复变函数常用公式定理

1.

$$sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

2.

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

3.

$$Lnz = lnz + 2k\pi i = ln|z| + iArgz = ln|z| + iargz + 2k\pi i$$

4. 复变函数积分: 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 其中 $z = z(t), \alpha \leq z \leq \beta$, 则

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

5.Cauchy 积分公式, 若 $f(z)$ 在简单光滑或分段光滑的闭曲线 C 上及其内部解析, 则有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

6. 复合闭路定理

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$

7.(证明方法, 取 $z = z_0 + re^{i\theta}$)

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

8.Cauchy 积分公式, 设 $f(z)$ 在 C 上及其内部解析, 则有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

9. 高阶导数公式, 设 $f(z)$ 在 C 上及其内部解析, 则有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

10. 幂级数求收敛半径

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lambda \quad or \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$$

则收敛半径正数 R 满足,$R=\frac{1}{\lambda}$

11. 洛朗级数求收敛环域, 只需要分开正幂次与负幂次, 类似幂级数即可.

12. 将 $f(z)$ 在奇点 z_0 处展开成洛朗级数, 如果负幂项系数全为 0, 则 z_0 为可去奇点; 如果负幂项系数 $a_{-m-1}=a_{-m-2}=...=0$, 且 $a_{-m}\neq 0$, 则 z_0 为 m 阶极点; 如果负幂项有无穷多项, 则 z_0 为本性奇点.

13. 可去奇点处的留数为 0.

14.

$$Res[f(z),z_0]:=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

15. 本性奇点处的留数一般只能这么做

$$Res[f(z),z_0]=c_{-1}$$

16. 若 z_0 为 m 阶极点, 则

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}$$

17. 若 z_0 为一阶极点, 则

$$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

18. 若 z_0 为一阶极点, 且 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 处解析, 并且有 $P(z_0)\neq 0$ $Q(z_0)=0,Q'(z_0)\neq 0$, 则有

$$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)},\ f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

19.

$$Res[f(z),\infty]=-Res[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$$

20. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 上有有限个孤立奇点, 那么有

$$\sum Res[f(z),z_k]=0$$

由此得到求无穷远点处留数

$$Res[f(z),\infty]=-\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),z_k]$$

21. 利用留数定理求形如 $\int_0^{2\pi}R(sin\theta,cos\theta)d\theta$ 的积分, 一般可直接令 $z=e^{i\theta}$, 利用欧拉定理即可.

22. 利用留数定理求形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$ 的积分, 其中 $R(x)$ 分母比分子高至少两次, 且 $R(x)$ 分母部分在实轴上只有单根, 则有

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{Im_{z_k}>0}Res[R(x),z_k]+\pi i\sum_{k}Res[R(x),x_k]$$

当分母只比分子高一次时, 则

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{Im_{z_k}>0}Res[R(x),z_k]+\pi i(\sum_{k}Res[R(x),x_k]-\frac{a_0}{b_0})$$

23. 利用留数定理求形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx$ 的积分, 其中 $R(x)$ 分母比分子高至少一次, 且 $R(x)$ 分母部分在实轴上只有单根, $a>0$, 则有

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_{Im_{z_k}>0}Res[R(x)e^{iax},z_k]+\pi i\sum_{x_k}Res[R(x)e^{iax},x_k]$$