Clase 5 - Solución de ecuaciones no lineales (2)

El problema

Recordemos el problema que comenzamos a estudiar en la clase anterior: dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no lineal, se desea hallar una solución r de la ecuación

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Al igual que antes, estudiaremos otro método iterativo para resolver este problema, el cual genere una sucesión de aproximaciones que se espera que converja a la solución buscada r.

Idea del método de Newton

Dado que en general la función f es no lineal, resolver la ecuación (1) es un **problema difícil**. La idea del método de Newton consiste en reemplazar la resolución de este problema difícil por la resolución de una sucesión de **problemas fáciles**, cuyas soluciones convergen a la solución del problema difícil, bajo adecuadas hipótesis.

Supongamos que r es un cero de f y que x es una aproximación de r a una distancia h, es decir, $r = x + h$ o equivalentemente $h = r - x$. Supongamos también que f'' existe y es continua en un entorno de x que contiene a r, entonces haciendo el desarrollo de Taylor de f centrado en x, tenemos que

$$0 = f(r) = f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \mathcal{O}(h^2).$$

Cuando la aproximación x es próxima a r, el valor de h es pequeño y por lo tanto h^2 es más pequeño aún y así podríamos despreciar el término $\mathcal{O}(h^2)$

$$0 = f(x) + hf'(x),$$

para despejar h

$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ahora bien, es claro que no conocemos exactamente h pues si tuviéramos x y h tendríamos la solución r. Sin embargo, si la aproximación x está cerca de r, entonces la nueva aproximación $(x+h) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ debería estar aún más cerca de r.

Entonces, comenzando con una aproximación x_0 de r, la iteración del método de Newton consiste en calcular

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0.$$

Gráficamente, dado el punto $(x_n, f(x_n))$ la idea consiste en aproximar el gráfico de la función f por la recta tangente a f que pasa por $(x_n, f(x_n))$. Tal recta tangente está dada por $l_n(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Ver Figura (1).

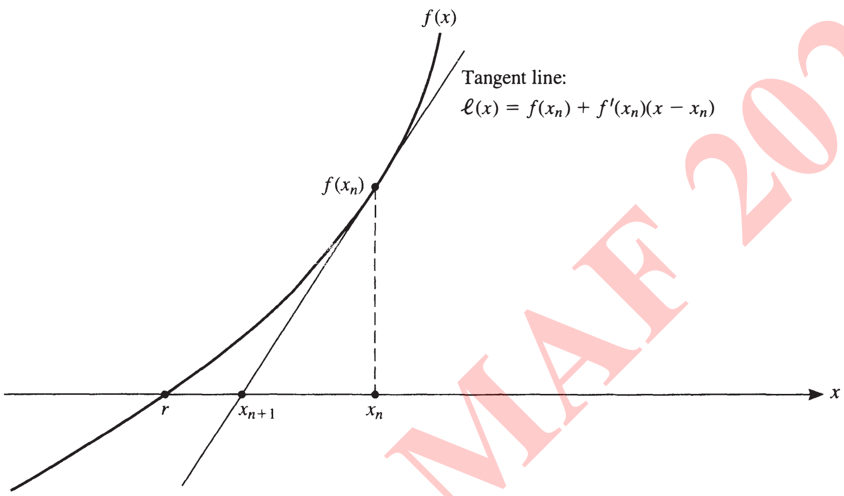

Figura 1: Interpretación geométrica del método de Newton.

Así, en lugar de buscar la raíz de f (**problema difícil**), se calcula la raíz de l_n, es decir, se busca x_{n+1} solución de $l_n(x) = 0$. Es decir:

$$l(x_{n+1}) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0,$$

y por lo tanto

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Es fácil imaginar ejemplos donde esta idea podría fallar como se puede ver en la Figura (2). Mirando el gráfico se puede deducir que la aproximación inicial x_0 debe estar suficientemente cerca de la raíz r para que el método converja.

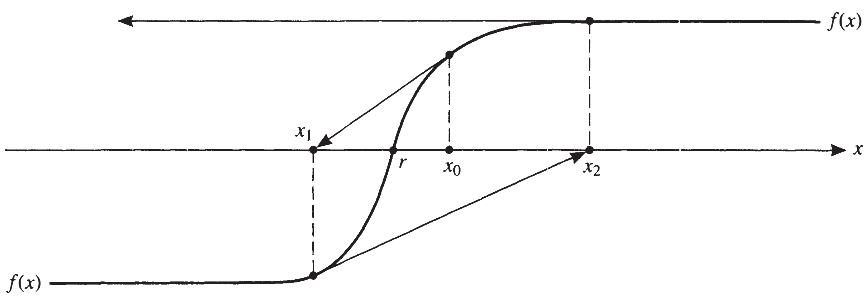

Figura 2: Ejemplo donde el método de Newton podría diverger.

Algoritmo del método de Newton

Dados los siguientes datos de entrada y parámetros algorítmicos: la aproximación inicial x_0, el número máximo de iteraciones permitido M, δ la tolerancia para el error e (en la variable x) y ε la tolerancia para los valores funcionales.

input $x_0, M, \delta, \varepsilon$

$v \leftarrow f(x_0)$

output $0, x_0, v$

if $|v| < \varepsilon$ **then STOP** (1)

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

  $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0)$

  $v \leftarrow f(x_1)$

output k, x_1, v

  if $|x_1 - x_0| < \delta$ **or** $|v| < \varepsilon$ **then STOP** (2)

    $x_0 \leftarrow x_1$

end

Observaciones:

1. En el algoritmo aparecen dos paradas (STOP). La primera detecta que el punto inicial satisface la tolerancia del valor funcional. La segunda parada detecta que alguno de los criterios de parada considerados se cumple. Además el algoritmo podría parar por la cantidad máxima de iteraciones permitida.

2. Se podría usar otro criterio de parada basado en que el error relativo sea pequeño en lugar de considerar el error absoluto.

3. El algoritmo requiere subprogramas o procedimientos externos que calculen $f(x)$ y $f'(x)$.

4. sería conveniente controlar en el programa que $f^{x_0} \neq 0$ en cada iteración.

Análisis de errores

El siguiente resultado muestra que bajo ciertas hipótesis la sucesión generada por el método de Newton converge **local** y **cuadráticamente**, es decir que si se comienza con una aproximación suficientemente próxima a la solución el método converge cuadráticamente.

Teorema 1. *Si f'' es continua en un entorno de una raíz r de f y si y si $f'(r) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si el punto inicial x_0 satisface $|r - x_0| \leq \delta$ luego todos los puntos de la sucesión $\{x_n\}$ generados por el algoritmo del método de Newton satisfacen que $|r - x_n| \leq \delta$ para todo n, la sucesión $\{x_n\}$ converge a r y la convergencia es cuadrática, i.e.,*

$$|r - x_{n+1}| \leq c(\delta)|r - x_n|^2.$$

Demostración. Consideremos el error en la aproximación x_n en la iteración n:

$$e_n = r - x_n. \tag{2}$$

El error en la iteración $(n+1)$ es:

$$e_{n+1} = r - x_{n+1} = r - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

Luego

$$e_{n+1} = \frac{e_n f'(x_n) + f(x_n)}{f'(x_n} \tag{3}$$

Si escribimos el desarrollo de Taylor de f alrededor de x_n tenemos que

$$f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{1}{2} f''(\xi_n)h^2,$$

para algún ξ_n entre x_n y $x_n + h$.

Tomando $h = e_n = r - x_n$, se tiene que $x_n + h = r$ y luego

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{1}{2} f''(\xi_n)h^2,$$

para algún ξ_n entre x_n y r. Luego

$$e_n f'(x_n) + f(x_n) = -\frac{1}{2} f''(\xi_n)h^2. \tag{4}$$

Usando (3) y (4) obtenemos que

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2. \tag{5}$$

Para acotar esta expresión definimos la siguiente función para $\delta > 0$

$$c(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\underset{|x-r|\leq\delta}{\text{máx}} |f''(x)|}{\underset{|x-r|\leq\delta}{\text{mín}} |f'(x)|}.$$

Como f' y f'' son funciones continuas entonces $|f'|$ y $|f''|$ alcanzan sus valores extremos en un intervalo cerrado y acotado alrededor de r. Luego, dado $\delta > 0$, para todo par x y ξ tal que $|\xi - r| \leq \delta$ y $|x - r| \leq \delta$ existe una constante $c = c(\delta)$ tal que

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(x)} \right| \leq c(\delta).$$

Ahora notemos que si $\delta \to 0$ entonces $c(\delta) \to \frac{1}{2} \left| \frac{f''(r)}{f'(r)} \right|$, que es un número finito porque $f'(r) \neq 0$ y por lo tanto $\delta c(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$. Entonces elegimos δ suficientemente pequeño tal que $\rho = \delta c(\delta) < 1$.

Supongamos que la aproximación inicial x_0 es tal que $e_0 = |x_0 - r| \leq \delta$, y como ξ_0 está entre x_0 y r, entonces $|\xi_0 - r| \leq \delta$. Luego por la definición de $c(\delta)$ tenemos que

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \right| \leq c(\delta).$$

Finalmente por (5)

$$|x_1 - r| = |e_1| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}\right||e_0|^2 \leq c(\delta)|e_0|^2 = c(\delta)|e_0||e_0| \leq c(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0| < |e_0| \leq \delta.$$

Esto dice que x_1 está a una distancia de r menor que δ y además que si la sucesión converge, lo hace cuadráticamente. Repitiendo este argumento obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} |e_1| & \leq & \rho|e_0| \\ |e_2| & \leq & \rho|e_1| \leq \rho^2|e_0| \\ |e_3| & \leq & \rho|e_2| \leq \rho^3|e_0| \\ & \vdots & \end{array}$$

En general, tenemos que

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Como $0 < \rho < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \rho^n = 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ y así $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

□

Observación: el método de Newton tiene convergencia cuadrática local para determinar raíces simples, bajo adecuadas hipótesis.

El siguiente resultado que sólo enunciaremos aunque su demostración puede consultarse en la Bibliografía muestra que bajo hipótesis de convexidad en todo el dominio el método de Newton converje independientemente del punto inicial.

Teorema 2. *Si f'' es continua en $\mathbb{R}$, f es creciente y convexa en $\mathbb{R}$ y tiene una raíz, entonces esa raíz es única y la iteración de Newton convergerá a esa raíz independientemente del punto inicial x_0.*

Ejercicio: hallar una función que cumpla las hipótesis del teorema. Analizar la utilidad práctica del teorema.