[2] DVIEJŲ TIESINIŲ HOMOGENINIŲ DIF. LYGČIŲ SISTEMOS TYRIMAS

Nagrinėsime diferencialinių lygčių sistemą

$x'=a_{11}x+a_{12}y$
$y'=a_{21}x+a_{22}y$

Taškas x=0, y=0, kuriame dešiniosios sistemos dalys lygios nuliui, vadinamas sistemos ramybės tašku.
Ramybės taškų tyrimui sudarome charakteringąją lygtį.

```
A:matrix([a,b],[c,d]);
```

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

```
char_lygtis:charpoly(A,k);
```

$$(a-k)\,(d-k)-b\,c$$

```
solve(char_lygtis,k);
```

$$\left[k=-\frac{\sqrt{d^2-2\,a\,d+4\,b\,c+a^2}-d-a}{2},\ k=\frac{\sqrt{d^2-2\,a\,d+4\,b\,c+a^2}+d+a}{2}\right]$$

arba

```
eigenvalues(A);
```

$$\left[\left[-\frac{\sqrt{d^2-2\,a\,d+4\,b\,c+a^2}-d-a}{2},\frac{\sqrt{d^2-2\,a\,d+4\,b\,c+a^2}+d+a}{2}\right],[1,1]\right]$$

Priklausomai nuo šaknų tipo klasifikuojami ramybės taškai.
Nuo to priklauso, kokios bus trajektorijos ir kaip jos elgsis pusiausvyros taško aplinkoje.

1. stabilus mazgas (k[1] < 0, k[2] < 0)
2. stabilus mazgas (k[1] = k[2] < 0)
3. stabilus mazgas (k[1] = k[2] < 0)
4. nestabilus mazgas (k[1] > 0, k[2] > 0)
5. nestabilus mazgas (k[1] = k[2] > 0)
6. nestabilus balnas (k[1] * k[2] < 0)
7. stabilus židinys (k[1] = p + iq, k[2] = p - iq, p < 0, q ≠ 0)
8. nestabilus židinys (k[1] = p + iq, k[2] = p - iq, p > 0, q ≠ 0)
9. stabilus centras (k[1] = p + iq, k[2] = p - iq, p = 0, q ≠ 0)

20 variantas:

x' = y,
y' = 3x - 3y

1 būdas:

```
A:matrix([0,1],[3,−3]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

```
charpoly(A,k),expand;
```

$$k^2+3\,k-3$$

```
solve(charpoly(A,k),k);
```

$$\left[k=-\frac{\sqrt{21}+3}{2},k=\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right]$$

Turime nestabilų balną (k[1] * k[2] < 0)

```
eigenvalues(A);
```

$$\left[\left[-\frac{\sqrt{21}+3}{2},\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right],[1,1]\right]$$

```
tv:eigenvectors(A);
```

$$\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{21}+3}{2},\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right],[1,1]\right],\left[\left[\left[1,-\frac{\sqrt{21}+3}{2}\right]\right],\left[\left[1,\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right]\right]\right]\right]$$

```
V1:tv[2][1][1];
```

$$\left[1,-\frac{\sqrt{21}+3}{2}\right]$$

```
V2:tv[2][2][1];
```

$$\left[1,\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right]$$

```
k1:tv[1][1][1];
```

$$-\frac{\sqrt{21}+3}{2}$$

```
k2:tv[1][1][2];
```

$$\frac{\sqrt{21}-3}{2}$$

```
X:c1·V1·exp(k1·t)+c2·V2·exp(k2·t);
```

$$\left[c1\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}+c2\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}},\frac{(\sqrt{21}-3)\,c2\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}}{2}-\frac{(\sqrt{21}+3)\,c1\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}}{2}\right]$$

Atsakymas:

```
x(t) = X[1];
y(t) = X[2];
```

$$x(t)=c1\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}+c2\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}$$

$$y(t)=\frac{(\sqrt{21}-3)\,c2\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}}{2}-\frac{(\sqrt{21}+3)\,c1\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}}{2}$$

Įstatome pasirinktas pradines sąlygas
x(0) = 1,
y(0) = 1

```
sist:[subst(t=0,X[1])=1,subst(t=0,X[2])=1];
```

$$\left[c2+c1=1,\frac{(\sqrt{21}-3)\,c2}{2}-\frac{(\sqrt{21}+3)\,c1}{2}=1\right]$$

```
solve(sist);
```

$$\left[\left[c2=\frac{5\sqrt{21}+21}{42},c1=-\frac{5\sqrt{21}-21}{42}\right]\right]$$

```
ats:subst(%[1],X);
```

$$\left[\frac{(5\sqrt{21}+21)\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}}{42}-\frac{(5\sqrt{21}-21)\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}}{42},\frac{(\sqrt{21}+3)\,(5\sqrt{21}-21)\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}}{84}+\frac{(\sqrt{21}-3)\,(5\sqrt{21}+21)\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}}{84}\right]$$

Gavome atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:

```
x_a(t) = ats[1];
y_a(t) = ats[2];
```

$$x_a(t)=\frac{(5\sqrt{21}+21)\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}}{42}-\frac{(5\sqrt{21}-21)\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}}{42}$$

$$y_a(t)=\frac{(\sqrt{21}+3)\,(5\sqrt{21}-21)\,\%e^{-\frac{(\sqrt{21}+3)\,t}{2}}}{84}+\frac{(\sqrt{21}-3)\,(5\sqrt{21}+21)\,\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}}{84}$$

2 būdas:

```
eq1:diff(x(t),t)=y(t);
```

$$\frac{d}{d\,t}\,x(t)=y(t)$$

```
eq2:diff(y(t),t)=3·x(t)−3·y(t);
```

$$\frac{d}{d\,t}\,y(t)=3\,x(t)-3\,y(t)$$

```
sy:solve(eq1,y(t))[1];
```

$$y(t)=\frac{d}{d\,t}\,x(t)$$

```
subst(%,eq2);
```

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x(t)=3\,x(t)-3\left(\frac{d}{d\,t}\,x(t)\right)$$

```
ev(%, nouns);
```

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x(t)=3\,x(t)-3\left(\frac{d}{d\,t}\,x(t)\right)$$

```
expand(%·2);
```

$$2\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,x(t)\right)=6\,x(t)-6\left(\frac{d}{d\,t}\,x(t)\right)$$

```
xats:ode2(%,x(t),t);
```

$$x(t)=\%k1\;\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}+\%k2\;\%e^{\frac{(-\sqrt{21}-3)\,t}{2}}$$

```
subst(xats,sy);
```

$$y(t)=\frac{d}{d\,t}\left(\%k1\;\%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\,t}{2}}+\%k2\;\%e^{\frac{(-\sqrt{21}-3)\,t}{2}}\right)$$

```
yats:ev(%,diff),expand;
```

$$y(t)=\frac{\sqrt{21}\;\%k1\;\%e^{\frac{\sqrt{21}\,t}{2}-\frac{3\,t}{2}}}{2}-\frac{3\;\%k1\;\%e^{\frac{\sqrt{21}\,t}{2}-\frac{3\,t}{2}}}{2}-\frac{\sqrt{21}\;\%k2\;\%e^{-\frac{\sqrt{21}\,t}{2}-\frac{3\,t}{2}}}{2}-\frac{3\;\%k2\;\%e^{-\frac{\sqrt{21}\,t}{2}-\frac{3\,t}{2}}}{2}$$

Atsakymas:

```
xats; yats;
```

$$x(t)=\%k1\ \%e^{\frac{(\sqrt{21}-3)\ t}{2}}+\%k2\ \%e^{\frac{(-\sqrt{21}-3)\ t}{2}}$$

$$y(t)=\frac{\sqrt{21}\ \%k1\ \%e^{\frac{\sqrt{21}\ t}{2}-\frac{3\ t}{2}}}{2}-\frac{3\ \%k1\ \%e^{\frac{\sqrt{21}\ t}{2}-\frac{3\ t}{2}}}{2}-\frac{\sqrt{21}\ \%k2\ \%e^{-\frac{\sqrt{21}\ t}{2}-\frac{3\ t}{2}}}{2}-\frac{3\ \%k2\ \%e^{-\frac{\sqrt{21}\ t}{2}-\frac{3\ t}{2}}}{2}$$

Brėžiniai:

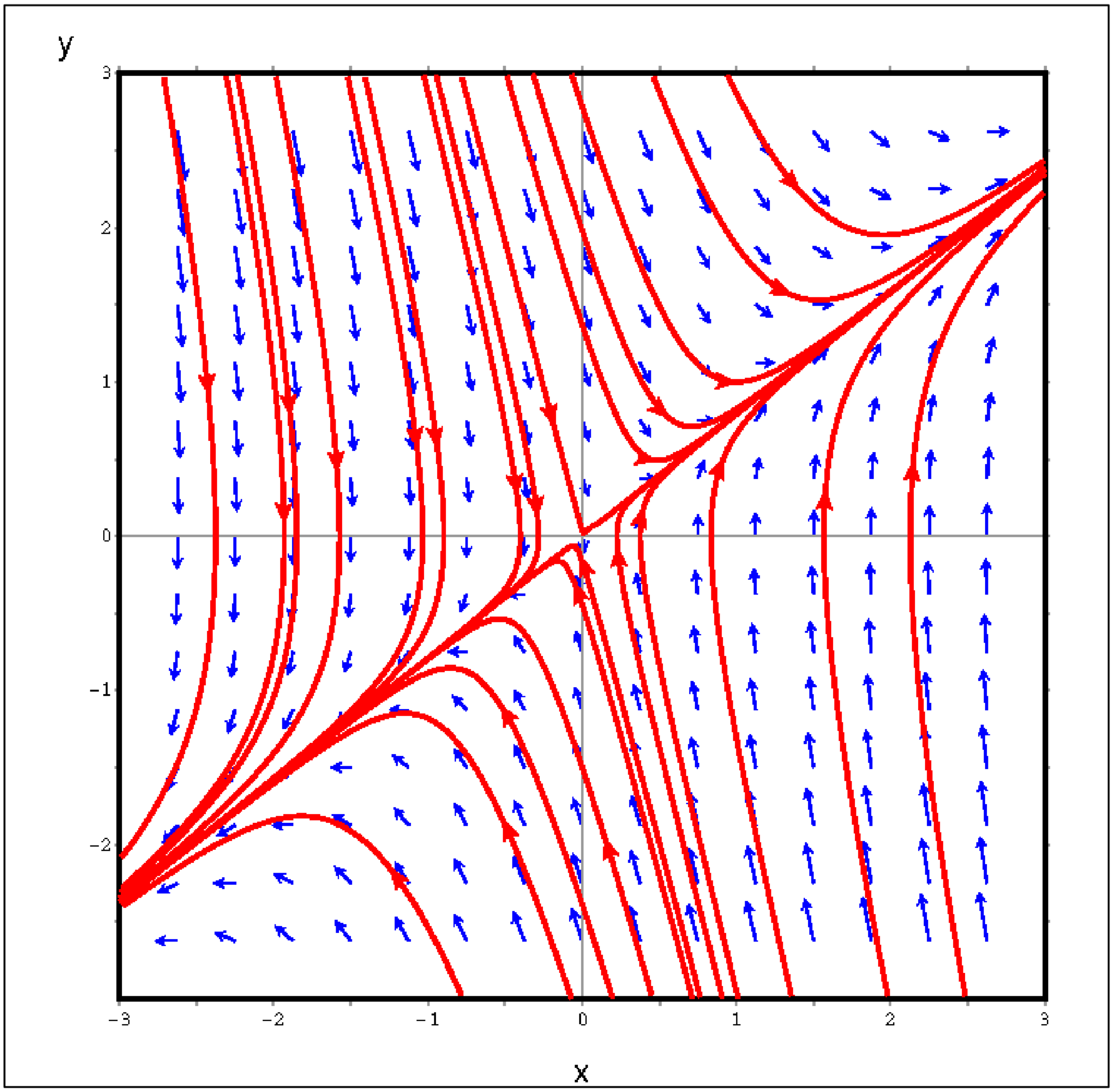
```
load(plotdf)$
```

Fazinis portretas:

```
plotdf([y,3·x−3·y],[trajectory_at,1,1],[x,−3,3],[y,−3,3]);
```

/tmp/maxout138494.xmaxima

Figure 1:



Tai - nestabilus balno taškas.

Šiame faziniame portrete trajektorijos, atitinkančios neigiamų tikrinių reikšmių tikrinius vektorius,
pradžioje yra be galo nutolusios nuo ramybės taško, tuomet juda link jo ir galiausiai konverguoja į ramybės tašką.

Trajektorijos, atitinkančios teigiamų tikrinių reikšmių tikrinius vektorius, juda priešingai: prasideda nuo
ramybės taško, ir diverguoja nutoldamos be galo toli.

Visos kitos trajektorijos prasideda be galo nutolusios, artėja prie ramybės taško, tačiau nekonverguoja į jį, o pakeičia
kryptį ir vėl nutolsta be galo toli.

Rasime asimptotes y=k*x

```
eq2/eq1;
```

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,y(t)}{\frac{d}{d\,t}\,x(t)}=\frac{3\,x(t)-3\,y(t)}{y(t)}$$

```
subst(y(t)=k·x(t),%);
```

error reading package index file /usr/lib/tdbc1.1.1/pkgIndex.tcl: invalid command name "{dir} {
set libraryfile [file join $dir tdbc.tcl]
if {![file exists $libraryfile] && [info exists ::env(TDBC_LIBRARY)]} {
set libraryfile [file join $::env(TDBC_LIBRARY) tdbc.tcl]
}
package ifneeded tdbc 1.1.1 "package require TclOO 1.0-; [list load [file join $dir libtdbc1.1.1.so] tdbc]\; [list sour
}"

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,(k\,x(t))}{\frac{d}{d\,t}\,x(t)}=\frac{3\,x(t)-3\,k\,x(t)}{k\,x(t)}$$

error reading package index file /usr/lib/tdbc1.1.1/pkgIndex.tcl: invalid command name "{dir} {
set libraryfile [file join $dir tdbc.tcl]
if {![file exists $libraryfile] && [info exists ::env(TDBC_LIBRARY)]} {
set libraryfile [file join $::env(TDBC_LIBRARY) tdbc.tcl]
}
package ifneeded tdbc 1.1.1 "package require TclOO 1.0-; [list load [file join $dir libtdbc1.1.1.so] tdbc]\; [list sour
}"

```
ev(%, nouns);
```

$$k=\frac{3\,x(t)-3\,k\,x(t)}{k\,x(t)}$$

```
ratsimp(%);
```

$$k=-\frac{3\,k-3}{k}$$

```
solve(%,k);
```

$$\left[k=-\frac{\sqrt{21}+3}{2},k=\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right]$$

```
[k1,k2]:map(rhs,%);
```

$$\left[-\frac{\sqrt{21}+3}{2},\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right]$$

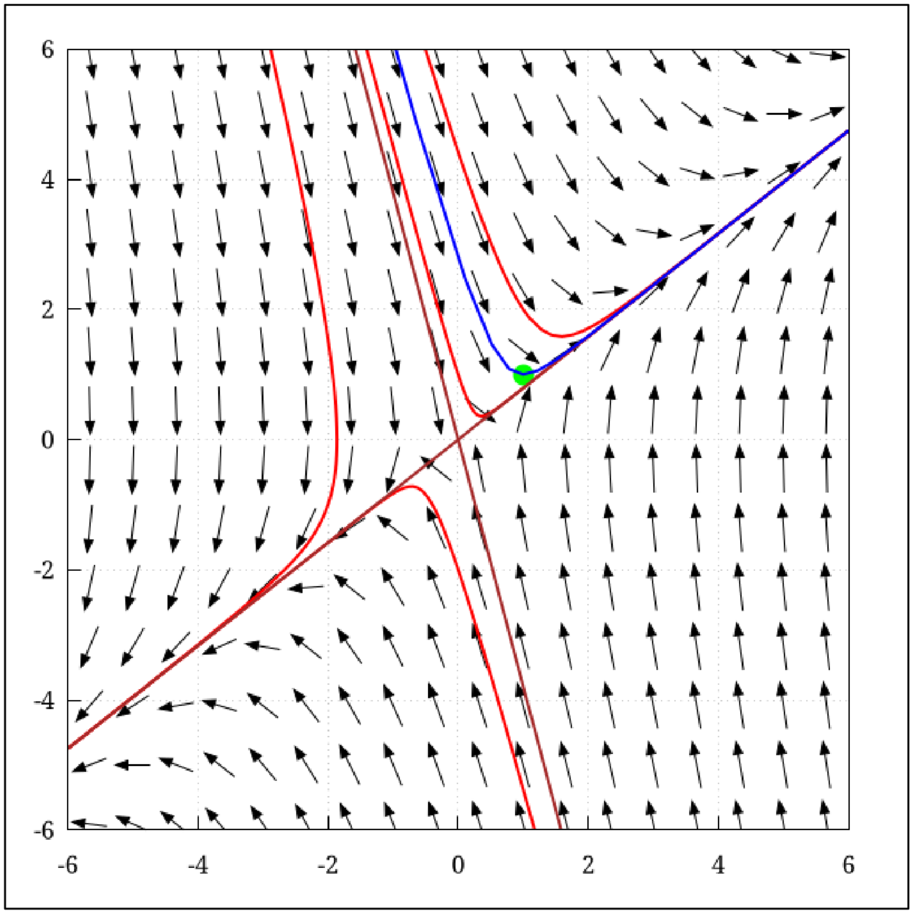
Todel asimptotės yra
y= (- sqrt(21) - 3)*x / 2
ir
y =   (sqrt(21) - 3)*x / 2

Trajektorijos turi artėti prie asimptočių (kaip liestinės)

Viską nubrėžiame:

```
load(drawdf)$
```

```
wxdrawdf([y,3·x−3·y],
line_width=2,
point_size=2,
xrange=[−6,6],
yrange=[−6,6],
grid=true,
proportional_axes = xy,
solns_at([0,1],[0,−2],[1,2],[−2,−1]),
color=green,
point_at(1,1),
color=brown,
explicit(k1·x,x,−6,6),
explicit(k2·x,x,−6,6),
color=blue,
parametric(ats[1],ats[2], t,−3,3)
),wxplot_size=[600,600];
```

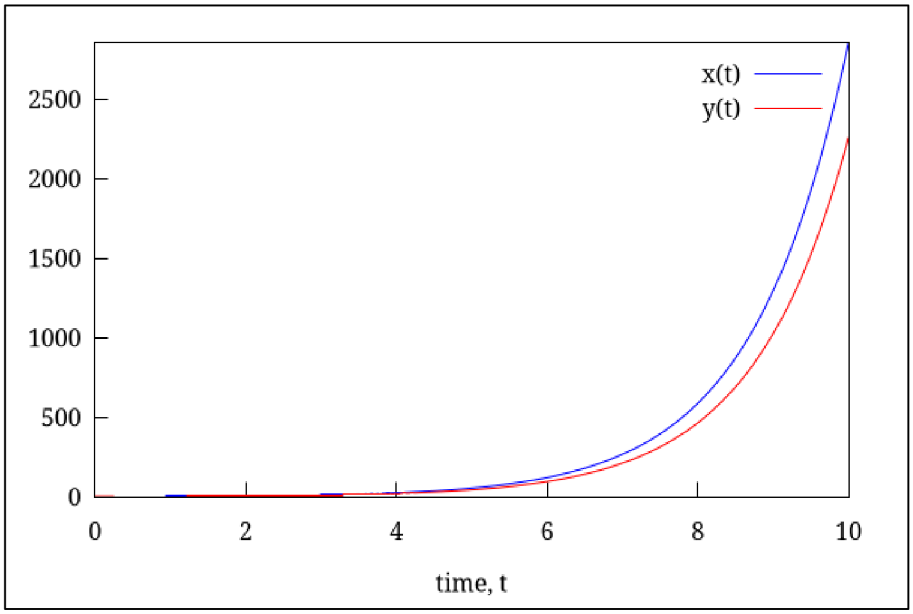


0

Atskirojo sprendinio grafikas:

```
x_a:ats[1]$;
y_a:ats[2]$;
```

```
wxdraw2d(
  key="x(t)",color=blue,
  explicit(x_a,t,0,10),
  key="y(t)",color=red,
  explicit(y_a,t,0,10),
  xlabel="time, t");
```




```
wxdraw2d(
  key="x(t)",color=blue,
  explicit(x_a,t,0,100),
  key="y(t)",color=red,
  explicit(y_a,t,0,100),
  xlabel="time, t");
```