合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

2020～2021 学年第 二 学期 课程代码 1400221B 课程名称高等数学 A（下） 学分 6 课程性质:必修 ☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷 ☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2021 年 07 月 20 日 10:20~12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设$f(x+y,xy)=x^2+xy+y^2$，则$f(x,y)$在点$(2,1)$处的微分$df|_{(2,1)}=$_______.

2. 空间曲线Γ:$\begin{cases} y=x^2, \\ z=2x^3 \end{cases}$在点$(1,1,2)$处的切线方程为________.

3. 设$f(x)=\int_x^1 \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

4. 设曲线L的方程:$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$,，则$\int_L (x-y)^3\mathrm{d}s=$_______.

5. 无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=$_______.

二、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数y_1,y_2,y_3是二阶非齐次线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个线性无关的解，且C_1,C_2是任意常数，则该方程的通解为（）.

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

2.直线L:$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$与平面$\pi$:$x+4y+2z=3$的关系为（）.

(A) 在平面内　　(B) 平行，但不在平面内

(C) 垂直　　(D) 相交，但不垂直

3. 设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则在下列结论中，正确的个数为（）.

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的极限存在

② $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数存在

④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任意方向的方向导数都存在

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 设曲面Σ的方程为$z=x^2+y^2(z\le 1)$，则$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S=$（）.

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

5.下列级数绝对收敛的是（）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})$(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^2}$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n}$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$

三、（本题满分 10 分）设$u=f(x+y,z)$，其中f有二阶连续偏导数，且$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2-z^2=1$确定，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 12 分）设函数$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，

(1) 求该函数在点$(1,1)$处的最大方向导数；

(2) 求该函数在曲线L: $3x^2-2xy+3y^2=4$上的最大方向导数.

五、（本题满分 12 分）计算积分$I=\iint\limits_{D}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$x+y=2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，以及$x$轴和$y$轴所围的第一象限内的区域.

六、（本题满分 12 分）设平面曲线积分$\int_L yf(x)\mathrm{d}x+(f'(x)+2y)\mathrm{d}y$在全平面上与积分路径无关，其中$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=2,f'(0)=0$.

(1)求$f(x)$；

(2) 计算曲线积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)\mathrm{d}x+(f'(x)+2y)\mathrm{d}y$.

七、（本题满分 12 分）设曲面Σ的方程为$z=\sqrt{x^2+y^2}(z\le 1)$，取下侧，计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}2x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

八、（本题满分 12 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^n$的收敛域及和函数$S(x)$.

2020～2021 学年第 二 学期　课程代码 1400221B　课程名称高等数学 A（下）　学分 6　课程性质：必修 ☑、选修☐、限修☐　考试形式：开卷☐、闭卷 ☑

专业班级（教学班）________________ 考试日期 2021 年 07 月 20 日 10:20~12:20　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名________________

2020-2021 学年《高等数学 A》(下)期末考试试卷 A 卷

【参考答案】

一、填空题（每题 3 分，共 12 分）

1. 设$f(x+y,xy)=x^2+xy+y^2$，则$f(x,y)$在点(2,1)处的微分$df|_{(2,1)}=$ __________.

答案：$4dx-dy$.

解：$f(x+y,xy)=(x+y)^2-xy$,所以$f(x,y)=x^2-y$,

故$df=2xdx-dy$，从而$df|_{(2,1)}=4dx-dy$.

2. 空间曲线$\Gamma:\begin{cases}y=x^2\\z=2x^3\end{cases}$,在$x=1$处的切线方程为__________________.

答案：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{6}$

解：切向量$s=\{1,2x,6x^2\}|_{x=1}=\{1,2,6\}$,

故切线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{6}$.

3. 设$f(x)=\int_x^1\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ __________.

答案：$1-\cos 1$

解：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_0^1 dy\int_0^y\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1 \sin y dy=1-\cos 1$.

或$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=1-\cos 1$.

4. 设曲线L的方程:$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$,，则$\int_L(x-y)^3\mathrm{d}s=$ ________.

答案：0

解：因为L关于$y=x$对称，所以$\int_L(x-y)^3\mathrm{d}s=\int_L(y-x)^3\mathrm{d}s=-\int_L(x-y)^3\mathrm{d}s$

故$\int_L(x-y)^3\mathrm{d}s=0$.

5. 无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=$ __________.

答案：$\frac{1}{2}$

解：$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2},(n\to\infty)$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数y_1,y_2,y_3是二阶非齐次线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个线性无关的解，且C_1,C_2是任意常数，则该方程的通解为（　　）.

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

答案：D

解：由定理可知y_1-y_3,y_2-y_3为二阶齐次微分方程的特解，y_3为非齐次方程特解，故通解为

$$C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3.$$

2.直线$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$与平面$\pi:x+4y+2z=3$的关系为（　　）.

(A) 在平面内　　(B) 平行，但不在平面内

(C) 垂直　　(D) 相交，但不垂直

答案：B

解：直线方向向量为$s=\{2,-1,1\}$,平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{1,4,2\}$,

由于$s\cdot n=2\cdot1+(-1)\cdot4+1\cdot2=0$，故直线与平面平行，

又直线上点(1,2,3)不满足平面方程，即不在平面内，故选 B.

3. 设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则在下列结论中，正确的个数为（　　）.

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的极限存在

② $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数存在

④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿任意方向的方向导数都存在

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2020～2021 学年第 二 学期　课程代码 1400221B　课程名称高等数学 A（下）　学分 6　课程性质:必修 ☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿＿＿考试日期 2021 年 07 月 20 日 10:20~12:20　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿＿＿

答案：D

解：由可微的必要条件可知②、③正确，由连续的定义可知①正确，由方向导数存在的充分条件可知④正确。故选 D.

4. 设曲面Σ的方程为$z = x^2 + y^2 (z \le 1)$，则$\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathrm{d}S =$（　　）.

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

答案：C

解：$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy$，$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 1$

故$\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$.

5.下列级数绝对收敛的是　（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n})$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$

答案：A

解：$n \to \infty$，$e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$收敛，所以原级数收敛，也即绝对收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{2^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} = 2 > 1$，故原级数不是绝对收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以不是绝对收敛，

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n^2} = 1 \ne 0$,故级数发散。

三、（本题满分 10 分）设$u = f(x+y, z)$，其中f有二阶连续偏导数，且$z = z(x,y)$由隐函数$x^2 + y^2 - z^2 = 1$确定，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解：(1). 令$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$,由隐函数求导法则可知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{y}{z}.$$

(2). $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2' \frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2' \frac{x}{z}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + f_2' \cdot \left(-\frac{x}{z^2}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x}{z} f_{21}'' + \frac{x}{z} f_{22}'' \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= f_{11}'' + \frac{y}{z} f_{12}'' - \frac{xy}{z^3} f_2' + \frac{x}{z} f_{21}'' + \frac{xy}{z^2} f_{22}''$$

$$= f_{11}'' + \frac{x+y}{z} f_{12}'' - \frac{xy}{z^3} f_2' + \frac{xy}{z^2} f_{22}''$$

四、（本题满分 12 分）设函数$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，

(1) 求该函数在点(1,1)处的最大方向导数；

(2) 求该函数在曲线$L: 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$上的最大方向导数.

解(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = x, \frac{\partial z}{\partial y} = y$,

故最大方向导数$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)} = \left.\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\right|_{(1,1)} = \sqrt{2}$.

(2)曲线上任取一点(x,y)，则该点的方向导数最大值为$\frac{\partial z}{\partial l} = \sqrt{x^2 + y^2}$，

构造拉格朗日函数$L = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4)$，

$$\begin{cases} L_x' = 2x + 6x\lambda - 2y\lambda = 0 \\ L_y' = 2y + 6y\lambda - 2x\lambda = 0 \\ 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得驻点为(1,1)，$(-1,-1)$，$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(-1,-1)} = \sqrt{2}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})} = \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = 1.$$

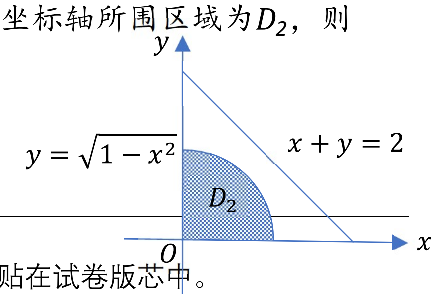
故最大方向导数值为$\sqrt{2}$.

五、（本题满分 12 分）计算积分$I = \iint\limits_{D} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$x + y = 2$，$y = \sqrt{1 - x^2}$，以及$x$轴和$y$轴所围的第一象限内的区域.

解：　设$x + y = 2$与两个坐标轴所围三角形区域为D_1，圆与两个坐标轴所围区域为D_2，则

$I = \iint\limits_{D_1} x^2 dxdy - \iint\limits_{D_2} x^2 dxdy$

$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} x^2 \, dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos^2\theta \, r dr$



$$= \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)_0^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{16}.$$

六、（本题满分 12 分）设平面曲线积分$\int_L yf(x)\mathrm{d}x + (f'(x) + 2y)\mathrm{d}y$在全平面上与积分路径无关，其中$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0) = 2, f'(0) = 0$.

(1)求$f(x)$；(2) 计算曲线积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)\mathrm{d}x + (f'(x) + 2y)\mathrm{d}y$.

解(1) 令$P(x,y) = yf(x)$，$Q(x,y) = f'(x) + 2y$，

由题意可知$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，即$f''(x) = f(x)$.

特征方程为$r^2 = 1$，特征根为$r_1 = -1, r_2 = 1$，故通解为$f(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$，

代入初值条件，可得特解为$f(x) = e^{-x} + e^{x}$.

(2) 解法一 由题意可知存在可微函数$u(x,y)$，使得$du = y(e^{-x} + e^{x})dx + (e^{x} - e^{-x} + 2y)dy$，利用不定积分法或曲线积分方法可求得

$$u(x,y) = y(e^{x} - e^{-x}) + y^2$$

故$\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)dx + (f'(x) + 2y)dy = [y(e^{x} - e^{-x}) + y^2]\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = e - e^{-1} + 1.$

解法二 取路径$L = L_1 + L_2$，$L_1: y = 0, x: 0 \to 1$，$L_2: x = 1, y: 0 \to 1$，则

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} y(e^{-x} + e^{x})dx + (e^{x} - e^{-x} + 2y)dy = \int_0^1 0dx + \int_0^1 (e - e^{-1} + 2y)dy$$

$$= e - e^{-1} + 1.$$

七、（本题满分 12 分）设曲面Σ的方程为$z = \sqrt{x^2 + y^2}(z \le 1)$，取下侧，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma 2x^2 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 补充曲面$\Sigma_1: z = 1(x^2 + y^2 \le 1)$，取上侧

则$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^2zdydz + yzdzdx + 2z^2dxdy = \iiint_\Omega (4xz + z + 4z)dV$

$$= \iiint_\Omega (4xz + 5z)dV$$

由于Ω关于yoz对称，所以$\iiint_\Omega 4xzdV = 0$.

$$\iiint_\Omega 5zdV = 5\int_0^1 z\cdot\pi z^2 dz = \frac{5\pi}{4}.$$

又$\iint_{\Sigma_1} 2x^2zdydz + yzdzdx + 2z^2dxdy = \iint_{\Sigma_1} 2z^2dxdy$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} 2dxdy = 2\pi,$$

故

$$\iint_\Sigma 2x^2zdydz + yzdzdx + z^2dxdy = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = -\frac{3}{4}\pi.$$

八、（本题满分 12 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-1)^n$的收敛域及和函数$S(x)$.

解：令$t = x - 1$，先考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^2t^n$，

$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = 1$，收敛半径为$R = \frac{1}{\rho} = 1$，故收敛区间为$(-1,1)$，

当$t = \pm 1$时，$\lim_{n\to\infty} n^2t^n \ne 0$，级数发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty} n^2t^n$的收敛域为$(-1,1)$，故原级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-1)^n$的收敛域为$(0,2)$

对$\forall t \in (-1,1)$，

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2t^n = t\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^{n-1} - t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$$

$$= t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\right)'' - t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)' = t\left(\frac{t^2}{1-t}\right)'' - t\left(\frac{t}{1-t}\right)'$$

$$= \frac{2t}{(1-t)^3} - \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$$

从而原级数的和函数为$S(x) = \frac{x(x-1)}{(2-x)^3}$，$x \in (0,2)$.