Lien du Git: https://github.com/011Jonathan/MEC8211

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Devoir 1:
Vérification de code

Louis-Simon Castonguay, 2127442
Lénaïc Malherbe, 2405496
Jonathan Sandouidi, 2070966

17 février 2025

A) Simplification et établissement du problème

- A) Type de problème à l'état stationnaire

  On traite un problème Elliptique car le problème est lisse et en régime permanent

- B) Choix du système de coordonnées

  Au vu de la géométrie du pilier on travaille en coordonnée cylindrique, c'est-à-dire que le domaine établi selon les coordonnées r, thêta et z

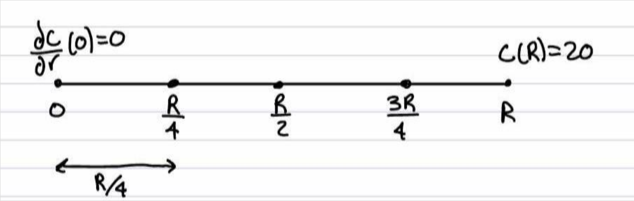
- C) Simplification du problème

  Symétrie par translation (car z infinie) et C(mol/m3) du fluide et géométrie symétrique par rapport à rotation z: $C(r,\theta,z) = C(r)$

  Régime stationnaire: $\frac{\partial C}{\partial t}=0$

  Laplacien simplifié en cylindrique: $\nabla^2 C(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d(C(r))}{dr})$

- D) Discrétisation du domaine en 5 nœuds



- E) Conditions frontières et limites

En r=0 condition de Neumann: $\frac{\partial C(r=0)}{\partial r}=0$ En r=R condition de Dirichlet: C(r)=Ce

B) Résolution analytique

On résout l'équation suivante par deux intégrations successives: $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d(C(r))}{dr}) - \frac{S}{Deff} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right) - \frac{S}{D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right) = \frac{rS}{D}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dC}{\partial r}\right)\partial r = \int \left(\frac{rS}{D}\right)\partial r$$

$$\Rightarrow r\frac{dC}{dr} = \frac{r^2 S}{2D} + C_1$$

$$\left.\frac{dC}{dr}\right|_{r=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dr} = \frac{rS}{2D}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dC}{dr}dr = \int \frac{rS}{2D}dr$$

$$\Rightarrow C(r) = \frac{r^2 S}{4D} + C_2$$

On détermine les 2 constantes d'intégrations en utilisant les conditions frontières :

$$C(r) = \frac{r^2 S}{4D} + C_2$$

$$C(r=R) = Ce$$

$$\Rightarrow \frac{R^2 S}{4D} + C_2 = Ce$$

$$\Rightarrow C_2 = Ce - \frac{R^2 S}{4D}$$

$$\Rightarrow C(r) = \frac{r^2 S}{4D} - \frac{R^2 S}{4D} + Ce$$

$$C(r) = \frac{1}{4}\frac{S}{Deff}R^2\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) + Ce$$

C) Discrétisation d'ordre 1

- A) Équation en chacun des nœuds

On discrétise l'équation différentielle en utilisant les schémas suivants:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_i = \frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta r} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right|_i = \frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta r^2}$$

Notre équation devient alors :

- B) Procédure générale de résolution pour 5 nœuds

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta r^2} & \frac{-2}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_i \Delta r} & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta r^2} & \frac{-2}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_i \Delta r} & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta r^2} & \frac{-2}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_i \Delta r} & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{S}{D_{eff}} \\ \frac{S}{D_{eff}} \\ \frac{S}{D_{eff}} \\ 20 \end{bmatrix}$$

Cette méthode fonctionne peut importe le nombre de nœuds. Il suffit d'ajouter des lignes au centre des matrices. La première et dernière ligne reste les mêmes puisqu'elles permettent de résoudre pour les conditions frontières.

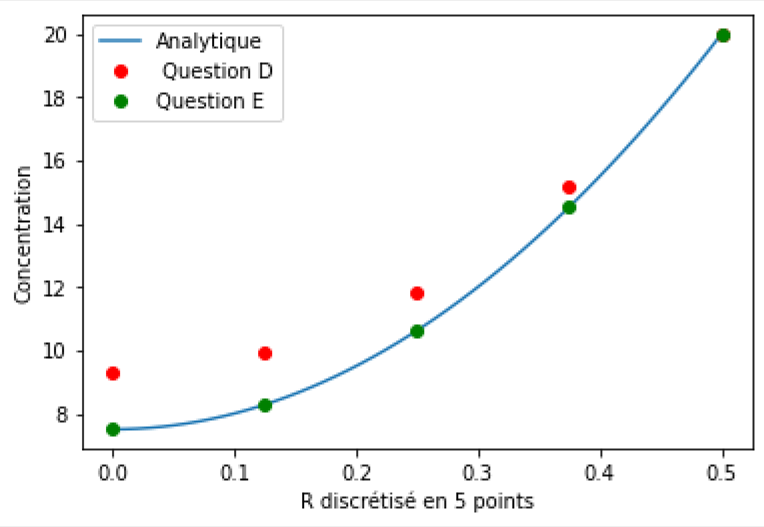
- C) Erreur de troncature

Pour cette méthode, l'erreur de troncature sera d'ordre 1 en raison de l'approximation de la dérivée avec la méthode d'Euler avant, qui est le minimum d'ordre de troncature sur les schémas utilisés

D) Résultat du code d’ordre 1

- A) Profil à l’état stationnaire

Avec notre maillage à 5 nœuds on obtient le profil rouge, qui est d'ordre 1



- B) Vérification de code

Erreur de discrétisation= $L_1(h=\frac{R}{4})$ =5.3125

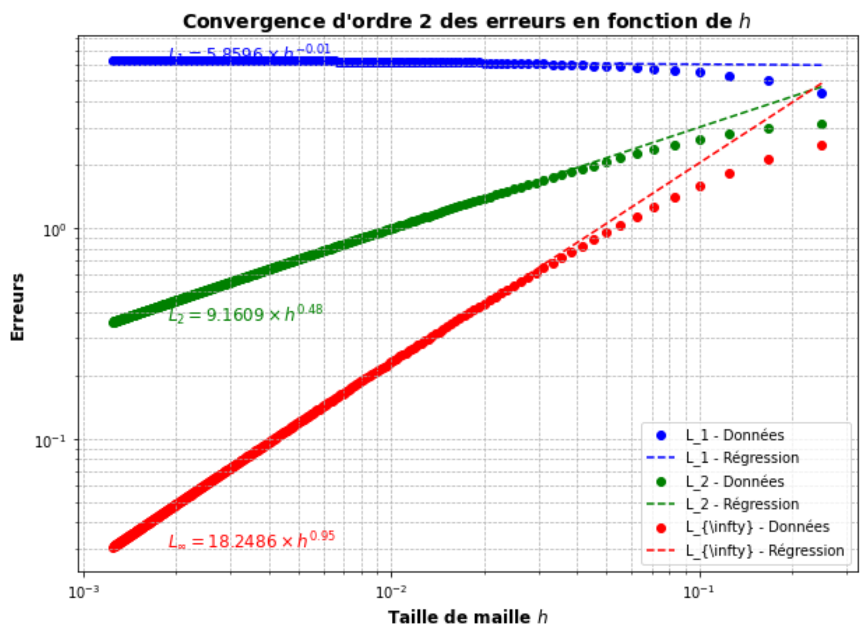
Analyse de convergence de la discrétisation:

Ordre de convergence formel =1

Ordre de convergence observé pour L1=0

Ordre de convergence observé pour L2=0.48

Ordre de convergence observé pour Linf =0.95



E) Résultat du code d'ordre 2

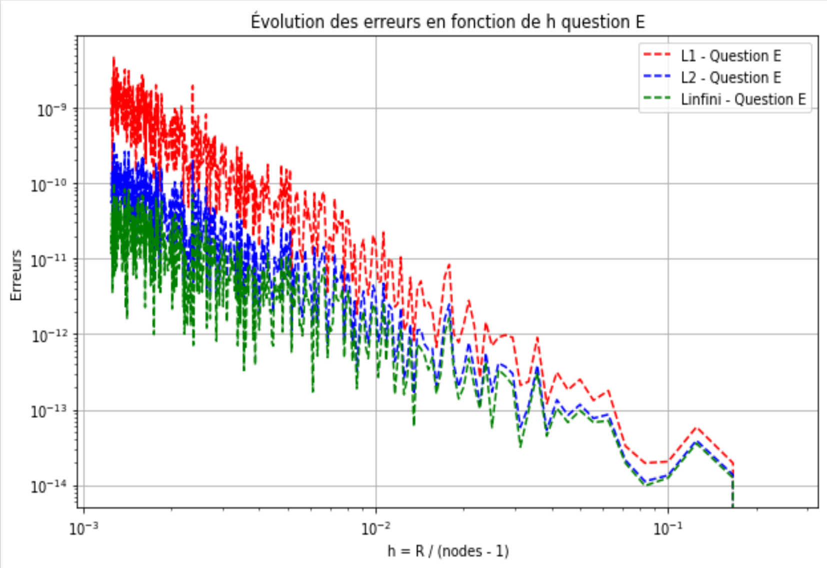
- A) Erreur de troncature

L'ordre de convergence attendue est de 2, car 2 est le minimum des ordres de précison des différences finies utilisées

- B) Vérification de code

  Erreur de discrétisation= $L_1(h = \frac{R}{4})$=5.86e-14

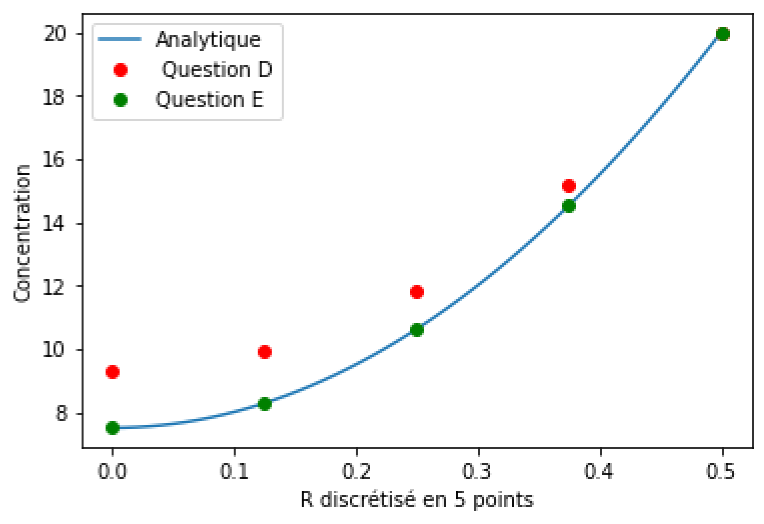
  On obtient en discrétisant exactement la solution analytique, la seule erreur obtenue est dû aux erreurs machines, qui expliquent la croissance de l'erreur en raffinant.



- C) Comparaison du code d'ordre 1, d'ordre 2 et de la solution analytique

E) Résultat du code d’ordre 2

- C) Comparaison du code d’ordre 1, d’ordre 2 et de la solution analytique



On constate que la discrétisation d'ordre 2 nous permet d'obtenir une solution numérique bien plus proche de la solution analytique que la discrétisation d'ordre 1.

- D) Discussion

Comme on l'a vu, la solution de la question E est bien plus précise que celle de la question D, on atteint même la solution exacte. Cela s'explique par le fait que la solution analytique est un polynôme d'ordre 2 et donc quand on discrétise avec notre schéma d'ordre 2 (Question E) on obtient la solution exacte.

De plus, comme on obtient une solution égale à la solution analytique, aux erreurs machines près, dès notre maillage à 5 nœuds, il ne sera pas utile de raffiner ce maillage et la résolution sera plus rapide que si on devait raffiner le maillage avec l'ordre 1 jusqu’à obtenir une erreur de discrétisation acceptable.

Bien que ces 2 codes soient vérifiés, le code E apparait donc comme meilleur pour résoudre le problème tel que nous l'avons modélisé.