

Devoir I: **Vérification de code**

Louis-Simon Castonguay, 2127442
Lénaïc Malherbe, 2405496
Jonathan Sandouidi, 2070966
17 février 2025

A) Simplification et établissement du problème

- A) Type de problème à l'état stationnaire

On traite un problème Elliptique car le problème est lisse et en régime permanent

- B) Choix du système de coordonnées

Au vu de la géométrie du pilier on travaille en coordonnée cylindrique, c'est-à-dire que le domaine établi selon les coordonnées r , θ et z

- C) Simplification du problème

Symétrie par translation (car z infinie) et C (mol/m³) du fluide et géométrie symétrique par rapport à rotation z :

Régime stationnaire:

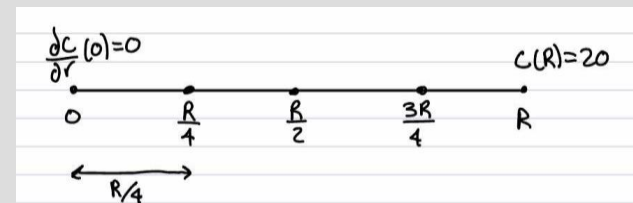
$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Laplacien simplifié en cylindrique:

$$\nabla^2 C(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d(C(r))}{dr} \right)$$

$$C(r, \theta, z) = C(r)$$

- D) Discrétisation du domaine en 5 nœuds



- E) Conditions frontières et limites

En $r=0$ condition de Neumann: $\frac{\partial C(r=0)}{\partial r} = 0$ En $r=R$ condition de Dirichlet: $C(r) = C_e$

B) Résolution analytique

On résout l'équation suivante par deux intégrations successives:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d(C(r))}{dr} \right) - \frac{S}{Deff} = 0$$

On détermine les 2 constantes d'intégrations en utilisant les conditions frontières :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) - \frac{S}{D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) = \frac{rS}{D}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) dr = \int \left(\frac{rS}{D} \right) dr$$

$$\Rightarrow r \frac{dC}{dr} = \frac{r^2 S}{2D} + C_1$$

$$\left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dr} = \frac{rS}{2D}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dC}{dr} dr = \int \frac{rS}{2D} dr$$

$$\Rightarrow C(r) = \frac{r^2 S}{4D} + C_2$$

$$C(r) = \frac{r^2 S}{4D} + C_2$$

$$C(r=R) = C_e$$

$$\Rightarrow \frac{R^2 S}{4D} + C_2 = C_e$$

$$\Rightarrow C_2 = C_e - \frac{R^2 S}{4D}$$

$$\Rightarrow C(r) = \frac{r^2 S}{4D} - \frac{R^2 S}{4D} + C_e$$

$$C(r) = \frac{S}{4 Deff} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) + C_e$$

C) Discrétisation d'ordre I

■ A) Équation en chacun des nœuds

On discrétise l'équation différentielle en utilisant les schémas suivants:

Notre équation devient alors :

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_i = \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta r} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right|_i = \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta r^2}$$

■ B) Procédure générale de résolution pour 5 nœuds

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta r^2} & -\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta r^2} & -\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta r^2} & -\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} & \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{S}{D_{eff}} \\ \frac{S}{D_{eff}} \\ \frac{S}{D_{eff}} \\ 20 \end{bmatrix}$$

Cette méthode fonctionne peut importe le nombre de nœuds. Il suffit d'ajouter des lignes au centre des matrices. La première et dernière ligne reste les mêmes puisqu'elles permettent de résoudre pour les conditions frontières.

■ C) Erreur de troncature

Pour cette méthode, l'erreur de troncature sera d'ordre I en raison de l'approximation de la dérivée avec la méthode d'Euler avant, qui est le minimum d'ordre de troncature sur les schémas utilisés

D) Résultat du code d'ordre 1

■ A) Profil à l'état stationnaire

Avec notre maillage à 5 nœuds on obtient le profil rouge, qui est d'ordre 1

■ B) Vérification de code

$$\text{Erreur de discrétisation} = L_1(h = \frac{R}{4}) = 5.3125$$

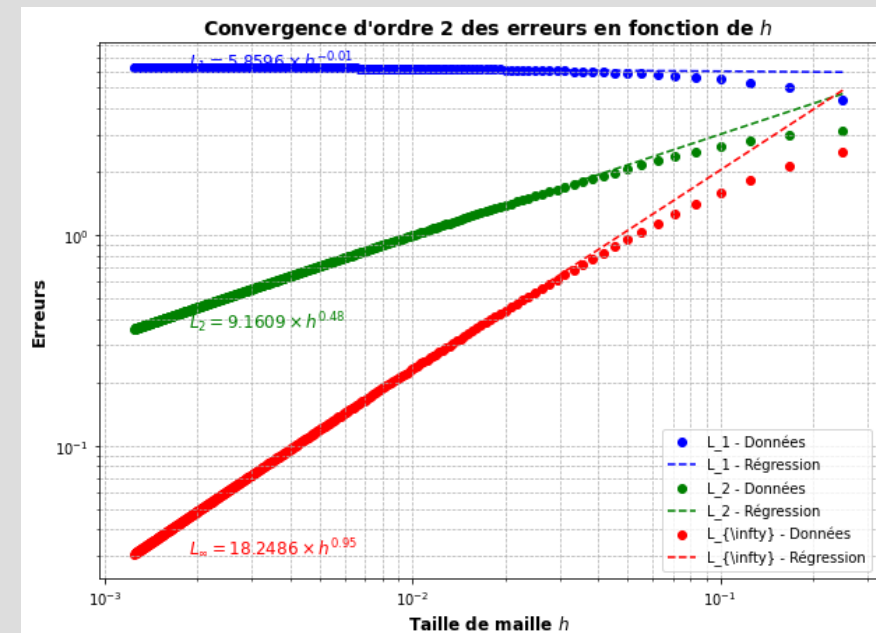
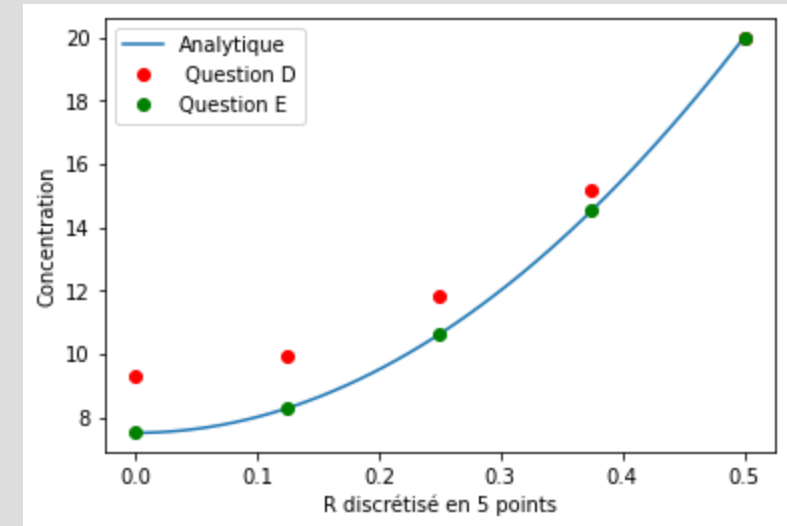
Analyse de convergence de la discrétisation:

Ordre de convergence formel = 1

Ordre de convergence observé pour $L_1=0$

Ordre de convergence observé pour $L_2=0.48$

Ordre de convergence observé pour $L_{\infty}=0.95$



E) Résultat du code d'ordre 2

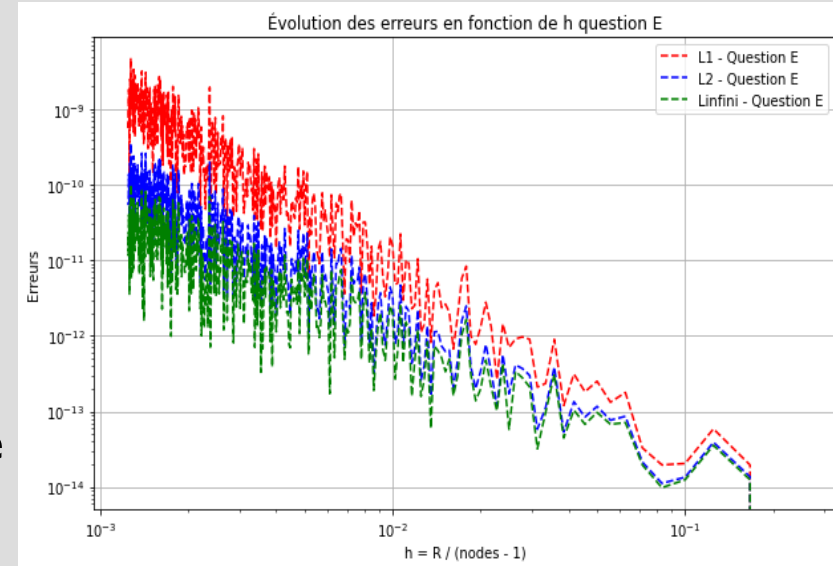
- A) Erreur de troncature

L'ordre de convergence attendue est de 2, car 2 est le minimum des ordres de précision des différences finies utilisées

- B) Vérification de code

Erreur de discrétisation = $L_1(h = \frac{R}{4}) = 5.86e-14$

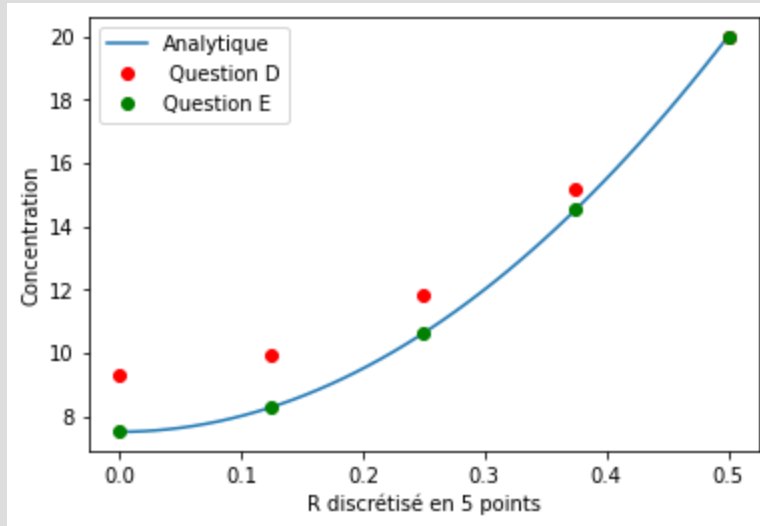
On obtient en discrétisant exactement la solution analytique, la seule erreur obtenue est dû aux erreurs machines, qui expliquent la croissance de l'erreur en raffinant.



- C) Comparaison du code d'ordre 1, d'ordre 2 et de la solution analytique

E) Résultat du code d'ordre 2

- C) Comparaison du code d'ordre 1, d'ordre 2 et de la solution analytique



On constate que les résultats de la question E se rapproche plus de la solution analytique que ceux de la question D

- D) Discussion

On constate que les résultats de la question E se rapproche plus de la solution analytique que ceux de la question D. Cela s'explique par le fait que l'ordre de convergence attendue avec le schémas de la question E ($=2$) est plus grand que celui du schémas de la question D ($=1$), ainsi l'erreur de troncature à la question E devient plus petite, d'où la meilleure proximité avec la solution analytique.