Clase 11 - Aproximación de funciones (2)

Supongamos ahora que $f \in C[a,b]$ y que se quiere determinar el mejor polinomio (en el sentido de cuadrados mínimos) $P_n(x)$ de grado $\leq n$ que minimice la siguiente medida del error entre la función f y P_n en el intervalo $[a,b]$:

$$E = E(a_0,\ldots,a_n) = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2\,dx = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2\,dx,$$

es decir, se deben determinar los coeficientes $a_0,\ldots,a_n$ que definen el polinomio $P_n(x)$ de manera que E sea mínima. Ver Figura 1.

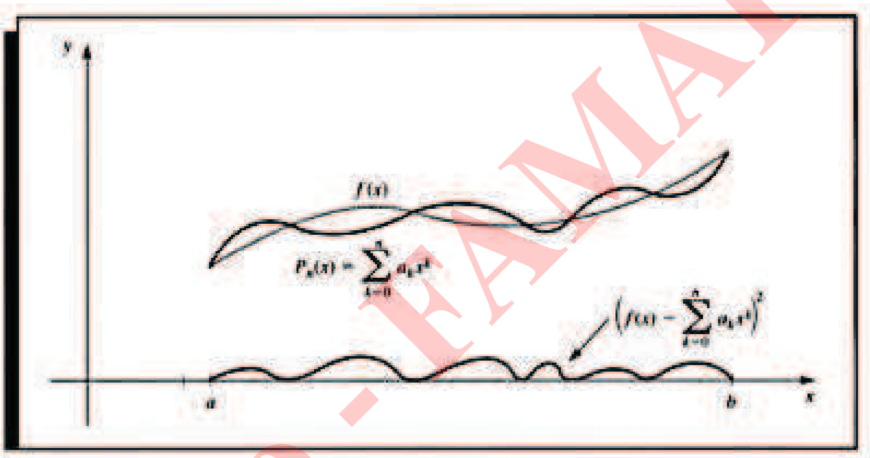

Figura 1: Gráficos de f y P_n.

Al igual que antes, una condición necesaria para encontrar un minimizador en $a_0,\ldots,a_n$ es que $\partial E/\partial a_j = 0$ para todo $j = 0,\ldots,n$. Antes de calcular estas derivadas, vamos a reescribir convenientemente la expresión E:

$$\begin{aligned} E = E(a_0,\ldots,a_n) &= \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2\,dx \\ &= \int_a^b [f(x)]^2\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\,dx + \int_a^b [\sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2\,dx, \end{aligned}$$

luego para $j = 0,\ldots,n$,

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{k+j}\,dx = 0.$$

Así, se obtienen las **ecuaciones normales**:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{k+j}\,dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx \qquad \text{para} \qquad j = 0,\ldots,n.$$

Ejemplo: determinar el polinomio de aproximación de cuadrados mínimos de grado ≤ 2 para la función $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ en el intervalo $[0,1]$.

Las ecuaciones normales para el polinomio $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, están dadas por:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 \int_0^1 1\,dx & + & a_1 \int_0^1 x\,dx & + & a_2 \int_0^1 x^2\,dx & = & \int_0^1 \operatorname{sen} \pi x\,dx \\
a_0 \int_0^1 x\,dx & + & a_1 \int_0^1 x^2\,dx & + & a_2 \int_0^1 x^3\,dx & = & \int_0^1 x \operatorname{sen} \pi x\,dx \\
a_0 \int_0^1 x^2\,dx & + & a_1 \int_0^1 x^3\,dx & + & a_2 \int_0^1 x^4\,dx & = & \int_0^1 x^2 \operatorname{sen} \pi x\,dx
\end{array}$$

Calculando las integrales este sistema lineal puede escribirse matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2-4)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465 \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251$$

y el polinomio de grado ≤ 2 de mejor aproximación por cuadrados mínimos está dado por $P_2(x) = -4.12251 x^2 + 4.12251 x - -0.050465$. Ver Figura 2.

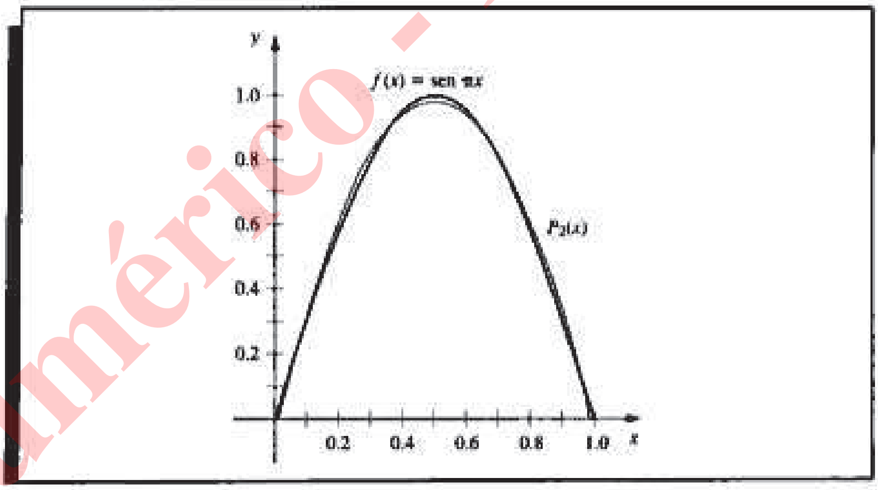

Figura 2: Gráficos de $\operatorname{sen}(x)$ y P_2.

Los coeficientes de la matriz de coeficientes pueden calcularse usando la siguiente fórmula para el caso general

$$a_{ij} = \int_a^b x^{j+k}\,dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}.$$

Esta matriz es llamada **matriz de Hilbert** y es conocida por ser mal condicionada. El concepto de *condicionamiento de una matriz* se estudia en álgebra lineal numérica y está asociado a la sensibilidad de la matriz frente a perturbaciones en los datos. Se dice que una matriz es mal condicionada cuando pequeñas peturbaciones en los datos producen grandes perturbaciones en las soluciones. Esta es una característica de la matriz de coeficientes y no del método numérico que se utilice. Independientemente de esto, sería deseable que la matriz sea lo más simple posible, por ejemplo una matriz diagonal.

Para lograr esto, en lugar de proponer un polinomio de la forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, como una combinación lineal de los polinomios $\{x^j\}_{j=0}^n$, consideraremos otra forma de expresar el mismo polinomio de cuadrados mínimos. A continuación veremos algunas definiciones básicas y resultados que serán necesarios.

Definición 1. *El conjunto de funciones $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es* **linealmente independiente** *en el intervalo $[a,b]$, si siempre que*

$$c_0\,\phi_0(x) + c_1\,\phi_1(x) + \cdots + c_n\,\phi_n(x) = 0 \qquad \text{para cualquier } x \in [a,b],$$

se tiene que $c_0 = c_1 = \dots c_n = 0$. En caso contrario se dice que ese conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

Teorema 1. *Si $\phi_j(x)$ es un polinomio en x de grado igual a j para $j = 0, \dots, n$, entonces $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente para cualquier intervalo $[a,b]$.*

Demostración. Sean $c_0, \dots, c_n$ números reales tales que

$$P(x) = c_0\,\phi_0(x) + c_1\,\phi_1(x) + \cdots + c_n\,\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j\,\phi_j(x) = 0,$$

para cualquier $x \in [a,b]$.

Como $P(x)$ se anula en todo el intervalo $[a,b]$, los coeficientes de todas las potencias de x son iguales a cero. Como $c_n\,\phi_n(x)$ es el único término que incluye x^n entonces el coeficiente $c_n = 0$ y por lo tanto, $\sum_{j=0}^{n-1} c_j\,\phi_j(x)$.

Repitiendo esta misma idea, se tiene que el único término que incluye a x^{n-1} es $c_{n-1}\,\phi_{n-1}(x)$ y de aquí se concluye que $c_{n-1} = 0$. De igual forma se obtiene que $c_{n-2} = \cdots = c_1 = c_0 = 0$, y, en consecuencia, $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

□

El siguiente resultado para conjuntos de polinomios es análogo a otro que se utiliza en aplicaciones de álgebra lineal. No veremos la demostración, pero, en cambio, haremos un ejemplo.

Teorema 2. *Si $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto de polinomios linealmente independiente para cualquier intervalo $[a,b]$ en el espacio de polinomios de grado $\leq n$, entonces todo polinomio de grado $\leq n$ puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$.*

Ejemplo: Sean $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = x - 3$ y $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$. Por el Teorema 1, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es un conjunto linealmente independiente en cualquier intervalo $[a,b]$. Sea $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un polinomio cuadrático arbitrario. Aplicaremos el teorema anterior mostrando que existen coeficientes c_0, c_1 y c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Notar que $1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$, $\quad x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$, y que

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7 = \phi_2(x) - 2\left(\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right) - 7\left(\frac{1}{2}\phi_0(x)\right) = \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x).$$

Luego

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ &= a_0 \left(\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right) + a_1 \left(\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right) + a_2 \left(\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x)\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}a_0 + \tfrac{3}{2}a_1 - \tfrac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) + (a_1 - 2a_2)\phi_1(x) + a_2\phi_2(x), \end{aligned}$$

y por lo tanto cualquier polinomio cuadrático puede escribirse como una combinación lineal de $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$.