Day9 题解

题解：询问

在本题的数据范围下，发现经过 30 个函数后 $\max$ 就只会取 $2b-i, 2a-i$ 了，所以先暴力递推出前 30 项，再用矩阵快速幂处理剩余的部分。

题解：k-减序列

条件可以直接改写为：存在 $i<j$ 使得 $a_i<ka_j$，这个命题的否定是对所有 $i<j$ 都有 $a_i \geq ka_j$，我们做这个反问题，然后用 $(m+1)^n$ 减去反问题的答案得到原来的答案。

当 $k=1$ 时，序列是单调不升的，答案是 $\binom{n+m}{m}$。否则可以发现序列中的非零数很少，序列前 $O(\log m)$ 项有可能是非零的，后面的都一定是 0。我们直接以值为状态做 $O(\log n)$ 轮 dp，前缀和优化转移，复杂度是 $O(m+m/2+m/4+\cdots)=O(m)$。

题解：二次根式

显然 $f(n)^2 \times g(n)=n$。所以只需要计算 $N!$ 和 F 即可。

对于 F 来说，我们对每个质因子考虑。记 $\alpha_p(n)$ 是最大的 k 满足 $p^k|n$。则

$$F=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\sum_{i=1}^{n}\lfloor\alpha_p(i)/2\rfloor}$$

那么，这里只有 $\alpha_p(i)\geq 2$ 时，i 会对答案有 >1 的贡献。当 $p>\sqrt{n}$ 时，$p^2>N$，p 不会有贡献，直接跳过；否则将 $\lfloor a/2\rfloor$ 写成 $\sum_{i\geq 1}[a\geq 2i]$ 的形式，答案就是

$$\prod_{p\leq\sqrt{N}, p\in\mathbb{P}} p^{\sum_{k\geq 1}\lfloor N/p^{2k}\rfloor}$$

计算复杂度，可以简单认为，不超过 n 的质数有 $n/\ln n$，每个质数 p 都需要 $\log_p n$ 的时间计算，那么我们无视对数的底，得到复杂度是 $O(\sqrt{N}/\log N\times\log N)$ 也就是 $O(\sqrt{N})$。

但是复杂度的瓶颈其实是 $N!$ 的计算。由于本题 N 相对来说很小，同时模数固定，故可以考虑分块打表。令 B 为块长，用另一个程序算出 $B!, (2B)!, (3B)!, \cdots$ 的值，询问时用表中的值加上剩余部分即可，询问复杂度 $O(B)$。由于代码长度限制，建议取 $B=3\times 10^5$。

题解：浙江旅行团

不用持久化时，我们用颜色段均摊的想法，配合 `vector` + 二分就可以完成了。要求持久化时，则需要分别解决这两个部分。颜色段均摊直接抛弃，改成线段树的区间覆盖即可。我们想象，对于一个机器人，我们打在他身上的是一堆形如 (t,u) 的操作，表示在 t 时刻这个机器人走到城市 u。将操作打包称为操作包，记录第一个操作和最后一个操作，以及总共产生的评分；那么两个操作包合并的时候，只需要计算前一个的最后一个和后一个的第一个的贡献即可。现在，两个操作对应的时刻之间，我们需要计算某个城市举行的活动的矩阵积，一共 $O(n\log n)$ 次，而且强制在线。而对于这个计算任务，原本是 `vector` + 二分解决的，现在相当于是上树了，我们对每个城市的修改建类似于虚树的东西，我们将到修改城市 c 的版本，连一条边到离它最近的修改城市 c 的祖先上去，这样我们发出计算任务的时候就能做树上倍增。而找到这个最近的祖先，我们用持久化线段树记录每个城市对应的最近祖先即可。总复杂度 $O(n\log^2 n)$。