EXAMEN FINAL

23 DE FEBRERO DE 2021

1	2	3	4	5	*Total*

El código `python` utilizado en la resolución de los ejercicios escritos en azul se deberán subir a `moodle` en un archivo con las siguientes características

- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse `apellido_nombre.py`
- Este archivo deberá contener las funciones necesarias para ejecutar los ejercicios considerados (`ejercicio1()`, `ejercicio2()`, etc.), y al ejecutar el archivo deberán mostrarse las salidas pedidas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos. Puede utilizar implementaciones de densidades y probabilidades de masa de `scipy`.

Ejercicio 1.

Dada la función de densidad f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{4x} & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & 0 < x \leq \frac{15}{4} \\ 0 & x > \frac{15}{4} \end{cases}$$

1. Calcular y graficar la función de distribución acumulada.
2. Describir un algoritmo para generar valores de una variable aleatoria X con densidad f.
3. Implementar el código en python, arrojando como valores la estimación de $E[X]$ y $P(X \leq 2)$.

Ejercicio 2.

a) Implementar un algoritmo que simule un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(t) = 8t - t^2$, en un período $[0, T]$, con $T = 8$.

b) Explicar (sin implementar) cómo se puede mejorar el algoritmo anterior para reducir el número de comparaciones. Dar un ejemplo que contenga al menos 3 subintervalos.

Ejercicio 3. Dada la siguiente muestra

0.129 1.009 1.275 1.314 4.530 5.782 7.331 9.416 19.529 32.747

utilizar el test de Kolmogorov-Smirnov para decidir si hay evidencia de que los datos provienen de una distribución exponencial con media 10.

Responder esta pregunta por medio de las siguientes consignas.

a) Plantear la hipótesis nula y la alternativa.

b) Realizar el cálculo en papel del estadístico.

c) Explicar en qué consiste el algoritmo para estimar el p-valor para esta prueba.

d) Implementar el algoritmo, y estimar el p-valor de la prueba mediante 10000 simulaciones y dar el resultado que este arroja con un nivel de confianza del 90 %.

Ejercicio 4. Desea determinarse mediante Monte Carlo el valor de la integral

$$I = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx.$$

a) Explicar y justificar cómo se obtiene mediante simulación el valor de la integral.

b) Explicar y justificar cómo se determina un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ para el valor de la integral.

c) Obtener mediante simulación en computadora un intervalo de confianza del 99 % para el valor de la integral cuya amplitud sea la indicada en la siguiente tabla. Completar dicha tabla usando **6** decimales. Entregar la implementación en Python de este item.

Amplitud	Nro. de simulaciones	Valor de la integral	Intervalo (a,b)
10^{-1}			
10^{-2}			
10^{-3}			

Ejercicio 5. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias normales, independientes e idénticamente distribuidas con media μ desconocida, y varianza 1. Un resultado de la teoría de la probabilidad expresa que la variable aleatoria:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2,$$

tiene distribución χ-cuadrado con n grados de libertad. Sea $p = P(Y > a)$, donde a es un número real conocido.

a) Describa explícitamente la función de distribución empírica F_e , para la muestra dada.

b) Explique como utilizar el método "bootstrap" para estimar la probabilidad p. ¿Qué valor de μ se emplea en la implementación del método bootstrap?. ¿Cuántas muestras bootstrap distintas pueden generarse a partir de una dada muestra empírica de tamaño n?

c) La siguiente muestra de 10 valores fue obtenida mediante un generador de variables aleatorias normales:

$$3,3011 \quad 5,6076 \quad 4,8822 \quad 5,6992 \quad 5,2696 \quad 5,4943 \quad 3,5169 \quad 3,9797 \quad 4,5530 \quad 5,1097$$

Dado $a = 3.2$, estimar p con 1000 simulaciones a partir de la muestra dada, utilizando el método de bootstrap. Escribir el resultado con 5 decimales. Entregar la implementación en Python de este item.