Gymnázium Evolution Jižní Město

Eric Dusart

Polytop maximální dimenze a minimálního obvodu s vrcholy v dané množině bodů

Ročníková práce

Školitel práce:

Adam Klepáč

Školní rok: 2023/2024

Poděkování

Chtěl bych poděkovat Adamu Klepáčovi za odborné vedení mé ročníkové práce, cenné rady, tipy, inspiraci, ochotu a za všechny konzultační hodiny, které mi velice pomohly zkompletovat tuto práci.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto ročníkovou práci vypracoval samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Praze dne 25. dubna 2024 Eric Dusart

Abstrakt

Klíčová slova: graf, polytop, algoritmus

Abstract

Keywords: graph, polytope, algorithm

Obsah

Použitá notace

Symbol	Význam
$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
$\mathbb{N}$	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\}$.
n	$n \in \mathbb{N}$ značí dimenzi.
$\binom{n}{k}$	Kombinační číslo: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
$p(a, b, c)$	Obvod trojúhelníku a, b, c.
$\Delta(a, b, c)$	Trojúhelník a, b, c.
$d(a, b)$	Vzdálenost bodu a od b.
$w(a, \ldots, n)$	Váha cesty z a do n.
min, max	Funkce minimum a maximum.
$\#V$	Velikost množiny V.
${}_n x_k$	n-tá souřadnice k-tého bodu

Základní definice

Definice 1 (Polytop). *Polytop* dimenze $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená podmnožina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definovaná induktivně:

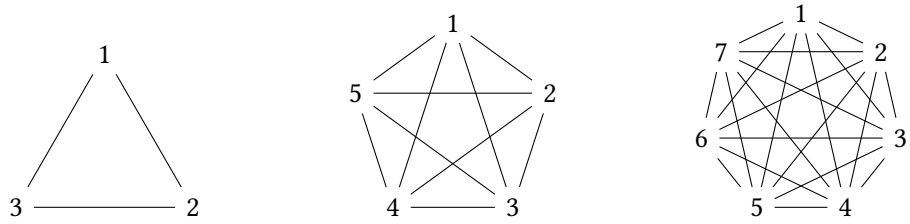
- Polytop dimenze 1 je úsečka.
- Polytop dimenze n je slepením polytopů dimenze $n-1$, jež spolu mohou sdílet stěny libovolné dimenze, kde *stěnou* polytopu rozumíme jeho libovolnou podmnožinu jsoucí rovněž polytopem. Zároveň neexistuje nadrovina (podprostor dimenze $n-1$), která by obsahovala všechny jeho vrcholy. [Ada24]

Definice 2 (Bod). Bod je uspořádaná n-tice $({}_1x, {}_2x, \ldots, {}_nx) \in \mathbb{R}^n$. Ve 2D budu používat značení $a = (a_x, a_y)$.

Definice 3 (Vzdálenost). Zobrazení $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ nám určí vzdálenost dvou bodů $u, v \in \mathbb{R}^n$ podle předpisu $d(u,v) \coloneqq \sqrt{({}_1v - {}_1u)^2 + ({}_2v - {}_2u)^2 + \ldots + ({}_nv - {}_nu)^2}$.

Definice 4 (Ohodnocený graf). $G = (V, E, w)$ je ohodnocený graf, kde V je množina vrcholů, E je množina dvouprvkových podmnožin $E \subseteq \binom{V}{2}$ a w je libovolné zobrazení $E \to \mathbb{R}^+$, které hranám přiřazuje jejich váhu.

Definice 5 (Úplný ohodnocený graf). Úplný ohodnocený graf $G = (V, E, w)$ má každé dva vrcholy spojeny hranou, neboli $E = \binom{V}{2}$. Takový graf můžeme také zapsat jako $K_n \coloneqq (V, \binom{V}{2}, w)$.



Obrázek 1: Úplné grafy K_3, K_5 a K_7

Definice 6 (Podgraf). Graf $H = (V', E')$ je podgraf grafu $G = (V, E)$, pokud $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$.

Definice 7 (Cesta). Cestou v grafu nazveme posloupnost **různých** vrcholů $v_1, \ldots, v_n$, pokud $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ platí $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Definice 8 (Váha cesty). Pokud cestu tvoří posloupnost vrcholů $v_1, \ldots, v_n$, tak váha cesty je rovna

$$w(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}).$$

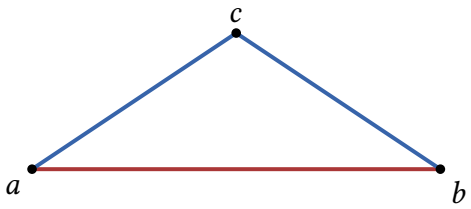
Definice 9 (Cyklus). Cyklus je posloupnost vrcholů $v_1, \ldots, v_n, v_1$, kde $v_1, \ldots, v_n$ je cesta a $\{v_1, v_n\}$ je hrana v množině hran E.

Definice 10 (Váha cyklu). Pokud cyklus tvoří posloupnost vrcholů $v_1, \ldots, v_n$, tak váha cyklu je rovna

$$w(v_1, \ldots, v_n, v_1) = d(v_1, v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}).$$

Definice 11 (Soused). V grafu $G = (V, E, w)$ je vrchol u soused vrcholu v, pokud hrana $\{u, v\} \in E$.

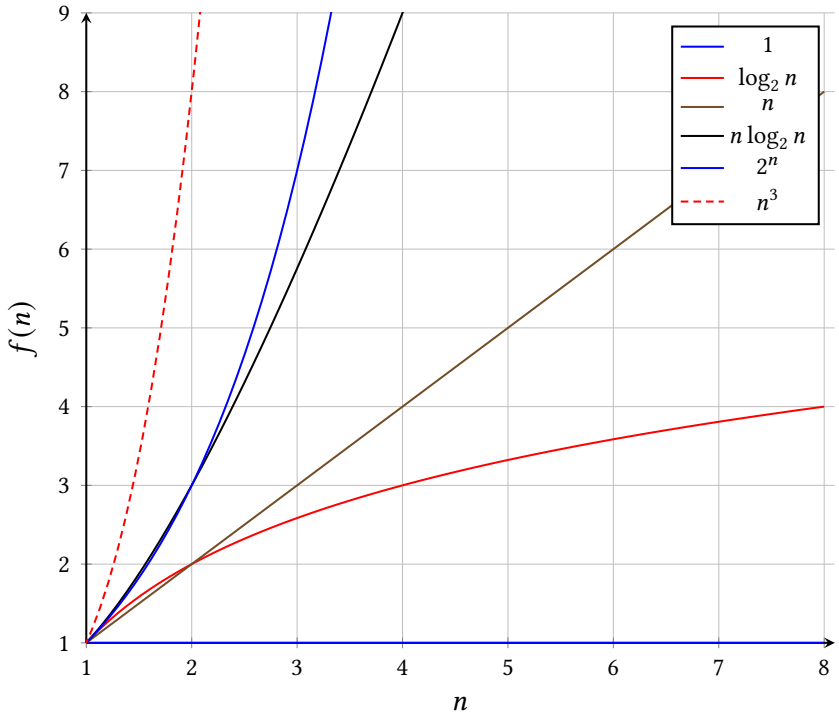
Definice 12 (Trojúhelníková nerovnost). Trojúhelníková nerovnost říká, že pro každé tři různé body a, b, c platí $d(a, b)+d(c, b) \geq d(a, b)$, neboli vzdálenost mezi dvěma body je vždy menší nebo rovna součtu vzdáleností mezi těmito body a třetím bodem.



Obrázek 2: Trojúhelníková nerovnost

Definice 13 (Obvod trojúhelníku). Definujeme zobrazení $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ podle předpisu: $p(a, b, c) \coloneqq d(a, b) + d(b, c) + d(a, c)$, které nám určuje obvod $\Delta(a, b, c)$.

Definice 14 (Big O notation). Vizte například [Bae19]. Krátce řečeno: notace $O(\ldots)$ představuje počet kroků, kolik algoritmus musí udělat v nejhorším případě. O algoritmu můžeme říct, že má časovou složitost například $O(n^2)$.



Obrázek 3: Grafy různých funkcí

Úvod

Polytop maximální dimenze s minimálním obvodem. To je problém, který budu v této práci zkoumat. Hlavní otázkou je jak takový polytop najít v množině bodů, která je v prostoru jakékoliv dimenze. Dimenzi budu mít v celé práci označenou písmenem $n \in \mathbb{N}$.

Zadání problému není zas tak složité. Najít polytop maximální dimenze s minimálním obvodem. Může to znít složitě, ale je to pouze hledání nějakého počtu bodů, které jsou u sebe nejblíž a tvoří objekt, který má maximální dimenzi. Například ve 3D, polytop maximální dimenze s minimálním obvodem je čtyřstěn (zvaný také jako trojboký jehlan).

Tyto polytopy budu hledat různými algoritmy, které by v průměru měly být lepší, než zkoušení všech možností. Algoritmy by měly vyřešit všechny případy (například, když body leží v jedné nadrovině), měly by skončit v rozumném čase a musí být korektní. Problém si rozdělím na 1D, 2D a nD. V 1D je problém velmi jednoduchý, jde pouze o množinu čísel ve které najdeme nejkratší úsečku. Ve 2D budeme hledat trojúhelník s minimálním obvodem. Budeme muset ale zkontrolovat, že body opravdu tvoří trojúhelník, protože by se mohlo stát, že body leží na přímce. V nD budu hledat polytopy maximální dimenze s minimálním obvodem a budu kontrolovat, jestli body, které tvoří polytop, neleží v nějakém podprostoru.

V praktické části tyto algoritmy naprogramuji v programovacím jazyce Python, který má výhodu, že není těžký na pochopení a je ideální na počítání různých věcí v matematice.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Problém v 1D

Problém v 1D je velice jednoduchý. Vstupem bude množina čísel $V \subset \mathbb{R}$ a výstupem bude nejkratší úsečka $\{a, b\}$, kde $a, b \in V$. Nejprve množinu čísel seřadíme pomocí algoritmu Quicksort (vizte [Hoa62]) a poté zkotrolujeme vzdálenost každých dvou po sobě jdoucích čísel a zapamatujeme si tu minimální, která je řešením tohoto problému.

1.1 Algoritmus

1. Nejprve body seřadíme pomocí algoritmu quicksort.
2. Projdeme všechny body $x_1 \dots x_n \in V$ a spočítáme vzdálenost všech po sobě jdoucích bodů: $d(x_i, x_{i+1})$, kde $i \in \{1, ..., \#V - 1\}$. Tuto vzdálenost si uložíme, a pokud je menší, než ta doposud uložená, změníme ji.
3. Po tom, co projdeme všechny body, je uložená minimální vzdálenost řešením problému.

Tvrzení 1. *Algoritmus na hledání nejkratší úsečky je korektní.*

Důkaz. Algoritmus skončí, protože prochází konečnou množinu bodů a je korektní, protože spočítá všechny vzdálenosti po sobě jdoucích bodů a vybere tu minimální. □

Poznámka 1. Pseudokód je popis jednotlivých kroků v algoritmu s použitím základní logiky programovacích jazyků. Následuje náš algoritmus napsaný v pseudokódu.

Algoritmus 1: Algoritmus na hledání úsečky s minimální délkou.

input : množina čísel $V \subset \mathbb{R}$.
output: $a, b \in V, d(a, b)$

```
1 points ← quicksort(V);
2 shortest_distance ← ∞ ;
3 closest_points ← ∅ ;
4 for i ∈ {1, ..., #V − 1} do
5     if d(x_i, x_{i+1}) < shortest_distance then
6         shortest_distance ← d(x_i, x_{i+1}) ;
7         closest_points ← (x_i, x_{i+1}) ;
8 return closest_points, shortest_distance
```

Kapitola 2

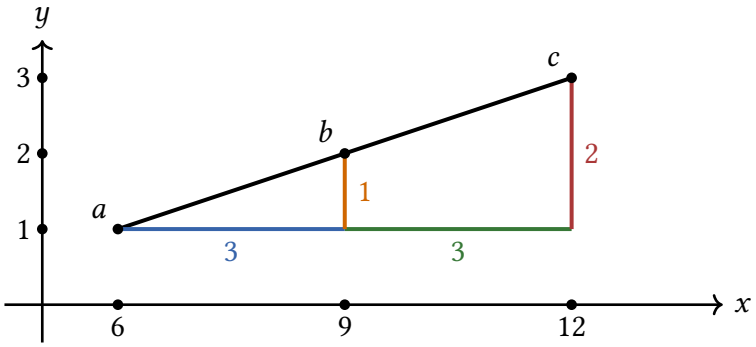
Problém ve 2D

Ve 2D budu hledat trojúhelník s minimálním obvodem. Prvním možným přístupem je algoritmus, který vyzkouší všechny trojúhelníky a vybere ten s minimálním obvodem. Ten ale vůbec není časově efektivní. Pokusím se najít, naprogramovat a dokázat správnost nějakého, který časově efektivní je.

2.1 Podobnost trojúhelníků

V sekci 2.3 Vám představím algoritmus na hledání trojúhelníku s minimálním obvodem. Velmi důležitou částí tohoto algoritmu je kontrolování, jestli body tvoří trojúhelník, to znamená, jestli body neleží na přímce. K tomuto máme následující tvrzení.

Tvrzení 2 (Podobnost trojúhelníků a body na jedné přímce). *Jsou dány 3 body ležící v* $\mathbb{R}^2$*:* $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$, $c = (c_x, c_y)$. *Tyto body jsou na přímce, pokud platí, že trojúhelníky* $\Delta((a_x, a_y), (b_x, a_y), (b_x, b_y))$ *a* $\Delta((a_x, a_y), (c_x, a_y), (c_x, c_y))$ *mají stejný poměr stran, proto platí rovnice:* $(c_y - a_y)(b_x - a_x) = (b_y - a_y)(c_x - a_x)$.



Obrázek 2.1: Příklad podobnosti trojúhelníků

Důkaz. Předpokládejme, že existuje lineární funkce $f : y = mx + k$, na které leží všechny tři body. Po dosazení bodů do rovnice nám vznikne soustava tří rovnic o dvou neznámých.

$$a_y = ma_x + k$$
$$b_y = mb_x + k$$
$$c_y = mc_x + k$$

Poté odečteme třetí rovnici od první a první od druhé. Tím dostaneme:

$$a_y - c_y = ma_x + k - mc_x - k$$
$$b_y - a_y = mb_x + k - ma_x - k$$

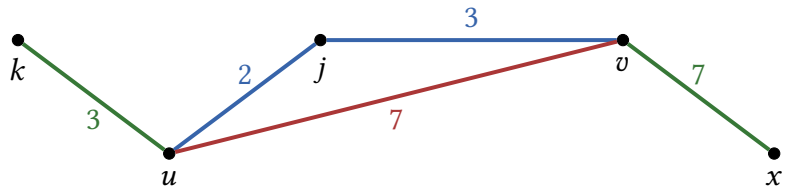
Vytknutím m dostaneme:

$$a_y - c_y = m(a_x - c_x)$$
$$b_y - a_y = m(b_x - a_x)$$

A tím pádem $m_1 = (a_y - c_y)/(a_x - c_x)$ a $m_2 = (b_y - a_y)/(b_x - a_x)$. My ale víme, že m_1 a m_2 jsou stejná čísla, protože funkce $\mathfrak{f}$ protíná všechny tři body. Proto můžeme sestavit rovnici $(a_y - c_y)/(a_x - c_x) = (b_y - a_y)/(b_x - a_x)$. Nakonec můžeme rovnici upravit do tvaru $(a_y - c_y)(b_x - a_x) = (b_y - a_y)(a_x - c_x)$. Tímto je tvrzení 2 dokázáno. □

2.2 Adaptace Dijkstrova algoritmu

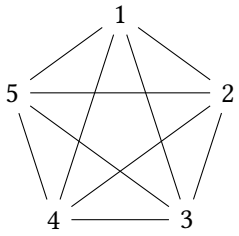
Velmi důležitou části algoritmu je Dijkstrův Algoritmus, který v ohodnoceném grafu dokáže najít cestu s minimální váhou mezi dvěma body v čase $O(\#V^2)$. [BS99] Obecně taková cesta může mít několik vrcholů, ale protože náš graf je převzatý z roviny, povede právě přes jeden vrchol a bude se skládat ze dvou hran. To vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti. Kdyby náš graf nebyl převzatý z roviny, mohla nastat situace na obrázku 2.2. Dijkstrův algoritmus ale lehce upravíme, aby byl rychlejší. Jelikož Dijkstrův algoritmus neví, že náš graf je převzatý z roviny (to znamená, že v grafu platí trojúhelníková nerovnost), tak ho ukončíme dřív, aby nehledal cestu s minimální váhou přes více vrcholů. Tímto časovou náročnost zredukujeme na $O(\#V)$.



Obrázek 2.2: V obecném grafu nemusí platit trojúhelníková nerovnost.

2.2.1 Popis adaptace Dijkstrova algoritmu

Vstupem je bod a a cílem je bod b. Cestu s minimální váhou mezi těmito body můžeme najít všechny cesty, které vedou z a do b a vybrat tu nejkratší. V algoritmu 2 je adaptace Dijkstrova algoritmu funkce *path*.



Obrázek 2.3: Graf K_5 na kterém si můžete představit jak by tento algoritmus fungoval.

2.2.2 Popis Dijkstrova algoritmu

Dijkstrův algoritmus počítá také nejkratší vzdálenosti z bodu a do všech ostatních. Tyto vzdálenosti by teoreticky šly využít na zrychlení celého algoritmu, ale je otázkou co by bylo rychlejší: nechat doběhnout celý Dijkstrův algoritmus a pak z něho brát informace nebo využít adaptaci Dijkstrova algoritmu, která je rychlejší. Následuje popis Dijkstrova algoritmu.

1. Vytvoříme množinu všech nenavštívených bodů a vybereme startovní a cílový bod. Označíme všechny body nenavštívenými.

2. Každému bodu přiřadíme vzdálenost od počátečního bodu; prozatím na ∞. Vzdálenost počátečního bodu od sebe samého nastavíme na 0.

3. Přesuneme na nenavštívený bod s minimální vzdáleností od počátečního bodu (poprvé to bude počáteční bod). Tento bod označíme jako aktuální a začneme kontrolovat jeho sousedy. Je-li součet vzdálenosti od počátečního bodu do aktuálního s váhou hrany vedoucí k sousedu menší než vzdálenost, kterou má u sebe soused uloženou, změníme ji. Je třeba myslet na to, že když přepíšeme vzdálenost souseda od startovního bodu, souseda neoznačujeme za navštíveného. Počáteční bod odebereme z množiny nenavštívených bodů, až zkontrolujeme všechny jeho sousedy.

4. Čtvrtý bod opakujeme, dokud nevybereme za aktuální bod ten cílový. V tomto okamžiku jsme našli nejkratší cestu. Pokud bychom chtěli získat nejkratší vzdálenosti z počátečního bodu do všech ostatních, čtvrtý bod budeme opakovat dokud nebude množina nenavštívených bodů prázdná.

2.3 Algoritmus

Nechť V je množina bodů v rovině a pro každé dva body $u, v \in V$ označme $d(u, v)$ jejich vzájemnou vzdálenost. Množinu hran označíme $E = \binom{V}{2}$ a váhu, neboli ohodnocení, nám určuje zobrazení w dané předpisem $w(\{u, v\}) \coloneqq d(u, v)$ pro $\forall (u, v) \in E$. Nyní můžeme definovat graf $G = (V, E, w)$. Tímto je příprava hotova. Následuje hledání cyklu délky tři s minimální váhou.

Náhodně vybereme jednu hranu $\{u, v\} \in E$ a odebereme ji z množiny hran E. V grafu bez hrany $\{u, v\}$ potřebujeme najít cestu s minimální váhou mezi body u a v. K tomuto použijeme adaptaci Dijkstrova algoritmu, která nám vrátí cestu délky dva. Cesta povede právě přes jeden vrchol, protože z trojúhelníkové nerovnosti je jasné, že pokud by cesta vedla přes více vrcholů, byla by delší. Bude skládat ze dvou hran: $\{u, j\}$ a $\{j, v\}$.

Teď musíme zkontrolovat, zda tato cesta s hranou $\{u, v\}$ opravdu tvoří trojúhelník, protože se může stát, že body u, j, v leží na jedné přímce. K tomu využijeme podobnost trojúhelníků, z které vyplývá, že body se nacházejí na přímce právě tehdy, pokud rovnice $(v_y - u_y)(j_x - u_x) = (j_y - u_y)(v_x - u_x)$ je pravdivá.

Poznámka 2 (jiný způsob). Předchozí způsob funguje perfektně pro počítače, ale pro člověka je v některých případech zbytečně komplikovaný. Tyto případy nastávají, když se body nacházejí na horizontálních nebo vertikálních přímkách. To jde poznat tak, že $u_y = j_y = v_y$ nebo $u_x = j_x = v_x$. V případě, že se body nacházejí na horizontálních přímce, musíme odebrat delší hranu. To uděláme tak, že si body uspořádáme (a přejmenujeme) tak, že $a_x < b_x < c_x$, nebo a_y, b_y, c_y (podle toho, jestli jsou na horizontální, nebo vertikální přímce), kde $\{a, b, c\} = \{u, j, v\}$. Z grafu pak musíme odebrat hranu $\{a, c\}$.

Pokud tyto body tvoří trojúhelník, pak tvoří cyklus délky tři. Pokud tento cyklus bude mít váhu menší než ten, který jsme doposud našli, uložíme jej a vrátíme hranu $\{u, v\}$ do množiny hran E. Tento postup opakujeme dokud nevyzkoušíme všechny hrany. Výsledkem bude trojúhelník s minimálním obvodem.

2.3.1 Algoritmus v pseudokódu

Algoritmus 2: Algoritmus na hledání cyklu délky tři.

input : množina bodů V v rovině, kde každý bod je reprezentován jako dvojice souřadnic (v_x, v_y).
output: cyklus délky tři a jeho váha.

```
1  Function path(start, end):
2      min_path ← ∅, ∅;
3      for x ∈ V do
4          path ← w(start, x, end);
5          if min_path[0] > path then
6              min_path ← path, (start, x, end);
7      return min_path;
8  for u ∈ V do
9      for v ∈ V do
10         w({u, v}) ← d(u, v);
11 E ← (V choose 2);
12 G ← (V, E, w);
13 min_Δ ← ∅;
14 for {u, v} ∈ E do
15     E ← E \ {u, v};
16     {u, j, v} ← path(V, u, v);
17     if (v_y − u_y)(j_x − u_x) = (j_y − u_y)(v_x − u_x) then
18         if d(u, j) > d(u, v) then
19             E ← E \ {u, j};
20         else if d(j, v) > d(u, v) then
21             E ← E \ {v, j};
22         else
23             continue;
24     else if p(u, j, v) < p(min_Δ) then
25         min_Δ ← p(u, j, v);
26     E ← E ∪ {u, v};
27 return min_Δ, p(min_Δ);
```

2.4 Důkaz algoritmu na hledání cyklu délky tři

Abychom mohli dokázat korektnost algoritmu, musíme dokázat, že algoritmus skončí a že je správný, to znamená, že dělá přesně co chceme. Dijkstrův algoritmus, který je součástí našeho algoritmu, dokazovat nebudu, protože důkaz je příliš dlouhý a je dostupný v literatuře.

Tvrzení 3. *Dijkstrův algoritmus je korektní.*

Důkaz. Vizte [BS99, s. 113]. □

Tvrzení 4. *Adaptace Dijkstrova algoritmu je korektní.*

Důkaz. Algoritmus je konečný, protože prochází konečnou množinu vrcholů a je správný, protože ze všech cest z a do b vybere tu s minimální váhou. □

Tvrzení 5. *Algoritmus na hledání cyklu délky tři je korektní.*

Důkaz. Konečnost algoritmu je zřejmá; jediným cyklem v algoritmu je procházení všech stran. Jelikož je množina hran konečná a víme, že Dijkstrův algoritmus je korektní, můžeme říci, že náš algoritmus skončí.

Správnost algoritmu dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že existuje trojúhelník x, y, z, který má kratší obvod, než trojúhelník a, b, c, který našel algoritmus, neboli:

$$\exists\{x, y, z\} \subseteq V : p(x, y, z) < p(a, b, c) \mid a, b, c \leftarrow algoritmus.$$

Znamená to, že náš algoritmus vybral jednu stranu trojúhelníku s minimálním obvodem špatně, a tím vznikl trojúhelník s delším obvodem. Jelikož náš algoritmus prochází všechny hrany, tak tam nemohl vybrat špatnou hranu. Tím pádem špatnou hranu musel vybrat když vybíral zbylé dvě hrany. Ty ale vybral Dijsktrův algoritmus, který je korektní. Tím vznikl spor a korektnost algoritmu je dokázána. □

Kapitola 3

Zobecnění na n dimenzí

3.1 Pomocné definice

Tyto definice nám umožní vyřešit problém zobecněný na n dimenzí.

Definice 15 (Nadrovina). Nadrovina je podprostor $\mathbb{R}^n$ dimenze $n-1$.

Definice 16 (Lineární kombinace). Bod $a_1x_1+\cdots+a_kx_k$, kde $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}$ je lineární kombinací bodů $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R}^n$. [Jin05, s. 67]

Definice 17 (Lineární závislost). Množina bodů $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ se nazývá lineárně závislá, jestliže lze nějaký bod z této množiny vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních bodů této množiny. [Jin05, s. 78]

Definice 18 (Afinní závislost). Body $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně závislé právě tehdy, když jejich rozdíly $x_2-x_1, x_3-x_1,\ldots,x_k-x_1$ jsou lineárně závislé. Geometricky to znamená, že body leží v jedné nadrovině. [Mat03, s. 4]

Definice 19 (Determinant matice). Determinant je zobrazení značené det, které posílá čtvercové matice na reálné číslo. Determinant jde interpretovat geometricky; lze chápat jako objem obecného n-rozměrného rovnoběžnostěnu. Důležitá vlastnost determinantu je, že řádky nebo sloupce matice A jsou lineárně závislé právě tehdy, když $det(A) = 0$. [DJ19, s. 224; Mat03, s. 4] Pro hlubší pochopení determinantů vizte [Jin05, s. 164] nebo [DJ19, s. 187].

3.2 Řešení problému v nD

Problém v n dimenzích bude komplikovanější a časově náročnější. Z množiny bodů $V = \{x_1,\ldots,x_k\} \in \mathbb{R}^n$ vytvoříme množinu všech $n+1$-prvkových podmnožin: $C = \binom{V}{n+1}$. Vybereme podmnožinu $\mathcal{P} = \{x_1,\ldots,x_{n+1}\} \in C$, která tvoří polytop s minimálním obvodem. Obvod polytopu spočítáme následovně:

Hlavní otázkou je kolik hran opravdu tvoří obvod. (Například: ve 3D tělesová úhlopříčka krychle netvoří obvod.) Je jich přesně $\binom{n+1}{2}$. Toto číslo pochází ze vzorce $\binom{n+1}{m+1}$ [Cox73, s. 120], který znamená počet m-dimenzionálních podpolytopů (dále $\mathcal{P}'_m$) v n-rozměrném polytopu ($\mathcal{P}_n$) za předpokladu, že $\mathcal{P}_n$ má minimální počet vrcholů. To je $n+1$. Když víme že počet vnějších hran v polytopu je $\binom{n+1}{2}$, musíme zjistit které hrany z celkové množiny hran to jsou. Jsou to všechny, protože náš polytop má přesně $n+1$ vrcholů. Proto

můžeme místo $n+1$ v $\binom{n+1}{2}$ dosadit množinu vrcholů polytopu ($\mathcal{P} = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$) a tím dostaneme $\binom{\mathcal{P}}{2}$, což jsou všechny dvouprvkové podmnožiny z $\mathcal{P}$, neboli všechny hrany polytopu. Obvod tedy spočítáme následovně:

$$\rho(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} d(x_i, x_j).$$

Teď, když jsme vybrali polytop s minimálním obvodem, musíme ověřit, že jeho vrcholy opravdu tvoří polytop maximální dimenze (jako ve 2D, kde jsme ověřovali, jestli body neleží na přímce).

Polytop maximální dimenze se vyznačuje tím, že jeho body neleží ve stejné nadrovině. Z definice 18 víme, že pokud rozdíly bodů jsou lineárně závislé, tak body v jedné nadrovině leží. Z toho vyplývá, že chceme, aby body nebyly afinně závislé, neboli aby tvořily polytop maximální dimenze.

Poznámka 3. Značení ${}_nx_k$ znamená n-tá souřadnice k-tého bodu, například ${}_2x_3$ je druhá souřadnice třetího bodu, tudíž ${}_nx_k - {}_nx_1$ je rozdíl n-té souřadnice bodu x_k a x_1.

Abychom zjistili, zda jsou body afinně závislé, musíme spočítat jejich rozdíly a zjistit, jestli jsou lineárně závislé. Od bodů $x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ odečteme první bod x_1. Tím nám vzniknou rozdíly $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$, které umístíme do matice A.

$$A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_1x_2 - {}_1x_1 & {}_2x_2 - {}_2x_1 & \cdots & {}_nx_2 - {}_nx_1 \\ {}_1x_3 - {}_1x_1 & {}_2x_3 - {}_2x_1 & \cdots & {}_nx_3 - {}_nx_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_1x_{n+1} - {}_1x_1 & {}_2x_{n+1} - {}_2x_1 & \cdots & {}_nx_{n+1} - {}_nx_1 \end{pmatrix}$$

Teď, když máme matici, vypočítáme $det(A)$. Podle definice 19, pokud vyjde determinant 0, znamená to, že pak rozdíly bodů jsou lineárně závislé. Z definice 18 ale víme, že pokud tyto rozdíly jsou lineárně závislé, pak body jsou afinně závislé, což znamená, že leží ve stejné nadrovině. Pokud body leží ve stejné nadrovině, musíme tento polytop odebrat z množiny všech polytopů a zopakovat celý tenhle postup pro nový polytop s minimálním obvodem.

Tímto jsme vyřešili problém v n dimenzích, kde $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

3.3 Algoritmus v nD

V této sekci Vám představím algoritmus, který řeší problém v n dimenzích. Součástí algoritmu není algoritmus na počítání determinantu matice, protože existují různé algoritmy, a protože v sekci 4.3, kde jsem algoritmus naprogramoval, používám knihovnu NumPy, která je optimalizovaná na matematické výpočty.

Algoritmus dostane množinu bodů V. Dimenzi n algoritmus zjistí podle počtu souřadnic jednoho bodu. Komentář v algoritmu označím jako // komentář.

Algoritmus 3: Algoritmus na hledání polytopu maximální dimenze s minimálním obvodem.

input : $V = \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}$.
output: body, které tvoří polytop maximální dimenze s minimálním obvodem.

Function $\rho(\mathcal{P})$**:**
    $perimeter \leftarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} d(x_i, x_j)$;
    return $perimeter$;

$n \leftarrow \#x \in V$;
$S \leftarrow \binom{V}{n+1}$;
$C \leftarrow []$;
for $\mathcal{P} \in S$ **do**
    $C.append(\mathcal{P}, \rho(\mathcal{P}))$;
$C.sort()$ // Od nejmenšího po největší podle $\rho(\mathcal{P})$;
$min_{\mathcal{P}} \leftarrow \emptyset$;
while C **do**
    $\mathcal{P}, \rho(\mathcal{P}) \leftarrow C[0]$;
    $x_1, \ldots x_{n+1} \leftarrow \mathcal{P}$;
    $A \leftarrow \begin{pmatrix} {}_1x_2 - {}_1x_1 & {}_2x_2 - {}_2x_1 & \cdots & {}_nx_2 - {}_nx_1 \\ {}_1x_3 - {}_1x_1 & {}_2x_3 - {}_2x_1 & \cdots & {}_nx_3 - {}_nx_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_1x_{n+1} - {}_1x_1 & {}_2x_{n+1} - {}_2x_1 & \cdots & {}_nx_{n+1} - {}_nx_1 \end{pmatrix}$;
    if $det(A) \neq 0$ **then**
        $min_{\mathcal{P}} \leftarrow \mathcal{P}$;
        return $min_{\mathcal{P}}, \rho(\mathcal{P})$;
    else
        $C.remove(C[0])$;
return $\emptyset$;

3.4 Důkaz algoritmu v nD

Dokázat korektnost algoritmu 3 nebude těžké, protože algoritmus zkouší všechny možnosti a pak vybere polytop s minimálním obvodem.

Tvrzení 6. *Algoritmus 3 je korektní.*

Důkaz. Algoritmus skončí, protože prochází konečnou množinu C. Algoritmus je správný, protože ze seřazených polytopů podle jejich obvodu vybere ten s minimálním obvodem a zkontroluje, jestli neleží v jedné nadrovině. Pokud leží, odebere tento polytop ze seznamu seřazených polytopů a vybere nový polytop s minimálním obvodem. □

Část II

Praktická část

Kapitola 4

Programování algoritmů

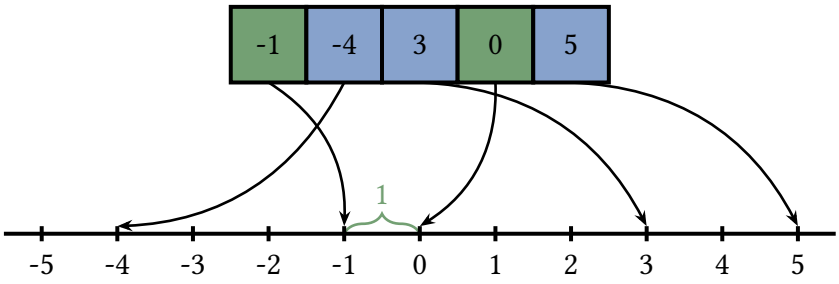
Moje praktická část bude programování problému, o kterém jsem psal v teoretické části. K programování použiji programovací jazyk python, ve kterém už umím programovat. Python nabízí mnoho různých knihoven, které dokážou velmi ušetřit práci. Knihovna je sbírka funkcí a metod, které jsou předem napsané a můžeme je získat jako doplněk pro snadnější vývoj softwaru. Například ve své práci použiji knihovnu networkx, která je optimalizovaná pro práci s grafy.

Cílem programů je, aby fungovaly a aby nebyly moc těžké na pochopení. Programy například nebudou optimalizovány, aby měly co nejméně řádků nebo aby byly nejrychlejší. Komentáře jsou v kódu označeny # a tmavě zelenou barvou.

4.1 Program v 1D

Naprogramovat algoritmus 1, který řeší problém v dimenzi 1, je velmi jednoduchý. Využijeme funkci Pythonu sort(), která dokáže seřadit prvky v seznamu. Vstupem bude množina bodů a výstupem budou 2 body, které tvoří nejkratší úsečku

```
1 def algorithm(points:np.array):
2   points = np.sort(points) # Seřazení seznamu čísel
3   shortest = float('inf') # Proměnná pro úsečku s minimální délkou.
4   for i in range(len(points-1)): # Cyklus procházení bodů.
5     if abs(points[i] - points[i+1]) < shortest: # Pokud je úsečka menší.
6       shortest = points[i] - points[i+1] # Aktualizujeme délku nejkratší úsečky.
7       closest_points = points[i], points[i+1] # Aktualizujeme nejkratší úsečku.
8   return closest_points
```



Obrázek 4.1: Příklad, kdy algoritmus seřadil čísla a vybral nejkratší úsečku.

4.2 Program ve 2D

Ve 2D je program trochu těžší, protože hledáme 3 body, které tvoří trojúhelník s minimálním obvodem a musíme kontrolovat pouze jestli nejsou na přímce. Tento program dostane jako vstup množinu bodů, kde body budou v $\mathbb{R}^2$ a výstupem budou 3 body, které tvoří trojúhelník s minimálním obvodem.

```python
from math import dist  # Importuje funkci dist z knihovny math pro výpočty.
from networkx import Graph, neighbors  # Importuje třídu Graph a funkci neighbors z knihovny networkx pro práci s grafy.

def find_path(G:Graph, start, end):
  min_path = None, None, None, float("inf")  # Proměnná pro nejkratší cestu s nekonečnou vzdáleností.
  for x in neighbors(G, start):  # Prochází sousedy počátečního bodu v grafu G.
    path = G.get_edge_data(start, x)["weight"] + G.get_edge_data(end, x)["weight"]  # Spočítá vzdálenost cesty přes aktuálního souseda.
    if float(min_path[3]) > path:  # Pokud je nová cesta kratší než dosavadní.
      min_path = start, x, end, path  # Aktualizuje nejkratší cestu.
  return min_path  # Vrátí nejkratší cestu.

def algorithm(V:set):
  G = Graph()  # Prázdný graf.
  subsets = list(combinations(V, 2)) # Všchny dvouprvkové podmnožiny V.
  for edge in subsets: # Pro hranu v subsets.
    G.add_weighted_edges_from([((edge[0][0], edge[0][1]), (edge[1][0], edge[1][1]), dist(edge[0], edge[1]))])  # Přidá hranu edge do grafu G s její váhou.

  min_triangle = None  # Proměnná pro trojúhelník s minimální váhou.
  min_triangle_weight = float("inf")  # Proměnná pro minimální váhu trojúhelníku.
  for edge in edges:  # Prochází hrany v seznamu hran.
    edge_weight = G.get_edge_data(edge[0], edge[1])["weight"]  # Váha hrany edge.
    G.remove_edge(edge[0], edge[1])  # Odebere hranu z grafu.
    u, j, v, weight= find_path(G, edge[0], edge[1])  # Najde nejkratší cestu mezi body edge[0] a edge[1].
    if (v[1]-u[1])*(j[0]-u[0]) == (j[1]-u[1])*(v[0]-u[0]):  # Pokud body u, j, v leží na jedné přímce.
      if dist(u, j) > dist(u, v):  # Pokud je vzdálenost mezi body u a j větší než vzdálenost mezi body u a v.
        G.remove_edge(u, j)  # Odebere hranu mezi body u a j.
      elif dist(j, v) > dist(u, v):  # Pokud je vzdálenost mezi body j a v větší než vzdálenost mezi body u a v.
        G.remove_edge(v, j)  # Odebere hranu mezi body v a j.
      else:
        continue  # Pokračuje na další iteraci cyklu.
    elif weight + edge_weight < min_triangle_weight:  # Pokud je váha cesty plus váha hrany menší než váha nejmenšího trojúhelníku.
      min_triangle = (u, j, v)  # Aktualizuje nejmenší trojúhelník.
      min_triangle_weight = weight + edge_weight  # Aktualizuje váhu nejmenšího trojúhelníku.
    G.add_weighted_edges_from([(u, v, dist(u, v))])  # Přidá hranu u, v zpátky do grafu s její váhou.

  return min_triangle, min_triangle_weight  # Vrátí trojúhelník a jeho obvod.
```

4.3 Program v nD

Kapitola 5

Diskuze

V praktické části jsem programoval algoritmy, které jsem uvedl v teoretické části. Programy jsem zkoušel na náhodně generovaných bodech a také jsem je zkontroloval jiným algoritmem, který zkouší úplně všechny možnosti. Podle testů, které jsem provedl by měly fungovat správně. Může se ale stát, že Python nebo nějaké knihovny, které používám, se změní a poté se bude muset program upravit.

Závěr

V této práci jsme hledali polytopy maximálních dimenzí s minimálním obvodem v různých dimenzích. Jako první čtenář mohl vidět základní definice a použitou notaci. Na definice se obracím v textu a předpokládám, že čtenář je s nimi seznámen.

Problém jsme si rozdělili na 1D, kde jsme hledali nejkratší úsečku, pak jsme ve 2D hledali trojúhelník s minimálním obvodem a nakonec jsme problém zobecnili na n dimenzí. Problém ve 2D by nejspíš šel urychlit tím, že bychom zakazovali cesty, které jsou větší, než obvod nejmenšího trojúhelníku. Všechny algoritmy jsme dokázali, na druhou stranu, nebylo to těžké je dokázat, protože to bylo zkoušení všech možností. Aspoň algoritmus v nD je v průměru rychlejší, protože ověřujeme, jestli polytop tvoří maximální dimenzi až na konec od polytopu s nejmenším obvodem. V nejlepším případě se determinant matice, který je časově náročný, spočítá pouze jednou. V nejhorším případě se může stát, že pouze polytop, který má nejdelší obvod, má maximální dimenzi.

V praktické části jsem naprogramoval algoritmy v Pythonu. Kód je okomentovaný, ale už jsem ho znovu nevysvětloval, protože princip algoritmu jsem vysvětlil v teoretické části.

Literatura

[Hoa62] C. A. R. Hoare. „Quicksort“. In: *The Computer Journal* 5.1 (led. 1962), s. 10–16. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/5.1.10. eprint: https://academic.oup.com/comjnl/article-pdf/5/1/10/1111445/050010.pdf. URL: https://doi.org/10.1093/comjnl/5.1.10 (cit. 09. 03. 2024).

[Cox73] H.S.M. Coxeter. *Regular Polytopes*. third. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, 1973. ISBN: 978-0-486-61480-9. URL: https://books.google.cz/books?id=iWvXsVInpgMC (cit. 22. 04. 2024).

[BS99] Holger Benl a Helmut Schwichtenberg. „Formal Correctness Proofs of Functional Programs: Dijkstra's Algorithm, a Case Study“. In: *Computational Logic*. Ed. Ulrich Berger a Helmut Schwichtenberg. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999, s. 113–126. ISBN: 978-3-642-58622-4. DOI: 10.1007/978-3-642-58622-4_4.

[Mat03] Jiří Matoušek. „Convexity“. In: *Introduction to Discrete Geometry*. Department of Applied Mathematics, Charles University Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1, Czech Republic: Springer, zář. 2003, s. 1–16. ISBN: 978-1-4613-0039-7. URL: https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/kvg1-tb.pdf (cit. 21. 04. 2024).

[Jin05] Jindřich Bečvář. *Lineární algebra*. third. Sokolovská 83, 186 75 Praha 8: Matfyzpress, 2005. 436 s. ISBN: 80-86732-57-6. URL: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/becvar_-_linearni_algebra.pdf (cit. 20. 04. 2024).

[Bae19] Sammie Bae. „Big-O Notation“. In: *JavaScript Data Structures and Algorithms*. Berkeley, CA: Apress, 2019, s. 362. ISBN: 978-1-4842-3988-9. DOI: 10.1007/978-1-4842-3988-9_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4842-3988-9_1 (cit. 20. 04. 2024).

[DJ19] Dan Margalit a Joseph Rabinoff. *Interactive Linear Algebra*. Ve spol. s Larry Rolen. master version. Georgia Institute of Technology, 3. čvn. 2019. 455 s. URL: https://textbooks.math.gatech.edu/ila/ila.pdf (cit. 20. 04. 2024).

[Ada24] Adam Klepáč. *Definice polytopu*. 9. led. 2024.