Lien du Git: https://github.com/011Jonathan/MEC8211

Devoir 2:
Vérification de code

Louis-Simon Castonguay, 2127442
Lénaïc Malherbe, 2405496
Jonathan Sandouidi, 2070966
17 février 2025

A) Modification du problème en régime instationnaire

- Équation en chacun des nœuds:
  - Nœud 0 : Condition de Neumann : $-3C_0^{t+1} + 4C_1^{t+1} - C_2^{t+1} = 0$
  - Nœud 4 : Condition de dirchlet : $C_4^{t+1} = 20$ Ou nœud final dans le code générique
  - Nœuds centraux :

$$C_i^t = C_{i-1}^{t+1}\left(\frac{-D_{eff} \times \Delta t}{\Delta r^2} + \frac{D_{eff} \times \Delta t}{2 \times \Delta r \times r_i}\right) + C_i^{t+1}\left(\frac{2 \times D_{eff} \times \Delta t}{\Delta r^2} + k \times \Delta t + 1\right) + C_{i+1}^{t+1}\left(\frac{-D_{eff} \times \Delta t}{\Delta r^2} - \frac{D_{eff} \times \Delta t}{2 \times \Delta r \times r_i}\right)$$

- Procédure générale de résolution pour 5 nœuds:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & 0 \\ 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^{t+1} \\ C_1^{t+1} \\ C_2^{t+1} \\ C_3^{t+1} \\ C_4^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_1^t \\ C_2^t \\ C_3^t \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$Avec\ A = \frac{-D_{eff} \times \Delta t}{\Delta r^2} + \frac{D_{eff} \times \Delta t}{2 \times \Delta r \times r_i}, B = \frac{2 \times D_{eff} \times \Delta t}{\Delta r^2} + k \times \Delta t + 1, C = \frac{-D_{eff} \times \Delta t}{\Delta r^2} - \frac{D_{eff} \times \Delta t}{2 \times \Delta r \times r_i}$$

Pour trouver la concentration au temps suivant, il suffit de résoudre ce système. Il est nécessaire de commencer en supposant une valeur initiale nulle de la concentration au temps t = 0, car la réaction de diffusion n’a pas encore commencé. Cette méthode fonctionne peut importe le nombre de nœuds. Il suffit d’ajouter des lignes au centre des matrices. La première et dernière ligne reste les mêmes puisqu’elles permettent de résoudre pour les conditions frontières.

B) Solution manufacturée et conditions frontières

Conditions pour la MMS:

$\frac{\partial C}{\partial r}(t,0) = \text{constante}$

$C(t,R) = \text{constante}$

$C(0,r) = f(r)$

$C(t,r) \geq 0 \quad \forall r \in [0,R]$ et $\forall t \geq 0$ pour respecter la physique du problème

Prenons $\hat{C}(r,t) = (R^2 - r^2)\dfrac{1}{1+10^{-8}t} + 1$, avec 10^{-8} pour atténuer l'impact de t

$$\frac{\partial \hat{C}(t,0)}{\partial r} = -2r \cdot \frac{1}{1+10^{-8}t}\Bigg|_{r=0} = 0$$

$$\boxed{\hat{C}(t,R) = 1}$$

$$\boxed{\hat{C}(0,r) = (R^2 - r^2) + 1 = f(r)}$$

$R^2 \geq r^2 \quad \forall r \in [0,R] \Rightarrow (R^2 - r^2) \geq 0 \; ; \; \dfrac{1}{1+10^{-8}t} > 0 \; \forall t > 0$

$$\Rightarrow \hat{C}(r,t) \geq 0 \quad \forall r \in [0,R] \text{ et } \forall t \geq 0$$

B) Solution manufacturée et conditions frontières

Calcul du terme source :

Équation de base :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_{eff} \nabla^2 C - KC = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} - D_{eff} \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \cdot r\right) - KC = 0$$

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+10^{-8}t}\right)$$

$$= (R^2 - r^2) \cdot \left[-\frac{10^{-8}}{(1+10^{-8}t)^2}\right]$$

$\nabla^2 C$:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial r} = -2r \cdot \frac{1}{1+10^{-8}t}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial r^2} = -2 \cdot \frac{1}{1+10^{-8}t}$$

$$\nabla^2 \hat{C} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \hat{C}}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \cdot r\right)$$

B) Solution manufacturée et conditions frontières

$$\nabla^2 \hat{C} = \frac{-4}{1+10^{-8}t}$$

Terme source

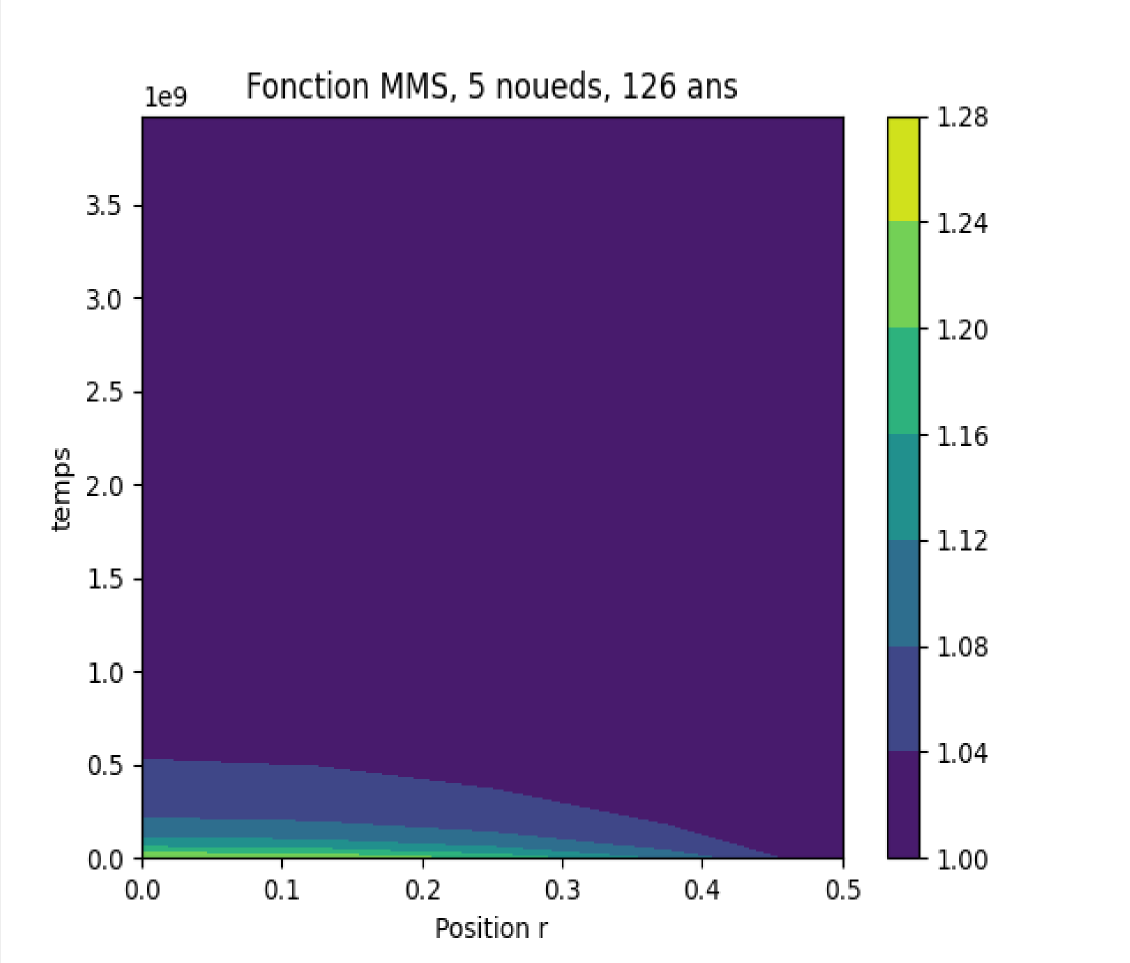
$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} = D_{eff} \nabla^2 \hat{C} + k\hat{C} + S$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\partial \hat{C}}{\partial t} - D_{eff} \nabla^2 \hat{C} - k\hat{C}$$

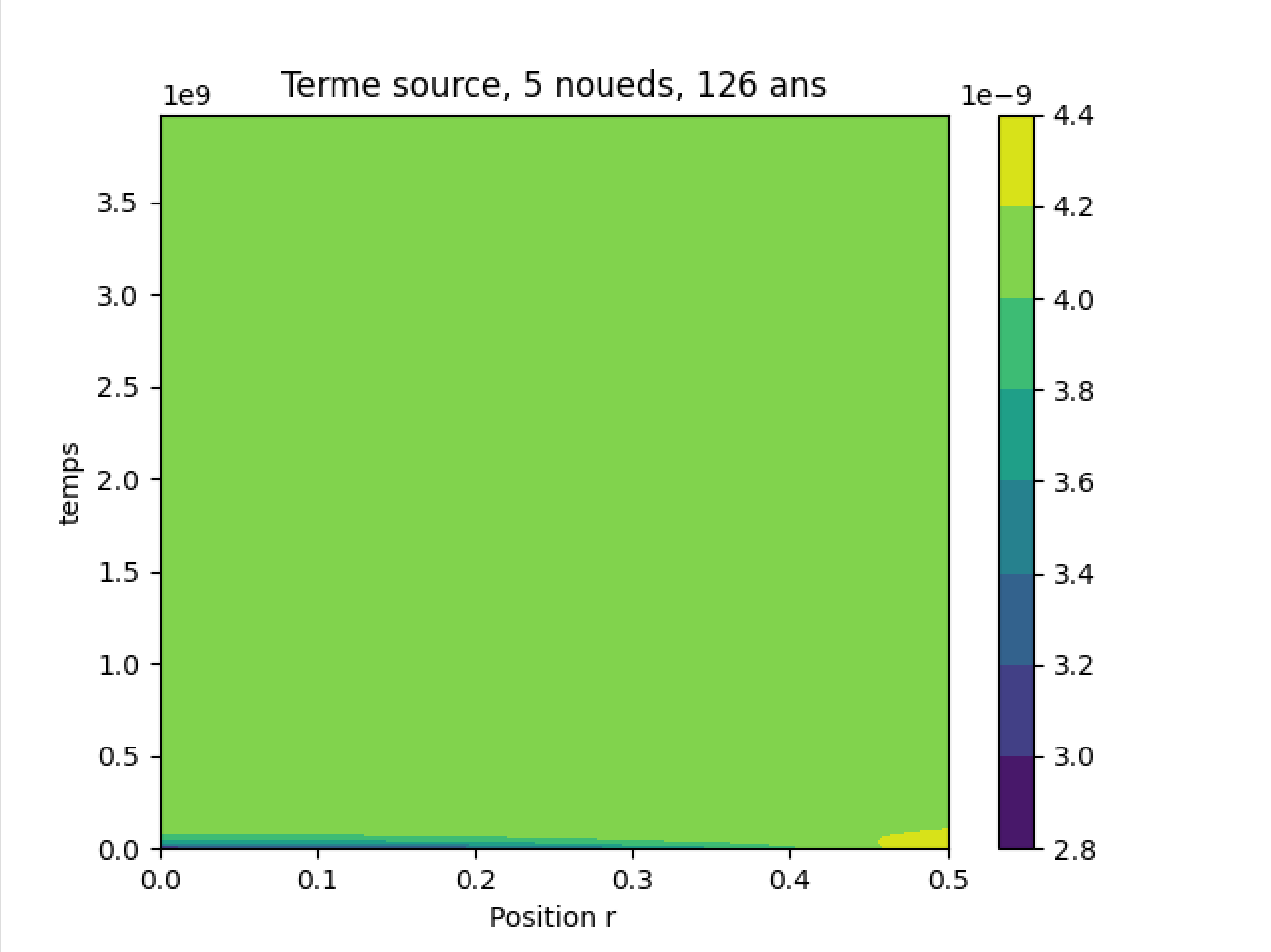
$$= \frac{-10^{-8}(R^2 - r^2)}{(1+10^{-8}t)^2} + \frac{4D_{eff}}{1+10^{-8}t} - k\left[(R^2-r^2)\frac{1}{1+10^{-8}t} + 1\right]$$

C) Terme source

Graphe de la MMS

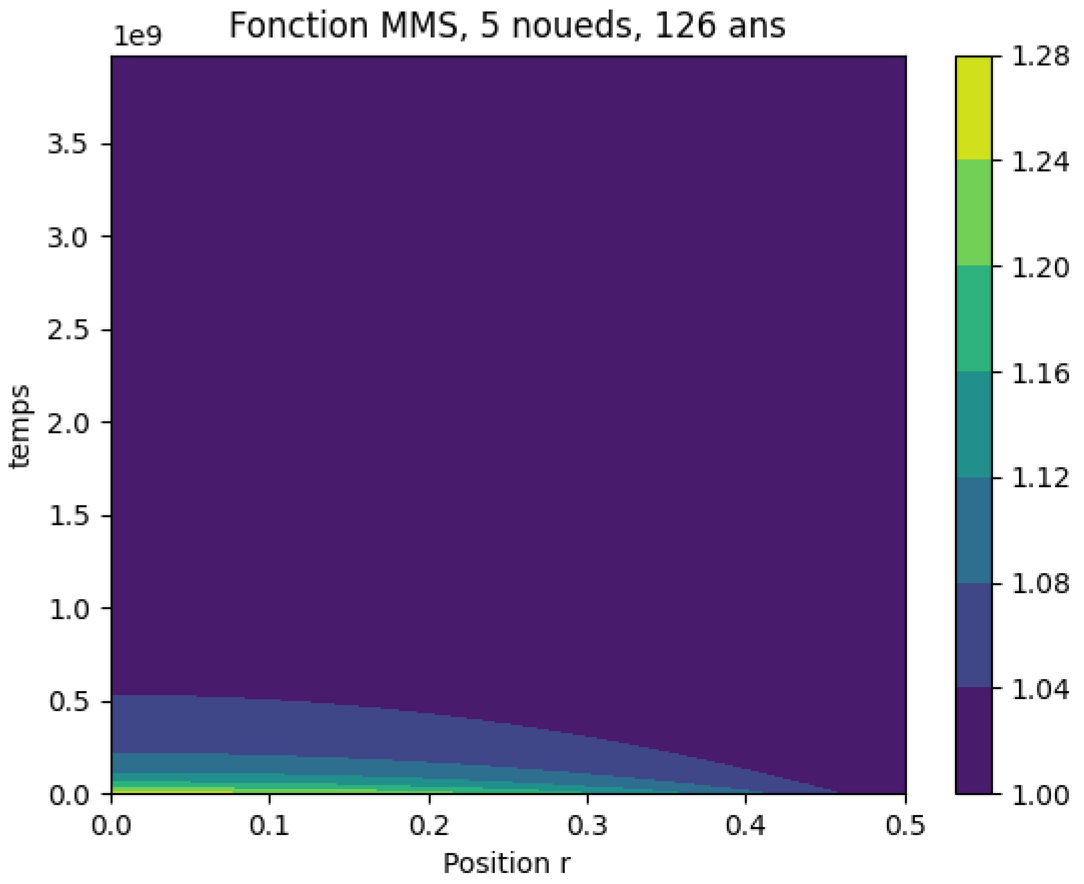


Graphe terme source

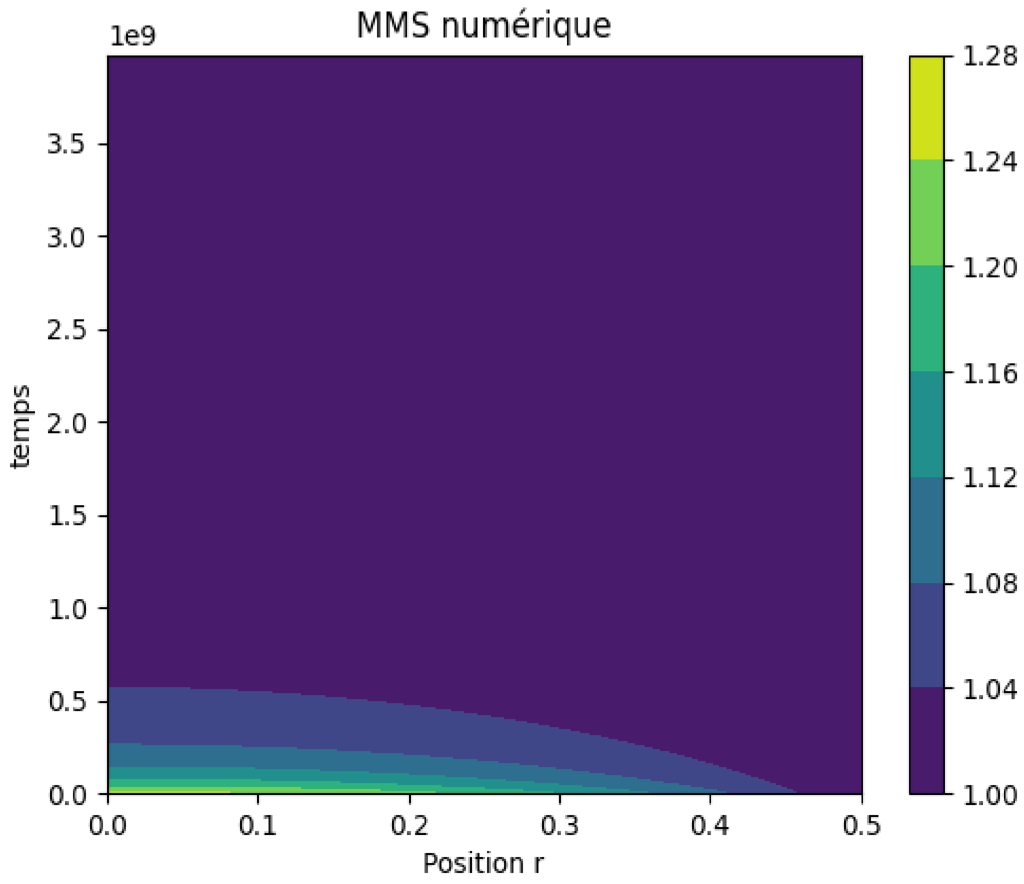


C) Comparaison MMS et Résultats matriciel avec

Graphe de la MMS



Résultats numériques

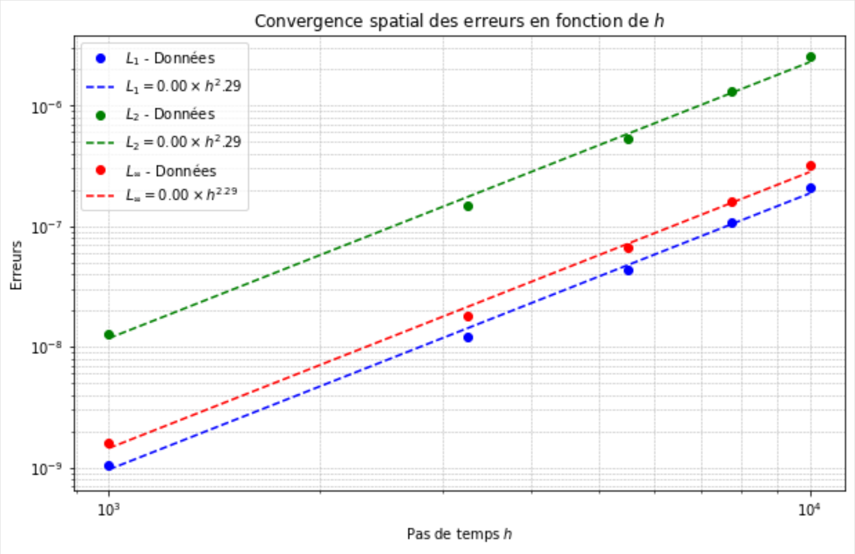


D) Analyse de convergence

- <u>Vérification en espace:</u>

on fixe Δt suffisamment petit et on raffine Δr (et donc h)

On obtient une convergence d'ordre 2.29 en espace (avec la norme L1 de l'erreur)



La partie spatiale de l'erreur de troncature obtenu par développement de Taylor autour de C(t,i+1) est :

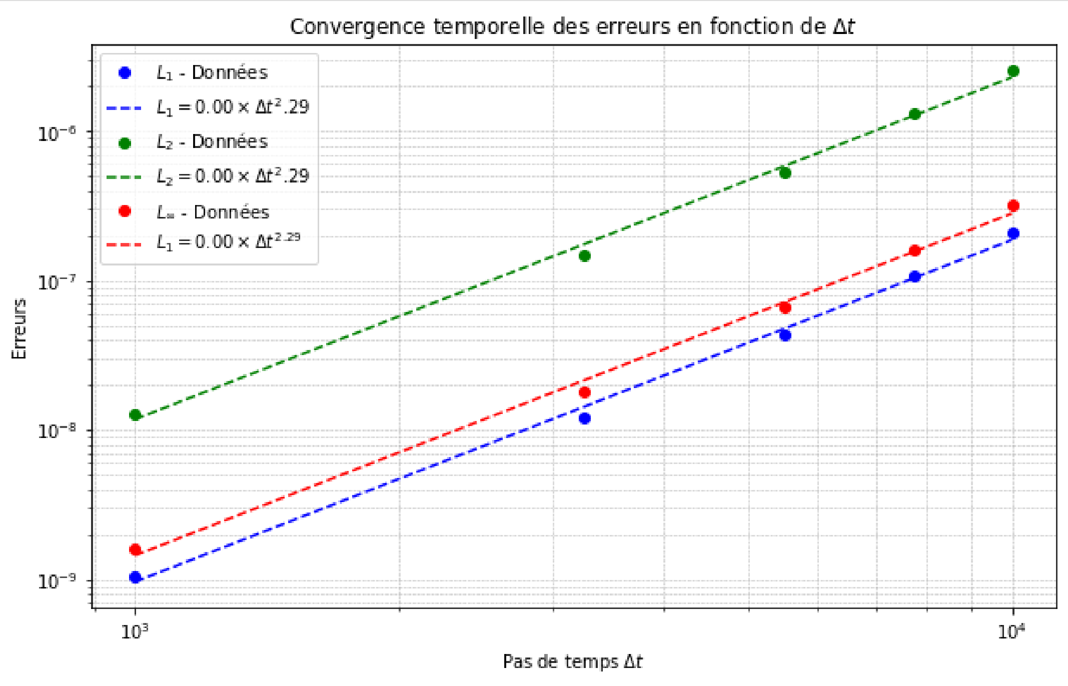
$$TE_r = \frac{\Delta r^2}{12}\frac{\partial^4 c}{\partial r^4} + O(\Delta r^4)$$

On s'attendait donc à une convergence spatiale d'ordre 2.

D) Analyse de convergence

- <u>Vérification en temps:</u>

on fixe h suffisamment fin pour l'étude de convergence en espace seulement et on raffine Δt
On obtient une convergence d'ordre en temps de de2.29 comme pour la convergence spatiale (avec la norme L1 de l'erreur)



La partie temporelle de l'erreur de troncature obtenu par développement de Taylor autour de C(t+1,i) est :

$$TE_t = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + O(\Delta t^2)$$

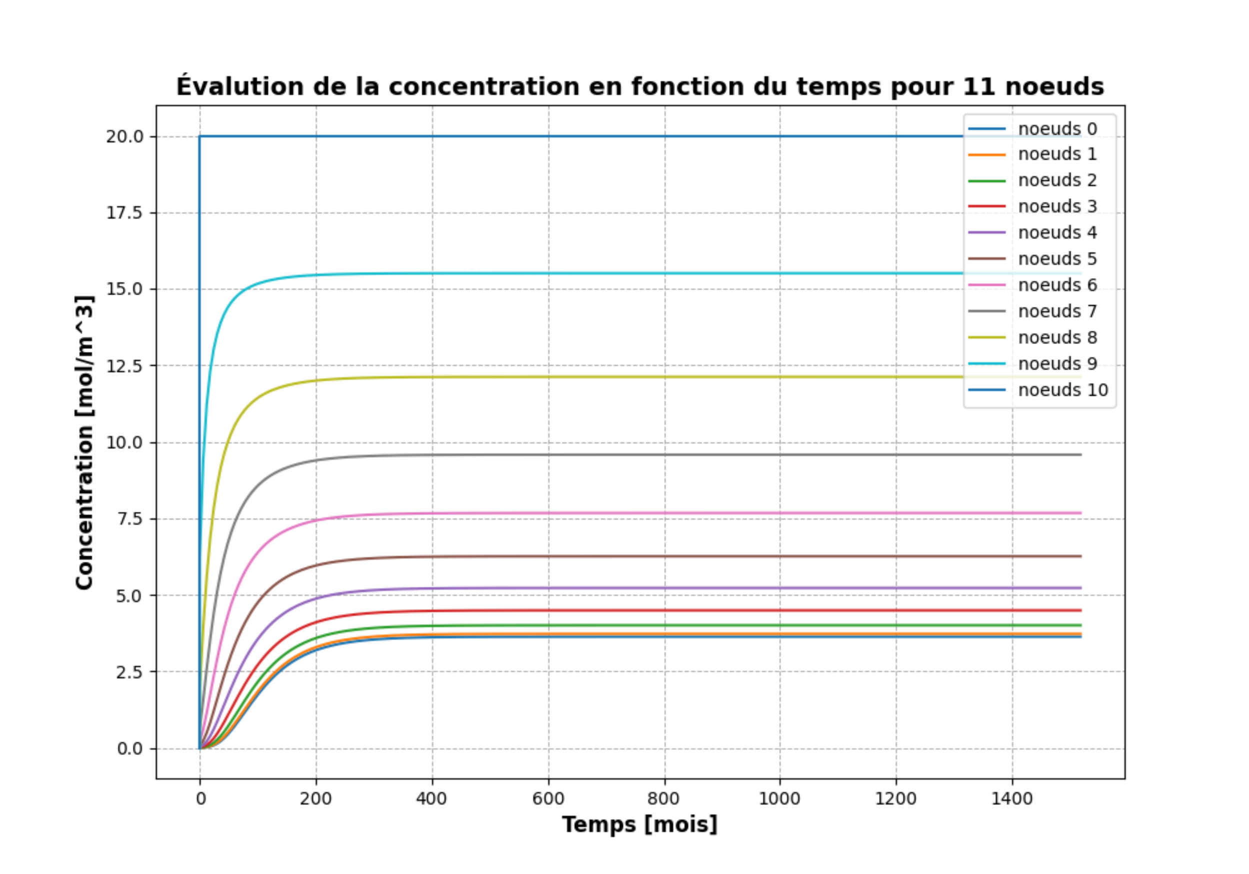
On s'attendait donc à une convergence temporelle d'ordre 1. La méthode de convergence temporelle ne semble donc pas vérifié

E) Code

- Lien du git contenant le code: https://github.com/011Jonathan/MEC8211

F) Tracé de la solution

- Solution pour un maillage de 11 nœuds et pour t de 0 à 10^9secondes. Notre code fonctionne en mois, alors le temps choisi est de 0 à 1522 mois avec un pas de temps de 6 mois. On obtient le graphique suivant



On observe que la concentration augmente lorsqu'on se rapproche de la paroi extérieure du pilier. Pour le nœud 10 (paroi extérieure) la concentration est exactement de 20 mol/m^3 comme l'indique la condition de Dirichlet