（どんな風に帽子が見えようが）いつでも同じ色を発言するとかで構いません。よって無限になったとはいえ、パズル 1 と同じような勝利条件に対する囚人側の必勝戦略が存在することが分かりました。

しかしもう少し勝利条件を厳しくしても大丈夫です。。たとえば 100 人が正解することが勝利条件になったとします。そしたらば、人が被らないように注意しながら囚人の 100 個の 2 人組を作り、各組がパズル 1 と同じように発言すればよいだけです。例えば 0 から 199 までの囚人を隣り合う数で小さい方から順番に組を作る、つまり 0 と 1、2 と 3、4 と 5、…のようにです。

すると 100 人よりももっと多くの、つまり 1000 人、1 万人、それ以上の正解者数を要求されても囚人側には常に必勝戦略があるとわかると思います。そしてなんと無限に多くの正解数を要求されても必勝戦略が存在します。それはこれまでと同じように 0 と 1、2 と 3、4 と 5、…という風にペアを作っていけば、このペアは無限に作ることができます。

> 互いに向き合って考え込んでいる、無限組の囚人たち

するとこれまでの観察通りペアの数だけ正解する、つまり無限に多くの囚人が正解することになります。この戦略に S_∞ と名付けることにします。無限な帽子パズルでは S_∞ のように、無限に多くの囚人が正解する戦略の存在はそう珍しくありません。

正解者数という観点からは、ここまでに見てきた、どのように帽子を被せても 100 人正解する戦略よりは、どのように帽子を被せても無限に多くの囚人が正解する戦略 S_∞ の方が優れているといえます。では S_∞ よりは優れた戦略はあるのでしょうか？すなわちより厳しい勝利条件はあるのでしょうか？仮にあったとして、そんな勝利条件でも囚人側に必勝戦略はあるのでしょうか？

実はそんな勝利条件は存在します。それは無限に多くの囚人が正解し、かつ不正解者が有限であるという条件になります。先ほど作った戦略 S_∞ はこの勝利条件をみたすことができません。なぜ

ならば、パズル 1 の戦略では 2 人の中で正解も不正解も 1 人ずつ必ずいます。つまりたまたま 2 人が正解することも絶対にありません。これは先ほどの表 2 でも確認できると思います。すると S_∞ では各ペアで正解者・不正解者が 1 人ずついることになり、つまりペアの数だけ正解者と不正解者が、つまり正解者も不正解者も無限にいることになります。なので S_∞ でこの勝利条件のゲームに挑んでも、囚人たちは（たまたまでも）不正解者が有限になることはなく、常に負けることになってしまいます。

しかし上手にやれば、この勝利条件に対しての必勝戦略も作ることができます。つまりどんな風に帽子を被せられても、無限に正解者はいて、かつ不正解者は有限人になるような戦略です。不正解者が有限とは、その数は分からないけれど、無限になっていることはないということです。なので不正解者が 0 人（全員正解）のときもあれば、10 人、100 人のときも、現在の全人類の人口と同じときも、人類には扱えないくらい大きな数、たとえば地球上の砂粒の数といった、そんな有限だけど大きい数になっていることだってあります。しかしどんな時も有限なのです。そんな戦略が存在します。しかしその戦略の作り方を高校までの数学知識で説明することは不可能です。つまり、これを理解するには大学から始まる本格的な集合論をしっかりと勉強する必要があります。どんな知識を使うのかなどの参考になるよう、実際に作り方を説明した記事の情報などは 4 節にて後述することにします。

ではこれ以上は勝利条件を厳しくできないのでしょうか？実はより厳しくすることは可能です。それは不正解者が有限かつ決められた数以下になるというものになります。例えば、不正解者が常に 10 人以下になることが、不正解者が常に有限になることよりも厳しい条件になります。そしてこの勝利条件に対しては、囚人側に必勝戦略は存在しないことを証明できます。つまり先ほどの戦略でゲームに挑めば、たまたま不正解者が 10 人以下になる可能性はあるものの、そうでないこともありえるため必ず勝てる戦略ではないということです。そしてそれ以外のどんな戦略での必勝になることはありません。この事実を示すためにも先ほど同様、色々な数学に関する知識が必要になります。

ここまででの議論を踏まえて、先ほどのパズルでの結果をまとめておきます。

定理 3.
囚人たちが自然数と同じだけいるような（つまり無限に、そして先ほどの記号を使えば $P = \mathbb{N}$ となっているような）、そして勝利条件が不正解者が有限になっているような、それ以外のルールや進め方などはパズル 1 と同じであるゲームにおいて、囚人たちには必勝戦略が存在する。 ■

この定理では囚人の集合を無限集合にするために、P を $\mathbb{N}$ と（つまり $P = \mathbb{N}$）しました。無限集合は $\mathbb{N}$ 以外にもたくさんあります。例えば全ての整数の集合、つまり 0 と正の数（つまり 0 以外の自然数 $1, 2, 3, 4, \ldots$）と負の数（$-1, -2, -3, -4, \ldots$）の全てを要素に持つ集合や、有理数（雑に言うと分数の形で表現できる数）の全てを要素に持つ集合、そして全ての有理数と有理数でない数（無理数）の全てを、つまり実数の全てを要素に持つ集合などなどです。そして数学では $\mathbb{N}$ のように、全ての整数の集合には $\mathbb{Z}$、全ての有理数の集合には $\mathbb{Q}$、全ての実数の集合には $\mathbb{R}$ という記号が使われます。また他にも自然数の中の偶数だけを要素に持つ集合、つまり $0, 2, 4, 6, \ldots$ の全てを要素に持つ集合なども無限集合の一例です。この集合は今回は E（偶数は英語で even number なので）と表すことにします。

では今紹介した無限集合を P にしたような帽子パズルはどうなるのでしょうか？E だと $\mathbb{N}$ から奇数を全て抜いた集合なので、直観的には無限ではあるものの要素の数は $\mathbb{N}$ の半分になってしまったような印象を受けます。逆に整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ の要素に加えて同じ数だけの負の数を加えているので、こちらも無限であるものの $\mathbb{N}$ よりは要素が 2 倍に増えているような印象を受けます。

また、そういう風に考えると有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ や実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は、$\mathbb{N}$ よりもはるかに要素が多くなっていると見えるでしょう。しかし定理 3 は、この無限集合のどれを、つまり $E, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ のどれでも、囚人の集合 P として採用しても成立することが分かっています。さらに、P が無限集合ならば、どんな無限集合であってもこの定理が成立することが分かっています。無限集合はそれこそ無限に作ることができます。$\mathbb{N}$ から要素を 1 つだけ抜いた集合、例えば 0 以外の自然数の集合というのも無限集合であり、この例からも無限集合は無限にあることが分かってもらえると思います。無限集合全てを人間が考え尽くすことは不可能なわけですが、そんな想像もしてなかったような集合でも、無限であればいつでもこんな定理が成り立つという意味で、この定理は非常にスケールの大きなことを主張していると思いませんか？

さらにゲームにおける帽子の色というものも、集合で表現できます。つまり、あるゲームにおける帽子に付けられる色の候補の集合を C（Color から）とおくことにします。するとパズル 1 において C は黒と白のみを要素にもつ集合になります。もちろん紹介した必勝戦略について解説の中では C は $0, 1$ のみを要素にもつ集合になっています。C の要素が 1 つだけならば、つまり被せられる帽子の色が 1 色ならばゲームにならない（常に囚人が全員正解するというつまらない話になる）ので、C はいつでも 2 つ以上の要素をもつ必要があります。なので今後 C はいつでも 2 つ以上の要素を持つとしておきます。

囚人のときと同じようにして、C を無限集合にすることで色の数も無限化することができます。例えば $C = \mathbb{N}$ としてみます。別に帽子パズルでは帽子に色が付いていることは重要でなく、色の代わりに帽子に数字が書いてあっても構いません。事実そういう風にアレンジされたパズルもあります。なので $C = \mathbb{N}$ になったゲームでは、各囚人の被っている帽子には 1 つずつ何らかの自然数が書かれていることになります。

すると先ほどの定理 3 の色の集合という設定を（3 色、4 色と増やしていくのも飛ばしていきなり）無限に変えたら、例えば $C = \mathbb{N}$ となったらどうなるのでしょうか？囚人が無限になっただけでなく、被せられる帽子の種類まで無限になってしまっては、さすがに不正解者が有限で済むような戦略は存在しなくてなってしまうのでしょうか？

それが実はこの場合でも不正解者が有限で済む戦略は存在します。またこの C という集合は有限でも無限でも、どんな集合になったとしても同じように不正解者が有限になるような戦略が存在します。なのでそんな勝利条件のゲームにおいては必勝戦略が存在します。ここまでの結果をまとめておきます。

定理 4.
囚人たちは無限であれば何人でもよい（つまり P が何らかの無限集合になっているような）とし、そして色も何色でもよい（つまり C は有限でも無限でもなんでもよい）とする。そして勝利条件が不正解者が有限になっているような、それ以外のルールや進め方などはパズル 1 と同じであるゲームにおいて、囚人たちには必勝戦略が存在する。 ■

もちろん、囚人たちがどれくらいいるのか、色の数がどれくらいなのか、つまり集合 P と C がどのような集合になったかは、囚人たちはゲーム開始前の作戦相談時には分かっているとしておきます。そして定理 3 はただ 1 つのゲームに対して必勝戦略が存在することを主張していましたが、定理 4 は無数にある P と C の組み合せにおける全てのゲームにおいて必勝戦略が存在することを主張してます。なので定理 4 は無限に多くのゲームに対する定理になります。

ここまでパズル 1 からスタートして囚人の人数や色の数という設定をちょっとずつ変えていき、どのような定理が知られているのか紹介してきました。一般的には囚人の人数に対して色の数を多くすることは、正解数という点で囚人側に不利に働くことが知られています。つまり勝利条件を厳

しくしてきた流れとあわせて、ここまでは少しずつ囚人たちが不利になっていった流れになっています。それにも関わらず、ある勝利条件を満たす必勝戦略が存在し続けたことが、私が帽子パズルにハマった1つのポイントになっています。つまり囚人の人数や色の数を無限に増やすことは、一見問題を解きにくくし、また増やす前に成り立っていた定理がそのまま成り立つかどうか分かりにくくなるにも関わらず、数学を使えば同じような必勝戦略の存在を示せることは驚きでした。

ちなみに囚人の人数や色の数以外にも変えることのできるゲームの設定はいくつかあり、変え方によってはまたまた囚人たちが不利になります。なので定理4の1つ1つのゲームの設定も、まだまだ囚人たちを不利にすることができ、それでもなお不正解者が有限ですむような戦略が存在することも証明することができます。つまりどこまでいっても帽子パズルは考察することができ、そこに定理4のような一般的な定理はどれだけあるのか興味が尽きることがありません。

4 帽子パズルのこれまでと、自分の研究経緯・結果紹介

最後に帽子パズルの簡単な歴史と、自分がどのように研究を始めたのかを、文献紹介もしながら紹介していきます。

帽子パズル、つまり（囚）人が色が付いた帽子を被せられて、その色を推測するという特徴を持つパズルは、数学者かつパズル作家であったマーティン·ガードナーが考案したものであるようです。それは1961年の彼のパズル集『The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions』（https://www.amazon.co.jp/Scientific-American-Mathematical-Puzzles-Diversions/dp/0671245597）に登場します。和訳である『ガードナーの数学娯楽 (完全版 マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 2)』（https://www.amazon.co.jp/dp/4535604223/）も参考に。その後すぐに日本でも紹介されており、それは1966年『頭の体操 第1集 パズル・クイズで脳ミソを鍛えよう』（https://www.amazon.co.jp/%E9%A0%AD%E3%81%AE%E4%BD%93%E6%93%8D%E2%80%95%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB%E3%83%BB%E3%82%AF%E3%82%A4%E3%82%BA%E3%81%A7%E8%84%B3%E3%83%9F%E3%82%BD%E3%82%92%E9%8D%9B%E3%81%88%E3%82%88%E3%81%86-1966%E5%B9%B4-%E3%82%AB%E3%83%83%E3%83%91%E3%83%BB%E3%83%96%E3%83%83%E3%82%AF%E3%82%B9-%E5%A4%9A%E6%B9%96-%E8%BC%9D/dp/B000JA71R6）（現在はこちらの文庫版（https://www.amazon.co.jp/%E9%A0%AD%E3%81%AE%E4%BD%93%E6%93%8D%E3%80%88%E7%AC%AC1%E9%9B%86%E3%80%89%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB%E3%83%BB%E3%82%AF%E3%82%A4%E3%82%BA%E3%81%A7%E8%84%B3%E3%83%9F%E3%82%BD%E3%82%92%E9%8D%9B%E3%81%88%E3%82%88%E3%81%86-%E5%85%89%E6%96%87%E7%A4%BE%E7%9F%A5%E6%81%B5%E3%81%AE%E6%A3%AE%E6%96%87%E5%BA%AB-%E5%A4%9A%E6%B9%96%E8%BC%9D/dp/4334728057/ref=sr_1_1?__mk_ja_JP=%E3%82%AB%E3%82%BF%E3%82%AB%E3%83%8A&crid=LG7K9ISW764F&dchild=1&keywords=%E9%A0%AD%E3%81%AE%E4%BD%93%E6%93%8D+%E7%AC%AC1%E9%9B%86&qid=1629242147&s=books&sprefix=%E9%A0%AD%E3%81%AE%E4%BD%93%E6%93%8D%2Cstripbooks%2C267&sr=1-1 ）が入手しやすい）に登場します。

しかしガードナー考案のパズルは、今回扱った帽子パズルとは少しルールが異なります。原著のものを和訳してみたものを載せておきます。

パズル 5.
A、B、Cの3人の男性に目隠しをして、それぞれに赤か緑の帽子をかぶせると言います。その後全ての目隠しを外し、赤い帽子を見た人は手を挙げてもらい、自分の帽子の色の分かれば、すぐに部屋を出るように言われます。今回はたまたま3つの帽子がすべて赤だったので、3人とも手を挙げます。数分後、他の人よりも鋭いC君が部屋を出て行きました。彼はどうやって自分の帽子の

色を推測したのでしょうか？ ■

なぜ C が自分の色が分かったのかというと、もし C が緑の帽子を被っているとすると、囚人 A からは B の赤と C の緑の帽子が見えていることになります。この状況でも全員が手を挙げることには変わりません。すると A は B の立場にたつと、自分（A) と C の緑の帽子が見えていることになり、B が手を挙げたことから自分（A）が赤を被っていると分かります。しかし実際には A は自身の帽子が分からない素振りをしていたわけなので、C は C 自身が緑を被っていないと推測できた、ということになります。

今回の記事で扱ったパズルたちが囚人たちの正解数に着目していると考えれば、各囚人がそれぞれの立場にたって色々と思考していたパズル 5 は、囚人たちの推論に注目しています。どんな情報を与えればより思考を進められるのか、またどのような情報こそ推論に役立つのかなどなど、その囚人の頭の中でどのように思考を進めているかに特に注目することになります。ガードナーのパズルはそのような研究の題材とされることがあり、それは数学に限らず哲学・情報科学など様々な分野で話題になります。ここからどのような形で議論が進められていくのか、他のパズルとの関連性も含めて解説した『100 人の囚人と 1 個の電球 知識と推論にまつわる論理パズル』（https://www.amazon.co.jp/100%E4%BA%BA%E3%81%AE%E5%9B%9A%E4%BA%BA%E3%81%A81%E5%80%8B%E3%81%AE%E9%9B%BB%E7%90%83-%E7%9F%A5%E8%AD%98%E3%81%A8%E6%8E%A8%E8%AB%96%E3%81%AB%E3%81%BE%E3%81%A4%E3%82%8F%E3%82%8B%E8%AB%96%E7%90%86%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB-%E3%83%8F%E3%83%B3%E3%82%B9%E3%83%BB%E3%83%95%E3%82%A1%E3%83%B3%E3%83%BB%E3%83%87%E3%82%A3%E3%83%88%E3%83%9E%E3%83%BC%E3%82%B7%E3%83%A5/dp/4535788286 ）の「泥んこの子供たち」を是非見てみてください。

では今回扱ったような正解数に注目するような帽子パズルはいつ登場するのでしょうか？それを学問的に取り扱ったのは情報科学研究者エバートの学位論文『Applications of Recursive Operators to Randomness and Complexity』（一般公開はされていない）だと言われています。ガードナーのものとルールが変わることから、正解数に着目するこの帽子パズルをガードナー考案のものと区別するために「エバートの帽子パズル」と呼ぶ人もいます。ちなみにエバートのパズルでは、囚人たちには色を発言する以外に、正解でも不正解にもならない扱いである「パス」という選択肢があったりします。そしてこの論文が出た 3 年後に NewYorkTimes 誌が『Why Mathematicians Now Care About Their Hat Color（なぜ数学者は帽子の色に関心があるのか)』（https://www.nytimes.com/2001/04/10/science/why-mathematicians-now-care-about-their-hat-color.html ）という、エバートの論文の内容も交えつつ、色んな研究者にインタビューもしながら帽子パズルが注目されていった経緯などを紹介する記事を出しました。エバートのこの論文やこの新聞記事によって、パズル好きが知る単なる論理パズルから、学問的な対象としてのパズルという側面も与えられたと考えられており、その前後から帽子パズルを扱った様々な分野の論文が発表されるようになります。

そして数学者による帽子パズルに関する論文がいくつか出だした頃、2004 年にコーネル大学の大学院生ギャベイとオコナーの 2 人によって定理 4 が証明されました。これが無限な帽子パズルの初めての、そしてこれ以降の研究の基礎となる定理になります。つまり帽子パズルそのものは 60 年も前に考案されたにも関わらず、無限化されて本格的に研究され始めたのは、15 年前とかなり最近になります。また数学者以外の一般の人にも無限化されたパズルが広りだしたのは、日本では 2010 年くらいと思われます。その証拠として Yahoo 知恵袋には帽子パズルを無限化したらどうなるかという質問（https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1249042962 ）に対して、定理 4 と同じ方法での回答が見られます。その回答者がいつこの結果を知ったのか、また

は自力で証明したかは謎です。

その後日本でも帽子パズルを扱った書籍や WEB サイト、動画などが増加します。書籍ならば『Newton 大図鑑シリーズ 数学パズル大図鑑』(https://www.newtonpress.co.jp/book/other/201115_MathPuzzlezukan.html) や『とっておきの数学パズル』(https://www.nippyo.co.jp/shop/book/5638.html) (これは『Mathematical Puzzles』(https://www.amazon.co.jp/Mathematical-Puzzles-Pe dp/1568812019) を和訳したもの) で、また論理や証明について解説する本で例として挙げられることもあって、そのような形で『数学と方法』(http://www.tokyo-tosho.co.jp/books/978-4-489-02251-7/) や『証明の楽しみ方 基礎編』(https://www.maruzen-publishing.co.jp/item/b303900.html) などで登場します。また無限化した帽子パズルについて扱った書籍もでました。それが『チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題』(http://www.utp.or.jp/book/b306613.html) です。これは現役の数学者が書いており、定理 4 の証明も書いてあります。

そして 2013 年には、2 人の数理論理学・集合論研究者によって、なんと帽子パズルをテーマにした数学書『The Mathematics of Coordinated Inference』(https://www.amazon.co.jp/Mathematics-Coordinated-Infere dp/3319013327) が出版されます。これによって、単なる既存の数学の応用先として帽子パズルがあるのではなく、帽子パズルそのものを研究する意義も認知されはじめました。このテキストに載っているパズルの結果は、かなり高度な数学が必要であり、その結果もかなり細かく、今回紹介したもののように、高校までの数学で語れるものはわずかです。では、なぜ帽子パズルが数学者以外からも研究者からも注目されたのでしょうか?つまり上記の新聞記事も含めて、この帽子パズル研究の何が世間にウケたのか簡単に解説してみます。

IT 技術の発展とともに「予測」という技術は注目度はあがります。$P = \mathbb{R}$ かつ $C = \mathbb{R}$ な帽子パズル、つまり囚人の数も色の数も実数の数だけいるのようなパズルを考えます。よって囚人たちは 1 つずつ実数が過不足なく割り振れていて、実数が 1 つ書かれた帽子を被せられるようなゲームに挑みます。もし全ての囚人が自分の数と同じ数の帽子を被せれられたとします。するとその様子を高校に習ったような xy 平面に書き込んだとします。つまり x 軸は囚人を、y 軸は色を表しているとし、例えば囚人 1 は 1 と書かれた帽子を被っているので $(1, 1)$ という座標に点を書きます。すべての囚人に対して、この作業を行うと、おなじみの $y = x$ という一次関数のグラフになります。つまり $P = \mathbb{R}$ かつ $C = \mathbb{R}$ という設定の場合に、全ての囚人に 1 つずつ帽子を被せるという行為は、1 つの関数を定めるのと同じことになります。すると全ての囚人が自分の数の 2 倍にあたる数が書かれた帽子を被せられた場合は、その帽子の被せ方は $y = 2x$ という関数になります。同様に全ての囚人が自分の数の 2 乗にあたる数が書かれた帽子を被せられた場合は、その帽子の被せ方は $y = x^2$ という関数になります。

では $y = x$ という帽子の被せ方だったとして、囚人 1 の立場にたつと、この囚人は自分以外の $y = x$ の値が見えている、つまり 1 だけの値が不明な $y = x$ のグラフが見えていると同じ状況です。すると自分以外の帽子の様子から自分の帽子の色を推測するという囚人 1 の行為は、1 での値以外が分かっている関数の 1 以外の値から 1 の値を推測する行為と見ることができます。これがすなわち「予測」というものに対応します。

そういう現実社会での応用への期待を込めて帽子パズル研究は始まりました。そしてそういう土壌があったからこそ、囚人数や帽子の色の数を無限にしてみようという思考実験も生まれることになったのでしょう。そしていざ研究を始めてみれば (現実に応用できるかどうかは別として)、無限を研究対象とする (公理的) 集合論を巻き込んだ数々の定理が見つけられたわけです。

最後に私がなぜ帽子パズルに興味を持ったのか、そして最近はどんな研究をしているのか少し紹介したいと思います。私が帽子パズルを知ったのは大学院修士課程の 2 年目でした。つまりあと一年で修

士論文を書かなくてはいけない状況で、どのようなテーマで論文を書くか多少なりとも考えなくてはいけない時期でした。もともとは大学院に進学するつもりはありませんでした。恥ずかしながら大学院というものを知ったのは大学に入ってからでした。数学科に進学を決めるまでから、大学院に進学するまでの経緯を書いたブログ（https://souji0426.hatenablog.com/entry/2018/05/24/214432）も是非読んでみてください。そして学部 2 年生の頃、当時の学部では学べなかった数学、数理論理学や公理的集合論に興味を持ちました。そしてそれを学ぶには大学院進学するしかなかったのです。公理的集合論は基本的には学部では講義が開かれることがありません。その理由は他の数学の分野に比べて、日本にその研究者が少ないことが原因です。なので数学科に入ったからといって必ず授業で学べるとは限らない分野です。だからこの名前を知らないまま卒業する数学科大学学生だっていると思います（多分私の大学数学科の同級生はほとんどがそう）。大学 2 年生の頃の「集合と位相」という授業で、集合の濃度という概念に出会います。有限集合の場合は、その集合の濃度とはその集合の要素の個数に対応します。つまりパズル 1 における囚人の集合 P や帽子の色の集合 C の濃度はどちらも 2 になります。この濃度という概念は 1 種の集合の大きさと考えることができ、2 つの集合があったとき、その濃度でもって 2 つの集合の大小を比較することができます。なのでパズル 1 における P と C はまったく異なる集合ですが、その濃度は同じです。集合の濃度を比較する場合はその個数を比較するのとは別の方法を用います。その方法で比較しても有限集合同士では要素の個数を比較した場合とでは比較結果が変わることがありません。そして個数を数えないからこそ、濃度の比較は無限集合同士でも可能になる場合があり、実は全ての自然数の集合 $\mathbb{N}$ と全ての実数の集合 $\mathbb{R}$ はどちらも無限集合ですが、その濃度は異なり、$\mathbb{R}$ の方が $\mathbb{N}$ より大きいということが証明できます。つまり個数というものを拡張した濃度という概念を導入すると、無限集合は「いわば無限なのだから比較なんてできない」ということにはならず、比較できる場合があったりします。この事実は実は 100 年以上前にカントールというドイツの数学者によって証明されました。それが集合論の、そして無限を研究する数学の出発点になります。私はこの事実を授業で知ったとき、高校までに習ってきた数学とはまた一風変わった、また遥かに大きいスケールの定理をたくさんもつ数学の世界に魅了されました。

カントールは $\mathbb{R}$ の方が $\mathbb{N}$ より大きいことを証明した後に、$\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ と比べてどれくらい大きいのかが気になりました。つまり $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ のすぐ次に大きいのか、またその次の次に大きいのか、……、という風にです。そしてカントールは $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ のすぐ次に大きい濃度をもつと予想しました。この予想は連続体仮説と呼ばれ、当時の数学の中でも有名な未解決問題として扱われます。しかしカントールはこの予想が正しいことを証明することができませんでした。また当時の他の数学者もそれを証明できず、また反証も、つまりその予想が正しくないということの証明もできませんでした。それもそのはず、連続体仮説は（通常の数学では）証明も反証もできないということが後にゲーデルとコーエンによって証明されました。それまでの連続体仮説に向かう数学者たちの研究が全て無駄になったわけではありませんが、カントールも含めた数学者たちが証明も反証もできなかったのはある意味仕方がなかった、当然だったということになります。よく数学の良さとして「白黒ハッキリしているところ」、つまり「答えがハッキリとでる」点が挙げられますが、これが「かならず証明か反証のどちらかができる」という意味であるならば、この歴史的結果には反する意見になります。連続体仮説のように証明も反証もできない命題（独立命題とも呼ばれます）の存在は、連続体仮説だけが特別なわけでなく、実はこれ以降たくさん見つかっています。独立命題が存在することは、ゲーデルによる不完全性定理が 1931 年に証明したことであり、連続体仮説はその具体例の 1 つになります。こういった研究を行う分野は現代では数学基礎論や数理論理学と呼ばれています。その中にもさらに細かい区分けがあり、私の専門にあたる公理的集合論は数理論理学の中の一分野になります。他には証明論、モデル理論、計算論などが含まれます。集

合論や数理論理学について、高校生向けに紹介する本としては『納得する集合と位相』(https://www.kspub.co.jp/book/detail/1545342.html)や『無限への飛翔 集合論の誕生 (大人のための数学 3)』(https://www.amazon.co.jp/%E7%84%A1%E9%99%90%E3%81%B8%E3%81%AE%E9%A3%9B%E7%BF%94-%E9%9B%86%E5%90%88%E8%AB%96%E3%81%AE%E8%AA%95%E7%94%9F-%E5%A4%A7%E4%BA%BA%E3%81%AE%E3%81%9F%E3%82%81%E3%81%AE%E6%95%B0%E5%AD%A6-%E5%BF%97%E8%B3%80-%E6%B5%A9%E4%BA%8C/dp/4314010428)、『新装版 集合とはなにかーはじめて学ぶ人のために (ブルーバックス)』(https://www.amazon.co.jp/%E6%96%B0%E8%A3%85%E7%89%88-%E9%9B%86%E5%90%88%E3%81%A8%E3%81%AF%E3%81%AA%E3%81%AB%E3%81%8B%E2%80%95%E3%81%AF%E3%81%98%E3%82%81%E3%81%A6%E5%AD%A6%E3%81%B6%E4%BA%BA%E3%81%AE%E3%81%9F%E3%82%81%E3%81%AB-%E3%83%96%E3%83%AB%E3%83%BC%E3%83%90%E3%83%83%E3%82%AF%E3%82%B9-%E7%AB%B9%E5%86%85-%E5%A4%96%E5%8F%B2/dp/4062573326)、『魅了する無限』(https://gihyo.jp/book/2009/978-4-7741-3761-2) などなどをおススメしておきます。

私はこの話を大学の図書館で知り、この「証明も反証もできない」の証明はどのようにやるのか気になりました。禅問答になったりしないように、そもそもどういう風に数学的な証明問題として扱うのか、そしてどんな数学知識を使うのか、またそれがこれまでの、そしてこれからの数学にどんな影響を与えるのか。これらの疑問を自分なりに解決するには、専門知識が足りないことを自覚し、そのためにそんな専門分野の研究者がいる大学院に行こうと思ったのが、数理論理学や集合論を本格的に学びだしたきっかけになります。

一応この連続体仮説の独立性証明に関しては修士 1 年の頃の研究室ゼミで学び終えました(理解したとは言ってない)。なので大学院で知りたかったことがそれなりに知ることができた、そしてそれを踏まえてどんな研究をやっていこうか考える時期にいた自分が出会ったのが、この帽子パズルになります。先ほど紹介した帽子パズルの数学書『The Mathematics of Coordinated Inference』(https://www.amazon.co.jp/Mathematics-Coordinated-Inference-Generalized-Developments/dp/3319013327)には、私の研究室の先生の論文も引用されていました。なのでそのつながりからか、この本のレビュー依頼が先生に届きました。先生はレビューそのものは断ったのですが、本には興味を持ったらしく購入し、これを私の修士の 2 年のゼミ活動のテーマにしてはどうかと提案してくれました。

確か修士 2 年が始まる前の春休みに、この本を私のためにもう一冊購入してもらい渡されたと覚えています。春休み中にこの本を読むことにすっかりハマってしまいました。今回囚人たちを集合で表現したように、今まで単に教わるだけの存在だった、ある意味無味乾燥な数学概念たちが、帽子パズルの問題の中で応用されていく様子から、自分が学んできたこれまでのものが、より身近で実感のある存在に変わっていきました。

もともとパズルそのものは好きではありませんでした。しかしこの必勝戦略を探すという目的は好きでした。つまり対戦もゲームも単に勝負することよりも、そのゲームに必勝方法や効率よい戦い方があるのかとか、そんなことが気になってしまう性格で(ゆえに勝負事にはめっぽう弱く、高校までの部活では練習はキチンとこなせても、試合では結果のでないタイプでした。。。)、そんな自分にとっては、実際にゲームに挑むのではなく、少し上の視点で必勝方法を模索するという試みは非常に楽しいです。パズル 1 で紹介した戦略は、仮に看守が囚人たちの作戦会議を盗み聞きしていて、どの囚人がどんな戦略がくるか分かったとしても、囚人側が必ず勝つことになります。後出しすら許さないこの戦略は、勝負事と捉えた場合でも非常に強力かつ魅力に思えました。

もう 1 つ魅力を感じたのは無限ならではの複雑さです。囚人の数も色の数も有限ならば、必勝戦略があるかどうかは、究極的には時間さえかければパソコンなどの計算機で探索することができます。もちろんこれまでのこの記事の中で「戦略」という言葉はかなりあやふやな使い方をしてきましたが、実は数学的にきちんと「戦略とは何か」を定義することができます。するとパズル 1 にお

いて数学的に定義された個々の囚人の戦略とは、（見えた相手の囚人の帽子の色が何であろうが）常に黒と発言する、常に白と発言する、見えた相手の帽子の色と同じ色を発言する、見えた相手の帽子の色と違う色を発言する、の 4 種類のみになります。その 4 つに g_1, g_2, g_3, g_4 と名付けて表にまとめたのが以下になります。

戦略名	内容
g_1	常に黒と発言する
g_2	常に白と発言する
g_3	見えた相手の帽子と同じ色を発言する
g_4	見えた相手の帽子と違う方の色を発言する

そしてそれらの組み合わせについて省略しつつまとめた表が以下になります。

a の戦略	b の戦略	発言内容	必勝？
g_1	g_1	二人とも常に黒と発言する	×
g_1	g_2	a が常に黒と、b が常に白と発言する	×
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_3	g_4	a が見えた色と同じ色を、b が見えた色と異なる色を発言する	○
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_4	g_3	a が見えた色と異なる色を、b が見えた色と同じ色を発言する	○
g_4	g_4	a も b も常に見えた色と異なる色を発言する	×

つまりこの 4 つの戦略の囚人の数分の組み合わせ、つまり $4^2 = 16$ パターンのうち、2 パターンが探していた必勝戦略になります。パズル 1 のように全ての囚人が自分以外の囚人の帽子が全て見えていた場合、囚人の人数を p、色の数を c とおくと、全囚人の戦略の組み合わせの総数は $(c^{c^{p-1}})^p$ で計算することできます。先ほどの 16 という数は $p = c = 2$ とした $(2^{2^{2-1}})^2 = (2^2)^2 = 4^2 = 16$ で計算できます。では 3 人 3 色になると $(3^9)^3$、4 人 4 色になると $(4^{64})^4$、パズル 2 と同じ 5 人 5 色ならば $(5^{625})^5$ というとんでもない数になります。$(5^{625})^5$ がどれくらいとんでもないかというと、なんと 2185 桁の数になります。2 人 2 色くらいなら 16 パターンしかないので、紙とペンだけで探し出すことも可能でしょうが、3 人 3 色からはもう人力ではお手上げです（この場合でも組み合わせ数は 13 桁の数になっています）。もし 1 秒間に 100 個ずつ、その戦略の組み合わせが必勝戦略になっているかどうか計算してくれるパソコンとプログラムがあったとしても、3 人 3 色の場合でも全ての組み合わせをチェックするのに 1 億年以上かかります。なので 5 人 5 色の場合に必勝戦略を見つけたことは、こういった途方もない時間を回避した点ですごいことです。だからこそ、この計算をより効率良く行うための研究をして論文を書いている人もいるわけですが、私が言いたいのは（何年かかるかとかそういう次元の話ではないにせよ）それでも戦略の組み合わせ総数は有限ということです。なので人類がいつまで計算機を動かし続けるだけなのかを無視すれば、いずれは必勝戦略の探索は完了します。でも囚人の人数が無限になれば、各囚人がとれる戦略の数も無限にあり、さらに戦略の組み合わせ総数も、その囚人の人数分の、つまり無限分の組み合わせがあります。なのでもはや計算機などはあまり役に立たない領域になります。そうなってくると、必勝戦略があるのかどうかは、人間がその頭脳と紙とペンだけで（実際に抽象的に構築してみて）証明をす

る必要があります。またどうしても必勝戦略が作れそうにないならば、全部試すということができないので、これまたそうであることを証明する必要があります。そしてこのどちらかになればまだいいですが、先ほど述べた通り、連続体仮説のように必勝戦略があるかどうかはもしかしたら証明も反証もできない可能性だってあります。実際、そんな無限な帽子パズルもたくさん存在します。かなり途方もない話と思われた方も多いかもしれませんが、それでも現代数学の力を借りれば、定理 4 のようなある種類の無限なパズルに対する一般的な定理だって証明することができます。そのあたりが私が一番帽子パズルに感じた魅力です。

見事に帽子パズルにハマった自分は、先輩研究者からでたばかりの帽子パズル論文『CHOICE AND THE HAT GAME』(https://www.math.uni-hamburg.de/home/geschke/papers/Choice_and_the_hat_game6.pdf)を教えてもらい、その論文の結果を軽く拡張した結果を修士論文『Some remarks on infinite hat guessing games』(https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/224549)に書いて修了しました。

実はこの時点でもゼミの課題本であった『The Mathematics of Coordinated Inference』(https://www.amazon.co.jp/Mathematics-Coordinated-Inference-Generalized-Developments/dp/3319013327)は、(内容が多く、かつ難し過ぎて)3 分の 1 も読めておらず、また、まだまだ読めてない関連論文もたくさんある中での研究終了でした。

その後サラリーマンになり 1 年ほど経って仕事にも慣れたころ、(もともとプレゼンテーションは好きだったので)久々に数学でのプレゼンをする機会(https://wakara.co.jp/event/20170519)を得られました。このプレゼンのために帽子パズルを復習していたころ、帽子パズルに関する新しい定理を思いつきました。それについてもっと考えてみたくなったこと、そして読めてない文献の多さからまだまだ知らないことが多いことを自覚していたこと(もしかしたら思いついた新しい定理も既に誰かが示していた可能性もある)、そして不器用なので働きながらは研究を進めることはできないことから、退職して博士課程に進学することに決めました。

研究室は修士時代と同じところです。そして思いついていた定理から(先生との共著ではありますが)新しい論文『Strategic equivalence among hat puzzles of various protocols with many colors』(arXiv 版 https://arxiv.org/abs/1911.03114)をすぐに書くことができました。この論文については、先日(2021 年 6 月)発売だった数学ファン御用達の雑誌『数学セミナー』(なんと 1962 年から毎月出版されてます)の、2021 年 7 月号(https://www.nippyo.co.jp/shop/magazine/8572.html)で紹介記事を書いていますので、そちらを是非参考にしてください。ただこの雑誌では想定読者を数学科大学 1,2 年生にして書いたので、この記事以上に大学数学の知識を仮定していますし、証明もある程度はキチンと書いてあります。しかし証明を除いても読めるようにしたつもりなので、是非とも手に取っていただけたらと思います。

また最近は帽子パズル以外のパズルを無限化することにも興味をもっています。その営みがどれだけ数学にとってよくあることなのかは『数学セミナー』でも軽く説明しました。私が最近注目したパズルは「悪魔のチェス盤パズル」というもので、これもまた囚人と看守が登場します。パズルの説明や分かりやすい解説には、たとえばこちら(https://sist8.com/chess2you)を見てください。これは 2 人の囚人と、1 枚のチェス盤、そしてチェス盤のマスの数だけのコインが登場します。帽子パズルと同じように、このマスの数が無限になったらどうなるのかというテーマで論文『Devil's infinite chessboard puzzle under a weaker choice principle 』(https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/261453)も書くことができました。これについてもいずれ解説記事を書いてみたいと思います。

私は tayo(https://company.tayo.jp/)で学生インターンとして働かせていただいています。今回の記事はその仕事の一貫として書きましたが、書きたいと思ったのは単に仕事だからだけで

はありません。無限な帽子パズルをテーマに論文を書いたことがあるのは、2021 年 7 月現在、日本だと私と研究室の先生のみになります。また自分が帽子パズルを研究していると公言しているのは私だけだと思います。数学の研究はある程度までなら 1 人でもできますが、どうしても限界はあります。1 人で黙々と研究するイメージが数学にはあるかもしれませんが、数学だって共同作業によって生まれた結果は多々ありますし、大きな問題に立ち向かうには、数学者たちの（時には時代を超えた）連携が必須です。帽子パズルが 2000 年前後に盛り上がったのも、分野はバラバラであってもたくさんの研究者が興味をもったことがキッカケだったと思います。つまり興味を持つ人が増えれば増えるほど、その分野は発展します。無限な帽子パズルは公理的集合論や数理論理学の知識が必須であり、その知識は前にも書いた通り、（研究者が少ないことなどから）学びにくく間口が広いわけではありません。しかし有限な帽子パズルであっても研究者や興味をもつ人が増えてくれば、無限な帽子パズルを勉強してみようとする人もいずれ増えるはずです。私は博士課程がどのような結末で終わろうとも、その後どのような仕事に就こうとも、数学や帽子パズルを研究することは止めないと思います。修士修了後の自分では、研究を進めていくだけの力がありませんでしたが、博士課程を通じてその能力が身に付けば、仕事をしながらでも色んな人と協力して少しずつ研究を進めていけるでしょう（社会人ながら数学界と関わりながら研究を進めている人もたくさんいます)。そんな中で一緒に帽子パズルを勉強してくれる人が現れれば、こんなにも嬉しいことはないでしょう。先日の『数学セミナー』での記事執筆を快諾したのも、そしてこの記事を書いたのも、その思いからです。また『数学セミナー』は先ほど言った通り大学 1，2 年生向けでした。そして今まで帽子パズルについて発表する機会は多かったのですが、研究者向け、そうでなくても数学科生など数学にそれなりに慣れ親しんだ人向けばかりでした。なので一度はそうでない、つまり数学を大学で学んだことのない人に向けて、私の感じている魅力や興味を伝えるような、そんな記事を書いてみたいと思っていました。かなり長くなってしまいましたし、どれだけ伝えられたか不安はありますが、少しでも楽しんでもらえれば、そして無限な帽子パズルを研究している人が日本は少なくとも 1 人はいることは覚えてもらえれば幸いです。そこからまた 1 人、私のように帽子パズルにハマってくれる人が現れることを楽しみにしています。