NOIP 2023 小清新模拟赛 题解

推数机（device）

不难注意到 $7 \times 11 \times 13 = 10^3 + 1$，推数机相当于将原数各数位复制一次。

容易证明 $k = \overline{abc}$ 时最终结果一定是从 a, b, c 分别 2^n 个中选择 3 个组成的三位数。

这是容易做的。时间复杂度 $O(t)$。

三元组（triple）

由于我们至多花费三次操作，所以我们仅需考虑能否用低于三次操作完成变化。

解法 1

若可以在不超过两次操作内完成变化，则每次操作必可为如下之一：

- 令某个 $p \leftarrow a$；
- 令某个 $(p, q) \leftarrow (p \cdot \frac{a-b}{p-q}, q \cdot \frac{a-b}{p-q})$；
- 令某个 $(p, q) \leftarrow (a \cdot \frac{p-q}{a-b}, b \cdot \frac{p-q}{a-b})$。

> 证明：
>
> 记两次操作同时影响的位置为 C 类，恰被一次操作影响的位置分别为 AB 类。
>
> 若最小操作次数少于两次，则一定符合上述论断。
>
> 否则，若有位置不被影响，则直接修改其余位置即可，故每个位置必为 ABC 中一类。
>
> 考虑一个最优操作方案。
>
> 若 AB 类均存在，则两次操作均符合 $p \leftarrow a$ 的情况。
>
> 否则，必定存在 C 类。
>
> 此时若 C 类恰一个且不存在 A 类，则将 C 类元素改为 A 类，第二次操作特别复原即可。
>
> 此时若 C 类恰一个且不存在 B 类，则将 C 类元素改为 B 类，第二次操作特别复原即可。
>
> 否则，必定存在至少两个 C 类。

> 考虑必然存在两个位置 (p,q) 用两次操作同时复原，则必符合三种情况中的后二者之一。

于是，可以搜索。一组数据内约 81 种情况。时间复杂度 $O(t)$，常数约为 100，可过。

解法 2

不妨直接枚举前两次操作分别操作了哪些位置。

不妨再枚举前两次操作的运算。

若一个位置仅被一次操作影响，则不难推出这次操作的参数 d。

若两个位置同时被两次不同运算影响，则不难推出这两次操作的参数 d。

若最终还有参数无法推出，则仅有一个位置受影响，若该情况合法则答案至多为 1。

不是特别繁琐。时间复杂度 $O(t)$，常数约为 10^3，可过。

徽章（badge）

q 较小或 m 较小时均可得到优秀的做法，不难想到根号分治。

- $m \ge \sqrt{n}$ 时，考虑直接做前缀和，枚举区间算贡献；
- $m < \sqrt{n}$ 时，考虑枚举 (x_i, x_j)，计算恰好包含 x_i, x_j 的贡献，可以离线扫描线。

时间复杂度 $O(n\sqrt{n\log n})$，空间复杂度 $O(n\sqrt{\frac{n}{\log n}})$，卡不掉。

扫描线时，可以用分块平衡时间复杂度。而空间上我们可以通过记录询问编号而不是 (x_i, x_j) 来减小复杂度。

不难做到时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$，空间复杂度 $O(n)$。

网格（grid）

解法 1

枚举一条边计算贡献，时间复杂度 $O(n^2m^2)$，期望得分 20。

解法 2

枚举一条边的方向并计算贡献，讨论有些繁琐，时间复杂度 $O(nm)$，期望得分 40。

解法 3

为方便考虑，此处的 n, m 为题面中的 $n-1, m-1$。考虑枚举一条边上的整点数。

进行类似狄利克雷后缀和的操作，仅需统计一条边上 $\frac{1}{k}$ 处为整点的边数。

在不与坐标轴垂直时，两个方向独立，这是容易统计的。

记 f_i 表示边上整点数恰为 $i+1$ 的边数。

$$\begin{aligned} f_i = &(\sum_{ij\le n}(n-ij+1)(m+1)) + (\sum_{ij\le m}(m-ij+1)(n+1)) \\ &+ 2(\sum_{ij\le n} n-ij+1)(\sum_{ij\le m} m-ij+1) - \sum_{i|j} f_j \end{aligned}$$

不妨先算出任意三点构成的图形的边上整点数，减去不构成三角形时的贡献。答案即：

$$\begin{aligned} &(\sum_i f_i \cdot ((n+1)(m+1)+2)\cdot i) - (\sum_i f_i \cdot (i+1)\cdot 2i) \\ =&\sum_i f_i \cdot ((n+1)(m+1)-2i)\cdot i \end{aligned}$$

其中第一处 $+2$ 是考虑第三个点取边的端点之一时，该边贡献两次。

时间复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 100。

注意答案可能超过 2^{64}，需用 128 位整形存储。