

Hledání polytopu maximální dimenze a minimálního obvodu s vrcholy v dané množině bodů

Eric Dusart

17. května 2024

Co je to polytop?

Informace o polytopu

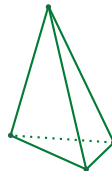
- *Polytop* dimenze $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená podmnožina $P \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Polytop maximální dimenze a minimálního obvodu má $n + 1$ vrcholů.
- Neexistuje nadrovina (podprostor dimenze $n - 1$), která by obsahovala všechny vrcholy polytopu.



(a) Úsečka



(b) Mnohoúhelník



(c) Mnohostěn

Moje práce

Výzkumná otázka

Jak najít polytop maximální dimenze a minimálního obvodu s vrcholy v dané množině bodů?

Rozdělení práce:

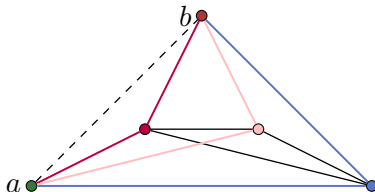
- ☑ Problém v 1D, 2D a n D
 - ☑ Najít algoritmus.
 - ☑ Dokázat, že funguje.
 - ☑ Naprogramovat algoritmus.

Proč jsem si vybral toto téma:

- Zájem o matematiku.
- Zajímavé téma.
- Problém v n dimenzích.

Proč je užití Dijkstrova algoritmu v dvoudimenzionální variantě problému stejně efektivní jako procházení všech možností?

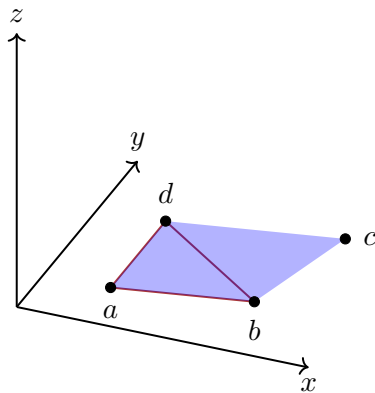
- Dijkstrův algoritmus hledá nejkratší cestu mezi dvěma vrcholy.
- Graf je skoro úplný (bez hrany $\{a, b\}$), který je přejatý z roviny, proto zde platí trojúhelníková nerovnost.
- Cesta povede právě přes jeden vrchol.



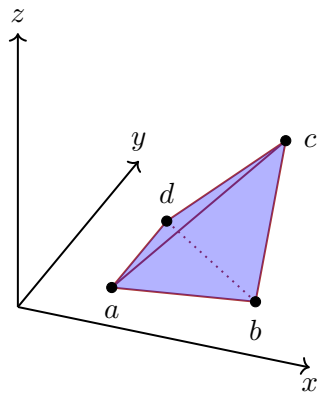
Obrázek: Graf K_5

Co když leží všechny vstupní body v jedné nadrovině?

- Hledaný polytop neexistuje.
- Hledaný polytop by měl mít dimenzi prostoru určeného vstupními body.



(a) 3D s polytopem dimenze 2



(b) 3D s polytopem dimenze 3

Co má větší vliv na časovou náročnost algoritmu? Dimenze či počet bodů?
V jakém smyslu a proč?

- Ani jedno, vzájemně se doplňují.
- Pro fixní dimenzi se zvyšováním počtu bodů algoritmus výrazně zpomaluje.
- Pro fixní počet bodů je algoritmus:
 - nejrychlejší, když $n = 1, m - 1$, a
 - nejpomalejší, když $n = \lfloor m/2 \rfloor$.
- Časová náročnost se odvíjí od počtu polytopů: $\binom{m}{n+1}$.

Můžeš odhadnout náročnost tvého algoritmu pro $n = 10$ (alespoň přibližně)?

- Časová náročnost algoritmu v 10D s náhodně generovanými body:
 - $\mathcal{O}(m^{11} \cdot \log m)$, kde m je počet bodů.

