第十一章 无穷级数

中国古书《庄子》有云“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，说的是一尺长的木棒，每天截取一半，可以一直取下去. 我们知道第 n 天截下来的木棒长度为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$，那么所有被截下来的木棒长度之和为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

直观告诉我们所截下来的木棒的长度总和应该是 1.

在古希腊学者提出的芝诺悖论中也有类似无穷个数相加的事情. 这一悖论声称“勇士 Achilles 永远都追不上乌龟”：设乌龟在 Achilles 前面 1 米处，Achilles 的速度是乌龟的 2 倍，为 1 米/秒，则当 Achilles 向前跑了 1 米的时候，乌龟向前走了$\frac{1}{2}$ 米，当 Achilles 追上这 $\frac{1}{2}$ 米时，乌龟又跑了 $\frac{1}{4}$ 米，这样的过程能一直继续下去，因此 Achilles 永远也追不上乌龟. 这一结论显然是荒谬的，原因是如果我们考虑这一过程的总时间的话，我们会发现实际上这一过程 Achilles 总共花费的时间是

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

这是一个有限的时间.

这两个问题中都遇到了可数无穷个数求“和”的问题. 在本章中我们将要考虑什么情形下这样的无穷个数求和是有意义的，并考虑其相应的一些运算规则与性质.

§1 无穷级数的收敛性

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是一个数列，我们将“和式”

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$$

称为一个**无穷级数**，或简称**级数**，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$. 其中 x_n 称为级数的**通项**或**一般项**. 给定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，对任意的正整数 n，我们称级数前 n 个通项的和

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

为级数的前 n 项的**部分和**. 记 $S_0=0$，从级数的部分和数列出发也不难给出级数的通项：

$$x_n=S_n-S_{n-1}\ (n=1,2,\cdots).$$

定义 11.1.1 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛到一个实数 S，即有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ **收敛**，并称 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的**和**，并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **发散**.

这一定义说的是，当级数的部分和序列收敛时，由无穷个数作加法形成的级数的和才是有意义的，它就是部分和所形成的数列的极限. 从中也可以看出级数的收敛性本质上仍然是一个数列的收敛性.

例 11.1.1 由以前数列收敛的相关知识我们知道

(1) **等比（几何）级数** $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 当且仅当 $|q|<1$ 时收敛；

(2) $\boldsymbol{p}-$**级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当且仅当 $p>1$ 时收敛.

这两个级数是将来我们判断其它级数的收敛性时两个重要的参照对象.

由数列极限的性质出发我们不难得到一些无穷级数的相应性质.

定理 11.1.1（级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则它的通项形成的数列 $\{x_n\}$是一个无穷小, 即有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则它的部分和序列 S_n 收敛到级数和 S. 因此有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

这个定理给出的仅仅只是一个必要而非充分的条件，比如我们知道**调和级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但它的通项也满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 但这一必要条件仍然给我们判断级数发散提供了一种简单的办法. 这个定理的逆否命题告诉我们：若 $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散. 使用这一逆否命题我们不难判断：

例 11.1.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 都是发散的.

由数列极限的线性性质不难得到如下级数的线性性质.

定理 11.1.2（线性性质） 若有 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛，则对任意的实数 λ,μ， 级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n+\mu y_n)$收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}x_n+\mu\sum_{n=1}^{\infty}y_n.$$

当我们对级数里的有限项通项做改动时，我们知道新级数的部分和与原级数的部分和从某一项开始只相差一个常数，两个数列如果只相差一个常数，则它们有相同的敛散性. 由此我们不难得到如下关于级数收敛性的结论.

定理 11.1.3 添加、去掉或修改级数里的有限项，不改变级数的敛散性.

当一个数列收敛时，它的任一子列都会收敛到同一个数，由此性质我们可以得到如下级数的相关结论，这一结论可以视为有限个数相加时的“加法结合律”的一种推广.

定理 11.1.4 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则在和式中任意添加括号所得级数仍然收敛，且新级数与$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$有相同的级数和.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$的部分和序列为 $\{S_n\}$. 设添加括号之后的新级数的通项为

$$\begin{gathered}y_1=x_1+\cdots+x_{n_1}\\ y_2=x_{n_1+1}+\cdots+x_{n_2}\\ \cdots\\ y_k=x_{n_{k-1}+1}+\cdots+x_{n_k}\\ \cdots\end{gathered}$$

其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. 则新级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$的前 k 项的部分和

$$T_k=y_1+y_2+\cdots y_k=S_{n_k}.$$

即新级数的部分和序列 $\{T_k\}$ 是原级数部分和序列 $\{S_n\}$ 的一个子列，当 $\{S_n\}$ 收敛到级数和 S 时，数列 $\{T_k\}$ 也收敛到 S. 因此我们有级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛，其和为 S. 定理得证！

反过来，如果加括号之后的级数收敛，不一定能得到原级数收敛. 例如考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，可以添加合适的括号得到一个新级数

$$(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots$$

这个加括号后得到的新级数收敛，但原级数不收敛. 但考虑某种特殊的加括号的方式，我们有如下的结论：

定理 11.1.5 在级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$中添加括号，如果括号中的各项符号相同，且得到的新级数

收敛，则原级数收敛，并且他们有相同的和.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$的部分和数列为 $\{S_n\}$. 设添加括号之后的新级数的通项为

$$\begin{gathered} y_1 = x_1 + \cdots + x_{n_1} \\ y_2 = x_{n_1+1} + \cdots + x_{n_2} \\ \cdots \\ y_k = x_{n_{k-1}+1} + \cdots + x_{n_k} \\ \cdots \end{gathered}$$

其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. 设所得新级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$的前 k 项的部分和为 $T_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$. 对于任意的 $n_{k-1} < n \le n_k$ $(k = 1,2,\cdots)$，由于 $x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \cdots, x_{n_k}$ 不改变符号，我们知道 S_n 介于 T_{k-1} 与 T_k 之间. 即总有下面两者之一成立：

$$T_{k-1} \le S_n \le T_k \text{ 或 } T_k \le S_n \le T_{k-1}.$$

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$收敛到级数和 T，则有 $\lim_{k\to\infty} T_k = T$. 由夹逼定理的思想不难得到 $\lim_{n\to\infty} S_n = T$，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$也收敛，其和为 T，定理证毕！

习题 11.1

1．求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$(其中 m 为一给定正整数);

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；　(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;　(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$.

2．证明下列级数发散：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \ln n}{n + \sqrt{n}}$.

3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ 发散.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+x_{n+1})$ 也收敛.并举例说明逆命题不对.

5. 设数列 $\{nx_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x_n-x_{n+1})$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

6. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n}=0.$$

§2 正项级数的敛散性

正项级数的概念

给出一个级数，我们并不总是能求出级数和的解析表达式，但我们可以从级数通项的性质出发来判断级数是否收敛. 本节将讨论正项级数的敛散性.

定义 11.2.1 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$中的所有项 x_n 都是非负的，则称此级数为一个正项级数.

前面定理 11.1.3 中已经提到去掉或增加级数和式中的有限项，并不会影响到级数的敛散性. 因此如果一个级数只要它从某一项开始的通项都是非负的，那么我们仍然可以将它视为一个正项级数来讨论其敛散性，后面所有判别正项级数敛散性的方法都是适用的.

不难观察到若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是一个正项级数，则它的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的，单调有界定理告诉我们 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}$ 有上界. 由此我们得到如下正项级数收敛的充要条件：

定理 11.2.1 （正项级数收敛的充要条件） 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

实际上从单调有界定理出发我们还知道一个正项级数如果不收敛，则它的部分和会趋于正无穷，即正项级数要么收敛到一个实数，要么趋于正无穷. 进一步地，对收敛的正项级数来说，它的级数和是其部分和数列的上确界.

例 11.2.1 设 $x_n>0, n=1,2,\cdots, S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$收敛.

证明 记 $u_n=\frac{x_n}{S_n^2}$，则显然有 $u_n\geq 0$，$n=1,2,\cdots$. 且当 $n\geq 2$ 时，有

$$u_n=\frac{x_n}{S_n^2}<\frac{x_n}{S_nS_{n-1}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}.$$

因此当 $n\geq\ 2$ 时有

$$u_1+u_2+\cdots+u_n<u_1+\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}<u_1+\frac{1}{S_1}.$$

这证明了 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$ 的部分和数列有上界，又由于它是正项级数，因此该级数收敛.

正项级数的比较判别法

从定理 11.2.1 出发，我们可以得到一系列判别正项级数敛散性的方法. 首先我们有如下的比较判别法:

定理 11.2.2 （正项级数的比较判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数，且有

$$0\leq x_n\leq y_n, n=1,2,\cdots.$$

那么

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散.

证明 （2）是（1）的逆否命题， 因此我们只证明(1). 记 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 的部分和数列为 $\{T_n\}$, 则有

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\leq y_1+y_2+\cdots+y_n=T_n.$$

当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时，由定理 11.2.1 知数列 $\{T_n\}$ 有上界，因此数列 $\{S_n\}$ 也有上界，再由定理 11.2.1 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛. 命题(1) 成立. 定理证毕！

前面我们已经知道改变级数的有限项不会影响级数的敛散性，因此在使用比较判别法判断一个正项级数收敛时，对于比较的两个数列，我们只需要对某个 N 有 $0\leq x_n\leq y_n$, $n\geq N$成立即可.

例 11.2.2 判断下列级数是否收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

解（1）由

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}}, n=1,2,\cdots.$$

又由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛.

（2）存在 N，使得 $n>N$ 时，$\ln\ln\ln n>2$，此时有

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2},$$

又由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛即知级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

例 11.2.3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$ 的敛散性.

解 由

$$0<\frac{3+(-1)^n}{3^n}\le\frac{4}{3^n}, n=1,2,\cdots,$$

以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n}$ 收敛，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$ 收敛.

例 11.2.4 已知 $a_n\ge 0(n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{na_n\}$ 有界. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 的敛散性.

解 数列 $\{na_n\}$ 有界，因此存在 $M>0$，使得 $|na_n|\le M$ 对所有的正整数 n 成立. 进一步我们有

$$a_n^2\le\frac{M}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

例 11.2.6 讨论下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\quad(x>0).$$

解（1）当 $x<1$ 时，有

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}<x^n\quad(n=1,2,\cdots).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 收敛即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 收敛.

(2) 当 $x \geq 1$ 时，有

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} < \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n=1,2,\cdots).$$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛即知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$收敛.

综上知当 $x>0$ 时级数均收敛.

使用定理 11.2.2 判断一个正项级数的敛散性时需要寻找一个合适的与之进行比较的级数，此时往往需要用使用不等式对原来的通项进行放缩，合适的比较对象有时候难以观察到.下面的极限形式的比较判别法用起来往往更方便一点.

定理 11.2.3 （极限形式的比较判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是两个正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l,$$

那么

(1) 若 $l=0$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛时，必有$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛；

(2) 若 l 为正实数，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$同敛散；

(3) 若 l 为$+\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$发散时，必有$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

证明 (1) 当 $l=0$ 时，由数列极限的保序性知存在 N，使得 $n>N$ 时，有

$$\frac{x_n}{y_n}<1,$$

即有 $n>N$ 时，$x_n<y_n$，由定理 11.2.2 知当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛时必有$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛.

(2) 当 l 为一个正实数时，同样由数列极限的保序性知存在 N，使得 $n>N$ 时，有

$$\frac{l}{2}<\frac{x_n}{y_n}<\frac{3l}{2}.$$

即有 $n>N$ 时，$\frac{l}{2}y_n<x_n<\frac{3l}{2}y_n$. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则由定理 11.2.2 知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{2}y_n$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛. 类似地，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3l}{2}y_n$收敛，同样由定理 11.2.2 知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$有相同的敛散性.

(3) 的情形类似可证，具体过程留给读者.

例 11. 2. 7 判断下列级数是否收敛：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}};\ (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n};\ (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2}).$$

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\sim\frac{1}{n}$，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$有相同的敛散性. 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$发散.

(2) 当 $n\to\infty$ 时有 $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$有相同的敛散性. 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$发散.

(3) 当 $n\to\infty$ 时有 $\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$有相同的敛散性. 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$收敛.

例 11. 2. 8 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$的敛散性.

解 因为 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)(x\to 0)$，所以 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

进一步有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛即知级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$收敛.

例 11. 2. 9 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$的敛散性.

解 我们分三种情况进行讨论(1) $a<1$；(2) $a=1$；(3) $a>1$.
(1) 当 $a<1$ 时，易见此时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0.$$

由定理 11.1.1 知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

(2) 当 $a=1$ 时，易见此时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

由定理 11.1.1 知此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$也发散.

(3) 当 $a>1$ 时，易见此时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=1.$$

又由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

正项级数的根值判别法

前面提到的比较判别法或极限形式的比较判别法都是通过寻找一个合适的级数与要考虑的级数进行比较来判断其收敛性. 寻找合适的级数也许并不容易，下面我们给出几个着眼于级数通项本身的性质的判别法.

定理 11.2.4（Cauchy 判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数.

(1) 若存在 $0<q<1$ 以及正整数 N 使得对所有 $n>N$，都有 $\sqrt[n]{x_n}\leq q$ 成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛；

(2) 若存在无穷多个 n，使得 $\sqrt[n]{x_n}\geq 1$ 成立，则级数$\sum_{n=1`}^{\infty}x_n$发散.

证明 (1) 由条件知 $n>N$ 时有

$$x_n\leq q^n.$$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$收敛知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛.

(2) 若存在无穷个 n，使得 $\sqrt[n]{x_n}\geq 1$ 成立，则有

$$\lim_{n\to\infty}x_n\neq 0.$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

定理 11.2.5（极限形式的 Cauchy 判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，$q=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$. 则有

(1) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当 $q > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

证明 (1) 当 $q < 1$ 时，取 $q < q' < 1$，由数列上极限的保序性知存在正整数 N，使得 $n > N$ 时，$\sqrt[n]{x_n} \le q'$. 由定理 11.2.4 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

(2) 当 $q > 1$ 时，由上极限的定义知对任意正整数 N，都存在 $n > N$，使得 $\sqrt[n]{x_n} \ge 1$. 因此可以找到无穷多个正整数 n，使得 $\sqrt[n]{x_n} \ge 1$. 由定理 11.2.4 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

注 当 $q = 1$ 时，判别法失效，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 可能收敛，也可能发散. 例如如下的两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，它们的通项满足 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$，但两个级数一个发散，一个收敛.

当一个级数的通项 x_n 的表达式含有一个量的 n 次幂时，我们往往可以考虑用 Cauchy 判别法判断其敛散性.

例 11.2.10 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln^n(1+n)}$.

解 易见

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(1+n)]^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)} = 0 < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{\ln^n(1+n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(1+n)} = 0 < 1,$$

因此所考虑的三个级数都收敛.

例 11.2.11 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}x_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$.

解 (1) 易见

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}<1.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛.

(2) 易见 $x_{2n-1}=\frac{1}{2^n},x_{2n}=\frac{1}{3^n},n=1,2,\cdots$. 因此有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

正项级数的比值判别法

由比较判别法我们可以推出如下的引理：

引理 11.2.6 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数，且从某个 N 开始有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

那么

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散.

证明 当 $n\ge N$ 时，有

$$\frac{x_{N+1}}{x_N}\le\frac{y_{N+1}}{y_N},\quad\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\le\frac{y_{N+2}}{y_{N+1}},\quad\cdots,\quad\frac{x_n}{x_{n-1}}\le\frac{y_n}{y_{n-1}},$$

上面这些式子相乘可得

$$\frac{x_n}{x_N}\le\frac{y_n}{y_N}\quad\text{或}\quad x_n\le\frac{x_N}{y_N}y_n.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_N}{y_N}y_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 有相同的敛散性，由比较判别法定理 11.2.2 即得要证的结论.

从上述引理出发,我们有如下的比值判别法.

定理 11.2.7 （d' Alembert 判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是正项级数.

(1) 若存在 $0<q<1$，以及正整数 N，使得 $n>N$ 时有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\le q$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

(2) 若存在正整数 N，使得 $n>N$ 时有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

证明 (1) 在引理 11.2.6 中取 $y_n = q^n$，则从 N 开始有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le q = \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

(2) 若存在 N，使得$n > N$ 时有 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1$，则当 $n > N$ 时，$x_n \ge x_{n-1} \ge \cdots \ge x_N > 0$.

因此有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne 0$，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

定理 11.2.8 （极限形式的 d’Alembert 判别法） 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在. 则

(1) 当 $q < 1$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当 $q > 1$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

证明 (1) 当 $q < 1$ 时，可取 $q < q' < 1$. 由数列极限的保序性知存在 N，使得 $n > N$ 时

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q'$$

由定理 11.2.7 知$\sum\limits_{n=1`}^{\infty} x_n$ 收敛.

(2) 当 $q > 1$ 时，由数列极限的保序性知存在 N，使得 $n > N$ 时

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1.$$

由定理 11.2.7 知$\sum\limits_{n=1`}^{\infty} x_n$ 发散.

注 (1) 当 $q = 1$ 时同样我们无法使用比值判别法判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的敛散性.

(2) 我们也可以写出上下极限形式的 d’Alembert 比值判别法，具体形式留给读者.

(3) 可以证明当 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q$ 时一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = q$，这说明当一个正项级数可以用比值判别法来判断其敛散性时，一定也可以用 Cauchy 根值判别法来判断其敛散性. 但在有的情况下，比如级数的通项中含有阶乘时，使用比值判别法往往更方便一些.

例 11.2.12 判断下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}};\qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}.$$

解 (1) 令 $x_n=\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1.$$

由 d’Alembert 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

(2) 令 $x_n=\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1.$$

由 d’Alembert 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$ 收敛.

正项级数的积分判别法

从定理 11.2.1 出发我们还可以得到如下的 Cauchy 积分判别法.

定理 11.2.9 （积分判别法） 设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负递减函数. 则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 有相同的敛散性.

证明 对任意的正整数 n，由定积分的保序性我们有如下不等式：

$$f(n+1)=\int_n^{n+1}f(n+1)\mathrm{d}x\le\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\le\int_n^{n+1}f(n)\mathrm{d}x=f(n).$$

令 $\{S_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 的部分和数列. 则有

$$S_n-f(1)=\sum_{k=2}^{n}f(k)\le\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\ge\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛时，由非负函数广义积分收敛的充要条件知 $\left\{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ 有上界，从而数列 $\{S_n-f(1)\}$ 有上界，因此 $\{S_n\}$ 有上界，有定理 11.2.1 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛时，由定理 11.2.1 知部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，对任意的 $A>1$，

总可以找到正整数n，使得 $n > A$，则有

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le S_{n-1}.$$

从而变上限积分 $\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 有上界，因此广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 定理证毕！

根据 p 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性以及定理 11.2.9 很容易验证 p 级数的敛散性. 取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$，则 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负且单调递减，且$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. 由定理 11.2.9 以及反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性知当且仅当 $p>1$ 时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛.

例 11.2.13 讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性.

解 取 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$. 则 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上非负单调递减，且

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

又由广义积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$$

在 $p>1$ 时收敛，在 $p\le 1$ 时发散，因此级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$当且仅当 $q>1$ 时收敛.

Raabe 判别法和 Bertrand 判别法

在前面我们介绍了根值判别法和比值判别法，从其推导过程中可以看出，这两种判别法都是使用等比级数作为参照对象得到的. 不难看出，这两种方法都有判别不了敛散性的级数，例如使用根值判别法和比值判别法都判断不了 p 级数的敛散性. 这一节中我们给出两个判别法来针对比值判别法和根值判别法处理不了的情形. 使用 p 级数作为比较的参照对象，我们可以得到如下的 Raabe 判别法.

定理 11.2.10（Raabe 判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，且 $q=\lim_{n\to\infty} n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)$ 存在，则有

(1) 当 $q>1$ 时，级数$\sum_{n=1`}^{\infty}x_n$收敛；

(2) 当 $q<1$ 时，级数$\sum_{n=1`}^{\infty}x_n$发散.

证明 (1) 当 $q>1$ 时，取 $q>q'>1$ 以及 $y_n=\frac{1}{n^{p'}}$. 则有

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{y_n}{y_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p'}-1\right]=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p'}-1\right]=\lim_{n\to\infty} n\cdot p'\cdot\frac{1}{n}=p'.$$

由条件 $q=\lim_{n\to\infty} n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)>q'=\lim_{n\to\infty} n(\frac{y_n}{y_{n+1}}-1)$ 以及数列极限的保序性知存在 N，使得 $n>N$ 时，

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>n(\frac{y_n}{y_{n+1}}-1)$$

即有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{y_{n+1}}{y_n}\quad (n>N).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，再使用引理 11.2.6 即得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

(2) 当 $q<1$ 时，取 $q<q'<1$ 以及 $y_n=\frac{1}{n^{p'}}$. 类似(1) 中可证明存在 N，使得 $n>N$ 时有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{y_{n+1}}{y_n}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散，使用引理 11.2.6 即得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

例 11.2.14 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$ 的敛散性.

解 令 $x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$. 不难验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3})=1.$$

因此使用 d’Alembert 判别法无法判断这个级数的敛散性. 下面使用 Raabe 判别法. 不难验证

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty} n(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$ 收敛.

例 11.2.14 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ $(\alpha>0)$ 的敛散性，其中

$$\binom{\alpha}{0}=1,\quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(n\geq 1).$$

解 令 $x_n=\left|\binom{\alpha}{n}\right|$. 同样不难验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1.$$

因此不能使用 d’Alembert 判别法判断此级数的敛散性. 下面使用 Raabe 判别法. 不难验证

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)=1+\alpha>1.$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$收敛.

虽然 Raabe 判别法有时可以处理 d’Alembert 判别法失效(即出现了 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 的情况）的一些情形，但当遇到 $\lim_{n\to\infty}n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=1$ 的情况时，使用 Raabe 判别法也判别不了级数的敛散性，例如前面提到的正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$，就有$\lim_{n\to\infty}n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=1$，但级数有可能收敛，也有可能收敛. 进一步地，我们拿$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$作为比较的参照对象，可以建立如下的 Bertrand 判别法，来处理一些 Raabe 判别法失效的级数.

定理 11.2.11(Bertrand 判别法) 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，且

$$q=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right]$$

存在，则有

(1) 当 $q>1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛;

(2) 当 $q<1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

证明 (1) 当 $q>1$ 时，取 $q>q'>1$ 并令 $y_n=\frac{1}{n(\ln n)^{p'}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\frac{y_n}{y_{n+1}}-1\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[\left((n+1)\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{p'}-n\right)-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{[(n+1)\ln n]\cdot\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{p'}-n\ln n-\ln n\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{[(n+1)\ln n]\cdot\left(1+p'\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\right)-n\ln n-\ln n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{p'\cdot[(n+1)\ln n]\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}+[(n+1)\ln n]\cdot o\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\right\}=p'.$$

由于 $q>q'$，由数列极限的保序性知存在 N，使得 $n>N$ 时，有

$$\ln n\left[n\left(\frac{y_n}{y_{n+1}}-1\right)-1\right]<\ln n\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right].$$

即有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{y_{n+1}}{y_n}\ \ (n>N).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，使用引理 11.2.6 可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

(2) 当 $q<1$ 时，取 $q<q'<1$ 以及 $y_n=\frac{1}{n(\ln n)^{p'}}$. 类似(1) 中可证明存在 N，使得 $n>N$ 时有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{y_{n+1}}{y_n}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散，以及引理 11.2.6 可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散. 定理证毕!

虽然 Bertrand 判别法能处理一些 Raabe 判别法处理不了的情况，但当定理 11.2.11 中的 q 取到 1 时判别法又失效了. 我们虽然能进一步建立更有效的判别法来处理 Bertrand 判别法无效的一些情形，但这一过程是无限的. 下面的结论告诉我们找不到一个参照级数来建立判别法解决所有正项级数的收敛问题.

定理 11.2.12 任给一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ （$x_n>0, n=1,2,\cdots$），都存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0.$$

证明 设 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列，$S=\lim_{n\to\infty} S_n$ 是级数的和. 令

$$r_0=S,\qquad r_n=S-S_n\ \ (n\ge 1).$$

易见有 $r_n-r_{n+1}=x_{n+1}>0$ $(n=1,2,\cdots)$. 因此可令 $y_n=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

则易见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是正项级数，它的前 n 项和为

$$T_n=y_1+y_2+\cdots+y_n=\left(\sqrt{r_0}-\sqrt{r_1}\right)+\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}\right)=\sqrt{S}-\sqrt{r_n}.$$

由 $\lim_{n\to\infty} r_n=0$ 可得 $\lim_{n\to\infty} T_n=\sqrt{S}$. 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛. 且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n-1}-r_n}{\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n})=0.$$

定理证毕！

习题 11.2

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是在正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 中添加括号得到的一个新级数．证明：当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时必有 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛.

2. 讨论下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^3+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{\ln n}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}\ \ (k>0)$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$;　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^2}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$;　　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$;　　(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)(a>0)$;　　(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n-1}{2n+1}-1\right)$;

3. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} nx_n=a\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

4. 证明：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛．举例说明反之不成立.

5. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$， $\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2$和级数$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|$都收敛.

6. 证明：若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}(p>\frac{1}{2})$收敛.

7. 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是一个发散的正项级数，试证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{1+x_n}$发散.

8. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{\mathrm{n}}x\,\mathrm{d}x\,, n=1,2,\cdots$.

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n+I_{n+2}}{n}$的和；

(2) 设 $\lambda>0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n}{n^{\lambda}}$收敛.

9. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^n}$ ；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ ；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$；

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ ；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

10. 设 $x_n>0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

11. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$.

12. 已知 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上二阶可导，且$f''(x)<0$ $(\forall x\in(0,+\infty))$，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$收敛.

13. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}\sin\frac{1}{n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

14. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\ (a>0)$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}\ (a>0)$.

15. 设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$（$x_n>0, n=1,2,\cdots$）发散，证明存在一个发散的正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}y_n$，使得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$.

§3 一般项级数的收敛性

上一节介绍了正项级数敛散性的判别法. 当级数只有有限项为负或者只有有限项为正，都可以用正项级数的判别法来判断其敛散性. 这一节中我们考虑一般项级数的收敛性.

Cauchy 收敛原理

级数的敛散性问题本质上是它的部分和数列的敛散性问题. 将数列的 Cauchy 收敛原理应用到级数的部分和数列上，我们可以得到如下级数收敛的 Cauchy 收敛原理.

定理 11.3.1（Cauchy 收敛原理） 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛的充分必要条件是：任取 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N，使得当 $m>n>N$ 时，有

$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m|=\left|\sum_{i=n+1}^{m}x_i\right|<\varepsilon.$$

定理中级数收敛的充要条件还可以陈述为：任取 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，任取正整数 p，都有

$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|=\left|\sum_{i=1}^{p}x_{n+i}\right|<\varepsilon.$$

在上面条件中取特殊的 $p=1$，则有 $|x_{n+1}|<\varepsilon$. 这也说明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛有必要条件 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

例 11.3.1 设数列 $\{x_n\}$ 单调递减，且 $x_n > 0$ $(n = 1,2,\cdots)$. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$.

证明 任取 $\varepsilon > 0$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理知存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对任意的正整数 p 都有

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

特别的取 $p = n$，有

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $\{x_n\}$ 单调递减，我们有

$$nx_{2n} \le x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此有当 $n > N$ 时， $2nx_{2n} < \varepsilon$. 这说明 $\lim_{n\to\infty} 2nx_{2n} = 0$. 另一方面，又由

$$0 \le (2n+1)x_{2n+1} = 2nx_{2n+1} + x_{2n+1} \le 2nx_{2n} + x_{2n+1}$$

以及 $\lim_{n\to\infty}(2nx_{2n} + x_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} 2nx_{2n} + \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)x_{2n+1} = 0.$$

因此有$\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$.

级数的 Cauchy 收敛原理有如下非常重要的一个推论：

定理 11.3.2 *若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛，则必有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.*

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛. 则任取 $\varepsilon > 0$，由 Cauchy 收敛原理，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对任意的正整数 p，都有

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

由绝对值的性质可得：当 $n > N$ 时，对任意的正整数 p，

$$|x_{n+1} + x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \le |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

再次应用 Cauchy 收敛原理可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

这一定理告诉我们，利用正项级数的敛散性判别法可以对一般项级数的敛散性做一个粗略的判断. 但我们后面也会看到 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛不一定能得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛. 这引出了如下

的重要概念.

定义 11.3.1(绝对收敛与条件收敛) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 为**绝对收敛**. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 为**条件收敛**.

Leibniz 判别法

下面我们介绍几个一般项级数敛散性的判别法. 首先我们讨论一类特殊的级数.

定义 11.3.2(交错级数) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，其中 $u_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 为**交错级数**. 若还有 u_n 单调递减收敛于 0，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 为 **Leibniz 级数**.

定理 11.3.3(Leibnize 判别法) Leibniz 级数均收敛.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为一个 Leibniz 级数. 则对任意的正整数 n,p 有

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|=\left|u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\right|.$$

当 p 为偶数时，

$$\begin{aligned}&u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\\&=(u_{n+1}-u_{n+2})+(u_{n+3}-u_{n+4})+\cdots+\left(u_{n+p-1}-u_{n+p}\right)\geq 0;\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}&u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\\&=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-\left(u_{n+p-2}-u_{n+p-1}\right)-u_{n+p}\leq u_{n+1}.\end{aligned}$$

因而有

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\leq u_{n+1}.$$

当 p 为奇数时，

$$\begin{aligned}&u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\\&=(u_{n+1}-u_{n+2})+(u_{n+3}-u_{n+4})+\cdots+\left(u_{n+p-2}-u_{n+p-1}\right)+u_{n+p}\geq 0,\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}&u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\\&=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-\left(u_{n+p-1}-u_{n+p}\right)\leq u_{n+1}.\end{aligned}$$

因而也有

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}\leq u_{n+1}.$$

综上可知：不管 p 是奇数还是偶数，都有

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|\leq u_{n+1}.$$

任取 $\varepsilon>0$，由条件 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，知存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $u_n<\varepsilon$. 从而当 $n>N$ 时，任取正整数 p，都有

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|\leq u_{n+1}<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理即得 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛．定理证毕！

注 (1) 同样的，由于级数的敛散性与前面的有限项无关，因此使用 Leibniz 判别法判断级数收敛我们也只需要求级数从某一项开始是交错级数且有 u_n 单调递减趋于 0 即可．

(2) 从证明过程可以看出，级数前 n 项的部分和 S_n 与级数的和 S 之间的误差满足关系 $|S-S_n|<|x_{n+1}|$.

例 11.3.2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$ 的敛散性.

解 令 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$. 当 $p>1$ 时，由 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛.

当 $0<p\le 1$ 时，易见 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是一个 Leibniz 级数，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，此时 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛.

类似地，$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(\ln n)^p}\ (p>0),\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 等级数都是 Leibniz 级数，由 Leibniz 判别法知它们都收敛.

例 11.3.3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 的敛散性.

解 易知

$$\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=(-1)^n\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 是一个非负的单调递减数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 是一个 Leibniz 级数，由定理 11.3.3 知它是收敛的．又因为当 $n\to\infty$ 时

$$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n},$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}|\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 同敛散，由此知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)|$ 发散，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 条件收敛.

Dirichlet 判别法和 Abel 判别法

与反常积分的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法类似，我们也有无穷级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法来判断形如 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 的级数. 为证明相应的判别法，我们这里首先准备如下的分部求和公式：

引理 11.3.4(分部求和公式) 设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是两个实数列, 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 则对任意的正整数 p, 有

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = A_p b_p + \sum_{k=1}^{p-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

证明 记$A_0 = 0$，则有

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} (A_k - A_{k-1}) b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{p} A_k b_k - \sum_{k=1}^{p} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{p} A_k b_k - \sum_{k=1}^{p-1} A_k b_{k+1}$$

$$= A_p b_p + \sum_{k=1}^{p-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{p-1} A_k b_{k+1} = A_p b_p + \sum_{k=1}^{p-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

引理证毕!

从分部积分公式出发我们可以得到如下的 Abel 引理.

引理 11.3.5(Abel 引理) 设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是两个实数列, $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 如果有条件 (1) 数列 $\{b_k\}$ 单调; (2) 存在 $M > 0$, 使得 $|A_k| \le M$ 对所有的 k 成立, 则对任意的正整数 p, 有

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_k b_k \right| \le M\left(|b_1| + 2|b_p|\right).$$

证明 不妨设 $\{b_n\}$ 单调递减. 由分部求和公式有

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_k b_k \right| = \left| A_p b_p + \sum_{k=1}^{p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| \le |A_p||b_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |A_k| (b_k - b_{k+1})$$

$$\le M|b_p| + \sum_{k=1}^{p-1} M(b_k - b_{k+1}) = M\left(|b_p| + (b_1 - b_p)\right) \le M\left(|b_1| + 2|b_p|\right).$$

引理证毕!

进一步我们可以证明数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

定理 11.3.6(Dirichlet 判别法) 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是两个实数列, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 如果有条件

(1) 数列 $\{y_n\}$ 单调且有 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$;

(2) 存在 $M > 0$, 使得 $|S_n| \le M$ 对所有的 n 成立,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛.

证明 对任意的正整数 n，p，考虑数列 $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+p}\}$, $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+p}\}$，注意到 $|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| = |S_{n+k} - S_n| \le 2M$ 对所有的 $0 \le k \le p$ 成立，应用 Abel 引理可得

$$\left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} y_{n+k}\right| \le 2M(|y_{n+1}| + 2|b_{n+p}|.$$

任取 $\varepsilon > 0$，由条件 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ 知存在 N，使得 $n > N$ 时有 $|y_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$. 则当 $n > N$ 时，任取正整数 p，都有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k} y_{n+k}\right| \le 2M(|y_{n+1}| + 2|y_{n+p}| < 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{2\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛.

注 对于 Leibniz 级数 $\sum_{n=1`}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$，令 $x_n = (-1)^{n-1}$，$y_n = u_n$，则由定理 11.3.6 可知 Leibniz 级数收敛，因此 Leibniz 判别法是 Dirichlet 判别法的特例.

例 11.3.4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ $(0 < x < \pi, p > 0)$的敛散性.

解 给定 $x \in (0, \pi)$，对任意的正整数 n，由三角函数的积化和差公式可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin x + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin nx\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left\{\left[\cos\left(x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{x}{2}\right)\right] + \cdots + \left[\cos\left(nx - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)\right]\right\}\right|$$

$$= |\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)\right] \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

当 $p > 0$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 单调递减且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$. 应用 Dirichlet 判别法可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 收敛. 接下来考虑其绝对收敛性.

当 $p > 1$ 时，易见

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛以及比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin nx}{n^p}|$ 收敛，因此有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 绝对收敛.

当 $0 < p \le 1$ 时，易见

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \ge \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

这里级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 发散. 类似于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$，我们同样可以使用 Dirichlet 判别法证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n^p} - \frac{\sin nx}{2n^p})$ 发散，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin nx}{n^p}|$ 发散，因此此时有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 条件收敛.

综上可得当 $p > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 绝对收敛，当 $0 < p \le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 条件收敛.

使用例题中的方法我们也可以得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 的类似结论. 更一般地，使用 Dirichlet 判别法我们可以得到：只要有数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0，则当 $x \neq 2k\pi$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 都收敛.

例 11.3.5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

解 因为

$$\sin^2 n = \frac{1 - \cos 2n}{2},$$

所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n} - \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n} - \frac{\cos(2n + n\pi)}{2n}\right].$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n + n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2+\pi)n}{n}$ 都收敛，因此级数 $\sum_{n=1`}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

从例 11.3.4 的解答过程中可以得到 $\sum_{n=1`}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 为条件收敛.

下面我们再看 Abel 判别法.

定理 11.3.7（Abel 判别法） 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是两个实数列，如果有条件

(1) 数列 $\{y_n\}$ 单调有界；

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛.

证明 定理可类似于 Dirichlet 判别法使用 Abel 引理进行证明. 这里我们换一种方法，使用 Dirichlet 判别法来给出其证明. 由于$\{y_n\}$ 单调有界，由单调有界定理，存在 y，使得 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. 则有 $\{y_n - y\}$ 单调且趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(y_n - y)$ 收敛. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} yx_n$ 收敛，因此有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty}[x_n(y_n - y) + yx_n]$ 收敛. 定理证毕！

例 11.3.6 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 的敛散性.

解 由例 11.3.3 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n}$ 收敛，又由于数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调有界，所以由 Abel 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛.

当 $n \to \infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\sin 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|}{\left|\frac{\sin 3n}{n}\right|} = \frac{1}{e}.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n\right|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 3n}{n}\right|$ 同敛散. 由例 11.3.4 的结论知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 3n}{n}\right|$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 条件收敛.

例 11.3.7 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)$ 的敛散性.

解 由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 收敛，又因为数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调有界，由 Abel 判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛. 又因为数列 $\{5-\arctan n\}$ 单调有界，再次由 Abel 判

别法知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)$ 收敛.

易见 $n\to\infty$ 时,

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(5-\arctan n)\right|=\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(5-\arctan n)\sim\left(5-\frac{\pi}{2}\right)e\frac{1}{\ln n}.$$

由极限形式的比较判别法以及级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)$ 为条件收敛.

更序问题

将一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的通项打乱次序进行重新排列,得到一个新的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$,一个自然的问题是:新级数与原级数是否有相同的敛散性以及有相同的和?这一节中我们将发现到条件收敛和绝对收敛的级数在此问题上有着截然不同的表现.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是一个一般项级数,令

$$x_n^+=\frac{|x_n|+x_n}{2}=\max\{x_n,0\},n=1,2,\cdots,$$

$$x_n^-=\frac{|x_n|-x_n}{2}=\max\{-x_n,0\},n=1,2,\cdots,$$

则有 $x_n=x_n^+-x_n^-,|x_n|=x_n^++x_n^-$ $(n=1,2,\cdots)$.

定理 11.3.8 *若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都收敛;若 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都发散到 $+\infty$.*

证明 当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛时,由

$$0\le x_n^+\le|x_n|,\qquad 0\le x_n^-\le|x_n|\qquad(n=1,2,\cdots).$$

以及比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛时,若 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 收敛,则由 $x_n^-=x_n^+-x_n(n=1,2,\cdots)$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 也收敛,

由 $|x_n|=x_n^++x_n^-$ $(n=1,2,\cdots)$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛,矛盾!因此必有

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 发散，又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 是正项级数，因此它发散到 $+\infty$. 类似可证得 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 也发散到$+\infty$. 定理得证！

对于绝对收敛的级数，我们有如下的更序定理，它可以视为有限个数求和时的交换律的一种推广.

定理 11.3.9(更序定理) *若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，则任意调整 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 中各项的次序得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也绝对收敛，且其和不变.*

证明 我们首先讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数的情形. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是一个正项级数时，任意调整 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 中各项次序得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也是一个正项级数. 设 S 是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和. 对任意的正整数 k，总可以找到一个正整数 n_k，使得 $\{y_n\}$ 的前 k 项都包含在 $\{x_n\}$ 的前 n_k 项中. 则有 $\{y_n\}$ 的前 n 项和

$$T_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_k} \le S.$$

因此 $\{y_n\}$ 的部分和数列 $\{T_k\}$ 有上界 S，因此 $\{T_k\}$ 有极限 $\lim_{k\to\infty} T_k = T \le S$. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，并且有它的和 $T \le S$. 反过来，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 通过调整各项次序得到的级数，因此也有 $S \le T$. 因而有 $S = T$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 有相同的和.

下面我们设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是一个绝对收敛的一般项级数，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 调整各项次序之后得到的一个新级数. 记

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2}, x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2}, n = 1, 2, \cdots,$$
$$y_n^+ = \frac{|y_n| + y_n}{2}, y_n^- = \frac{|y_n| - y_n}{2}, n = 1, 2, \cdots,$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，由定理 11.3.8 知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^-$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 分别调整相应次序得到，由前面正项级数的讨论知 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^-$ 都收敛，

并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(y_n^+ + y_n^-)$ 收敛. 这证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛. 同时我们还有

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}(y_n^+ - y_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} y_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^+ - x_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

定理得证!

对于条件收敛的级数，这种类似于加法交换律的性质不再成立，我们有下面的例子：

例 11.3.8 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$. 求

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

的和.

解 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的前 n 项部分和为 S_n, 级数

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

的前 n 项部分和为 T_n. 则有

$$T_{3m} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right) = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right] = \frac{S_{2m}}{2}.$$

因此有

$$\lim_{m\to\infty} T_{3m} = \lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m}}{2} = \frac{\ln 2}{2},$$

$$\lim_{m\to\infty} T_{3m+1} = \lim_{m\to\infty}(T_{3m+1}+\frac{1}{2m+1}) = \frac{\ln 2}{2},$$

$$\lim_{m\to\infty} T_{3m+2} = \lim_{m\to\infty}(T_{3m+1}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}) = \frac{\ln 2}{2},$$

因此有 $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\ln 2$， 即有

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

实际上关于条件收敛的级数我们有如下的结论.

定理 11.3.10(Riemann 更序定理) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，则对任意给定的 a， $-\infty \leq$

$a \le +\infty$，总可以适当的调整 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 中各项的次序得到一个新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛到级数和 a.

证明 这里只证明 a 为实数时的情形，其他情形留给读者. 将数列 $\{x_n\}$ 中非负的项留下来，其它的项去掉，这样得到一个子列，记为 $\{a_n\}$, 将数列 $\{x_n\}$ 中取值为负的项留下来，其它的项去掉，得到另一个子列，记为 $\{b_n\}$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，从定理 11.3.8 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散到$+\infty$， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散到$-\infty$.

下面我们重新排列 $\{x_n\}$，得到一个新的级数满足定理中的要求. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散到$+\infty$，我们可以取最小的正整数 n_1，使得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} > a.$$

取 $y_1 = a_1, y_2 = a_2, \cdots, y_{n_1} = a_{n_1}$. 则我们有

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n_1} > a,$$

且当$n < n_1$ 时，

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \le a$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散到 $-\infty$, 我们可以取到最小正整数 m_1，使得

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n_1} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{m_1} < a.$$

取 $y_{n_1+1} = b_1, y_{n_1+2} = b_2, \cdots, y_{n_1+m_1} = b_{m_1}$. 则有

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n_1+m_1} < a,$$

且当 $n_1 \le n < n_1 + m_1$ 时，

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \ge a.$$

接下来我们可以进一步找到一个最小的正整数 $n_2 > n_1$，使得

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n_1+m_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2} > a.$$

再取 $y_{n_1+m_1+1} = a_{n_1+1}, y_{n_1+m_1+2} = a_{n_1+2}, \cdots, y_{m_1+n_2} = a_{n_2}$. 则有

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m_1+n_2} > a,$$

且当 $n_1 + m_1 \le n < n_2 + m_1$ 时，

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \le a.$$

接着可取最小的正整数 $m_2 > m_1$，使得

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m_1+n_2} + b_{m_1+1} + b_{m_1+2} + \cdots + b_{m_2} < a.$$

取 $y_{m_1+n_2+1} = b_{m_1+1}, y_{m_1+n_2+2} = b_{m_1+2}, \cdots, y_{m_2+n_2} = b_{m_2}$. 则有

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m_2+n_2} < a,$$

且当 $n_2 + m_1 \le n < n_2 + m_2$ 时，

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \ge a.$$

类似地，我们可以找到递增的正整数列 n_k, m_k，以及在 $\{x_n\}$ 中取相应的项进行排列，得到 $\{y_n\}$，使得

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m_{k-1}+n_k} > a,$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_{m_k+n_k}<a.$$
且当 $m_{k-1}+n_{k-1}\le n<m_{k-1}+n_k$ 时有
$$y_1+y_2+\cdots+y_n\le a,$$
且当 $m_{k-1}+n_k\le n<m_k+n_k$ 时有
$$y_1+y_2+\cdots+y_n\ge a.$$
下证 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛且级数和为 a，在 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 加括号，使得括号中各项符号相同，且相邻的两个括号内的元素异号．令 $n_0=m_0=0$，并记
$$z_{2k+1}=y_{m_{k-1}+n_{k-1}+1}+y_{m_{k-1}+n_{k-1}+2}+\cdots+y_{m_{k-1}+n_k},$$
$$z_{2k+2}=y_{m_{k-1}+n_k+1}+y_{m_{k-1}+n_k+2}+\cdots+y_{m_k+n_k}.$$
则加括号后的新级数为
$$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n+\cdots$$
易见
$$a<z_1+z_2+\cdots+z_{2k+1}=y_1+y_2+\cdots+y_{m_{k-1}+n_k-1}+y_{m_{k-1}+n_k}\le a+y_{m_{k-1}+n_k};$$
$$a>z_1+z_2+\cdots+z_{2k+2}=y_1+y_2+\cdots+y_{m_k+n_k-1}+y_{m_k+n_k}\ge a+y_{m_k+n_k};$$
由 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ 可知 $\lim_{n\to\infty}y_{m_{k-1}+n_k}=\lim_{n\to\infty}y_{m_k+n_k}=0$．因此由夹逼定理有
$$\lim_{n\to\infty}(z_1+z_2+\cdots+z_{2k+1})=\lim_{n\to\infty}(z_1+z_2+\cdots+z_{2k+2})=a.$$
从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛，其和为 a，由定理 11.1.5 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，其和为 a．定理证毕！

习题 11.3

1. 利用 Cauch 收敛原理，判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n!}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+\sin n}{n(n+\sin n)}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

2. 若对任意的 $\varepsilon>0$ 和正整数 p，都存在 $N(\varepsilon,p)$，使得当 $n>N(\varepsilon,p)$ 时，总有
$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$$
成立，问级数 $\sum_{n=1`}^{\infty}x_n$ 是否收敛.

3. 设 $x_n<z_n<y_n$，$n\ =1,2,\ldots$. 证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛.

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

5. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^2 n}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$.

6. 设 $\{x_n\}$ 为单调递减非负数列，且有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 发散，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+x_n})^n$ 是否收敛？请说明理由.

7. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n+1})$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n$ 收敛.

8. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos 2n}{n^p}$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos 2n}{n^p}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}+\frac{\sin^2 nx}{n}\right)$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)\,x}{n^p}$.

9. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{a_0}}$ 收敛，证明：当 $a>a_0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^a}$ 也收敛.

10. 使用 Abel 引理证明 Abel 判别法.

11. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})x_n$ 也发散.

12. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos^2 n}{n}\arctan(3+n)$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^2 n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}(5-\arctan n)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\arctan 5n$，其中 $\alpha>0, p>0$.

13. 利用极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma,$$

其中 γ 为 Euler 常数，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$经调整通项次序之后的如下级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

14. 将级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$进行如下的重排：按原来的次序先取级数中的前 p 个正项，再取级数中的 q 个负项，接下来再按原来的顺序取接下来的 p 个正项，接着取接下来的q 个负项，依次下去得到一个新级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$． 证明：(1) 当 $p=q$ 时，新级数收敛；(2) 当 $p>q$ 时，新级数趋于 $+\infty$ ；(3) 当 $p<q$ 时，新级数趋于 $-\infty$.

§4 级数乘法

这一节中我们讨论两个级数相乘诱导的新级数及其敛散性． 我们知道两个有限和式$\sum_{i=1}^{n}x_i$ 和$\sum_{j=1}^{m}y_j$ 的乘积等于所有x_iy_j $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 的和． 自然地，当我们考虑两个级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 的乘积时，我们也应该考虑所有项 x_iy_j $(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$ 的和.

与两个有限和式相乘所得到的各项 x_iy_j 相加不同，在考虑所有 x_iy_j $(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$ 的和时，我们知道级数的敛散性以及它的和与级数中各通项的顺序以及添加括号的方式有关． 在考虑级数相乘时，我们最常用的是如下的正方形排列求和与对角线排列求和两种新的求和方式.

设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个无穷级数． 令

$d_1=x_1y_1;$
$d_2=x_1y_2+x_2y_2+x_2y_1;$
$d_3=x_1y_3+x_2y_3+x_3y_3+x_3y_2+x_3y_1;$
$\cdots\cdots$
$d_n=x_1y_n+x_2y_n+\cdots+x_ny_n+x_ny_{n-1}+\cdots+x_ny_1;$
$\cdots\cdots$

这样得到的一个新级数$\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ ，它的前n项和正好是所有 $x_iy_j(1\le i\le n,1\le j\le n)$ 这 n^2

个元素的和，它是$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$对应各项相乘然后按正方形排列再求和所得的级数. 易见和式$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$中囊括了所有 $x_i y_j$ $(i = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots)$.

由数列极限的乘法性质不难验证当$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$都收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right).$$

下面我们再给出另一种由$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$相乘得到的级数. 令

$c_1 = x_1 y_1;$
$c_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1;$
$c_3 = x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1;$
……
$c_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1;$
……

由此我们也得到一个新级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1)$，称之为级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$的 Cauchy **乘积**.

和式$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$中也囊括了所有 $x_i y_j$ $(i = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots)$. 但如果$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$都只是条件收敛时，不能保证 Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$是收敛的.

例 11.4.1 证明$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$与它自身的 Cauchy 乘积$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$是发散的.

证明 记 $x_i = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. 易见

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}}.$$

进一步有

$$|c_n| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i + (n+1-i)} = \frac{2n}{n+1}.$$

由此易见$\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$. 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

但如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 有绝对收敛性，则我们有如下的结果:

定理 11.4.1(Cauchy 定理) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 均绝对收敛，则将 $x_i y_j$ ($i = 1,2,\cdots; j = 1,2,\cdots$) 任意排列再求和得到的级数都是绝对收敛的，且其和为$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n)(\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n)$.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 是将 $x_i y_j$ ($i = 1,2,\cdots; j = 1,2,\cdots$) 以某种方式排列后然后求和得到的一个级数. 记 $z_k = x_{i_k} y_{j_k}$ ($k = 1,2,\cdots$). 对任意的正整数 n，令

$$N = \max_{1\le k\le n}\{i_k, j_k\},$$

则有

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}|x_{i_k} y_{j_k}| \le \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|y_i|\right) \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|\right).$$

这说明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$的部分和数列有上界，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.

由定理 11.3.9，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛，我们知道$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 与将它重新排列后得到的如下级数:

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_4 + \cdots$$

收敛到同一个和. 而正方形排列得到的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 是上述级数通过添加括号得到的，再由定理 11.1.4 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 与上述$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 重排后得到的级数有相同的和，从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right).$$

定理证毕!

我们前面已经见到当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 都条件收敛时不能保证 Cauchy 乘积收敛，从定理

11.4.1 出发我们不难验证当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都绝对收敛时，则其 Cauchy 乘积必定收敛. 实际上，如果只是考虑 Cauchy 乘积，我们可以将条件弱化为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 中有一个绝对收敛.

定理 11.4.2(Mertens 定理) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛，且至少有一个绝对收敛，则它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，且其和为 $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛. 令

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_n, \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} y_n, \qquad C_n = \sum_{i=1}^{n} c_n, \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

以及

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} x_n, \qquad Y = \sum_{i=1}^{\infty} y_n$$

则有

$$\begin{gathered} C_n = x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \cdots + (x_1 y_n + x_2 y_{n-1} \cdots + x_n y_1) \\ = x_1(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + x_2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + \cdots + x_n y_1 \\ = x_1 Y_n + x_2 Y_{n-1} + \cdots + x_n Y_1 = x_1(Y_n - Y) + x_2(Y_{n-1} - Y) + \cdots + x_n(Y_1 - Y) + X_n Y. \end{gathered}$$

易见 $\lim_{n\to\infty} X_n Y = XY$. 如果能证得 $\lim_{n\to\infty}[x_1(Y_n - Y) + x_2(Y_{n-1} - Y) + \cdots + x_n(Y_1 - Y)] = 0$ 就有 $\lim_{n\to\infty} C_n = XY$，则定理得结论得证. 下证

$$\lim_{n\to\infty}[x_1(Y_n - Y) + x_2(Y_{n-1} - Y) + \cdots + x_n(Y_1 - Y)] = 0.$$

记 $M = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. 任取 $\varepsilon > 0$，由 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛到和 Y 知存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，

$$|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

则当 $n > N_1$ 时，

$$\begin{gathered} |x_1(Y_n - Y) + x_2(Y_{n-1} - Y) + \cdots + x_n(Y_1 - Y)| \\ \le \left(|x_1| \cdot |Y_n - Y| + \cdots + |x_{n-N_1}| \cdot |Y_{N_1+1} - Y|\right) + \left(|x_{n-N_1+1}| \cdot |Y_{N_1} - Y| + \cdots + |x_n| \cdot |Y_1 - Y|\right) \\ < \left(|x_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |x_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \cdots + |x_{n-N_1}| \cdot \frac{\varepsilon}{2M}\right) + \left(|x_{n-N_1+1}| \cdot |Y_{N_1} - Y| + \cdots + |x_n| \cdot |Y_1 - Y|\right) \\ \le \frac{\varepsilon}{2} + \left(|x_{n-N_1+1}| \cdot |Y_{N_1} - Y| + \cdots + |x_n| \cdot |Y_1 - Y|\right). \end{gathered}$$

又因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，知存在 N_2，使得 $n > N_2$ 时

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2\left(\left|Y_{N_1} - Y\right| + \left|Y_{N_1-1} - Y\right| + \cdots + |Y_1 - Y| + 1\right)},$$

则当 $n > N_1 + N_2 + 1$ 时，有

$$|x_1(Y_n - Y) + x_2(Y_{n-1} - Y) + \cdots + x_n(Y_1 - Y)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\left|x_{n-N_1+1}\right| \cdot \left|Y_{N_1} - Y\right| + \cdots + |x_n| \cdot |Y_1 - Y|\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\left(\left|Y_{N_1} - Y\right| + \left|Y_{N_1-1} - Y\right| + \cdots + |Y_1 - Y| + 1\right)}\left(\left|Y_{N_1} - Y\right| + \left|Y_{N_1-1} - Y\right| + \cdots + |Y_1 - Y|\right)$$

$$< \varepsilon.$$

这就证明了$\lim_{n\to\infty}[x_1(Y_n - Y) + x_2(Y_{n-1} - Y) + \cdots + x_n(Y_1 - Y)] = 0$. 定理证毕！

下面我们给出一个例子说明 Cauchy 乘积的应用价值.

例 11.4.2 证明：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1.$$

证明 由 d’Alembert 比值判别法不难证明$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$收敛. 因此$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$和$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$都绝对收敛. 下求其 Cauchy 乘积的和. 记$x_n = \frac{1}{n!}, y_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则有

$$c_0 = x_0 y_0 = 1,$$

$$c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0 \quad (n \geq 1).$$

因此有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n = 1.$$

习题 11.4

1. 证明：将$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$按正方形排列所得的乘积$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right).$$

2. 定义函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

证明：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；(2) $f(x+y)=f(x)f(y)$ 对所有实数 x,y 成立.

3. 利用级数的 Cauchy 乘积证明：当 $|q|<1$ 时，总有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

§5 无穷乘积

类似于无穷级数，我们可以定义可数无穷个数的无穷乘积. 设 $p_1,p_2,\cdots$ $(p_n\neq 0)$ 是一个无穷数列，则我们可以把它们的“积”

$$p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n\cdot\cdots$$

称为一个**无穷乘积**，记为$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$.

类似于无穷级数的部分和，我们也可以定义无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 的前 n 项的“部分积”：

$$P_1=p_1,\qquad P_2=p_1p_2,\qquad \cdots,\qquad P_n=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n\ (n=1,2,\cdots).$$

同样的我们可以通过部分积的收敛性给出无穷乘积的收敛性.

定义 11.5.1 如果一个无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 的部分积数列 $\{P_n\}$ 收敛到一个非零的实数 P，则称无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ **收敛**，P 为它的**积**，记为

$$\prod_{n=1}^{\infty}p_n=P.$$

如果部分积数列 $\{P_n\}$ 发散或者收敛到 0，则称无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ **发散**.

例 11.5.1 求无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq k\pi,k=1,2,\cdots)$的积.

解 应用三角函数的倍角公式，有

$$\begin{aligned}\left[\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right]\cdot\sin\frac{x}{2^n}&=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right]\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\\&=\frac{1}{2^2}\left[\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-2}}\right]\cdot\sin\frac{x}{2^{n-2}}=\cdots=\frac{1}{2^n}\sin x.\end{aligned}$$

因此$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$前 n 项的部分积

$$P_n=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

进一步有

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

因此

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

特别的，在例 11.5.1 中取 $x=\frac{\pi}{2}$，我们有

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cdots.$$

这一公式称为 Viete **公式**，曾经用来计算 π 的值.

类似于无穷级数收敛的必要条件，我们可以得到无穷乘积收敛的如下必要条件. 证明较易，读者可自行给出.

定理 11.5.1 若无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty}p_n=1$.

由极限的保序性，从定理 11.5.1 出发，我们知道若无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛，则从某一项开始必有 $p_n>0$. 又由于无穷乘积的敛散性与乘积的前有限项无关，因此在讨论无穷乘积的敛散性时，我们不妨设所有的 $p_n>0$.

定理 11.5.2 无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的充分必要条件是无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛.

证明 设 P_n 是无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 的前 n 项的部分积，S_n 是无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 的前 n 项的部分和，则有

$$P_n=e^{S_n}.$$

易见 $\{P_n\}$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}$ 收敛，因此$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛. 定理得证！

由定理 11.5.2 可知任何一个无穷乘积的收敛问题都可以转化为一个无穷级数的收敛问题.

例 11.5.1 讨论无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x})$的敛散性.

解 当 $x \le 0$ 时，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)\ne 1,$$

所以无穷级数发散.

下面设$x>0$. 由定理 11.5.2 可知无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x})$收敛当且仅当无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x})$收敛. 由 Taylor 公式，当 $n\to\infty$ 时我们有

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}+r_n.$$

其中

$$r_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2x}}+o\left(\frac{1}{n^{2x}}\right).$$

由 Leibniz 判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$收敛. 又因为$\sum_{n=1}^{\infty}r_n$为正项级数，且有

$$r_n\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2x}}\quad(n\to\infty),$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}r_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$有相同的敛散性. 因此当 $x\le\frac{1}{2}$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}r_n$发散，当 $x>\frac{1}{2}$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}r_n$收敛. 综上可知当且仅当 $x>\frac{1}{2}$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x})$收敛，从而当且仅当 $x>\frac{1}{2}$ 时无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x})$收敛.

从定理 11.5.2 出发，我们不难把相应于无穷级数的绝对收敛与条件收敛等概念及相关性质都平移到无穷乘积，在此不再赘述.

习题 11.5

1. 求下列无穷乘积的值：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$；　　　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

2. 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明：无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛的充分必要条件是无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

3. 设无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛. 证明：无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛的充分必要条件是无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛.

4. 判断下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$;

(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$;

(3) $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]$;

(6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right](p,q>0)$.

5. 证明 Wallice 公式：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(2n)^2})=\frac{2}{\pi}$.