

Devoir 3: **Validation**

Louis-Simon Castonguay, 2127442
Lénaïc Malherbe, 2405496
Jonathan Sandouidi, 2070966
31 mars 2025

A) Évaluation de l'incertitude numérique (u_{num})

- Pour évaluer l'incertitude numérique, nous avons déterminé le Grid Convergence Index (GCI) à partir de la réponse d'intérêt k (la perméabilité) et de la démarche suivante. Nous avons utilisé un facteur de raffinement de 2 sur le Δx tout en gardant l'épaisseur h constant. Le seed 100 a été utilisé pour générer la structure.
- Étape 1 – Déterminer l'ordre de convergence observé

Δx [m]	Nx	h [m]	k [μm^2]
5,00E-07	400	2,00E-04	31,0073
1,00E-06	200	2,00E-04	31,3673
2,00E-06	100	2,00E-04	32,9114

$$\hat{p} = \frac{\ln\left(\frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1}\right)}{\ln(r)} = \frac{\ln\left(\frac{32,9114 - 31,3673}{31,3673 - 31,0073}\right)}{\ln(2)} = 2,1007$$

- Étape 2 – Déterminer F_s et p pour le GCI

$$\left| \frac{\hat{p} - p_f}{p_f} \right| = \left| \frac{2,1007 - 2}{2} \right| = 0,05035, > 1\%, \text{ on ne peut donc pas rapporter l'extrapolation de Richardson. On prend } F_s = 1,25 \text{ et } p_f = 2$$

- Étape 3 – Calcul du GCI

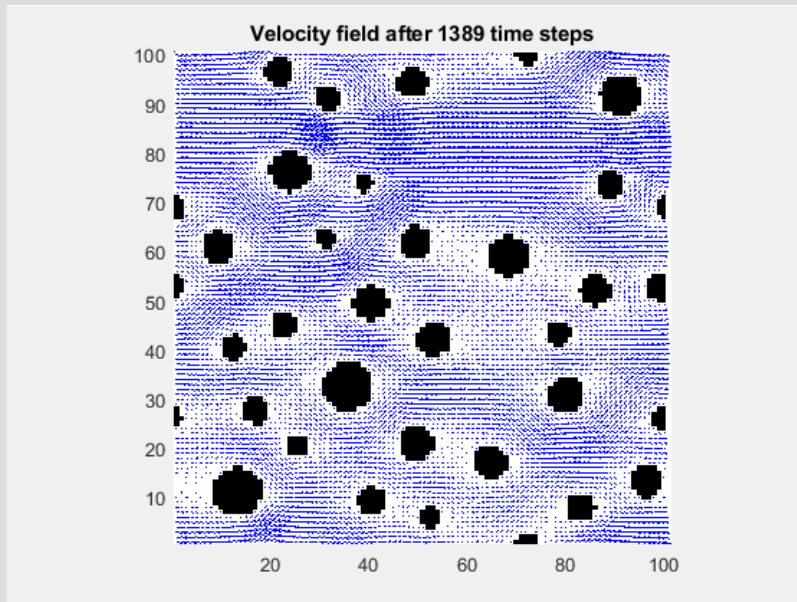
$$GCI = \frac{F_s}{r^{p_f} - 1} |k_2 - k_1| = \frac{1,25}{2^2 - 1} |31,3673 - 31,0073| = 0,15$$

- Étape 4 - u_{num}

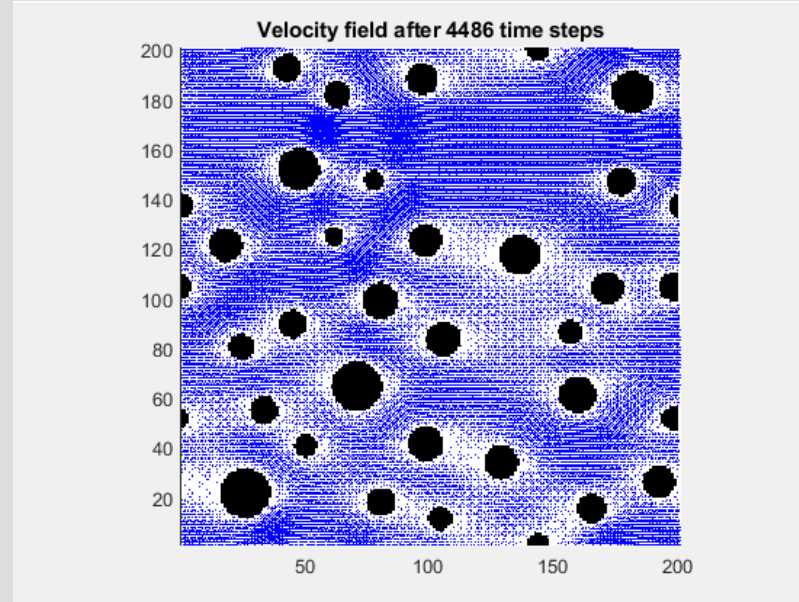
$$u_{\text{num}} = GCI / 2 = 0,075 \mu\text{m}^2$$

A) Évaluation de l'incertitude numérique (u_{num})

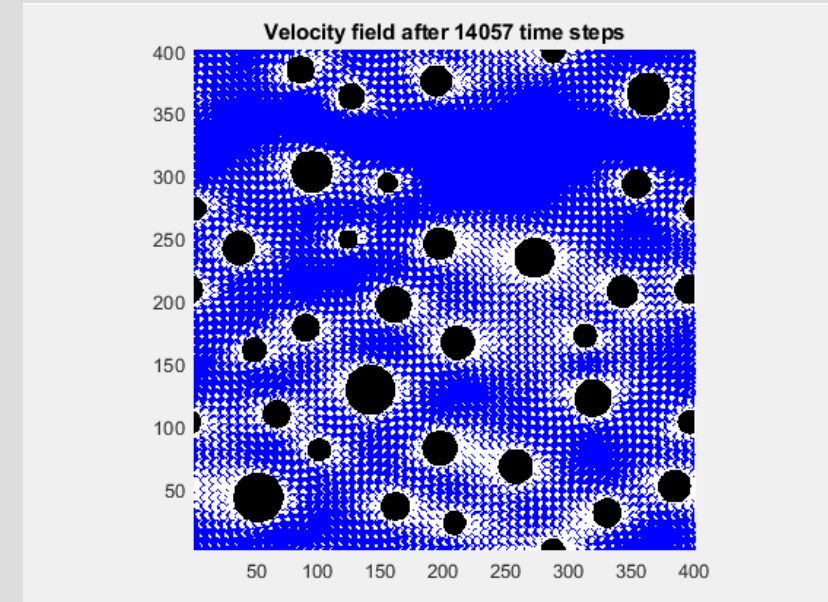
Ci-joint les schémas des structures utilisées et générées pour l'étude de l'ordre de convergence. On peut constater que les positions des fibres sont identiques comme souhaité pour l'étude de convergence.



$N_x = 100$



$N_x = 200$



$N_x = 400$

B) Évaluation de l'incertitude sur les entrées (u_{input})

Pour générer u_{input} , nous avons rédigé un code, générant des valeurs de porosité suivant une distribution gaussienne, basée sur la moyenne et l'écart types fournis. Nous avons généré 200 valeurs de porosités.

Nous avons associé chacune des porosités obtenues avec un seed différent, en commençant avec un seed de 1 et en ajoutant 1, pour chaque porosité.

Dans une boucle for, nous avons calculer les 200 perméabilités, associées aux différents couples de (porosité, seed), avec un maillage $N_x \times N_x = 200 \times 200$ et un $dx = 1e-6 \mu m$.

Nous avons ensuite calculé la moyenne des log de perméabilité $\mu = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} \log(k_i) = 3.1676 \mu m^2$

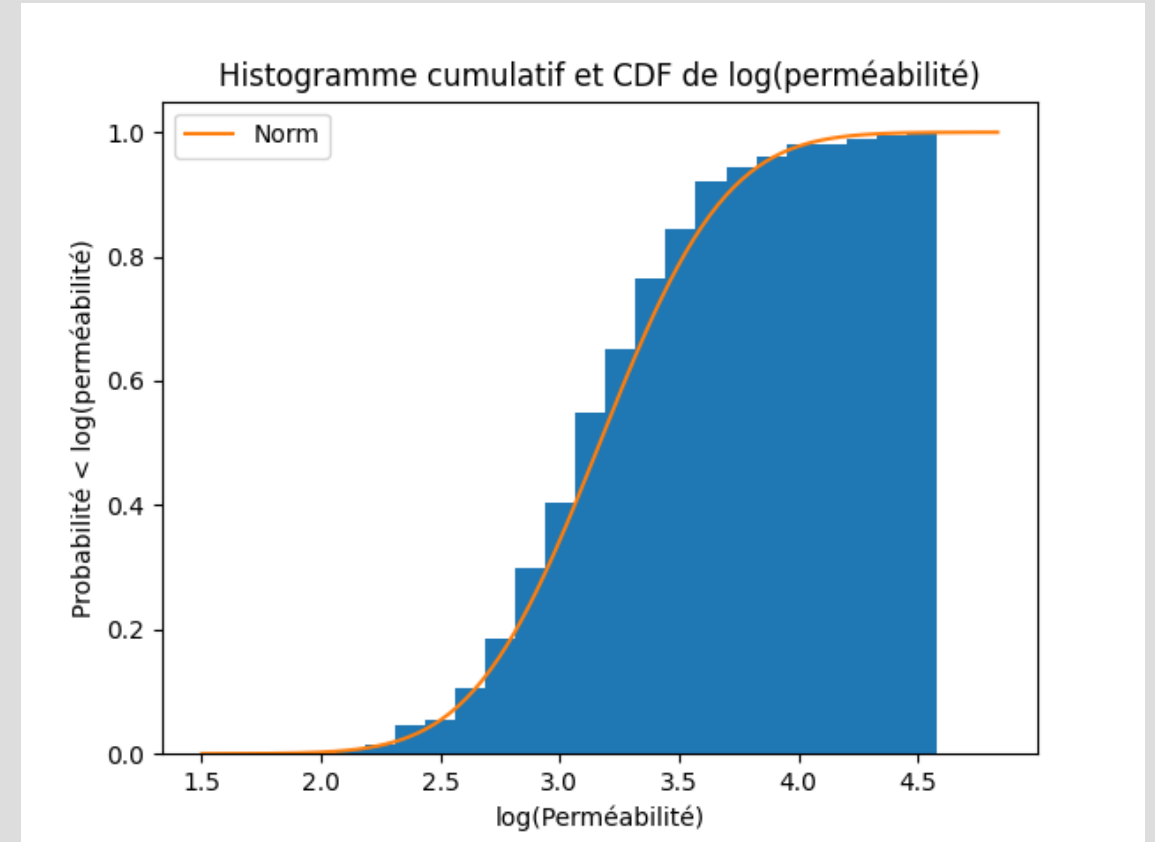
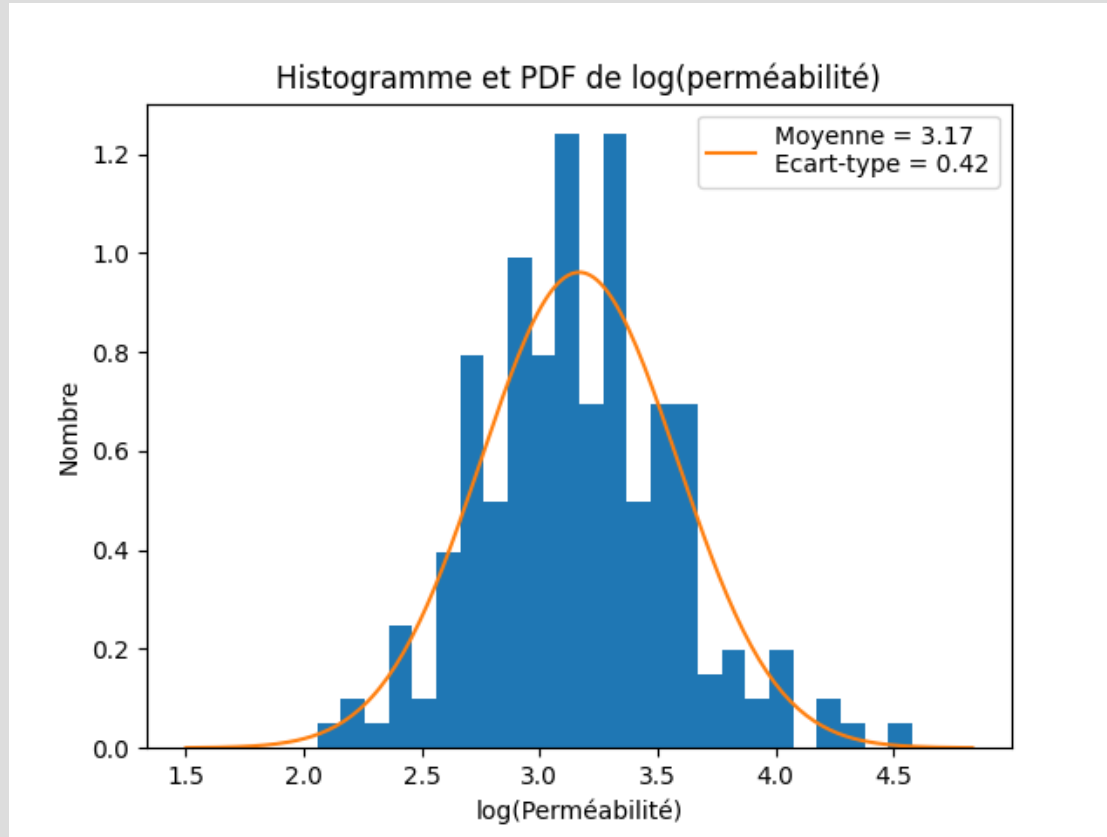
Nous avons ensuite calculé la variance $s = \frac{1}{199} \sum_{i=1}^{200} (\log(k_i) - \mu)^2 = 0.1732 \mu^2 m^4$

Nous avons calculé l'écart type $\sigma = \sqrt{s} = 0.4161 \mu m^2$

Pour l'incertitude u_{input} nous avons rapporter le FVG $= e^\sigma = 1.5161 \mu m^2$

B) Suite évaluation de l'incertitude sur les entrées (u_{input})

Nous avons également tracé la PDF et la CDF des log de perméabilité dont les résultats sont les suivants:



C) Évaluation de l'incertitude expérimentale (u_D)

Nous avons relevé 4 incertitudes (écart type) sur des valeurs expérimentales, notamment:

- $\sigma_{taille_fibre} = 2.85 \text{ } \mu\text{m}$
- $\sigma_{porosité} = 7.5 \times 10^{-3}$
- $\sigma_{perm abilit _reproductibilit } = 14.7 \text{ } \mu\text{m}^2$
- $\sigma_{perméamètre} = 10 \text{ } \mu\text{m}^2$

$$\text{Ainsi } u_D = \sqrt{\sigma_{taille_fibre}^2 + \sigma_{porosité}^2 + \sigma_{perm abilit _reproductibilit }^2 + \sigma_{perméamètre}^2} = 1.0 \text{ } \mu\text{m}^2$$

D) Erreur de simulation E

L'erreur $E = S - D$

Avec:

S = Solution numérique

D = valeur expérimentale

Pour cette question il nous a été demandé de considérer S et D comme leur médianes respectives

Ainsi:

$$S = e^{\mu} = 23.7501 \text{ } \mu\text{m}^2$$

$$D = 80.6 \text{ } \mu\text{m}^2$$

$$\text{Donc } E = -56.8499 \text{ } \mu\text{m}^2$$

L'erreur négative nous laisse penser que le modèle sous estime la perméabilité réelle

E) Erreur du modèle (δ_{model})

δ_{model} est encadré par : $E - k * u_{val} \leq \delta_{model} \leq E + k * u_{val}$

$$u_{val} = \sqrt{u_{input}^2 + u_{num}^2 + u_D^2} = 1,8177 \mu m^2$$

Pour un intervalle de confiance à 95.4%, $k = 2$ on obtient:

$$E - 2 * u_{val} \leq \delta_{model} \leq E + 2 * u_{val}$$

Après calcul on obtient:

$$-60.4854 \mu m^2 \leq \delta_{model} \leq -53.2144 \mu m^2$$

Lorsque l'on compare $abs(E) = 56.8499$ à $U_{val,95,4} = 2 * u_{val} = 3.6354$, on constate que U_{val} représente 6.3949% de $abs(E)$. Nous pensons alors que ce résultat est semblable au cas I de l'interprétation des résultats ou $E \gg U_{val,95,4}$. Ce résultat est ainsi « satisfaisant » car l'erreur du modèle est bien caractérisée.

Lien GIT: <https://github.com/01Jonathan/MEC8211/tree/main>