Nombre: **Número de hojas adicionales:**

Modelos y Simulación

Examen Final – Julio 3, 2008

Problema 1: Un emisor emite partículas de acuerdo a un proceso de Poisson con frecuencia $\lambda = 2$ por minuto:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una partícula sea emitida en el intervalo comprendido entre los minutos 3 y 5?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera partícula aparezca en algún momento después del tercer minuto pero antes del quinto minuto?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el momento en el que se emita la primera partícula sea después del tercer minuto?

Problema 2: Desarrollar y describir en papel un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Problema 3: Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que el resultado 7 haya aparecido exactamente tres veces.

a) Indicar cuál es la distribución teórica de la variable aleatoria que cuenta el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.

b) Describir la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.

c) Mediante una implementación en computadora, calcular el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000

Problema 4: Una variable aleatoria Y se llama *lognormal* con parámetros $(\mu = 1, \sigma = 1)$, si $\ln(Y)$ es una variable aleatoria normal estándar.

Construir un generador para la variable aletoria $Y = e^Z$ *lognormal*, donde Z es una variable aleatoria normal estándar. Implementar el algoritmo en la computadora y estimar $E[Y]$ y $\mathrm{Var}[Y]$ utilizando las *expresiones recursivas*. Construir una tabla con los valores pedidos para 100, 1000, 10000 y 100000 simulaciones. Utilizar el *método polar* para generar los valores de Z.

Problema 5: Se conocen los siguientes valores de una muestra aleatoria:

0,356; 0,088; 0,976; 0,953; 0,446; 0,742; 1,201; 0,395; 0,678; 1,168; 0,132; 0,840; 0,470; 0,170; 0,187;

y desea someterse a prueba la hipótesis:

H_0 : *la muestra proviene de una distribución exponencial* con media 0,37.

a) Calcular el valor del estadístico de Kolmogorov–Smirnov correspondiente a la muestra.

b) Calcular mediante 5000 simulaciones el p–valor.

c) Determinar con cuál o cuales de los siguientes niveles de significación se rechaza la hipótesis: $\alpha = 0{,}02$ ó $\alpha = 0{,}05$. Explicar por qué.

Problema 6: Se conocen los siguientes valores correspondientes a dos muestras aleatorias independientes (cada fila de valores corresponde a una muestra):

0,214; 4,727; $-2{,}703$; 2,204; 2,487; 1,366; $-1{,}537$; $-1{,}207$; $-1{,}335$; 3,118

3,576; $-1{,}478$; 1,583; $-2{,}512$; 3,434; $-3{,}800$; 0,344; 0,707; 3,538; 0,544

Se desea implementar una prueba de suma de rangos, para determinar si todos los valores son independientes e idénticamente distribuídos.

a) Calcular el promedio y desviación estándar muestral de cada muestra.

b) Determinar el rango de la muestra de menor rango.

c) Calcular exactamente por recursión el p–valor.

d) Calcular según la aproximación normal el p–valor.

e) Calcular el p–valor mediante simulación, usando 5000 sorteos. Y decidir si se rechaza o no la hipótesis nula de la prueba. Discutir el resultado a partir de lo calculado en **a)**.

Nota: Enviar por correo electrónico todos los códigos elaborados personalmente, debidamente rotulados por problema e item, simultáneamente a las direcciones:

`kisbye@mate.uncor.edu` y `pury@famaf.unc.edu.ar`.

No enviar los códigos de las rutinas estándar de la literatura. Sólo citar la fuente de la que fueron extraídas.