计算方法

第2章 数值积分

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 2 章　数值积分

2.4 高斯公式

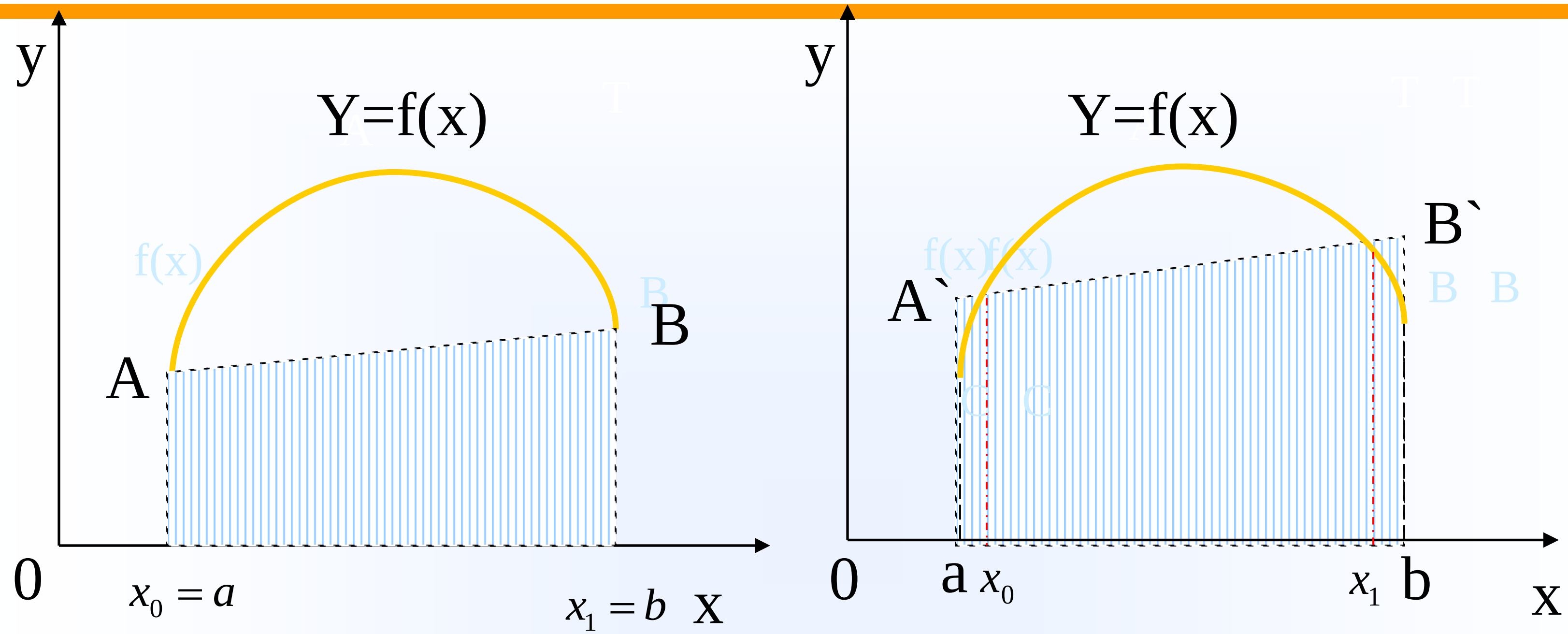
1、高精度的求积公式

在构造*Newton-Cotes*公式时，限定用积分区间的等分点作为求积节点，这样做虽然使问题的处理过程得以简化，但同时也限制了精度。

在节点数目固定为n 的条件下，能否通过适当选取求积节点x_k的位置以及相应的求积系数A_k，使求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

具有尽可能高(最高)的代数精度？



左图用梯形AabB的面积作为积分的近似值；

右图适当地选取x0,x1的位置，用梯形A`abB`的面积作为积分的近似值

可以看出，适当地选取x0,x1的位置，可以提高求积的精度。

不失一般性，设$a=-1,b=1$，考虑下列求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (30)$$

我们将会看到，适当的选取求积节点 $x_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 求积公式具有 $2n-1$ 次代数精度，这种高精度求积公式称为**高斯（Gauss）公式**，高斯公式的求积节点称为**高斯点**。

定义1： 在[a,b]上的n个节点合理选取，可使求积公式（30）的代数精度达到2n-1次，此时，求积公式（30）称为**高斯求积（Gauss）公式**，节点 $x_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 称为**高斯点**，A_k称为**高斯系数**。

2.4 高斯求积公式

一点高斯公式：

我们所熟悉的中矩形公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$$

高斯点$x_1=0$

两点高斯公式：

两点高斯公式的推导：

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$

令它对于$f(x)=1, x, x^2, x^3$准确成立，有：

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

由其中的2,4知，$x_1^2 = x_2^2$

再由1,3得：$x_1^2 = x_2^2 = \dfrac{1}{3}$

所以：$x_2 = -x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

代回1,2得$A_1 = A_2 = 1$

两点高斯公式的具体形式：$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

对于任意积分区间[a,b]，

通过变换：$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$

可以变到区间[-1,1]上，这时：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})dt$$

因而，相应的两点高斯公式是：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}) + f(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2})] \quad (32)$$

高斯公式的精度很高，例如，用两点高斯公式（32）计算 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 得近似值0.9460411，有四位有效数字（0.9460831)

例： 求$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$的 2 点 Gauss 公式。

解： 设 $\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，应有 3 次代数精度。

代入 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = A_0 + A_1 \\ \frac{2}{5} = A_0 x_0 + A_1 x_1 \\ \frac{2}{7} = A_0 x_0^2 + A \ldots^2 \\ \frac{2}{9} = \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_0 \approx 0.8212 \\ x_1 \approx 0.2899 \\ A_0 \approx 0.3891 \\ \ldots 776 \end{array} \qquad (2)$$

不是线性方程组，不易求解。

由插值型公式构造知，关键求x_k，

从例中可看到求解非线性方程组(2)较复杂，通常n≥2就很难求解．故一般不通过解方程(2)求 x_k 及 A_k (k＝0,1,… , n)．而从研究高斯点的基本特性来着手解决Gauss 求积公式的构造问题．

2、高斯点的基本特性

正交多项式

定义2 若

(1) $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$,则称函数f(x)和g(x)在区间[a,b]上正交.

(2) $\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx = 0$,则称函数f(x)和g(x)在区间[a,b]上带权 $\rho(x)$ 正交.

设 x_k (k=1,2,…,n)是求积公式(30)中的高斯点，令

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

对于任意次数≤ n-1的多项式p(x), $p(x)\omega(x)$ 是次数≤2n-1的多项式，因而**高斯公式**（30）对于它是准确成立的：

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx=\sum_{k=1}^{n} A_k p(x_k)\omega(x_k)$$

由于 $\omega(x_k)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$

故有：$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx=0$ （33）

可见，以高斯**点为零点的n次多项式** $\omega(x)$ 与任意次数≤ n-1的多项式p(x)正交。

反之，如果 $\omega(x)$ 与任意次数≤ n-1的多项式正交，则其零点必为**高斯点**。

实际上，对于任意次数≤ 2n-1的多项式f(x),用$\omega(x)$去除$f(x)$，则可表示成:

$$f(x) = p(x)\omega(x) + q(x)$$

其中，$p(x)$为商，$q(x)$为余，$p(x)$, $q(x)$均为不超过*n-1*次的多项式，于是有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx + \int_{-1}^{1} q(x)dx$$

由正交性条件 $\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = 0$

得: $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)dx$$

以$\omega(x)$ 的零点x_k (k=1,2,...,n)作插值型求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

则它必有n-1次代数精度，因而对q(x)准确成立，即：

$$\int_{-1}^{1} q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k q(x_k)$$

而 $f(x_k) = p(x_k)\omega(x_k) + q(x_k) = q(x_k)$

所以

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k q(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

由f(x)的任意性知上述求积公式必是高斯公式，故x_k (k=1,2,...,n)必为**高斯点**。

定理2 节点x_k（$k=1,2,\ldots,n$）是Gauss点的充分必要条件是，$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$与所有次数小于等于$n$-1的多项式正交。即下列公式成立

求 Gauss 点 ⇔ 求$w(x)$的零点

$$\int_{-1}^{1} x^k \omega(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k=0,1,\cdots,n-1) \tag{35}$$

我们可以按正交性条件来得出高斯点x_k（k=1,2,…,n）

如对两点高斯公式

按正交性条件得 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$

$$\int_{-1}^{1}(x-x_1)(x-x_2)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}x(x-x_1)(x-x_2)dx = 0$$

由此得

$$x_1x_2 = -\frac{1}{3}, \qquad x_1 + x_2 = 0$$

故所求**高斯点**为:

$$x_1 = -x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3、勒让德(Legendre)多项式

定义 以高斯点 x_k（k=1,2,…,n） 为零点的 n 次多项式

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

称为**勒让德(Legendre)**多项式

1. 勒□ 德 (Legendre)多□ 式：

定□ 在□ □ $[-1,1]$ 上 n □ 勒□ 德 (Legendre)多□ 式

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_n(x)=\dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \\ n=1,2,\cdots \end{cases}$$

是正交的函□ 系，其 $n+1$ □ 勒□ 德多□ 式 $P_{n+1}(x)$ 与任何次□ 不超□ n 的多□ 式 $P(x)$ 在□ □ $[-1,1]$上均正交，

即 $$\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)P(x)\mathrm{d}x=0$$

据上述所述，可逐步构造出**勒让德多项式**：

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$p_4(x) = x^4 - \frac{30}{35}x^2 + \frac{3}{35}$$

据**勒让德多项式**的定义，取它的零点作为求积节点便可构造出相应的高斯公式。

例 取 $p_1(x)=x$

其零点为：x=0

求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = Af(0)$$

由于它有2-1次代数精度，故令它对f(x)=1准确成立，有：

$$A=2$$

故一点**高斯-勒让德积分公式**为：

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)}$$

其**高斯点**x_1=0

例 取 $p_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$ 其零点为： $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$， $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+A_2 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

由于它具有2n-1=3次代数精度，
故令它对f(x)=1,f(x)=x准确成立，有

$$\begin{cases} A_1+A_2=2 \\ A_1(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+A_2(\dfrac{1}{\sqrt{3}})=0 \end{cases}$$

得： $A_1=1$, $A_2=1$

故二点**高斯-勒让德积分公式**为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+A_2 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

其**高斯点** $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$， $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

例 取 $p_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$ 其零点为: $x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_2=0,\quad x_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$

求积公式为:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+A_2 f(0)+A_3 f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

由于它具有2n-1=5次代数精度

令它对 $f(x)=1, x, x^2$ 准确成立， 有

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=2 \\ A_1(-\sqrt{\frac{3}{5}})+A_2(0)+A_3(\sqrt{\frac{3}{5}})=0 \\ A_1(-\sqrt{\frac{3}{5}})^2+A_2(0)^2+A_3(\sqrt{\frac{3}{5}})^2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

解此线性方程组得：

$$A_1=\frac{5}{9},\qquad A_2=\frac{8}{9},\qquad A_3=\frac{5}{9}$$

故三点**高斯-勒让德积分公式**为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9} f(0)+\frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

其**高斯点**

$$x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\qquad x_2=0,\qquad x_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

例:分别用不同方法计算如下积分,并做比较

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

各种做法比较如下：

1、用Newton-Cotes公式

当n=1时，即用梯形公式，I≈0.9270354

当n=2时, 即用Simpson公式,

I ≈ 0.9461359

当n=3时, I ≈ 0.9461090

当n=4时, I ≈ 0.9460830

当n=5时, I ≈ 0.9460830

$I_{准}$=0. 9460831

数值分析

2:用复化梯形公式

令h=1/8=0.125

$I_{准}=0.9460831$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{h}{2}\left\{f(0)+2\left[f(h)+\cdots+f(7h)\right]+f(1)\right\}$$

$$=0.94569086$$

3：用复化辛甫生公式

令h=1/8=0.125

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left\{f(0)+4\left[f(h)+\cdots+f(7h)\right]+2\left[f(2h)+\cdots+f(6h)\right]+f(1)\right\}$$

$$=0.9460833$$

数值分析

4、用Romberg公式

K	T_n	Sn	Cn	Rn
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9400830	
3	0.9456906	0.9460833	0.9460831	0.9460831

$I_{准}$ =0.9460831

（1）用2个节点的Gauss公式

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\approx \left[1 \times \frac{\sin(-0.5773503)}{-0.5773503} + 1 \times \frac{\sin(0.5773503)}{0.5773503} \right] = 0.9460411$$

（2）用3个节点的Gauss公式

解：令$x=(t+1)/2$,

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(t+1)/2}{t+1} dt$$

$$I \approx 0.5555556 \times \frac{\sin \frac{1}{2}(0.7745907+1)}{0.7745907+1} + 0.8888889 \times \frac{\sin \frac{1}{2}}{0+1}$$

$$+0.5555556 \times \frac{\sin \frac{1}{2}(0.7745907+1)}{0.7745907+1} = 0.9460831$$

算法比较

- 此例题的精确值为0.9460831...
- 由例题的各种算法可知：
- 对Newton-cotes公式，当n=1时只有1位有效数字，当n=2时有3位有效数字，当n=5时有7位有效数字。
- 对复化梯形公式有2位有效数字，对复化辛甫生公式有6位有效数字。
- 用复化梯形公式，对积分区间[0，1]二分了11次用2049个函数值，才可得到7位准确数字。
- 用Romberg公式对区间二分3次，用了9个函数值，得到同样的结果。
- 用Gauss公式仅用了3个函数值，就得到结果。

2.5 数值微分

- 数值微分的概念
- 数值微分的计算方法
  - ★原始概念近似:中点法及外推法
  - ★函数近似:插值型的求导公式
- 数值微分的误差分析
  - ★泰勒展开式估计
  - ★事后误差估计
  - ★基本关系转化

引 言

- **例:已知自变量和函数值如下，求各点的导数值。**

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	0.48	0.38	0.31	0.33	0.36	0.41	0.51	0.43	0.35	0.29	0.28

1. 函数f(x)以离散点列给出时，而要求我们给出导数值，
2. 函数f(x)过于复杂

这两种情况都要求我们用数值的方法求函数的导数值

微积分中，关于导数的定义如下：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

自然，而又简单的方法就是，取极限的近似值，即差商.

当h足够小，作为近似的导数值.

根据离散点上的函数值求取某点导数近似值的方法。

1）差商代替导数

2)插值型数值求导

数值微分就是用函数值的线性组合近似函数在某点的导数值.

一、差商公式

由导数定义，得

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ **向前差商**

$$f'(a) \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$ **向后差商**

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$ **中心差商**

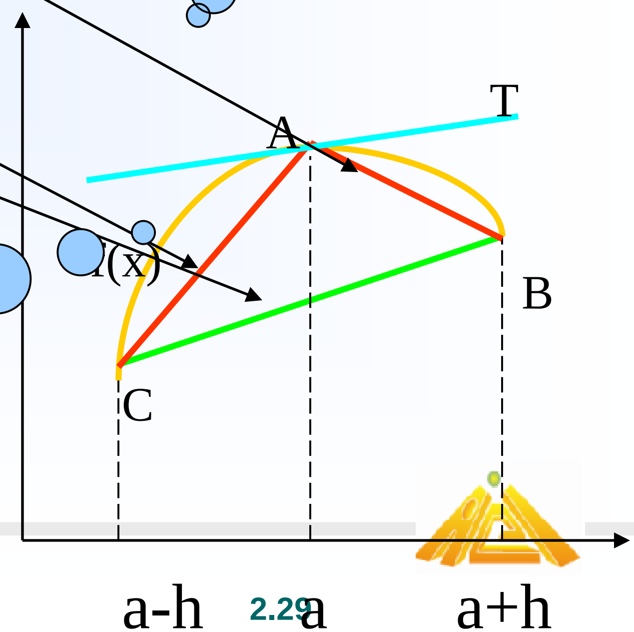
用弦AB的斜率近似代替f（x）在a点的导数

用弦AC的斜率

显然，BC的斜率更接近a点切线AT的斜率，因此，中点方法更为可取。

近似代替f（x）在a点的导数

$$G(h) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \qquad (41)$$



■差商型求导公式的误差分析

分别将 $f(a\pm h)$在 $x=a$ 处做Taylor展开有

$$f(a\pm h)=f(a)\pm hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)\pm\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a)\pm\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots \qquad (5)$$

代入$G(h)$得 $$G(h)=f'(a)+\frac{h^2}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots \qquad (42)$$

所以截断误差 $$\boxed{G(h)-f'(a)=\frac{h^2}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots}$$

从截断误差的角度来看，步长h越小，计算结果越准确。且

$$\boxed{\left|f'(a)-G(h)\right|\le\frac{h^2}{6}M,}\text{其中}\quad M\ge\max_{|x-a|\le h}\left|f'''(x)\right| \qquad (6)$$

但从计算角度看，h 越小，$f(a+h)$与$f(a-h)$ 越接近，直接相减会造成有效数字的严重损失。因此，从舍入误差的角度来看，步长 h 不宜太小。

几点说明

✓ 理论上, 步长h越小, 数值微分的精度越高;

✓ 实际使用时，若h太小, 则 $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的误差就会增加.

➢ 例. 计算f(x)=e^x的导数f'(1.15)——取8位有效数字

h	x	f(x)	向前差商D_+	中心差商D	|f'(1.15)-D_+|	|f'(1.15)-D|
0.01	1.14 1.15 1.16	3.1267684 3.1581929 3.1899333	3.17404	3.158245	1.5847E-02	5.2100E-05
0.001	1.149 1.150 1.151	3.1550363 3.1581929 3.1613527	3.1598	3.1582	1.6071E-03	7.1000E-06
0.0001	1.1499 1.1500 1.1501	3.1578771 3.1581929 3.1585087	3.158	3.158	1.9290E-04	1.9290E-04
1.00E-06	1.149999 1.150000 1.150001	3.1581897 3.1581929 3.1581961	3.2	3.2	4.1807E-02	4.1807E-02

可以看出, 当步长h缩小到10^{-6}时, 计算误差出现增加;

所以， 在实际计算时，通常采用二分步长及误差事后估计法， 在变步长的过程中实现步长的自动选择，在保证截断误差满足的精度要求的前提下选取尽可能大的步长。

例5 用变步长的中点方法求 e^x在x=1处的导数值,设取 h= 0.8起算。

解 这里采用的计算公式是

$$G(h)=\frac{e^{1+h}-e^{1-h}}{2h}$$

计算结果见表2.5，表中 k 代表二分的次数，步长 $h=\frac{0.8}{2^k}$。二分 9 次得结果 G=2.71828，它的每一数字都是有效数字(所求导数的准确值为e=2.7182818…)。

表2.5 计算结果

k	$G(h)$
0	3.01765
1	2.79135
2	2.73644
3	2.72281
⋮	…
9	2.71828
10	2.71828

事后误差估计

$$\left.\begin{aligned}G(h)-f'(x_0)&\approx\alpha_1 h^2\\ G(\tfrac{h}{2})-f'(x_0)&\approx\tfrac{1}{4}\alpha_1 h^2\end{aligned}\right\}\quad \frac{G(h)-f'(x_0)}{G(\frac{h}{2})-f'(x_0)}\approx 4$$

$$f'(x_0)-G(h)\approx\frac{4}{3}\left(G(\frac{h}{2})-G(h)\right)$$

二、中点方法的加速

我们看到，中点公式具有如下形式

$$G(h)=f'(a)+\alpha_1 h^2+\alpha_2 h^4+\alpha_3 h^6+\cdots \tag{43}$$

式中的系数均与步长无关。若将步长二分，则有

$$G(\frac{h}{2})=f'(a)+\frac{1}{4}\alpha_1 h^2+\frac{1}{16}\alpha_2 h^4+\frac{1}{64}\alpha_3 h^6+\cdots \tag{44}$$

取(43)与(44)加权平均 $$G_1(h)=\frac{4}{3}G(\frac{h}{2})-\frac{1}{3}G(h) \tag{45}$$

则可消去误差主项$\frac{1}{4}\alpha_1 h^2$，得 $$G_1(h)=f'(a)+\beta_1 h^4+\beta_2 h^6+\cdots$$

若令 $$G_2(h)=\frac{16}{15}G_1(\frac{h}{2})-\frac{1}{15}G_1(h) \tag{46}$$

则进一步消去误差主项$\beta_1 h^4$，有 $$G_2(h)=f'(a)+\gamma_1 h^6+\cdots$$

重复同样的手续，再导出下列加速公式

$$G_3(h)=\frac{64}{63}G_2(\frac{h}{2})-\frac{1}{63}G_2(h) \tag{47}$$

这种加速过程还可继续下去。这种加速方法通常称作Richardson（李查逊）外推加速法。

例6 运用加速公式加工例5的结果。

解 计算结果见表2-6。这里，加速的效果同样是相当显著的。

表2-6 Richardson外推加速法计算结果

h	$G(h)$	$G_1(h)$	$G_2(h)$	$G_3(h)$
0.8	3.01765	2.715917	2.718285	2.71828
0.4	2.79135	2.718137	2.718276	
0.2	2.73644	2.718267		
0.1	2.72281			

当 $f(a+h)$ 及 $f(a-h)$ 分别有舍入误差 ε_1 及 ε_2 时，若令 $\varepsilon=\max\{|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|\}$ 则计算 $f'(a)$ 的舍入误差上界为

$$\delta(f'(a))=\left|f'(a)-G(a)\right|\le\frac{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|}{2h}=\frac{\varepsilon}{h}$$

它表明 h 越小, 舍入误差 $\delta(f'(a))$ 越大, 故它是病态的. 用中点公式计算 $f'(a)$ 的误差上界为 $E(h)=\dfrac{h^2}{6}M+\dfrac{\varepsilon}{h}$, 要使误差 $E(h)$ 最小, 步长 h 不宜太大, 也不宜太小. 其最优步长应为

$$h_{\mathrm{opt}}=\sqrt[3]{3\varepsilon/M}$$

注：中心公式及其加速方法适合用表达式表示的函数。对于列表函数，则宜使用插值方法等导出数值求导公式。

三、插值型的求导公式

对于列表函数 $y=f(x)$：

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

插值多项式 $y=P_n(x)$ 作为它的近似, 我们取 $P_n'(x)$ 作为 $f'(x)$ 的近似值，建立的数值公式

$$\boxed{f'(x)\approx P_n'(x)} \qquad (48)$$

统称插值型的求导公式.

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

依据插值余项定理，求导公式(48)的余项为

$$f'(x)-P_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n+1)}(\xi)$$

式中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

我们限定:求某个节点 x_k 上的导数值，上面的第二项变为零，这时有余项公式

$$f'(x_k)-P_n'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_k) \qquad (49)$$

下面我们仅仅考察节点处的导数值. 为简化讨论, 假定所给的节点是等距的.

1. 两点公式

已给两节点 x_0, x_1 上的函数值 $f(x_0), f(x_1)$，做线性插值

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

记 $x_1-x_0=h$，对上式两端求导，有 $P_1'(x)=\dfrac{1}{h}[-f(x_0)+f(x_1)]$

于是有下列求导公式：

$$P_1'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)] \qquad P_1'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$$

而利用余项公式知，带余项的两点公式是：

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]-\frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]+\frac{h}{2}f''(\xi)$$

2. 三点公式

设已给出三节点x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$上的函数值,做二次插值

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

令 $x = x_0+th$, 则

$$P_2(x_0+th)=\frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0)-t(t-2)f(x_1)+\frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

$$P_2'(x_0+th)=\frac{1}{2h}\left[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)\right] \quad (50)$$

上式分别取 $t = 0,1,2$, 得到三种三点公式:

$$P_2'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right];$$

$$P_2'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right];$$

$$P_2'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right].$$

而带余项的三点求导公式如下:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi); \quad (51)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi); \quad (52)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi). \quad (53)$$

公式(52)是我们所熟悉的中点公式. 在三点公式中，它由于少用了一个函数值 $f(x_1)$ 而引人注目.

用插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似函数，还可以建立高阶数值微分公式：

$$f^{(k)}(x) \approx P_m^{(k)}(x), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

例如，将式(50)再对t求导一次，有

$$P_2''(x_0 + th) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right]$$

于是有 $$P_2''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)\right]$$

于是带余项的二阶三点公式如下：

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \qquad (54)$$

$$f''(x) - P_n''(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}''(x) + \frac{2\omega_{n+1}'(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f^{(n+1)}(\xi)$$

例　已知函数$y= e^x$ 的下列数值:

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

试用二点、三点微分公式计算x=2.7处的一阶、二阶导数值.

本题没有明确指出用哪些点处的函数值来求 $f'(2.7)$ 和$f''(2.7)$.因此，随着步长h不同,导数值有可能不同. 另外, 用两点函数值时，只能求一阶导数值.

解: 方法1：取h=0.1时，两点公式有两种取法当 x_0=2.6，x_1＝2.7时，

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1}[f(2.7)-f(2.6)]=\frac{1}{0.6}[14.8797-13.4637]$$

$$=14.1600$$

当x_0= 2.7，x_1= 2. 8时，

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.1}[f(2.8)-f(2.7)]=15.6490.$$

三点公式取x_0= 2.6，x_1=2.7，x_2=2.8，得

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.1}[f(2.8)-f(2.6)]=14.9045.$$

$$f''(2.7)\approx\frac{1}{0.1^2}[f(2.8)-2f(2.7)+f(2.6)]=14.8900.$$

方法2：取h=0.2时，两点公式有两种取法当 x_0=2.5，x_1＝2.7时，

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}[f(2.7)-f(2.5)]=13.4860$$

当 x_0=2.7，x_1＝2.9时，

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}[f(2.9)-f(2.7)]=16.4720$$

三点公式取x_0= 2.5，x_1=2.7，x_2=2.9，得

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.2}[f(2.9)-f(2.5)]=14.9790.$$

$$f''(2.7)\approx\frac{1}{0.2^2}[f(2.9)-2f(2.7)+f(2.5)]=14.9300.$$

注：$f'(2.7)$和 $f''(2.7)$的真值都是 **14.87973…**，上面的计算表明：

1）当使用两点公式时．应取步长较小的函数值；

2）一般情况下，同样步长的两点公式没有三点公式准确，步长越小越精确,但如果高阶导数无界或舍入误差超过截断误差时,这个结论就不一定对了.

附注：与积分相比，数值微分比较困难。

积分描述了一个函数的整体或宏观性质，而微分则描述一个函数在一点处的斜率，这是函数的微观性质。因此积分对函数的形状在小范围内的改变不敏感。而微分却很敏感。一个函数小的变化，容易产生相邻点的斜率的大的改变。

由于微分这个固有的困难，所以应尽可能避免数值微分，特别是对实验获得的数据进行微分。在这种情况下，最好用最小二乘曲线拟合这种数据，然后对所得到的多项式进行微分。或用另一种方法，对该数据进行三次样条拟合，然后寻找该样条函数的微分；等等。一般是先拟合（或逼近），再微分。

例题选讲2.1 机械求积

例：试检验下列求积公式的代数精度$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}f(\frac{1}{2})+\frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$

令$f(x)=1$，左边$=\int_0^1 1dx = x\Big|_0^1 = 1$，右边$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

令$f(x)=x$，左边$=\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2}$，右边$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

令$f(x)=x^2$，左边$=\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3-0^3)=\frac{1}{3}$，右边$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{16}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}=\frac{1}{24}-\frac{2}{24}+\frac{9}{24}=\frac{1}{3}$

令$f(x)=x^3$，左边$=\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(1^3-0^3)=\frac{1}{4}$

右边$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{64}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{27}{64}=\frac{1}{96}-\frac{4}{96}+\frac{27}{96}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$

令$f(x)=x^4$，左边$=\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(1^3-0^3)=\frac{1}{5}$

右边$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{256}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{16}+\frac{2}{3}\times\frac{81}{256}=\frac{1}{384}-\frac{8}{384}+\frac{81}{384}=\frac{74}{384}\neq\frac{1}{5}$

例题选讲2.2 求积公式的设计

- 主要方法：代数精度方法
- 要求：

  所设计的公式应具有“尽可能高”的代数精度
- 技巧：利用对称性

  利用对称性可以显著地减少待定参数的数目，某些具有对称性的结构的求积公式，其代数精度可能会获得额外的好处

题一：试设计求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$

解：令原式对于f=1,x,x²准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{用对称性令}A_0=A_2} \begin{cases} 2A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8}A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解得：$A_0 = A_2 = \frac{2}{3}, A_1 = -\frac{1}{3}$

构造的插值公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$$

具有3次代数精度

题二：试设计求积公式： $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx h[A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)]$

解：令h=1,或者作变换x=ht,将原式化为：

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx A_{-1}f(-1)+A_0 f(0)+A_1 f(1)]$$

用对称性
令$A_{-1}=A_1$

对奇函数$f=x,x^3$
自然准确成立，
令$f=1,x^2$准确成立

$$\begin{cases} 2A_1 + A_0 = 4 \\ 2A_1 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

解得： $A_{-1}=A_1=\dfrac{8}{3}, A_0=-\dfrac{4}{3}$

构造的插值公式为：

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx h[\frac{8}{3}f(-h)-\frac{4}{3}f(0)+\frac{8}{3}f(h)$$

具有3次代数精度

题三：试设计求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$

解：令原式对于f=1,x,x²准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}B_0 = \frac{1}{2} \\ A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解得：$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = \frac{1}{3}, B_0 = \frac{1}{6}$

构造的插值公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

具有2次代数精度

题四：试设计求积公式

$$\int_0^h f(x)dx \approx h[a_0 f(0) + a_1 f(1)] + h^2[b_0 f'(0) + b_1 f'(1)]$$

解：令h=1,或者作变换x=ht,将原式化为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + b_1 f'(1)$$

令原式对于f=1,x,x²,x³准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 1 \\ a_1 + b_0 + b_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_1 + 2b_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_1 + 3b_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解得：$a_0 = a_1 = \frac{1}{2}, b_0 = -b_1 = \frac{1}{12}$

构造的插值公式为：

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{12}[f'(0) - f'(h)]$$

具有3次代数精度

题五：试设计求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx$

$$A_0 f(A) + A_1 f(\frac{a+b}{2}) + A_2 f(b) + B_0 f'(a) + B_1 f'(\frac{a+b}{2}) + B_2 f'(b)$$

解：引进变换x=（b+a)/2+(b-a)t/2,将原式化为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1) +$$
$$B_0 f'(-1) + B_1 f'(0) + B_2 f'(1)$$

利用对称性：

再令原式对于f=1,x²，x⁴准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 2 \\ 2A_0 - 4B_0 = \dfrac{2}{3} \\ 2A_0 - 8B_0 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

解得：$A_0 = A_2 = \frac{7}{15}, A_1 = \frac{16}{15}, B_0 = -B_2 = \frac{1}{15}, B_1 = 0$

构造的插值公式为$\int_a^b f(x)dx \approx$

$$\frac{b-a}{30}[7f(a) + 16f(\frac{a+b}{2}) + 7f(b)] + \frac{(b-a)^2}{60}[f'(a) + -f'(b)]$$

具有5次代数精度

题6：试设计求积公式$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(x_1)$

解：有一未知求积节点，令原式对于f=1,x,x²准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2h \\ -hA_0 + x_1 A_1 = 0 \\ h^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得：$A_0 = \dfrac{h}{2}, A_1 = \dfrac{3}{2}h, x_1 = \dfrac{h}{3}$

构造的插值公式为：

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{2} f(-h) + \frac{3}{2} h f\left(\frac{h}{3}\right)$$

具有2次代数精度

题7：试设计求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$

解：令原式对于f=1,x,x^2,x^3准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\ A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \\ A_0 + \frac{1}{8}A_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

考虑求积公式的内在对称性，令

$x_1=1/2, A_0=A_2$

可列出方程组:

解得：$A_0 = A_2 = \frac{1}{6}, A_1 = \frac{2}{3}h$

构造的插值公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)]$$

具有3次代数精度

题8：试设计求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)], x_0 < x_1 < x_2$

解：考虑求积公式的内在对称性，令$x_0=-x_2, x_1=0$,原式可化为:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(x_0)+f(0)+f(-x_0)]$$

对于奇函数f=x,x^3,x^5均准确成立，再令f=1准确成立，可列出方程组:

$$3A=2$$

解得：$A=\dfrac{2}{3}$

再令f=x^2准确成立，有

2/3（$2x_0^2$)=2/3

解得：$x_2=-x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

构造的插值公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}[f(-\frac{1}{\sqrt{2}})+f(0)+f(\frac{1}{\sqrt{2}})]$$

具有3次代数精度

例题选讲2.3 高斯求积公式

题1 利用代数精度设计如下形式的的一点高斯公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)$$

解：令原式对于 $f=1, x$ 准确成立，

可列出方程：$\begin{cases} A_0 = 2 \\ A_0 x_0 = 0 \end{cases}$

解得：$A_0 = 2$，$x_0 = 0$，

$\therefore$ 一点高斯公式为：$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$

■ 题2 利用代数精度设计如下形式的的两点高斯公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解 由对称性原理令 $A_0 = A_1, x_0 = -x_1,$ 则所有设计的求积公式具有形式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0[f(x_0) + f(-x_0)]$$

由于它对于 $f = x, x^3$ 自然准确，故对称性原理是正确的。再令它对于 $f = 1, x^2$ 准确成立，可列方程组

$$\begin{cases} 2A_0 = 2 \\ 2A_0 x_0^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

据此知 $A_0 = 1, x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，因而有两点高斯公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

题3 利用代数精度设计如下形式的的三点高斯公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

解 对称性原理令 $A_0 = A_2, x_0 = -x_2, x_1 = 0$，则所要设计的求积公式具有形式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0[f(x_0) + f(-x_0)] + A_1 f(0)$$

由于它对于 $f = x, x^3, x^5$ 自然准确，故对称性原理是正确的。再令它对 $f = 1, x^2, x^4$ 准确的成立，可列出方程

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 2 \\ 2A_0 x_0^2 = \dfrac{2}{3} \\ 2A_0 x_0^4 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

将其中第 2 与第 3 两式相除，即可定出 x_0，从而有

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, A_0 = \frac{5}{9}, A_1 = \frac{8}{9}$$

因而有三点高期公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0)] + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

题4 套用三点高斯公式计算积分

$$I=\int_1^3 \frac{1}{x}dx$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)]+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

解：作变换$x=2+t$将积分区间变到$[-1,1]$，

$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+t}dt$，然后套用三点高斯公式：

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+t}dt \approx \frac{5}{9}\times\frac{1}{2-\sqrt{\frac{3}{5}}}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{9}\times\frac{1}{2+\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

题5 证明下列求积公式具有5阶代数精度

$$\int_1^3 f(x) \approx \frac{5}{9}\times f(2-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(2)+\frac{5}{9}\times f(2+\sqrt{\frac{3}{5}})$$

证：这个公式有 3个节点 $x_0 = 2-\sqrt{\frac{3}{5}}, x_1 = 2, x_2 = 2+\sqrt{\frac{3}{5}}$,

为要使它具有 5阶精度，它必须是高斯 公式：

而它的三个系数 $\frac{5}{9},\frac{8}{9},\frac{5}{9}$, 确实是高斯公式的求积 系数

引进变换 $x = t+2$, 可将公式变换为：

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \frac{5}{9}\times f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}\times f(0)+\frac{5}{9}\times f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

可见 3个节点确实是高斯点

例题选讲 2.4 龙贝格加速算法

题1：证明梯形公式$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$具有一阶精度

证：梯形公式对于 $f=1, x$准确成立，

当$f=x^2$时，左边 $=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$

右边 $=\frac{b-a}{2}[a^2+b^2] \neq$ 左边

$\therefore$ 梯形公式具有一阶精度

■ 验证辛普森公式和柯特思公式分别具有3阶精度和5阶精度

证：作变换$x=\dfrac{b+a}{2}+t\dfrac{b-a}{2}$，则辛普森公式和柯特斯公式化为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{45}[7f(-1)+32f(-\frac{1}{2})+12f(0)+32f(\frac{1}{2})+7f(1)]$$

运用对称性：

辛普森公式对于$f=x,x^3$准确成立

柯特斯公式对于$f=x,x^3$，x^5准确成立

例题选讲2.5 数值微分

题1：证明下列数值微分公式具有4阶代数精度

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+2h)-f(x_0+2h)]$$

证：设 $x_0=0, h=1$，或者作变换 $x=x_0+th$，

$$f'(0) \approx \frac{1}{12}[f(-2)-8f(-1)+8f(1)-f(2)]$$

由对称性：上式对于偶函数 $f=1, x^2, x^4$，准确成立

再用直接验证方法，验证对于 $f=x, x^3$，也准确成立，

但对于 $f=x^5$ 不成立，所以，上式具有4阶精度

题2：验证下列数值微分公式是插值型的

$$f'(a) \approx \frac{1}{6h}[-11f(a)+18f(a+h)-9f(a+2h)+2f(a+3h)]$$

证：令 $a=0, h=1$，或者作变换 $x=a+th$，将原式化为：

$$f'(0) \approx \frac{1}{6}[-11f(0)+18f(1)-9f(2)+2f(3)]$$

设以 $x=0,1,2,3$ 为节点构造拉格朗日插 值多项式

$$p(x) = l_0(x)f(0) + l_1(x)f(1) + l_2(x)f(2) + l_3(x)f(3)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$l_0'(0) = -\frac{1}{6}(\frac{1}{3}x^2-3x+11) = -\frac{11}{6}$$

同理：$l_1'(0) = \frac{18}{6}$，$l_2'(0) = -\frac{9}{6}$，$l_3'(0) = \frac{2}{6}$

$$\Rightarrow p'(0) = \frac{1}{6}[-11f(0)+18f(1)-9f(2)+2f(3)] \approx f'(0)$$

∴ 该公式是插值型的

题3: 验证数值微分公式: $f''(x_0)\approx\frac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h)+16f(x_0-h)-30f(x_0)+16f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$具有5阶代数精度。

证: 令$x_0=0, h=1$,或作变换$x=x_0+th$,可得:

$$f''(0)\approx\frac{1}{12}[-f(-2)+16f(-1)-30f(0)+16f(1)-f(2)]$$

由对称性: 上式对于奇函数$f=x, x^3, x^5$,准确成立

再通过直接验证的方法知:

其对于$f=1, x^2, x^4$,准确成立, 但对于$f=x^6$不成立

$\Rightarrow$ 该式具有5阶代数精度

习题二

2.试判定下列求积公式的代数精度:$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$

解: 直接验证:

当$f=1$时, 左边$=1$, 右边$=1$, 准确成立

当$f=x$时, 左边$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$,右边$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{2}$, 准确成立

当$f=x^2$时, 左边$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$, 右边$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{3}$,准确成立

当当$f=x^3$时, 左边$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$, 右边$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{27}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{5}{18}$,不成立

$\therefore$具有2阶代数精度

3.确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量的高，并指明求积公式所具有的代数精度。

$$(1)\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$$

解：

考虑对称性：有 $A_0 = A_2$，且上式对于奇函数 $f = x, x^3$ 准确成立

再令其对 $f = 1, x^2$ 准确，可得方程组

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 2h \\ 2A_0 h^2 = \dfrac{2}{3}h^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A_2 = \dfrac{1}{3}h \\ A_1 = \dfrac{4}{3}h \end{cases}$$

$\therefore$ 构造的求积公式为：$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \dfrac{1}{3}hf(-h) + \dfrac{4}{3}hf(0) + \dfrac{1}{3}hf(h)$

具有3阶精度

$$(2)\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{4}\right)+A_1 f\left(\frac{1}{2}\right)+A_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

解： 由对称性，令$A_0 = A_2$,令原式对于$f=1,x,\mathbf{x}^2$准确成立，

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8}A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A_2 = \frac{2}{3} \\ A_1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

插值公式为:$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}f\left(\frac{3}{4}\right)$

具有3次代数精度

练习： $(3)\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0)+A_0 f(x_0)$

解：令原式对于 $f=1, x$ 准确成立，得

$$\begin{cases}\frac{1}{4}+A_0=1\\ A_0X_0=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_0=\frac{3}{4}\\ X_0=\frac{2}{3}\end{cases}$$

求积公式为: $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$

当 $f=x^2$ 时，左边 $=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$，右边 $=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$，准确成立

当 $f=x^3$ 时，左边 $=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$，右边 $=\frac{3}{4}\times\frac{8}{27}=\frac{2}{9}$，不成立

$\therefore$ 具有2阶代数精度

18

4.下列求积公式称作辛甫生3/8公式：

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{8}[f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3)]$$

试判定这一求积公式的代数精度

解：当 $f=1$时，左边 $=3$，右边 $=\frac{3}{8}[1+3+3+1]=$ 左边，准确成立

当 $f=x$时，左边 $=\frac{9}{2}$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+6+3]=$ 左边，准确成立

当 $f=x^2$时，左边 $=9$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+12+9]=$ 左边，准确成立

当 $f=x^3$时，左边 $=\frac{81}{4}$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+24+27]=$ 左边，准确成立

当 $f=x^4$时，左边 $=\frac{243}{5}$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+48+81]=\frac{99}{2}\neq$ 左边，不成立

所以，原式具有3次代数精度

19

题5：证明上述3/8辛普森公式是插值型的

证：设以 $x = 0,1,2,3$ 为节点构造拉格朗日插值多项式

$$p(x) = l_0(x)f(0) + l_1(x)f(1) + l_2(x)f(2) + l_3(x)f(3)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$\int_0^3 l_0(x) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x\right)\Big|_0^3$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18\right] = -\frac{1}{6}\times\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

同理：$\int_0^3 l_1(x) = \frac{9}{8}, \int_0^3 l_2(x) = \frac{9}{8}, \int_0^3 l_3(x) = \frac{3}{8}$

$\therefore$ 该公式是插值型的

16.验证求积公式是三点高斯公式：

$$\int_1^3 f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(2-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(2)+\frac{5}{9}f(2+\sqrt{\frac{3}{5}})$$

证：作变换， $x = 2 + t$,将原式化为：

$$\int_{-1}^1 f(2+t)dt \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

$-\sqrt{\frac{3}{5}}$,0,$\sqrt{\frac{3}{5}}$为高斯点，所以，原式 为三点高斯公式

本章要点：

- 1、掌握求积公式的设计方法
- 2、学会判断求积公式的代数精度
- 3、学会运用求积公式的对称性
- 4、熟练掌握梯形公式、辛普森公式、柯特斯公式
- 5、会使用复化求积法解决问题
- 6、掌握龙贝格算法
- 7、学会用高斯公式的特性解决问题（如代数精度）
- （掌握高斯一点、两点、三点高斯公式，并能用它们来判断一个求积公式是否高斯公式）