# Solution

## T1

$$ans=\begin{cases}\frac{[(k+1)m]!}{m!(k+1)^m} & (\exists m\in N,n=km+1)\\ 0 & (else)\end{cases}$$

## T2

考虑只询问一次，发现问题可以被转化成类似于如下情况：

有一个网格，上面排布着一条左上到右下的终点（边接或点接），每个终点有对应权

棋子最初在 $(0,0)$，每人每轮可以将棋子向右/上移动一格，先手想让终点权值最小，后手想让终点权值最大，问最后权值

找到最小的 $x$ 使得 $(x,x)$ 是终点或终点右上方的格子，发现答案就是以 $(x-2,x-2)$ 为起点的答案，然后可以 $O(n)$ 解决单次

稍微维护一下，可以 $O(\lg^2 n)$

## T3

想到任意容量完全背包，有重要性质

> 记物品 $b$ 为最优物品，则当 $V\ge|c|c_b$ 时，选 $b$ 一定不劣

因为这个性质，在任意时候只需要考虑容量在 $O(|c|^2)$ 的背包，任意容量完全背包可以在 $O(n|c|^2+q)$ 的复杂度内实现

那么根据推广，假设现物品已得到排序，物品 $i$ 不劣于物品 $i+1$，有

> 当 $V\ge|c|c_i+\sum\limits_{j<i}k_jc_j\wedge k_i\ge|c|$ 时，选 $i$ 一定不劣

于是在任意时候只需要考虑容量在 $O(n|c|^2)$ 的背包（注意此时考虑选不同物品时其余物品数量可能不同），任意容量多重背包可以在 $O(n^2|c|^2+q\lg n)$ 的复杂度内实现（lg 来源于二分决策到哪个物品了）

## T4

复用自出题人的上一场模拟赛：

---

发现 $d(ij)$ 并不能写成什么和 $d(i),d(j),d(\gcd(i,j))$ 相关的式子，所以一般的套路都是用 $d(ij)=\sum\limits_{x|i}\sum\limits_{y|j}[x\perp y]$，但那样笔者并没有想到 100 $pts$ 做法，所以考虑硬靠 $\gcd(i,j)$ 拆式子

考虑 $i=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots,p_k^{\alpha_k},j=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_3^{\beta_3}\dots p_k^{\beta_k}$，有

$gcd(i,j)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}p_3^{\min(\alpha_3,\beta_3)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$

同时还有一个式子，若 $n=p_1^{l_1}p_2^{l_2}p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k}$，有

$$d(n)=\prod_{x=1}^{k}(l_x+1)$$

这启发了我一个做法，现在我需要约定 $L_p(n)$ 表示 $n$ 中 $p$ 质因子的次数

我们现在枚举了 $g$，但我们不像正常莫反一样只有 $g|i,g|j$ 的限制，还要加一条

若 $g=p_1^{l_1}p_2^{l_2}p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k}$，则应该满足 $\forall x\in\{1,2,3,\cdots,k\},l_x=\min(L_{p_x}(i),L_{p_x}(j))$

发现此时 $L_{p_x}(i)$ 和 $L_{p_x}(j)$ 中至少有一个等于 $l_x$，我们考虑将等于 $l_x$ 的这个直接消掉，将另一边的贡献加上 $l_x$

这时候，有一个非常巧妙地做法，是这样的

> 对于 $i$，我们令
> $st=\sum\limits_{x=1}^{k}[L_{p_x}(i)=l_x]2^{x-1},w=\prod\limits_{x=1}^{k}\frac{1}{(L_{p_x}(i)+1)^2}\prod\limits_{L_{p_x}(i)\neq l_x}(L_{p_x}(i)+l_x+1)^2,a_{st}:=a_{st}+w\cdot d^2(i)$
>
> 对于 $j$，我们令
> $st=\sum\limits_{x=1}^{k}[L_{p_x}(j)=l_x]2^{x-1},w=\prod\limits_{x=1}^{k}\frac{1}{(L_{p_x}(j)+1)^2}\prod\limits_{L_{p_x}(j)\neq l_x}(L_{p_x}(j)+l_x+1)^2,b_{st}:=b_{st}+w\cdot d^2(j)$
>
> 通过高维前缀和，使得 $a_x:=\sum\limits_{x\subset y}a_y\prod\limits_{z\notin x\wedge z\in y}(2l_y+1)^2$
>
> $contri=\sum\limits_{x=0}^{2^k-1}a_xb_{x\oplus(2^k-1)}$，其中 $\oplus$ 表示按位异或

发现这个 $contri$ 就是满足这些限制算出来的，但是貌似这些限制并不能使得 $\gcd(i,j)=g$，因为有可能 $i,j$ 还会存在一些 $g$ 没有的共同质因子，所以还要容斥

发现对于 $g$，只需要减掉所有 $2^k-1$ 个真子集的贡献即可（并非本次算多的，而是前面算多的），于是我们对 $g$ 每一个真子集 $g'$ 按 $g$ 的限制和 $g'$ 的系数算出来答案减掉即可

反正创过去了，注意细节，复杂度大概是数论的 $O(n\lg^2 n)$