

Lecture 1

(Page 2) 良序定理与数学归纳法等价的证明:

(WOP \Rightarrow PMI): 设 S 为自然数的集合满足: $0 \in S, \forall k \in S, k + 1 \in S$, 下面证明 $S = \mathbb{N}$, 若不然, 考虑集合 $A = \{k \in \mathbb{N} : k \notin S\}$, 由 WOP, A 中有最小元, 不妨记为 a , 由于 $0 \in S$, 故 $a \geq 1$, 故 $a - 1 \in S$, 这与 $\forall k \in S, k + 1 \in S$ 矛盾, 故 $S = \mathbb{N}$.

(PMI \Rightarrow WOP): 设 S 是 \mathbb{N} 的子集且没有最小元, 记命题 $p(n)$ 为 S 中没有从 0 到 $n-1$ 的任何数, 则 $p(1)$ 成立 (否则 S 有最小元), 假设 $p(n)$ 是成立的, 那么 $p(n+1)$ 成立, 否则 n 为 S 中的最小元, 由 PMI, $p(n)$ 对于任意的正整数 n 都成立, 故 S 是空集.

(Page 3) Theorem 2 的一个常用推论:

对于给定的 $a, b \in \mathbb{Z}$, 如果存在 $x, y \in \mathbb{Z}$ 使得 $ax + by = 1$, 则 a, b 是互素的.