Hledání polytopu maximální dimenze a minimálního obvodu s vrcholy v dané množině bodů

Eric Dusart

17. května 2024

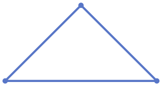
Obsah

Co je to polytop?

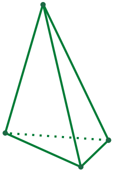
Informace o polytopu

- *Polytop* dimenze $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená podmnožina $P \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Polytop maximální dimenze a minimálního obvodu má $n + 1$ vrcholů.
- Neexistuje nadrovina (podprostor dimenze $n - 1$), která by obsahovala všechny vrcholy polytopu.

(a) Úsečka



(b) Mnohoúhelník



(c) Mnohostěn

Moje práce

Výzkumná otázka

Jak najít polytop maximální dimenze a minimálního obvodu s vrcholy v dané množině bodů?

Rozdělení práce:

- ☑ Problém v 1D, 2D a nD
  - ☑ Najít algoritmus.
  - ☑ Dokázat, že funguje.
  - ☑ Naprogramovat algoritmus.

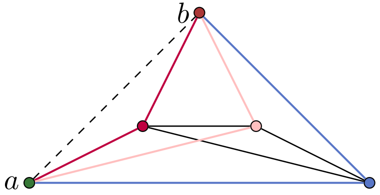
Proč jsem si vzbral toto téma:

- Zájem o matematiku.
- Trojúhelníky ve 2D.
- Problém v n dimenzích.

Proč je užití Dijkstrova algoritmu v dvoudimenzionální variantě problému stejně efektivní jako procházení všech možností?

Pokud máme zvolený bod a a hledáme nejkratší cestu do bodu b, tak Dijkstrův algoritmus bude fungovat následovně:

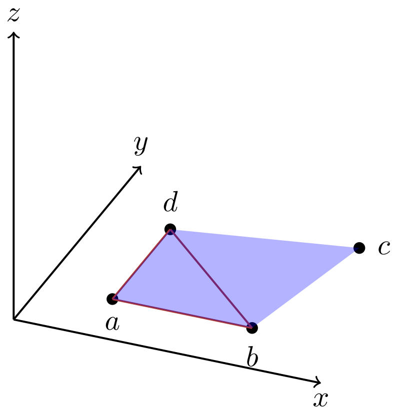
- Vybere bod a jako počáteční a přiřadí všem ostatním bodům vzdálenost ∞.
- $\forall u \in V \setminus \{a\}$ zkontroluje, jestli $w(a, u) < \infty$, a pokud ano, vzdálenost změní.
- ...



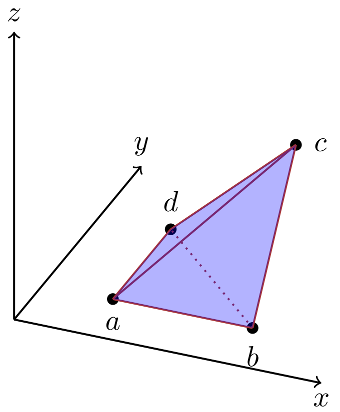
Obrázek: Graf K_5

Co když leží všechny vstupní body v jedné nadrovině?

- Hledaný polytop neexistuje.



(a) 3D s polytopem dimenze 2



(b) 3D s polytopem dimenze 3

Co má větší vliv na časovou náročnost algoritmu? Dimenze či počet bodů? V jakém smyslu a proč?

- Pokud sortíme polytopy podle jejich obvodu:
  - Best: $\binom{\#V}{n+1} + \binom{n+1}{2}\binom{\#V}{n+1} + n\log n + n^3$
  - Worst: $\binom{\#V}{n+1} + \binom{n+1}{2}\binom{\#V}{n+1} + n\log n + \binom{\#V}{n+1}n^3$: všechny polytopy + obvod pro všechny polytopy + sorting + determinant pro všechny polytopy
- Pokud vybíráme minimální:
  - Best: $\binom{\#V}{n+1} + \binom{n+1}{2}\binom{\#V}{n+1} + n \cdot n^3$
  - Worst: $\binom{\#V}{n+1} + \binom{n+1}{2}\binom{\#V}{n+1} + n\binom{\#V}{n+1}n^3$: všechny polytopy + obvod pro všechny polytopy + determinant pro všechny polytopy ale po každé vybírám ten s minimálním obvodem (to je to n před $\#VC(n+1)$)

Můžeš odhadnout náročnost tvého algoritmu pro $n = 10$ (alespoň přibližně)?