NOIP 2019 模拟赛 Contest 2

diamond_duke

题目名称	石子	内存	子集
可执行文件名	stone	memory	subset
输入文件名	标准输入	标准输入	标准输入
输出文件名	标准输出	标准输出	标准输出
时间限制	1s	1s	2s
内存限制	512MB	512MB	512MB
子任务个数	4	3	4
题目类型	传统型	传统型	传统型

请注意： 评测时开启 O2 优化和 C++11 编译选项，栈空间限制同空间限制。

1 石子

根据期望的线性性，答案 $E(t) = P_2 + P_3 + \cdots + P_n + 1$，其中 P_i 是第 i 堆石子在第 1 堆之前被取走的概率。

考虑第 i 堆，可以发现其他堆都不会影响这两堆，因此相当于只要考虑只有这两堆的情况，因此概率即为 $\dfrac{a_i}{a_1 + a_i}$。

因此答案即为 $\sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{a_i}{a_1 + a_i} + 1$，直接计算即可。

时间复杂度：$\Theta(n)$。

2 内存

对于每个 x，考虑如果用它来压缩那么可以达到的最优解，设为 $F(x)$。

假如给定一个 x，想要求 $F(x)$，那么可以通过二分贪心在 $\Theta(n\log_2 n)$ 的时间内算出。

直接对于所有 x 都暴力计算即可得到 $\Theta(nm\log_2 n)$ 的复杂度，可以通过子任务 $1,2$。

如果我们以随机顺序遍历所有 x，则在期望情况下，新的 $F(x)$ 比当前所有 F 的值都要小的 x 个数的期望应该是 $\sum {}^1\!/_i$，这是调和级数，为 $\Theta(\ln n)$。

于是我们只对于这些 x 二分即可：我们令答案为 $\mathrm{ans}-1$ 并贪心，即可判断当前的 x 是否满足条件。

时间复杂度：$\Theta(nm+n\ln n\log_2 n)$。

3 子集

显然我们只会选择 n 的约数，因为如果选了其他的那么最小公倍数一定不是 n。

考虑对 n 进行分解，设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$。那么我们要求选的数字满足：对于每个 $i \in [1, k]$，均存在一个数在 p_i 中是 0 次方，也存在一个数在 p_i 中是 α_i 次方。

直接计算并不容易，考虑容斥原理：如果只有一个 p^α，那么我们用所有情况去掉不存在 0 次方的情况，再去掉不存在 α 次方的情况，然后加上都不存在的情况即可。

然后对于原问题，我们可以 $\Theta(4^k)$ 枚举每个质因数是上面四种情况中的哪一种，然后计算出这种情况下的方案数即可。时间复杂度：$\Theta(4^{\omega(n)}\omega(n))$，可以通过子任务 $1, 2$。

考虑如何进行优化。注意到对于第一种情况，方案数为 $(\alpha_i + 1)$，第二种和第三种情况都是 α_i，而第四种是 $(\alpha_i - 1)$。因此，我们可以转而枚举方案数的可能性，这只有三种，因此枚举的复杂度从 $\Theta(4^k)$ 降到了 $\Theta(3^k)$。

值得一提的是，这里对 n 进行分解是本题的难点：$\Theta(\sqrt{n})$ 的复杂度并不可以接受，但我们并不需要真的得到 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，而是只要知道 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 即可。

我们考虑先分解出所有 $p_i \le \sqrt[3]{n}$ 的 $p_i^{\alpha_i}$，那么剩余部分只有 p, p^2, pq 三种，其中 p, q 都是质数。

那么我们先使用 Miller Rabin 算法判断 p 的情况，然后开根号后平方判断 p^2 的情况，剩余的情况就是 pq 的情况了。

时间复杂度：$\Theta(\sqrt[3]{n} + 3^{\omega(n)}\omega(n))$。