模型预测控制(MPC)算法简介

模型预测控制在实现的过程中有三个关键的步骤。分别是预测模型、滚动优化和反馈校正。

1、 预测模型

首先，建立包含道路误差跟踪的状态空间方程：

连续的状态空间方程简单记为，

$$\dot{x} = Ax + Bu + C$$

其中，$x = \begin{bmatrix} e_d \\ \dot{e}_d \\ e_\theta \\ \dot{e}_\theta \\ e_s \\ \dot{e}_s \end{bmatrix}$ ，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(c_f + c_r)}{mv_x} & \frac{c_f + c_r}{m} & \frac{l_f c_f - l_f c_f}{mv_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_r c_r - l_f c_f}{I_z v_x} & \frac{l_f c_f - l_r c_r}{I_z} & \frac{-(l_f^2 c_f + l_r^2 c_r)}{I_z v_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{c_f}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_f c_f}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，$u = \begin{bmatrix} \delta \\ a \end{bmatrix}$ ，$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_r c_r - l_f c_f}{mv_x} - v_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-(l_r^2 c_r + l_f^2 c_f)}{I_z v_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ a_{ref} \end{bmatrix}$,

$$\dot{\gamma} = \frac{v_x}{R_x} = v_x \bullet curvature$$

离散化后记为，

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + C_d$$

如果系统的预测时域为 N，控制时域同样为 N， 则系统未来时刻内的状态以矩阵形式可以表示为，

$$X(N) = \Psi X(k) + \Theta U(N) + \mathrm{H} \tag{1.1}$$

其中，$X\left(N\right)=\begin{bmatrix} x\left(k+1\right) \\ x\left(k+2\right) \\ x\left(k+3\right) \\ \cdots \\ x\left(k+N\right) \end{bmatrix}$ ，$\Psi=\begin{bmatrix} A_d \\ A_d^2 \\ A_d^3 \\ \cdots \\ A_d^N \end{bmatrix}$，

$$\Theta=\begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_d B_d & B_d & 0 & \cdots & 0 \\ A_d^2 B_d & A_d B_d & B_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_d^{N-1} B_d & A_d^{N-2} B_d & A_d^{N-3} B_d & \cdots & B_d \end{bmatrix}，\mathrm{H}=\begin{bmatrix} C_d \\ A_d C_d + C_d \\ A_d^2 C_d + A_d C_d + C_d \\ \cdots \\ A_d^{N-1} C_d + A_d^{N-2} C_d + \cdots + C_d \end{bmatrix}，$$

$$U\left(N\right)=\begin{bmatrix} u\left(k\right) \\ u\left(k+1\right) \\ u\left(k+2\right) \\ \cdots \\ u\left(k+N-1\right) \end{bmatrix}$$

2、 优化求解：

优化目标函数可以设为以下形式，

$$J=\sum_{i=1}^{N}\left\|x\left(i+1\right)-x_{ref}\left(i+1\right)\right\|_Q+\sum_{i=1}^{N-1}\left\|u\left(i+1\right)\right\|_R^2 \tag{2.1}$$

其中，第一项反映了车辆在运动过程中对道路误差的跟随能力，第二项表示为对控制量平稳变化的要求。Q 和 R 是权重矩阵，同时需要满足系统状态量和控制量的一些约束条件，如下：

控制量约束:

$$u_{\min}\left(k+i\right)\le u\left(k+i\right)\le u_{\max}\left(k+i\right),\quad i=0,1,\cdots,N-1.$$

将式（1.1）带入优化目标（2.1）中，经过相应的计算，可以将优化目标调整为，

$$J=U\left(N\right)^T\Phi U\left(N\right)+2U\left(N\right)^T G$$

其中，$\Phi=\Theta^T Q\Theta+R$，$G=\Theta^T Q\mathrm{E}$， $\mathrm{E}=\Psi X\left(K\right)+H-X_{ref}\left(N\right)$。

因此，模型预测控制在每一步的带约束优化求解问题都等价于求解如下的二次规划问题，

$$\begin{aligned} &\min J=U\left(N\right)^T\Phi U\left(N\right)+2U\left(N\right)^T G \\ &s.t.\ \ U_{\min}\left(N\right)\le U\left(N\right)\le U_{\max}\left(N\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

3、 反馈机制：

在每个控制周期内完成对式（2.2）的求解后，得到了控制时域内的一组控制输入量：

$$U_N^* = \left[u_k^*,\ u_{k+1}^*,\ u_{k+2}^*,\ \cdots,\ u_{k+n-1}^*\right]^T$$

根据模型预测控制的基本原理，将该控制序列中的第一个元素作为实际的控制输入作用于系统中，系统执行这一控制量直到下一时刻。在新的时刻，系统会根据状态信息重新预测下一时域内的状态，通过优化过程的到一个新的控制输入序列。如此循环往复，直到系统完成全部的控制过程。

其中控制输入包含横向控制的前轮转角和纵向控制的加速度 acc 两个部分。

模型预测控制与 PID 控制：

PID 控制：根据系统当前和过去的状态和给定值得偏差来确定当前的控制输入。

模型预测控制：不仅利用了当前和过去的偏差值，而且还利用预测模型来预测系统未来的偏差值。以滚动优化确定当前的最优控制策略，使未来一段时间内被控变量与期望值得偏差最小。

Further_study:

1、 采用控制量作为目标函数中的状态量，结构简单，易于实现；但是有一些确定，比如说没法对控制量进行精确约束。所以可以考虑把控制增量作为目标函数的状态量，此时，式（1.1）可以写作：

$$X(N) = \Psi X(k) + \Theta \Delta U(N) + \mathrm{H}$$

$$X(N) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \\ x(k+3) \\ \cdots \\ x(k+N) \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} A_d \\ A_d^2 \\ A_d^3 \\ \cdots \\ A_d^N \end{bmatrix}, \quad \Delta U(N) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \cdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_d B_d + B_d & B_d & 0 & \cdots & 0 \\ A_d^2 B_d + A_d B_d + B_d & A_d B_d + B_d & B_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_d^{N-1} B_d + \cdots + B_d & \cdots & & & B_d \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} C_d \\ A_d C_d + C_d \\ A_d^2 C_d + A_d C_d + C_d \\ \cdots \\ A_d^{N-1} C_d + A_d^{N-2} C_d + \cdots + C_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ A_d B_d + B_d \\ A_d^2 B_d + A_d B_d + B_d \\ \cdots \\ A_d^{N-1} B_d + \cdots + B_d \end{bmatrix} \bullet u(k-1)$$

同样，模型预测控制在每一步的带约束优化求解问题都等价于求解如下的二次规划问题，

$$
\begin{aligned}
&\min J = \Delta U(N)^T \Phi \Delta U(N) + 2\Delta U(N)^T G \\
&s.t.\ \ U_{\min}(N) \le U(k-1) + \Lambda \Delta U(N) \le U_{\max}(N)
\end{aligned}
$$

$$
S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} S\ 0\ 0 \cdots 0 \\ S\ S\ 0 \cdots 0 \\ S\ S\ S \cdots 0 \\ \vdots \\ S\ S\ S \cdots S \end{bmatrix}_{2N\times 2N}, U(k-1) = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}
$$

2、反馈校正

在时刻k，将$u(k)$作用到被控对象，与输入一个幅值为$\Delta u(k)$的阶跃效果一致，则由式 5.1 可得在$u(k)$作用下，未来的输出预测值为：

$$
\tilde{\boldsymbol{y}}_{N1}(k) = \tilde{\boldsymbol{y}}_{N0}(k) + \boldsymbol{a}\Delta u(k) \tag{5.11}
$$

由于存在扰动和模型失配等原因，上式计算得到的输出预测值可能与实际值存在偏差，因此需要采用反馈校正机制，不然随着控制作用的继续会造成预测值与实际值的偏差越来越大。为了防止这种情况的发生，在时刻k+1计算控制量之前，首先计算实际输出$y(k+1)$与预测输出$\tilde{y}_1(k+1|k)$之间的输出误差：

$$
e(k+1) = y(k+1) - \tilde{y}_1(k+1|k) \tag{5.12}
$$

可将此误差作为未来的输出误差，以弥补模型预测误差，可以采用对$e(k+1)$的加权来对未来预测输出值进行修正：

$$
\tilde{\boldsymbol{y}}_{cor}(k+1) = \tilde{\boldsymbol{y}}_{N1}(k) + \boldsymbol{h}e(k+1) \tag{5.13}
$$

上式中，

$$
\tilde{\boldsymbol{y}}_{cor}(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{cor}(k+1|k+1) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{cor}(k+N|k+1) \end{bmatrix}
$$

为校正后的预测输出值，$\boldsymbol{h} = [h_1 \cdots h_N]^T$为校正向量。

在时刻k+1时刻，由于时间基点的变动，预测的未来时间点也将移动到$k+2, k+3, \cdots, k+1+N$，$\tilde{\boldsymbol{y}}_{cor}(k+1)$的元素还需要通过移位才能成为$k+1$时刻的初始预测值：

$$
\tilde{\boldsymbol{y}}_0(k+1+i|k+1) = \tilde{\boldsymbol{y}}_{cor}(k+1+i|k+1), i = 1, \cdots, N-1 \tag{5.14}
$$

由于在时刻k的预测中没有$\tilde{\boldsymbol{y}}_0(k+1+N|k+1)$，可用$\tilde{\boldsymbol{y}}_{cor}(k+N|k+1)$近似代替，则：

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{N0}(k+1)=\boldsymbol{F}\,\tilde{\boldsymbol{y}}_{cor}(k+1) \tag{5.15}$$

上式中，$\boldsymbol{F}$ 为移位矩阵，可表示为：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$