



Lógica Proposicional

Material Complementar

Professor Isidro

Professor, Palestrante, pesquisador.
Busco ajudar profissionais de Ciência da Computação a progredirem em sua carreira, através do ensino de Fundamentos.



www.linkedin.com/in/professor-isidro-phd



github.com/professorisidro



#PraTodosVerem: Fotografia do
Professor Isidro

Sumário

- + [Objetivos](#)
- + [Introdução](#)
- + [O que você vai ver](#)
- + [Proposições](#)
- + [Tabelas-Verdade](#)
- + [Equivalências](#)
- + [Em Resumo: Argumentação](#)
- + [Conclusão](#)
- + [Referências Bibliográficas](#)



Objetivos

Ao final da leitura, esperamos que você seja capaz de:

- Entender o que são proposições
- Analisar composições de proposições através de operações lógicas E (AND ou conjunções), OU (OR ou disjunções) e NÃO (NOT ou negações)
- Montar tabelas-verdade para analisar composições de proposições
- Compreender o que é uma Tautologia, uma Contradição e uma Contingência Lógica
- Analisar equivalências lógicas através de regras bastante comuns e usuais

Introdução

Neste material vamos explorar efetivamente o poder da lógica proposicional. Não apenas pensar em Proposições como simples afirmações

Agora podemos explorar todo o poder e todo o ferramental de um arcabouço algébrico para definir composições de proposições e formar sentenças muito mais complexas.

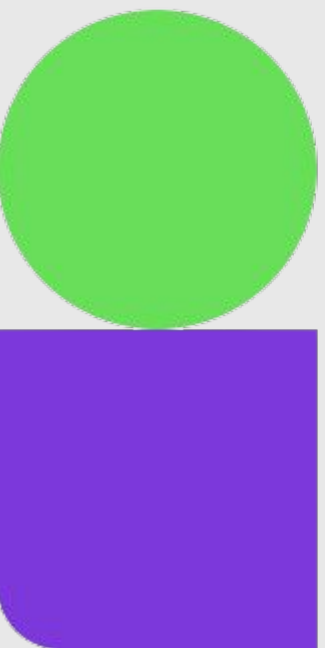
Temos ferramentas para provar se uma sentença é verdadeira ou não, quais as condições para que ela seja verdadeira ou até mesmo, através dos recursos da tabela verdade, mostrar quais são os casos em que uma sentença torna-se verdadeira ou falsa.

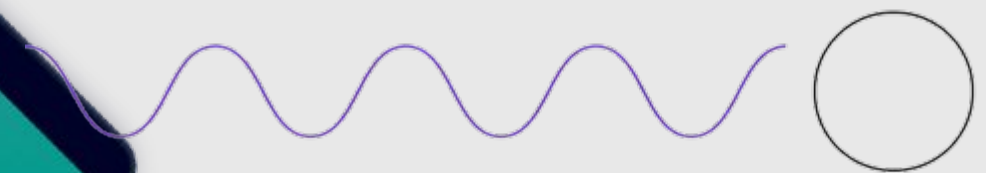
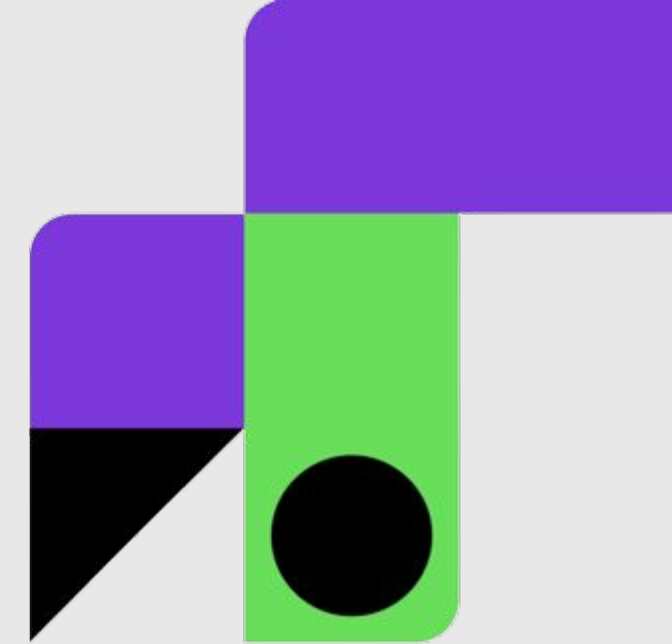
É um assunto que exige bastante dedicação. Portanto, vamos com muita calma e muita atenção a cada detalhe.

O que você vai ver

Neste material vamos buscar aprofundar um pouco o estudo na Lógica Proposicional, buscando entender:

- os principais operadores para combinarmos proposições
- como obter valores de sentenças a partir de várias proposições
- como montar uma Tabela-Verdade
- entender as principais equivalências lógicas que existem





Proposições

Vamos entender?



Apenas relembrando, caso você ainda não se lembre

- **Proposição:** Também definida como SENTENÇA, uma proposição nada mais é que uma AFIRMAÇÃO. Afirmação esta que pode ser valorada em Verdadeiro ou Falso.
 - Exemplo: a bola é Azul
 - Se você estiver vendo uma bola azul na sua frente, esta proposição é VERDADEIRA. Se você estiver vendo uma bola de qualquer outra cor na sua frente, esta proposição é FALSA



Vamos entender?

E se quisermos combinar várias proposições para formarmos uma premissa?

Exemplo:

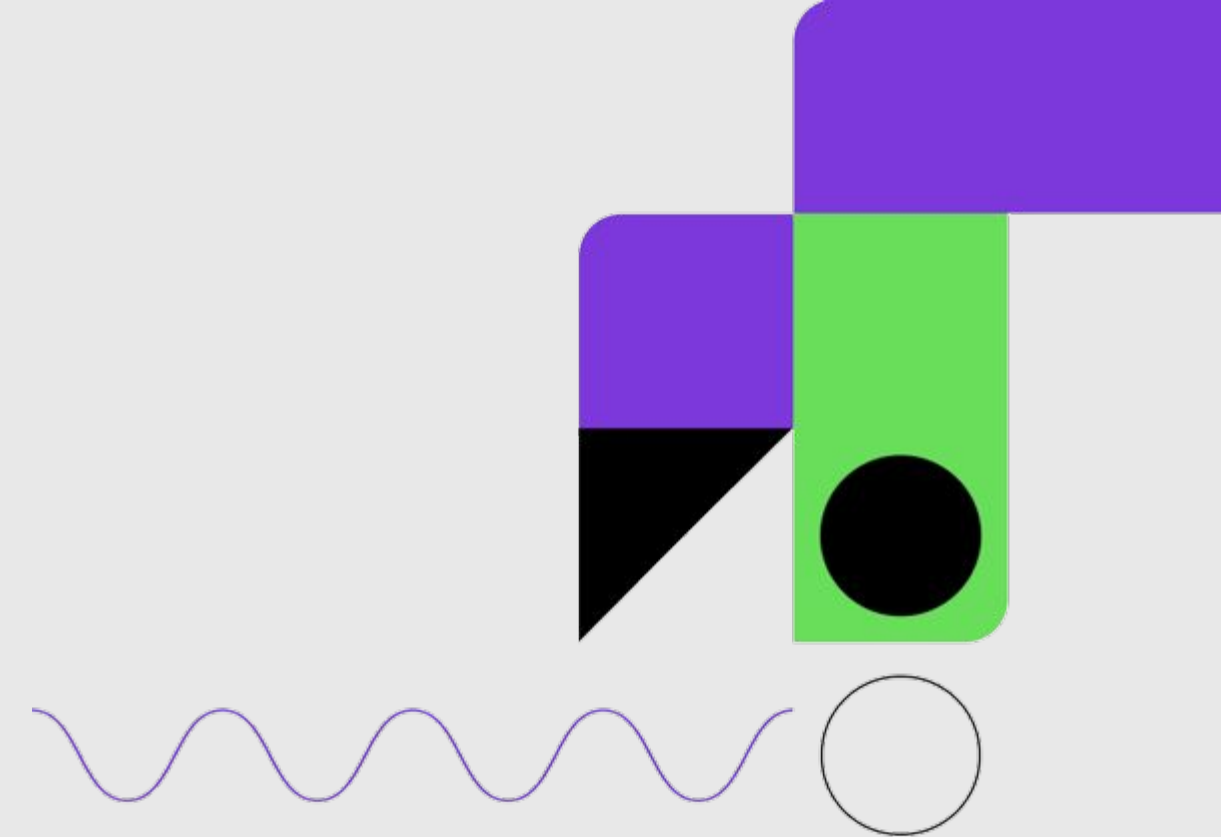
Eu vou jogar futebol se ambas as proposições forem verdadeiras

1. faz sol
2. a bola está cheia

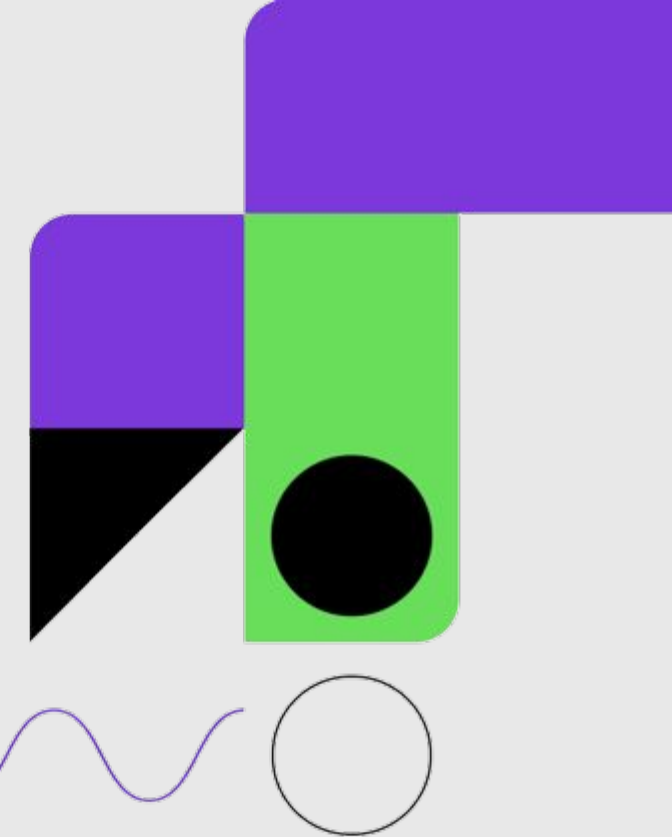
o que acontece se uma ou outra não for satisfeita?

Ambas precisam ser satisfeitas ou apenas 1 satisfeita já me dá condições de jogar bola?

Dependendo da situação (e da operação), podemos sim identificar diferenças.
Para isso precisamos entender os 3 principais operadores

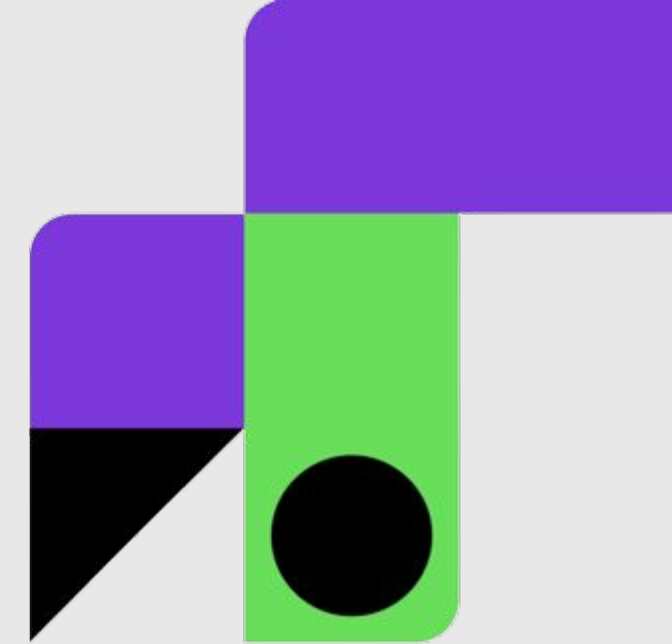


Vamos entender?



- Operador de negação (NOT ou NÃO)
 - Inverter o valor de uma proposição (se ela for verdadeira, sua negação é falsa e vice-versa)
- Operador de conjunção (AND ou E)
 - combina duas ou mais proposições para se obter o valor final. Se todas forem verdadeiras, o valor final é verdadeiro, caso contrário, o valor é falso.
- Operador de disjunção (OR ou OU)
 - combina duas ou mais proposições para se obter o valor final. Se apenas uma delas for verdadeira, já temos o resultado verdadeira. Caso todas sejam falsas, o resultado é falso

Mas como entender melhor isso? Optando por uma ferramenta poderosíssima: a Tabela-Verdade



Tabelas-Verdade

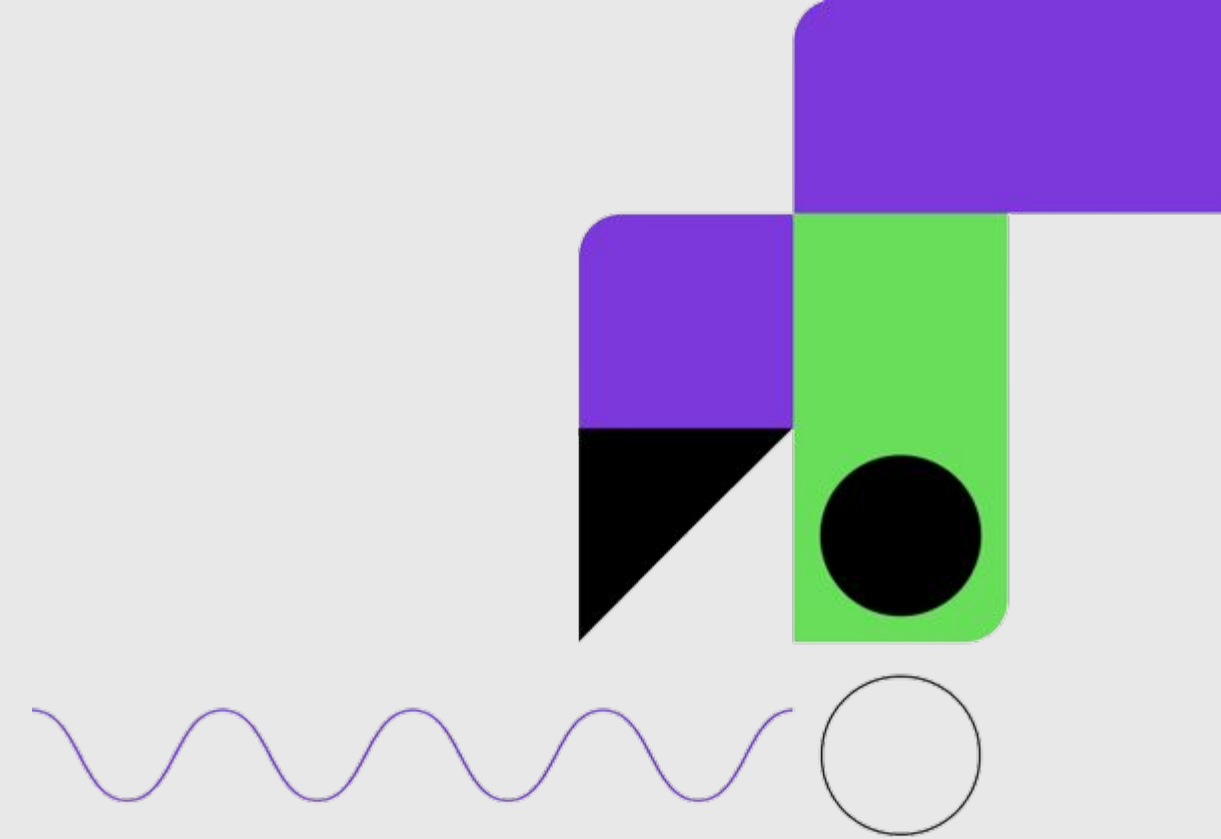
Definindo...

Vamos definir o que é uma Tabela-Verdade

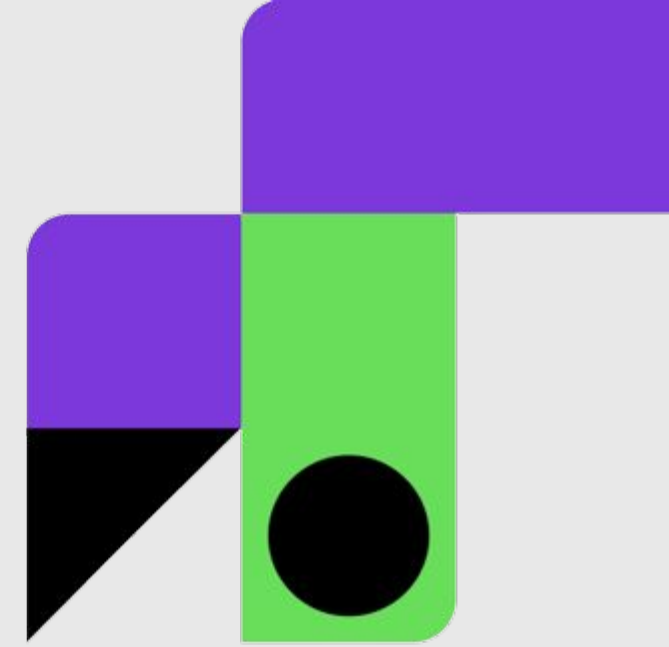
O propósito da Tabela-Verdade é expor de forma estruturada o resultado da aplicação de um operador lógico a partir da combinação de valores de uma ou várias proposições.

Tabela Verdade é uma tabela que reúne em suas várias colunas e linhas

- cada coluna representa uma proposição
- cada célula da coluna (exceto o título), representa os valores (V ou F - Verdadeiro o Falso, respectivamente) de uma única proposição ou mesmo do resultado da aplicação do operador
- cada linha corresponde a uma possível combinação de valores de uma ou várias proposições, bem como seu resultado



Definindo...



p	q	p E q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A linha contendo os títulos da tabela verdade indicam as proposições que vamos analisar, bem como a expressão que queremos analisar

Cada célula possui um único valor (V ou F), seja ela por definida por conta da condição inicial (valor Verdadeiro ou Falso) ou por conta da aplicação do operador (AND, OR, NOT)

Cada coluna mostra, além da proposição a ser analisada, todas as suas combinações de valores

Negações (NOT)

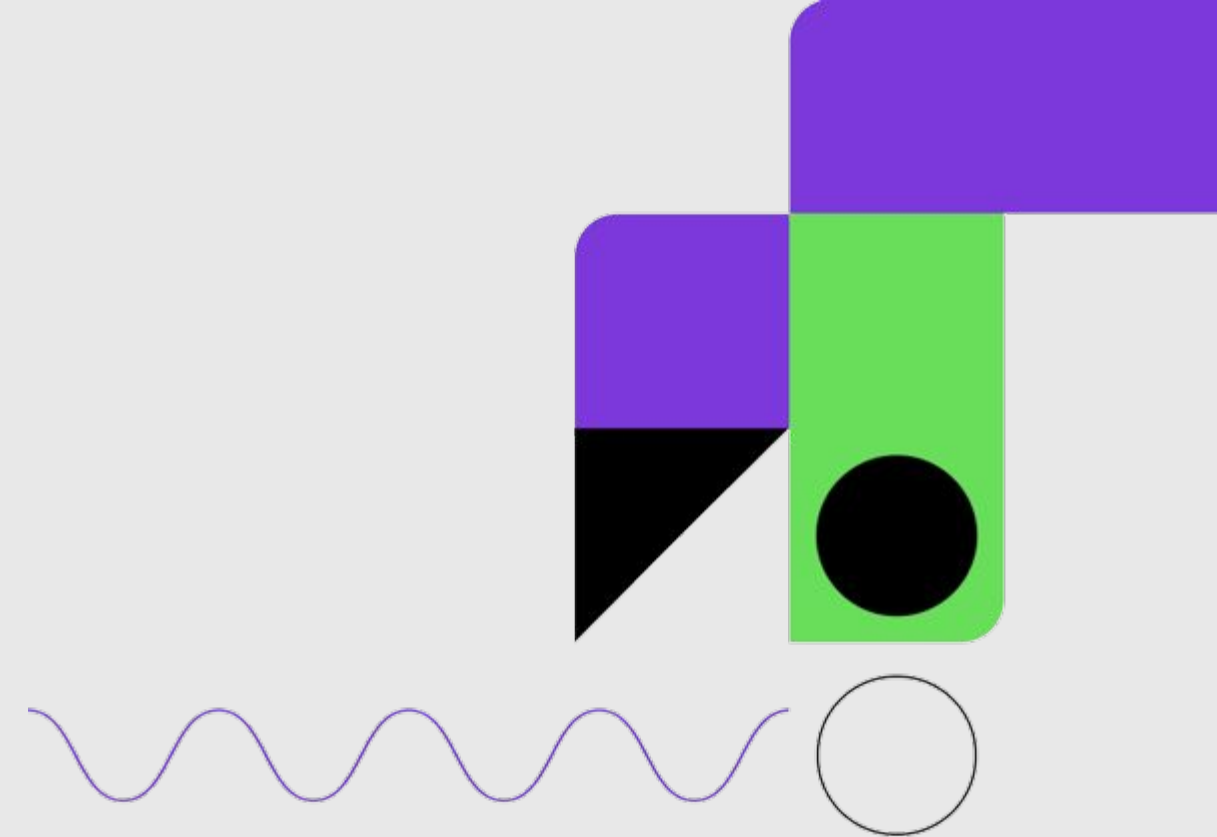
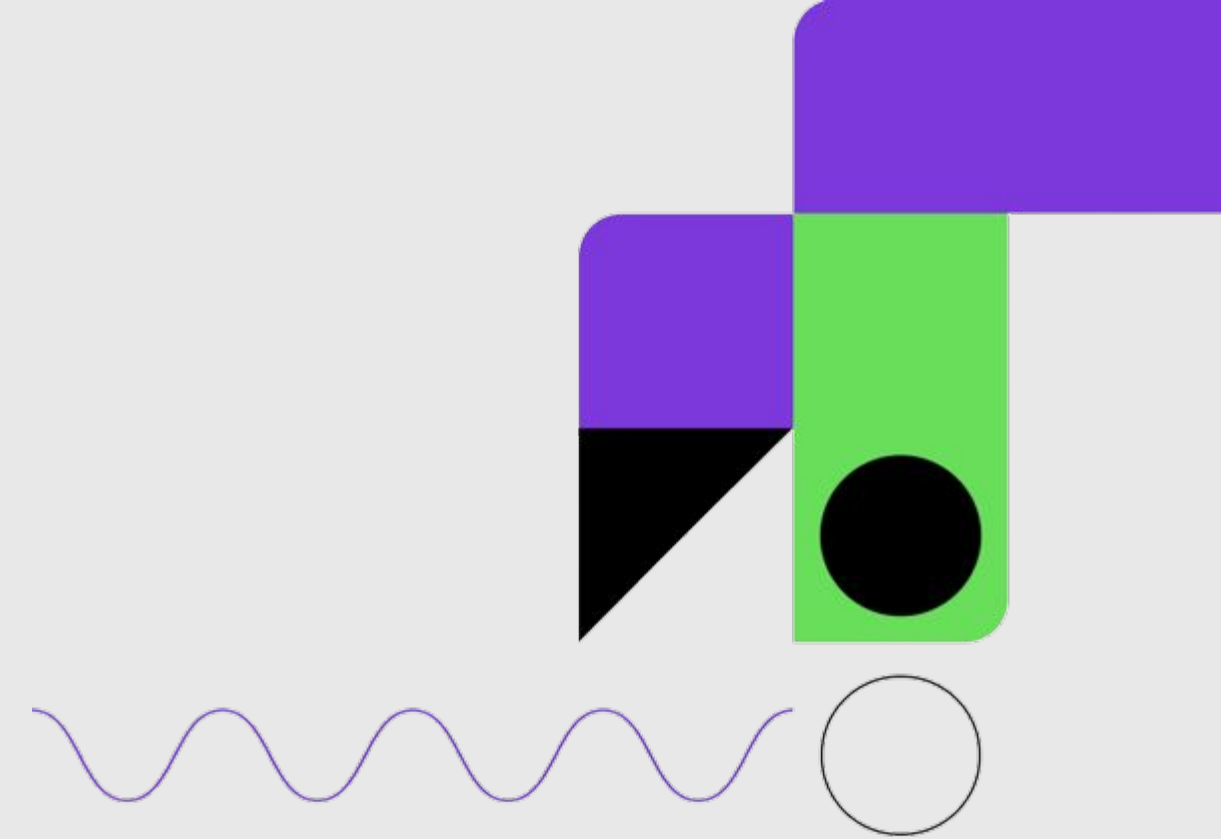


Tabela verdade da Negação - Basicamente invertemos o valor assumido pela proposição

p	NOT p
V	F
F	V

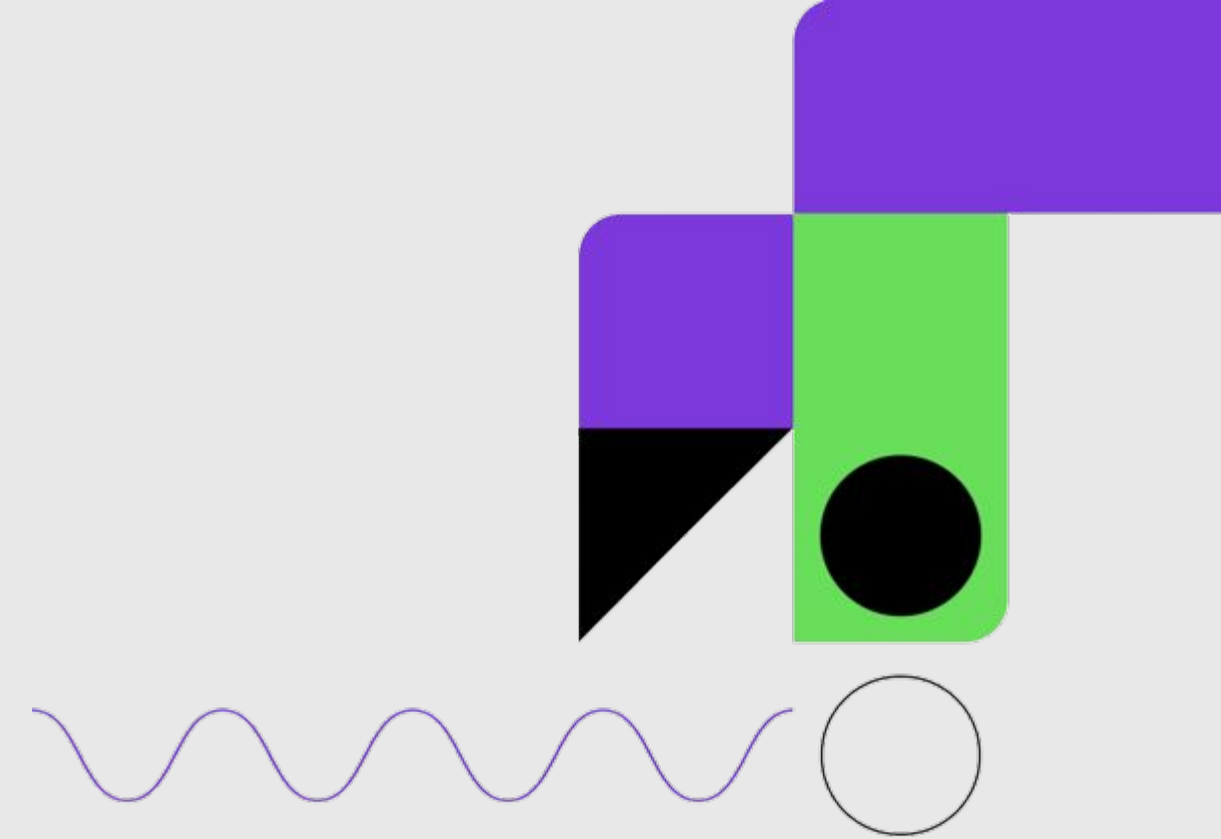
Conjunções (AND)



Há uma noção intuitiva, mas que, claro, queremos prová-la na Tabela Verdade. Quando usamos uma conjunção, intuitivamente percebemos que a sentença só será verdadeira quando todas as proposições forem verdadeiras. Se apenas uma (ou todas) forem falsas, o resultado será falso. Confira.

p	q	p AND q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

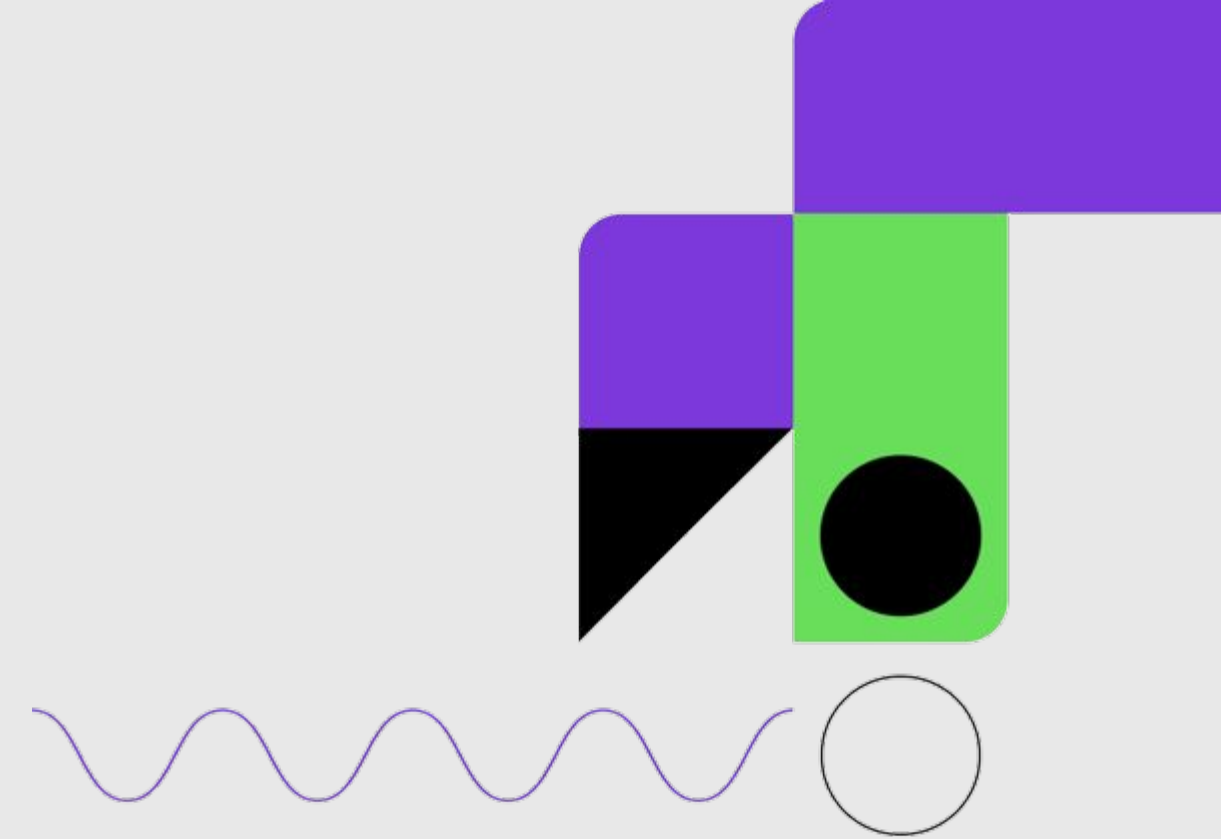
Disjunções (OR)



Novamente a situação intuitiva: em uma disjunção, basta que apenas uma das proposições seja verdadeira para que o resultado torne-se verdadeiro. O resultado só será falso quando todas as proposições forem falsas

p	q	p OR q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

E tabelas mais complexas?



Essa é uma idéia bem legal, pois podemos pensar em complexidade de 2 maneiras

- montando uma tabela verdade com mais de uma proposição
- analisando uma expressão complexa (com vários operadores)

Para a 2a alternativa, vamos precisar entender a prioridade das operações (veremos adiante). Então vamos nos concentrar na 1a alternativa

Considere estas combinações

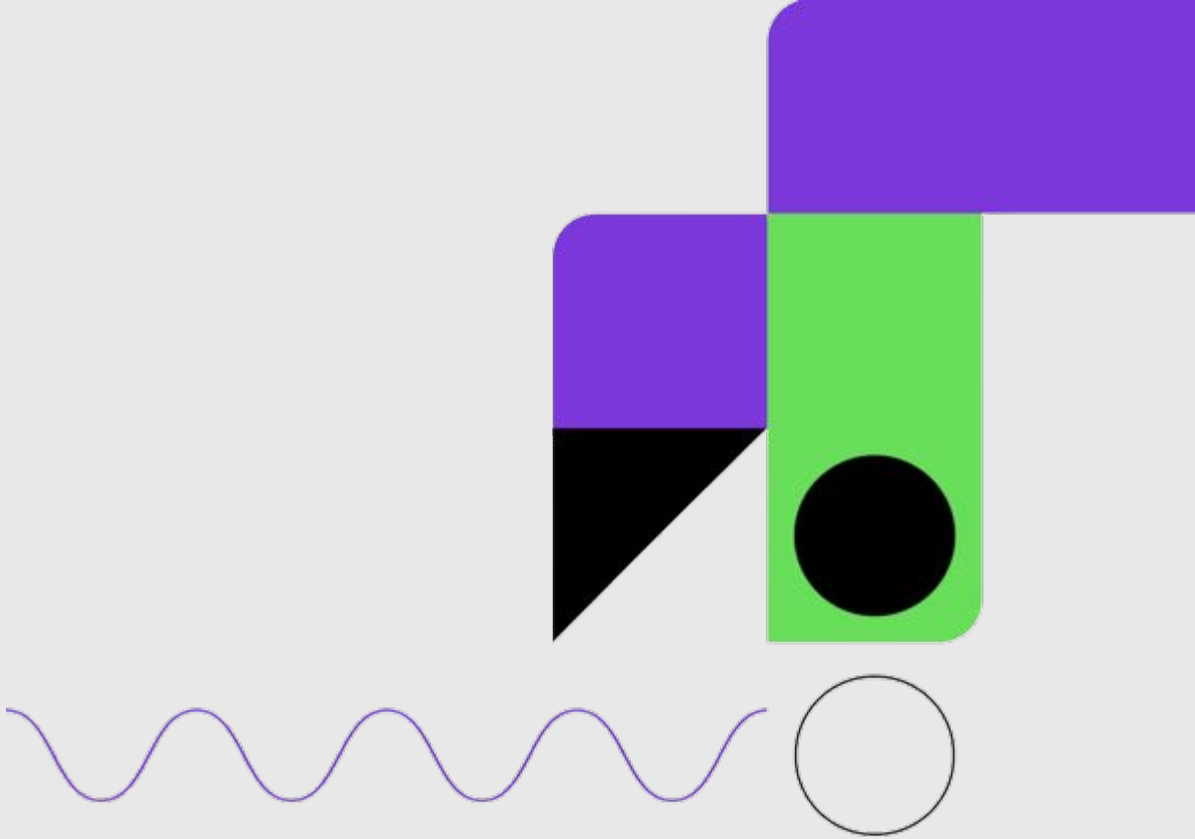
- 1 proposição tem 2 possíveis valores
- 2 proposições tem 4 possíveis combinações de valores
- 3 proposições tem 8 possíveis combinações de valores

dessa forma, se percebermos, tudo é baseado em potência de 2 (já que são 2 alternativas de valores)

então se temos **N** proposições → **2^N** combinações de valores

Para 4 proposições

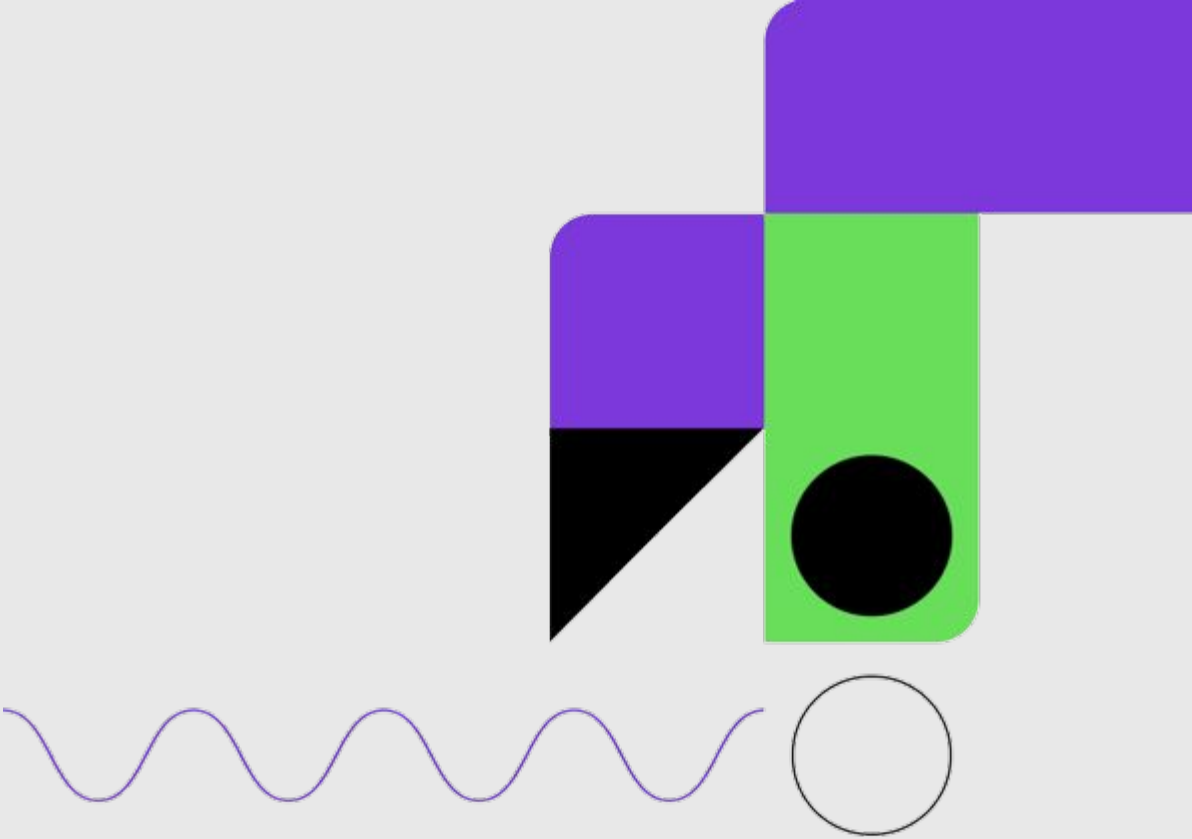
p	q	r	s



Já sabemos que, para 4 proposições, teremos 16 combinações
Então montamos nossa tabela indicando já as 4 proposições (neste caso vamos usar as letras **p**, **q**, **r** e **s**) e 16 linhas em sequência para as possíveis combinações

Para 4 proposições

p	q	r	s
v			
v			
v			
v			
v			
v			
v			
v			
F			
F			
F			
F			
F			
F			
F			
F			

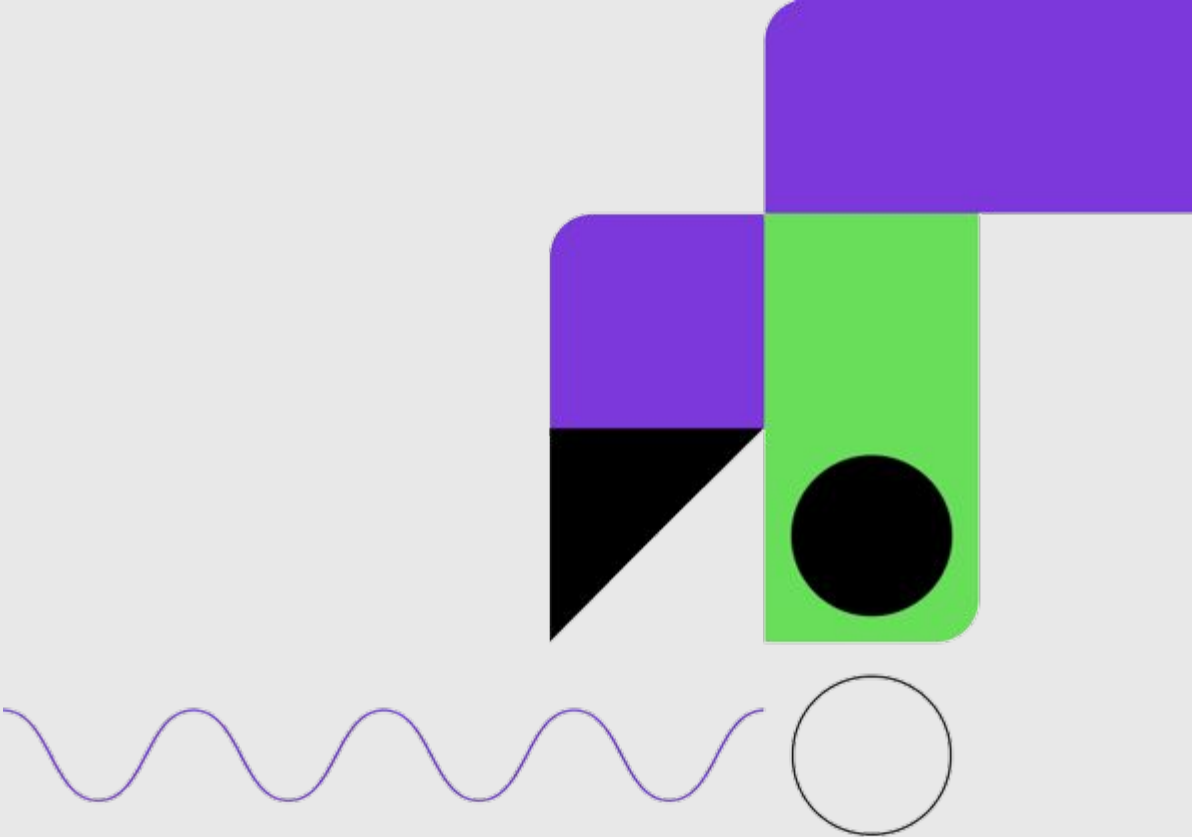


O próximo passo é preenchermos a
coluna mais à esquerda

Se temos 16 possíveis combinações,
teremos 8 valores verdadeiros e 8
falsos

Para 4 proposições

p	q	r	s
V	V		
V	V		
V	V		
V	V		
V	F		
V	F		
V	F		
V	F		
F	V		
F	V		
F	V		
F	V		
F	F		
F	F		
F	F		
F	F		



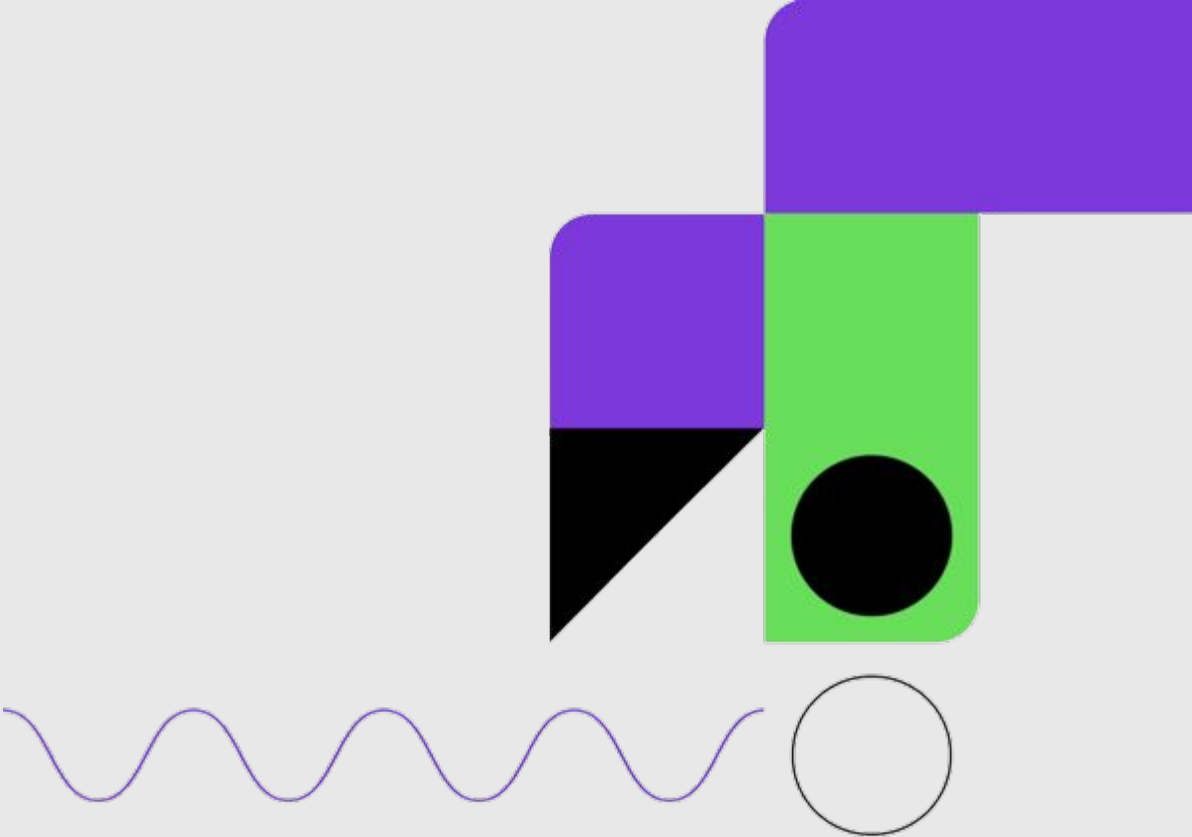
Agora vamos em direção a preencher os valores das colunas da direita

A coluna P já preenchida, vamos preencher a coluna Q com valores V e F para as combinações de P.

Quer fazer simples? se P foi de 8 em 8, agora temos V e F de 4 em 4

Para 4 proposições

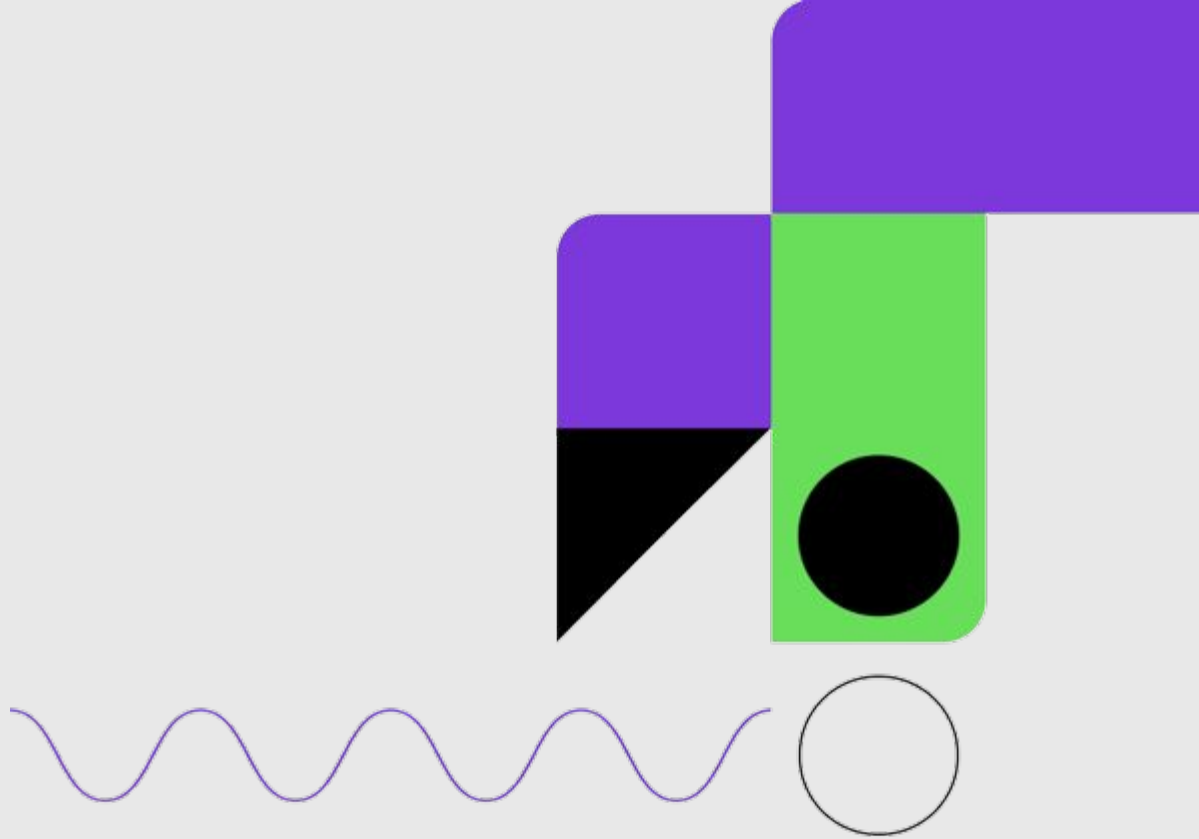
p	q	r	s
V	V	V	
V	V	V	
V	V	F	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	V	
V	F	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	V	
F	V	F	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	V	
F	F	F	
F	F	F	



Agora precisamos preencher a
coluna R com V e F de 2 em 2

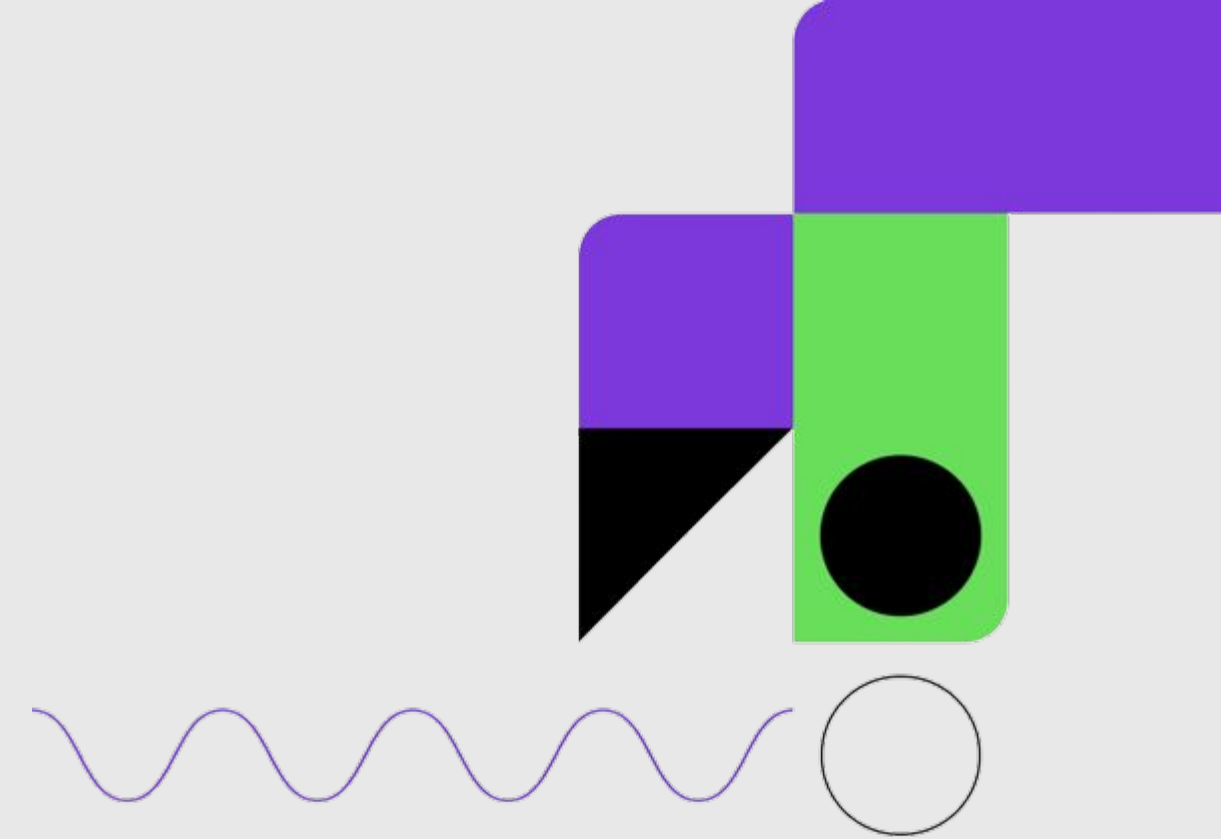
Para 4 proposições

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F



Finalmente conseguimos, agora, alternar na última coluna entre V e F

Combinações e precedências

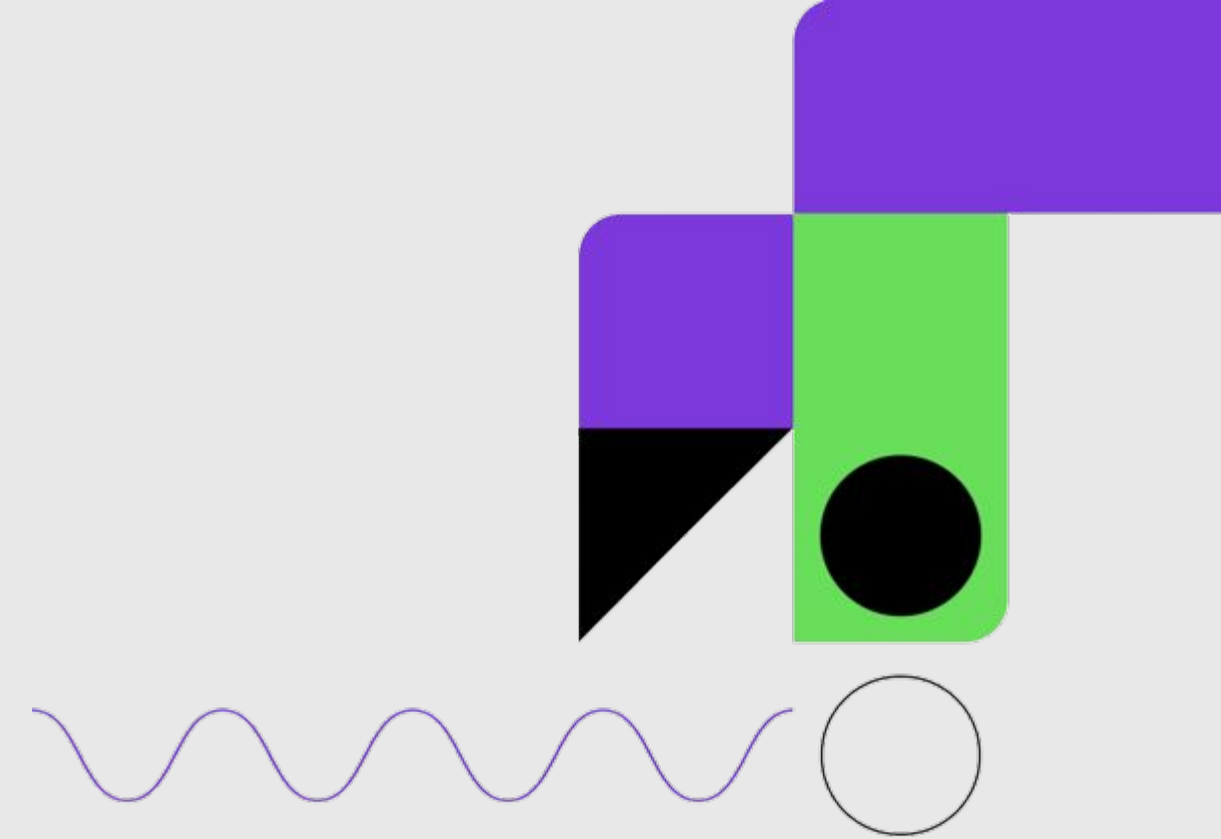


Agora que sabemos montar tabelas-verdade com qualquer quantidade de proposições, agora vamos entender como avaliar as diversas proposições.

Para isso vamos entender a precedência (ou preferência) das operações. Nesta ordem:

1. Tudo o que estiver entre parêntesis
2. Negações
3. Conjunções
4. Disjunções

Combinações e precedências



Dessa forma, se tivermos uma expressão:

p AND NOT q OR r AND s

Como analisaremos? Vamos colocar os parênteses para poder mostrar a precedência das operações

1. aplicamos o operador NOT:

$p \text{ AND } (\text{NOT } q) \text{ OR } r \text{ AND } p$

1. aplicamos os operadores AND na ordem em que aparecem da esquerda para a direita

$(p \text{ AND } (\text{NOT } q)) \text{ OR } (r \text{ AND } p)$

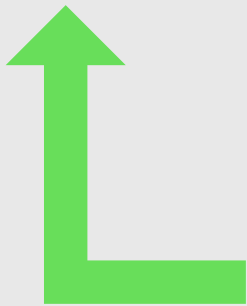
3. finalmente aplicamos o operador OR no resultado

$((p \text{ AND } (\text{NOT } q) \text{ OR } (r \text{ AND } p)))$

Montando a Tabela

Como montamos a tabela resultante? A partir de cada componente: veja
 $p \text{ AND NOT } q \text{ OR } r \text{ AND } p$

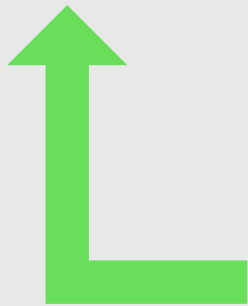
p	q	r	NOT q	p AND NOT q	r AND p	p AND NOT q OR r AND p
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F



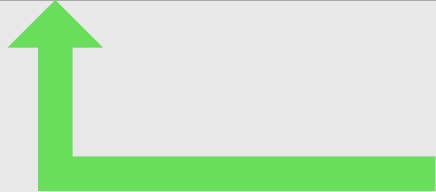
1o passo
(negação de Q)



conjunção
das colunas
p E NOT q

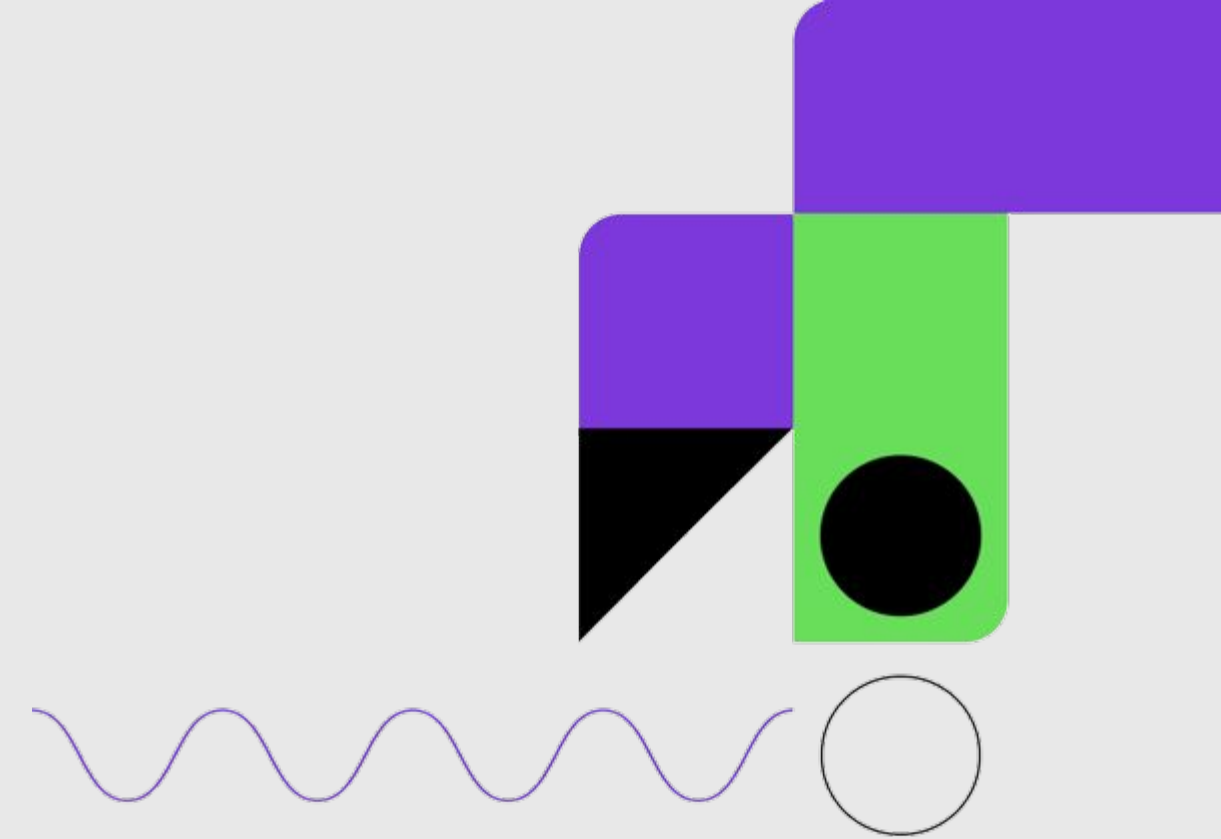


conjunção
das colunas
r E p



disjunção dos
resultados das 2
colunas anteriores

Alguns aspectos



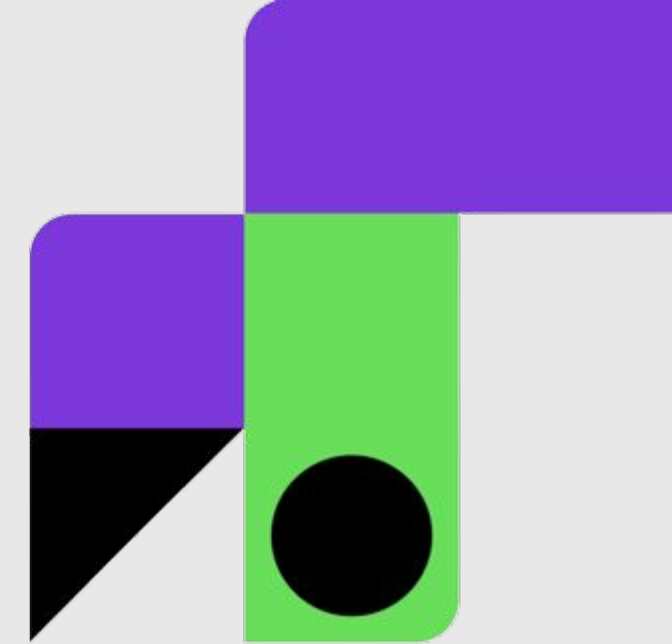
Tautologia - quando, independente dos valores das proposições, o resultado da Tabela-Verdade é sempre VERDADEIRO

exemplo: $p \text{ OR } \text{NOT } p$ (faça a tabela-verdade para isso)

Contradição - quando, independente dos valores das proposições, o resultado da Tabela-Verdade é sempre FALSO

exemplo: $p \text{ AND } \text{NOT } p$ (novamente faça a tabela verdade)

Contingência - é o caso “comum” onde qualquer combinação dos valores das proposições pode resultar em Verdadeiro ou Falso



Equivalências

Definição

Dizemos que 2 sentenças são equivalentes quando possuem a mesma tabela verdade resultante.

Mesmo que tenham estruturas diferentes e operações em diferentes ordens, o resultado da tabela verdade é o mesmo para as mesmas combinações de valores

Um exemplo de Lei muito comum em Lógica proposicional é a famosa “Lei De Morgan” que diz exatamente o seguinte:

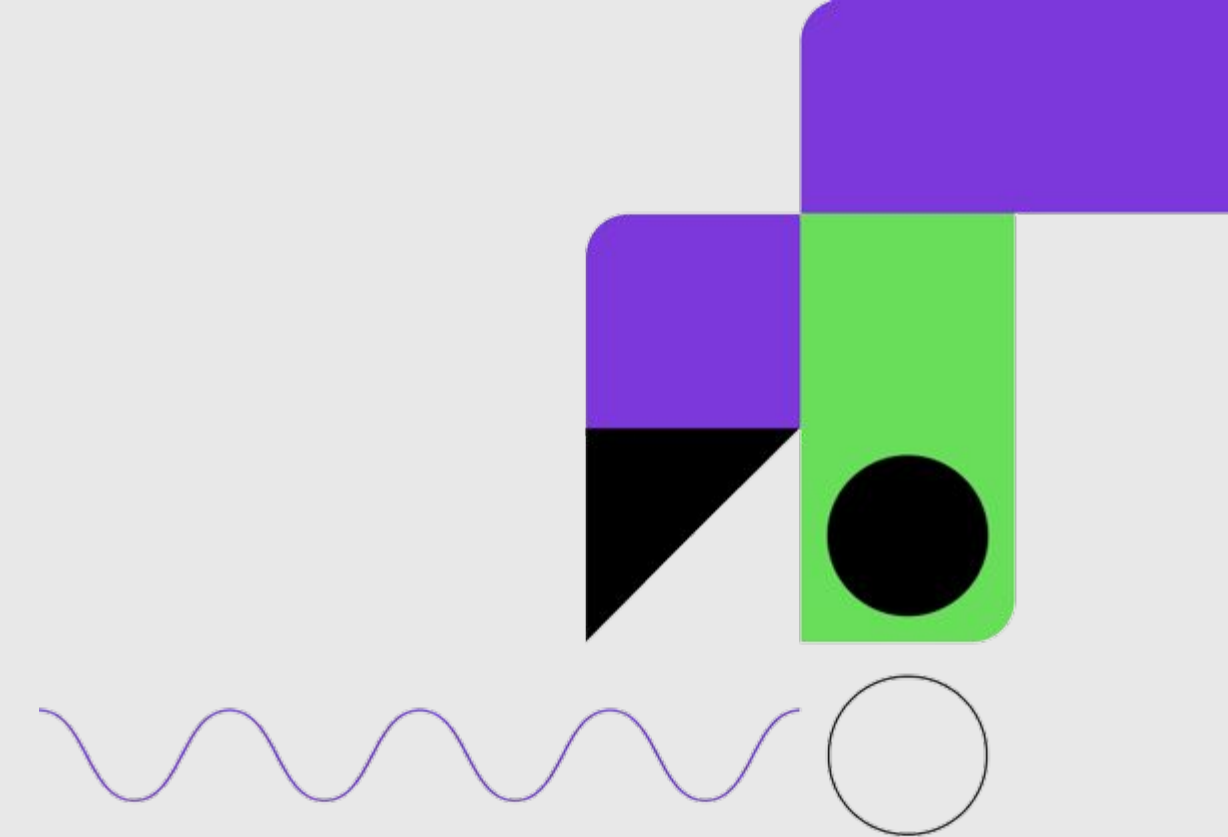
$\text{NOT } (p \text{ AND } q)$ é equivalente a $\text{NOT } p \text{ OR NOT } q$

ou ainda

$\text{NOT } (p \text{ OR } q)$ é equivalente a $\text{NOT } p \text{ AND NOT } q$

Vamos provar?

Lei DeMorgan



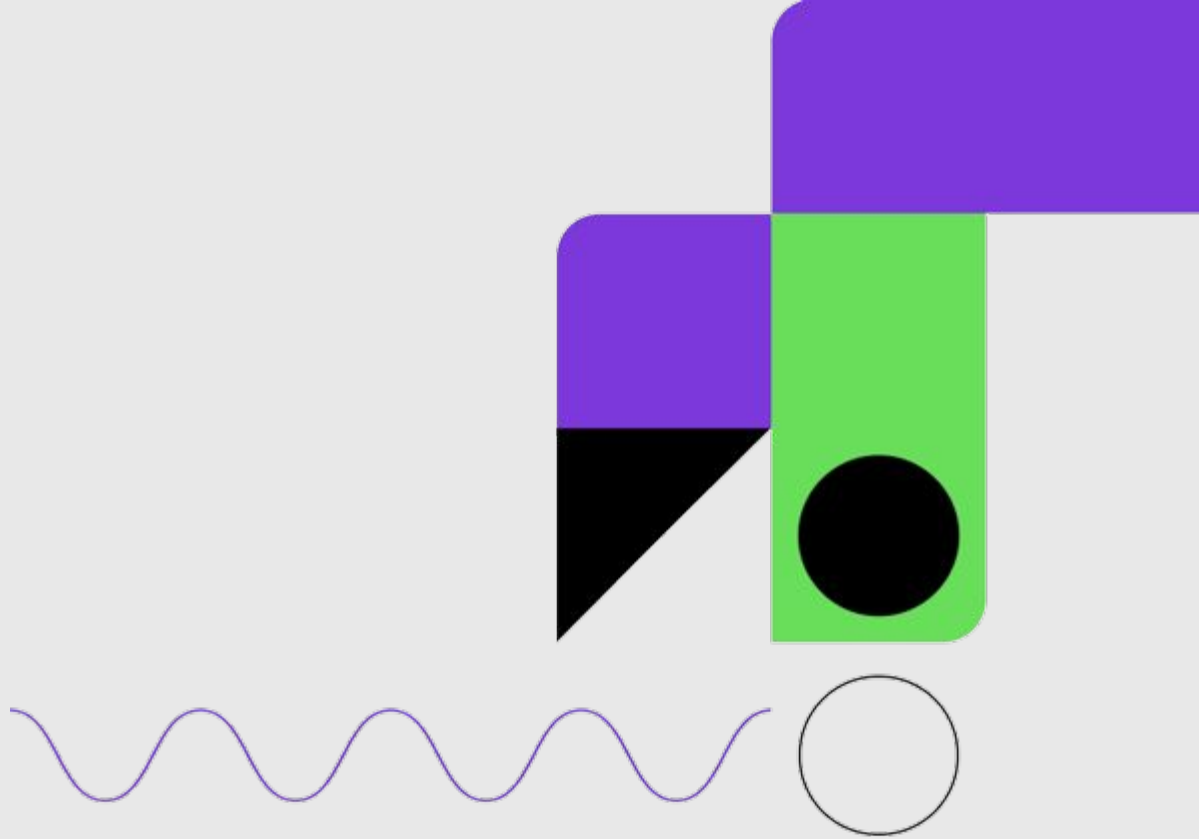
Note que vamos montar exatamente a tabela de forma gradativa para provar a equivalência entre

$$\text{NOT } (p \text{ AND } q) = \text{NOT } p \text{ OR NOT } q$$

As colunas precisam ser exatamente iguais no final para as mesmas combinações de valores das proposições

p	q	NOT p	NOT q	p AND q	NOT (p AND q)	NOT p OR NOT q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Lei DeMorgan

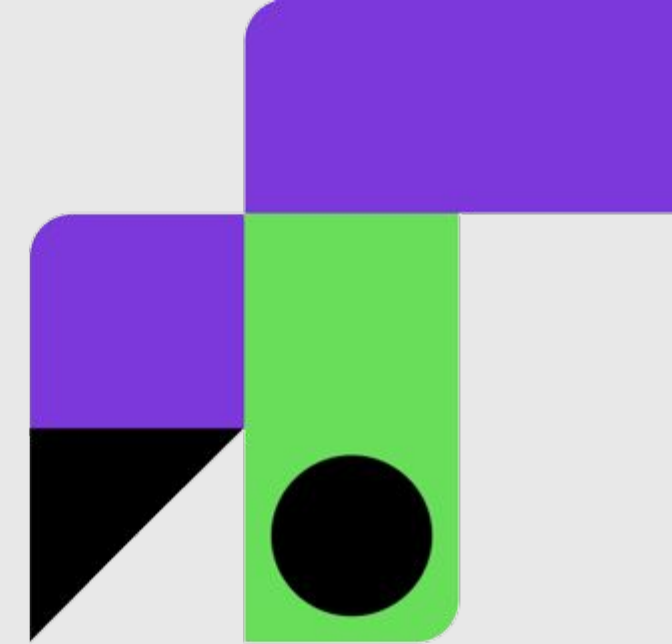


Agora para a expressão

$\text{NOT } (p \text{ OR } q) = \text{NOT } p \text{ AND NOT } q$

As colunas precisam ser exatamente iguais no final para as mesmas combinações de valores das proposições

p	q	NOT p	NOT q	p OR q	NOT (p OR q)	NOT p and NOT q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V



Em resumo...

Lógica e Argumentação

Poderíamos ficar horas e horas divagando sobre os diversos tipos de argumentações existentes dentro do ramo da lógica filosófica. Mas para nós o que é importante?

Como provar em quais situações uma sentença é verdadeira ou falsa? Montando a sua tabela-verdade

Isso porque as máquinas não criam suposições, não possuem comportamento ou conhecimento prévio de qualquer assunto.

A máquina realiza tarefas e “toma decisões” baseado nos valores das condições que ela avalia. Exemplo: Se para a máquina a proposição

$p = A > B$

ela será verdadeira para os valores de A e B, 5 e 3, respectivamente e falsa para 3, e 8, respectivamente



Conclusão

Agora temos uma ferramenta com um formalismo para tratar os casos concretos.

A Lógica proposicional nos permite analisar com ferramentas poderosas (as tabelas-verdade) as proposições e suas diversas combinações de valores, de forma única e sem ambiguidades

Isso vai facilitar muito nosso trabalho quando programarmos, pois nos permite analisar de forma inequívoca condições lógicas para nossos softwares executarem.

Referências Bibliográficas

Justo, A. B. N - Raciocínio Lógico para Concursos. Ed. Foco

Pessoa, A. - Desvendando o Raciocínio Lógico. Ed. Clube de Autores

Zegarelli, M. - Lógica para Leigos. Ed. Alta Boooks

Lustosa, D. - Raciocínio Lógico-matemático de A a Z. Ed. Alfacon

