

# 数字水印算法的数学推导与表示

## 1 离散余弦变换 (DCT) 水印算法

### 1.1 DCT 变换定义

对于  $M \times N$  的图像  $f(x, y)$ , 其二维 DCT 变换  $F(u, v)$  定义为:

$$F(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \right] \cos \left[ \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right] \quad (1)$$

其中归一化系数:

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{M}}, & u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}}, & 1 \leq u \leq M-1 \end{cases}, \quad \alpha(v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & v = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 1 \leq v \leq N-1 \end{cases} \quad (2)$$

### 1.2 水印嵌入过程

设宿主图像为  $I$ , 水印图像为  $W$ , 嵌入强度为  $\alpha$ :

$$I_w = \text{IDCT}(\text{DCT}(I) + \alpha \cdot W_{\text{resized}}) \quad (3)$$

具体步骤:

1. 将图像转换到 YUV 空间, 提取亮度分量  $I_Y$
2. 对  $I_Y$  进行 DCT 变换得到  $F_I$
3. 调整水印大小并归一化:  $W' = \text{resize}(W)/255$

4. 在中频区域嵌入水印:

$$F'_I(u, v) = \begin{cases} F_I(u, v) + \alpha W'(u, v), & \text{如果}(u, v) \in \text{中频区域} \\ F_I(u, v), & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

5. 对修改后的系数进行逆 DCT 变换

### 1.3 水印提取过程

$$W_{\text{extracted}} = \frac{\text{DCT}(I_w) - \text{DCT}(I)}{\alpha} \quad (5)$$

## 2 最低有效位 (LSB) 水印算法

### 2.1 嵌入原理

对于 8 位图像, 每个像素值  $p$  可以表示为:

$$p = \sum_{k=0}^7 b_k \cdot 2^k \quad (6)$$

LSB 方法将水印信息嵌入到最低位  $b_0$ :

$$p' = (p \text{ AND } 0\text{xFE}) \text{ OR } w \quad (7)$$

其中  $w \in \{0, 1\}$  为水印位。

### 2.2 嵌入过程数学表示

设宿主图像为  $I$ , 二值水印为  $W$ :

$$I_w(x, y, c) = \begin{cases} I(x, y, c) - 1, & \text{如果} LSB(I(x, y, c)) = 1 \text{ 且 } W(x, y) = 0 \\ I(x, y, c) + 1, & \text{如果} LSB(I(x, y, c)) = 0 \text{ 且 } W(x, y) = 1 \\ I(x, y, c), & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $c \in \{R, G, B\}$  表示颜色通道。

## 2.3 提取过程

$$W_{\text{extracted}}(x, y) = LSB(I_w(x, y, 0)) \quad (9)$$

# 3 鲁棒性分析

## 3.1 攻击模型

常见攻击操作及其数学表示：

表 1: 图像攻击操作数学表示

攻击类型	数学表示
旋转	$I'(x, y) = I(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$
缩放	$I'(x, y) = I(x/s, y/s)$
裁剪	$I' = I[x_1 : x_2, y_1 : y_2]$
对比度调整	$I' = \alpha I + \beta$
高斯噪声	$I' = I + \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
JPEG 压缩	$I' = \text{DCT}^{-1}(\text{quantize}(\text{DCT}(I), Q))$

## 3.2 鲁棒性度量

使用归一化相关系数 (NC) 评估提取水印质量：

$$NC(W, W') = \frac{\sum_i \sum_j W(i, j) W'(i, j)}{\sqrt{\sum_i \sum_j W^2(i, j)} \sqrt{\sum_i \sum_j W'^2(i, j)}} \quad (10)$$

峰值信噪比 (PSNR) 评估图像质量：

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{MAX_I^2}{MSE} \right) \quad (11)$$

其中  $MAX_I$  为像素最大值 (通常为 255)，MSE 为均方误差：

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [I(i, j) - I'(i, j)]^2 \quad (12)$$