

Gymnázium Evolution Jižní Město



Eric Dusart

**Polytop maximální dimenze
a minimálního obvodu s vr-
choly v dané množině bodů.**

Ročníková práce

Školitel práce:

Mgr. Adam Klepáč

Školní rok: 2023/2024

Poděkování

Děkuji bohovi Adamovi. KLEPY = BŮH!!!

Prohlášení

V Praze dne 26. března 2024

Eric Dusart

Abstrakt

Klíčová slova: graf, polytop, algoritmus

Abstract

Keywords: graph, polytope, algorithm

Obsah

Použitá notace	9
Základní definice	11
Úvod	13
I Teoretická část	15
1 Problém v 1D	17
1.1 Algoritmus	17
2 Problém ve 2D	19
2.1 Algoritmus	19
2.1.1 Algoritmus v pseudokódu	20
2.2 Dijkstrův algoritmus	21
2.2.1 Popis Dijkstrova algoritmu	21
2.3 Důkaz algoritmu	22
3 Zobecnění na n dimenzí	23
3.1 Algoritmus	23
3.2 Nápady s kombinatorikou	23
II Praktická část	25
4 Program ve 2D	27
Závěr	29

Použitá notace

Symbol	Význam
\mathbb{R}^+	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\binom{n}{k}$	Kombinační číslo: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$p(a, b, c)$	Obvod trojúhelníku a, b, c .
$ a $	Absolutní hodnota z a .
$\min(), \max()$	Funkce minimum a maximum.

Základní definice

Definice 1 (Polytop). Polytop dimenze $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená podmnožina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definovaná induktivně:

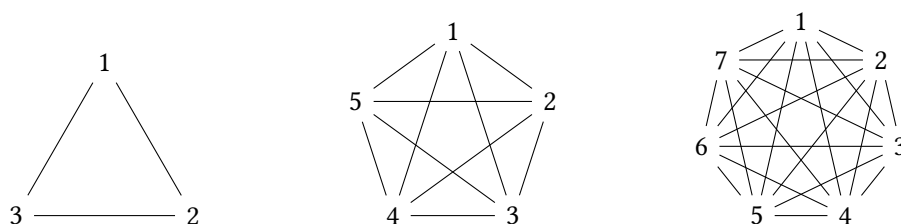
- Polytop dimenze 1 je úsečka.
- Polytop dimenze n je splením polytopů dimenze $n-1$, jež spolu mohou sdílet stěny libovolné dimenze, kde *stěnou* polytopu rozumíme jeho libovolnou podmnožinu jsoucí rovněž polytopem. Zároveň neexistuje nadrovina (podprostor dimenze $n-1$), která by obsahovala všechny jeho vrcholy. [Ada24]

Definice 2 (Bod). Bod je uspořádaná n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ve 2D budu používat značení $a = (a_x, a_y)$

Definice 3 (Vzdálenost). Zobrazení $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ nám určí vzdálenost dvou bodů $u, v \in \mathbb{R}^n$ podle předpisu $d(u, v) := \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2}$.

Definice 4 (Ohodnocený graf). $G = (V, E, w)$ je ohodnocený graf, kde V je množina vrcholů, E je množina dvojprvkových podmnožin $E \subseteq \binom{V}{2}$ a w je libovolné zobrazení $E \rightarrow \mathbb{R}^+$, které hranám přiřazuje jejich váhu.

Definice 5 (Úplný ohodnocený graf). Úplný ohodnocený graf $G = (V, E, w)$ má každé dva vrcholy spojeny hranou, neboli $E = \binom{V}{2}$. Takový graf můžeme také zapsat jako $K_n := (V, \binom{V}{2}, w)$.



Obrázek 1: Úplné grafy K_3 , K_5 a K_7

Definice 6 (Podgraf). Podgraf $H = (V, E)$ je tvořen podmnožinou vrcholů a hran jiného grafu. Hrany grafu H musí mít oba vrcholy v množině vrcholů V .

Definice 7 (Cesta). Cestou v grafu nazveme posloupnost **různých** vrcholů v_1, \dots, v_n , pokud $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Definice 8 (Váha cesty). Pokud cestu tvoří posloupnost vrcholů v_1, \dots, v_n , tak váha cesty je rovna

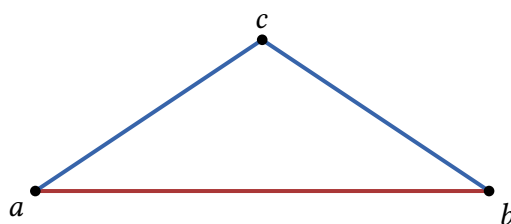
$$w(\{v_0, \dots, v_n\}) = \sum_{i=1}^{n-1} w(\{v_i, v_{i+1}\}).$$

Definice 9 (Cyklus). Cyklus je posloupnost vrcholů v_1, \dots, v_n, v_1 , kde v_1, \dots, v_n je cesta a poslední dva vrcholy $\{v_1, v_n\} \in E$.

Definice 10 (Váha cyklu). Pokud cyklus tvoří posloupnost vrcholů v_1, \dots, v_n , tak váha cesty je rovna

$$w(\{v_0, \dots, v_n, v_0\}) = w(\{v_1, v_n\}) + \sum_{i=1}^{n-1} w(\{v_i, v_{i+1}\}).$$

Definice 11 (Trojúhelníková nerovnost). Trojúhelníková nerovnost říká, že pro každé tři různé body a, b, c platí $d(a, b) + d(c, b) \geq d(a, c)$, neboli vzdálenost mezi dvěma body je vždy menší nebo rovna součtu vzdáleností mezi těmito body a třetím bodem.



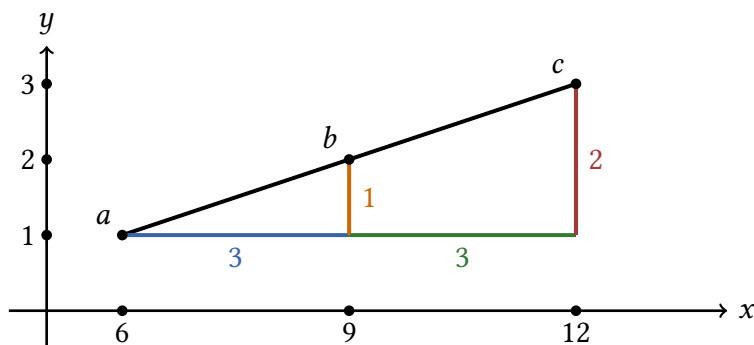
Obrázek 2: Trojúhelníková nerovnost

Definice 12 (Soused). V grafu $G = (V, E, w)$ je bod u soused bodu v , pokud $\{u, v\} \in E$.

Definice 13 (Big O notation). idk

Definice 14 (Obvod trojúhelníku). Definujeme si zobrazení $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ podle předpisu: $p(a, b, c) := d(a, b) + d(b, c) + d(a, c)$, které nám určuje obvod trojúhelníku a, b, c .

Definice 15 (Podobnost trojúhelníků a body na jedné přímce). Jsou dány 3 body: $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$, $c = (c_x, c_y)$. Tyto body jsou na přímce, pokud platí, že trojúhelníky $(a_x, a_y), (b_x, a_y), (b_x, b_y)$ a $(a_x, a_y), (c_x, a_y), (c_x, c_y)$ mají stejný poměr stran, neboli platí: $\frac{c_y - a_y}{c_x - a_x} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$.



Obrázek 3: Příklad podobnosti trojúhelníků

Úvod

Tohle tady nebude, to nějak změním...

Najít polytop maximální dimenze a minimálního obvodu v dané množině bodů je složité, hlavně při vyšším počtu bodů. Zdá se, že k vyřešení problému je třeba vyzkoušet všechny možnosti, ale tomu se budeme vyhýbat.

Začneme analýzou tohoto problému. Cílem je najít polytop maximální dimenze a minimálního obvodu v dané množině bodů. Ve 2D budeme problém řešit trochu jinak, než ve vyšších dimenzích.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Problém v 1D

Problém v 1D je velice jednoduchý. Vstupem bude množina bodů $V \subset \mathbb{R}$ ve které budeme hledat nejkratší úsečku. Výstupem bude úsečka $\{a, b\} \mid a, b \in V$. Následujícím algoritmem můžeme tento problém vyřešit.

1.1 Algoritmus

1. Nejprve body seřadíme.
2. Projdeme všechny body $x_1 \dots x_n \in V$ a spočítáme vzdálenost všech po sobě jdoucích bodů: $|x_i - x_{i+1}|$, kde i značí kolikátý bod procházíme. Tuto vzdálenost si uložíme, a pokud je menší, než ta doposud uložená, změníme ji.
3. Po tom, co projdeme všechny body, uložená minimální vzdálenost je řešením problému.

Důkaz. Zřejmý. Algoritmus skončí, protože prochází konečnou množinou bodů a je korektní, protože spočítá všechny vzdálenosti po sobě jdoucích bodů a vybere tu minimální. \square

Algoritmus 1: Algoritmus na hledání úsečky s minimální délkou.

input : Množina bodů V v 1D.

output: Dvojice bodů a jejich vzájemná vzdálenost.

- 1 **Mám tam psát sorting algoritmus nebo můžu počítat, že vstup už bude seřazený?** ;
 - 2 $d \leftarrow (x_0, x_\infty, \infty)$;
 - 3 **for** $x, i \in V$ **do**
 - 4 $distance \leftarrow |x_i - x_{i+1}|$;
 - 5 **if** $distance < d$ **then**
 - 6 $d \leftarrow (x_i, x_{i+1}, distance)$;
-

Kapitola 2

Problém ve 2D

Problém ve 2D je o něco jednodušší, než ve více dimenzích. Ve 2D budu hledat trojúhelník s minimálním obvodem. První algoritmus, který by nás napadl by byl ten, který vyzkouší všechny trojúhelníky a vybere ten s minimálním obvodem. Ten ale vůbec není časově efektivní. Pokusím se najít, naprogramovat a dokázat nějaký, který je časově efektivní.

2.1 Algoritmus

Nechť V je množina bodů v rovině a pro každé dva body $u, v \in V$ označme $d(u, v)$ jejich vzájemnou vzdálenost. Množinu hran označíme $E = \binom{V}{2}$ a váhu, neboli ohodnocení, nám určuje zobrazení w dané předpisem $w(\{u, v\}) := d(u, v) \mid \forall (u, v) \in E$. Nyní si můžeme definovat graf $G = (V, E, w)$. Tímto je příprava hotova. Následuje hledání cyklu délky 3 s minimální váhou.

Náhodně vybereme jednu hranu $\{u, v\} \in E$ a odebereme ji z množiny hran E . Dále potřebujeme najít cestu s minimální váhou mezi body u a v . K tomuto použijeme [Dijkstrův algoritmus](#), který nám vrátí cestu délky dva. Ta se bude skládat ze dvou hran: $\{u, j\}$ a $\{j, v\}$. Teď musíme zkontrolovat, zda tato cesta s hranou $\{u, v\}$ opravdu tvoří trojúhelník, protože se může stát, že body u, j, v leží na jedné přímce. K tomu využijeme [podobnost trojúhelníků](#). Definujeme si body $a := \min(\{u_x, j_x, v_x\})$, $c := \max(\{u_x, j_x, v_x\})$ a bod b je zbývající. Pak platí $a_x < b_x < c_x$. Body se nacházejí na přímce právě tehdy, pokud rovnice $\frac{c_y - a_y}{c_x - a_x} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$ je pravdivá.

Poznámka 1 (jiný způsob). Předchozí způsob funguje perfektně pro počítače, ale pro člověka je v některých případech zbytečně komplikovaný. Tyto případy nastávají, když se body nacházejí na horizontálních nebo vertikálních přímkách. To jde poznat tak, že $u_y = j_y = v_y$ nebo $u_x = j_x = v_x$. V případě, že se body nacházejí na horizontálních přímkách, musíme z grafu odebrat hranu $\{\min(\{u_y, j_y, v_y\}), \max(\{u_y, j_y, v_y\})\}$ a pokud jde o vertikální přímku, musíme z grafu odebrat hranu $\{\min(\{u_x, j_x, v_x\}), \max(\{u_x, j_x, v_x\})\}$.

Pokud tyto body tvoří trojúhelník, pak tvoří podgraf $T = (V_T, E_T, w)$, kde množina bodů $V_T = \{u, j, v\}$, množina hran $E_T = \{\{u, j\}, \{j, v\}, \{u, v\}\}$ a váha hran se zachová. Pokud tento podgraf bude mít celkovou váhu menší než ten, který jsme doposud našli, uložíme jej a vrátíme hranu $\{u, v\}$ do množiny hran E . Tento postup opakujeme dokud nevyzkoušíme všechny hrany. Výsledkem bude trojúhelník s minimálním obvodem. Na [obrázku 2.1](#) můžete vidět jak algoritmus funguje.

2.1.1 Algoritmus v pseudokódu

Pseudokód je popis jednotlivých kroků v algoritmu s použitím základní logiky programovacích jazyků. Následuje náš algoritmus napsaný v pseudokódu.

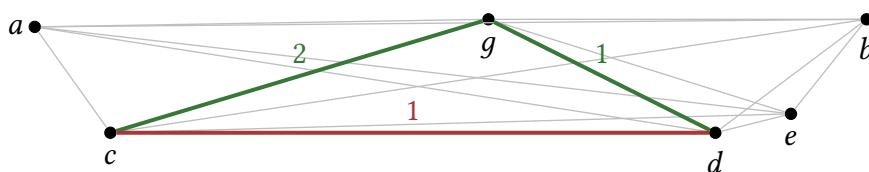
Algoritmus 2: Algoritmus na hledání cyklu délky 3.

input : Množina bodů V v rovině, kde každý bod je reprezentován jako dvojice souřadnic (v_x, v_y)
output: Trojúhelník $T = (V_T, E_T, w)$

```

1 for  $u \in V$  do
2   for  $v \in V$  do
3      $d(u, v) \leftarrow \sqrt{(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2};$ 
4      $w(\{u, v\}) \leftarrow d(u, v);$ 
5  $E \leftarrow \binom{V}{2};$ 
6  $G \leftarrow (V, E, w);$ 
7  $min_T \leftarrow \infty;$ 
8 for  $\{u, v\} \in E$  do
9    $E \leftarrow E \setminus \{u, v\};$ 
10   $j \leftarrow \text{dijkstra}(G, u, v);$ 
11   $a = \min(u_x, j_x, v_x);$ 
12   $c = \max(u_x, j_x, v_x);$ 
13   $b = \{u, j, v\} \setminus \{a, c\};$ 
14  if  $(c_y - a_y)(b_x - a_x) == (b_y - a_y)(c_x - a_x)$  then
15    if  $\{a, c\} == \{u, v\}$  then
16      continue;
17    else
18       $E \leftarrow E \cup \{u, v\};$ 
19       $E \leftarrow E \setminus \{a, c\};$ 
20  else if  $p(u, j, v) < min_T$  then
21     $min_T \leftarrow p(u, j, v);$ 
22     $V_T \leftarrow \{u, j, v\};$ 
23     $E_T \leftarrow \{\{u, j\}, \{j, v\}, \{u, v\}\};$ 
24     $T \leftarrow (V_T, E_T, w);$ 
25     $E \leftarrow E \cup \{u, v\};$ 
26  else
27     $E \leftarrow E \cup \{u, v\};$ 
28 return  $T;$ 

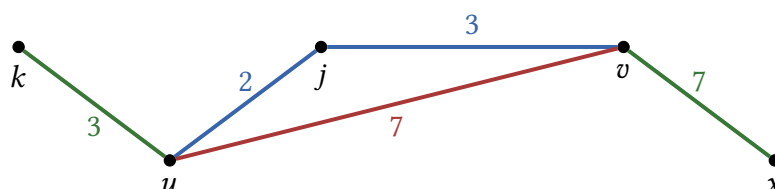
```



Obrázek 2.1: Příklad případu, kdy algoritmus vybral hranu $\{c, d\}$, odebral ji z množiny hran, a pomocí Dijkstrova algoritmu našel nejkratší cestu z bodu c do bodu d . (Pro čitelnost nejsou zobrazeny váhy ostatních hran. Předpokládejme, že jsou vyšší, než 3.)

2.2 Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus, pojmenovaný po Edsgeru W. Dijkstrovi, je algoritmus na hledání cesty s minimální váhou mezi dvěma body v ohodnoceném grafu, který hraje velkou roli v našem algoritmu. Obecně taková cesta může mít několik vrcholů, ale protože náš graf je převzatý z roviny, povede právě přes jeden vrchol a bude se skládat ze dvou hran. To se dá dokázat pomocí [trojúhelníkové nerovnosti](#). Kdyby náš graf nebyl převzatý z roviny, mohla nastat situace na [obrázku 2.2](#).



Obrázek 2.2: V obecném grafu nemusí platit [trojúhelníková nerovnost](#).

2.2.1 Popis Dijkstrova algoritmu

1. Vytvoříme množinu všech nenavštívených bodů a vybereme startovní a cílový bod. Označíme všechny body nenavštívenými.
2. Každému bodu přiřadíme vzdálenost od počátečního bodu; prozatím na ∞ . Vzdálenost počátečního bodu od sebe samého nastavíme na 0.
3. Nejdříve projdeme všechny sousedy počátečního bodu. Každému sousedu spočítáme vzdálenost od počátečního bodu (v tomto případě váha hrany vedoucí z počátečního bodu do souseda) a přepíšeme ji sousedovi, bude-li menší než ∞ . Až zkontrolujeme všechny jeho sousedy, odebereme počáteční bod z množiny nenavštívených bodů.
4. Potom se přesuneme na nenavštívený bod s minimální vzdáleností od počátečního bodu. Tento bod označíme jako aktuální a začneme kontrolovat jeho sousedy. Je-li součet vzdálenosti od počátečního bodu do aktuálního s váhou hrany vedoucí k sousedu menší než vzdálenost, kterou má u sebe soused uloženou, změníme ji. Je třeba myslet na to, že když přepíšeme vzdálenost souseda od startovního bodu, souseda neoznačujeme za navštíveného. Počáteční bod odebereme z množiny nenavštívených bodů, až zkontrolujeme všechny jeho sousedy.
5. Čtvrtý bod opakujeme, dokud nevybereme za aktuální bod ten cílový. V tomto okamžiku jsme našli nejkratší cestu.

2.3 Důkaz algoritmu

Abychom mohli dokázat korektnost algoritmu, musíme dokázat, že algoritmus skončí a že je správný, to znamená, že dělá přesně co chceme. Dijkstrův algoritmus, který je součástí algoritmu, dokazovat nebudu, protože důkaz je příliš dlouhý a je dostupný v literatuře.

Tvrzení 1. *Dijkstrův algoritmus je korektní.*

Důkaz. Vizte [BS99, s. 113]. □

Tvrzení 2. *Algoritmus na hledání cyklu délky 3 je korektní.*

Důkaz. Konečnost algoritmu je zřejmá; jediným cyklem v algoritmu je procházení všech stran. Jelikož je množina hran konečná a víme, že Dijkstrův algoritmus je korektní, můžeme říci, že náš algoritmus skončí.

Správnost algoritmu dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že existuje trojúhelník x, y, z , který má kratší obvod, než trojúhelník a, b, c , který našel algoritmus, neboli:

$$\exists \{x, y, z\} \subseteq V : p(x, y, z) < p(a, b, c) \mid \forall a, b, c \leftarrow \text{algoritmus}.$$

Znamená to, že náš algoritmus vybral jednu stranu trojúhelníku s minimálním obvodem špatně, a tím vznikl trojúhelník s delším obvodem. Jelikož náš algoritmus prochází všechny hrany, tak tam nemohl vybrat špatnou hranu. Tím pádem špatnou hranu musel vybrat když vybíral zbylé dvě hrany. Ty ale vybral Dijkstrův algoritmus, který **je dokázán**. Tím vznikl spor a algoritmus je dokázán. □

Kapitola 3

Zobecnění na n dimenzí

Problém v n dimenzích bude trochu komplikovanější a časově náročnější, ale převod na grafovou úlohu nám to velice usnadní. Opět budeme hledat cykly, ale tentokrát délky $n + 1$. Práce nám ale velice zkomplikuje kontrolování, jestli daný cyklus je polytop dimenze n . Například ve 3D Může nastat situace, kdy algoritmus najde cyklus délky 4, ale bude se jednat o čtyřúhelník ležící v jedné rovině.

3.1 Algoritmus

Najít všechny cykly v grafu a pak vybrat minimální s dobrou vzdáleností? -> příšerný, ale funguje to...

3.2 Nápady s kombinatorikou

Množina všech cyklů délky n v našem grafu je: $C = \binom{V}{n}$. Teď musíme vyřadit cykly, které nemají maximální dimenzi. Pak vybereme $\min(w(c)) \mid c \in C \forall c$ a to je cyklus minimální váhy s délkou n . Tento algoritmus je ale neefektivní. Zabere $\#V^n$ času, což je zkoušení všech možností.

Část II

Praktická část

Kapitola 4

Program ve 2D

V této kapitole naprogramuji program, který v množině bodů v rovině najde trojúhelník s minimálním obvodem. K naprogramování takového programu použiju programovací jazyk Python.

Závěr

Literatura

- [BS99] Holger Benl a Helmut Schwichtenberg. „Formal Correctness Proofs of Functional Programs: Dijkstra’s Algorithm, a Case Study“. In: *Computational Logic*. Ed. Ulrich Berger a Helmut Schwichtenberg. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999, s. 113–126. ISBN: 978-3-642-58622-4. DOI: [10 . 1007 / 978 - 3 - 642 - 58622 - 4 _ 4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-58622-4_4).
- [Ada24] Adam Klepáč. *Definice polytopu*. 9. led. 2024.