A. 小猪盖房子

将题目抽象之后，就是给定一个数组A[1,..,n]，每个代表原来的一行。数组中的每个元素要么是通配符"?"，要么是一对数字。问，有多少个区间，前一半和后一半可以匹配，以及匹配的方案数。

我们定义A[i]~A[j]代表两个元素可以匹配。

显然，对于长度为2d的区间[l,r]，我们需要判断[l,mid]区间内的元素是否满足A[i]~A[i+d]。

我们只要预先处理整个数组的A[i]~A[i+d]，就可以用滑动窗口找到所有合法的区间[l,r]，然后统计匹配方案（只有对于前后都是"?"的，可以贡献$m(m-1)/2$），求和

时间复杂度为枚举d+枚举i，$O(n^2)$

B. 换乘旅行

我们考虑每个站向它第一辆车的目标站连一条边。假如这张图中存在环，那其实意味着，对于任意一条路径，第一次到环上的一个点p后，一定会绕着这个环转一圈回到p，然后从p的第二辆车开始走。

因此，我们可以用dfs不断找到这张图中的环，然后删掉。当图中不存在环时，即使一个站台上有两辆摆渡车，也只有第一辆会被使用（没有环，离开这个站台后一定不会回来）。因此我们可以直接在剩下的图上拓扑排序/记忆化搜索得到每个站台作为起点的最终目的地。

C. 优美的街景

我们考虑合法区间的判定，显然需要左半边的最大值小于右边所有数。那么我们可以考虑这样枚举，枚举左半边的最大值$a[i]$，因为$a[i]$需要是最大值，所以它对应的合法区间$[L,R]$必须满足：

1. 它的左端点L必然不能超过$a[i]$左边第一个比它大的位置$l[i]$
2. 左右分界点m必然要是$a[i]$右边第一个比它大的位置$r[i]$
3. m到右端点R必须全都是比$a[i]$大的数，m固定时可以简单地通过二分+ST表求出$R \le p$

此时我们会发现，一个位置$a[i]$可以验证$L \in [l[i]+1, i]; R \in [m, p]$的所有区间都合法

我们把数组上的所有区间$[l,r]$看作是二维平面上的一个点(l,r)，那就意味着一个$a[i]$可以让一个矩形区域内的点合法。因此总合法区间数量等于矩形面积并，使用扫描线+线段树求解。

D. 网络规划

首先对题目进行抽象，可以得到：给一个环，要求选择一些边，相邻的选择边的距离不超过k，要求最小化选出的边权和

我们假设第一个选择的是(n--1)这条边，此时可以把环断开，通过一个dp+滑动窗口简单的得到最优解。假设最优解是$a_0, a_1, ..., a_m$这些边，其中$a_0 = (n, 1)$。

接下来暴力情况下就是枚举每条边作为第一条选择的边，像上面一样dp。

但我们可以猜到，这些最优解显然不会相差太多，考虑他们之间有什么样的关系。

假如第一次选择的边是b_0，强制选m条边的最优解是$b_0, ..., b_m$

性质一： $b_i \geq a_i$

显然$b_0 \geq a_0$，假设存在最小的一段$[l, r]$使得$\forall i \in [l, r],\ b_i < a_i$

1. 如果 $r < m$ ，即存在 $b_{r+1} \geq a_{r+1}$ ，显然我们会发现，将 $a_0 \sim a_m$ 中的 $a_l \sim a_r$ 替换成 $b_l \sim b_r$ ，也是a问题的一个合法解，因此一定有 $sum(a_l \sim a_r) \leq sum(b_l \sim b_r)$ 。反过来对于b也一样，因此有 $sum(a_l \sim a_r) \geq sum(b_l \sim b_r)$ ，因此有 $sum(a_l \sim a_r) = sum(b_l \sim b_r)$ ，显然我们可以用 $a_l \sim a_r$ 替换 $b_l \sim b_r$ ，得到一个满足性质的b问题的最优解。

2. 如果 $r = m$ ，同理显然有a_m和b_r可以互换，因此可以把b_r换成a_m，满足要求

性质二： $b_i \leq a_{i+1}$

证明同上类似。假设存在最小的一段$[l, r]$使得$\forall i \in [l, r],\ b_i > a_{i+1}$，同上显然$b_l \sim b_r$和$a_{l+1} \sim a_{r+1}$是可以互相替换的，因此可以通过替换调整。

特别的，我们会发现$l = 0$时这一替换仍然成立，因此我们会知道，一定存在一个最优解，第一个选择的边在a_0和a_1之间。

前半部分解法：

显然，如果最优解的边数恰好等于m，我们可以快速搜索出所有以$[a_0, a_1]$内的某一个边为第一条边的最优解。

我们可以使用类似"整体二分"的手段，以$mid = \frac{a_0 + a_1}{2}$为第一条边，dp出$m$条边的最优解，其中$b_i \in [a_i, a_{i+1}]$。这样，我们就可以对于第一条边在$[a_0, mid)$和$(mid, a_1]$的这两部分就可以分别获得一个更紧的界，$[a_i, b_i]$和$[b_i, a_{i+1}]$。

整体复杂度为$O(n\log n)$

性质三：最优解b的边数$s \in \{m-1, m, m+1\}$

1. 如果 $s < m-1$ 。我们会发现b这个序列一定在某一个b_i和b_{i+1}跨越了a中的两段a_j, a_{j+1}, a_{j+2}，这意味着a_{j+1}是没有必要选的，与a是最优解矛盾。
2. 如何 $s > m+1$，同理，与b是最优解矛盾。

最终解法

我们现在已经有了m条边的最优解，剩下如果我们能找到a_0起点的$m-1$条边的最优解，我们就可以找到所有$m-1$条边的全局最优。

显然，如果存在$m-1$条边的最优解，一定有$a_i' \in [a_i, a_{i+1}]$。否则的话类似性质三，一定存在一次横跨a中的两个区间，这会导致a不是最优的。

同理，如果存在$m+1$条边的最优解，一定有$a_i' \in [a_{i-1}, a_i]$。否则的话类似性质一，可以通过交换得到一个满足要求的。

现在我们获得了以a_0为起点的，分别有$m-1, m, m+1$条边的最优解。然后可以通过前面的分治dp，获得三种边数的全局最优解，从而获得最终答案。