

Gymnázium Evolution Jižní Město



**Eric Dusart**

**Nejmenší  $n + 1$  dimenzionální  
útvár obsahující všechny body  
v  $n$  dimenzionálním prostoru**

Ročníková práce

Školitel práce:

Mgr. Adam Klepáč

Školní rok: 2023/2024

## **Poděkování**

Děkuji bohovi Adamovi. KLEPY = BŮH!!!

## Prohlášení

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Abstrakt

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

**Klíčová slova:** random, random2, random3

## Abstract

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

**Keywords:** random, random2, random3



# Obsah

Úvod	9
<b>I Teoretická část</b>	<b>11</b>
<b>1 Problém ve 2D</b>	<b>13</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	13
1.2 Adaptace Dijkstrova algoritmu . . . . .	14
1.2.1 Popis algoritmu . . . . .	14
1.3 Začátek . . . . .	14
1.4 Algoritmus . . . . .	15
<b>II Praktická část</b>	<b>17</b>
<b>2 Další zajímavá kapitola</b>	<b>19</b>
<b>Závěr</b>	<b>21</b>





# Úvod

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur

a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

# **Část I**

## **Teoretická část**



# Kapitola 1

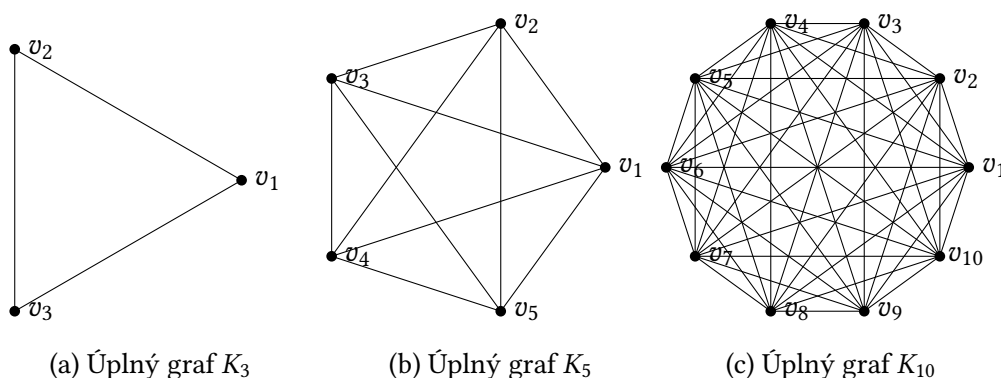
## Problém ve 2D

Předpokládám, že všechny grafy, o kterých mluvím, jsou souvislé!

### 1.1 Základní pojmy

**Definice 1 (Ohodnocený graf)**  $G = (V, E, w)$  je ohodnocený graf, kde  $V$  je konečná množina vrcholů,  $E$  je konečná množina hran jako dvojic vrcholů  $E \subseteq \binom{V}{2}$  a  $w$  je libovolné zobrazení  $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , které hranám přiřazuje jejich váhu.

**Definice 2 (Úplný ohodnocený graf)** Úplný ohodnocený graf  $G = (V, E, w)$  je graf, který má  $n$  vrcholů a každé dva vrcholy jsou spojeny hranou, neboli  $E = \binom{V}{2}$ . Takový graf můžeme také zapsat jako  $K_n = (V, \binom{V}{2}, w)$ .



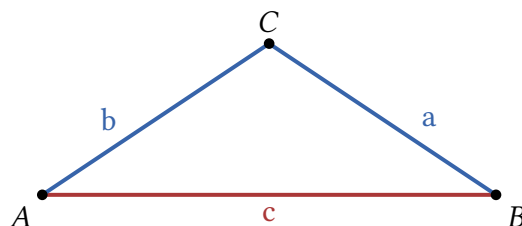
Obrázek 1.1: Tři úplné grafy

**Definice 3 (cesta)** Cestou v grafu nazveme posloupnost **různých** vrcholů  $v_1, \dots, v_n$ , pokud  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$  platí  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ .

**Definice 4 (Cyklus)** Cyklem v grafu nazveme posloupnost vrcholů  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ , pokud  $v_i \neq v_j \forall i \neq j$  a také  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$  platí  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  a  $\{v_n, v_1\} \in E$ . Délkou cyklu nazveme počet hran v cyklu.

**Definice 5 (Cyklus jako cesta)** Cyklus můžeme také definovat jako cestu se stejným počátečním a koncovým vrcholem.

**Definice 6 (trojúhelníková nerovnost)** Trojúhelníková nerovnost říká, že pro každé tři různé body  $A, B, C$  platí  $|AC| + |CB| \geq |AB|$ , neboli vzdálenost mezi dvěma body je vždy menší než součet vzdáleností mezi těmito body a třetím bodem.



Obrázek 1.2: Trojúhelníková nerovnost

## 1.2 Adaptace Dijkstrova algoritmu

Dijkstrův algoritmus, pojmenovaný po Edsger W. Dijkstrovi, je algoritmus na hledání nejkratší cesty mezi dvěma body v ohodnoceném grafu. Obecně taková cesta může mít několik vrcholů, ale protože náš graf je úplný, tak nejkratší cesta mezi vrcholy  $u$  a  $v$  by byla hrana  $\{u, v\}$ . Tuto hranu ale z grafu odebereme a až teď budeme hledat nejkratší cestu mezi  $u$  a  $v$ . Nejkratší cesta povede právě přes jeden vrchol, který nazveme  $j$ , a bude se skládat právě ze dvou hran. Z trojúhelníkové nerovnosti ([definice 6](#)) víme, že nejkratší cesta mezi dvěma body ( $u$  a  $j$  nebo  $j$  a  $v$ ) se skládá právě z jedné hrany.

### 1.2.1 Popis algoritmu

1. Vytvoříme si množinu všech nenavštívených bodů a vybereme si startovní a cílový bod. Nastavíme všechny body jako nenavštívené.
2. Ke každému bodu přiřadíme vzdálenost od počátečního bodu. Prozatím tuto vzdálenost u všech bodů nastavíme na  $\infty$ . Vzdálenost počátečního bodu od sebe samého nastavíme na 0.
3. Od počátečního bodu začneme procházet všechny jeho sousedy. Pro každého souseda spočítáme vzdálenost od počátečního bodu (teď pouze váha hrany vedoucí z počátečního bodu do souseda). Tuto vzdálenost připišeme sousedovi, protože ta vzdálenost bude menší, než  $\infty$ . Až zkontrolujeme všechny jeho sousedy, můžeme počáteční bod odebrat z množiny nenavštívených bodů.
4. Potom se přesuneme na nenavštívený bod s nejmenší vzdáleností od počátečního bodu. Tento bod se stane aktuálním bodem a budeme kontrolovat vzdálenosti všech jeho nenavštívených sousedů tak, že se podíváme na vzdálenost aktuálního bodu a váhu hrany vedoucí k sousedovi a tyto hodnoty sečteme. Pokud výsledná hodnota bude menší, než ta, kterou má u sebe uloženou soused, tak ji změníme. Pozor na to, že když přepíšu vzdálenost souseda od startovního bodu, souseda nenavštívíme. Až zkontrolujeme všechny jeho sousedy, můžeme počáteční bod odebrat z množiny nenavštívených bodů.
5. Bod 4 opakujeme dokud nevybereme za aktuální bod cílový bod. V tomto okamžiku jsme našli nejkratší cestu.

## 1.3 Začátek

Problém zní tak, že dostaneme množinu bodů v rovině a chceme najít trojúhelník s nejmenším obvodem. Ano, mohli bychom hledat všechny trojúhelníky, ale to by zabralo

až moc času. Pokuším se tedy najít nějaký algoritmus, který by to zvládl rychleji.

Nejlepší způsob jak řešit úlohy tohoto typu je převést si úlohu na grafovou úlohu. V teorii grafů nás nezajímá umístění bodů a hran, ale zajímá nás pouze to, jak jsou tyto body a hrany propojeny. Hrany pak mají svoje ohodnocení, neboli váhu. V našem případě bude váha hrany odpovídat délce úsečky, která spojuje dva body.

## 1.4 Algoritmus

Nechť  $V$  je množina bodů v rovině, pro každé dva body  $u, v \in V$  označme  $d(u, v)$  vzdálenost mezi nimi. Pomocí funkce  $d$  definujeme graf  $G = (V, E, w)$ , kde hrany  $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  a váha, neboli ohodnocení  $w(\{u, v\}) = d(u, v)$ . Nyní chceme najít trojúhelník. Náhodně si vybereme jednu hranu  $\{u, v\} \in E$  a odebereme ji z množiny hran  $E$ . Nyní chceme najít nejkratší cestu (O tom co je cesta si můžete přečíst v Appendixu idk) mezi body  $u, v$ . K tomuto použijeme Dijkstrův algoritmus. Pokud nějaká cesta existuje, společně s hranou  $\{u, v\}$  tvoří nějaký mnohoúhelník. Není těžké si rozmyslet, že tento útvar bude trojúhelník. Cesta se bude skládat ze dvou hran  $\{u, j\}$  a  $\{j, v\}$ , které společně s hranou  $\{u, v\}$  tvoří trojúhelník  $T = (V_T, E_T, w)$ , kde  $V_T = \{u, j, v\}$ ,  $E_T = \{\{u, j\}, \{j, v\}, \{u, v\}\}$  a váha  $w = w(\{u, v\}) + w(\{u, j\}) + w(\{j, v\})$ . Pokud je tato váha menší než nejmenší váha, kterou jsme doposud našli, uložíme si tento trojúhelník. Nezapomene znovu přidat hranu  $\{u, v\}$  zpátky do množiny hran  $E$ . Tento postup opakujeme, dokud nevyčerpáme všechny hrany. Výsledkem bude trojúhelník s nejmenším obvodem.

---

**Algoritmus 1:** Algoritmus na hledání trojúhelníku s nejkratším obvodem.

---

**input** : Množina bodů  $V$  v rovině, kde každý bod je reprezentován jako dvojice souřadnic  $(v_x, v_y)$

**output:** Trojúhelník  $T = (V_T, E_T, w)$

```

1 for  $u \in V$  do
2   for  $v \in V$  do
3      $d(u, v) = \sqrt{(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2}$ ;
4  $E = \binom{V}{2}$ ;
5  $G = (V, E, w)$ ;
6  $min_T = \infty$ ;
7 for  $\{u, v\} \in E$  do
8    $E = E \setminus \{u, v\}$ ;
9    $d(u, j, v) = \text{dijkstra}(G, u, v)$ ;
10  if  $d(u, j, v) + d(u, v) < min_T$  then
11     $min_T = d(u, v) + d(u, v)$ ;
12     $V_T = \{u, j, v\}$ ;
13     $E_T = \{\{u, j\}, \{j, v\}, \{u, v\}\}$ ;
14     $T = (V_T, E_T, w)$ ;
15   $E = E \cup \{u, v\}$ ;
16 return  $T$ ;

```

---





# **Část II**

## **Praktická část**



## **Kapitola 2**

### **Další zajímavá kapitola**



# Závěr

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur

a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.