Parcial 2

Santiago A. Balog

Ingeniería del Software II - Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, ARG
`sbalog102@mi.unc.edu.ar`

1. *a*) R es *súperintrospectiva* sii $\forall a, b : (a, a) \in R \Rightarrow (a, b) \notin R$
   Es equivalente a los *axiomas* **II.** $R \,\&\, iden \subseteq \overline{R}$ y **IV.** $R \subseteq (iden \,\&\, \overline{R}).univ$

   II. $R \,\&\, iden \subseteq \overline{R}$
   $\equiv \forall a, b : (R \,\&\, iden) \Rightarrow \overline{R}$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in (R \,\&\, iden) \Rightarrow (a, b) \in \overline{R}$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in R \wedge (a, b) \in iden \Rightarrow (a, b) \notin R$ — *Como* $(a, b) \in iden \Rightarrow a = b$
   $\equiv \forall a, b : (a, a) \in R \Rightarrow (a, b) \notin R$ //

   IV. $R \subseteq (iden \,\&\, \overline{R}).univ$
   $\equiv \forall a, b : R \Rightarrow (iden \,\&\, \overline{R}).univ$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in (iden \,\&\, \overline{R}).univ$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in R \Rightarrow \exists c : (a, c) \in (iden \,\&\, \overline{R}) \wedge (c, b) \in univ$ — *Como* $(c, b) \in univ \equiv True$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in R \Rightarrow \exists c : (a, c) \in (iden \,\&\, \overline{R})$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in R \Rightarrow \exists c : (a, c) \in iden \wedge (a, c) \in \overline{R}$ — *Como* $(a, c) \in iden \Rightarrow a = c$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \in R \Rightarrow (a, a) \in \overline{R}$
   $\equiv \forall a, b : \neg((a, b) \in R) \vee (a, a) \in \overline{R}$
   $\equiv \forall a, b : (a, b) \notin R \vee (a, a) \notin R$
   $\equiv \forall a, b : (a, a) \notin R \vee (a, b) \notin R$
   $\equiv \forall a, b : \neg((a, a) \in R) \vee (a, b) \notin R$
   $\equiv \forall a, b : (a, a) \in R \Rightarrow (a, b) \notin R$ //

   Por lo que obtenemos que **II.** $R \,\&\, iden \subseteq \overline{R}$ y **IV.** $R \subseteq (iden \,\&\, \overline{R}).univ$ son **equivalentes**.

   b) R tiene un *psicólogo de narcisistas* sii $\exists a : \forall b : (a, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R$
   Es equivalente al *axioma* **I.** $univ \subseteq univ.\overline{(R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})}$

   I. $univ \subseteq univ.\overline{(R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})}$
   $\equiv \forall x, y : univ \Rightarrow univ.\overline{(R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})}$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow (x, y) \in univ.\overline{(R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})}$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : (x, a) \in univ \wedge (a, y) \in \overline{(R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})}$ — *Como* $(x, a) \in univ \equiv True$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : (a, y) \in \overline{(R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})}$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg((a, y) \in R.\overline{((iden \,\&\, R).univ)})$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in R \wedge (b, y) \in \overline{(iden \,\&\, R).univ})$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in R \wedge \neg((b, y) \in (iden \,\&\, R).univ)$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in R \wedge \neg(\exists c : (b, c) \in (iden \,\&\, R) \wedge (c, y) \in univ))$ — $(c, y) \in univ \equiv True$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in R \wedge \neg(\exists c : (b, c) \in iden \,\&\, R))$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in R \wedge \neg(\exists c : (b, c) \in iden \wedge (b, c) \in R))$ — *Como* $(b, c) \in iden \Rightarrow b = c$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in R \wedge \neg((b, b) \in R))$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \notin R \vee (b, b) \in R$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R$
   $\equiv \forall x, y : ((x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R)$
   $\equiv (\exists x, y : (x, y) \in univ) \Rightarrow (\exists a : \forall b : (a, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R)$
   $\equiv \neg(\exists x, y : (x, y) \in univ) \vee (\exists a : \forall b : (a, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R)$ — *Como* $(x, y) \in univ \equiv True$
   $\equiv \exists a : \forall b : (a, b) \in R \Rightarrow (b, b) \in R$ //

   c) R tiene un *nodo popular* sii $\exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$
   Es equivalente al *axioma* **III.** $univ \subseteq univ.\overline{(\overline{(R \,\&\, \tilde{}R)}.univ)}$

   III. $univ \subseteq univ.\overline{(\overline{(R \,\&\, \tilde{}R)}.univ)}$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : (x, a) \in univ \wedge (a, y) \in \overline{\overline{(R \,\&\, \tilde{}R)}.univ}$ — *Como* $(x, a) \in univ \equiv True$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : (a, y) \in \overline{\overline{(R \,\&\, \tilde{}R)}.univ}$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg((a, y) \in \overline{(R \,\&\, \tilde{}R)}.univ)$
   $\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in \overline{(R \,\&\, \tilde{}R)} \wedge (b, y) \in univ)$ — *Como* $(b, y) \in univ \equiv True$

$\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \neg(\exists b : (a, b) \in \overline{(R \,\&\, \tilde{}R)})$
$\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \in (R \,\&\, \tilde{}R)$
$\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (a, b) \in \tilde{}R$
$\equiv \forall x, y : (x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$
$\equiv \forall x, y : ((x, y) \in univ \Rightarrow \exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R)$
$\equiv (\exists x, y : (x, y) \in univ) \Rightarrow (\exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R)$
$\equiv \neg(\exists x, y : (x, y) \in univ) \vee (\exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R)$ $\quad$ $Como\ (x, y) \in univ \equiv True$
$\equiv \exists a : \forall b : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ //

2. Se encuentra en el archivo *ejercicio2.als*
3. a) $F : (Q \leftrightarrow R) \wedge \neg(P \wedge Q)$

$S_F = \{P, Q, R, (Q \leftrightarrow R), (P \wedge Q), \neg(P \wedge Q), F\}$

$Rep(P) = P$ $\quad Rep(Q) = Q$ $\quad Rep(R) = R$ $\quad Rep(Q \leftrightarrow R) = U$ $\quad Rep(P \wedge Q) = W$
$Rep(\neg(P \wedge Q)) = X$ $\quad Rep(F) = Y$

$En(P) = En(Q) = En(R) = \top$
$En(Q \leftrightarrow R) = (\neg U \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg U \vee Q \vee \neg R) \wedge (U \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (U \vee Q \vee R)$
$En(P \wedge Q) = (\neg W \vee P) \wedge (\neg W \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee W)$
$En(\neg(P \wedge Q)) = (\neg X \vee \neg W) \wedge (X \vee W)$
$En(F) = (\neg Y \vee U) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (\neg U \vee \neg X \vee Y)$

$\Longrightarrow F' = Rep(F) \wedge \bigwedge_{G \in S_F} En(G)$
$= Y \wedge (\neg Y \vee U) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (\neg U \vee \neg X \vee Y)$
$\wedge (\neg X \vee \neg W) \wedge (X \vee W) \wedge (\neg W \vee P) \wedge (\neg W \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee W)$
$\wedge (\neg U \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg U \vee Q \vee \neg R) \wedge (U \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (U \vee Q \vee R)$

b) La formula en CNF a la cual le aplicare DPLL:
$Y \wedge (\neg Y \vee \neg X \vee W) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg W \vee Y)$
$\wedge (\neg X \vee U) \wedge (\neg X \vee R) \wedge (\neg U \vee \neg R \vee X)$
$\wedge (\neg W \vee \neg S \vee T) \wedge (S \vee W) \wedge (\neg T \vee W)$
$\wedge (\neg U \vee \neg Q) \wedge (Q \vee U)$
$\wedge (\neg Q \vee M) \wedge (\neg Q \vee N) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee Q)$
$\wedge (\neg R \vee N \vee M) \wedge (\neg N \vee R) \wedge (\neg M \vee R)$
$\wedge (\neg S \vee \neg M) \wedge (M \vee S)$
$\wedge (\neg T \vee P \vee N) \wedge (\neg P \vee T) \wedge (\neg N \vee T)$

Aplico BCP:
$Y \wedge (\neg Y \vee \neg X \vee W) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg W \vee Y)$
$\wedge (\neg X \vee U) \wedge (\neg X \vee R) \wedge (\neg U \vee \neg R \vee X)$
$\wedge (\neg W \vee \neg S \vee T) \wedge (S \vee W) \wedge (\neg T \vee W)$
$\wedge (\neg U \vee \neg Q) \wedge (Q \vee U)$
$\wedge (\neg Q \vee M) \wedge (\neg Q \vee N) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee Q)$
$\wedge (\neg R \vee N \vee M) \wedge (\neg N \vee R) \wedge (\neg M \vee R)$
$\wedge (\neg S \vee \neg M) \wedge (M \vee S)$
$\wedge (\neg T \vee P \vee N) \wedge (\neg P \vee T) \wedge (\neg N \vee T)$

Como no puedo seguir, debo instanciar una letra cualquiera:
$\Longrightarrow W$ ahora es Falsa.
$Y \wedge (\neg X \vee W)$
$\wedge (\neg X \vee U) \wedge (\neg X \vee R) \wedge (\neg U \vee \neg R \vee X)$
$\wedge (\neg W \vee \neg S \vee T) \wedge (S \vee W) \wedge (\neg T \vee W)$
$\wedge (\neg U \vee \neg Q) \wedge (Q \vee U)$
$\wedge (\neg Q \vee M) \wedge (\neg Q \vee N) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee Q)$
$\wedge (\neg R \vee N \vee M) \wedge (\neg N \vee R) \wedge (\neg M \vee R)$
$\wedge (\neg S \vee \neg M) \wedge (M \vee S)$
$\wedge (\neg T \vee P \vee N) \wedge (\neg P \vee T) \wedge (\neg N \vee T)$

Continuo haciendo BCP:
$Y \wedge (\neg X)$
$\wedge (\neg X \vee U) \wedge (\neg X \vee R) \wedge (\neg U \vee \neg R \vee X)$
$\wedge S \wedge (\neg T)$
$\wedge (\neg U \vee \neg Q) \wedge (Q \vee U)$

$\land (\neg Q \lor M) \land (\neg Q \lor N) \land (\neg M \lor \neg N \lor Q)$
$\land (\neg R \lor N \lor M) \land (\neg N \lor R) \land (\neg M \lor R)$
$\land (\neg S \lor \neg M) \land (M \lor S)$
$\land (\neg T \lor P \lor N) \land (\neg P \lor T) \land (\neg N \lor T)$

$Y \land (\neg X)$
$\land (\neg U \lor \neg R)$
$\land S \land (\neg T)$
$\land (\neg U \lor \neg Q) \land (Q \lor U)$
$\land (\neg Q \lor M) \land (\neg Q \lor N) \land (\neg M \lor \neg N \lor Q)$
$\land (\neg R \lor N \lor M) \land (\neg N \lor R) \land (\neg M \lor R)$
$\land (\neg M)$
$\land (\neg P) \land (\neg N)$

$Y \land (\neg X)$
$\land (\neg U \lor \neg R)$
$\land S \land (\neg T)$
$\land (\neg U \lor \neg Q) \land (Q \lor U)$
$\land (\neg Q) \land (\neg Q)$
$\land (\neg R)$
$\land (\neg M)$
$\land (\neg P) \land (\neg N)$

Terminamos de hacer DPLL y lo que queda es:
$Y \land (\neg X) \land S \land (\neg T) \land U \land (\neg Q) \land (\neg R) \land (\neg M) \land (\neg P) \land (\neg N)$

$\Longrightarrow$ Encontre un modelo que hace a la formula satisfactible:
$Y = S = U = Verdadero$
$W = X = T = Q = R = M = P = N = Falso$

c) La formula $\neg\phi$ en CNF a la cual le aplicare DPLL:
$\neg Y \land (\neg Y \lor \neg X \lor W) \land (X \lor Y) \land (\neg W \lor Y)$
$\land (\neg X \lor U) \land (\neg X \lor R) \land (\neg U \lor \neg R \lor X)$
$\land (\neg W \lor \neg S \lor T) \land (S \lor W) \land (\neg T \lor W)$
$\land (\neg U \lor \neg Q) \land (Q \lor U)$
$\land (\neg Q \lor M) \land (\neg Q \lor N) \land (\neg M \lor \neg N \lor Q)$
$\land (\neg R \lor N \lor M) \land (\neg N \lor R) \land (\neg M \lor R)$
$\land (\neg S \lor \neg M) \land (M \lor S)$
$\land (\neg T \lor P \lor N) \land (\neg P \lor T) \land (\neg N \lor T)$

Aplico BCP:
$\neg Y \land (\neg Y \lor \neg X \lor W) \land (X \lor Y) \land (\neg W \lor Y)$
$\land (\neg X \lor U) \land (\neg X \lor R) \land (\neg U \lor \neg R \lor X)$
$\land (\neg W \lor \neg S \lor T) \land (S \lor W) \land (\neg T \lor W)$
$\land (\neg U \lor \neg Q) \land (Q \lor U)$
$\land (\neg Q \lor M) \land (\neg Q \lor N) \land (\neg M \lor \neg N \lor Q)$
$\land (\neg R \lor N \lor M) \land (\neg N \lor R) \land (\neg M \lor R)$
$\land (\neg S \lor \neg M) \land (M \lor S)$
$\land (\neg T \lor P \lor N) \land (\neg P \lor T) \land (\neg N \lor T)$

$\neg Y \land X \land (\neg W)$
$\land (\neg X \lor U) \land (\neg X \lor R) \land (\neg U \lor \neg R \lor X)$
$\land (\neg W \lor \neg S \lor T) \land (S \lor W) \land (\neg T \lor W)$
$\land (\neg U \lor \neg Q) \land (Q \lor U)$
$\land (\neg Q \lor M) \land (\neg Q \lor N) \land (\neg M \lor \neg N \lor Q)$
$\land (\neg R \lor N \lor M) \land (\neg N \lor R) \land (\neg M \lor R)$
$\land (\neg S \lor \neg M) \land (M \lor S)$
$\land (\neg T \lor P \lor N) \land (\neg P \lor T) \land (\neg N \lor T)$

$\neg Y \land X \land (\neg W)$
$\land U \land R$
$\land S \land (\neg T)$
$\land (\neg U \lor \neg Q) \land (Q \lor U)$

$\wedge (\neg Q \vee M) \wedge (\neg Q \vee N) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee Q)$
$\wedge (\neg R \vee N \vee M) \wedge (\neg N \vee R) \wedge (\neg M \vee R)$
$\wedge (\neg S \vee \neg M) \wedge (M \vee S)$
$\wedge (\neg T \vee P \vee N) \wedge (\neg P \vee T) \wedge (\neg N \vee T)$

$\neg Y \wedge X \wedge (\neg W)$
$\wedge U \wedge R$
$\wedge S \wedge (\neg T)$
$\wedge (\neg Q)$
$\wedge (\neg Q \vee M) \wedge (\neg Q \vee N) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee Q)$
$\wedge (N \vee M)$
$\wedge (\neg M)$
$\wedge (\neg P) \wedge (\neg N)$

$\neg Y \wedge X \wedge (\neg W)$
$\wedge U \wedge R$
$\wedge S \wedge (\neg T)$
$\wedge (\neg Q)$
$\wedge (\neg M \vee \neg N)$
$\wedge (N \vee M)$
$\wedge (\neg M)$
$\wedge (\neg P) \wedge (\neg N)$

Se encontró un Botom: $\neg Y \wedge X \wedge (\neg W)$
$\wedge U \wedge R$
$\wedge S \wedge (\neg T)$
$\wedge (\neg Q)$
$\wedge (\bot)$
$\wedge (\neg M)$
$\wedge (\neg P) \wedge (\neg N)$

$\Longrightarrow$ Como no se encontró modelo para $\neg \phi \Longrightarrow \phi$ es válida.