合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A）

2019～2020 学年第 二 学期　课程代码 1400221B　课程名称高等数学 A（下）　学分 6　课程性质：必修 ☑、选修☐、限修☐　考试形式：开卷☐、闭卷 ☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2020 年 08 月 25 日 08:00~10:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、设 $z=e^{y-x}$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$__________.

2、曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $\{1,1,2\}$ 处的切平面方程为__________ .

3、交换二重积分次序 $\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 f(x,y)dy=$__________ .

4、设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则该幂级数的收敛区间为__________ .

5、设 L 为半圆 $x^2+y^2=r^2, x\ge 0$，则 $\int_L (x^2+y^2)ds=$__________ .

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、函数 $f(x,y)=\arctan(x^2y)$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度等于（　　）.

（A）$\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$　（B）$\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$　（C）$\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}$　（D）$\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$

2、设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在，且取得极小值，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数等于 0.　（B）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于 0.

（C）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于 0.　（D）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在.

3、设 α 是常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$（　　）.

（A）发散　（B）绝对收敛　（C）条件收敛　（D）敛散性不定

4、设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1. \end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x), -\infty<x<+\infty$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx$ 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)=$______.

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）1

5、设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半部分，并取上侧，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）$\iint\limits_{\Sigma} y^2dydz=0$　（B）$\iint\limits_{\Sigma} ydydz=0$　（C）$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz=0$　（D）$\iint\limits_{\Sigma} xdydz=0$

三、（**本题共 12 分**）设 $f(x,y)$ 具有连续二阶偏导数，且 $z=f(xy,\frac{x^2}{y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（**本题共 10 分**）求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

五、（**本题共 12 分**）计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$，$\Omega$ 是由旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 以及平面 $z=2$ 所包围的立体部分.

六、（**本题共 12 分**）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(xdydz+ydzdx+zdxdy)$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧.

七、（**本题共 12 分**）已知 $f(0)=-\frac{1}{2}$，求可微函数 $f(x)$，使得曲线积分 $\int_L\left[e^x+f(x)\right]ydx-f(x)dy$ 与路径无关，并计算积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[e^x+f(x)\right]ydx-f(x)dy$.

八、（本题共 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$.

命题教师注意事项:1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。　2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

2019～2020 学年第 二 学期　课程代码 1400221B　课程名称高等数学 A（下）　学分 6　课程性质:必修 ☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿＿＿ 考试日期 2020 年 08 月 25 日 08:00~10:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

2019-2020 第二学期高数 A 标准答案

一、填空

1、$-e^{-1}dx+e^{-1}dy$

2、2x+2y-z-2=0

3、$\int_0^2 dy\int_1^{1+y} f(x,y)dx$

4、$(-1,3)$

5、πr^3

二、选择

6、B　　7、A　　8、A　　9、C　　10、D

三、$z''_{xy}=f_1'+xyf_{11}''-\dfrac{2x}{y^2}f_2'+\dfrac{x^2}{y}f_{12}''-\dfrac{2x^3}{y^3}f_{22}''$

四、驻点$(2,-2)$，极大值$f(2,-2)=8$

五、$\dfrac{16\pi}{3}$

六、-4π

七、$f(x)=-\dfrac{1}{2}e^x$，$I=\dfrac{1}{2}e$

八、收敛域$(-1,1)$，$S=\dfrac{1}{(1-x)^3}$，$S\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$

三、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\dfrac{2x}{y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\frac{\partial f_1'}{\partial y}-\frac{2x}{y^2}f_2'+\frac{2x}{y}\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x^2}{y^2}f_{12}''\right)-\frac{2x}{y^2}f_2'+\frac{2x}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x^2}{y^2}f_{22}''\right)$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{2x}{y^2}f_2'+\frac{x^2}{y}f_{12}''-\frac{2x^3}{y^3}f_{22}''$$

四、$\begin{cases} f_x'=4-2x, \\ f_y'=-4-2y, \end{cases}$，求出唯一驻点$(2,-2)$。

$A=f_{xx}''(2,2)=-2<0, B=f_{xy}''(2,2)=0, C=f_{yy}''(2,2)=-2<0$

由于 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$，故$f(x,y)$在$(2,-2)$处取得极大值 8。

五、$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz$

$$=2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=\frac{16\pi}{3}$$

六、$I=\iint\limits_{\Sigma}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$，记 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$。由高斯公式，

$$I=-\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}3dv$$

$$=-3\times\frac{4}{3}\pi$$

$$=-4\pi$$

命题教师注意事项:1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。　2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

2019～2020 学年第 二 学期 课程代码 1400221B 课程名称高等数学 A（下） 学分 6 课程性质:必修 ☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿ 考试日期 2020 年 08 月 25 日 08:00~10:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

七、由题意，$f'(x)+f(x)=-\mathrm{e}^x$ 解方程得 $f(x)=\mathrm{Ce}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$，

又 $f(0)=-\frac{1}{2}$，所以 $\mathrm{C}=0$，因此 $f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$。

由于与路径无关，故取平行于坐标轴的特殊路径积分，得

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[e^x+f(x)\right]ydx-f(x)dy$$

$$=\int_0^1 0dx+\int_0^1\left[-f(1)\right]dy$$

$$=\frac{e}{2}$$

八、收敛区间 $(-1,1)$，将 $x=\pm1$ 带入，级数均发散，故收敛域为 $(-1,1)$。

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$，$S_1(x)=\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2}x^n$，

$S_2(x)=\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}x^{n+1}=\frac{x^2}{2(1-x)}$，

故 $S_1(x)=S'_2(x)=\frac{2x-x^2}{2(1-x)}$，

$S(x)=S'_1(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=8$。