MATHEMATIQUES APPLIQUEES A L'INFORMATIQUE

Cours théorique (1$^{\text{ère}}$ partie)

Marianne COLLET

Bloc 1 – Informatique – Développement d'applications

Année académique 2025 - 2026

Présentation du cours

Objectifs

L'objectif de cette unité d'enseignement est d'établir ou de renforcer la capacité de raisonnement logique de l'étudiant, de lui permettre d'acquérir et de maîtriser les notions mathématiques sur lesquelles reposent différentes branches de l'informatique, de l'amener à savoir mettre en œuvre ces notions mathématiques et formes de raisonnement dans le cadre de solutions informatiques qui répondent aux besoins des entreprises.

A la fin de ce cours, l'étudiant sera capable de :

- Utiliser des méthodes de raisonnement basées sur la logique mathématique et les mettre en œuvre dans un programme informatique.
- Manipuler des données structurées sous forme d'ensembles, de suites ou de tableaux (matrices).
- Maîtriser la notion de raisonnement itératif, inductif ou récursif.
- Modéliser un problème (ou mettre en œuvre un problème modélisé) au moyen d'un formalisme mathématique.
- Faire la distinction entre une solution mathématique analytique et un calcul numérique par ordinateur.

A quoi servent les mathématiques dans la vie professionnelle ?

- Ouverture d'esprit pour de nombreuses autres matières :
  - Comptabilité & Fiscalité.
  - Informatique.
  - Gestion générale d'une organisation.
  - Ressources humaines.
  - Analyse de problèmes et recherche de solution(s).
  - …
- Sans être un expert des mathématiques, avoir la capacité de discuter avec un expert d'un domaine et de comprendre son propos.
- Les mathématiques sont à la base de grands domaines de l'activité humaine :
  - Géométrie → astronomie, navigation, topographie.
  - Algèbre, arithmétique, logique → informatique.
  - Théorie des groupes → chimie.
  - Calcul différentiel et intégral → physique.
  - Equations différentielles → physique, biologie, économie.
  - Trigonométrie → astronomie, navigation, topographie.
  - Théorie des graphes → GSP, réseaux informatiques (routage), optimisations.
  - Cryptographie → sécurisation d'Internet.

Contenu des différents chapitres

1. **Introduction aux mathématiques**

   Ce chapitre donne un très bref aperçu de l'émergence des mathématiques dans l'histoire humaine. Il s'intéresse également à la notion de preuve mathématique et définit quelques éléments indispensables du vocabulaire des mathématiques.

2. **Révisions**

   Ce chapitre est consacré à la révision de quelques notions fondamentales, en principe acquises durant les études secondaires : ensembles de nombres, puissances et racines, polynômes, factorisation, fractions rationnelles, équations du second degré.

3. **Arithmétique modulaire**

   L'arithmétique modulaire peut se définir comme étant la partie des mathématiques proposant des méthodes qui visent à résoudre des problèmes liés aux nombres entiers ; celles-ci sont basées sur l'obtention du reste de la division euclidienne d'un nombre, appelé ***modulo***.
   Un exemple d'utilisation de cette arithmétique est le comptage des heures, des minutes, des secondes, des angles... L'arithmétique modulaire est aussi utilisée par les ordinateurs ; en effet, la capacité d'un processeur est finie !
   Ce chapitre commence par un rappel portant sur les nombres premiers et la division euclidienne. Il se poursuit par la définition du modulo et se termine par les règles des opérations de base de l'arithmétique modulaire.

4. **Logique mathématique**

   Née à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la logique mathématique est la branche des mathématiques qui a pour objectif l'étude du raisonnement (comme la logique, au sens philosophique), mais en se limitant au langage des mathématiques. Elle permet, par l'utilisation d'objets de base (propositions, formules, prédicats, …) d'énoncer des propriétés, d'étudier leur valeur de vérité, de conduire une démonstration, …
   La logique mathématique contemporaine trouve des applications pratiques très importantes en électronique, en informatique et en ingénierie.
   Ce chapitre est divisé en trois parties : le calcul propositionnel, le calcul des prédicats et le calcul booléen (associé aux tables de Karnaugh).

5. **Ensembles et suites**

   Les notions de base de la théorie des ensembles, partie des mathématiques initiée à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle par le mathématicien allemand Georg Cantor, sont les éléments, les ensembles, l'appartenance.
   La première partie de ce chapitre reprend les définitions de ces objets ainsi que celles des opérations usuelles que l'on peut réaliser sur les ensembles et donne un exemple d'utilisation.

Lorsqu'une série d'éléments est placée sous forme de liste ordonnée, on parle de suite. Il existe plusieurs sortes de suites ; une suite numérique est une succession de nombres réels.
La deuxième partie de ce chapitre décrit les caractéristiques d’une suite ainsi que l’opération de concaténation. Elle se termine par la description d’une suite célèbre : la suite de Fibonacci.

6. Calcul matriciel

Les matrices sont des tableaux de nombres (ou de symboles ou d’expressions algébriques, …) sur lesquels on peut effectuer des opérations de manière plus globale. Le calcul matriciel est alors un outil mathématique performant lorsque l’on souhaite manipuler des paquets de données d’un même type, par exemple, des images.
Ce chapitre est divisé en trois parties. La première est consacrée aux définitions et aux règles du calcul matriciel. La deuxième partie propose une application classique et historique des matrices : la résolution des systèmes d’équations linéaires. La troisième partie est consacrée aux matrices booléennes, utilisées dans la théorie des graphes.

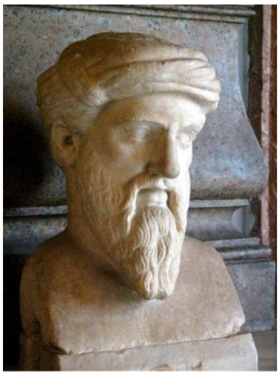
Sources

Le contenu de ce syllabus s’appuie sur les notes de mes prédécesseurs : François Schumacker, Jean-Marie Legros, Henri Schalenbourg et Charlotte Bihain.

La section « Bibliographie » reprend les principaux ouvrages de référence consultés durant la préparation de ce cours.

1 Introduction aux mathématiques

1.1 Les mathématiques et la musique



[1] On raconte que le philosophe grec Pythagore (570 – 480 av. J.C. env.), en se promenant près d'une forge, entendit différents bruits de marteaux.

Certains bruits étaient harmonieux, d'autres non.

S'approchant du forgeron, il arrive à remarquer que les bruits sont harmonieux lorsque les poids des marteaux sont en rapport simple. Par exemple, en prenant un marteau de poids « 1 », tous les autres marteaux « de poids en relation simple » avec celui-ci, c'est-à-dire de poids 1,5 ou 0,5 ou 0,25 ou 0,75, … donnent, ensemble, des sons harmonieux. Alors que deux marteaux de poids « non en relation simple » donnent ensemble des sons non harmonieux.

En appliquant ce principe à un instrument à corde (à cette époque, la lyre), il remarque qu'une corde qui vibre librement donne une note de base et que si on pince cette même corde en son centre, on obtient une note en harmonie avec la note de base (une octave plus haute), à un quart de sa hauteur, on obtient une autre note toujours en harmonie avec la note de base, à un cinquième de sa hauteur, également, …

Pour les musiciens, en divisant la corde en intervalles égaux de 2 à 6 on obtient les principaux accords purs :

- par 2 : c'est l'octave supérieure par rapport à la corde entière (rapport 2/1) ;
- par 3 : c'est la quinte (rapport 3/2) ;
- par 4 : c'est la quarte (rapport 4/3) ;
- par 5 : c'est la tierce majeure (rapport 5/4) ;
- par 6 : c'est la tierce mineure (rapport 6/5).

Pythagore découvre ainsi la relation entre l'arithmétique (les nombres entiers et les fractions) et la musique. Il fait donc le lien entre une loi mathématique (abstraite) et un phénomène physique (concret), les sons.

On dira beaucoup plus tard que les mathématiques sont le **langage de la nature**.

[1] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg

1.2 Théorème de Pythagore

1.2.1 Introduction

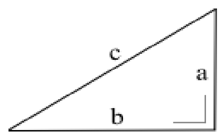
Pythagore ne s'est pas arrêté là !

Bien que les Chinois et les Babyloniens avaient constaté et savaient utiliser la propriété fondamentale des triangles rectangles (*le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés*), ils n'avaient jamais été capables de savoir pourquoi c'était vrai pour tous les triangles rectangles.

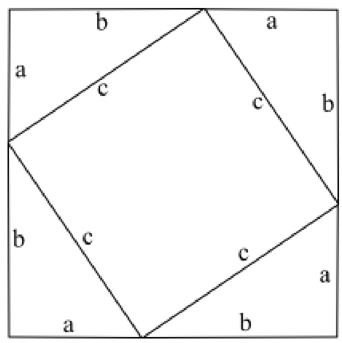
Pythagore a **démontré** que cette propriété est vraie <u>pour tous les triangles rectangles</u> de l'univers.

1.2.2 Preuve de Pythagore

Soit le triangle rectangle de côtés a, b et c (hypoténuse) :



Utilisons ce triangle rectangle pour obtenir la forme suivante :



La longueur des côtés du grand carré obtenu vaut donc $a + b$.

On peut calculer la surface de ce carré de deux manières différentes :

1. La surface vaut évidemment $(a + b)^2$;
2. La surface est égale à la somme des surfaces du petit carré inscrit dans le grand et des quatre triangles inscrits, soit :
   $c^2 + 4 \,.\frac{ab}{2}$ (la surface d'un triangle quelconque est égale à $\frac{\text{base . hauteur}}{2}$).

On peut donc écrire :

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Par simplification, on obtient alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Autrement dit, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. CQFD !

Ce faisant, Pythagore a inventé le concept de « **preuve mathématique** » (**démonstration**).

1.3 Preuves mathématiques et scientifiques

1.3.1 Introduction

Il faut distinguer les notions de preuve mathématique et de preuve scientifique.

Une **preuve mathématique** est une suite de propositions qui sont vraies ou évidentes. Le raisonnement permet d'arriver pas à pas à une conclusion qui est indiscutable, c'est-à-dire valable dans toutes les circonstances pour lesquelles les hypothèses de départ sont vérifiées.

Cette conclusion est appelée **théorème** et sera valable jusqu'à la fin des temps dans l'univers que nous connaissons.

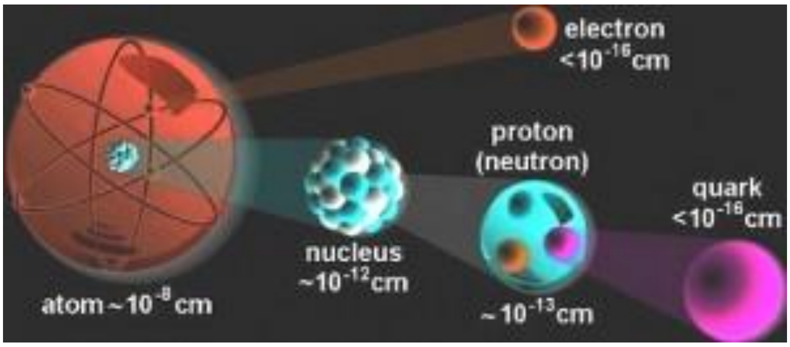
Une **preuve scientifique** est généralement une collection de très nombreuses expériences qui valident une proposition. Le poids de ces nombreuses expériences concluantes devient alors une théorie scientifique qu'on dira **prouvée**.

Une preuve scientifique n'est jamais prouvée avec le même degré d'absolu qu'une preuve mathématique. En fait, elle doit être considérée comme hautement probable sur la base des expériences concluantes disponibles. Comme celles-ci sont basées sur l'observation et la perception, elles sont faillibles et n'offrent finalement qu'une approximation de la vérité. Il reste toujours un élément d'**incertitude**. On peut réduire de plus en plus l'incertitude en faisant des expériences supplémentaires, mais l'incertitude ne disparaît jamais complètement.

Il arrive fréquemment qu'une preuve scientifique soit finalement contredite ou (mieux) englobée dans une nouvelle preuve plus générale ou plus affinée que la précédente.

1.3.2 Les particules élémentaires fondamentales

Donnons un premier exemple des limitations d'une preuve scientifique en nous intéressant à la recherche des particules élémentaires fondamentales en physique.



[2]

[2] http://kabbalahstudent.com/wp-content/uploads/2013/04/bild_quark_atom_grosse.jpg

- Au 19ème siècle, John Dalton a démontré que les *molécules* étaient composées d'*atomes*. Ceux-ci sont devenus les **particules élémentaires fondamentales**.
- Cette situation est restée valable jusqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle lorsque J.J. Thomson (physicien anglais) a découvert l'*électron* (1897). L'atome a donc, dès ce moment, cessé d'être une particule élémentaire fondamentale.
- Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, on a découvert l'image complète de l'atome avec un noyau de *protons* et *neutrons* autour duquel gravitent les *électrons*. Ces trois particules ont alors été déclarées comme les particules élémentaires fondamentales.
- Jusqu'à ce que l'on trouve dans les rayons cosmiques les *pions* et les *muons* et qu'en 1932, on découvre l'*antimatière*. On n'était donc finalement plus du tout certain du nombre de particules élémentaires fondamentales qui existaient réellement.
- Au début des années 60, la mise en service d'accélérateurs de particules très puissants apporte une grande confusion dans le domaine de la physique des hautes énergies : les physiciens découvrent de nombreuses particules, au comportement étrange (*méson K*, …). Comme lors de la découverte de l'atome, les scientifiques soupçonnent alors fortement que ces particules ne sont pas élémentaires. Prédite en 1962, l'existence des *quarks* est mise en évidence en 1964 (Gell-Mann, physicien américain). Ceux-ci sont les constituants des protons, neutrons, pions et muons. Aujourd'hui, ces particules constituent une des bases fondamentales de la physique quantique.
- Simultanément, les physiciens se mettent aussi à douter sérieusement de la pertinence de la théorie quantique des champs pour décrire les interactions nucléaires fortes entre ces particules. On parle alors de la *théorie des cordes*. Les quarks seraient finalement non pas des particules mais des « cordes » d'une taille de l'ordre du milliardième de milliardième de milliardième de milliardième de mètre qui vibreraient d'un certain nombre de manières différentes pour donner naissance aux quarks existants.
- De nouvelles particules continuent à être découvertes. On peut citer le boson de Higgs dont l'existence a été confirmée de manière expérimentale en 2012 et qui a conduit à l'attribution du prix Nobel de Physique à François Englert (physicien théoricien belge) et Peter Higgs (physicien britannique) en 2013. Le 10 juillet 2020, le CERN a annoncé la découverte d'une nouvelle particule physique appelée le tétraquark (encore à valider …).

On voit donc qu'une preuve scientifique ne dure que le temps de lui trouver une autre preuve plus générale ou plus affinée.

1.3.3 L'échiquier tronqué[3]

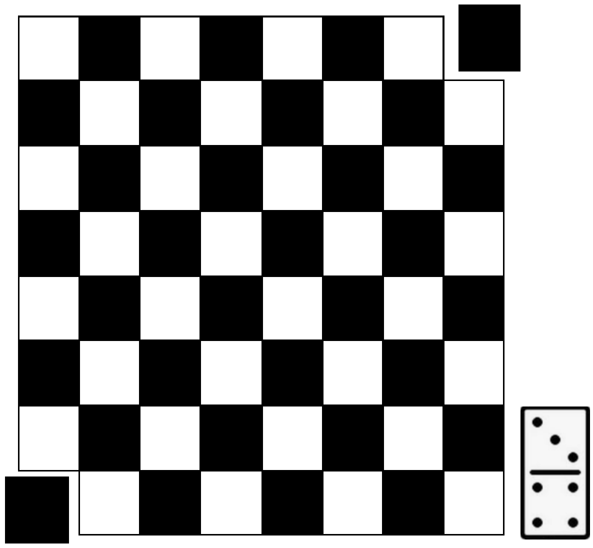
Voici un deuxième exemple qui va nous permettre de comparer les notions de preuve mathématique et de preuve scientifique.

[3] Source : http://theses.univ-lyon2.fr/documents/getpart.php?id=lyon2.2005.nogry_s&part=102762

Soit un échiquier de 64 cases et 32 dominos.
Chaque domino couvre exactement deux cases adjacentes de l'échiquier. Avec 32 dominos on peut donc couvrir l'ensemble des 64 cases de l'échiquier.

Supposons maintenant qu'on retire deux coins diagonalement opposés de l'échiquier, et un domino.
Si vous jugez cela possible, montrez comment vous placeriez sur l'échiquier les 31 dominos restants, de manière à ce que les 62 cases restantes soient entièrement recouvertes.

Si vous jugez que cela est impossible, prouvez-le !



Preuve scientifique

Un scientifique essaiera de résoudre le problème par l'expérimentation et réalisera quelques dizaines voire centaines d'arrangements qui mèneront tous à l'échec.

Il conclura qu'il existe assez de preuves pour démontrer que l'échiquier ne peut pas être couvert.

Toutefois, il ne pourra jamais en être totalement sûr puisqu'il existe des millions d'arrangements différents et qu'il ne sait en expérimenter qu'une partie. Il devra donc se résoudre à vivre avec une légère incertitude.

Preuve mathématique

Les angles retranchés sont inévitablement de même couleur (noir, ici). Il reste donc 32 cases blanches et 30 cases noires.

Chaque domino couvre deux cases voisines qui sont obligatoirement de couleurs différentes (une noire et une blanche).

Donc, quelle que soit la manière dont ils sont disposés, les 30 premiers dominos placés sur l'échiquier tronqué doivent couvrir 30 cases blanches et 30 cases noires.

Par conséquent, il restera toujours un seul domino et deux cases blanches.

Etant donné qu'un domino couvre obligatoirement 2 cases voisines et donc de couleurs opposées, les 2 cases restantes qui sont de même couleur ne peuvent être couvertes par un domino.

Selon cette démonstration, il n'existe <u>aucun</u> moyen de couvrir l'échiquier et on peut en être absolument <u>certain</u>.

1.4 Le langage mathématique

1.4.1 Définition

Une **définition** précise le sens mathématique d'un mot.

Exemple :

« Un ensemble E est fini s'il n'est pas en bijection avec lui-même privé d'un élément. »

On voit tout de suite deux difficultés avec cet exemple :

- tout d'abord il faut avoir défini “ensemble” et “être en bijection” pour que la définition ait un sens ;
- ensuite, il n'est pas immédiat que la définition donnée coïncide avec l'idée intuitive que l'on a d'un ensemble fini !

1.4.2 Enonce (ou proposition)

Un **énoncé** (ou **proposition**) mathématique est une phrase ayant un sens mathématique précis. Cet énoncé peut être vrai ou faux.

Exemples :

1) $1 = 0$;
2) Pour tout nombre réel x, on a $x^2 \geq 0$;
3) $x^3 + x = 10$.

Les trois exemples précédents sont des énoncés.
Le premier est faux, le second est vrai, la véracité du troisième dépend de la valeur de la variable x.

1.4.3 Théorème

Un **théorème** est un énoncé vrai en mathématique.

Il peut toujours être paraphrasé de la manière suivante : “Sous les hypothèses suivantes : .... , la chose suivante est toujours vraie : ... ”.

Dans la pratique, certaines des hypothèses sont omises car considérées comme vraies *a priori* : ce sont les **axiomes**. La plupart des mathématiciens sont d'accord sur un certain nombre d'axiomes qui sont donc la plupart du temps sous-entendus.

Exemple :

« Soit n un nombre entier pair qui n'est pas le carré d'un entier, alors il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = n$. » (En d'autres termes, $\sqrt{n}$ n'est pas un nombre rationnel).

Pour appliquer un théorème à une situation donnée, on doit :

- vérifier que les hypothèses sont satisfaites dans la situation donnée,
- traduire la conclusion du théorème dans le contexte,
- conclure.

Ainsi, prenons $n = 2$. Le nombre 2 n'est pas le carré d'un entier ; donc le théorème nous permet d'affirmer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

En revanche, l'hypothèse n'est pas vérifiée pour $n = 4$ (puisque $4 = 2^2$). Dès lors, le théorème ne permet pas d'affirmer que $\sqrt{4}$ n'est pas un nombre rationnel (ce qui serait d'ailleurs faux !).

1.4.4 Connecteurs logiques

Les **connecteurs logiques** permettent de fabriquer de nouveaux énoncés à partir d'autres.

Les connecteurs logiques utilisés fréquemment sont :

- Non,
- Et,
- Ou,
- Implique ($\Rightarrow$),
- Équivaut ($\Leftrightarrow$).

1.4.5 Quantificateurs

Les **quantificateurs** permettent de transformer un énoncé contenant une *variable* en un énoncé *absolu*. Les deux quantificateurs utilisés fréquemment sont :

- « Il existe » (représenté par le symbole $\exists$),
- « Pour tout » (représenté par le symbole $\forall$).

Exemples :

Considérons les énoncés suivants contenant la variable $x \in \mathbb{R}$:

1) $A(x) : x^2 - 1 = 0$
2) $B(x) : x^2 + x = x(x + 1)$
3) $C(x) : x + 1 = x$

La véracité de chaque énoncé dépend de la valeur de x.

En revanche, les affirmations suivantes sont vraies :

- $\exists x \in \mathbb{R},\ A(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ B(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ non(C(x))$

A contrario, il est faux que : $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x)$.

1.5 Lectures annexes

Les liens entre les mathématiques et l'informatique sont nombreux, les frontières pas toujours faciles à tracer. Pour ceux qui souhaitent en apprendre davantage, le site « Interstices.info » propose une page de références consacrées à ce sujet.

https://interstices.info/jcms/n_50331/informatique-et-mathematiques

2 Révisions

2.1 Les ensembles de nombres

2.1.1 Nombres naturels (N)

L'ensemble N, ou $\mathbb{N}$, est l'ensemble des **nombres naturels** : $0;\ 1;\ 2;\ 3; \dots$

2.1.2 Nombres entiers relatifs (Z)

L'ensemble Z, ou $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des **nombres entiers relatifs**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres entiers munis d'un signe : $\dots ;\ -3\,; -2\,; -1\,; 0\,;\ (+)1\,;\ (+)2\,; (+)3\,; \dots$

Un nombre naturel est donc un entier relatif muni d'un signe positif, ou zéro.

2.1.3 Nombres décimaux (D)

L'ensemble D, ou $\mathbb{D}$, est l'ensemble des **nombres décimaux**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres possédant un nombre quelconque (éventuellement nul), mais <u>fini</u>, de chiffres après la virgule en base décimale (base 10).

Exemples : $-3{,}5\,;\ -2{,}12345\,;\ -1{,}0\,; 1{,}123\,;\ 8{,}75\,; 123{,}456\,;\ \dots$

Un nombre décimal correspond toujours à un nombre entier divisé par une puissance de 10.

2.1.4 Nombres rationnels (Q)

L'ensemble Q, ou $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs, c'est-à-dire $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs, avec b différent de 0.

Exemples : $-\frac{3}{2}\,;\ -1\,;\ -\frac{7}{8}\,;\ 0\,;\ \frac{6}{7}\,;\ \frac{4}{2}\,;\ 5\,;\ \dots$

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

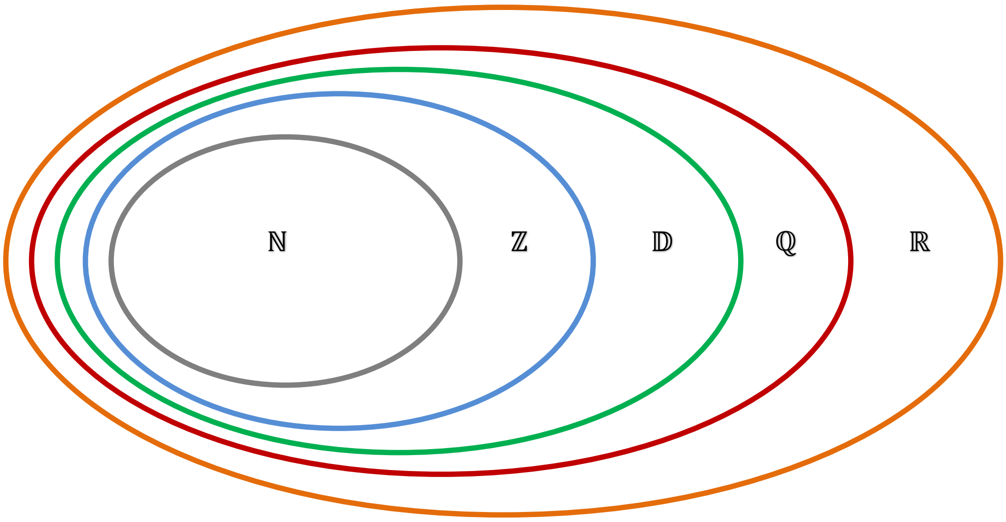
Exemples : $\sqrt{2}\,;\ \log_{10} 2\,;\ \pi\,;\ e\,;\ \dots$

2.1.5 Nombres réels (R)

L'ensemble R, ou $\mathbb{R}$, est l'ensemble des **nombres réels**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent être représentés par une partie entière et un nombre nul, fini ou infini de décimales.

Signalons qu'un nombre rationnel peut lui aussi posséder un nombre infini de décimales, mais celles-ci se répéteront de manière périodique à partir d'un certain rang.

2.1.6 En résumé



2.2 Puissances et racines

2.2.1 Définitions

✓ La **puissance n** ($n \in \mathbb{N}_0$) d'un nombre réel a est le résultat de la multiplication répétée n fois de ce nombre par lui-même :

$$a^n = \underbrace{a\,.\ \ldots\ .\,a}_{n\,fois} \qquad \Rightarrow$$ *on lit : « a exposant n » ; l'expression obtenue comporte n facteurs*

a est appelé la *base*, b est *l'exposant*.

Exemples : $5^3 = 5\,.\,5\,.\,5 = 125$; $\pi^5 = \pi\,.\,\pi\,.\,\pi.\,\pi\,.\,\pi$

Soient a un réel non nul et n un entier positif :

$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$0^n = 0$

Exemples :

- $2^0 = 7^0 = 10^0 = 1$ ([4])
- $2^1 = 2\,;\; 17^1 = 17$
- $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
- $0^2 = 0^7 = 0^{10} = 0$
- $2^4 = 16\,;\; 2^5 = 32;\; (-2)^4 = 16\,;\; (-2)^5 = -32$

Remarques :

- Toute puissance d'un réel positif est positive.
- Toute puissance d'un réel négatif est positive si l'exposant est pair et négative si l'exposant est impair.
- 0^{-n} n'est pas défini.

✓ La **racine $n^{\text{ième}}$** d'un nombre réel a est un nombre réel b tel que $b^n = a$ où n est un entier naturel non nul :

$b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ a s'appelle le *radicand*, n est *l'indice* de la racine.

Exemple : $\sqrt[3]{125} = 5 = 125^{1/3}$ car $5^3 = 125$

Le **radical** est le symbole $\sqrt{\;}$ qui exprime l'extraction d'une racine d'un nombre.

Remarques :

- Si n est pair, alors a doit être positif (condition d'existence de la racine $n^{\text{ième}}$)
- Si n est impair et a est strictement négatif, alors $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{|a|}$

Exemple : $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$

✓ Soient a un réel, n et p des entiers non nuls, on définit les **puissances rationnelles** de a (puissances à exposant fractionnaire) par :

$$a^{n/p} = \sqrt[p]{a^n}$$

$$a^{-n/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}} \quad (a \neq 0)$$

Exemples :

- $2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$
- $2^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

[4] 0^0 (zéro à la puissance zéro) est une expression mathématique qui n'a pas de valeur évidente. Il n'existe pas de consensus quant à la meilleure approche : définir l'expression (en lui donnant la valeur 1) ou la laisser non définie. https://fr.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A9ro_puissance_z%C3%A9ro

2.2.2 Propriétés générales des puissances et des racines

Soient a et b des réels positifs non nuls, n et p des entiers ou des nombres rationnels :

$$(ab)^n = (a\,.\,b)^n = a^n\, b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^p = a^{np}$$

$$a^n a^p = a^n\,.\,a^p = a^{n+p}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{pq}} = \sqrt[n]{a^q}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Exemples :

- $(2\,.\,3)^3 = 2^3.\ 3^3$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
- $(10^2)^3 = 10^6$
- $2^2.2^3 = 2^5$
- $\frac{2^3}{2^4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$
- $\sqrt[3]{64} = (\sqrt[3]{8})^2$
- $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$
- $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$

Remarque :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier, alors :

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Exemple : $\sqrt[3]{35} \neq \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$

Attention aussi :

- $\sqrt{(-3)(-4)} \neq \sqrt{-3}\,\sqrt{-4}$
- $\sqrt{(-5)^2} \neq (-5)^{2/2}$
- $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$ MAIS $\sqrt[3]{-8} \neq \sqrt[6]{(-8)^2}$

Il faut être prudent lorsque l'on manipule des nombres négatifs ! (cf. remarque page précédente)

Autres exemples :

- Pour élever au carré une quantité qui est le produit de plusieurs facteurs, on élève chaque facteur au carré, ce qui revient à doubler les exposants de ces facteurs :

  $(3\ .\ 5^2\ .\ 7^3)^2 = (3)^2\ .\ (5^2)^2\ .\ (7^3)^2 = 3^2\ .\ 5^4\ .\ 7^6$

- Réciproquement, pour extraire la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs, on extrait la racine carrée de chaque facteur, ce qui revient à diviser par 2 les exposants des facteurs :

  $\sqrt{3^2\ .\ 5^4\ .\ 7^6} = \sqrt{3^2}\ .\ \sqrt{5^4}\ .\ \sqrt{7^6} = 3\ .\ 5^2\ .\ 7^3$

2.2.3 Calcul avec les racines

On ne peut additionner ou soustraire que des racines semblables ; c'est-à-dire de même indice et de même radicand.

Exemples :

- $\sqrt[3]{a} + 8\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a}$
- $7\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192} = 7\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} = 9\sqrt[3]{3}$

Pour multiplier et diviser des racines, on les réduit au même indice et on applique les propriétés.

2.2.4 Remarque importante à propos de la racine carrée

La racine carrée est définie pour les nombres réels positifs (*cf. domaine de définition de la fonction « racine carrée »*) ; ce qui signifie que le résultat de son application est un nombre positif.

Exemple : $\sqrt{9} = 3 \implies$ on peut obtenir -3 en appliquant l'**opposé** de $\sqrt{9}$ $\left(-\sqrt{9} = -3\right)$!

En revanche, il existe **deux** nombres réels dont le carré est égal à un nombre donné.

Exemple : $3^2 = (-3)^2 = 9$

On peut également écrire : $x^2 = 9$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = -3$
(il s'agit d'une équation du deuxième degré pour laquelle b et c sont nuls ; voir § 2.6)

$$x^2 = 9 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \iff \pm x = 3 \iff x = \pm 3\text{, car } \sqrt{x^2} = |x| = \pm x$$

2.2.5 Exercices : simplifier et calculer

1. $\sqrt{300} =$

2. $\sqrt{32} =$

3. $\sqrt{\frac{7}{27}} =$

4. $\sqrt[3]{125\ 000} =$

5. $\sqrt{27} - \sqrt{3} =$

6. $4\sqrt{45} - 6\sqrt{20} =$

7. $\sqrt{8x^4} =$

8. $\sqrt[3]{125a^3b^9} =$

9. $\sqrt{18x^{4n}y^{4n+1}} =$

10. $\frac{\sqrt[4]{a^6}\ .\ b^2}{a\ .\ b^{-3}} =$

2.3 Polynômes

2.3.1 Définitions

✓ Un **polynôme** en x, y, z, … est une *somme de monômes* de la forme :

$$P(x, y, z) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{m_i} y^{n_i} z^{p_i}$$

Dans chaque monôme :

- a_i est un coefficient,
- x, y, z, … sont les variables,
- m_i, n_i, p_i, … sont des entiers positifs.

- ✓ Souvent, on considère des polynômes à une seule **variable $\boldsymbol{x}$** :

$$P(x) = \sum_{1=0}^{n} a_{n-i}\, x^{n-i}$$

$$= a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{(= polynôme ordonné décroissant)}$$

- ✓ Deux monômes sont **semblables** lorsqu'ils possèdent la même partie littérale, c'est-à-dire les mêmes variables élevées aux mêmes puissances ; seul le coefficient peut varier.

  Exemple : $-3x^3y^2,\ 5x^3y^2\ \ et\ -x^3y^2$ sont des monômes semblables.

- ✓ Un polynôme sera qualifié de **réduit** s'il ne comporte pas de monômes semblables.

  Exemples :

  - $4x^2 - 2x + 7$ est un polynôme réduit ;
  - $4x^2 + 4x - 6x + 7$ n'est pas un polynôme réduit.

- ✓ Le **degré** d'un polynôme <u>réduit</u> est la plus haute puissance de x dont le coefficient est <u>non nul</u>.

  Exemple : le polynôme $4x^3 - 7x + 2$ est de degré 3.

- ✓ Un polynôme est dit **complet** lorsque <u>**TOUS**</u> les coefficients du polynôme sont non nuls.

  Exemples :

  - le polynôme $7x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x + 2$ est un polynôme complet ;
  - le polynôme $7x^4 - 3x^2 + 7x + 2$ n'est pas un polynôme complet.

- ✓ La **valeur** d'un polynôme **en un point** se calcule en remplaçant x par la valeur de ce point.

  Exemple :

  Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - x + 5$;
  la valeur de $P(x)$ pour $x = 2$ est $P(2) = 3\,.\,2^3 - 2 + 5 = 27$.

2.3.2 Opérations de base

2.3.2.1 Egalité

Deux polynômes <u>réduits</u> sont égaux si et seulement si les termes de même degré ont des coefficients égaux.

Exemple : $-3 + 4x^2 + 7x = ax^2 + bx + c$ si et seulement si $a = 4\ ,\ b = 7\ et\ c = -3$.

2.3.2.2 Addition et soustraction

La somme (soustraction) de deux polynômes s'obtient en additionnant (soustrayant) les termes semblables.

Exemples :

- $(2x^2 - 7x + 3) + (4x^2 - 5) = (2x^2 + 4x^2) \ - 7x + (3 - 5) = 6x^2 - 7x - 2$
- $(2x^2 - 7x + 3) - (4x^2 - 5) = (2x^2 - 4x^2) \ - 7x + \big(3 - (-5)\big) = -2x^2 - 7x + 8$

2.3.2.3 Multiplication

On applique la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, puis on regroupe les termes semblables.

Exemple :

$$\begin{aligned}
&(2x^2 - 7x + 3)(4x^2 - 5) \\
&= (2x^2 . 4x^2) + \big(2x^2 . (-5)\big) + \big((-7x) . 4x^2\big) + \big((-7x) . (-5)\big) + (3 . 4x^2) + \big(3 . (-5)\big) \\
&= 8x^4 - 10x^2 - 28x^3 + 35x + 12x^2 - 15 \\
&= 8x^4 - 28x^3 + 2x^2 + 35x - 15
\end{aligned}$$

2.3.2.4 Division

La division de deux polynômes fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 3 (voir division euclidienne).

2.3.2.5 Exercices : opérations de base sur les polynômes

1. $(3x^3 - 7x^2 + x + 2) + (x^4 + 5x^2 - 7) =$

2. $(12x^4 - 5x^3 + 2x) - (4x^4 + 7x^3 - x^2 + 4) =$

3. $(2x^3 - 4x^2 + x + 6)(x^2 - 5x + 2) =$

2.3.3 Produits remarquables

Binômes

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (= *binômes conjugués*) Différence de deux carrés

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Somme de deux cubes

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ Différence de deux cubes

Trinômes

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Quadrinômes

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

2.4 Factorisation

2.4.1 Introduction

Factoriser un polynôme, c'est transformer une somme de monômes en un *produit de facteurs* ; chacun d'eux étant un nouveau polynôme de degré plus petit.

Exemple : $32a^2 - 2b^2 = 2(4a - b)(4a + b)$

Pour y parvenir, il existe un certain nombre de méthodes :
(*celles-ci sont présentées dans l'ordre dans lequel il est conseillé de les envisager*)

- ✓ ***Mise en évidence simple*** : tous les termes ont un facteur commun qui est mis en évidence.

  Exemple : $13ax - 26bx^2 + 39cx = 13x(a - 2bx + 3c)$

- ✓ ***Mise en évidence double*** : après une ou plusieurs mise(s) en évidence simple(s), un facteur commun à tous les groupes apparaît et peut à son tour être mis en évidence.

  Exemples :

  - $\underbrace{3u + 5uv} + \underbrace{3 + 5v} = u(\underline{3 + 5v}) + (\underline{3 + 5v}) = (3 + 5v)(u + 1)$
  - $2x^2 - 3xy^2 + 4xy - 6y^3 = \underbrace{2x^2 + 4xy} - \underbrace{3xy^2 - 6y^3} = 2x(\underline{x + 2y}) - 3y^2(\underline{x + 2y})$
    $= (x + 2y)(2x - 3y^2)$

✓ ***Application des produits remarquables*** : on repère un ensemble de termes (binôme, trinôme, quadrinôme) qui possède la forme caractéristique d'un produit remarquable ; on remplace ces termes par le produit remarquable correspondant.

Exemples :

- $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$
- $\frac{4}{9}x^6 - 4ax^3 + 9a^2 = \left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 - 2\,.\left(\frac{2}{3}x^3\right).(3a) + (3a)^2 = \left(\frac{2}{3}x^3 - 3a\right)^2$

✓ ***Regroupements de certains termes*** : le but ici est de faire apparaître des facteurs communs ou une identité remarquable

Exemples :

- $\underbrace{25r^2 + (2r-3)(5r-4) - 16} = 25r^2 - 16 + (2r-3)(5r-4)$
  $= \underline{(5r-4)}(5r+4) + (2r-3)\underline{(5r-4)} = (5r-4)(5r+4+2r-3)$
  $= (5r-4)(7r+1)$
- $x^2 + y^2 + 2xy - z^2 = (x+y)^2 - z^2 = (x+y-z)(x+y+z)$

✓ ***Artifices de calculs*** : il est parfois intéressant de transformer l'expression à factoriser pour se ramener à une des situations précédentes.

On peut citer les techniques suivantes :

1) Ajouter et soustraire un même terme, de manière à pouvoir réaliser un groupement.

   Exemple : $4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2$
   $= (2x^2+1)^2 - (2x)^2 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$

2) Dédoubler un terme, de manière à pouvoir réaliser un groupement.

   Exemple : $x^2 + 3x - 4 = x^2 - x + 4x - 4$
   $= x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x+4)$

3) Effectuer, puis réaliser un groupement.

   Exemple : $r(r+t) - s(s-t) = r^2 + rt - s^2 + st$
   $= (r^2 - s^2) + t(r+s) = (r-s)(r+s) + t(r+s) = (r+s)(r-s+t)$

2.4.2 Exercices : factorisation et mise en évidence

Factoriser **au maximum** les polynômes suivants (il ne doit rester que des produits de facteurs) :

1. $a^2 - 9 =$

2. $a^2x^2 - b^2x^2 =$

3. $16x^2y^2 - 121y^4 =$

4. $x^{11}y^4 - x^5y^{10} =$

5. $a^7b - ab^7 =$

6. $(a-b)^2 - c^2 =$

7. $(a+b)^3 + (a-b)^3 =$

8. $a^2 + 4ab + 4b^2 =$

9. $4a^2 - 4a + 1 =$

10. $x^4 + 2x^2 + 1 =$

11. $4x^4 + x^2y + \frac{y^2}{16} =$

12. $\frac{4}{3}a^7x + 8a^4x^5 + 12ax^9 =$

13. $\frac{9a^4b}{4} - a^3b^2 + \frac{a^2b^3}{9} =$

14. $a^2 - 2ab + b^2 - 1 =$

15. $x^2 - 2x - y^2 + 1 =$

16. $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y =$

17. $b^2y - b^2 - a^2y + a^2 =$

18. $6x + 3z + 2xy + yz =$

2.4.3 Méthode de Horner

2.4.3.1 Loi du reste

Théorème : « Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par le binôme $(x - a)$ est égal à la valeur numérique de $P(x)$ en a, c'est-à-dire $P(a)$. »

En effet, si on écrit le polynôme sous la *forme euclidienne (voir chapitre suivant)*, cela donne :

$$P(x) = (x - a) \,.\, Q(x) + R$$

où $Q(x)$ est le polynôme-quotient et R le reste de la division par $(x - a)$.

Donc, si $x = a$, $P(a) = R$.

On dira qu'un polynôme en x est **divisible** par $(x - a)$ si et seulement si $P(a) = R = 0$.
La valeur a est alors appelée **racine** du polynôme $P(x)$.

Il découle de ce théorème que, si on obtient une racine a d'un polynôme $P(x)$, on peut écrire ce dernier sous la forme $P(x) = (x - a) \,.\, Q(x)$.

$R = P(a) = 0$	$\Leftrightarrow$	a est une racine de $P(x)$	$\Leftrightarrow$	$(x - a) \,.\, Q(x)$ est une factorisation de $P(x)$

2.4.3.2 Méthode de Horner

L'objectif de la **méthode de Horner** est de transformer le polynôme $P(x)$ en un *produit de facteurs* de la forme :

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \dots$$

C'est donc aussi une méthode de factorisation.

Etape 1 – Rechercher une racine entière a de $P(x)$

Considérons le polynôme (*ordonné et complet*)

$$P(x) = x^4 + 4x^3 - 81x^2 - 16x + 308$$

Pour trouver une racine entière, on procède comme suit :

1. Identifier le **terme indépendant** (= terme qui ne dépend pas de x).
   Une racine entière de $P(x)$ sera toujours un *diviseur du terme indépendant*.
2. Déterminer tous les diviseurs du terme indépendant.
3. Chercher un diviseur dont la valeur annule le polynôme.

Dans notre exemple, le terme indépendant est 308.
Les diviseurs de 308 sont : ± 1, ± 2, ± 4, ± 7, ± 11, ± 14, ± 22, ± 28, ± 44, ± 77, ± 154 et ± 308.
La valeur 2 est une racine du polynôme, car $P(2) = 0$.

En vertu du théorème précédent, le polynôme $P(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = (x - a) \,.\, Q(x) = (x - 2) \,.\, Q(x)$$

Dans notre exemple, $Q(x)$ sera un polynôme de degré 3 de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Rappel : $degré\big(P(x)\,.\,Q(x)\big) = degré(P(x)) + degré(Q(x))$

Etape 2 – Calculer le quotient $\boldsymbol{Q(x)}$ de la division de $\boldsymbol{P(x)}$ par $\boldsymbol{(x-a)}$

Pour déterminer les coefficients a, b, c et d, nous devons *diviser* le polynôme $P(x)$ par $(x - a)$.

Pour ce faire, nous allons utiliser la **méthode de Horner** en construisant le tableau suivant :

		1	4	-81	-16	308	← *coefficients de $P(x)$*
racine entière →	2		2	12	-138	-308	
		1	6	-69	-154	0	

$2 \times 1 = 2$ $\qquad$ $4 + 2 = 6$

1. On commence par reporter les coefficients du polynôme $P(x)$ dans la première ligne du tableau, dans l'ordre des exposants décroissants et ***en indiquant* $\boldsymbol{0}$ *si le monôme est absent***, en laissant la première colonne libre.
2. On place la racine entière dans la case de gauche sur la deuxième ligne.
3. On reporte le premier coefficient dans la case correspondante de la troisième ligne.
4. Ensuite, on répète les actions suivantes jusqu'à arriver à la dernière case :
    a) Multiplier le coefficient de la dernière ligne par la racine entière ;
    b) Reporter le résultat dans la case située à droite sur la deuxième ligne ;
    c) Effectuer l'addition des nombres de la première et la deuxième ligne et reporter le résultat dans la troisième ligne.
5. Les coefficients de $Q(x)$ correspondent aux nombres inscrits dans la troisième (et dernière) ligne du tableau.

On obtient donc : $P(x) = (x - 2)\,(1x^3 + 6x^2 - 69x - 154)$ *Attention aux signes !*

$$= (x - 2)\,(x^3 + 6x^2 - 69x - 154)$$

Etape 3 – Poursuivre le processus avec $\boldsymbol{Q(x)}$

On recommence la méthode avec le polynôme $Q(x) = x^3 + 6x^2 - 69x - 154$
pour lequel -2 est une racine entière (diviseurs de 154 : $\pm1, \pm2, \pm7, \pm11, \pm14, \pm22, \pm77, \pm154$).

On peut donc écrire : $Q(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$

Le tableau de Horner dans ce cas est :

	1	6	-69	-154
-2		-2	-8	154
	1	4	-77	0

$Q(x)$ s'écrit donc : $Q(x) = (x + 2)(x^2 + 4x - 77)$

Et on obtient : $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4x - 77)$.

On peut répéter une dernière fois le processus de Horner avec $(x^2 + 4x - 77)$, de manière à obtenir une factorisation complète de $P(x)$.

Alternativement, on peut aussi résoudre l'**équation du second degré** $x^2 + 4x - 77 = 0$ en effectuant le calcul du « discriminant » (voir section 2.6 ci-après) ;
on trouve que les 2 racines sont $x = 7$ et $x = -11$.

Finalement, on obtient :

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-7)(x+11)$$ *Attention aux signes !*

2.4.3.3 Exercices : factoriser par la méthode de Horner

1. $3x^3 - 7x^2 + x + 2 =$

   Résolution guidée

   Le terme indépendant de cette expression est ……..

   Les diviseurs de …. sont : … … … … …

   Une racine de $3x^3 - 7x^2 + x + 2$ est $x =$ …….

   Le tableau d'Horner est donc :

   On peut en conclure que : $3x^3 - 7x^2 + x + 2 = (\ x\ \ldots\ \ldots\ )(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ )$

   Les racines du trinôme (… … … … … …) ne sont pas entières (aucun diviseur ne convient) ; on ne peut pas continuer avec Horner ! (*pour plus d'information, voir corrigé*).
   On peut cependant les déterminer à l'aide du discriminant (à faire comme exercice après avoir vu le point 2.6).

Les exercices suivants pourront être réalisés sur les pages vierges suivantes.

2. $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 =$

3. $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6 =$

4. $3x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 23x - 6 =$

5. $23x + x^3 - 10x^2 - 14 =$

2.5 Fractions rationnelles

2.5.1 Définition

Une **fraction rationnelle** est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes :

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

Pour qu'une telle fraction ait un sens, il faut que son dénominateur *ne soit pas nul*.

Il est donc indispensable de déterminer les **conditions d'existence** (CE) de cette fraction, c'est-à-dire trouver les valeurs de x qui sont susceptibles d'annuler le dénominateur et les exclure.

Exemple : $\frac{-4x}{x^2+5x-14} = \frac{-4x}{(x-2)(x+7)}$

CE : $x^2 + 5x - 14 \neq 0 \iff x \neq 2$ et $x \neq -7$

Ainsi, la fraction $\frac{-4x}{x^2+5x-14}$ a du sens lorsque $x \neq 2$ et $x \neq -7$.

2.5.2 Exercices : simplifier les fractions rationnelles

Simplifier au maximum les fractions rationnelles suivantes et énoncer les *conditions d'existence*.

Méthode

- Factoriser les polynômes du numérateur et du dénominateur ;
- Enoncer les conditions d'existence de cette fraction (= dénominateur non nul) ;
- Simplifier en divisant le numérateur et le dénominateur par leur(s) facteur(s) commun(s).

1. $\frac{axy-bxy}{ab-b^2} =$

   CE :

2. $\frac{a-3}{2a^2-18} =$

   CE :

3. $\frac{9(a^2)^2-16}{6a^2b^2-8b^2} =$

CE :

4. $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab} =$

CE :

5. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} =$

CE :

6. $\frac{(a^3)^2-(b^3)^2}{(a+b)^3(a^3-b^3)} =$

CE :

7. $\frac{(x+y)^2}{3\,(x^2-y^2)} =$

CE :

8. $\frac{40x^3-5}{12x^2+6x+3} =$

CE :

9. $\frac{5x^2+35x+60}{5x^2-5x-60} =$

CE :

10. $\frac{x^4-3x^3+3x^2-x}{x^3-3x+2} =$

CE :

2.6 Equations du second degré

2.6.1 Définition

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$ (*la plus haute puissance de son inconnue est* 2).

Résoudre l'équation revient à déterminer <u>toutes</u> les valeurs de x qui vérifient l'égalité ci-dessus.

2.6.2 Méthode du discriminant

La méthode de résolution classique d'une équation du second degré commence par le calcul du **discrimant** (aussi appelé réalisant) de l'équation ; celui-ci est donné par la formule : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Plusieurs types de solution se présentent, selon que la valeur du discrimant est positive, nulle ou négative.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 :

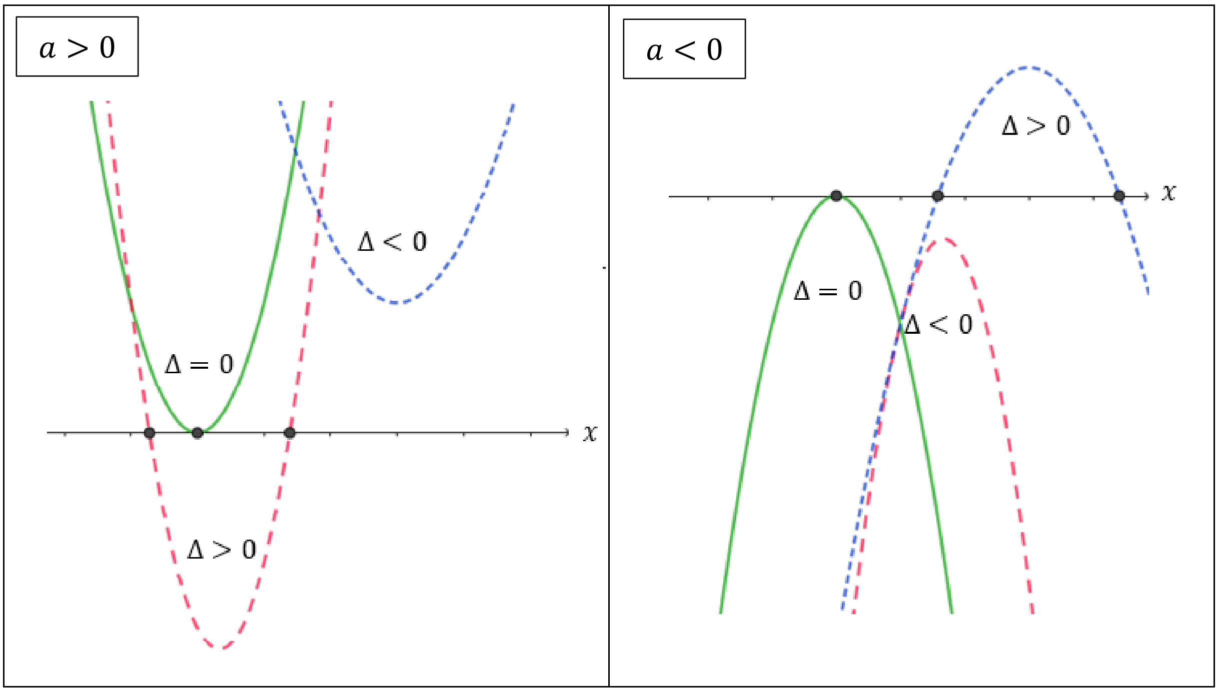
  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double :

  $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine réelle.

Un polynôme du second degré correspond à l'équation d'une parabole.
La valeur du discrimant nous indique si la parabole coupe l'axe des x en 2 points ($\Delta > 0$), est tangente à l'axe des x ($\Delta = 0$), ou enfin si elle ne coupe pas l'axe des x ($\Delta < 0$).



2.6.3 Propriétés des racines

Les racines d'une équation du second degré possèdent les propriétés intéressantes suivantes :

- Produit : $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$;
- Somme : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$;
- Trinôme : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (= ***factorisation***).

2.6.4 Exercices : résoudre les équations du second degré par la méthode du discriminant

1. $5x^2 - 5x + 1 = 0$

   $\Delta =$ ……………………………………… $\Rightarrow$ ………………

   $x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ ………………………… $\Rightarrow S = \{ \dots\dots ; \dots\dots \}$

   Factorisation : $5x^2 - 5x + 1 = \dots\ (x \dots\dots\dots\dots\dots)(x \dots\dots\dots\dots\dots)$

2. $3x^2 + x + 4 = 0$

$\Delta =$ ……………………………………. $\Rightarrow$ ……………….

$x_1 =$ ……………………….. et $x_2 =$ ……………………….. $\Rightarrow S =$ ……………….

Factorisation : $3x^2 + x + 4 =$ …

3. $x^2 + 6x + 9 = 0$

$\Delta =$ ……………………………………. $\Rightarrow$ ……………….

$x_1 =$ ……………………….. et $x_2 =$ ……………………….. $\Rightarrow S =$ ……………….

Factorisation : $x^2 + 6x + 9 =$ …

4. $3x^2 - 9x + 6 = 0$

$\Delta =$ ……………………………………. $\Rightarrow$ ……………….

$x_1 =$ ……………………….. et $x_2 =$ ……………………….. $\Rightarrow S =$ ……………….

Factorisation : $3x^2 - 9x + 6 =$ …

En utilisant les propriétés des racines :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 x_2 = \text{………………………..} \\ \\ x_1 + x_2 = \text{………………………..} \end{array}\right\} \quad x_1 = \text{………………………..} \text{ et } x_2 = \text{………………………..}$$

car …. $\Rightarrow S =$ ……………….

5. $x^2 - 14x + 49 = 0$

$\Delta =$ ……………………………………. $\Rightarrow$ ……………….

$x_1 =$ ……………………….. et $x_2 =$ ……………………….. $\Rightarrow S =$ ……………….

Factorisation : $x^2 - 14x + 49 =$ …

6. $2x^2 - 14x + 12 = 0$

$\Delta =$ …………………………………… $\Rightarrow$ ………………

$x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ ………………………… $\Rightarrow S =$ ………………

Factorisation : …

7. $7x^2 + 21x - 28 = 0$

$\Delta =$ …………………………………… $\Rightarrow$ ………………

$x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ ………………………… $\Rightarrow S =$ ………………

Factorisation : …

8. $(3x - 4)(x + 1) = 9x^2 - 24x + 16$

……………………………………

……………………………………

……………………………………

$\Delta =$ …………………………………… $\Rightarrow$ ………………

$x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ ………………………… $\Rightarrow S =$ ………………

9. $(x + 2)^2 - (3x - 1)^2 = 0$

……………………………………

……………………………………

……………………………………

$\Delta =$ …………………………………… $\Rightarrow$ ………………

$x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ ………………………… $\Rightarrow S =$ ………………

10. $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

$\Delta =$ …………………………………… $\Rightarrow$ ………………

$x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ ………………………… $\Rightarrow S =$ ………………

Factorisation : …

2.6.5 Exercices : définir les conditions d'existence et chercher les solutions possibles

1. $\frac{4x-5}{2x+6} = -3$ **CE** :

$\Rightarrow S =$

2. $\frac{2}{2x+3} = \frac{5x+2}{3}$

3. $\frac{8-2x^2}{3x^2-9x-30} = 0$

4. $\frac{5x^2-20x+20}{5x^2-20} = 0$

2.6.6 Etude du signe d'un trinôme

Soit un trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$.

Le signe de la valeur du trinôme en un point x donné peut être déterminé de la manière suivante :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles x_1 et x_2.

x		x_1		x_2	
$T(x)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double $x_1 = x_2$.

x		$x_1 = x_2$	
$T(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine réelle.

x	
$T(x)$	signe de a

Remarque : ces tableaux peuvent être mis en parallèle avec la figure présentée au paragraphe 2.6.2.

2.6.7 Exercices : étude de signe

Etudier le signe des trinômes suivants :

1. $x^2 + 4x + 3$ $\Delta =$ …………………………… $\Rightarrow$ ……………………………

   $x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ …………………………

x					
$T(x)$					

2. $x^2 + 10x + 20$ $\Delta =$ …………………………… $\Rightarrow$ ……………………………

   $x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ …………………………

x					
$T(x)$					

3. $3x^2 - 2x - 4$ $\Delta =$ …………………………… $\Rightarrow$ ……………………………

   $x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ …………………………

x					
$T(x)$					

4. $-x^2 + 6x - 7$ $\Delta =$ …………………………… $\Rightarrow$ ……………………………

   $x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ …………………………

x					
$T(x)$					

5. $-4x^2 + 3x + 1$ $\Delta =$ …………………………… $\Rightarrow$ ……………………………

   $x_1 =$ ………………………… et $x_2 =$ …………………………

x					
$T(x)$					

6. $-5x^2 - 4x + 1$ $\Delta =$ .... $\Rightarrow$ ....

$x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

x					
$T(x)$					

7. $x^2 - 10x + 25$ $\Delta =$ .... $\Rightarrow$ ....

$x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

x					
$T(x)$					

8. $-25x^2 - 10x - 1$ $\Delta =$ .... $\Rightarrow$ ....

$x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

x					
$T(x)$					

9. $-8x^2 + 3x - 1$ $\Delta =$ .... $\Rightarrow$ ....

$x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

x					
$T(x)$					

10. $4x^2 + 3x + 2$ $\Delta =$ .... $\Rightarrow$ ....

$x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

x					
$T(x)$					

3 Arithmétique modulaire

3.1 Introduction

Carl Friedrich Gauss *[Wikipédia]*

Due au mathématicien, astronome et physicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), **l'arithmétique modulaire** est un domaine des mathématiques, et plus précisément de la théorie algébrique des nombres, qui étudie les propriétés des opérations arithmétiques effectuées dans un ensemble fini de nombres entiers. L'idée sous-jacente est de manipuler les ***restes*** de la division des nombres par quelque chose, plutôt que sur les nombres eux-mêmes. On est ainsi amené à travailler dans un espace de nombres entiers limité par le diviseur choisi.

Dans cette arithmétique, on choisit un nombre entier n (que l'on appelle ***modulo***) et on remplace tous les autres nombres entiers par le reste de leur division par n. Ainsi, en arithmétique modulo 2, on ne travaille qu'avec les entiers 0 et 1 ; 0 correspondant aux nombres pairs et 1, aux nombres impairs. Dans l'ensemble des entiers modulo 3, seuls les nombres 0, 1 et 2 sont utilisés ; les nombres $0, 3, 6, 9,$ … sont équivalents à 0, les nombres $1, 4, 7, 10,$ ... sont équivalents à 1, et les nombres $2, 5, 8, 11,$ ... sont équivalents à 2. En arithmétique modulo 7, on ne travaille qu'avec les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 …

Utilité de l'arithmétique modulaire

Nous utilisons tous les jours cette arithmétique pour compter les heures, les minutes, les secondes, les angles...

En effet, si on compte les minutes par exemple, on compte de 0 à 59 minutes ! (et non de 0 à 60 minutes).

Quand on effectue une « preuve par neuf » (à l'école primaire), on fait de l'arithmétique modulaire (un peu, sans le savoir !) ; le diviseur est alors le nombre 9.

Cette arithmétique est utilisée depuis la nuit des temps avec la division dite **« euclidienne »**.

Le Chat Geluck

Au XX^{ème} siècle, l'apparition des ordinateurs va remettre l'arithmétique modulaire à l'honneur : l'arithmétique de base de ceux-ci est nécessairement modulaire puisqu'elle travaille sur des mots mémoire de taille fixe (la capacité d'un processeur n'est pas infinie). Le développement de l'informatique et des applications industrielles va aussi soulever un certain nombre de questions qui seront résolues par la mise au point d'algorithmes pour l'arithmétique modulaire (ces applications nécessitent l'utilisation d'opérations sur des grands nombres).

L'arithmétique modulaire est utilisée dans de nombreux domaines comme le traitement du signal, l'algorithmique, la cryptologie. D'un point de vue « cursus informatique », on peut mentionner :

- **la théorie des nombres** : on utilise notamment l'arithmétique modulaire pour démontrer certaines propriétés des nombres premiers et pour étudier les algorithmes de factorisation de nombres entiers. C'est aussi la base du petit théorème de Fermat sur les nombres premiers.
- **les codes de correction d'erreurs** : l'arithmétique modulaire est utilisée pour vérifier l'intégrité des données transmises. En effet, lorsqu'on envoie des données sur un réseau, il y a un risque que certaines informations soient corrompues pendant la transmission. Pour détecter ces erreurs et les corriger, on utilise des codes de correction qui permettent de vérifier si les données reçues correspondent bien aux données envoyées.
- **la cryptographie** : l'arithmétique modulaire est utilisée pour protéger les informations confidentielles, en assurant la sécurité lors de la transmission de messages. En utilisant des algorithmes de chiffrement basés sur l'arithmétique modulaire, on peut rendre les données illisibles pour toute personne qui n'a pas la clé de déchiffrement.

Ce chapitre présente les bases de cette arithmétique axée sur les entiers. Après un rappel portant sur les nombres premiers et la division euclidienne, les notions de modulo et de congruence sont introduites. Il se termine par la définition des opérations de base, en mettant l'accent sur l'algorithme d'Euclide.

3.2 Les nombres premiers

3.2.1 Introduction

Essayons de factoriser au maximum quelques nombres naturels et observons ce qui se passe…

- $12 = 2 . 6 = 2 . 2 . 3$
- $30 = 2 . 15 = 2 . 3 . 5$
- $39 = 3 . 13$
- $175 = 5 . 35 = 5 . 5 . 7$
- $187 = 11 . 17$
- $67 = 1 . 67$

On constate que certains nombres finissent par émerger $(2, 3, 5, 7 \ldots)$ et présentent la caractéristique qu'ils ne se factorisent pas ; ce sont les **nombres premiers**.

3.2.2 Définition

Un **nombre premier** est un nombre naturel p dont la seule factorisation possible est $p = 1\,.\,p$. En d'autres termes, un nombre premier est uniquement divisible par 1 et par lui-même ; il admet exactement 2 diviseurs distincts entiers et positifs.

Exemple : 13 est un nombre premier, car ses seuls diviseurs entiers et positifs sont 1 et 13.

Un nombre qui n'est pas premier est dit **composé**.

Par convention, on déclare que le nombre 1 *n'est pas un nombre premier*.

2 est le seul nombre premier pair !

Les vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 sont : $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89$ et 97.

3.2.3 Théorèmes

Théorème 1 – Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre naturel n strictement plus grand que 1 *se décompose de manière* ***unique*** en un produit de nombres premiers, à l'ordre près des facteurs.

Exemples : $7\,748 = 2^2.3\,.149$; $1\,100 = 2^2.5^2.11$

Il n'existe aucune autre factorisation de $7\,748$ ou $1\,100$ sous forme de produits de nombres premiers, excepté par réarrangement des facteurs ci-dessus.

Théorème 2 – Existence de facteurs premiers

Tout nombre naturel n strictement plus grand que 1 admet un diviseur premier.
De plus, son plus petit diviseur strictement supérieur à 1 est un nombre premier.

Théorème 3

Tout nombre naturel n strictement plus grand que 1 est soit un nombre premier soit un produit de nombres premiers.

Théorème 4

Il existe une *infinité* de nombres premiers.

Pour la petite histoire, le plus grand nombre premier connu est : $2^{82\,589\,933} - 1$.
Ce nombre comporte 24 862 048 chiffres lorsqu'il est écrit en base dix.
Il a été découvert le 7 décembre 2018 par le GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search).
[Wikipédia]

3.2.4 Calcul des nombres premiers et test de primalité

Si nous savons qu'un nombre naturel quelconque est décomposable en facteurs de nombres premiers (Théorème 1), nous ne connaissons pas à ce jour de loi simple permettant de déterminer le *n*ième facteur premier. De même, il n'est pas toujours aisé de décider rapidement si un nombre est premier, surtout s'il est très grand ; il est pratiquement plus facile de vérifier sa présence dans une table de nombres premiers.

Pour déterminer si un nombre naturel n est un nombre premier (**test de primalité**), on peut essayer de le diviser par tous les nombres naturels compris entre 2 et $n-1$ (= test le plus simple et le plus ancien !). S'il est divisible par l'un d'entre eux, il est composé ; sinon, il est premier. Cette méthode, dite des divisions successives, est pratique quand il s'agit de tester des petits nombres, mais peu efficace pour de grands nombres.

Une première amélioration de cette méthode consiste à ne tester que les nombres naturels compris entre 2 et la ***racine carrée de n***. Cette méthode s'explique à partir du Théorème 2. La liste des diviseurs d'un nombre naturel n, ordonnée par la relation $\leq$, commence par 1 et se termine par n ; le Théorème 2 nous dit que le deuxième diviseur de cette liste est toujours un nombre premier. Regardons quelques exemples :

Entier		**Liste de ses diviseurs**
1	$\longrightarrow$	$[\,1\,]$
7	$\longrightarrow$	$[\,1 \mid \underline{\mathbf{7}}\,]$
24	$\longrightarrow$	$[\,1, \underline{\mathbf{2}}, 3, 4 \mid 6, 8, 12, 24\,]$
56	$\longrightarrow$	$[\,1, \underline{\mathbf{2}}, 4, 6, 7 \mid 8, 14, 28, 56\,]$
75	$\longrightarrow$	$[\,1, \underline{\mathbf{3}}, 5 \mid 15, 25, 75\,]$
100	$\longrightarrow$	$[\,1, \underline{\mathbf{2}}, 4, 5, 20, 1 \mid 0, 25, 50, 100\,]$

Le plus petit diviseur premier est souligné et indiqué en gras

$\mid$ *= milieu*

Nous pouvons observer une certaine symétrie ; en effet, si p est un diviseur de n, alors il existe q tel que $n = p\,.\,q$, et q est aussi un diviseur de n.
Ce qui peut être reformulé de la manière suivante :

> Dans la liste ordonnée des diviseurs de n, le produit de deux diviseurs placés symétriquement par rapport au milieu de la liste des diviseurs est égal à n ,

et nous conduit à la propriété suivante :

> Un nombre naturel strictement plus grand que 2 qui n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{n}$ est premier.

Cet algorithme reste naïf et inefficace car il réalise encore de nombreuses divisions inutiles. En effet, si un nombre n'est pas divisible par 2, il est inutile de tester s'il est divisible par 4, 6, 8...
En fait, il suffit de tester sa divisibilité par tous les nombres **premiers** inférieurs à sa racine carrée.

Le **crible d'Ératosthène** est une méthode, reposant sur cette idée, qui fournit la liste des nombres premiers inférieurs à une valeur fixée n :

1. On forme la liste des entiers de 2 à n ;
2. On retient comme « nombre premier » le premier nombre de la liste non encore barré (le premier dans ce cas est 2) ;

3. On barre tous les entiers multiples du nombre k retenu à l'étape précédente, en commençant par son carré (puisque $2 \times k, 3 \times k, \dots, (k-1) \times k$ ont déjà été barrés en tant que multiples de 2, 3, ...) ;
4. On répète les deux opérations précédentes (2 et 3, c.-à-d. on retient le prochain nombre non barré et on barre ses multiples) ;
5. Dès que k excède la racine carrée de n, on termine l'algorithme.

Les nombres premiers inférieurs à n sont les nombres qui restent non barrés à la fin du processus.

Cet algorithme est de *complexité algorithmique exponentielle*. En pratique, le crible d'Ératosthène détermine la primalité de tous les nombres inférieurs ou égaux à n.

Si seule la primalité de n est souhaitée, une variante parfois plus efficace consiste à ne tester la divisibilité de n que par des petits nombres premiers dans une liste fixée au préalable (par exemple $2, 3$ et 5), puis par tous les nombres entiers inférieurs à la racine carrée de n qui ne sont divisibles par aucun des petits nombres premiers choisis ; cela amène à tester la divisibilité par des nombres non premiers (par exemple 49 si les petits premiers sont 2, 3 et 5 et que n excède 2500), mais le choix d'un nombre suffisant de petits nombres premiers doit permettre de contrôler le nombre de tests inutiles effectués.

3.2.5 Décomposition en facteurs premiers

Pour **décomposer** un nombre naturel n en un produit de facteurs premiers, une méthode naïve consiste à tenter de le diviser successivement par tous les nombres premiers p inférieurs à sa racine carrée en démarrant avec 2. Si le nombre n est divisible par p, on garde le facteur p, puis on poursuit le processus avec le quotient n/p et le diviseur premier p. On s'arrête lorsque p^2 devient supérieur au quotient n/p.

Exemple : factoriser le nombre $4\,200$

$$\begin{aligned}
4\,200 / \mathbf{2} &= 2\,100 \\
2\,100 / \mathbf{2} &= 1\,050 \\
1\,050 / \mathbf{2} &= 525 \\
525 / \mathbf{3} &= 175 \\
175 / \mathbf{5} &= 35 \\
35 / \mathbf{5} &= 7 \ [STOP, car\ 5^2 = 25 > 7\ ] \\
\mathbf{7} &
\end{aligned}$$

Réponse : $4\,200 = 2\,.\,2\,.\,2\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7 = 2^3.\,3\,.\,5^2.\,7$

3.2.6 Exercices

1. Trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100 au moyen de la méthode du crible d'Eratosthène.

   $\sqrt{100} = \ldots\ldots.$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Déterminer si les nombres suivants sont premiers : $113,\ 143,\ 147,\ 241,\ 323,\ 581,\ 613.$

3. Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : $4\ 410$, $1\ 296$, $2\ 310$, $7\ 685$, 127.

3.3 Division euclidienne

3.3.1 Définition

En arithmétique, la **division euclidienne** correspond à la division entière qui, à deux nombres entiers appelés respectivement *dividende* et *diviseur*, fait correspondre deux autres entiers appelés *quotient* et *reste* de la division euclidienne du dividende par le diviseur.

Formellement,

Si m et n sont des entiers, avec $n \neq 0$, il existe des entiers uniques q et r tels que

$m \;=\; n\,.\,q \;+\; r$ et $0 \;\leq\; r < \;|n|$, m étant le **dividende** et n le **diviseur**.

Les entiers q et r sont, quant à eux, le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne de m par n.

Exemples :

- La division euclidienne de 37 par 5 donne un quotient égal à 7 et un reste égal à 2 :
  $37 = 5\,.\,7 + 2$

Dividende	Diviseur
Reste	Quotient

37 $\underline{-35}$	5
2	7

- La division euclidienne de -37 par 5 donne un quotient égal à -8 et un reste égal à 3 :
  $-37 = 5\,.\,(-8) + 3$
- La division euclidienne de 37 par -5 donne un quotient égal à -7 et un reste égal à 2 :
  $37 = (-5)\,.\,(-7) + 2$, car $37 = 5\,.\,7 + 2$ (*)
- La division euclidienne de -37 par -5 donne un quotient égal à 8 et un reste égal à 3 :
  $-37 = (-5\,).8 + 3$, car $-37 = 5\,.\,(-8) + 3$ (*)

  (*) Lorsque n est négatif, on effectue d'abord la division euclidienne de m par $-n$; ensuite on remplace n par $-n$ et q par $-q$. Le reste r est inchangé.

  Remarque importante : dans tous les cas, le reste r est positif ou nul.

3.3.2 Division euclidienne de deux polynômes

La **division euclidienne** d'un polynôme $P(x)$ par le polynôme $D(x)$ consiste à déterminer les polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$P(x) = D(x)\,.\,Q(x) + R(x)$$

$P(x)$ étant appelé le **dividende**, $D(x)$ le **diviseur**, $Q(x)$ le **quotient** et $R(x)$ le **reste**.

Le **degré du quotient** $Q(x)$ est égal au degré de $P(x)$ − degré de $D(x)$.

Pour effectuer la division de $P(x)$ par $D(x)$:

- On réduit les deux polynômes et on les ordonne par ordre décroissant,
- On complète si nécessaire le polynôme $P(x)$ avec les puissances manquantes de x,
- On effectue la division d'une manière similaire à celle de deux nombres,
- On s'arrête lorsque le reste a un degré inférieur à celui de $D(x)$.

Exemple : $(3x^3 + 4x^2 - 19x + 10)/(3x - 2) = x^2 + 2x - 5$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +4x^2 & -19x & +10 & 3x-2 \\ \cline{5-5}
-(3x^3 & -2x^2) & & & x^2+2x-5 \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 & -19x & & \\
 & -(6x^2 & -4x) & & \\ \cline{2-3}
 & & -15x & +10 & \\
 & & -(-15x & +10) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

3.3.3 Exercices : division euclidienne de polynômes

1. $(2x^5 + 9x^4 - 22x^2 + 13x - 2)/(2x^2 + 5x - 2) =$

2. $(12x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 17x^2 - 28x + 17)/(3x^3 - 4x + 2) =$

3. $(10x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x - 2)/(5x^2 - 3x + 2) =$

3.4 Modulo

3.4.1 Définition

Le reste de la division euclidienne de deux nombres entiers porte également le nom de **modulo**.

Ainsi, on dira que 2 est le *modulo* de 42 divisé par 8 et on écrira : $42 \ \boldsymbol{mod}\ 8 = 2$.

Par définition de la *division euclidienne*, la valeur du modulo est positive ou nulle et inférieure à la valeur absolue du diviseur : $0 \leq m \ \boldsymbol{mod}\ n < |n|$. Cette propriété semble assez évidente lorsque m et n sont deux naturels (entiers ≥ 0) ; elle l'est moins si on considère des entiers négatifs.

De nombreux langages de programmation proposent l'opérateur « modulo ».
Dans les langages Java et Python, cet opérateur est représenté par le symbole « % ».
Ainsi, « $42 \ mod\ 8$ » s'écrit « $42 \ \%\ 8$ ».

***Attention** : les langages de programmation et autres programmes informatiques tels qu'Excel peuvent donner une valeur du modulo différente de la définition euclidienne lorsque le diviseur ou le dividende est **négatif**.*

	Div. euclidienne	***Excel***	***Java***	***Python***	$\boldsymbol{\frac{m}{n}}$
$42 \ mod\ 8$	$2\ (q = 5)$	$2\ (q = 5)$	$2\ (q = 5)$	$2\ (q = 5)$	5,25
$42 \ mod\ -8$	$2\ (q = -5)$	$-6\ (q = -6)$	$2\ (q = -5)$	$-6\ (q = -6)$	−5,25
$-42 \ mod\ 8$	$6\ (q = -6)$	$6\ (q = -6)$	$-2\ (q = -5)$	$6\ (q = -6)$	−5,25
$-42 \ mod\ -8$	$6\ (q = 6)$	$-2\ (q = 5)$	$-2\ (q = 5)$	$-2\ (q = 5)$	5,25

Pour Excel et Python, le quotient est la **partie entière par défaut** (plancher / floor) de $\frac{m}{n}$, c.-à-d. le plus grand entier $\leq \frac{m}{n}$; le reste aura toujours le même signe que le diviseur. Pour Java, le quotient est la **troncature** de $\frac{m}{n}$, c.-à-d. le nombre entier obtenu en laissant tomber les décimales.

3.4.2 Diviseurs et multiples

3.4.2.1 Définitions

Si $a \neq 0$ et $b \ mod\ a = 0$, on dit que a est un **diviseur** de b et que b un **multiple** de a.

On écrit « $\boldsymbol{a} \,|\, \boldsymbol{b}$ », ce qui signifie « a divise b »,

en langage mathématique : $\exists\, q \in \mathbb{Z} : b = q\, .\, a$ (Il existe un entier q tel que $b = q\, .\, a$).

Il s'agit d'un *énoncé* (ou *proposition*) et non du résultat numérique de la division de b par a.

3.4.2.2 Propriétés

Quels que soient les entiers non nuls a, b, c et d, on a :

1. $(a \mid b) \land (b \mid c) \Rightarrow a \mid c$ « Si $(a \mid b)$ et $(b \mid c)$, alors $a \mid c$ »
2. $(a \mid b) \land (a \mid c) \Rightarrow a \mid b + c$
3. $(a \mid b) \land (a \mid c) \Rightarrow a \mid b - c$
4. $(a \mid b) \lor (a \mid c) \Rightarrow a \mid bc$ « Si $(a \mid b)$ ou $(a \mid c)$, alors $a \mid bc$ »
5. $(a \mid b) \land (c \mid d) \Rightarrow ac \mid bd$
6. $1 \mid a$
7. $a \mid a$

3.4.3 Congruences

3.4.3.1 Définition

Soient a et b deux nombres entiers et n un nombre naturel positif.

Si la division euclidienne de a par n donne le même reste que celle de b par n,

on dit que $\boldsymbol{a}$ **est congru à** $\boldsymbol{b}$ **modulo** $\boldsymbol{n}$ et on note : $a \equiv b \ (mod\ n)$.

Exemple : $27 \equiv 13 \equiv 6 \ (mod\ 7)$

3.4.3.2 Propriétés

1. $a \equiv b \ (mod\ n) \Leftrightarrow a - b$ est divisible par n,

   c'est-à-dire, $a \equiv b \ (mod\ n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \ (mod\ n)$

2. Si $a \equiv \alpha \ (mod\ n)$ et $b \equiv \beta \ (mod\ n)$, alors :

   $a + b \equiv \alpha + \beta \ (mod\ n)$

   $a\ .\ b \equiv \alpha\ .\ \beta \ (mod\ n)$

Cela signifie donc que dans le contexte des congruences « modulo n », on peut utiliser l'addition et la multiplication des nombres entiers, mais aussi remplacer n'importe quel nombre entier a par le plus petit nombre entier positif ou nul *congru à* a *modulo* n.

Exemples :

- $43 \equiv 1 \ (mod\ 6)$,
- $-42 \equiv 6 \ (mod\ 8)$
- $456\,789 \equiv 9 \ (mod\ 10)$

3.4.4 Exercices

1. Calculer les modulos suivants (au sens de la division euclidienne) :

    a. $17 \; mod \; 7 =$ ………………………………., car $17 =$ ……………………………………

    b. $8426 \; mod \; 11 =$

    c. $-25 \; mod \; 8 =$

    d. $369 \; mod \; -7 =$

    e. $-58 \; mod \; -11 =$

2. Démontrer les propriétés 1 à 5 de la section 3.4.2.2.

    1) $(a \,|\, b) \wedge (b \,|\, c) \Rightarrow a \,|\, c$

3.5 Arithmétique modulaire

3.5.1 Addition modulo n

Pour réaliser l'**addition modulo n** de deux nombres, on procède comme pour une addition classique, si ce n'est que dans le contexte des congruences on peut simplifier les calculs en remplaçant chacun des deux opérandes ainsi que le résultat final par le plus petit nombre entier positif ou nul qui lui est *congru modulo* n.

Exemple : addition modulo 5

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$1 + 4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$ car $1 + 4 = 5 = 1\ .\ 5 + 0$

$4 + 3 \equiv 2 \ (mod\ 5)$ car $4 + 3 = 7 = 1\ .\ 5 + 2$

$123 + 456 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \ (mod\ 5)$

3.5.2 Multiplication modulo n

Pour réaliser la **multiplication modulo n** de deux nombres, on procède comme pour une multiplication classique. Ici encore, le contexte des congruences permet de simplifier les calculs.

Exemple : multiplication modulo 5

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4
2	0	2	4	**1**	3
3	0	3	**1**	4	2
4	0	4	3	2	**1**

$3\ .\ 4 \ \equiv 2 \ (mod\ 5)$ car $3\ .\ 4 = 12 = 2\ .\ 5 + 2$

$548\ 659\ .\ 895\ 683 \equiv 4\ .\ 3 \equiv 2 \ (mod\ 5)$

3.5.3 Inverse modulaire

3.5.3.1 Définition

En arithmétique classique, l'inverse d'un nombre a est un nombre b, tel que $a\ .\ b = 1$ (ou $b = a^{-1}$).

En arithmétique modulaire, l'**inverse modulaire** d'un entier relatif a pour la multiplication modulo n est un entier u satisfaisant l'équation :

$$au \equiv 1\ (mod\ n)$$

L'inverse modulaire u ainsi défini peut aussi être noté a^{-1}, ce qui donne la définition équivalente suivante :

$$u \equiv a^{-1}\ (mod\ n)$$

L'inverse de $a\ modulo\ n$ existe **si et seulement si** a et n sont **premiers entre eux**, c.-à-d. si leur seul diviseur commun est 1 ou $pgcd(a,n) = 1$.

Si l'inverse modulaire de a existe, l'opération de **division par $\boldsymbol{a\ modulo\ n}$** se ramène à la multiplication par son inverse.

Dans l'exemple de la section 3.5.2, tous les éléments non nuls ont un inverse : $1 \to 1$, $2 \to 3$, $3 \to 2$, $4 \to 4$. En effet, $1 \cdot 1 \equiv 1\ (mod\ 5)$, $2 \cdot 3 \equiv 1\ (mod\ 5)$, $3 \cdot 2 \equiv 1\ (mod\ 5)$, $4 \cdot 4 \equiv 1\ (mod\ 5)$.

Exemple : multiplication modulo 15

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0	2	4	6	8	10	12	14	**1**	3	5	7	9	11	13
3	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12	0	3	6	9	12
4	0	4	8	12	**1**	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11
5	0	5	10	0	5	10	0	5	10	0	5	10	0	5	10
6	0	6	12	3	9	0	6	12	3	9	0	6	12	3	9
7	0	7	14	6	13	5	12	4	11	3	10	2	9	**1**	8
8	0	8	**1**	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7
9	0	9	3	12	6	0	9	3	12	6	0	9	3	12	6
10	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	15	5
11	0	11	7	3	14	10	6	2	13	9	5	**1**	12	8	4
12	0	12	9	6	3	0	12	9	6	3	0	12	9	6	3
13	0	13	11	9	7	5	3	**1**	14	12	10	8	6	4	2
14	0	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	**1**

A la lecture du tableau précédent, on constate que seuls les nombres $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13$ et 14 admettent un inverse modulo 15, car ils sont premiers avec 15. En effet, $15 = 3\ .\ 5$. Par conséquent, seuls les nombres qui ne sont divisibles ni par 3 ni par 5 possèdent un inverse modulo 15.

3.5.3.2 Théorème de Bachet-Bézout

D'après la définition précédente de l'inverse modulaire, u est un inverse de a modulo n s'il existe un entier v tel que :

$$au + nv = 1$$

Le **théorème de Bachet-Bézout** affirme que l'identité précédente possède une solution si et seulement si $pgcd(a, n) = 1$ (SSI a et n sont premiers entre eux).

De plus, si un tel inverse existe alors il est **unique (modulo n)** et il peut se calculer notamment grâce à l'**algorithme d'Euclide étendu**.

3.5.3.3 Algorithme d'Euclide étendu

L'algorithme d'Euclide étendu permet de trouver les valeurs de x et y qui sont la solution de l'équation plus générale :

$$ax + by = pgcd(a, b)$$

Cet algorithme consiste à compléter le tableau suivant :

	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	
$\boldsymbol{a}$	**1**	**0**	**Quotients**
$\boldsymbol{b}$	**0**	**1**	q_1
$r_1 = a - bq_1$	$1 - 0q_1$	$0 - 1q_1$	q_2
…	…	…	…
r_{i-1}	s_i	t_i	q_i
r_i	u_i	v_i	q_{i+1}
$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_{i+1}$	$s_i - u_i q_{i+1}$	$t_i - v_i q_{i+1}$	q_{i+2}
…	…	…	…
$r_{n-1} = pgcd(a, b)$	$s_n = x$	$t_n = y$	q_n
$r_n = 0$	u_n	v_n	

Les valeurs de q_1 et r_1 correspondent respectivement au quotient et au reste de la division euclidienne de a par b. Les coefficients des colonnes du milieu s'obtiennent par combinaison des valeurs situées dans les 2 lignes qui précèdent avec le quotient q_1.

Exemple 1 :

Résoudre l'équation de Bézout pour $a = 28$ et $b = 6$, c'est-à-dire : $28x + 6y = pgcd(28, 6)$.

	28	**6**	
28	**1**	**0**	**Quotients**
6	**0**	**1**	4
4	1	-4	1
$2 = pgcd(28, 6)$	-1	5	2
0	3	-14	

La solution est donc : $28\,.\ (-1) + 6 \cdot 5 = 2$.

Remarque : à chaque ligne du tableau, on retrouve la valeur de la colonne de gauche en calculant la combinaison de a et b avec les coefficients des deux colonnes du milieu.

Ainsi, à la troisième ligne, on : $4 = 28\,.\,1 + 6\,.\ (-4)$.

Exemple 2 : calculer l'inverse de 7 modulo 15.

Pour calculer l'inverse u de 7 modulo 15, nous devons résoudre l'équation $7u + 15v = 1$.

	7	**15**	
7	**1**	**0**	**Quotients**
15	**0**	**1**	0
7	1	0	2
1	-2	1	7
0	15	-7	

L'inverse de 7 modulo 15 est donc $u \equiv -2 \equiv 13\ (mod\ 15)$. [Note : $-2 + 15 = 13$]

3.5.4 Puissance modulo n

Pour élever un nombre entier a à une certaine **puissance modulo n**, on applique les définitions suivantes :

$$a^0 \equiv 1\ (mod\ n)$$

$$a^b \equiv \underbrace{a\,.\ a\,.\ \ldots\ .\ a}_{b\ fois}\,(mod\ n) \text{ avec } b > 0$$

$$a^{-b} \equiv (a^{-1})^b\ (mod\ n) \qquad \text{avec } b > 0$$

Elever un nombre a à une *puissance négative* revient donc à élever son inverse modulaire à la puissance positive correspondante.

3.5.5 Exercices

1. On dispose d'un chronomètre qui indique uniquement le nombre de secondes écoulées depuis son déclenchement. Comment peut-on exprimer cette durée en nombre d'heures, minutes et secondes en utilisant la division euclidienne et le modulo ?
   (Exemple : $24\ 323\ s\ = 6\ h\ 45\ min\ 23\ s$)

2. Le plateau de jeu du Monopoly possède 40 cases numérotées de 0 à 39. La case 0 est la case de départ. Les cases sont organisées de manière circulaire. Un joueur progresse toujours dans le sens des aiguilles d'une montre. S'il se trouve sur la dernière case (39) et avance d'une case, il se retrouve à nouveau sur la case de départ (0).
   Si un joueur se trouve sur la case x et obtient un score de n au lancé des dés, sur quelle case y doit-il avancer son pion ?

3. Si aujourd'hui, nous sommes jeudi, quel jour serons-nous dans 132 jours ?

4. Calculer le résultat des opérations suivantes « modulo 12 » :

   a. $7 + 8$

   b. $128425638 + 4215326987$

   c. $4 \cdot 7$

   d. $128425638 \cdot 4215326987$

   e. $11 \cdot 11$

   f. 8^4

   g. 49^{10000}

   h. 8916100448256^3

5. Calculer les inverses modulaires suivants au moyen de l'algorithme d'Euclide étendu :

   a. $7^{-1}\ mod\ 12$

   Nous devons résoudre l'équation …………………………… .

	7	**12**	
7	**1**	**0**	**Quotients**
12	**0**	**1**	

L'inverse de 7 modulo 12 est donc ………………………………………

Preuve : …………………………………………………..

b. $15^{-1} \, mod \, 63$

c. $17^{-1} \, mod \, 86$

6. Calculer les valeurs suivantes « modulo 7 » :

    a. $(123 + 456) \cdot (321 + 654)$

    b. $42^3 + 176^5 + 66^2 + 41^{-3}$

4 Logique mathématique

4.1 Introduction

« La logique a pour centre d'intérêt les méthodes de raisonnement. Elle fournit des règles, des techniques permettant de décider si une argumentation, une déduction est valide ou ne l'est pas. Ses applications foisonnent en mathématiques, en informatique mais aussi dans toute discipline un peu rigoureuse. »[5]

La logique a de nombreuses utilités en informatique. Elle est abondamment utilisée dans les langages de programmation pour exprimer, par exemple, des conditions qui détermineront la poursuite d'une boucle ou le choix d'une alternative parmi plusieurs au sein d'un programme. On la retrouve également dans le langage SQL (*Structured Query Language*, en français : *langage de requête structurée*) utilisé pour interroger une base de données, …

Le *raisonnement logique* est à la base du fonctionnement de nombreux programmes, de l'intelligence artificielle et de bien d'autres domaines de l'informatique.

La logique mathématique est également un des fondements de l'*électronique digitale* qui est au cœur de tous les ordinateurs actuels (cf. cours « Architecture des ordinateurs »).

Trois grandes parties seront abordées dans ce chapitre :

- le calcul propositionnel ;
- le calcul des prédicats ;
- le calcul booléen et les tables de Karnaugh.

[5] Michel Marchand, « Outils mathématiques pour l'informaticien », 2e édition, Ed de Boeck, 2005.

4.2 Calcul propositionnel

4.2.1 Proposition

Considérons l'affirmation suivante :

« L'homme est un animal intelligent. »

Cette phrase peut être comprise de différentes manières suivant le sens qu'une personne lui prête. Enonce-t-elle une caractéristique de l'être humain ? S'agit-il d'une définition de l'espèce humaine ? L'affirmation précédente pourra donc être ressentie comme plus ou moins vraie, ou plus ou moins fausse, selon l'interprétation du lecteur.

Le langage classique ne permet pas de prendre une décision définitive à ce sujet.

En logique mathématique, nous considérerons uniquement des phrases, des énoncés, ne possédant qu'une des deux *valeurs booléennes* : ***vrai*** ou ***faux***, sans aucune ambiguïté.

De tels énoncés portent le nom de **propositions**.

Par commodité, on remplace souvent la valeur de vérité *vrai* par *1* et la valeur de vérité *faux* par *0*.

Une **proposition** est donc un énoncé ayant un sens et dont on peut dire avec certitude s'il est vrai (on dit alors que *vrai* est sa valeur de vérité) ou s'il est faux (on dit alors que *faux* est sa valeur de vérité).

Un corollaire de cette définition est donc qu'un énoncé qui n'a pas de sens, ou dont le sens est ambigu, n'est pas une proposition.

Exemples : les énoncés suivants sont-ils ou non des propositions ?

1. « Grand » non
2. « $4 = 9$ » oui (valeur = faux)
3. « 8 » non
4. « Je vais gagner au lotto » non
5. « $7 + 9 > 11$ » oui (valeur = vrai)
6. « Cette phrase est fausse » non (+ paradoxe)

Plutôt que d'écrire des énoncés explicites du type : « $2 + 3$ font 5 », comme nous le ferons encore dans les exemples qui suivent, on représente souvent les propositions par des symboles : P_1, P_2, P_3, $\ldots, P, Q, S, \ldots$

Ces symboles sont appelés **variables propositionnelles**.

4.2.2 Calcul propositionnel

Nous avons donc décidé de travailler avec des propositions qui possèdent une et une seule des valeurs de vérité *vrai* (1) ou *faux* (0).

A partir de ces propositions élémentaires, nous allons construire des propositions plus complexes, appelées **formules,** en utilisant des **connecteurs**.

Notre but sera de distinguer parmi les formules celles qui sont vraies de celles qui sont fausses. Autrement dit, de *calculer la valeur de vérité* d'une formule. Ce calcul repose sur un type de raisonnement logique qui porte le nom de **calcul propositionnel**.

Le **calcul propositionnel** va nous permettre de déterminer la valeur de vérité de formules construites en combinant entre elles des propositions et des formules dont les valeurs de vérité sont déjà connues.

Attention : le calcul propositionnel s'intéresse uniquement *à la façon dont les propositions sont liées entre elles* et aux conclusions que l'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité. Il ne s'intéresse pas du tout à l'idée de *signification* du langage courant.

4.2.3 Connecteurs logiques de base

4.2.3.1 La négation ($\neg$)

Le **connecteur de négation** ($\neg$) est défini de la manière suivante :

Si P est une proposition, $\neg P$ signifie « il est faux que P ».

En d'autres termes, $\neg P$ prend la *valeur contraire* de P.

$\boldsymbol{P}$	$\neg \boldsymbol{P}$
0 (*faux*)	1 (*vrai*)
1 (*vrai*)	0 (*faux*)

Le tableau précédent porte le nom de **table de vérité** du connecteur $\neg P$; il permet de calculer la valeur de $\neg P$ pour toutes les valeurs possibles de P.

Le connecteur de négation est un **connecteur unaire**, car il porte sur une seule variable propositionnelle.

D'autres notations existent pour indiquer une négation logique : $non(P)$, $\overline{P}$ (qui se lit « P barre »). Les langages de programmation utilisent les notations : $not\ P$ (Python), $!P$ (Java).

Exemple :

Considérons la proposition P : « $4 < 3$ ».
Sa négation $\neg P$ est : « il est faux que $4 < 3$ », ou encore « $4 \geq 3$ ».

Pour toute proposition P, nous pouvons dire que les propositions P et $\neg\neg P$ ont la même valeur de vérité. En d'autres termes, la négation de la négation d'une proposition est la proposition elle-même.

$\boldsymbol{P}$	$\neg\neg\boldsymbol{P}$
0 (*faux*)	0 (*faux*)
1 (*vrai*)	1 (*vrai*)

Exemple :

P : « $2 = 3$ », alors sa négation est $\neg P$: « $2 \neq 3$ » et
la négation de $\neg P$ est $\neg\neg P$: « $2 = 3$ ».

Rappelons une dernière fois que le calcul propositionnel ne s'occupe que des valeurs de vérité et de la façon dont sont construites les propositions. Leur représentation par des affirmations explicites et la signification de ces affirmations n'est pas son affaire. Pour lui, quand une proposition s'appelle P, sa négation s'appelle $\neg P$, et si l'une est vraie, l'autre est fausse : c'est tout !

4.2.3.2 La conjonction (∧)

Le **connecteur de conjonction** (∧) est défini de la manière suivante :

Si P et Q sont des propositions, alors la proposition composée ou formule $P \wedge Q$ (qui se lit « $P\ et\ Q$ ») :

- est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ;
- est fausse dans tous les autres cas.

On obtient la **table de vérité** suivante :

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \wedge Q}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples :

1. La proposition « $14 - 3 = 11$ et $2 > 3$ » est fausse (car « $2 > 3$ » est fausse).
2. La proposition « 100 est pair et $100 = 10^2$ » est vraie (car les 2 propositions sont vraies).

D'autres notations existent pour indiquer une conjonction logique : $P\ et\ Q$, $P.Q$ ou simplement PQ. Les langages de programmation utilisent les notations : $P\ and\ Q$ (Python), P && Q (Java).

4.2.3.3 La disjonction (∨)

Le **connecteur de disjonction** (∨) est défini de la manière suivante :

> Si P et Q sont des propositions, alors la proposition composée ou formule $P \vee Q$ (qui se lit « $P\ ou\ Q$ ») :

- est vraie si **au moins une** des propositions P, Q est vraie ;
- est fausse si P et Q sont fausses toutes les deux.

Il s'agit du « ou non exclusif » appelé également « **ou inclusif** ».

On obtient la **table de vérité** suivante :

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \vee Q}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemples :

1. La proposition « $14 - 3 = 11$ ou $2 > 3$ » est vraie.
2. La proposition « 100 est pair ou $100 = 10^2$ » est vraie.

D'autres notations existent pour indiquer une disjonction logique : $P\ ou\ Q$, $P + Q$. Les langages de programmation utilisent les notations : $P\ or\ Q$ (Python), $P\ ||\ Q$ (Java).

Les connecteurs de disjonction et de conjonction sont des **connecteurs binaires**, car ils s'appliquent à deux variables propositionnelles.

4.2.4 Formules

En utilisant les connecteurs logiques, il est possible de construire des propositions plus complexes, appelées **formules**.

Exemple : $\neg\big((P \vee Q) \wedge R\big)$.

En mathématique, *l'utilisation des parenthèses est primordiale* ! Les parenthèses permettent de lever toute ambiguïté sur l'ordre d'application des connecteurs.

Il est donc interdit d'écrire $P \wedge Q \vee R$, car on ne sait pas s'il s'agit de $(P \wedge Q) \vee R$ ou de $P \wedge (Q \vee R)$.

La seule exception concerne la négation : si le connecteur de négation « ¬ » n'est pas suivi d'une parenthèse ouvrante « (», il porte sur la proposition qui le suit directement.

Exemples :

1. $\neg P \wedge Q$: signifie « la conjonction de $\neg P$ et de Q », c'est-à-dire $(\neg P) \wedge Q$.
2. $\neg(P \wedge Q)$: signifie « la négation de la conjonction de P et de Q ».

Dans les langages de programmation, la conjonction (et, and, &&) a priorité sur la disjonction (ou, or, ||). Si on se réfère à la représentation (utilisée en électronique) de la conjonction et de la disjonction par les symboles « . » et « + », les langages de programmation appliquent des règles de priorité similaires à celles de la multiplication et de l'addition.

4.2.5 En résumé

Variables propositionnelles

Connecteurs logiques

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\neg \boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Valeurs de vérité

Table de vérité

4.2.6 Exercice : calculer les tables de vérité

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\neg P \vee \neg(Q \vee R)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

4.2.7 L'implication ($\Rightarrow$)

Si P et Q sont des propositions, l'expression « si P alors Q » s'écrit $P \Rightarrow Q$. Elle se lit également « P implique Q ».

Dire que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie signifie que si P est vraie, alors Q doit l'être aussi. Il n'est donc pas possible que P soit vraie et qu'en même temps Q soit fausse.

En d'autres termes, si $P \Rightarrow Q$ est vraie, cela signifie que $\neg(P \wedge \neg Q)$ est vraie !

En général, pour démontrer que l'affirmation « P implique Q » est vraie, on suit l'idée suggérée par la formulation « si…. alors … » : on suppose P vraie et on détermine la valeur de vérité de Q en tenant compte de cette hypothèse. Si le raisonnement conduit à Q vraie, alors l'affirmation « P implique Q » est vraie.

Exemple 1 :

Démontrons que l'affirmation « P implique Q » est vraie avec :

- P = « à partir de 4 tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers » ;
- Q = « à partir de 7 tout nombre impair est la somme de trois nombres premiers ».

Supposons que la proposition P est vraie (= conjecture de Goldbach).

Si n désigne un nombre entier impair ≥ 7, le nombre $(n - 3)$ est pair et ≥ 4.
Puisque P est vraie, $(n - 3)$ est la somme de deux nombres premiers x et y, ce qui signifie que $n = x + y + 3$ est la somme de trois nombres premiers.

Donc, si l'on suppose que P est vraie, il en va de même pour Q et « P implique Q » est vraie.

Exemple 2 :

Considérons à présent un cas où la proposition P est fausse, avec :

- P = « 2 est égal à 1 » ;
- Q = « Napoléon et Jules César sont une seule et même personne ».

L'affirmation « P implique Q », voudrait donc dire « Si 2 est égal à 1, alors Napoléon et Jules César sont une seule et même personne ».

Cette affirmation semble incompréhensible si on essaie de lui donner une signification basée sur le langage courant. À juste titre, car nous avons l'impression qu'elle traduit une relation de cause à effet qui est loin d'être évidente.

Par ailleurs, sachant pertinemment que la proposition P est fausse, nous refusons de faire comme si elle était vraie, même pour les besoins d'un raisonnement logique.

Faisons tout de même cet effort : Napoléon et Jules César sont deux personnes ; mais deux personnes n'en font qu'une si « 2 est égal à 1 ». Par conséquent, si « 2 est égal à 1 », Napoléon et Jules César sont une seule et même personne et il est alors vrai que « P implique Q ».

Ces deux exemples nous montrent la difficulté d'interpréter correctement le connecteur d'implication !

Grâce aux exemples précédents, prenons pour acquis que, **lorsque la proposition $\boldsymbol{P}$ est vraie** :

- si Q est vraie, alors « P implique Q » est vraie ;
- si Q est fausse, alors « P implique Q » est fausse.

Lorsque la proposition $\boldsymbol{P}$ est fausse, comme c'est le cas dans l'exemple 2 ci-dessus, nous ne comprenons pas la signification de « Si P alors Q » : le bon sens n'est plus d'aucun secours !

Du point de vue du calcul des propositions, la proposition $P \Rightarrow Q$ **est toujours vraie quand P est fausse**. En d'autres termes, à partir d'une proposition P fausse, nous pouvons conclure tout ce que nous voulons : l'implication est toujours vraie, quelle que soit la valeur de Q.

Nous pouvons nous en convaincre grâce à la formule que nous avons donnée plus haut :
$P \Rightarrow Q$ signifie $\neg(P \wedge \neg Q)$ (si l'implication est vraie, alors il est faux que P soit vraie et Q fausse)

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\neg\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q}$	$\neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q})$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Nous avons déduit la **table de vérité** de $P \Rightarrow Q$ en calculant les valeurs de vérité de la formule $\neg(P \wedge \neg Q)$.

Plusieurs remarques sont à formuler à propos de ce connecteur :

1. Contrairement aux connecteurs disjonctif et conjonctif, le connecteur « $\Rightarrow$ » n'est pas commutatif. Les deux opérandes ne jouent en effet pas le même rôle. L'opérande de gauche s'appelle **antécédent** et celui de droite s'appelle **conséquent.**
   De la table de vérité, nous pouvons déduire que le seul cas où l'implication est fausse est celui où l'antécédent est vrai et le conséquent faux.
2. Lorsqu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** de Q et que Q est une **condition nécessaire** de P.
3. $Q \Rightarrow P$ est appelée la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.
4. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelée la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

Exemples :

- La proposition « $5 < 5 \;\Rightarrow\; 5 \;=\; 5$ » est vraie (car l'antécédent est faux).
- La proposition « $5 = 5 \;\Rightarrow\; 5 < 5$ » est fausse (car l'antécédent est vrai et le conséquent est faux).
- « Si $1/2$ est un nombre entier, alors $1/2$ n'est pas un nombre entier » est vraie (car l'antécédent est faux).

Exercice : montrer qu'une implication et sa contraposée ont la même table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

4.2.8 L'équivalence (⇔)

Si P et Q sont des propositions, la proposition composée $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ s'écrit $P \Leftrightarrow Q$.
Elle se lit également « P est équivalent à Q ».

Sa table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Donc $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, dans les cas où P et Q ont la même valeur. On dit aussi que **P est une condition nécessaire et suffisante de Q.**

4.2.9 La disjonction exclusive (⊕)

La proposition composée $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ s'écrit $P \oplus Q$ et est appelée **disjonction exclusive**.
On parle également de « **ou exclusif** » ou encore de « **xor** ».

Sa table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \oplus Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La disjonction exclusive est donc vraie si **une et une seule** des deux propositions est vraie. Ce qui est juste l'opposé de l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$. Et donc, $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \oplus Q)$ est toujours vraie.

Les langages de programmation utilisent les notations : $P\ xor\ Q$, P ^ Q.

4.2.10 Tautologie et antilogie

Une formule propositionnelle F dont la valeur est vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux variables est appelée une **tautologie**. On la note $\vdash F$ (voir ci-après).

A l'opposé, une formule propositionnelle F dont la valeur est fausse quelles que soient les valeurs attribuées aux variables s'appelle une **contradiction** ou encore une **antilogie**.

Exemples :

- $P \vee \neg P$ est une tautologie.
- $P \wedge \neg P$ est une antilogie.

4.2.11 Propriétés des connecteurs

Double négation

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

Commutativité de $\wedge$ **et** $\vee$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Associativité de $\wedge$ **et** $\vee$

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

Distributivité

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Lois de De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

4.2.12 Résumé des tables de vérité

P	Q	**Négation** $\neg P$	**Conjonction** $P \wedge Q$	**Disjonction** $P \vee Q$	**Implication** $P \Rightarrow Q$	**Equivalence** $P \Leftrightarrow Q$	**Disjonction exclusive** $P \oplus Q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

4.2.13 Exercices

1. Démontrer la propriété de distributivité et les lois de De Morgan à l'aide des tables de vérité.

P	Q	R					
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

P	Q						
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

2. Soit $F = P \wedge Q$ et $G = (P \wedge \neg R)$. Déterminer la table de vérité de $F \vee G$.

3. Les deux affirmations suivantes sont-elles des propositions ?

« L'affirmation qui suit est vraie. »
« L'affirmation qui précède est fausse. »

4. En notant P et Q les affirmations suivantes :

   P : Jean est fort en Maths.
   Q : Jean est fort en Chimie.

   Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l’aide des lettes P et Q et des différents connecteurs :

   a. Jean est fort en maths mais faible en chimie.

   b. Jean n’est fort ni en maths ni en chimie.

   c. Jean est fort en maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en maths.

   d. Jean est fort en maths s’il est fort en chimie.

   e. Jean est fort en chimie et en maths ou il est fort en chimie et faible en maths.

5. En notant P, Q et R les 3 affirmations suivantes :

   P : Pierre fait des maths.
   Q : Pierre fait de la chimie.
   R : Pierre fait de l'anglais.

   Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres P, Q et R et des différents connecteurs :

   a. Pierre fait des maths et de l'anglais mais pas de chimie.

   b. Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'anglais.

   c. Il est faux que Pierre fasse de l'anglais sans faire de maths.

   d. Il est faux que Pierre ne fasse pas de maths et fasse quand même de la chimie.

   e. Il est faux que Pierre fasse de l'anglais ou de la chimie sans faire de maths.

   f. Pierre ne fait ni anglais ni chimie mais il fait des maths.

6. Enoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d'employer l'expression : « il est faux que » :

   a. S'il pleut demain ou s'il fait froid, je ne sortirai pas.

   b. Le nombre 522 n'est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7.

   c. Ce quadrilatère n'est ni un rectangle ni un losange.

   d. Si Paul ne va pas travailler ce matin, il perdra son emploi.

7. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

   a. π vaut 4 et la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

   b. π vaut $3{,}1415926\ldots$ implique que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

   c. π vaut 4 implique que la somme des angles d'un triangle vaut $182°$.

   d. Il n'est pas vrai qu'un nombre entier impair ne puisse pas être divisible par 6.

e. Si 2 est plus grand que 3 alors l'eau bout à $100°C$.

f. Si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6.

g. Si 6 est plus petit que 6 alors 6 est plus petit que 7.

h. 84 est divisible par 7 implique que 121 est divisible par 11.

8. Trouver un raisonnement qui donne la valeur de vérité VRAI de la proposition : « Si Napoléon et Jules César sont une seule et même personne, alors $5 = 0$ ». (*Indice : renseignez-vous sur les âges des deux personnes*).

9. Combien de lignes contient la table de vérité d'une formule propositionnelle qui dépend de n variables ?

10. Construire les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes :

    a. $\neg(\neg P \land \neg Q)$

    b. $(P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor Q)$

    c. $(P \Rightarrow \neg Q) \lor (Q \Rightarrow \neg P)$

    d. $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow P)$

11. Les formes propositionnelles suivantes sont-elles des tautologies ?

   e. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

   f. $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

   g. $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$

   h. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

   i. $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$

12. Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire d’une forme propositionnelle :

    a. qui a pour conséquence une contradiction ?

    b. qui a pour conséquence une tautologie ?

    c. qui est conséquence d’une contradiction ?

    d. qui est conséquence d’une tautologie ?

13. Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d’un café :

    a. Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content.
    b. Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.
    c. Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.
    d. Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.
    e. Aujourd'hui, je suis content.

    Questions :

    1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les principales notions et donner les formules correspondant à chacune des affirmations précédentes.
    2. Si on considère que toutes les affirmations précédentes sont vraies, montrer par un raisonnement élémentaire que l’homme n'a pas bu aujourd’hui.
    3. Idem. Répondre aux questions suivantes en les justifiant par un raisonnement ou une table de vérité : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les principales notions et donner les formules correspondant à chacune des affirmations précédentes.

B *: boire*	*a.*
C *: être content*	*b.* Tapez une équation ici.
D *: dormir*	*c.*
M *: manger*	*d.*
	e.

2. Si on considère que toutes les affirmations précédentes sont vraies, montrer par un raisonnement élémentaire que l'homme n'a pas bu aujourd'hui.

3. Idem. Répondre aux questions suivantes en les justifiant par un raisonnement ou une table de vérité : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

On peut également établir la table de vérité des 4 implications simplifiées.

14. Un ethnologue publie un article sur une tribu où l'on apprend que :

    a. Tout membre de la tribu porte un collier ou une boucle d'oreille ;
    b. Tous les guerriers portent un collier ;
    c. Ceux qui ne sont pas des guerriers n'ont pas de boucle d'oreille ;
    d. Ceux qui portent un collier sont des guerriers mâles ;
    e. Les hommes ne préparent jamais les repas ;
    f. Les repas sont préparés à tour de rôle par tous les guerriers.

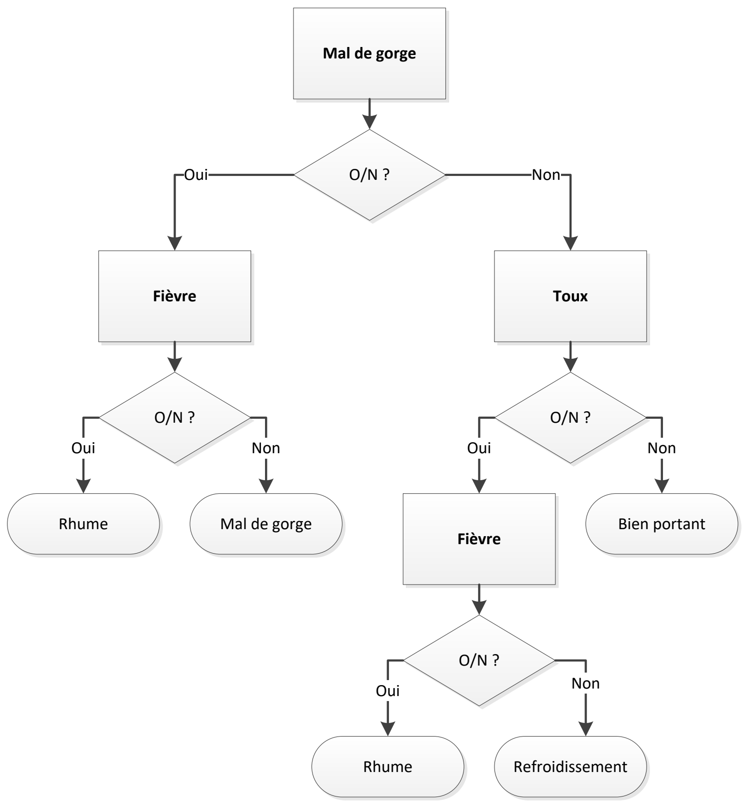
    Question : quel est l'âge du chef de la tribu ?

15. Considérons l'arbre de décision suivant, qui permet de diagnostiquer une maladie (rhume, mal de gorge, refroidissement) en fonction de divers symptômes (mal de gorge, toux, fièvre).

    Introduisons les variables propositionnelles :

    G : « avoir mal à la gorge »,
    F : « avoir de la fièvre » et
    T : « tousser ».

    Déterminer la formule propositionnelle qui correspond à chaque maladie, ainsi qu'au fait d'être bien portant.



4.3 Calcul des prédicats

4.3.1 Définition

« n est un nombre premier » est une proposition mais sa *valeur de vérité* dépend de la valeur de n qui est une **variable**.
Ce type de proposition dépendant d'une variable est appelée **prédicat**.
Pour chaque valeur de n, la proposition sera soit vraie soit fausse (une seule valeur de vérité).

Exemples :

- $P(x)$: « $4 - x = 3$ » est vrai si et seulement si $x = 1$.
- $P(n)$: « n^2 *est un nombre entier pair* » est vrai seulement quand n est pair $(0,\ 2,\ 4, \dots)$ et faux dans tous les autres cas.

4.3.2 Les quantificateurs

Introduisons deux **quantificateurs** qui vont nous permettre d'introduire deux nouveaux types de formules :

- Le **quantificateur universel** : $\forall x\ P(x)$ est vraie si et seulement si toute valeur de x rend le prédicat $P(x)$ vrai.

- Le **quantificateur existentiel** : $\exists x\ P(x)$ est vraie si et seulement s'il existe au moins une valeur de x pour laquelle le prédicat $P(x)$ est vrai.

La valeur de vérité de ces deux nouvelles formules ne dépend donc plus de la variable x.

Les quantificateurs agissent sur les prédicats comme des connecteurs unaires et on leur accorde la priorité maximale.

Un **prédicat** est donc un énoncé sans valeur de vérité, dans lequel intervient au moins une variable, et qui devient une proposition par ajout de quantificateurs.

Exemples :

- « Tous les poissons rouges sont mortels » peut se traduire par :
  $\forall x\ (x\ est\ un\ poisson\ rouge\ \Rightarrow x\ est\ mortel)$.
- « Un des pays d'Afrique, au moins, est communiste » peut se traduire par :
  $\exists x\ (x\ est\ un\ pays\ d'Afrique \land x\ est\ communiste)$.
- La valeur de vérité de la proposition P : « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 3$ » est vraie ($x = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$).
- La valeur de vérité de la proposition Q : « $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 = 3$ » est fausse.

En pratique, les valeurs des variables x, y, … sont souvent confinées dans les ensembles A, B, …

On obtient alors :

$$\forall x\ ((x \in A) \Rightarrow P(x)) \qquad \exists y\ ((y \in B) \land P(y))$$

Ce que l'on écrit en abrégé :

$$\forall x \in A, P(x) \qquad \exists y \in B, P(y)$$

Exemple : formaliser *« tout curé a un vélo ».*

1. Soit les 3 **prédicats** suivants :

   curé (x) : x est un curé

   vélo (y) : y est un vélo

   possède (x, y) : x possède y

   On obtient :

   $$\forall x\ (curé(x) \Rightarrow \exists y\ (vélo(y) \land possède(x, y))$$

2. Si on travaille avec **les ensembles** : C (ensemble des curés) et V (ensemble des vélos), on écrira :

   $$\forall x \in C, \exists y \in V, possède(x, y).$$

4.3.3 Ordre des quantificateurs

On peut évidemment utiliser les quantificateurs en cascade : $\forall x\ \exists y\ \exists z\ P(x, y, z)$.

Lorsqu'un prédicat a plusieurs variables, l'ordre dans lequel les quantificateurs sont écrits est primordial.

$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ **n'est pas équivalent à** $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$

Dans la première proposition, la valeur de y dont on affirme l'existence peut dépendre de la valeur de x ; alors que ce n'est pas le cas dans la seconde.

Exemples :

1. Si x est une clé, y est une serrure et $O(x, y)$ signifie « la clé x ouvre la serrure y »

   $\forall y\ \exists x\ O(x, y)$ affirme : toute serrure possède une clé.

   $\exists x\ \forall y\ O(x, y)$ affirme : il existe une clé qui ouvre toutes les serrures.

2. Que signifient les deux propositions S et T suivantes ? Quelles sont leurs valeurs de vérité ?
   a. $S : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$
      Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel y strictement plus grand que lui.
      Cette proposition est vraie.
   b. $T : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$
      Il existe un nombre réel y, strictement plus grand que tous les autres nombres réels.
      Cette proposition est fausse.

Les deux exemples précédents nous montrent que **l'ordre** dans lequel interviennent les quantificateurs universel et existentiel a une importance. On ne peut pas les intervertir sans changer le sens de la proposition.

On peut uniquement permuter des quantificateurs s'ils sont de même nature.

Remarque : on écrira $\forall\, x, y, z \in A$ plutôt que $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A$.

4.3.4 Négation d'une proposition avec quantificateurs

Nier la proposition $\forall x\ P(x)$ revient à dire qu'il existe au moins une valeur de x qui rend faux $P(x)$ ou vrai $\neg P(x)$, c'est-à-dire :

$$\neg \forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$$

De manière analogue, nier la proposition $\exists x\ P(x)$ revient à dire qu'il n'existe aucune valeur de x qui rend le prédicat $P(x)$ vrai, ou encore que chaque valeur de x rend vrai $\neg P(x)$, c'est-à-dire :

$$\neg \exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$$

Exemples :

1. La négation de « Tous les chats sont gris » est « Il existe un chat qui n'est pas gris ».
2. La négation de « Il existe un chat gris » est « Tous les chats sont d'une couleur autre que le gris », ou encore « Aucun chat n'est gris ».
3. La négation de la proposition $P : \forall n \in \mathbb{N}, 2n < 100$ (ce qui est faux) est $\exists n \in \mathbb{N}, 2n \geq 100$ (ce qui est vrai).
4. La négation de la proposition $Q : \exists n \in \mathbb{N}, n/3 \in \mathbb{N}$ (ce qui est vrai, par exemple pour $n = 9$) est $\forall n \in \mathbb{N}, n/3 \notin \mathbb{N}$ (ce qui est faux).
5. La négation de la proposition $S : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ (ce qui est vrai) est $\exists x \in \mathbb{R}, \neg(\exists y \in \mathbb{R}, x < y)$, c'est-à-dire $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$.

4.3.5 Relations des quantificateurs avec la conjonction et la disjonction

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$$

$$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$$

$$\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$$

$$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$$

Exemples :

Soit x une variable qui prend ses valeurs dans l'alphabet habituel, et soient les prédicats :

$cons(x)$: $x\ est\ une\ consonne$;
$voy(x)$: $x\ est\ une\ voyelle$.

La formule $\forall x\ (cons(x) \vee voy(x))$ affirme que toute lettre de l'alphabet est soit une consonne soit une voyelle, ce qui est vrai.

La formule $\forall x\ cons(x) \vee \forall x\ voy(x)$ affirme que les lettres de l'alphabet sont toutes des consonnes ou toutes des voyelles, ce qui est manifestement faux !

La formule $\exists x\ cons(x) \wedge \exists x\ voy(x)$ indique qu'il existe dans l'alphabet au moins une consonne et au moins une voyelle, ce qui est vrai.

Tandis que $\exists x\ (cons(x) \wedge voy(x))$ affirme l'existence d'une lettre qui est à la fois consonne et voyelle, ce qui n'est pas possible.

4.3.6 Remarques

1. Considérons la formule : $\forall x\ (x + y = x)$.

   La variable x est **liée** par le quantificateur mais cette formule reste un prédicat en y. Sa valeur de vérité ne dépend pas de la valeur de x mais bien de celle de y. En particulier, la formule est vraie si $y = 0$. On dira que la variable y est **libre**.

2. Considérons la formule : $\forall x \in A, \forall y \in A : P(x, y)$.

   Elle signifie que le prédicat $P(x, y)$ est vrai pour n'importe quelles valeurs de x et de y, en ce compris le cas où les valeurs de ces variables sont égales. Ce n'est pas parce que les lettres désignant deux variables sont distinctes que les valeurs de ces variables ne peuvent être égales. Par contre, on ne peut pas désigner par le même symbole deux variables dont les valeurs peuvent être différentes.

3. Il existe un troisième quantificateur $\exists$**!** qui signifie : *il existe un et un seul*.

   Ainsi, $\exists!\, x\ P(x)$ signifie qu'il n'y a qu'un et un seul x qui rend le prédicat $P(x)$ vrai.

4.3.7 Exercices

1. Enoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d'employer l'expression : « il est faux que » :

    a. Tout nombre entier impair n'est jamais divisible par 2.

    b. Tout triangle équilatéral a ses angles égaux à 60°.

2. On considère la proposition P : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$. Enoncer la négation de P puis donner, en la justifiant, la valeur de vérité de P.

3. **Vrai** ou **faux** ?

    a. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x + nx = (n+1)x$

    b. $\exists \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{n} \in \mathbb{N}, x + nx = (n+1)x$

    c. $\exists \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{p} \in \mathbb{N}, p - n$ est divisible par 2

    d. $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}, p - n$ est divisible par 2

4. Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité, énoncer sa négation puis donner la valeur de vérité de celle-ci :

   a. $\exists x \in \mathbb{R}, 3x = 2$

   b. $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{x} = \mathrm{x} + 1$

   c. $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{y} \in \mathbb{R}, \mathrm{x} \leq \mathrm{y}$

   d. $\exists \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{y} \in \mathbb{R}, \mathrm{x}^2 = \mathrm{y}$

   e. $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{y} \in \mathbb{R}, \mathrm{x}^2 = \mathrm{y}$

5. Formaliser les propositions suivantes en utilisant uniquement les prédicats indiqués, les connecteurs et les quantificateurs :

   - « Personne n'est parfait ».
     [$p(x)$: x est parfait]

   - « 0 est multiple de chaque nombre entier ».
     [$m(x, y)$: x est multiple de y ; $\mathrm{e}(x)$: x est un entier]

   - « Les absents n'ont pas toujours tort ».
     [$a(x)$: x est absent ; $t(x)$: x a tort]

6. Ecrire la négation des formules suivantes :

   a. $\forall x \; (\; p(x) \Rightarrow q(x) \;)$

   b. $\exists x \; (\; p(x) \wedge q(x) \;)$

   c. $\forall x \; (\; p(x) \Leftrightarrow q(x) \;)$

   d. $\exists x \; \forall y \; \big(\; q(x, y) \Rightarrow \big(p(x, y) \vee r(x, y)\big) \; \big)$

7. Quelle est la valeur de vérité de $\forall x \in \mathbb{Z}\ (x \neq x^2)$?

8. Ecrire la négation des formules suivantes :
    a. $\forall x\ \exists y\ (\ p(x,y) \Rightarrow q(x,y)\ )$
    b. $\forall x\ (\ \exists y\ p(x,y) \Rightarrow r(x)\ )$
    c. $\forall x\ \exists y\ p(x,y) \Rightarrow \forall z\ r(z)$
    d. $\forall x\ (\ r(x) \Rightarrow \exists y\ p(x,y)\ )$

9. Soient les prédicats :
    - $\text{curé}(x)$ (x est un curé),
    - $\text{vélo}(y)$ (y est un vélo) et
    - $\text{possède}(x,y)$ (x possède y).

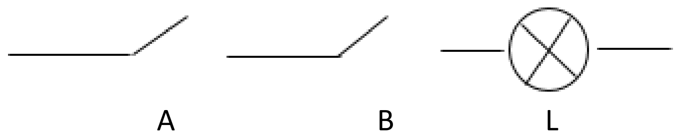
   Traduire en langage courant les formules quantifiées suivantes :
    a. $\forall x\ (vélo(x) \Rightarrow \exists z\ (\ curé(z) \wedge possède(z,x)\ )$
    b. $\forall x\ \left(curé(x) \Rightarrow \forall y \forall z \begin{pmatrix} vélo(z) \wedge \text{vélo}(y) \wedge (z \neq y) \\ \Rightarrow \neg possède(x,z) \vee \neg possède(x,y) \end{pmatrix} \right)$
    c. $\exists x\ (\ curé(x) \wedge \forall y\ (\ vélo(y) \Rightarrow \neg possède(x,y)\ ))$

4.4 Calcul booléen et tables de Karnaugh

4.4.1 Introduction

Premier exemple

Considérons la portion de circuit électrique suivante, où A et B sont des interrupteurs connectés en série et L une lampe.



La lampe L sera allumée uniquement si les 2 interrupteurs A et B sont fermés.

On peut modéliser cette situation en créant deux **variables logiques** (ou **variables booléennes**) a, b et un prédicat (**fonction logique**) $L(a, b)$ ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 :

- $a = 0$, si l'interrupteur A est ouvert (le courant ne passe pas) et $a = 1$ si A est fermé ;
- $b = 0$, si B est ouvert et $b = 1$ si B est fermé ;
- $L(a, b) = 0$, si la lampe L est éteinte et $L(a, b) = 1$ si L est allumée.

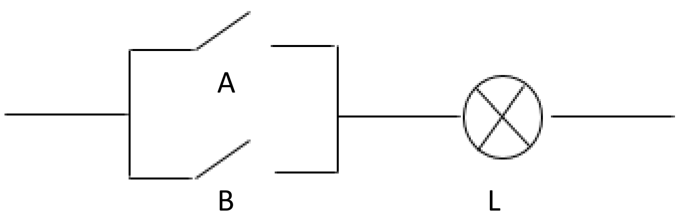
Pour ce montage, on obtient la **table de vérité** suivante :

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{L(a,b)}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

→ Le circuit électrique implémente la fonction logique ET : $L(a, b) = a \wedge b = a\,.\,b = ab$.

Deuxième exemple

Considérons à présent un montage électrique, dans lequel les interrupteurs A et B sont connectés en parallèle.



Dans ce cas, pour que la lampe L soit allumée, il suffit qu'un seul des deux interrupteurs soit fermé.

Pour ce montage, on obtient la **table de vérité** suivante :

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{L(a,b)}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

→ Le circuit électrique implémente la fonction logique OU : $L(a,b) = a \vee b = a + b$.

Conclusion

Il est possible de modéliser le fonctionnement d'un circuit électrique constitué d'interrupteurs par une **fonction logique** qui combine un certain nombre de **variables booléennes** (variables qui ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1) avec des **opérateurs logiques** (ET, OU, …).

4.4.2 Algèbre de Boole

Considérons :

- un ensemble dont les éléments sont des variables (notées a, b, c, …) ne pouvant prendre que deux valeurs 0 et 1 ;
- trois opérations appelées : addition, multiplication et complémentation, définies par les tables de vérité suivantes :

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a+b}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a\,.\,b}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\bar{a}}$
0	1
1	0

On dit que l'ensemble de ces variables, muni des 3 opérations, a une structure **d'algèbre de Boole.**

Un lien évident avec la logique mathématique montre que l'addition correspond à OU, la multiplication à ET et la complémentation à NON.

Une **fonction logique** de n variables booléennes peut s'exprimer comme un polynôme de ces n variables.

Exemple :

$$F(a,b,c) = \big((ab + c)\,.\,(a\bar{b}c)\big) + \bar{a}c$$

Pour calculer la **table de vérité** de cette fonction logique, on procède de la même manière que pour déterminer la table de vérité de la formule propositionnelle correspondante :

$$(((a \wedge b) \vee c) \wedge (a \wedge \neg b \wedge c)) \vee (\neg a \wedge c)$$

4.4.3 Propriétés et théorèmes fondamentaux

Nom	Forme OU	Forme ET
Neutre	$a + 0 = a$	$a \,.\, 1 = a$
Constante	$a + 1 = 1$	$a \,.\, 0 = 0$
Idempotence	$a + a = a$	$aa = a$
Complémentation	$a + \bar{a} = 1$	$a\bar{a} = 0$
Commutativité	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$	$(ab)c = a(bc)$ = abc
Distributivité	$a(b + c) = ab + ac$	$a + (bc) = (a + b)(a + c)$
Absorption	$a + ab = a$	$a(a + b) = a$
Th. de De Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$	$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

4.4.4 Formes normales

Toute fonction logique peut être normalisée sous une des deux formes normales décrites ci-dessous.

4.4.4.1 Forme normale disjonctive

Une fonction logique est en **forme normale disjonctive** si elle est exprimée comme étant une disjonction (∨, OU, +) d'une ou plusieurs conjonctions (∧, ET, .) d'une ou plusieurs variables booléennes. On parle également d'une **somme de mintermes**.

Exemple : $ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + abc$

4.4.4.2 Forme normale conjonctive

Une fonction logique est en **forme normale conjonctive** si elle est exprimée comme étant une conjonction (∧, ET, .) d'une ou plusieurs disjonctions (∨, OU, +) d'une ou plusieurs variables booléennes. On parle également d'un **produit de maxtermes**.

Exemple : $(a + b + \bar{c}) \,.\, \left(\bar{a} + \bar{b} + c\right) \,.\, (a + b + c)$

4.4.4.3 Forme normale et table de vérité

Si on connait la table de vérité d'une fonction logique, il est très facile de déterminer les deux formes normales qui correspondent à cette fonction. Ce sujet étant abordé en détail dans le cours d'architecture des ordinateurs, nous ne nous y attarderons pas ici.

4.4.5 Tables de Karnaugh

La méthode des **tables de Karnaugh** est souvent utilisée pour déterminer l'*expression polynomiale minimale* d'une fonction logique.

Classiquement, une fonction logique de n variables est représentée par une table de vérité qui comporte 2^n lignes. Chaque ligne indique la valeur de vérité de la fonction pour une des 2^n combinaisons distinctes des valeurs des variables d'entrée. Les lignes sont ordonnées selon une numérotation binaire croissante. Par exemple, avec trois variables : $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$.

La méthode de Karnaugh adopte une disposition différente, qui prend la forme d'un tableau à deux dimensions de 2^n cases, dans lequel les mots binaires (i.e. les combinaisons des variables d'entrée) sont disposés de manière à ce que deux cases adjacentes diffèrent d'un seul bit (i.e. une seule variable a une valeur différente entre ces deux cases).

La méthode des tables de Karnaugh est particulièrement utile pour simplifier les fonctions logiques de trois et quatre variables. Bien que possible, sa mise en œuvre devient nettement plus difficile à partir de cinq variables.

4.4.5.1 Cas de 3 variables

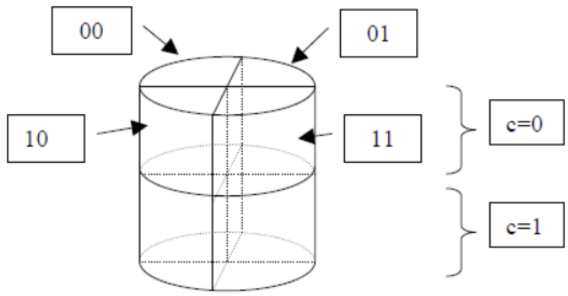
Voici la disposition de la table de Karnaugh pour une fonction logique de 3 variables a, b et c. La table comporte 8 cases (2^3) :

- les 4 colonnes correspondent aux 4 combinaisons possibles pour les variables a et b ;
- les 2 lignes correspondent aux 2 combinaisons possibles pour la variable c.

abc		$\bar{a}$		a	
		00	01	11	10
$\bar{c}$	0	000	010	110	100
c	1	001	011	111	101
		$\bar{b}$	b		$\bar{b}$

Attention : pour passer d'une case à une autre, il faut respecter la règle d'adjacence. Deux cases voisines correspondent à 2 codes adjacents, c'est-à-dire qu'on ne peut changer la valeur que d'**une seule variable à la fois** !

Il convient de remarquer que cette règle d'adjacence est applicable de manière « circulaire », lorsqu'on passe de la dernière colonne à la première. La table de Karnaugh pour 3 variables est assimilable à un cylindre, comme illustré par la figure suivante.



4.4.5.2 Cas de 4 variables

Voici la disposition de la table de Karnaugh pour une fonction logique de 4 variables a, b, c et d. La table comporte 16 cases (2^4) :

- les 4 colonnes correspondent aux 4 combinaisons possibles pour les variables a et b ;
- les 4 lignes correspondent aux 4 combinaisons possibles pour les variables c et d.

$abcd$		$\bar{a}$		a		
		00	01	11	10	
$\bar{c}$	00	0000	0100	1100	1000	$\bar{d}$
	01	0001	0101	1101	1001	d
c	11	0011	0111	1111	1011	
	10	0010	0110	1110	1010	$\bar{d}$
		$\bar{b}$	b		$\bar{b}$	

4.4.5.3 Représentation d'une fonction par une table de Karnaugh

Soit la fonction de 3 variables a, b et c, définie par la *forme normale disjonctive* suivante :

$$F = a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}bc + abc \ (= 100 + 101 + 011 + 111)$$

Nous pouvons représenter cette fonction au moyen de la table de Karnaugh suivante :

ab / c	00	01	11	10
0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}b\bar{c}$	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$
1	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}bc$	abc	$a\bar{b}c$

$\Rightarrow$

ab / c	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

4.4.5.4 Règles de simplification

Première simplification

Dans une table de Karnaugh, on peut regrouper deux cases adjacentes pour lesquelles la fonction étudiée vaut 1 :

- dans une table de 3 variables, on obtient alors un *minterme*, c.-à-d. une conjonction (ou produit) logique de 2 variables ;
- dans une table de 4 variables, on obtient un *minterme* de 3 variables.

Exemple :

$$F = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d + abc\bar{d}\ (= 0010 + 0011 + 0101 + 1101 + 1110)$$

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	0
10	1	0	1	0

$$\Rightarrow\ F = \bar{a}\bar{b}c + b\bar{c}d + abc\bar{d}$$

Deuxième simplification

Dans une table de Karnaugh, on peut regrouper 4 cases adjacentes pour lesquelles la fonction étudiée vaut 1 :

- dans une table de 3 variables, on obtient alors un terme d'une seule variable ;
- dans une table de 4 variables, on obtient alors un *minterme* de 2 variables.

Exemple :

$$F = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bcd + \bar{a}bc\bar{d} + ab\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d\ \ (= 0010 + 0011 + 0111 + 0110 + 1101 + 1001)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

$$\Rightarrow\ F = \bar{a}c + a\bar{c}d$$

Troisième simplification

On peut regrouper 8 cases adjacentes pour lesquelles la fonction étudiée vaut 1 :

- dans une table de 3 variables, la fonction est alors égale à 1 ;
- dans une table de 4 variables, on obtient un terme d'une seule variable.

De manière générale…

- Lorsqu'on effectue un regroupement de 2^k cases adjacentes dans une table de Karnaugh d'une fonction F de n variables, on obtient alors un *minterme* de $n - k$ variables.
- Afin de simplifier au maximum une fonction logique, on cherchera à effectuer les regroupements les plus importants.
- Deux regroupements peuvent se chevaucher pour être les plus grands possibles.
- Pour écrire le *minterme* correspondant à un regroupement, on ne retient que les variables dont l'état <u>ne change pas</u>.

Organisation pratique

- **Etape 1** : on complète la table de Karnaugh de la fonction.
- **Etape 2** : on recherche visuellement des ensembles de cases adjacentes les plus grands possibles pour lesquelles la fonction vaut 1. Pour une table à 4 variables, on cherchera à identifier des regroupements de 16 cases, puis 8 cases, puis 4 cases, puis 2 cases, et enfin les cases isolées.
  Attention, il ne faut pas oublier que l'adjacence peut avoir lieu de manière circulaire au niveau des bords et des coins !
- **Etape 3** : si un ensemble identifié est entièrement inclus dans un ensemble plus grand, il n'est pas pris en considération.
- **Etape 4** : on arrête le processus de recherche lorsque les ensembles identifiés englobent la totalité des cases pour lesquelles la fonction vaut 1.
- **Etape 5** : on exprime la fonction logique comme étant la somme des *mintermes* correspondant à chacun des ensembles retenus.

Exemples :

Trouver l'expression simplifiée pour chacune des 4 tables de Karnaugh suivantes.
Disposition = $[_{ab}\backslash^{cd}]$.

	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$F = b\bar{d} + \bar{b}d$

	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	0	0	0	1

$F = ab\bar{c} + \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d$

	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

$F = ab + d$

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$F = bd + \bar{b}\bar{d}$

Dans tous les exemples précédents, nous avons regroupé les cases pour lesquelles la fonction F vaut 1. Il est également possible de déterminer l'expression de $\overline{F}$ en regroupant les cases pour lesquelles la fonction vaut 0, puis de calculer la négation de ce résultat. On obtient alors l'expression de F dans une forme normale conjonctive.

Exemple : calcul de $\overline{F}$ pour l'exemple de gauche ci-dessus.

$\overline{F} = bd + \overline{b}\overline{d}$ (cf. table de droite) → $F = (\overline{b} + \overline{d})(b + d)$

4.4.6 Exercices

1. On note F la fonction booléenne de 4 variables définie par :

$$F(a,b,c,d) = abcd + abc\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + a\overline{b}cd + a\overline{b}\overline{c}d + a\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}d + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$$

   a. Déterminer sa table de vérité et ensuite son diagramme de Karnaugh.
   b. Trouver la formule polynomiale la plus simple qui représente F.

a	b	c	d									$F(a,b,c,d)$
0	0	0	0									
0	0	0	1									
0	0	1	0									
0	0	1	1									
0	1	0	0									
0	1	0	1									
0	1	1	0									
0	1	1	1									
1	0	0	0									
1	0	0	1									
1	0	1	0									
1	0	1	1									
1	1	0	0									
1	1	0	1									
1	1	1	0									
1	1	1	1									

ab / cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

2. On considère deux fonctions booléennes U et V, des 4 variables a, b, c et d définies par :

$U(a,b,c,d) = (a+d)(b+c)$ $V(a,b,c,d) = (a+c)(\bar{b}+d)$

a. Dessiner les diagrammes de Karnaugh de U et de V.

$U =$

U ab cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$V =$

V ab cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

b. En déduire le diagramme de Karnaugh de $W = UV + \bar{U}\bar{V}$.

On obtient la table pour $\bar{U}$ en ....

$\bar{U}$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$\bar{V}$	00	01	11	10

On obtient la table de UV en ....

UV	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$\bar{U}\bar{V}$	00	01	11	10

On obtient la table de W en ....

W	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

c. Donner une formule simplifiée pour W.

3. Simplifier l'expression suivante grâce au tableau de Karnaugh :

$F(a,b,c) = (abc) + (a\overline{b}\overline{c}) + (\overline{a}b\overline{c}) + (\overline{a}\overline{b}c) + (\overline{a}bc) + (a\overline{b}c)$.

ab / c	00	01	11	10
0				
1				

4. On considère l'expression $F(a,b,c) = \overline{a}\overline{c} + b\overline{c} + a\overline{b} + \overline{a}\overline{b}c$.

a. Simplifier l'écriture de F à l'aide d'un diagramme de Karnaugh et en déduire que $F = \overline{b} + \overline{c}$.

ab / c	00	01	11	10
0				
1				

b. Retrouver par calcul la forme simplifiée de F.

5. Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à retrouver un emploi, on considère pour ces personnes les trois variables booléennes a, b et c définies ainsi :

   - $a = 1$ si la personne a 45 ans ou plus, sinon $a = 0$;
   - $b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus, sinon $b = 0$;
   - $c = 1$ si la personne a déjà suivi une qualification l'année précédente, sinon $c = 0$.

   Une formation sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

   - avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins d'un an ;
   - avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente ;
   - être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente ;
   - avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins d'un an et avoir suivi une formation l'année précédente.

   Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.

   a. Ecrire l'expression de la fonction $F(a, b, c)$ qui traduit le fait que la personne pourra suivre cette formation.
   b. En déduire les personnes qui ne pourront pas participer à la formation et qui participeront donc à un stage d'insertion.

   $F(a, b, c) =$ ………………………………

ab c	00	01	11	10
0				
1				

6. Le gérant d'un magasin de vente de matériel d'occasion décide de réaliser une enquête sur les critères de choix des clients concernant l'achat d'ordinateurs. Il examine 3 critères, associés à trois variables booléennes a, b et c.

   - La variable a concerne l'ancienneté : $a = 0$ si l'ordinateur a moins d'un an et $a = 1$ s'il a un an ou plus.
   - La variable b concerne l'état : $b = 0$ si l'ordinateur est un peu abimé, $b = 1$ s'il est en bon état.
   - La variable c concerne la fiabilité : $c = 0$ si la marque est réputée peu fiable, $c = 1$ sinon.

   Après dépouillement, il apparait que les clients achètent un ordinateur si :

   - il a moins d'un an et que sa marque est réputée fiable ;
   - ou s'il a plus d'un an mais qu'il est en bon état ;
   - ou si sa marque est réputée peu fiable mais qu'il a moins d'un an.

   a. Traduire par une fonction booléenne $F(a, b, c)$ l'ensemble des critères d'achat.
   b. Construire la table de Karnaugh de la fonction F et en déduire une expression simplifiée. Traduire cette expression simplifiée par un énoncé en français.
   c. Démontrer ce résultat simplifié par calcul.
   d. En déduire une expression de $\bar{F}$ et traduire cette expression par une phrase.

7. Trouvez les formules polynomiales minimales pour les fonctions suivantes :

   a. $ab + a\bar{c} + bc$
   b. $ab + bc + ca$
   c. $\bar{a} + (\bar{c} + a + \bar{b}c)(c + \bar{a}b)$
   d. $(ab + \bar{c})(\bar{b} + \bar{a}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c})$
   e. $a\bar{b} + b\bar{c} + \bar{b}c + \bar{a}b$
   f. $a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$
   g. $(ab\bar{c}) + b(b + c) + \bar{c}(a + b)$
   h. $(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + c)(a + b + \bar{c})$
   i. $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + b + \bar{c})$
   j. $a(c + b\bar{c}) + \bar{a}(b + \bar{b}c) + (\bar{a}\bar{b}\bar{c})$
   k. $(abc) + (a\bar{b}\bar{c}) + (\bar{a}b\bar{c}) + (\bar{a}\bar{b}c)$
   l. $(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + b + c)(\bar{a} + \bar{b} + c)(a + b + c)$

5 Ensembles et suites

5.1 Introduction

La **théorie des ensembles** a été initiée par Georg Cantor, mathématicien allemand, à la fin du 19ème siècle. Il définissait un ensemble comme « un groupement d'objets déterminés et bien distincts, de notre perception ou de notre entendement, et que l'on appelle les éléments de l'ensemble ».

La théorie des ensembles est considérée comme une *théorie fondamentale* des mathématiques, car tout objet mathématique (ou presque) peut être défini en utilisant les notions d'ensemble et d'appartenance, ainsi que quelques opérations permettant de construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles déjà connus.

Nous allons définir ici les opérations usuelles sur les ensembles (sous-ensembles, ensemble complémentaire, intersection, …) et nous les illustrerons.

Nous nous intéresserons ensuite la notion de suite.

5.2 Les ensembles

5.2.1 Définition

Un **ensemble** est une collection non-ambigüe d'objets <u>tous distincts</u> qu'on appelle les **éléments** de l'ensemble.

Dans la pratique, il y a deux façons de construire ou de décrire un ensemble :

1. **En extension** : on donne la liste de ses éléments.

   Exemples :

   - $A = \{ 0, 1, 2, 5, 9, 11 \}$
   - $B = \{$ Alain Dupont, Béatrice Durand, Lionel Hicq, Nadine Tudor $\}$
   - $C = \{ 1, 2, 3, \dots, 100 \}$

2. **En compréhension** : on décrit une caractéristique ou une propriété commune à tous les éléments de l'ensemble.

Exemples :

- $A = \{ x \mid x \ est\ élève\ du\ bachelier\ en\ informatique$ à $HELMo \}$
- $B = \{ n \mid n\ est\ un\ entier\ naturel \}$
- $C = \{ x \mid x\ est\ un\ entier\ positif\ divisant\ 4 \}$
- $D = \{ x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N} \}$

Cette notation des ensembles en *compréhension* fait appel à la notion de *prédicat* (cf. section 4.3). Soit $P(x)$ un prédicat sur la variable x, alors l'ensemble A de tous les objets rendant vraie la proposition $P(x)$ s'écrit :

$$A = \{ x \mid P(x) \}$$

L'**ensemble vide** est celui qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$. En extension, on écrit {}.

Les ensembles mathématiques les plus courants sont les ensembles de nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Les cinq premiers ont été décrits à la section 2.1. L'ensemble $\mathbb{C}$ est quant à lui l'**ensemble des nombres complexes**.

Ces mêmes ensembles avec * ou $^{\times}$ comme indice supérieur désignent les ensembles sans l'élément 0. Ainsi, $\mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{N}^{\times}$) représente l'ensemble des nombres naturels <u>strictement</u> positifs.

Ces mêmes ensembles avec $+$ ou $-$ comme indice supérieur désignent les ensembles des éléments positifs ou négatifs correspondants. Ainsi, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

5.2.2 Caractéristiques

5.2.2.1 Appartenance d'un élément

Un ensemble A est une collection d'éléments.

Si un élément x fait partie de l'ensemble, on dit que x **appartient** à l'ensemble A et on écrit $\boldsymbol{x \in A}$ (« x appartient à A »).
Si un élément y ne fait pas partie de l'ensemble, on dit qu'il **n'appartient pas** à A et on écrit $\boldsymbol{y \notin A}$ (« y n'appartient pas à A »).

Exemples :

- $4 \in \mathbb{N}$, $-5 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
- $4 \notin \emptyset$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $-12 \notin \mathbb{N}$

5.2.2.2 Ordre et énumération des éléments

Un ensemble est une collection d'éléments **non ordonnée** et **sans répétition**.

En d'autres termes, l'ordre des éléments, dans une description en extension, n'a aucune importance. De même, le fait de répéter un ou plusieurs éléments dans une description en extension ne modifie aucunement l'ensemble décrit.

Ainsi $\{3, 2, 1\}, \{2, 1, 3\}$ et $\{3, 3, 1, 3, 2, 3, 1\}$ sont toutes des représentations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

5.2.2.3 Cardinal d'un ensemble

Si un ensemble E contient n éléments distincts, avec $n \in \mathbb{N}$, on dira que l'ensemble E est **fini**.

On appelle **cardinal** d'un ensemble fini le nombre d'éléments qu'il contient.

On le note souvent $|E|$ ou $\#E$.

Exemples : $|\emptyset| = 0$ $|\{0\}| = 1$ $|\{a, b\}| = 2$ $|\{w, x, y, z\}| = 4$

L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul.

Un ensemble de cardinal égal à 1 est appelé **singleton**.

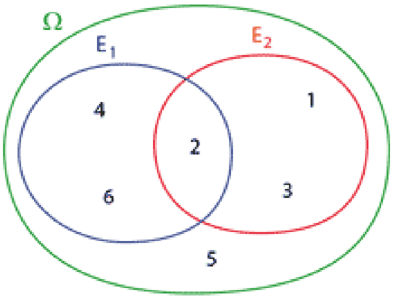
Un ensemble de cardinal égal à 2 est appelé **paire**.

5.2.3 Relations entre ensembles

On fixe un **référentiel E** (parfois appelé **univers Ω**) qui sera l'ensemble de référence pour la suite des opérations sur les ensembles.

5.2.3.1 Diagramme d'Euler-Venn

Des ensembles peuvent être représentés au moyen d'un diagramme d'Euler-Venn comme illustré ci-contre.



Ce diagramme montre deux ensembles E_1 et E_2, ainsi que l'univers de référence Ω.

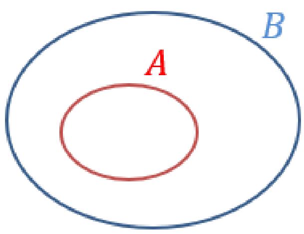
Chaque ensemble est délimité par une courbe fermée. Les éléments situés à l'intérieur de cette courbe appartiennent à l'ensemble concerné.

Ainsi, $E_1 = \{2, 4, 6\}$ et $E_2 = \{1, 2, 3\}$.

L'élément 2 appartient aux deux ensembles, tandis que l'élément 5 n'appartient à aucun ensemble.

5.2.3.2 Inclusion

On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un autre ensemble B, ou que A est un **sous-ensemble** de B (ce que l'on note $A \subset B$) si tous les éléments de A sont aussi dans B.



En d'autres termes, si $x \in A$, alors $x \in B$.

On peut définir l'inclusion de la façon suivante :
$\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$.

Exemple : L'ensemble des entiers naturels pairs est inclus dans $\mathbb{N}$.

5.2.3.3 Egalité

Deux ensembles A et B sont dits **égaux** s'ils contiennent exactement les mêmes éléments.
On écrit $A = B$.

On peut définir l'égalité de la façon suivante : $\forall x \in E, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$.

Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.

Réciproquement, si $A = B$, alors $A \subset B$ et $B \subset A$.

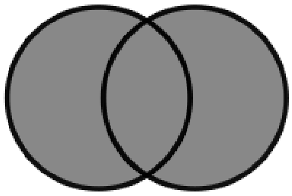
Exemples

- $\emptyset \subset \mathbb{N}$, mais pas l'inverse $\Rightarrow$ $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas égaux.
- $\{x \mid (x \in \mathbb{Z}) \land (x^2 < 4)\} = \{1, -1, 0\}$ (*ensemble des nombres entiers dont le carré est* < 4)

5.2.4 Opérations ensemblistes

5.2.4.1 Union

Si A et B sont deux ensembles, on peut former un nouvel ensemble qui reprend tous les éléments de A et de B.
Cet ensemble est appelé **union de A et B** et est défini comme suit :



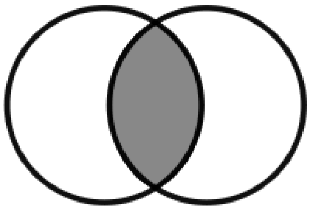
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

Exemple :

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, alors :
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 16, 32\}$

5.2.4.2 Intersection

Si A et B sont 2 ensembles, on peut former un nouvel ensemble qui reprend les éléments qui appartiennent simultanément à A et à B.



Cet ensemble, appelé **intersection de A et B**, est défini comme suit :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

Exemple :

Si A est l'ensemble des entiers naturels pairs $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$,
alors : $A \cap B = \{0, 2, 8\}$.

5.2.4.3 Généralisation de l'union et de l'intersection

On peut étendre les opérations d'union et d'intersection à un nombre fini d'ensembles :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \qquad \bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$$

5.2.4.4 Cardinal de l'union de deux et trois ensembles

Soient A et B des ensembles finis respectivement de cardinal $|A|$ et $|B|$.
Que vaut le cardinal de $A \cup B$?

Le simple calcul de la somme $|A| + |B|$ conduirait à compter deux fois les éventuels éléments communs à A et B.

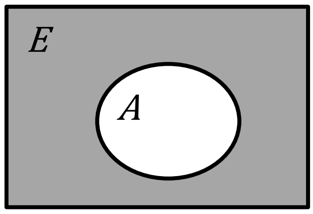
La réponse correcte est donnée par :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Pour l'union de trois ensembles, on obtient :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

5.2.4.5 Complémentaire



Soit A un sous-ensemble de E (= univers de référence).
Le **complémentaire de A** dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
On le note $\bar{A}$ (ou $C_E A$ ou A^c) et il est défini comme suit :

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Exemple :

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, le complémentaire de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs. Cet ensemble est défini par :

$\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{I} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \mathbb{P}\}$, c'est-à-dire $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y + 1\}$

5.2.4.6 Propriétés des opérations ensemblistes

Les opérations d'union, d'intersection et de complémentation présentent les propriétés suivantes :

<table>
<tr><th>Nom</th><th colspan="3">Union</th><th colspan="3">Intersection</th></tr>
<tr><td>Neutre</td><td colspan="3">$A \cup \emptyset = A$</td><td colspan="3">$A \cap E = A$</td></tr>
<tr><td>Constante</td><td colspan="3">$A \cup E = E$</td><td colspan="3">$A \cap \emptyset = \emptyset$</td></tr>
<tr><td>Idempotence</td><td colspan="3">$A \cup A = A$</td><td colspan="3">$A \cap A = A$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Complémentation</td><td colspan="3">$A \cup \bar{A} = E$</td><td colspan="3">$A \cap \bar{A} = \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\bar{E} = \emptyset$</td><td colspan="2">$\bar{\emptyset} = E$</td><td colspan="2">$\bar{\bar{A}} = A$</td></tr>
<tr><td>Commutativité</td><td colspan="3">$A \cup B = B \cup A$</td><td colspan="3">$A \cap B = B \cap A$</td></tr>
<tr><td>Associativité</td><td colspan="3">$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$</td><td colspan="3">$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$</td></tr>
<tr><td>Distributivité</td><td colspan="3">$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$</td><td colspan="3">$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$</td></tr>
<tr><td>Absorption</td><td colspan="3">$A \cup (A \cap B) = A$</td><td colspan="3">$A \cap (A \cup B) = A$</td></tr>
<tr><td>Th. de De Morgan</td><td colspan="3">$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$</td><td colspan="3">$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$</td></tr>
</table>

L'inclusion peut se définir à partir de l'union et de l'intersection :

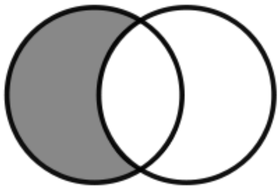
$$A \subset B \iff (A \cup B) = B$$

$$A \subset B \iff (A \cap B) = A$$

Enfin, on a également la propriété suivante :

$$A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$$

5.2.4.7 Différence



Si A et B sont deux ensembles, on peut former un nouvel ensemble qui reprend les éléments appartenant à A mais pas à B.

Cet ensemble est appelé **différence de A et B** et est défini comme suit :

$A - B$ ou $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

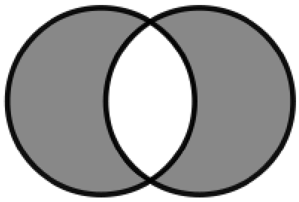
La différence peut également se définir à partir du complémentaire :

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

Exemple :

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, alors :
$A \setminus B = \{3, 5, 7\}$

5.2.4.8 Différence symétrique



Si A et B sont deux ensembles, on peut former un nouvel ensemble qui reprend les éléments appartenant à A ou à B, mais pas aux deux simultanément.

Cet ensemble est appelé **différence symétrique de A et B** et est défini comme suit :

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \cup (x \notin A \wedge x \in B)\} \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

Exemple :

Si $\mathrm{A} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $\mathrm{B} = \{0, 1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, alors :
$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \{3, 4, 5, 7, 16, 32\}$

Propriétés de la différence symétrique

Nom	Propriété
	$\bar{A} = E \oplus A$
	$\bar{A} \oplus A = E$
	$A \oplus A = \emptyset$
Associativité	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
Commutativité	$A \oplus B = B \oplus A$
Neutre (Ø)	$A \oplus \emptyset = A$
Distributivité (∩)	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
Complémentaire	$\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus B = \overline{B} \oplus A$

5.2.4.9 Produit cartésien

Si A et B sont deux ensembles, on peut former un nouvel ensemble composé de tous les couples dont la première composante est un élément de A et la deuxième est un élément de B.

Cet ensemble est appelé **produit cartésien de A et B** et est défini comme suit :

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

Le cardinal du produit cartésien est donné par la relation : $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$

Exemple :

Soients les ensembles $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4, 8\}$, leur produit cartésien est :

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (0,0), (0,1), (0,2), (0,4), (0,8), \\ & (1,0), (1,1), (1,2), (1,4), (1,8), \\ & (2,0), (2,1), (2,2), (2,4), (2,8), \\ & (3,0), (3,1), (3,2), (3,4), (3,8), \\ & (5,0), (5,1), (5,2), (5,4), (5,8) \} \end{aligned}$$

Il est parfois plus simple de représenter le produit cartésien de 2 ensembles par un tableau rectangulaire.
Ainsi, si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1\}$, on représentera $A \times B$ par le tableau suivant :

	0	1
a	$(a, 0)$	$(a, 1)$
b	$(b, 0)$	$(b, 1)$
c	$(c, 0)$	$(c, 1)$

Chaque case correspond à un élément de $A \times B$.

Lorsque $A = B$, le tableau est évidemment carré.

Exemple :

Une entreprise fabrique des badges qui peuvent être :

- de différentes couleurs (r =rouge, v =vert, b =bleu, j =jaune) ;
- de différentes tailles (s =small, m =medium, l =large) ;
- avec une fixation à coller (c) ou à épingler (e).

En notant $C = \{r, v, b, j\}$, $T = \{s, m, l\}$ et $F = \{c, e\}$, le produit cartésien des 3 ensembles $C \times T \times F$ peut être considéré comme l'ensemble des différents modèles de badges fabriqués par l'entreprise.

➔ Le nombre de ces modèles est égal à $|C \times T \times F| = |C| \,.\, |T| \,.\, |F| = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 24$.

Propriétés du produit cartésien

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$

$$|A \times B| = |A| \,.\, |B| = |B \times A|$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \text{ et } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$$

5.2.5 Parties et partitions

5.2.5.1 Ensemble des parties

Soit A un ensemble. On peut former un nouvel ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de A.

Cet ensemble est appelé **ensemble des parties de A** et est défini comme suit :

$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ c.-à-d. l'ensemble de tous les (sous-)ensembles X inclus dans A.

Exemple :

Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, l'ensemble des parties de A est :

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Remarques :

- On considère que l'ensemble vide ($\emptyset$) est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. Par conséquent, l'ensemble des parties d'un ensemble n'est jamais vide.
- Si $|A| = n$, alors $|P(A)| = 2^n$. (*Note : pouvez-vous démontrer cette propriété ?*)

5.2.5.2 Partition d'un ensemble

Soit A un ensemble. On appelle **partition de A** tout découpage de A en sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints (c.-à-d. n'ayant pas d'élément commun).

Ainsi, l'ensemble $P = \{A_1,\ A_2,\ A_3, \dots ,\ A_n\}$ où $A_1,\ A_2,\ A_3, \dots , A_n$ sont des sous-ensembles de A est une partition de A si :

1. $\forall i : A_i \neq \emptyset$ sous-ensembles non vides
2. $\forall i,\ j : (i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j) = \emptyset$ disjoints deux à deux
3. $\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{A_i} = A$ contiennent tous les éléments de A

Exemple :

Soient l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$
et les sous-ensembles $E_1 = \{a, c, d\},\ E_2 = \{b, f\},\ E_3 = \{e\}$ et $E_4 = \{a, e\}$:

- $\{E_1, E_2, E_3\}$ est une partition de E.
- $\{E_1, E_2, E_4\}$ n'est pas une partition de E (car $E_1 \cap E_4$ n'est pas vide !).

5.2.6 Les ensembles en informatique

Il existe un lien évident entre les ensembles et les bases de données relationnelles. En effet, dans une base de données relationnelle, les données sont organisées en tables. Chacune de ces tables n'est rien d'autre qu'un ensemble d'éléments (appelés tuples).

Par exemple, une base de données qui modélise une bibliothèque contiendra un certain nombre de tables représentant les ensembles suivants : ensemble des livres, ensemble des auteurs, ensemble des emprunteurs, etc.

Les opérations de sélection de données (SELECT) sur la base de données peuvent s'interpréter comme étant des opérations ensemblistes.

Exemples :

- Sélectionner les auteurs qui sont de sexe masculin *et* dont le prénom est « John », revient à calculer l'*intersection* entre l'ensemble des auteurs de sexe masculin et l'ensemble des auteurs dont le prénom est « John ».
- Sélectionner les auteurs qui sont de sexe masculin *ou* dont le prénom est « John », revient à calculer l'*union* des 2 ensembles précédents.

L'opération de jointure (JOIN) entre 2 tables est quant à elle équivalente au *produit cartésien* de deux ensembles.

5.3 Exercices

1. Définir les ensembles suivants en compréhension (par une phrase en français) :

   a. $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

   b. $B = \{1, 2, 7, 14\}$

   c. $C = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

2. Définir les ensembles suivants en extension :

   a. $A = \{x \in \mathbb{R} \,|x(x + 5) = 14\}$

   b. $B = \{x \in \mathbb{N} \,|x(2x + 3) = 14\}$

3. Décrire en extension les ensembles suivants :

   a. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \ \leq \ 9\}$

   b. $B = \{y \in \mathbb{N}^* \mid \exists k \in \mathbb{Z} : y = 2k\}$

4. Décrire en compréhension les ensembles suivants :

   a. $A = \{a, e, i, o, u, y\}$

   b. $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

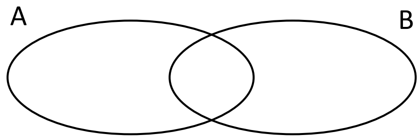
   c. $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots.\}$

5. Quelle est la cardinalité des ensembles suivants ?
   a. $A = \{\, lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche \,\}$
   b. $B = \{0, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7\}$
   c. $C = \{\,\}$

6. Illustrer par un diagramme de Venn les parties suivantes :
   a. $A \cap B \cap C$
   b. $A \cap B \cap \bar{C}$
   c. $\bar{C} \cap (A \cup B)$
   d. $A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$
   e. $\bar{A} \cup (B \cap C)$
   f. $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap C)$
   g. $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A})$

7. Déterminer s'il y a égalité entre les deux ensembles situés sur la même ligne grâce aux diagrammes de Venn :
   a. $B \cap (A \cup C)$ $((A \cap B) \cup C) \cap B$
   b. $\bar{A} \cap B \cap C$ $((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B)) \cap C$
   c. $A \cup (B \cap C)$ $((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{C})) \cup A$

8. Sur le diagramme de Venn ci-contre, représenter les objets x, Y et z sachant que :



   a. $(x \in A) \wedge (x \notin B)$

   b. $Y \subset B$

   c. $(z \in A) \wedge (z \in Y)$

9. Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les 3 ensembles suivants :

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad$ $B = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad$ $C = \{3, 4, 5, 8\}$

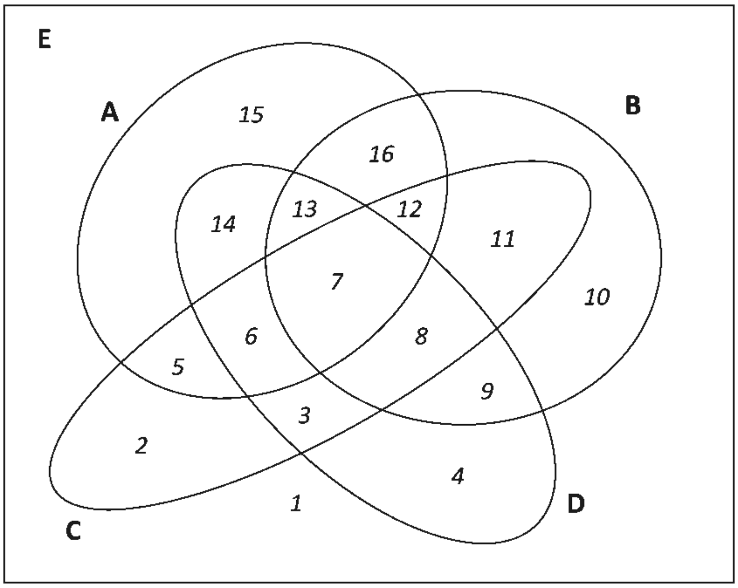
   a. Déterminer si $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.
   b. Déterminer si $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
   c. Démontrer ces résultats aux moyens de tables de vérité.

10. Soit l'ensemble $\mathbb{B}$ composé des éléments 0 et 1.
    a. Quels sont les éléments de $P(\mathbb{B})$?
    b. Quels sont les éléments de $P(P(\mathbb{B}))$?

11. Quels sont éléments de $P(\emptyset)$ et de $P(P(\emptyset))$?

12. Dessiner un diagramme de Venn qui illustre chacune des 2 situations suivantes :
    a. $A \cup B = A \cup C \; avec \; B \neq C$
    b. $A \cap B = A \cap C \; avec \; B \neq C$

13. Le diagramme de Venn ci-contre représente 16 parties d'un référentiel E.



On donne des noms aux quatre ensembles (ovales) :

$A = 5 \cup 6 \cup 7 \cup 12 \cup 13 \cup 14 \cup 15 \cup 16$

$B = 7 \cup 8 \cup 9 \cup 10 \cup 11 \cup 12 \cup 13 \cup 16$

$C = 2 \cup 3 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 11 \cup 12$

$D = 3 \cup 4 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9 \cup 13 \cup 14$

Exprimer chacune des 16 parties à l'aide des ensembles A, B, C, D, de leurs complémentaires et du symbole ∩.

14. Les élèves d'une école étudient zéro, une ou plusieurs langues. On sait que :

    1) les cours d'anglais sont suivis par 416 élèves,
    2) les cours d'allemand sont suivis par 212 élèves,
    3) il y a 276 garçons dans l'école,
    4) parmi les garçons, 103 font de l'anglais et 78 font de l'allemand,
    5) 98 élèves font à la fois de l'anglais et de l'allemand et parmi eux 30 sont des garçons,

    Combien de filles étudient au moins une des deux langues ?

15. Une enquête révèle que, sur 100 étudiants interrogés, 28 suivent le cours de mathématiques, 30 suivent le cours d'informatique, 42 suivent le cours d'économie, 10 suivent les cours de mathématiques et d'économie, 8 suivent les cours de mathématiques et d'informatique, 5 suivent les cours d'informatique et d'économie, et enfin 3 suivent les 3 cours.
Sur ces 100 étudiants, combien y en a-t-il :
    a. qui ne suivent aucun des 3 cours ?
    b. qui ne suivent que le cours d'économie ?
    c. qui suivent au moins 2 des 3 cours ?
    d. qui suivent au plus 2 des 3 cours ?

5.4 Les suites

5.4.1 Définition

Une **suite** est une liste <u>ordonnée</u> d'objets, pas nécessairement différents et numérotés à l'aide des entiers $1, 2, 3, \ldots$.

Ces objets sont généralement appelés les **termes** de la suite.

5.4.2 Caractéristiques d'une suite

Une suite peut être **finie** (s'arrêter au n-ième terme) ou **infinie** (ne pas s'arrêter).

La **longueur** d'une suite finie correspond évidemment au nombre de termes qu'elle contient.

La suite de longueur 0 est la **suite vide** et est représentée par $()$.

On appelle **couple** une suite de longueur 2.

Contrairement à ce qui se passe pour les ensembles, l'**ordre des éléments** et les **répétitions** éventuelles sont des notions importantes pour les suites.

Deux suites sont **égales** si elles ont la même longueur et qu'elles coïncident terme à terme.

5.4.3 Représentation générale d'une suite

On note $\boldsymbol{E(s)}$ l'ensemble des différents objets qui figurent dans la suite s.
$E(s)$ est appelé l'**ensemble correspondant à $\boldsymbol{s}$**.
Il est évident que des suites distinctes peuvent avoir le même ensemble correspondant.

Exemples :

- Les suites $(2, 1, 3), (3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3, 2)$ sont distinctes mais elles ont le même ensemble correspondant : $\{1, 2, 3\}$
- $(0, 1, 1, 0, 3, 5, 68, 0)$ est une suite finie de 8 termes.
- $(0, 2, 4, 6, \ldots 2k, \ldots)$ est la suite infinie des nombres pairs positifs.
- $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ est une suite infinie dans laquelle chaque terme d'indice impair vaut 0 et chaque terme d'indice pair vaut 1.
- Un mot peut être considéré comme une suite finie de lettres de l'alphabet.

Attention aux notations

- $\{a, b, c\}$ est un *ensemble* qui contient 3 éléments a, b et c (l'ordre des éléments n'a pas d'importance).
- (a, b, c) est une *suite* qui contient 3 éléments, dans l'ordre a suivi de b suivi de c.

5.4.4 Opérations sur les suites

La seule opération intéressante à faire sur les suites est la **concaténation**.

Si s_1 et s_2 sont des suites, on note $s_1.s_2$ ou s_1s_2 la suite obtenue en juxtaposant, dans cet ordre, les suites s_1 et s_2.

Exemple:

Si $s_1 = (1, 2, 3)$ et $s_2 = (3, 2, 8, 4)$, alors :

$s_1s_2 = (1, 2, 3, 3, 2, 8, 4)$, et

$s_2s_1 = (3, 2, 8, 4, 1, 2, 3)$.

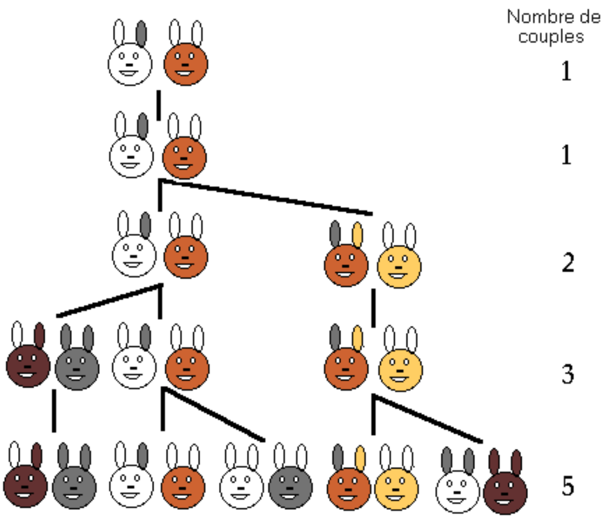
5.4.5 Exemple de suite célèbre : la Suite de Fibonacci

La **suite de Fibonacci** est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Classiquement, la suite débute avec les termes 0 et 1, ce qui donne : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$

Exemple :

Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple (*1 mâle + 1 femelle*) à compter du troisième mois de son existence ?

Aucun lapin ne meurt, tous les lapins sont hétéros !



Soit L_n le nombre de couples de lapins au mois n.

Pour raison de puberté, la population se maintient à un couple jusqu'à la fin du deuxième mois.

On peut donc écrire $L_1 = L_2 = 1$

Dès le début du troisième mois, le couple de lapins est âgé de plus de 2 mois et peut donc procréer, un autre couple de lapins est engendré.

On écrit donc $L_3 = 2$.

Considérons le mois n et voyons ce qu'il en sera 2 mois plus tard (n + 2).

L_{n+2} est la somme des couples de lapins au mois n + 1 et des couples pouvant engendrer, c'est-à-dire les couples pubères existant deux mois auparavant.

*On peut donc écrire $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$. Chaque terme de la suite est la somme des deux termes précédents. C'est donc une suite de Fibonacci. La réponse est donc égale à **144 lapins**.*

5.5 Exercices

1. Quelle est la longueur des suites suivantes ?

   a. $(1, 2, 3, 4)$

   b. $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$

   c. $(1, (2, (3, (4))))$

   d. $(\{1, 2\}, (3, 4), \emptyset)$

2. Quel est le cardinal des ensembles suivants ?

   a. $\{(1, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

   b. $\{(\{1, 2\}), (\{1, 2\}), (\{2, 1\})\}$

   c. $\{\{1\}, \{2, 3\}, \emptyset, (\ ), \{\ \}\}$

   d. $P(\{(1), (2), (3), (4)\})$

6 Calcul matriciel

6.1 Matrices

6.1.1 Définition et généralités

Soient m et p des entiers strictement positifs.
Une **matrice de dimension $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$** (ou, plus rapidement une **matrice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$**), est un tableau rectangulaire de $m\,.\,p$ éléments, constitué de m **lignes** et p **colonnes**.

Une matrice peut être représentée comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{p}} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} & \cdots & \mathrm{a}_{2\mathrm{p}} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}3} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mp}} \end{bmatrix} = [\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

L'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij}.

Les matrices sont notées par des lettres capitales ; leurs éléments sont notés par la même lettre, quand cela est possible, en minuscule, avec deux indices : le premier pour la ligne et le second pour la colonne.

Les éléments a_{ij} de la matrice A sont également appelés les **coefficients** (ou **termes**) de la matrice A lorsqu'il s'agit de nombres.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3.

Elle est constituée de 6 éléments ; elle possède 2 lignes et 3 colonnes.
Son coefficient $\mathrm{a}_{12} = -1$.

Remarques :

- Une ligne est une rangée horizontale (un n-uple horizontal) ; les lignes sont notées $L_1, L_2, \dots, L_m$;
- Une colonne est une rangée verticale (un n-uple vertical) ; les lignes sont notées $C_1, C_2, \dots, C_p$;.
- Une rangée est soit une ligne, soit une colonne.
- Certains auteurs représentent les matrices en utilisant des grandes parenthèses au lieu des crochets droits.
- $\mathbb{R}^{m \times p}$ est l'ensemble des matrices réelles sur $\mathbb{R}$ à m lignes et p colonnes.

Convention :

Lorsque l'on parle de matrices, on mentionne toujours en premier ce qui concerne les lignes et, en second, ce qui concerne les colonnes.
En particulier, la matrice A de l'exemple précédent sera lue « $0, -1 \;\; 4, 1, 2, -3$ ».

Exemple d'utilisation des matrices : les matrices de commandes et de prix

On suppose que, dans un certain magasin, trois clients peuvent acheter quatre produits.

- Une commande peut être représentée par une matrice 3×4 ; par exemple, la commande C :

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

les lignes correspondent aux clients et les colonnes aux produits.

- Les prix unitaires de chaque produit peuvent constituer une matrice P :

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0.2 \\ 2 & 0.1 \\ 5 & 0.4 \\ 4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

dans ce cas, les lignes concernent les produits,
la première colonne les prix unitaires d'achat et
la deuxième les frais unitaires de transport.

6.1.2 Matrices particulières

6.1.2.1 Matrice nulle

Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.

On note une telle matrice O, ou encore $O_{m\times p}$, si on veut expliciter sa taille.

Exemple : $O = O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nulle de dimension 2×3.

6.1.2.2 Matrice-ligne

Une **matrice-ligne** est une matrice qui comporte 1 seule ligne et n colonnes ; c'est donc une matrice de dimension $1 \times n$. On parle également de matrice-ligne d'ordre n .
Ce type de matrice est aussi appelé **vecteur-ligne**.

Exemple : $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ est une matrice-ligne d'ordre 3.

6.1.2.3 Matrice-colonne

Une **matrice-colonne** est une matrice qui comporte n lignes et 1 seule colonne ; c'est donc une matrice de dimension $n \times 1$. On parle également de matrice-colonne d'ordre n
Ce type de matrice est aussi appelé **vecteur-colonne**.

Exemple : $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est une matrice-colonne d'ordre 3.

6.1.2.4 Matrice carrée

Une **matrice carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.
Une matrice carrée de dimension $n \times n$ est dite matrice **d'ordre** n.

Exemple : $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

La **diagonale principale** d'une matrice carrée A est constituée de ses éléments dont les indices sont égaux, autrement dit, les éléments a_{ii} (c.-à-d. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) ; ces éléments sont dits **diagonaux**.

La **diagonale secondaire** d'une matrice carrée A est constituée des éléments $a_{n-i+1,i}$
(c.-à-d. $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1,n}$.).

La **trace** d'une matrice carrée A est la somme des éléments de sa diagonale principale :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple :

Soit la matrice d'ordre 3 : $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 2 & 7 & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

La diagonale principale de A est constituée des éléments $(3, 1, 6)$.
La diagonale secondaire de A est constituée des éléments $(2, 1, 1)$.
La trace de la matrice A est $tr(A) = 3 + 1 + 6 = 10$.

6.1.2.5 Matrice diagonale

Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée pour laquelle **tous** les éléments situés en-dehors de la diagonale principale sont nuls. En d'autres termes :

$$A = [a_{ij}] \text{ est diagonale si } a_{ij} = 0 \; \forall i, j : i \neq j \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Les éléments situés sur la diagonale principale peuvent être nuls, mais ce n'est pas obligatoire.

Exemple : $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice diagonale.

6.1.2.6 Matrice identité

Une **matrice identité** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui valent $\mathbf{1}$. On note une telle matrice I_n.

Exemple : $I_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

Une matrice identité est donc une matrice diagonale particulière.

6.1.2.7 Matrice triangulaire

Une **matrice triangulaire <u>supérieure</u>** est une matrice <u>carrée</u> dont tous les éléments situés <u>en-dessous</u> de la diagonale principale sont nuls.
En d'autres termes :

$$A = [a_{ij}] \text{ est triangulaire supérieure si } \forall i,j : i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemple : $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 3.

Une **matrice triangulaire <u>inférieure</u>** est une matrice <u>carrée</u> dont tous les éléments situés <u>au-dessus</u> de la diagonale principale sont nuls.
En d'autres termes :

$$A = [a_{ij}] \text{ est triangulaire inférieure si } \forall i,j : i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemple : $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure d'ordre 3.

Une matrice diagonale est donc une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

6.1.2.8 Matrice symétrique / antisymétrique

Une **matrice symétrique** est une matrice <u>carrée</u> dont les éléments situés de manière symétrique par rapport à la diagonale principale sont <u>égaux</u>.
En d'autres termes :

$$A = [a_{ij}] \text{ est symétrique si } a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$$

Exemple : $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice symétrique d'ordre 3.

Une matrice diagonale est toujours symétrique.

Une **matrice antisymétrique** est une matrice <u>carrée</u> dont les éléments situés de manière symétrique par rapport à la diagonale principale sont <u>opposés</u> et dont les éléments diagonaux sont nuls.
En d'autres termes :

$$A = [a_{ij}] \text{ est antisymétrique si } a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i,j \qquad (a_{ii} = -a_{ii} \ \ SSI \ \ a_{ii} = 0)$$

Exemple : $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice antisymétrique d'ordre 3.

6.1.3 Opérations sur les matrices

6.1.3.1 Egalité de deux matrices

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si :

- elles ont même dimension $m \times p$; **et**
- les éléments qui occupent des positions correspondantes (= éléments **correspondants**) sont égaux (c.-à-d. $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1, 2, \dots, m\ et\ \forall j = 1, 2, \dots, p$).

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ sont égales

si $a = 0$, $b = -1$, $c = 4$, $d = 1$, $e = 2$ et $f = -3$.

6.1.3.2 Multiplication scalaire

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice de dimension $m \times p$ et α est un nombre réel, alors αA désigne le produit de la matrice A par le nombre réel α ; à savoir une matrice de dimension $m \times p$ obtenue en multipliant chacun de ses coefficients par ce réel :

$$[\alpha A]_{\mathrm{ij}} = \alpha \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ et $\alpha = 3$, alors $\alpha A = 3A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 12 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$

Remarques :

- $1A = A$; $0A = O_{mp}$;
- La matrice $(-1).A$ se note plus simplement $-A$, et est appelée **opposée** de A.
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \alpha\beta A$.

6.1.3.3 Addition et soustraction de deux matrices

Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont 2 matrices <u>de même dimension</u> $m \times p$, alors :

- La **somme** $A + B$ est une matrice de dimension $m \times p$ obtenue en additionnant les coefficients correspondants des deux matrices :

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- La **différence** $A - B$ est une matrice de dimension $m \times p$ obtenue en soustrayant les coefficients correspondants des deux matrices :

$$[A - B]_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Exemple :

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, alors

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $A - B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

A et B sont de même dimension !

6.1.3.4 Produit de deux matrices

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice de dimension $m \times \boldsymbol{n}$ et $B = [b_{ij}]$ est une matrice de dimension $\boldsymbol{n} \times p$, alors la **matrice produit** de A et B, notée $A \,.\, B$ (ou, plus simplement, AB) est une matrice de dimension $m \times p$ telle que chacun de ses coefficients est la somme des produits termes à termes de la i$^{\text{ème}}$ ligne et de la j$^{\text{ème}}$ colonne :

$$[A \,.\, B]_{ij} = [AB]_{ij} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_{ik}b_{kj}} = L_i C_j$$

Il important de noter que la multiplication de deux matrices n'est définie que si les deux matrices sont **compatibles**, c'est-à-dire si <u>le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice</u> !

Les dimensions des matrices A *et* B *obéissent à la « règle des dominos » :*
si la dimension de A *(*$m \times n$*) est représentée par le domino* $\boxed{m\,|\,n}$ *et celle de* B *(*$n' \times p$*) par le domino* $\boxed{n'\,|\,p}$ *, le produit de* A *et* B *est possible si et seulement si les dominos sont juxtaposables (selon les règles du jeu : si les cases adjacentes portent le même numéro) c.-à.-d. si* $n = n'$ *;*
et dans ce cas, pour la suite du jeu, leur assemblage équivaut au domino unique $\boxed{m\,|\,p}$ *:*

$$\boxed{m\,|\,n} \,.\, \boxed{n\,|\,p} = \boxed{m\,|\,p}$$

Exemple :

Soient $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ de dimension $2 \times \mathbf{3}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ de dimension $\mathbf{3} \times 4$.

La multiplication est possible car les deux matrices sont compatibles (3 colonnes pour la première matrice et 3 lignes de la deuxième matrice).
Le résultat du produit de A et B est une matrice de dimension 2×4 .

$$AB = \begin{bmatrix} 0-4+28 & 0-5+32 & 0-6+36 & 0-1+0 \\ 1+8-21 & 2+10-24 & 3+12-27 & 2+2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 27 & 30 & -1 \\ -12 & -12 & -12 & 4 \end{bmatrix}$$

Pour la facilité du calcul, la disposition suivante peut être adoptée :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 27 & 30 & -1 \\ -12 & -12 & -12 & 4 \end{bmatrix} = AB$$

Chaque élément du produit est mis en regard de la ligne correspondante de A *et de la colonne correspondante de* B*.*

Ainsi, le -12 surligné est le résultat du calcul suivant : $1 \times 3 + 2 \times 6 + (-3) \times 9$;

$-12 = (AB)_{23} = L_2 C_3$.

Remarques importantes :

1. Le produit d'un vecteur-ligne d'ordre $\boldsymbol{n}$ par un vecteur-colonne d'ordre $\boldsymbol{n}$ est une **matrice** de dimension 1×1 (ou d'ordre 1).

   Exemple : $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = [3 + 1 - 4] = [0] \quad \neq 0$!

2. Le produit de 2 matrices **n'est pas commutatif** : en général, $AB \neq BA$!!!

   Exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$!

   Attention : même si les deux produits sont définis, ils sont généralement de dimensions différentes (si les matrices ne sont pas carrées de même ordre).

3. Il est même possible qu'un des produits existe, mais pas l'autre (on dit que le produit matriciel est *gravement* commutatif).

   Exemple : soit A de dimension $m \times n$ et B de dimension $p \times q$:
   si $n = p$ et $m \neq q$, alors AB existe mais pas BA ;
   si $m = q$ et $n \neq p$ m, alors c'est BA qui existe mais pas AB !

4. Le produit matriciel n'obéit pas à la règle du produit nul : $AB = 0 \nRightarrow (A = 0 \ ou \ B = 0)$.

   Exemple :

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = O_{22} \qquad \text{ni } A\text{, ni } B \text{ n'est nulle !}$$

5. $AB = AC \nRightarrow B = C$.

   Exemple :

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [13] \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [13]$$

   Les produits sont égaux, et pourtant $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$!

6.1.3.5 Puissance d'une matrice

Si A est une matrice <u>carrée</u>, on peut élever la matrice A à la puissance n en multipliant la matrice A par elle-même n fois. On note A^1, A^2, A^3, …, A^n, les puissances successives de A :

$$A^1 = A \qquad A^2 = A \cdot A \qquad A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A \qquad A^n = A^{n-1} \cdot A$$

Par définition, $A^0 = I_n$.

Exemple : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, alors :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

6.1.3.6 Transposée d'une matrice

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice de dimension $m \times p$, on appelle **transposée** de A, notée $\tilde{A}$ (ou ${}^tA$), la matrice de dimension $p \times m$ obtenue en prenant pour lignes les colonnes correspondantes de A, c.-à-d. telle que :

$$[\tilde{A}]_{ij} = [A]_{ji}$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Propriétés :

1. $\widetilde{A+B} = \tilde{A} + \tilde{B}$
2. $\tilde{\tilde{A}} = A$
3. $\widetilde{kA} = k\tilde{A}$
4. $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$

De plus,

- pour toute matrice A le produit $\tilde{A}\,A$ est une matrice carrée symétrique et les éléments de sa diagonale principale sont positifs (≥ 0) ;
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et inversement.

Nous pouvons maintenant redéfinir les notions de matrices symétriques et antisymétriques de la manière suivante :
une matrice est symétrique si elle est égale à sa transposée : $\tilde{A} = A$
une matrice est antisymétrique si elle est l'opposée de sa transposée : $\tilde{A} = -A$.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A \;\Rightarrow\; A$ est antisymétrique.

6.1.4 Propriétés des opérations sur les matrices

Distributivité $\quad A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

Associativité $\quad (AB)C = A(BC)$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

Commutativité $\quad A + B = B + A$

Compatibilité $\quad \alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$

Neutralité de $\boldsymbol{O}$ $\quad A + O = O + A = A$

Neutralité de $\boldsymbol{I}$ $\quad A \cdot I = I \cdot A = A$

6.1.5 Exemple d'utilisation des opérations sur les matrices

Reprenons l'exemple donné à la fin du paragraphe 6.1.1 , soit C représentant une commande :

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$ *les lignes correspondent aux clients et les colonnes aux produits*

- ✓ Les quantités globales achetées sont rassemblées dans un vecteur-colonne d'ordre 3, obtenu en effectuant le produit $C \times C_1$ où C_1est le vecteur-colonne formé de quatre fois la valeur 1 :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \textit{nombre de produits achetés par le client 1} \\ \rightarrow \textit{nombre de produits achetés par le client 2} \\ \rightarrow \textit{nombre de produits achetés par le client 3} \end{array}$$

- Les quantités de chaque produit réellement commandées sont données par un vecteur-ligne d'ordre 4, obtenu en effectuant le produit $L_1 \times C$ où L_1est le vecteur-ligne formé de trois fois la valeur 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

produit 4 : quantités commandées
produit 3 : quantités commandées
produit 2 : quantités commandées
produit 1 : quantités commandées

- Pour doubler la commande, il suffit de considérer la matrice $2C$.

- L'addition de deux commandes C et C' est donnée par $C + C'$.

- Si on considère également la matrice des prix unitaires de chaque produit, P :

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0.2 \\ 2 & 0.1 \\ 5 & 0.4 \\ 4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

alors, les sommes globales à payer par les clients pour l'achat et le transport des produits commandés sont données par $G = C\ .\ P$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0.2 \\ 2 & 0.1 \\ 5 & 0.4 \\ 4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 3.8 \\ 46 & 3.4 \\ 46 & 3.3 \end{bmatrix}$$

et les sommes totales à payer par chacun des trois clients sont données par $T = G\ .\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 54 & 3.8 \\ 46 & 3.4 \\ 46 & 3.3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57.8 \\ 49.4 \\ 49.3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \textit{prix total à payer par le client 1} \\ \rightarrow \textit{prix total à payer par le client 2} \\ \rightarrow \textit{prix total à payer par le client 3} \end{array}$$

Remarque : on aurait pu obtenir T en multipliant C par la matrice-colonne U donnant, pour chaque produit, le prix unitaire total à payer : $T = C\,.U$ où $U = P\ .\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6.1.6 Exercices : série 1

1. Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, calculer :

   a. $A + A$

   b. $3A$

   c. AB

   d. $3A - B$

2. Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix}$,

   déterminer les deux matrices C et D telles que $C + D = A$ et $C - D = B$.

3. Un groupe pharmaceutique produit trois types de médicaments M1, M2 et M3 dans chacun de ses deux laboratoires L1 et L2. On associe la matrice A suivante à la production mensuelle (en milliers d'unités) de ces médicaments dans chaque laboratoire :

$$A = \begin{bmatrix} 54 & 27 & 31 \\ 12 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

   a. Combien de médicaments du type M3 le laboratoire L1 produit-il par mois ?
   b. On peut obtenir, à partir d'une matrice-colonne B, le nombre total de médicaments produits par chaque laboratoire en effectuant le calcul $A \cdot B$. De quelle matrice-colonne s'agit-il ?

4. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
   a. Déterminer la transposée $\tilde{A}$.
   b. Calculer AB et BA.
   c. On note $C = AB$, calculer C^2. Quelle conclusion peut-on tirer ?

5. Soient $A = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{bmatrix}$.

   Déterminer x et y pour que $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$.

6.1.7 Déterminant d'une matrice

6.1.7.1 Introduction - Définitions

Le **déterminant** est un nombre attaché à une matrice carrée. Il est calculé à partir des coefficients de cette matrice.

On écrit : $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{vmatrix}$

Le calcul du déterminant permet de vérifier le caractère **inversible** d'une matrice et de calculer **l'inverse** d'une matrice (voir section 6.1.8 ci-dessous).

6.1.7.2 Déterminant d'ordre 1 et d'ordre 2

Si A est d'ordre 1, alors : $det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

Exemples :

- $A = [5] \rightarrow det(A) = |5| = 5$
- $B = [-2] \rightarrow det(B) = |-2| = -2$

Attention à ne pas confondre déterminant d'ordre 1 et valeur absolue !

Si A est une matrice carrée d'ordre 2, à savoir $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors le déterminant de A est égal à :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On soustrait les produits des éléments diagonalement opposés, en commençant par la diagonale principale.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \big(1\,.(-2)\big) - (5\,.\,3) = -17 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4\,.\,2) - \big(1 \cdot (-3)\big) = 11$$

6.1.7.3 Mineur et cofacteur

Le **mineur** relatif au coefficient a_{ij} d'une matrice $A = [a_{ij}]$ d'ordre n est le déterminant de la sous-matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A ; il est noté M_{ij}.

Le **cofacteur** C_{ij} relatif au coefficient a_{ij} de la matrice A est, quant à lui défini par $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. On parle parfois de **mineur algébrique** pour désigner le cofacteur, c.-à-d. le mineur pourvu d'un signe. Nous préférons utiliser le vocable cofacteur afin d'éviter toute confusion.

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

Pour calculer le **mineur** M_{12}, il faut calculer la valeur du déterminant de la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la deuxième colonne de A :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = (5 \cdot 3) - (8 \cdot 3) = -9$$

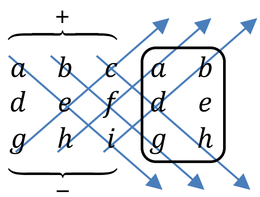
Le **cofacteur** C_{12} ,relatif au même coefficient a_{12}, est obtenu en multipliant la valeur de ce déterminant par $(-1)^{1+2}$.

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot -9 = -1 \cdot -9 = 9$$

6.1.7.4 Déterminant d'ordre 3

Soit la matrice carrée $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ d'ordre 3.

La **règle de Sarrus** est une méthode relativement simple pour calculer un déterminant d'ordre 3. On commence par recopier les 2 premières colonnes de la matrice pour former les colonnes 4 et 5. Le déterminant est obtenu en additionnant les produits des éléments des 3 diagonales principales et en soustrayant les produits des éléments des 3 diagonales secondaires :



$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\,.\,e\,.\,i + b\,.\,f.\,g + c\,.\,d\,.\,h - g\,.\,e\,.\,c - h\,.\,f.\,a - i\,.\,d\,.\,b$$

Une **méthode générale** pour calculer le déterminant d'une matrice consiste à additionner tous les coefficients d'une ligne (ou d'une colonne) multipliés par leurs cofacteurs respectifs. On appelle ce processus une **expansion par cofacteurs**.

Ainsi, si on choisit la première ligne de A, on obtient :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\,.\,C_{11} + b\,.\,C_{12} + c\,.\,C_{13}$$

$$= a\,.\,(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\,.\,(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\,.\,(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) + b(-1)(di - gf) + c(dh - ge)$$

$$= a\,.\,e\,.\,i + b\,.\,g.\,f + c\,.\,d\,.\,h - a\,.\,h\,.\,f - b\,.\,d\,.\,i - c\,.\,g\,.\,e$$ (= Règle de Sarrus !)

Exemple : soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\,.1\,.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\,.\,(-1)\,.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3\,.\,1\,.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,.\,(0-8) - 1\,.\,(0-4) + 3\,.\,(0-0) = -12$$

On peut choisir n'importe quelle ligne (ou colonne) de la matrice A pour calculer le déterminant. Pour se simplifier la tâche, on a donc intérêt à choisir une ligne (ou une colonne) qui contient un maximum de valeurs nulles.

Ainsi, si on choisit la deuxième ligne de la matrice, on obtient :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\,.\,(-1)\,.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-2)\,.\,(8-2) = -12$$

6.1.7.5 Déterminant d'ordre n

La méthode d'**expansion par cofacteurs** présentée pour les matrices 3×3 reste valable pour toutes les dimensions supérieures.

Exemple : soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, calculer $det(A)$.

Afin de limiter au maximum les calculs, nous allons procéder à une expansion par cofacteurs de la troisième colonne, car elle contient 3 coefficients nuls.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{23}C_{23} = 2\,.\,(-1)^{2+3}.\,M_{23} = (-2)\,.\,M_{23}$$

Or, $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1\,.\,(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\,.\,(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\,.\,(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,.\,(6+7) + 1\,.\,(-2-21) + 4\,.\,(1-9) = 13 - 23 - 32 = -42$$

Donc, $det(A) = -2 \cdot M_{23} = 84$

6.1.7.6 Propriétés des déterminants

- Une matrice et sa transposée ont le même déterminant : $det(A) = det(\tilde{A})$.

Exemple : $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \qquad det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6$

- Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire A est égal au produit des coefficients de sa diagonale principale.
- Le déterminant change de signe si on permute 2 lignes ou 2 colonnes voisines.
- Le déterminant est nul si 2 lignes ou 2 colonnes sont identiques.
- Le déterminant est nul si tous les coefficients d'une rangée sont nuls.
- Si on multiplie une ligne (ou une colonne) d'une matrice par un nombre réel α, on multiplie la valeur du déterminant par α.
- Si on ajoute à une ligne (colonne) un multiple d'une autre ligne (colonne), on ne modifie pas la valeur du déterminant.
- $det(AB) = det(A) \,.\, det(B)$.

6.1.8 Matrice inverse

6.1.8.1 Définition

La **matrice inverse** d'une matrice carrée A d'ordre n est une autre matrice carrée d'ordre n, notée A^{-1}, qui est telle que $A \,.\, A^{-1} = I_n = A^{-1} \,.\, A$.

Une matrice carrée A possède une matrice inverse A^{-1} si son déterminant est non nul. Dans ce cas, on dit que la matrice A est **inversible** ou **régulière**. Sinon, on dira que la matrice A est **singulière**.

6.1.8.2 Comatrice et matrice adjointe

On appelle **comatrice** de A, la matrice carrée d'ordre n des cofacteurs de A :

$com(A) = [C_{ij}]$ où C_{ij} est le cofacteur relatif à l'élément a_{ij} .

On appelle **matrice adjointe** de A la transposée de la comatrice de A :

$$adj(A) = \widetilde{com(A)} .$$

Exemple : soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$com(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (0 - 8) = -8$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

…

$$com(A) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 14 & -10 & -6 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad adj(A) = \widetilde{com(A)} = \begin{bmatrix} -8 & 14 & 2 \\ 4 & -10 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1.8.3 Calcul de la matrice inverse

Si une matrice carrée A est régulière, sa matrice inverse A^{-1} s'obtient en multipliant l'inverse du déterminant de A par la matrice adjointe de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Comme calculé précédemment, $det(A) = -12$, et

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -8 & 14 & 2 \\ 4 & -10 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc : $A^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 14 & 2 \\ 4 & -10 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

6.1.8.4 Propriétés de la matrice inverse

- Le déterminant de l'inverse de A est égal à l'inverse du déterminant de A :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

- La matrice inverse d'une matrice inversible A est elle-même inversible, et on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Le produit de deux matrices inversibles A et B est une matrice inversible, et on a :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Le produit d'un scalaire non nul α et d'une matrice inversible A est inversible, et on a :

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$$

6.1.9 Exercices : série 2

1. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

   Calculer sa transposée et son déterminant.

2. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \mathrm{c} & \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{a} \end{bmatrix}$.

3. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{a} \\ 0 & \mathrm{a} & 1 \\ \mathrm{a} & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelle valeur de a ce déterminant est $\neq 0$.

4. Soient les matrices $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$.

   Montrer que les matrices M et P sont inverses l'une de l'autre.

5. Déterminer l’inverse de la matrice M dans les deux cas suivants :

   a. $M = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Une usine fabrique chaque jour trois produits A, B, C en quantités respectives x_1, x_2 et x_3, à partir de pièces de modèles M1, M2 et M3.
Le nombre de pièces de modèles M1, M2 et M3 nécessaires à la fabrication des produits A, B et C est donné par le tableau suivant :

	A	**B**	**C**
M1	2	3	5
M2	1	4	2
M3	1	2	6

Un programme de production journalière peut s'exprimer par $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Pour réaliser ce programme de production, on utilise y_1 pièces de modèles M1, y_2 pièces de modèles M2, y_3 pièces de modèle M3 ;
ce qu'on représente par la matrice $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

a. Calculer les nombres de pièces de modèles respectifs M1, M2, M3 dont il faut disposer pour pouvoir fabriquer dans une journée 3 produits A, 4 produits B et 5 produits C.

b. On dispose un certain jour d'un stock de 31 pièces de modèle M1, 24 pièces de modèle M2 et 28 pièces de modèle M3. Combien de produits A, B et C peut-on fabriquer ce jour-là ?

6.2 Systèmes d'équations linéaires

6.2.1 Généralités

Une **équation** est une égalité contenant une ou plusieurs **variables** ou **inconnues**.

Une **équation linéaire** à plusieurs inconnues $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n$ est une équation de la forme :

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ où $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ sont des constantes.

Un **système d'équations linéaires** est un ensemble d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Résoudre un système d'équations consiste à trouver toutes les valeurs des inconnues x_1, x_2 et x_3 qui vérifient chacune des équations du système.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

La solution de ce système est $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = -\frac{7}{3}, x_3 = \frac{4}{3}$.

Les matrices vont nous permettre de représenter de tels systèmes d'équations et de les manipuler plus efficacement. Ainsi, le système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle suivante : $A\,.\,X = B$, avec

$$A = [a_{ij}],\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

La matrice A contient les coefficients des inconnues, le vecteur-colonne X contient ces inconnues et le vecteur-colonne B contient les membres de droite des équations du système.

Si on calcule la matrice inverse de A, la solution du système d'équations s'obtient comme suit :

$$X = A^{-1}.B$$

Pour que le système d'équations ait une solution, il faut donc obligatoirement que la matrice A soit inversible, donc régulière.

6.2.2 Méthode de Cramer

6.2.2.1 Introduction

La méthode de Cramer permet de calculer la solution d'un système d'équations linéaires de la forme $A\,.\,X = B$ sans devoir calculer la matrice inverse de A.

La **méthode de Cramer** affirme que :

- le système d'équations admet une solution unique si et seulement si $det(A) \neq 0$ (A est une matrice régulière inversible), et que
- cette solution est donnée par l'ensemble des x_k tels que : $x_k = \frac{det(A_k)}{det(A)}$
  où A_k est la matrice obtenue en remplaçant la $k^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur B.

6.2.2.2 Système d'équations d'ordre 2

Soit le système d'équations d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Si $det(A) \neq 0$, ce système admet comme solution unique :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \quad \text{peut se mettre sous la forme} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\,.\,(-1) - 3\,.\,2 = -7$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = -\frac{14}{-7} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{7}{-7} = -1$$

6.2.2.3 Système d'équations d'ordre 3

Soit le système d'équations d'ordre 3 suivant :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

Il peut s'écrire sous la forme matricielle $A\,.\,X = B$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Si $det(A) \neq 0$, ce système admet comme solution unique :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{det(A)}$$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \text{ peut se mettre sous la forme } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \, . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \, . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \, . \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 + 6 + 1 = -3$$

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{(-1) \, . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \, . \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \, . \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5 - 21 + 9}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{7}{3}$$

$$x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4}{3}$$

6.2.3 Méthode de substitution arrière

La solution d'un système d'équations linéaires ne change pas si :

- on permute l'ordre des équations ;
- on multiplie (terme à terme) les coefficients d'une équation par un scalaire non-nul ;
- on remplace une équation par la somme d'elle-même et d'une autre équation du système.

Exemple :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (L_1) \\ 2x + 3y = 1 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (L_1) \\ 5x + 5y = 6 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{cases}$$

Les deux systèmes admettent comme solution : $x = \frac{13}{5}$ et $y = -\frac{7}{5}$.

En utilisant ces propriétés, plusieurs méthodes de résolution effectuent au préalable une transformation du système original en un **système équivalent**, c'est-à-dire un système qui possède la même solution, mais qui est plus simple à résoudre. C'est notamment le cas lorsque le système d'équations est triangulaire.

Un système linéaire $AX = B$ est dit **triangulaire** si la matrice A est triangulaire. Pour rappel, une matrice triangulaire est une matrice carrée dont tous les coefficients situés au-dessus (ou en-dessous) de la diagonale principale sont nuls.

Considérons le système triangulaire <u>supérieur</u> suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Les inconnues peuvent être déterminées de manière séquentielle en commençant par la dernière équation, c'est-à-dire :

$$-x_3 = -5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_3 = 5}$$

$$2x_2 + 4x_3 = 6 \Leftrightarrow x_2 = \frac{6 - 4x_3}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{6 - 4 \cdot 5}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x_2 = -7}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 - 2x_2 - 3x_3}{1} \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_1 = 0}$$

Cette méthode porte le nom de **méthode de substitution arrière**, car on commence par calculer la valeur de la dernière inconnue, puis on substitue cette valeur dans l'équation précédente, et ainsi de suite.

Dans le cas d'un système triangulaire <u>inférieur</u>, on pourrait de la même manière utiliser une **méthode de substitution avant**.

6.2.4 Méthode d'élimination de Gauss-Jordan

6.2.4.1 Généralités

La **méthode d'élimination de Gauss-Jordan**, aussi appelée **méthode du pivot de Gauss**, est un algorithme qui permet de transformer un système linéaire en un système triangulaire supérieur équivalent.

Pour rappel, les trois opérations élémentaires qui permettent de transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent sont :

- échanger la ligne i et la ligne j — $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplier une ligne i par un nombre réel λ non nul — $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- ajouter λ fois la ligne j à la ligne i, ($\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$) — $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Soit un système de n équations linéaires à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Pour rendre ce système triangulaire supérieur, la méthode d'élimination de Gauss-Jordan procède de la façon suivante :

1. Éliminer l'inconnue x_1 des équations 2 à n, en ajoutant un certain nombre de fois la première équation aux suivantes.
   Le facteur multiplicatif à utiliser pour éliminer x_1 dans l'équation k est donné par : $-\frac{a_{k1}}{\boldsymbol{a_{11}}}$.
   Le coefficient de x_1 dans la première équation (a_{11}) porte le nom de **pivot**. Il sert à calculer le facteur multiplicatif pour éliminer x_1 dans les autres équations.

2. Éliminer l'inconnue x_2 des équations 3 à n, en ajoutant un certain nombre de fois la deuxième équation aux suivantes.
   Le pivot est à présent égal au coefficient de x_2 dans la deuxième équation (a_{22}) et le facteur multiplicatif à utiliser pour éliminer x_2 dans l'équation k est donné par : $-\frac{a_{k2}}{\boldsymbol{a_{22}}}$.
3. Et ainsi de suite, jusqu'à l'élimination de l'inconnue x_{n-1} dans l'équation n.

Les facteurs multiplicatifs utilisés durant le processus d'élimination sont appelés les **multiplicateurs de Gauss**.

Exemple :

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -25 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Qui peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -25 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Pour cet exemple avec 3 inconnues, la méthode de Gauss se déroule en 2 étapes.

(1) Élimination de x_1 dans les lignes 2 et 3

Le pivot est $a_{11} = 2$.

Pour éliminer x_1 dans L_2, il faut lui ajouter $-\frac{a_{21}}{\boldsymbol{a_{11}}} = -\frac{4}{\boldsymbol{2}} = -2$ fois L_1.

Pour éliminer x_1 dans L_3, il faut lui ajouter $-\frac{a_{31}}{\boldsymbol{a_{11}}} = -\frac{-2}{\boldsymbol{2}} = 1$ fois L_1.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \mathbf{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \mathbf{1}L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

(2) Élimination de x_2 dans la ligne 3

Le pivot est à présent le coefficient du terme en x_2 dans la ligne 2 : $a_{22} = 5$.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{\frac{1}{5}} L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 15 \\ 0 & 5 & -7 & | & -55 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & | & 22 \end{bmatrix}$$

Le système triangulaire ci-dessous est donc équivalent au système initial :

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 15 \\ & & 5x_2 & - & 7x_3 & = & -55 \\ & & & & \frac{22}{5}x_3 & = & 22 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de substitution arrière, on obtient :

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6.2.4.2 Cas du pivot nul

Pour que la méthode d'élimination de Gauss-Jordan puisse s'appliquer, il faut pouvoir calculer les multiplicateurs de Gauss qui sont de la forme : $-\frac{a_{ki}}{a_{ii}}$, où a_{ii} est le pivot relatif à l'inconnue x_i. Par conséquent, **le pivot a_{ii} ne peut pas être nul** !

Si un pivot est nul, cela ne signifie pas pour autant que le système est insoluble. Il suffit parfois de permuter la ligne concernée avec une autre dont le pivot est non nul.

Si $a_{ii} = 0$, alors la ligne i peut être permutée avec une ligne p telle que $p > i$ et $a_{pi} \neq 0$.

Dans le cas où il n'existe aucun pivot non nul, cela signifie que la matrice A n'est pas régulière (inversible). La matrice A est dite **singulière (non inversible)**.

Le système d'équations n'admet alors pas de solution.

Exemple :

Considérons le système d'équations représenté par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & | & 15 \\ 4 & -8 & -5 & | & -5 \\ 6 & 3 & 4 & | & 20 \end{bmatrix}$$

Elimination de x_1 :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & | & 15 \\ 0 & \mathbf{0} & -7 & | & -35 \\ 0 & 15 & 1 & | & -25 \end{bmatrix}$$

Elimination de x_2 : le pivot a_{22} est nul. Pour poursuivre le processus, nous devons permuter les lignes 2 et 3.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & | & 15 \\ 0 & 15 & 1 & | & -25 \\ 0 & 0 & -7 & | & -35 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 5$.

6.2.5 Exercices : systèmes d'équations linéaires

1. Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de Cramer :

   a. $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

2. Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de Gauss-Jordan :

a. $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x - 2y + 11z = 5 \\ -2x + 6y - 5z = -1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - z = 1 \\ -3x - 6y - z = -1 \end{cases}$

6.3 Matrices booléennes

6.3.1 Définition

Une **matrice booléenne** (ou **binaire**) est une matrice dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$.

Exemple :

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice booléenne

Les matrices booléennes sont notamment utilisées dans la théorie des graphes pour représenter les adjacences d'un graphe (cf. cours Bloc 2).

On désigne par U la matrice booléenne composée uniquement de 1. Elle porte le nom de **matrice unitaire**.

Exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6.3.2 Conjonction et disjonction

On peut étendre les opérations logiques de **conjonction** ($\wedge$) et de **disjonction** ($\vee$), introduites au chapitre 3, pour les appliquer aux matrices booléennes.

Tout comme dans le cas de l'addition, la conjonction (ou disjonction) de deux matrices booléennes A et B nécessite que les deux matrices soient de la même dimension $m \times p$.
L'opération de conjonction (disjonction) s'effectue alors « élément par élément ».

$[A \wedge B]_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$ $\qquad$ $[A \vee B]_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$

Exemple :

Soient 2 matrices booléennes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.3.3 Négation

On définit également la **négation** logique de la matrice booléenne A comme étant la matrice booléenne obtenue en effectuant la « négation logique » de chaque élément.

$[\neg A]_{ij} = \neg a_{ij}$

Exemple : Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $\neg A = \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6.3.4 Propriétés

Les opérations logiques sur les matrices booléennes jouissent de propriétés identiques à celles des connecteurs logiques :

Neutre	$A \wedge U = A$	$A \vee O = A$
Constante	$A \wedge O = O$	$A \vee U = U$
Idempotence	$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$
Complémentation	$A \wedge \bar{A} = O$	$A \vee \bar{A} = U$
Commutativité	$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$
Associativité	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$	
	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$	
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
Absorption	$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
Théorème de De Morgan	$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

6.3.5 Produit matriciel booléen

Rappel

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice de dimension $m \times n$ et $B = [b_{ij}]$ est une matrice de dimension $n \times p$, alors la **matrice produit** de A et B, notée $A.B$, est une matrice de dimension $m \times p$ dont les coefficients sont égaux à

$$[A.B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

En faisant jouer par la conjonction et la disjonction, les rôles de la multiplication et de l'addition, on peut définir un **produit matriciel booléen** :

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice booléenne de dimension $m \times n$ et $B = [b_{ij}]$ est une matrice booléenne de dimension $n \times p$, alors le **produit matriciel booléen** de A et B, noté $A \odot B$, est une matrice booléenne de dimension $m \times p$ dont les coefficients sont égaux à

$$[A \odot B]_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \wedge b_{kj}$$

Cette opération est associative mais <u>pas commutative</u>.

Exemple :

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, alors :

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.3.6 Exercices : matrices booléennes

1. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

   calculer :

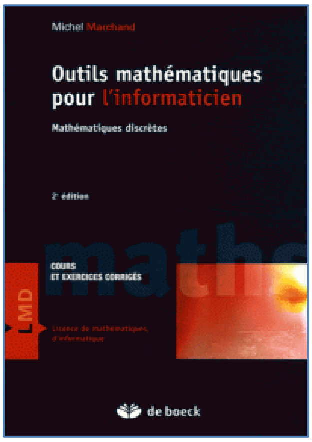
   a. $\tilde{B} \wedge C$
   b. $A \odot B$
   c. $B \odot C$
   d. $\overline{\mathrm{A}} \wedge (B \odot C)$

   Attention, $\tilde{A}$ = transposée et $\overline{A}$ = négation !

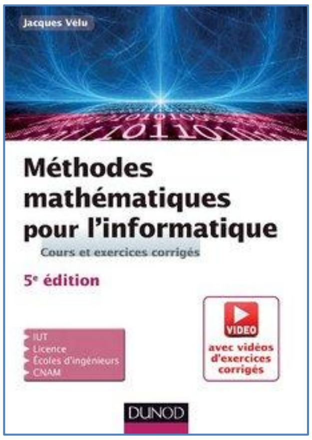
Bibliographie

Le contenu de ce cours est largement basé sur les notes de cours de mes prédécesseurs : François Schumacker, Jean-Marie Legros, Henri Schalenbourg et Charlotte Bihain.

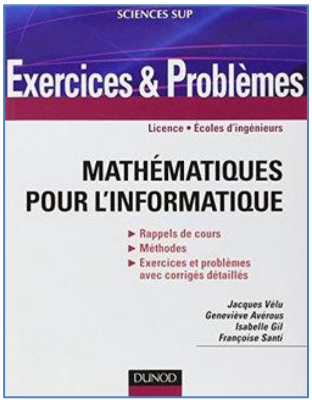
Les ouvrages de référence suivants ont également été utilisés :



Michel Marchand
« Outils mathématiques pour l'informaticien »
2e édition, Ed. de Boeck, 2005.



Jacques Vélu
« Méthodes mathématiques pour l'informatique »
5e édition, Ed. Dunod, 2013.



Jacques Vélu, Geneviève Avérous, Isabelle Gil, Françoise Santi
« Mathématiques pour l'informatique »
Ed. Dunod, 2008.

Table des matières