Santiago A. Balog

Examen - Modelos y Simulaciones

9/2/2021

② Para aproximar por Monte Carlo una muestra de tamaño N suficientemente grande, consideramos una sucesión de N variables aleatorias uniformes $U_i \sim \mathcal{U}(0,1)$, independientes y aproximar el valor $\int_0^\infty f(x)\,dx$ con el límite de los promedios.

$$\sum_{n=0}^{9999999} \frac{4.(-1)^n}{2n+1}$$

③ N ratas = 100

Numero de Intentos:	1	2	3	4	5	6	≥7
Cantidad de Ratas:	56	27	13	3	0	1	0

a) H_0 (Hipotesis Nula): El número de intentos realizados por las ratas hasta lograr la salida del laberinto tiene una distribución geométrica.

H_1 (Hipotesis Alternativa): El número de intentos realizados por las ratas hasta lograr la salida No tiene distribución geometrica.

Hace falta estimar el parametro p, donde p es la probabilidad de exito.

$\Rightarrow$ estimo el parametro p a partir de la muestra de datos

$$\Rightarrow \hat{p} = (1.56 + 2.27 + 3.13 + 4.3 + 5.0 + 6.1 + 7.0)/100$$

$$\hat{p} = (56 + 54 + 39 + 12 + 0 + 6 + 0)/100$$

$$\hat{p} = 167/100 \qquad \text{Como } \hat{p} = E[x] = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow p = 100/167 = 0{,}598802395$$

b) Como una geométrica puede tomar infinitos números

$\Rightarrow$ Se puede agrupar los datos en 4 grupos: los que toman valores 1, 2, 3, ≥4

$\Rightarrow$ Las frecuencias observadas: $N_1 = 56$ $N_2 = 27$ $N_3 = 13$ $N_4 = 4$

Ademas $P(X = n) = p.(1-p)^{n-1}$ con $n \geq 1$ $\Rightarrow (1-p) = 0{,}401197605$

$$\Rightarrow p_1 = p(1) = p.(1-p)^{1-1} = p = 0{,}598802395$$

$$p_2 = p(2) = p.(1-p)^{2-1} = p.(1-p) = 0{,}240238087$$

$$p_3 = p(3) = p.(1-p)^{3-1} = p.(1-p)^2 = 0{,}096382945$$

$p(1) + p(2) + p(3) = 0{,}935423427$

$$p_4 = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3)) = 0{,}064576573$$

$$\Rightarrow \text{El estadistico } T = \sum_{i=1}^{4} \frac{(N_i - 100.p_i)^2}{100.p_i}$$

$$\Rightarrow T = \frac{(56 - 59{,}8802395)^2}{59{,}8802395} + \frac{(27 - 24{,}0238087)^2}{24{,}0238087} + \frac{(13 - 9{,}6382945)^2}{9{,}6382945} + \frac{(4 - 6{,}4576573)^2}{6{,}4576573}$$

$$= \frac{15{,}0562586}{59{,}8802395} + \frac{8{,}85771465}{24{,}0238087} + \frac{11{,}3010639}{9{,}6382945} + \frac{6{,}0400794}{6{,}4576573}$$

$$= \boxed{2{,}72799813}$$

c) p-valor $\approx P(\chi^2_2 \geq 2{,}72799813) \sim 5{,}992$?

d)

(4) $I = \int_0^{\pi/4} x \cdot \operatorname{sen}(3x)\, dx$

a) Considero $g(x) = x \cdot \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow$ goiero calcular $\int_a^b g(x)\,dx$ con $a<b$

$\Rightarrow y = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \boxed{x = (y \cdot (b-a) + a)} \Rightarrow dy = \frac{1}{b-a}\,dx \Rightarrow \boxed{dx = (b-a)\,dy}$

$\Rightarrow$ Por Monte Carlo $\int_a^b g(x)\,dx = \int_0^1 g(y \cdot (b-a) + a) \cdot (b-a)\,dy$

Como $a = 0$ y $b = \pi/4$ $\Rightarrow \int_0^1 \left(y \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(3 \cdot \left(y \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{4}\,dy$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 y \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} \cdot y\right) dy}$$

Entonces, una estimación con N suficientemente grande estara dado por:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{16 \cdot N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} \cdot u_i\right)}$$

donde $U_i \sim \mathcal{U}(0,1)$ e independientes entre si

b)

Santiago A. Balog

c)

N° de sim	Integral	Intervalo
1000	0,269255	
10000	0,264274	
100000	0,263780	

2021/2/9 13:05

Santiago A. Balog

⑤ $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes e identicamente distribuidos con varianza σ^2 desconocida.

a y b son constantes, con $a<b$

Quiero estimar $p = P(a < \underbrace{S^2 - \sigma^2}_{\hat{\theta}} < b)$ donde $S^2_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

a) $\Rightarrow P(a < \hat{\theta} < b)$ dado que esta probabilidad puede pareserse al valor esperado de una Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1 & \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) \in (a,b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ puede realizarse una estimación bootstrap de la probabilidad:

$$P(a<\hat{\theta}<b) \sim \frac{1}{n^n} \#\{\underbrace{(x_1^*, \ldots, x_n^*)}_{\text{muestra bootstrap}} \mid a < \hat{\theta}(x_1^*, \ldots, x_2^*) < b\}$$

$\Rightarrow$ como n^n es muy grande, entonces seleccionamos aleatoriamente N muestras bootstrap con $N < n^n$ y estimamos el valor esperado a calcular con el promedio para estas N muestras.

Ademas como σ^2 es desconocido, debemos usar en su lugar $E[S^2]$

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(E[X_i^2] - X^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left(-n \cdot X^2 + \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2]\right)$$

"Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el regimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de las Res. Rec. 1554/2018."

Santiago Alberto Balog

DNI: 41.439.102

REPUBLICA ARGENTINA - MERCOSUR
REGISTRO NACIONAL DE LAS PERSONAS
MINISTERIO DEL INTERIOR Y TRANSPORTE

DOCUMENTO NACIONAL DE IDENTIDAD

Apellido / *Surname*
BALOG

Nombre / *Name*
SANTIAGO ALBERTO

Sexo / *Sex*
M

Nacionalidad / *Nationality*
ARGENTINA

Ejemplar
A

Fecha de nacimiento / *Date of birth*
20 JUL/ JUL 1998

Fecha de emisión / *Date of issue*
30 NOV/ NOV 2013

Fecha de vencimiento / *Date of expiry*
30 NOV/ NOV 2028

FIRMA IDENTIFICADO/ *SIGNATURE*

Documento / *Document*
41.439.102