Técnicas de Concepção de Algoritmos (1ª parte): algoritmos de retrocesso

R. Rossetti, A.P. Rocha
CAL, MIEIC, FEUP
Março de 2016

Para pensar...

- "Theory is when you know something, but it doesn't work.
  Practice is when something works, but you don't know why.
  Programmers combine theory and practice: Nothing works and they don't know why."

(unknown)

3

Algoritmos de retrocesso (*backtracking*)

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

4

Algoritmos de retrocesso

- Um dado **problema** tem um conjunto de restrições e possivelmente uma função objectivo
- Uma **solução** optimiza a função objectivo e/ou a satisfaz
- Pode-se representar o espaço de solução para o problema utilizando-se uma árvore de espaço de estados
  - A raiz da árvore representa 0 escolhas
  - Nós ao nível 1 representam primeira escolha
  - Nós ao nível 2 representam segunda escolha, etc…
- O caminho da raiz a uma folha representa uma solução candidata

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

5

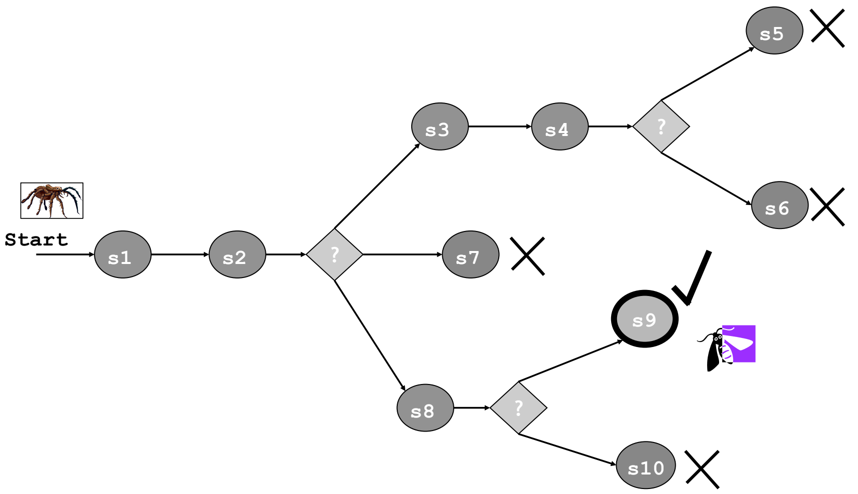
Algoritmos de retrocesso

- Algoritmos de *tentativa e erro*
- Contexto geral de aplicação:
  - Explorar um *espaço de estados* à procura dum *estado-objectivo*
  - Estado = estado de jogo, sub-problema a resolver, posição, etc.
  - Sem algoritmos eficientes que levem directamente ao objectivo
- Estratégia:
  - Ao chegar a um *ponto de escolha* (c/ vários estados seguintes), escolher uma das opções e prosseguir a exploração
  - Chegando a um "beco sem saída", *retroceder* até ao ponto de escolha + próximo c/alternativas p/explorar, e tentar outra alt.
- Exemplos:
  - Problema do troco quando há falta de stock de algumas moedas
  - Sudoku, 8 rainhas, *puzzles* em geral.

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

6

Ilustração



Complicações: ciclos, caminhos paralelos

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

7

Implementação recursiva

- Implementado normalmente de forma recursiva
  - avanço corresponde a uma chamada recursiva
  - retrocesso corresponde ao retorno de chamadas recursivas

Explore state/node N:
1. if N is a goal state/node, return "success"
2. (optional) if N is a leaf state/node, return "failure"
3. for each successor/child C of N,
   3.1. (if appropriate) set new state
   3.2. Explore state/node C
   3.3. if exploration was successful, return "success"
   3.4 (if step 3.1 was performed) restore previous state
4. return "failure"

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

8

Ex. Soma de subconjuntos

- Problema: dados *n* positivos inteiros $w_1, \ldots, w_n$ e um inteiro positivo S, encontrar todos os subconjuntos de $w_1, \ldots, w_n$ cuja soma é *S*
- Exemplo: n = 3, S = 6, W = {2, 4, 6}
- Solução:
  - {2, 4}
  - {6}

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

9

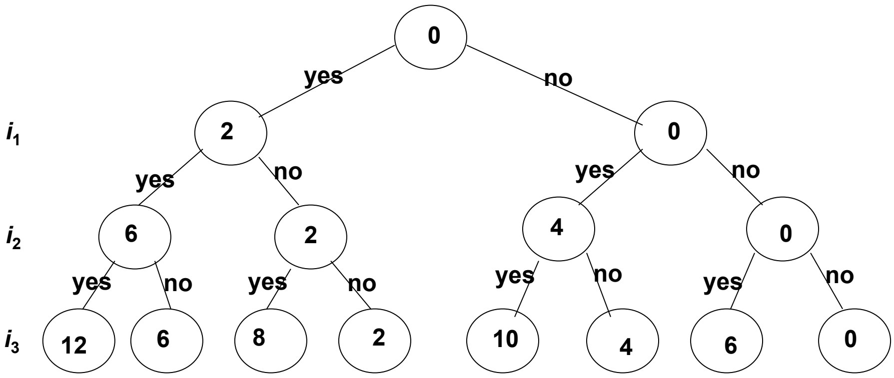
Ex. Soma de subconjuntos

- Para este caso, assume-se uma árvore binária para o espaço de estados
- Nós ao nível 1 representam incluir (sim ou não) o item 1, nós ao nível 2 representam incluir item 2, etc…
- O ramo esquerdo da árvore inclui w1 enquanto o ramo direito da árvore exclui w1
- Os nós contêm as somas dos pesos incluídos até então!

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

10

Problema: soma de subconjuntos
Árvore de espaço de estados para 3 itens
$w_1 = 2$, $w_2 = 4$, $w_3 = 6$ e $S = 6$



A soma dos inteiros incluídos é guardada nos nós!

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

Ex. Soma de subconjuntos

- Problemas como este podem ser resolvidos realizando-se uma pesquisa/busca em profundidade
- Cada nó guardará o seu nível (profundidade) e a sua solução (possivelmente parcial) corrente
- Uma busca em profundidade pode verificar se um nó v é uma folha:
  - Se v é uma folha, então verifica-se se a solução corrente satisfaz as restrições do problema
  - Extensões a este método podem ser implementadas a fim de se encontrar um solução óptima

Ex. Soma de subconjuntos

- Uma estratégia baseada unicamente em busca/pesquisa em profundidade pode representar uma alternativa muito cara em termos de tempo de processamento!
- Neste caso, não se verifica para todo estado solução (nó) quando a solução foi alcançada, ou mesmo se uma solução parcial poderá levar a uma solução satisfatória
- Questão: é possível desenvolver uma alternativa mais eficiente?

13

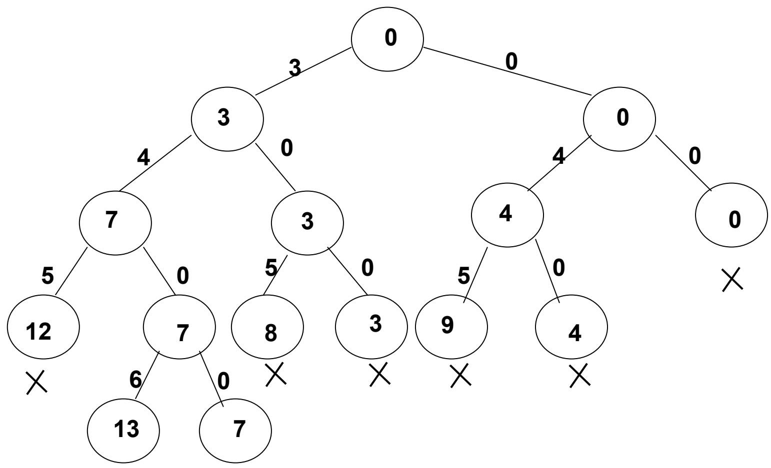
Estratégia de Retrocesso

- Definição: chama-se a um nó "não promissor" caso este não conduza a uma solução viável (ou óptima). Caso contrário, este será tido como um nó "promissor"
- Ideia básica: retrocesso consiste em realizar uma pesquisa em profundidade na árvore de espaço de estados, verificando se um nó é promissor, e caso o nó não seja promissor, retroceder até o nó pai.
- A uma árvore de espaço de estados que contém apenas nós expandidos chama-se árvore de espaço de estados podada

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

14

Árvore podada de espaço de estados (p/ encontrar todoas as soluções)
$w_1 = 3$, $w_2 = 4$, $w_3 = 5$, $w_4 = 6$; $S = 13$



Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

15

Estratégia de Retrocesso

```
void checknode (node v) {
     node u

     if ( promising ( v ) )
        if ( aSolutionAt( v ) )
                write the solution
        else //expand the node
                for ( each child u of v )
                        checknode ( u )
}
```

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

16

Estratégia de Retrocesso

- *Checknode* usa as funções:
  - *promissing*(*v*) que verifica se a solução parcial representada pelo nó *v* poderá levar à solução desejada
  - *aSolutionAt*(*v*) que verifica se a solução parcial representada pelo nó *v* resolve o problema em questão

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

17

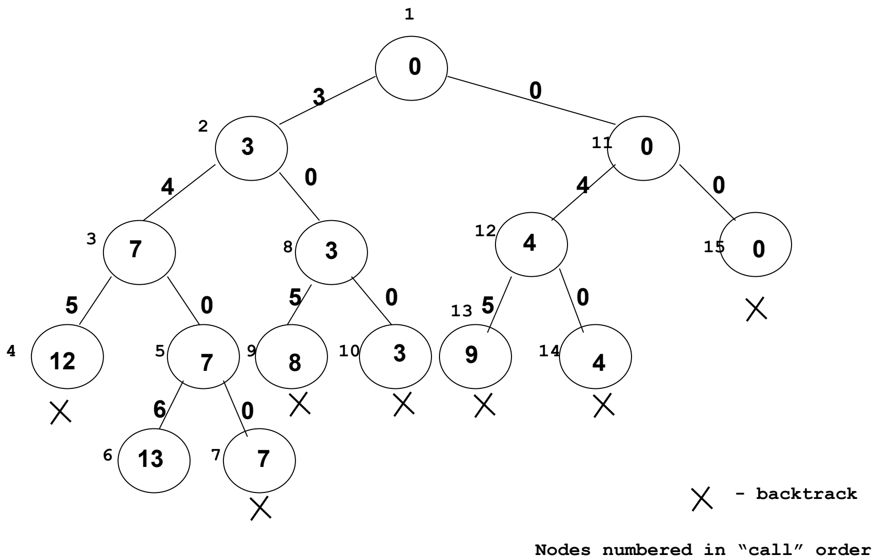
Estratégia de Retrocesso

- Quando um nó é "promissor"?
  Considere um nó ao nível *i*:
  - *weightSoFar*: peso do nó, i.e. soma dos números incluídos na solução parcial que o nó representa
  - *totalPossibleLeft*: peso dos itens remanescentes (*i* + 1 a *n*) para um nó ao nível *i*
  - Um nó ao nível *i* é "não promissor" se
    weightSoFar + totalPossibleLeft < S (ou)
    weightSoFar + w[*i* + 1] > S
  - Para se poder utilizar a função *promissing*, os elementos w_i devem estar ordenados numa ordem não decrescente!

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

18

Árvore podada de espaço de estados
$w_1 = 3$, $w_2 = 4$, $w_3 = 5$, $w_4 = 6$; $S = 13$



Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2015-2016)

```
sumOfSubsets ( i, weightSoFar, totalPossibleLeft )
    1) if (promising ( i ))                    //may lead to solution
    2) then if ( weightSoFar == S )
    3)     then print include[ 1 ] to include[ i ] //found solution
    4) else        //expand the node when weightSoFar < S
    5)     include [ i + 1 ] = "yes"              //try including
    6)     sumOfSubsets ( i + 1, weightSoFar + w[i + 1],
                                   totalPossibleLeft - w[i + 1] )
    7)     include [ i + 1 ] = "no"                     //try excluding
    8)     sumOfSubsets ( i + 1, weightSoFar ,
                                   totalPossibleLeft - w[i + 1] )

boolean promising (i )
    1) return ( weightSoFar + totalPossibleLeft ≥ S)  &&
              ( weightSoFar == S  ||  weightSoFar +  w[i + 1] ≤ S )
```

Prints all solutions!

Chamada inicial da função sumOfSubsets(0, 0, Σwi)

Problemas de optimização

- Para problemas de optimização, considera-se também:
  - *best* – valor da melhor solução encontrada até então
  - *value*(*v*) – valor da solução no nó v
  - Deve-se modificar a função *promissing*(v)
  - *best* é inicializado com um valor igual a uma solução candidata ou pior que qualquer uma solução possível
  - *best* é actualizado com *value*(v) se a solução em v é "melhor"
  - *Ser "melhor" dependerá do problema (maximização ou minimização)!*

21

Exemplo: Problema do troco

- Na falta de stock de algumas moedas, o algoritmo ganancioso pode não dar solução, quando ela existe (*)
- Resolução: retroceder até ao ponto de escolha mais próximo e escolher a moeda de valor mais baixo a seguir

extrair(8, {2, 2, 2, 2, 5 })

ponto de escolha (que valor unitário escolher?)

(outra forma: quantas moedas escolher de um dado valor unitário ?)

?

5 ↓ extrair(3, {2, 2, 2, 2})

2 ↓ extrair(1, {2, 2, 2})

×

Optimização: descartar o 5 para não repetir trabalho

2 ↓ extrair(6, {2, 2, 2})

2 ↓ extrair(4, {2, 2})

2 ↓ extrair(2, {2})

2 ↓ extrair(0, {}) ✓

(*) também pode dar uma solução não óptima, mas isso resolve-se doutra forma – com programação dinâmica

22

Implementação recursiva

```
static final int moedas[] = {1,2,5,10,20,50,100,200};

// stock[i] = nº de moedas de valor moedas[i]
public int[] select(int montante, int[] stock) {
  int[] sel = new int[moedas.length];
  return select(montante,stock,sel,moedas.length-1)? sel:null;
}

boolean select(int mont, int[] stock, int[] sel, int maxIdx) {
/*1.*/ if (mont == 0)
          return true;
/*3.*/ for (int i = maxIdx; i >= 0; i--)
         if (stock[i] > sel[i] && moedas[i] <= mont) {
           /*3.1.*/ sel[i]++; mont -= moedas[i];
           /*3.2.*/ if (select(mont, stock, sel, i))
                        return true;
           /*3.3.*/ sel[i]--; mont += moedas[i];
         }
/*4.*/ return false;
}
```

Eficiência temporal

- Tempo de execução no pior caso (pesquisa exaustiva do espaço de estados) é determinado pela dimensão do espaço de estados, que muitas vezes é exponencial
  - Caso em que o montante pretendido excede o total em stock
  - Como calcular a dimensão do espaço de estados?
- No algoritmo apresentado, não há duas chamadas de *select* para o mesmo estado do array *sel*
- Nº de estados possíveis de *sel* (nº de soluções potenciais a testar e nº máximo de chamadas de *select*) é:
  $\Pi_{i\ =\ 0,\ \ldots,\ moedas.length-1}(1+stock[i])$ (nº subconj.s de conj. c/repet.)
- Exemplo: stock[i] = 9 (i=0, …, 7), montante pretendido superior ao total em stock => 10^8 chamadas!!

Poda da pesquisa

- Interromper a pesquisa em ramos que garantidamente não levam a nenhuma solução
- Exemplo no problema do troco: interromper a pesquisa (e retornar indicação de insucesso) quando o valor do stock utilizável é inferior ao montante em falta
- Melhora o desempenho mas podem continuar a existir casos patológicos com tempo de execução exponencial

Variantes de aplicação

- Encontrar uma solução (caso estudado até aqui)
  - A pesquisa pára assim que se encontra a primeira solução
- Encontrar todas as soluções
  - Quando se encontra uma solução, processa-se essa solução (imprimir, etc.), mas não se pára a exploração
  - Retrocede-se para o ponto de escolha mais próximo como se tivéssemos chegado a um "beco sem saída"
- Encontrar a melhor solução
  - Variante de encontrar todas as soluções, em que se vai guardando a melhor solução encontrada até ao momento
  - Podar a pesquisa: interromper um caminho de pesquisa quando temos a certeza que não permite chegar a uma solução melhor

Referências

- Mark Allen Weiss. Data Structures & Algorithm Analysis in Java. Addison-Wesley, 1999
- Steven S. Skiena. The Algorithm Design Manual. Springer 1998
- Robert Sedgewick. Algorithms in C++. Addison-Wesley, 1992