《数理金融初步》Ross 习题参考答案

答案主要来源为英文答案的翻译与国外几位教师的手写答案 (两者均不完整，链接如下)，仅供参考.

英文答案链接

目录

第 1 章　概率论

1.1 解:

a) $P(\text{至少 4 个错误}) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - 0.20 - 0.35 - 0.25 - 0.15 = 0.05.$

b) $P(\text{至多 2 个错误}) = p_0 + p_1 + p_2 = 0.20 + 0.35 + 0.25 = 0.80.$

1.2 解:
记多云为 C，雨天为 R，则

$$P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0.40 + 0.30 - 0.20 = 0.50.$$

1.3 解:

a) $P(\text{2 人均为女士}) = \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{4}{13}.$

b) $P(\text{2 人均为男士}) = \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}.$

c) $P(\text{一位男士和一位女士}) = \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} = \frac{48}{91}.$

1.4 解:
记会国际象棋为 C，会打桥牌为 B，则

a) $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{27/120}{(58+27)/120} = \frac{27}{85}.$

b) $P(B|C) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{27/120}{(35+27)/120} = \frac{27}{62}.$

1.5 解: 注意：b) 问由于翻译原因，容易理解为并列关系，但根据英文原文，应该理解为在没有发病的条件下，求携带一个 CF 基因的条件概率.

a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

b) 由于他有兄弟姐妹死于这种疾病，说明其父母各携带一个 CF 基因，则

$$P(\text{携带一个 CF 基因}\big|\text{没有发病}) = \frac{P(\text{携带一个 CF 基因} \cap \text{没有发病})}{P(\text{没有发病})} = \frac{\binom{2}{1}(1/2)^2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

1.6 解:

$$P(\text{都是 A}\big|\text{花色不同}) = \frac{P(\text{都是 A} \cap \text{花色不同})}{P(\text{花色不同})} = \frac{P(\text{都是 A})}{P(\text{花色不同})} = \frac{\frac{4}{52}\frac{3}{51}}{\binom{4}{1}\frac{13}{52}\frac{39}{51}} = \frac{1}{169}.$$

1.7 证:

a)

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c).$$

b)

$$P(A^cB^c) = P(B^cA^c) = P(B^c) - P(AB^c) = P(B^c) - P(A)P(B^c) = P(B^c)[1 - P(A)] = P(A^c)P(B^c).$$

1.8 **解**: 注意：由于翻译原因，“可以进行”指的是一定会进行；“以此类推”是多余的，即两局必结束；X 不是赢的局数，而是赢的 (钱) 数.

记 R_i 为第 i 次的结果为红，则

a) 易知 $X = 1, -3$，则

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(R_1) + P(R_1^c \cap R_2) = \frac{18}{38} + \frac{20}{38} \times \frac{18}{38} = \frac{261}{361}, \\
P(X=-3) &= P(R_1^c \cap R_2^c) = \frac{20}{38} \times \frac{20}{38} = \frac{100}{361}.
\end{aligned}
$$

所以 $P(X>0) = P(X=1) = \dfrac{261}{361}$.

b) $E(X) = 1 \times \dfrac{261}{361} - 3 \times \dfrac{100}{361} = -\dfrac{39}{361}$.

1.9 **解**:

a) $E(X) > E(Y)$.

b)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{39}{152} \times 39 + \frac{33}{152} \times 33 + \frac{46}{152} \times 46 + \frac{34}{152} \times 34 = \frac{2941}{76}, \\
E(Y) &= \frac{39+33+46+34}{4} = 38 < \frac{2941}{76}.
\end{aligned}
$$

1.10 **解**:

易知，比赛总局数 $X = 2, 3$，则

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2 \times \binom{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 3 \times \left[1 - \binom{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{2}, \\
\mathrm{Var}(X) &= 2^2 \times \binom{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \left[1 - \binom{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

1.11 **证**:

记 $\mu = E(X)$，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}
$$

1.12 **解**:

a) $E(X) = 5000, \mathrm{Var}(X) = 0, \sigma(X) = 0$.

b)

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= 0.3 \times 25000 + 0.7 \times 0 = 7500, \\
\mathrm{Var}(Y) &= 0.3 \times 25000^2 + 0.7 \times 0 - 7500^2 = 1.3125 \times 10^8, \\
\sigma(Y) &= \sqrt{1.3125} \times 10^4.
\end{aligned}
$$

1.13 证:

a)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times \mu = \mu.$$

b)

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}n\bar{X} + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}E(S^2) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - nE(\bar{X}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 + n\mu^2 - n \times \frac{\sigma^2}{n} - n\mu^2\right) = \sigma^2\end{aligned}$$

1.14 证:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

1.15 证:

a)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E\{[Y - E(Y)][X - E(X)]\} = \mathrm{Cov}(Y,X).$$

b)

$$\mathrm{Cov}(X,X) = E\{[X - E(X)][X - E(X)]\} = E\{[X - E(X)]^2\} = \mathrm{Var}(X).$$

c)

$$\mathrm{Cov}(cX,Y) = E\{[cX - E(cX)][Y - E(Y)]\} = E\{c[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = c\mathrm{Cov}(X,Y).$$

d)

$$\mathrm{Cov}(c,Y) = E\{[c - E(c)][Y - E(Y)]\} = E(0) = 0.$$

1.16 解:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{Cov}(aU+bV,cU+dV) = \operatorname{Cov}(aU,cU+dV)+\operatorname{Cov}(bV,cU+dV)\\ &= \operatorname{Cov}(aU,cU)+\operatorname{Cov}(aU,dV)+\operatorname{Cov}(bV,cU)+\operatorname{Cov}(bV,dV)\\ &= ac+bd\end{aligned}$$

1.17 解:

a) $\operatorname{Cov}(X_1+X_2,X_3+X_4) = \operatorname{Cov}(X_1,X_3)+\operatorname{Cov}(X_1,X_4)+\operatorname{Cov}(X_2,X_3)+\operatorname{Cov}(X_2,X_4) = 3+4+6+8 = 21.$

b)

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1+X_2+X_3,X_2+X_3+X_4) &= \operatorname{Cov}(X_1,X_2)+\operatorname{Cov}(X_1,X_3)+\operatorname{Cov}(X_1,X_4)\\ &\quad+\operatorname{Cov}(X_2,X_2)+\operatorname{Cov}(X_2,X_3)+\operatorname{Cov}(X_2,X_4)\\ &\quad+\operatorname{Cov}(X_3,X_2)+\operatorname{Cov}(X_3,X_3)+\operatorname{Cov}(X_3,X_4)\\ &= 2+3+4+4+6+8+6+9+12 = 54\end{aligned}$$

1.18 解:

记 X_i 为第 i 时间段的变化量，且 X_i 与 X_j 相互独立 $(i \neq j)$，易知：$Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$，则

$$\begin{aligned}E(X_1) &= 1\times\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2} = 0,\\ \operatorname{Var}(X_1) &= 1^2\times\frac{1}{2}+(-1)^2\times\frac{1}{2}-0 = 1,\\ \operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{Cov}(X_1,X_1) = \operatorname{Var}(X_1) = 1,\\ \operatorname{Cor}(X,Y) &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3\cdot 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

1.19 解:

不能. 因为此时 $\operatorname{Cor}(X,Y) = \dfrac{2}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 2 \notin [-1,1]$.

1.20 证:

$$\begin{aligned}\sum_y h(y)P(Y=y) &= \sum_i \sum_{h(y)=h_i} h(y)P(Y=y)\\ &= \sum_i \sum_{h(y)=h_i} h_i P(Y=y)\\ &= \sum_i h_i \sum_{h(y)=h_i} P(Y=y)\\ &= \sum_i h_i P[h(Y)=h_i]\end{aligned}$$

1.21 解:

$P(X=i) = F(i)-F(i^-) = F(i)-F(i-1).$

第 2 章　正态随机变量

2.1 解:

a) $P(Z<-0.66)=P(Z>0.66)=1-P(Z<0.66)=1-\Phi(0.66)=1-0.7454=0.2546.$

b) $P(|Z|<1.64)=2\Phi(1.64)-1=2\times0.9495-1=0.8990.$

c) $P(|Z|>2.20)=2P(Z>2.20)=2[1-\Phi(2.20)]=2(1-0.9861)=0.0278.$

2.2 解:

根据标准正态分布的对称性，易知 $x=2$.

2.3 证:

$$P(|Z|>x)=P(Z<-x)+P(Z>x)=2P(Z<x)\quad(x>0).$$

2.4 解:

易知：$E(Y)=a+b\mu,\mathrm{Var}(Y)=b^2\sigma^2$，则可得

$$\begin{cases}a=0,\\ b=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}a=2\mu,\\ b=-1,\end{cases}$$

因为 $a\neq0$，所以 $a=2\mu,b=-1$，此时 $\mathrm{Cov}(X,Y)=b\mathrm{Var}(Y)=-\sigma^2$.

2.5 解:

利用 3σ 准则，则

a) 68% 的值落在 1 个标准差的范围内，即 127.7 ± 19.2.

b) 95% 的值落在 2 个标准差的范围内，即 $127.7\pm2\times19.2=127.7\pm38.4$.

c) 99.7% 的值落在 3 个标准差的范围内，即 $127.7\pm3\times19.2=127.7\pm57.6$.

2.6 解:

设两节电池的寿命分别为 X_1,X_2，且均独立同分布于 $N(400,50^2)$，则

a) $X_1+X_2\sim N(800,2\times50^2)$，则

$$P(X_1+X_2>760)=P\left(Z>\frac{760-800}{50\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)\approx0.7142.$$

b) $X_2-X_1\sim N(0,2\times50^2)$，则

$$P(X_2-X_1>25)=P\left(Z>\frac{25-0}{50\sqrt{2}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\approx0.3618.$$

c) $X_1-X_2\sim N(0,2\times50^2)$，则

$$P(|X_1-X_2|>25)=2P(X_2-X_1>25)\approx0.7236.$$

2.7 解:

记 X_i 为冲洗第 i 张照片的时间，$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$，所以 $X \sim N(1800, 100)$，则

a)

$$P(X > 1710) = P\left(Z > \frac{1710 - 1800}{10}\right) = \Phi(9) \approx 1.$$

b)

$$P(1690 < X < 1710) = P\left(\frac{1690 - 1800}{10} < Z < \frac{1710 - 1800}{10}\right) = \Phi(-9) - \Phi(-11) = \Phi(11) - \Phi(9) \approx 0.$$

2.8 解:

记 X_i 为第 i 位乘客的飞行距离，$X = \sum_{i=1}^{30} X_i$，所以 $X \sim N(750000, 30 \times 12000^2)$，则

a)

$$P\left(\frac{X}{30} > 25000\right) = P\left(Z > \frac{25000 - 25000}{12000\sqrt{30}}\right) = \Phi(0) = 0.5.$$

b)

$$P\left(23000 < \frac{X}{30} < 27000\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right) - 1 \approx 0.6388.$$

2.9 解:

记 S_i 为 i 单位时间后的股价，定义 $X_i = \frac{S_{i+1}}{S_i}$，即 $X_i = \begin{cases} u, & \text{概率为} p \\ d, & \text{概率为} 1-p \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$,

所以所求为

$$P\left(\frac{S_{1000}}{S_0} > 1.3\right) = P\left(\prod_{i=0}^{999} X_i > 1.3\right) = P\left(\sum_{i=0}^{999} \ln X_i > \ln 1.3\right),$$

由于

$$E\left(\sum_{i=0}^{999} \ln X_i\right) = 1000E(\ln X_i) = 1000[p \ln u + (1-p)\ln d] \approx 1.3787,$$

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=0}^{999} \ln X_i\right) = 1000\operatorname{Var}(\ln X_i) = 1000\{p \ln^2 u + (1-p)\ln^2 d - [p \ln u + (1-p)\ln d]^2\} \approx 0.1206,$$

所以

$$P\left(\frac{S_{1000}}{S_0} > 1.3\right) = P\left(\sum_{i=0}^{999} \ln X_i > \ln 1.3\right) \approx P\left(Z > \frac{\ln 1.3 - 1.3787}{\sqrt{0.1206}}\right) \approx \Phi(3.2146) \approx 0.9993.$$

2.10 解:

记 X_i 为第 i 个时间段股价的变化，$X = \sum_{i=1}^{700} X_i$，则

$$E(X) = 700E(X_i) = 700(-0.39 + 0.41) = 14,$$
$$\operatorname{Var}(X) = 700\operatorname{Var}(X_i) = 700(0.39 + 0.41 - 0.02^2) = 559.72,$$

所以

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 14}{\sqrt{559.72}}\right) \approx \Phi(0.1691) = 0.5671.$$

第 3 章　布朗运动与几何布朗运动

3.1 证:

令 $Y(t)=-X(t)(t\geq 0)$，则 $Y(0)=-X(0)=0$ 是一个常数；而

$$Y(t+y)-Y(y)=-X(t+y)+X(y)=-[X(t+y)-X(y)],$$

由于 $X(t+y)-X(y)\sim N(\mu t,t\sigma^2)$，所以 $Y(t+y)-Y(y)=-[X(t+y)-X(y)]\sim N(-\mu t,t\sigma^2)$，所以 $-X(t)(t\geq 0)$ 是一个漂移参数为 $-\mu$，方差参数为 σ^2 的布朗运动.

3.2 解:

a) $E[X(2)]=E[X(2)-X(0)+X(0)]=E[X(2)-X(0)+10]=10+E[X(2)-X(0)]=10+3\times 2=16.$

b) $\mathrm{Var}[X(2)]=\mathrm{Var}[X(2)-X(0)+X(0)]=\mathrm{Var}[X(2)-X(0)+10]=\mathrm{Var}[X(2)-X(0)]=2\times 9=18.$

c)

$$P[X(2)>20]=P\left(Z>\frac{20-16}{\sqrt{18}}\right)=1-\Phi(0.9428)=\Phi(-0.9428)=0.1729.$$

d) 由于 $E[X(0.5)]=10+0.5\times 3=11.5,\mathrm{Var}[X(0.5)]=0.5\times 9=4.5$，则

$$P[X(0.5)>10]=P\left(Z>\frac{10-11.5}{\sqrt{4.5}}\right)=\Phi(0.7071)=0.7602.$$

3.3 解:

a) $E[X(1)]=10+E[X(1)-X(0)]=10+3\times 1=13.$

b) 由于 $2p-1=\dfrac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\mathrm{Var}[X(1)]=1\times 9\times\left[1-\dfrac{1}{10}\right]=8.1.$

c) $p=\dfrac{10+\sqrt{10}}{20}$，在 0.5 时刻，经过了 5 次变化，所以不适合用正态分布近似. 由于 $X(0)=10$，所以 5 次变化中，增加的次数多于减少的次数，所以

$$P[X(0.5)>10]=\binom{5}{5}p^5+\binom{5}{4}p^4(1-p)+\binom{5}{3}p^3(1-p)^2\approx 0.7773.$$

3.4 解:

a) $P[S(1)>S(0)]=P\left[\dfrac{S(1)}{S(0)}>1\right]=P\left[\ln\dfrac{S(1)}{S(0)}>0\right]=P\left(Z>\dfrac{0-0.1}{\sqrt{0.2^2}}\right)=\Phi(0.5)=0.6915.$

b) $P[S(2)>S(1)>S(0)]=P[S(2)>S(1),S(1)>S(0)]=P[S(2)>S(1)]P[S(1)>S(0)]=\{P[S(1)>S(0)]\}^2=0.6915^2=0.4781.$

c)

$$\begin{aligned}P[S(3)<S(1)>S(0)]&=P[S(3)<S(1),S(1)>S(0)]=P[S(3)<S(1)]P[S(1)>S(0)]\\&=\Phi(0.5)P\left[\ln\frac{S(3)}{S(1)}<0\right]=\Phi(0.5)P\left(Z<\frac{0-0.2}{\sqrt{2\times 0.2^2}}\right)\\&=\Phi(0.5)\Phi(0.7071)=0.5257\end{aligned}$$

3.5 解:

a) $P[S(1)>S(0)]=P\left[\frac{S(1)}{S(0)}>1\right]=P\left[\ln\frac{S(1)}{S(0)}>0\right]=P\left(Z>\frac{0-0.1}{\sqrt{0.4^2}}\right)=\Phi(0.25)=0.5987.$

b) $P[S(2)>S(1)>S(0)]=P[S(2)>S(1),S(1)>S(0)]=P[S(2)>S(1)]P[S(1)>S(0)]=\{P[S(1)>S(0)]\}^2=0.5987^2=0.3584.$

c)

$$
\begin{aligned}
P[S(3)<S(1)>S(0)]&=P[S(3)<S(1),S(1)>S(0)]=P[S(3)<S(1)]P[S(1)>S(0)]\\
&=\Phi(0.25)P\left[\ln\frac{S(3)}{S(1)}<0\right]=\Phi(0.25)P\left(Z<\frac{0-0.2}{\sqrt{2\times0.4^2}}\right)\\
&=\Phi(0.25)\Phi(0.3536)=0.3821
\end{aligned}
$$

3.6 解:

$$
\begin{aligned}
E[S(t)]&=E[s\mathrm{e}^{X(t)}]=sE[\mathrm{e}^{X(t)}]=s\mathrm{e}^{\mu t+t\sigma^2/2},\\
E[S^2(t)]&=E[s^2\mathrm{e}^{2X(t)}]=s^2E[\mathrm{e}^{2X(t)}]=s^2\mathrm{e}^{2\mu t+2t\sigma^2},\\
\mathrm{Var}[S(t)]&=E[S^2(t)]-E^2[S(t)]=s^2\mathrm{e}^{2\mu t+t\sigma^2}(\mathrm{e}^{t\sigma^2}-1).
\end{aligned}
$$

3.7 证:

根据教材有

$$P(T_y\le t)=\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2}\bar{\Phi}\left(\frac{y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\bar{\Phi}\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

所以当 $\mu\ge0$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}P(T_y<t)=\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2}\lim_{t\to\infty}\bar{\Phi}\left(\frac{y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\lim_{t\to\infty}\bar{\Phi}\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)=0\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2}+1=1,$$

当 $\mu<0$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}P(T_y<t)=\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2}\lim_{t\to\infty}\bar{\Phi}\left(\frac{y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\lim_{t\to\infty}\bar{\Phi}\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)=1\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2}+0=\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2},$$

所以

$$P(T_y<\infty)=\begin{cases}1, & \mu\ge0\\ \mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2}, & \mu<0\end{cases}.$$

当 $\mu<0$ 时，

$$P(M>y)=P(T_y<\infty)=\mathrm{e}^{2y\mu/\sigma^2},$$

所以 M 服从比率为 $-\dfrac{2\mu}{\sigma^2}$ 的指数分布.

3.8 解:

利用 $S(t)=s\mathrm{e}^{X(t)}$，则

$$
\begin{aligned}
P\left(\max_{0\ge v\le t}S(v)\le y\right)&=P\left(\max_{0\le v\le t}X(v)\ge\ln\frac{y}{s}\right)\\
&=\mathrm{e}^{2\ln\frac{y}{s}\mu/\sigma^2}\bar{\Phi}\left(\frac{\ln\frac{y}{s}+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\bar{\Phi}\left(\frac{\ln\frac{y}{s}-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\\
&=\left(\frac{y}{s}\right)^{2\mu/\sigma^2}\bar{\Phi}\left(\frac{\ln\frac{y}{s}+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)+\bar{\Phi}\left(\frac{\ln\frac{y}{s}-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}
$$

3.9 **解**:

利用上一题结论，则

$$
\begin{aligned}
&P\left(\max_{0\le v\le 1} S(v) < 1.2S(0)\right) = P\left(\max_{0\le v\le 1} X(v) < \ln 1.2\right) \\
=&1-\left(\frac{y}{s}\right)^{2\mu/\sigma^2}\bar{\Phi}\left(\frac{\ln\frac{y}{s}+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-\bar{\Phi}\left(\frac{\ln\frac{y}{s}-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
=&1-1.2^{2\times 0.1/(0.3^2)}\bar{\Phi}\left(\frac{\ln 1.2+0.1}{0.3}\right)-\bar{\Phi}\left(\frac{\ln 1.2-0.1}{0.3}\right) \\
=&1-1.2^{20/9}\bar{\Phi}(0.9411)-\bar{\Phi}(0.2744)=0.3482
\end{aligned}
$$

第 4 章　利率和现值分析

4.1 解:

a) $r_{\text{eff}a} = (1+0.1/2)^2 - 1 = 10.25\%$.

b) $r_{\text{eff}b} = (1+0.1/4)^4 - 1 \approx 10.38\%$.

c) $r_{\text{eff}c} = \mathrm{e}^{0.1} - 1 \approx 10.52\%$.

4.2 解:

设需要 n 年钱变为两倍，则

$$\mathrm{e}^{0.1n} = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{0.1} \approx 6.93.$$

4.3 解:

设需要 n 年钱变为四倍，则

$$(1+0.05)^n = 4 \Rightarrow n \approx 28.41,$$
$$(1+0.04)^n = 4 \Rightarrow n \approx 35.35.$$

4.4 解:

设需要 n 年钱变为三倍，则

$$\mathrm{e}^{nr} \approx (1+r)^n = 3 \Rightarrow n \approx \frac{\ln 3}{r}.$$

4.5 解: 注意：每月支付说明有 60 次投资.

设需要投资 x 元，则

$$x\sum_{i=1}^{60}(1+0.06/12)^i = \frac{1.005x(1-1.005^{60})}{1-1.005} = 100000 \Rightarrow n \approx 1426.15.$$

4.6 解:

计算现值：

$$-1000 + \frac{-1200}{1.06} + \frac{800}{1.06^2} + \frac{900}{1.06^3} + \frac{800}{1.06^4} = -30.75 < 0,$$

所以这不是一个值得的投资.

4.7 解:

记这两个现金流的现值分别为 S_1, S_2，则

$$S_1 = \frac{20}{1+r} + \frac{20}{(1+r)^2} + \frac{20}{(1+r)^3} + \frac{15}{(1+r)^4} + \frac{10}{(1+r)^5} + \frac{5}{(1+r)^6},$$
$$S_2 = \frac{10}{1+r} + \frac{10}{(1+r)^2} + \frac{15}{(1+r)^3} + \frac{20}{(1+r)^4} + \frac{20}{(1+r)^5} + \frac{20}{(1+r)^6}.$$

a) $r = 0.03, S_1 = 82.71, S_2 = 84.63$，第二个现金流更可取.

b) $r = 0.05, S_1 = 78.37, S_2 = 78.60$，第二个现金流更可取.

c) $r = 0.10, S_1 = 69.01, S_2 = 65.99$，第一个现金流更可取.

4.8 **解**:

记现值为 S，则

$$S = -10000 + \sum_{i=1}^{10} \frac{500}{(1+r/2)^i} + \frac{10000}{(1+r/2)^{10}},$$

a) $r = 0.06, S = 1706.04.$

b) $r = 0.10, S = 0.$

c) $r = 0.12, S = -736.01.$

4.9 **解**:

记有效利率为 r，则

$$4200 - 1000 = 160 \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(1+r)^i} \Rightarrow \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{24}}{4} = 20 \Rightarrow r = 0.15.$$

4.10 **解**:

第一个现金流序列的现值为

$$22 + \frac{7}{1.2} + \frac{8}{1.2^2} + \frac{9}{1.2^3} + \frac{10}{1.2^4} - \frac{4}{1.2^5} = 41.812,$$

第二个现金流序列的现值为

$$9 + \frac{24}{1.2} + \frac{7}{1.2^2} + \frac{8}{1.2^3} + \frac{9}{1.2^4} - \frac{8}{1.2^5} = 39.616,$$

第三个现金流序列的现值为

$$9 + \frac{11}{1.2} + \frac{26}{1.2^2} + \frac{7}{1.2^3} + \frac{8}{1.2^4} - \frac{12}{1.2^5} = 39.309,$$

第四个现金流序列的现值为

$$9 + \frac{11}{1.2} + \frac{13}{1.2^2} + \frac{28}{1.2^3} + \frac{7}{1.2^4} - \frac{16}{1.2^5} = 40.344,$$

因此，公司应在一年后购买新机器.

4.11 **解**:

这家公司可以在第 1、2、3、4 年的年初购买新机器，其对应的六年现金流如下 (以 1000 美元为单位)：

- 在第一年的年初购买新机器：22，7，8，9，10，-4
- 在第二年的年初购买新机器：9，25，7，8，9，-9
- 在第三年的年初购买新机器：9，11，28，7，8，-14
- 在第四年的年初购买新机器：9，11，13，31，7，-19

对于年利率 $r = 0.10$，第一个现金流序列的现值为

$$22 + \frac{7}{1.1} + \frac{8}{1.1^2} + \frac{9}{1.1^3} + \frac{10}{1.1^4} - \frac{4}{1.1^5} = 46.08,$$

其他现金流的现值可用同样的方法计算出. 这四个现金流的现值分别是

$$46.08, 44.08, 44.17, 46.02,$$

因此，公司应在一年后购买新机器.

4.12 解:

由于银行收取两个百分点的费用，这个贷款的实际费用为 $120000 \times 0.98 = 117600$. 每月需要支付利息 $120000 \times 0.5\% = 600$. 所以该贷款的现金流为

时间	0	1	2	$\cdots$	35	36
现金流	117600	-600	-600	$\cdots$	-600	-120600

记有效利率为 r，则

$$117600 = 600\sum_{i=1}^{35}\frac{600}{(1+r)^i}+\frac{120600}{(1+r)^{36}} \Rightarrow r \approx 0.5615\%.$$

4.13 解:

第一种还款方式的现值为 16000 美元，第二种还款方式的现值为

$$S = 10000+10000e^{-10r},$$

a) $r = 0.02, S = 18187.31$，第一种还款方式更可取.

b) $r = 0.05, S = 16065.31$，第一种还款方式更可取.

c) $r = 0.10, S = 13678.79$，第二种还款方式更可取.

4.14 解:

现金流为

时间	0	0.5	1	$\cdots$	4.5	5
现金流	-1000	30	30	$\cdots$	30	1030

现值为

$$-1000+\sum_{i=1}^{9}\frac{30}{e^{0.05i/2}}+\frac{1030}{e^{0.05\times 5}} = 40.94.$$

4.15 解:

$\left(1+\dfrac{0.05}{n}\right)^n$ 表示一年后的存款金额，如果最初存入 1，名义利率为 5%，一年内复利 n 次，复合次数越多，存款金额越多.

4.16 解:

n 天后可得到的利息为

$$A = 100(e^{0.06n/365}-1),$$

a) $n = 30, A = 0.49$.

b) $n = 60, A = 0.99$.

c) $n = 120, A = 1.99$.

4.17 解:

$1000e^{3r}+2000e^{2r}+3000e^{r}$.

4.18 解:

$$\frac{3}{1.05}+\frac{5}{1.05^2}-\frac{6}{1.05^3}+\frac{5}{1.05^4}=6.74.$$

4.19 解:

$$20+\frac{10}{1+r}>0+\frac{34}{1+r}\Rightarrow r>0.2.$$

4.20 解:

$$1500=1000\mathrm{e}^{0.6t}\Rightarrow t=6.7578.$$

4.21 解:

$$A\mathrm{e}^{-rs}+\sum_{n=1}^{\infty}A\mathrm{e}^{-r(s+nt)}=A\mathrm{e}^{-rs}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nrt}=\frac{A\mathrm{e}^{-rs}}{1-\mathrm{e}^{-rt}}.$$

4.22 证:

a) 因为 $D(t)=D\mathrm{e}^{rt}$，当 $r>0,h\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{rh}\sim rh+1$，所以

$$D(t+h)=D\mathrm{e}^{r(t+h)}=D\mathrm{e}^{rt}\mathrm{e}^{rh}=D(t)\mathrm{e}^{rh}\approx D(t)(1+rh)=D(t)+rhD(t).$$

b) 由上一小问，得

$$\frac{D(t+h)-D(t)}{h}\approx rD(t)\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{D(t+h)-D(t)}{h}=\lim_{h\to 0}rD(t)\Rightarrow D'(t)=rD(t).$$

c) 由上一小问，得

$$\begin{cases}\dfrac{D'(t)}{D(t)}=r,\\ D(0)=D,\end{cases}\Rightarrow \ln D(t)=rt+\ln D\Rightarrow D(t)=D\mathrm{e}^{rt}.$$

4.23 解:

利用命题 4.2.1，令两个现金流分别为 B_n,C_n，有 $B_n\geq C_n,\sum_{i=1}^{k}B_i\geq\sum_{i=1}^{k}C_i(k=1,2,3)$，所以前一个现金流更可取.

4.24 解:

a) $100(1+r)^2=110\Rightarrow r=0.0488.$

b) 有 $r=\begin{cases}\sqrt{1.2}-1, & p=0.5\\ 0, & p=0.5\end{cases}$，所以 $E(r)=\dfrac{\sqrt{1.2}-1}{2}=0.0477.$

4.25 解:

$$\frac{1000}{\mathrm{e}^{0.08\times 10}}=449.33.$$

4.26 解:

$$100=\frac{40}{1+r}+\frac{70}{(1+r)^2}\Rightarrow r=0.0602,$$
$$100=\frac{70}{1+r}+\frac{40}{(1+r)^2}\Rightarrow r=0.0728.$$

4.27 解: 注意：b) 问由于翻译原因，所问不是投资回报率是否等于 11%，而是是否大于 11%.

a) 不需要，每个周期的回报率超过 10% 当且仅当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1.1^i}>1$.

b) 是，因为 $\frac{8}{1.11}+\frac{16}{1.11^2}+\frac{110}{1.11^3}=100.624>100$.

4.28 解:
由于 $X_1,X_2\sim N(60,25)$，所以 $1.1X_1+X_2\sim N(126,55.25)$，则

$$P\left(\frac{X_1}{1.1}+\frac{X_2}{1.1^2}>100\right)=P(1.1X_1+X_2>121)=P\left(Z>\frac{121-126}{\sqrt{55.25}}\right)=\Phi(0.6727)=0.7494.$$

4.29 解:

$$r_a=\frac{1+r}{1+r_i}-1=\frac{1.05}{1.03}-1=1.942\%.$$

4.30 证:

a) 由于 $\lim\limits_{r\to+\infty}P(r)=c_0<0,\lim\limits_{r\to-1}P(r)=+\infty$，所以在 $r>-1$ 上必有解，可证得该解唯一.

b) 取 $n=3,c_0=-1,c_1=-3,c_2=1$，则 $P(-0.8)=9,P(0)=-3,P(1)=-\frac{9}{4}$，显然此时 $P(r)$ 不单调.

4.31 解:

$$\mathrm{PV}(a)=-\frac{1000}{1.08}+\frac{900}{1.05^2}+\frac{800}{1.05^3}-\frac{1200}{1.08^4}+\frac{700}{1.05^5}=247.90>0,$$

所以应该投资.

4.32 证:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{tr(t)-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s}{t^2},$$

因为 $\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\le\int_0^t r(t)\,\mathrm{d}s=tr(t)$，则

$$tr(t)-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\ge 0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\bar{r}(t)}{\mathrm{d}t}\ge 0,$$

所以 $\bar{r}(t)$ 也是 t 的非减函数.

4.33 证:
有

$$P(\alpha t)=\exp\left[-\int_0^{\alpha t}r(s)\,\mathrm{d}s\right]=\exp\left[\alpha t\bar{r}(\alpha t)\right],P^{\alpha}(t)=\exp[-\alpha t\bar{r}(t)],$$

所以

$$P(\alpha t)\ge[P(t)]^{\alpha}\iff\bar{r}(\alpha t)\le\bar{r}(t)\iff\bar{r}(t)\text{是}t\text{的非减函数}.$$

4.34 证:

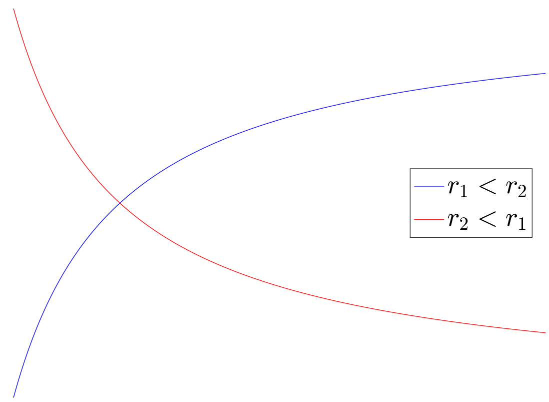
a)

$$P(t)=\exp\left(-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right),P'(t)=-r(t)\exp\left(-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right),r(t)=-\frac{P'(t)}{P(t)}.$$

b)

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right), \ln P(t) = -\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s, \bar{r}(t) = -\frac{\ln P(t)}{t}.$$

4.35 解:



第 5 章　合约的套利定价

5.1 解:

a) $\dfrac{110-100}{\mathrm{e}^{0.06\times 2}}-10=-1.1308.$

b) $\dfrac{0}{\mathrm{e}^{0.06\times 2}}-10=-10.$

5.2 解:

a) $\dfrac{0}{\mathrm{e}^{0.06\times 1/2}}-5=-5.$

b) $\dfrac{100-98}{\mathrm{e}^{0.06\times 1/2}}-5=-3.059.$

5.3 解:

利用一价律，有

$$S=K\mathrm{e}^{-r}-C\Rightarrow C=S-K\mathrm{e}^{-r}.$$

5.4 证:

若 $C>S$，则通过同时卖出看涨期权和购买证券来实现套利.

5.5 解:

由命题 5.2.2，有 $S+P-C=K\mathrm{e}^{-rt}$，而 $P\geq 0$，所以 $K\mathrm{e}^{-rt}\geq S-C$.

5.6 解:

由上一题，$C\geq S-K\mathrm{e}^{-rt}=30-28\mathrm{e}^{-0.05/3}=2.4628$.

5.7 解:

由练习 5.4，有 $C\leq S$，则

a) $P-S=K\mathrm{e}^{-rt}+C-2S$，正负皆有可能，该式不一定成立.

b) $P-K\mathrm{e}^{-rt}=C-S\leq 0\Rightarrow P\leq K\mathrm{e}^{-rt}\leq K$，该式一定成立.

5.8 证:

$$P-K\mathrm{e}^{-rt}+S=C\geq 0\Rightarrow P\geq K\mathrm{e}^{-rt}-S.$$

5.9 证:

在时刻 0，卖出一股股票 S，卖出一个看跌期权 P，买入一个看涨期权 C，收入 $S+P-C$；
在时刻 t，若 $S(t)\leq K$，卖出的看跌期权无用，看涨期权被执行，以执行价 K 买入股票；若 $S(t)>K$，买入的看涨期权无用，看跌期权被执行，以执行价 K 买入股票.
由于 $S+P-C>K\mathrm{e}^{-rt}$，所以 $(S+P-C)\mathrm{e}^{rt}-K>0$，即总可以获得正的收益.

5.10 证:

- 在时刻 0，买入一股股票 S，买入一个看跌期权 P，卖出一个看涨期权 C，支出 $S+P-C$；在时刻 t，总是收入 K.
- 向银行存入 $K\mathrm{e}^{-rt}$，支出 $K\mathrm{e}^{-rt}$，收入 K.

所以 $S+P-C=Ke^{-rt}$.

5.11 解:

设 P 为看跌期权的价格，则

a) 在时刻 0，买入看跌期权 P、证券 s；在时刻 t，由于 $K>s_1>s_2$，所以卖出看跌期权 K，所以回报是 $K-(P-S)e^{rt}$.

b) $K-(P-S)e^{rt}0 \Rightarrow P=Ke^{-rt}-s$.

5.12 解:

- 在时刻 0，买入看涨和看跌期权 P，支出 C_1+C_2；在时刻 1，收入 1.
- 向银行存入 e^{-rt}，支出 e^{-rt}，收入 1.

所以 $C_1+C_2=e^{-rt}$.

5.13 解:

因为 $25=S+P-C>Ke^{-rt}=20e^{-0.1/4}$，所以套利策略为在时刻 0，卖出证券 S，卖出看跌期权 P，买入看涨期权 C；在时刻 t，收入 K. 回报为 $(S+P-C)e^{rt}-K=5.6329$.

5.14 解:

若这些期权均为欧式期权，令其价格分别为 C,P，则有

$$C_a=C, P_a \geq P,$$

所以

$$S+P-C=Ke^{-rt} \Rightarrow S+P_a-C_a \geq Ke^{-rt}.$$

5.15 证:

若 $K_1-K_2<P_1-P_2$，即 $K_2-K_1+P_1-P_2>0$，不妨假设 $P_1>P_2$，在时刻 0，卖出 (K_1,P_1)，买入 (K_2,P_2)，收入 P_1-P_2；在时刻 t，若两者均执行，则支出 K_2-K_1，则 $K_2-K_1+P_1-P_2>0$，存在套利机会，产生矛盾，于是 $K_1-K_2 \geq P_1-P_2$.

5.16 解:

设某一美式看跌期权 t 时刻的价格为 P_1，另一个美式看跌期权 $s(s<t)$ 时刻的价格为 P_2，即证 $P_1 \geq P_2$.
若 $P_1<P_2$，买入 (P_1,t)，卖出 (P_2,s)，若两者均执行，则此时收入支出相互抵消，获得初始收益 P_2-P_1，于是存在套利机会，产生矛盾，所以 $P_1 \geq P_2$.

5.17 解:

a) 正确，因为 $C=S+P-Ke^{-rt}$ 关于 t 非减，同时该结论对美式看涨期权也成立.

b) 错误，因为 $F=Se^{(r_u-r_g)t}$，若要关于 t 非减，需要 $r_u \geq r_g$，而题中未说明大小关系.

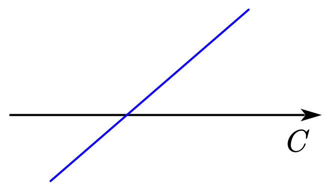
c) 错误，因为 $P=Ke^{-rt}+C-S$ 关于 t 非增.

5.18 解:

设欧式看涨期权的价格为 C，欧式看跌期权的价格为 P，则 $K=S+P-C$

a) 因为 $S+P-C-Ke^{-rt}=(S+P-C)(1-e^{-rt})>0$,回报为 $(S+P-C)e^{rt}-K=(S+P-C)e^{rt}-(S+P-C)=(S+P-C)(e^{rt}-1)>0$，所以这个投资策略恒合理.

b) 函数是 $f(C)=(S+P-C)(e^{r/4}-1)$，图如下：



5.19 解:

$s-d$.

5.20 解:

a) $(S(t)-K)^{+}+(K-S(t))^{+}=|S(t)-K|$.

b) $(S(t)-K_1)^{+}-(K_2-S(t))^{+}$.

c) $2(S(t)-K)^{+}-S(t)$.

d) $S(t)-(S(t)-K)^{+}$.

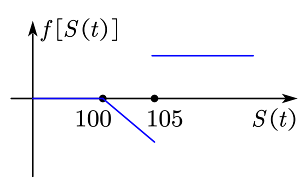
5.21 证:

有 $C(K)=S+P-Ke^{-rt}$，有 $C'(K)=-e^{-rt}<0$，所以一个欧式看涨期权的价格关于其敲定价是非增的.

5.22 解:

a) $100-105=-5<0$，这个投资的初始成本是负的.

b) 回报为 $f[S(t)]=(S(t)-100)^{+}-(S(t)-105)^{+}$，图如下：



5.23 解:

在时刻 0，买入敲定价为 110 的看涨期权，卖出敲定价为 100 的看涨期权，收入 $20-C$；在时刻 t，两个看涨期权都执行时，最多支出 10，所以 $20-C\leq 10e^{-rt}$，即 $C\geq 20-10e^{-rt}$.

5.24 证:

因为 $S+P-C=Ke^{-rt}$，所以 $P(K,t)=Ke^{-rt}+C-S$，显然 $P(K,t)$ 对于固定的 t，关于 K 是凸函数 (也是凹函数).

5.25 解:

可以，考虑两个投资

- 购买 1 份 (K,t) 美式看跌期权；
- 购买 λ 份 (K_1,t) 美式看跌期权和 $(1-\lambda)$ 份 $(K_2,,t)$ 美式看跌期权.

其中 $K=\lambda K_1+(1-\lambda)K_2$. 当证券价格为 s 时，回报为 $(K^*-s)^+$，K^* 为看跌期权的执行价. 根据回报的凸性，即可得价格的凸性.

5.26 **证**:
若 t_1 时刻期权价格是 s，在此时卖出证券，收入 $s-K_1$；在 t_2 时刻买回证券，等价于 t_1 时刻收入 $s-K_2\mathrm{e}^{-r(t_2-t_1)}$. 因为 $K_1>K_2\mathrm{e}^{-r(t_2-t_1)}$，所以 t_1 时刻不会执行该期权.

5.27 **证**:
由于 $-\max\{a,b\}=\min\{-a,-b\}$，则

$$S(t)-\max\{K,S(t)-A\}=S(t)+\min\{-K,-S(t)+A\}=\min\{S(t)-K,A\},$$

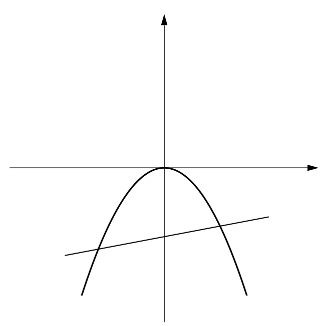
所以

$$(S(t)-\max\{K,S(t)-A\})^+=\max\{0,\min\{S(t)-K,A\}\}=\min\{(S(t)-K)^+,A\}.$$

5.28 **略**.

5.29 **解**:

a) 几何解释：原曲线上任意两点形成的弦上的端 (不含端点) 都在原曲线下方，图如下：



b)

$$\begin{aligned}
f(x)\text{是凹函数} &\iff f[\lambda x+(1-\lambda)y]\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\\
&\iff -f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leq-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y)\\
&\iff g[\lambda x+(1-\lambda)y]\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\\
&\iff g(x)\text{是凸函数}
\end{aligned}$$

5.30 **解**:

a) $E(X_1)<E(X_2)$ 无法说明一定能获利，故无法说明存在套利.

b) $P(X_2>X_1)>0$ 无法说明一定能获利，故无法说明存在套利.

第 6 章　套利定理

6.1 解:

不存在. 因为 $p_i = \dfrac{1}{1+o_i}$，即

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} p_i = 1,$$

所以不存在一个稳赢的赌博策略.

6.2 解:

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+o_4} = 1 \Rightarrow o_4 = \frac{47}{13}.$$

6.3 解:

a)

$$\begin{cases} 4p_1 + 8p_2 - 10p_3 = 0, \\ 6p_1 + 12p_2 - 16p_3 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -10 \\ 6 & 12 & -16 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{不存在满足条件的} p_i,$$

所以存在套利.

b)

$$\begin{cases} 6p_1 - 3p_2 = 0, \\ -2p_1 + 6p_3 = 0, \\ 10p_1 + 10p_2 + xp_3 = 0, \end{cases} \quad \text{有解} \Rightarrow x = -90, p_1 = 0.3, p_2 = 0.6, p_3 = 0.1,$$

所以没有套利时，$x = -90$.

6.4 解:

不存在套利时，仍有 $p_1 = \dfrac{1}{2}, p_2 = \dfrac{1}{3}, p_3 = \dfrac{1}{6}$，则

$$\begin{cases} o_{12}(p_1 + p_2) - p_3 = 0, \\ o_{23}(p_2 + p_3) - p_1 = 0, \\ o_{13}(p_1 + p_3) - p_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} o_{12} = \frac{1}{5}, \\ o_{23} = 1, \\ o_{13} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

6.5 证:

若结果是 j，则

$$\begin{aligned} o_j x_j - \sum_{i \neq j} x_i &= o_j x_j - \sum_{i=1}^{m} x_i + x_j = (1+o_j)x_j - \sum_{i=1}^{m} x_i \\ &= \frac{(1+o_j)(1+o_j)^{-1} - \sum_{i=1}^{m}(1+o_i)^{-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m}(1+o_i)^{-1}} = 1 \end{aligned}$$

6.6 解:

购买看跌期权的收益为

$$\begin{cases} -P, & \text{价格为}200 \\ \dfrac{100}{1+r}-P, & \text{价格为}50 \end{cases}$$

则

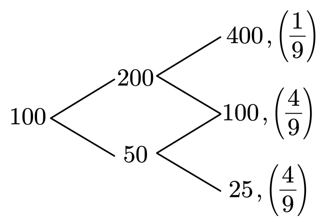
$$E(\text{收益}) = p\times(-P)+(1-p)\times\left(\frac{100}{1+r}-P\right) = (1-p)\frac{100}{1+r}-P,$$

所以 $P=(1-p)\dfrac{100}{1+r}=\left(1-\dfrac{1+2r}{3}\right)\dfrac{100}{1+r}=\dfrac{200(1-r)}{3(1+r)}$.

因为 $S+P-C=\dfrac{K}{1+r}\Rightarrow C=S+P-\dfrac{K}{1+r}$，代入可验证其成立.

6.7 解:

先计算 $p=\dfrac{1+r-d}{u-d}=\dfrac{1-1/2}{2-1/2}=\dfrac{1}{3}$(其中 $r=0$)，则有



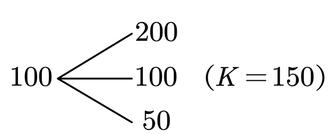
所以收益为

$$\begin{cases} \dfrac{250}{(1+r)^2}-C, & \text{概率为}1/9 \\ -C, & \text{概率为}4/9 \\ -C, & \text{概率为}4/9 \end{cases}$$

要使期望收益为 0，则

$$E(\text{收益}) = \frac{250-C}{9}-\frac{4}{9}C-\frac{4}{9}C=0\Rightarrow C=\frac{250}{9}.$$

6.8 解: 注意：也可以参照教材例 9.1a 的解法.



买入股票的收益为

$$\begin{cases} \dfrac{200}{1+r}-100, & \text{概率为}p_1 \\ \dfrac{100}{1+r}-100, & \text{概率为}p_2 \\ \dfrac{50}{1+r}-100, & \text{概率为}p_3 \end{cases}$$

所以

$$E(\text{买入股票的收益})=\left(\frac{200}{1+r}-100\right)p_1+\left(\frac{100}{1+r}-100\right)p_2+\left(\frac{50}{1+r}-100\right)p_3=0,$$

买入期权的收益为 $\begin{cases}\dfrac{50}{1+r}-C, & \text{概率为}p_1\\ -C, & \text{概率为}p_2\\ -C, & \text{概率为}p_3\end{cases}$，所以

$$E(\text{买入期权的收益})=\left(\frac{50}{1+r}-C\right)p_1-Cp_2-Cp_3=0,$$

由后式可得 $C=\dfrac{50p_1}{1+r}$，由前式可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{200}{1+r}\right)p_1+\left(\frac{100}{1+r}\right)p_2+\left(\frac{50}{1+r}\right)p_3=100(p_1+p_2+p_3)=100\\ \Rightarrow &2p_1+p_2+\frac{1}{2}p_3=1+r\Rightarrow 2p_1+p_2+\frac{1}{2}(1-p_1-p_2)=1+r\\ \Rightarrow &3p_1+p_2=1+2r\Rightarrow p_1=\frac{1+2r-p_2}{3}\end{aligned}$$

所以 $C=\dfrac{50p_1}{1+r}=\dfrac{1+2r-p_2}{3}\cdot\dfrac{50}{1+r}$，由 $0\le p_2\le 1$ 可得

$$\frac{2r}{3}\cdot\frac{50}{1+r}\le C\le\frac{1+2r}{3}\cdot\frac{50}{1+r}\Rightarrow 0\le C\le\frac{50}{3}.$$

6.9 解:

a) 若 $C=0$，则在时刻 0，无支出；在时刻 1 可收入 50 或 0，这显然是个弱套利.

b) 若 $C=\dfrac{50}{3}$，则在时刻 0，卖出一个看涨期权，并买入 x 股股票；在时刻 1，收入如下表：

时刻 1 股票的价格	时刻 0 的余额	时刻 1 该投资的现值	收入 $(r=0)$
200	$50/3-100x$	$-50+200x$	$100x-100/3$
100	$50/3-100x$	$0+100x$	$50/3$
50	$50/3-100x$	$0+50x$	$-50x-100/3$

若 $x=\dfrac{1}{3}$，则显然存在弱套利机会. 综上，弱套利可能存在.

6.10 解:

令 $S(0)=s$，假设 $us>K>ds$. 如果通过借 x 来买入 y 份证券，则在时刻 t，剩余 $ys-x$ 的收入为

$$\begin{cases}yus-(1+r)x, & S(1)=us\\ yds-(1+r)x, & S(1)=ds\end{cases}$$

所以可以通过如下方式复制期权，

$$\begin{cases}yus-(1+r)x=us-K,\\ yds-(1+r)x=0,\end{cases}$$

令 $y=\dfrac{us-K}{(u-d)s},x=\dfrac{ds(us-K)}{(1+r)(u-d)s}$，则根据一价律，期权的无套利价格是 $ys-x=\dfrac{us-K}{u-d}-\dfrac{ds(us-K)}{(1+r)(u-d)s}$.

6.11 解:

a) $p=\dfrac{1+r-d}{u-d}=\dfrac{0.3}{0.425}=\dfrac{12}{17}$，期望收益为 $25(1-p)^2p^3=0.7606$，所以无套利价格是 $0.7606\times 1.1^{-5}=0.4723$.

b) 是唯一的. 证明略.

c) $25\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=0.78125$.

6.12 解:

$p=\dfrac{1+r-d}{u-d}=0.7380$，如果前 3 个时刻中至少有 2 个时刻是向上的，则可得到回报，所以

$$C=\mathrm{e}^{-0.05\times 3}\times 100\left[0.7380^3+3(0.7380)^2(1-0.7380)\right]=84.5228.$$

第 7 章　Black-Scholes 公式

7.1 解:

因为 $\ln\left(\dfrac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$，所以 $\ln\left(\dfrac{S(t_1)}{S(t_2)}\right) \sim N\left(\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_2), \sigma^2(t_1-t_2)\right)$.

a) $\sigma_d = 0.33\sqrt{\dfrac{n-(n-1)}{365}} = 0.0173.$

b) $\sigma_m = 0.33\sqrt{\dfrac{n-(n-1)}{12}} = 0.0953.$

7.2 解:

$t = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$，所以期权被执行当且仅当 $S\left(\dfrac{1}{3}\right) > 42$，而 $\ln\dfrac{S(1/3)}{S(0)} \sim N(0.04, 0.0192)$ 则

$$
\begin{aligned}
P\left[S\left(\frac{1}{3}\right) > 42\right] &= P\left[\frac{S(1/3)}{S(0)} > \frac{42}{40}\right] = P\left[\ln\frac{S(1/3)}{S(0)} > \ln 1.05\right] \\
&= P\left(Z > \frac{\ln 1.05 - 0.04}{\sqrt{0.0192}}\right) = 1 - \Phi(0.0634) \\
&= 1 - 0.5253 = 0.4747
\end{aligned}
$$

7.3 解:

本题中的参数为

$$
t = \frac{1}{3}, r = 0.08, \sigma = 0.24, K = 42, S(0) = 40,
$$

则

$$
\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \ln[K/S(0)]}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{0.08/3 + 0.24^2/6 - \ln(42/40)}{0.24/\sqrt{3}} = -0.0904,
$$

而 $\Phi(-0.0904) = 0.4640, \Phi(-0.2290) = 0.4094$，所以

$$
C = S(0)\Phi(\omega) - K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) = 40 \times 0.4640 - 42\mathrm{e}^{-0.08/3} \times 0.4094 = 1.8177.
$$

7.4 解:

由看跌-看涨期权平价公式，则

$$
\begin{aligned}
P &= C - S(0) + K\mathrm{e}^{-rt} = S(0)\Phi(\omega) - K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) - S(0) + K\mathrm{e}^{-rt} \\
&= S(0)[\Phi(\omega) - 1] + K\mathrm{e}^{-rt}[1 - \Phi(\omega - \sigma\sqrt{t})]
\end{aligned}
$$

本题中的参数为

$$
t = \frac{1}{2}, r = 0.10, \sigma = 0.30, K = 100, S(0) = 105,
$$

则

$$
\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \ln[K/S(0)]}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{0.1/2 + 0.3^2/4 - \ln(100/105)}{0.3/\sqrt{2}} = 0.5718,
$$

而 $\Phi(0.5718) = 0.7163, \Phi(0.3596) = 0.6404$，所以

$$
P = 105 \times (0.7163 - 1) + 100\mathrm{e}^{-0.1/2} \times (1 - 0.6404) = 4.4177.
$$

7.5 **解**: 注意：b) 问少了一个条件：假设 $r=0.05$.

a)
$$P\left[\frac{S(0.5)}{S(0)}<0.9\right]=P\left[\ln\frac{S(0.5)}{S(0)}<\ln 0.9\right]=P\left(Z<\frac{\ln 0.9-0.03}{\sqrt{0.3^2\times 0.5}}\right)$$
$$=\Phi(-0.6381)=1-\Phi(0.6381)=1-0.7383=0.2617$$

b) $r-\sigma^2/2=0.05-0.045=0.005$，与 a) 问类似，
$$P\left[\frac{S(0.5)}{S(0)}<0.9\right]=P\left[\ln\frac{S(0.5)}{S(0)}<\ln 0.9\right]=P\left(Z<\frac{\ln 0.9-0.0025}{\sqrt{0.3^2\times 0.5}}\right)$$
$$=\Phi(-0.5085)=1-\Phi(0.5085)=1-0.7383=0.3056$$

投资的收益为
$$\begin{cases}100\mathrm{e}^{-rt}-A, & \text{概率为}0.3056\\ -A, & \text{概率为}0.7383\end{cases}$$

所以
$$E(\text{收益})=0.3056(100\mathrm{e}^{-0.025}-A)-0.7383A=0\Rightarrow A=29.8055.$$

7.6 **解**:

a) 本题中的参数为
$$t=\frac{1}{4},r=0.04,\sigma=0.3,K=100,S(0)=95,$$

则
$$\omega=\frac{rt+\sigma^2t/2-\ln[K/S(0)]}{\sigma\sqrt{t}}=\frac{0.04/4+0.3^2/8-\ln(100/95)}{0.3/\sqrt{4}}=-0.2003,$$

而 $\Phi(-0.2003)=0.4206,\Phi(-0.3503)=0.3631$，所以
$$C=S(0)\Phi(\omega)-K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t})=95\times 0.4206-100\mathrm{e}^{-0.04/4}\times 0.3631=4.0083.$$

b)
$$P[S(1/4)<100]=P\left[\frac{S(1.4)}{S(0)}<\frac{100}{95}\right]=P\left[\ln\frac{S(1.4)}{S(0)}<\ln\frac{100}{95}\right]$$
$$=P\left(Z<\frac{\ln(100/95)-0.05/4}{\sqrt{0.3^2/4}}\right)$$
$$=\Phi(0.2586)=0.6020$$

c) $r-\dfrac{\sigma^2}{2}=-0.005$，下计算 $P[S(1)>105]$，
$$P[S(1)>105]=P\left(Z>\frac{\ln(105/95)+0.005}{0.3}\right)=1-\Phi(0.3503)=0.3631,$$

再计算 $P[S(1)>S(0.5)]$，
$$P[S(1)>S(0.5)]=P\left(Z>\frac{0+0.005/2}{0.3/\sqrt{2}}\right)=1-\Phi(0.0118)=0.4953,$$

则 $0.3631\times 0.4953=0.1798$，而收益为

$$\begin{cases} 50\mathrm{e}^{-rt}-C, & \text{概率为}0.1798 \\ -C, & \text{概率为}1-0.1798 \end{cases}$$

所以

$$E(\text{收益})=0.1798(50\mathrm{e}^{-0.04}-C)-(1-0.1798)C=0\Rightarrow C=0.1798\times 50\mathrm{e}^{-0.04}=8.6375.$$

7.7 **解**:

本题中的参数为

$$t=\frac{1}{2},r=0.06,\sigma=0.32,K=40,S(0)=38,F=100,$$

$r-\dfrac{\sigma^2}{2}=0.0088$，下计算 $P[S(1/2)>K]$，

$$P[S(1/2)>K]=P\left(Z>\frac{\ln(40/38)-0.0088/2}{\sqrt{0.32^2/2}}\right)=1-\Phi(0.2072)=0.4179,$$

收益为

$$\begin{cases} F\mathrm{e}^{-rt}-C, & \text{概率为}0.4179 \\ -C, & \text{概率为}1-0.4179 \end{cases}$$

所以

$$E(\text{收益})=0.4179(100\mathrm{e}^{-0.06/2}-C)-(1-0.4179)C=0\Rightarrow C=0.4179\times 100\mathrm{e}^{-0.03}=40.5549.$$

7.8 **解**:

本题中的参数为

$$t=\frac{1}{2},r=0.06,\sigma=0.32,K=40,S(0)=38,F=100,\mu=0,$$

$r-\dfrac{\sigma^2}{2}=0.0088$，下计算 $P[S(1/2)>K]$

$$P[S(1/2)>K]=P\left(Z>\frac{\ln(40/38)-0}{\sqrt{0.32^2/2}}\right)=1-\Phi(0.2267)=0.4179,$$

收益为

$$\begin{cases} F\mathrm{e}^{-rt}-C, & \text{概率为}0.4103 \\ -C, & \text{概率为}1-0.4103 \end{cases}$$

所以

$$E(\text{收益})=0.4103(100\mathrm{e}^{-0.06/2}-C)-(1-0.4103)C=0\Rightarrow C=0.4103\times 100\mathrm{e}^{-0.03}=39.8174.$$

7.9 **解**:

否，还需要知道几何布朗运动的漂移参数 μ.

7.10 解:

a) $r-\dfrac{\sigma^2}{2}=-0.02$，下计算 $P[S(1)<95]$，

$$P[S(1)<95]=P\left(Z<\frac{\ln(95/100)+0.02}{\sqrt{0.4^2}}\right)=\Phi(-0.0782)=0.4688,$$

再计算 $P[S(1)>110]$，

$$P[S(1)>110]=P\left(Z>\frac{\ln(110/100)+0.02}{\sqrt{0.4^2}}\right)=1-\Phi(0.2883)=0.3866,$$

收益为

$$\begin{cases}5\mathrm{e}^{-rt}-10, & \text{概率为}0.4688\\ x\mathrm{e}^{-rt}-10, & \text{概率为}0.3866\\ 0, & \text{概率为}1-0.4688-0.3866\end{cases}$$

所以

$$E(\text{收益})=0.4688(5\mathrm{e}^{-0.06}-10)+0.3866(x\mathrm{e}^{-0.06}-10)=0\Rightarrow x=17.4313.$$

b)

$$P[S(1)<95]=P\left(Z<\frac{\ln(95/100)-0.05}{\sqrt{0.4^2}}\right)=\Phi(-0.2532)=0.4001.$$

7.11 解:

a) 因为

$$\begin{aligned}P[S(0.5)\geq 42\cup S(1)>1.05S(0.5)]&=1-P[S(0.5)<42\cap S(1)\leq 1.05S(0.5)]\\&=1-P[S(0.5)<42]P[S(1)\leq 1.05S(0.5)]\end{aligned}$$

而 $r-\dfrac{\sigma^2}{2}=-0.02$，下计算 $P[S(0.5)\geq 42]$，

$$P[S(0.5)<42]=P\left(Z<\frac{\ln(42/40)+0.02/2}{\sqrt{0.4^2/2}}\right)=\Phi(0.2079)=0.5823,$$

再计算 $P[S(1)\leq 1.05S(0.5)]$，

$$P[S(1)\leq 1.05S(0.5)]=P\left(Z\leq\frac{\ln 1.05+0.02/2}{\sqrt{0.4^2/2}}\right)=\Phi(0.2079)=0.5823,$$

$1-0.5823^2=1-0.3391=0.6609$，收益为

$$\begin{cases}100\mathrm{e}^{-rt}-C, & \text{概率为}0.6609\\ -C, & \text{概率为}1-0.6609\end{cases}$$

所以

$$E(\text{收益})=0.6609(100\mathrm{e}^{-0.06}-C)-(1-0.6609)C=0\Rightarrow C=0.6609\times 100\mathrm{e}^{-0.06}=62.2412.$$

b) 因为

$$
\begin{aligned}
P[S(0.5)\geq 42\cup S(1)>1.05S(0.5)] &= 1-P[S(0.5)<42\cap S(1)\leq 1.05S(0.5)]\\
&= 1-P[S(0.5)<42]P[S(1)\leq 1.05S(0.5)]
\end{aligned}
$$

下计算 $P[S(0.5)\geq 42]$，

$$
P[S(0.5)<42]=P\left(Z<\frac{\ln(42/40)-0.06/2}{\sqrt{0.4^2/2}}\right)=\Phi(0.0664)=0.5265,
$$

再计算 $P[S(1)\leq 1.05S(0.5)]$，

$$
P[S(1)\leq 1.05S(0.5)]=P\left(Z\leq\frac{\ln 1.05-0.06/2}{\sqrt{0.4^2/2}}\right)=\Phi(0.0664)=0.5265,
$$

所以合约赢利的概率为 $1-0.5265^2=0.7288$.

7.12 解:

a) $r-\dfrac{\sigma^2}{2}=0$，下计算 $P[S(1)>(1+x)40]$，

$$
P[S(1)>(1+x)40]=P\left(Z>\frac{\ln(1+x)-0}{\sqrt{0.2^2}}\right)=1-\Phi[5\ln(1+x)],
$$

收益为

$$
\begin{cases}
100\mathrm{e}^{-rt}-10, & \text{概率为}1-\Phi[5\ln(1+x)]\\
-10, & \text{概率为}\Phi[5\ln(1+x)]
\end{cases}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E(\text{收益}) =&(1-\Phi[5\ln(1+x)])(100\mathrm{e}^{-0.02}-10)-10\Phi[5\ln(1+x)]=0\\
\Rightarrow&\Phi[5\ln(1+x)]=0.8980\Rightarrow x=0.2892.
\end{aligned}
$$

b)

$$
P[S(1)>(1+x)40]=P\left(Z>\frac{\ln(1+x)-0.04}{\sqrt{0.2^2}}\right)=1-\Phi[5\ln(1+x)-0.2]=0.1423.
$$

7.13 解:

$C(s,t,K,r,\sigma)=s\Phi(\omega)-K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t})$，具体推导见定理 7.5.1.

7.14 解:

因为 $\max\{0,S(t)-K\}=\max\{0,S(t)-0\}=S(t)$，所以执行价为 0 的看涨期权等价于一个价格为 $S(0)$ 的股票，所以价格为 $S(0)$.

7.15 解:

根据 Black-Scholes 公式：

$$
C=S(0)\Phi(\omega)-K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega-\sigma\sqrt{t}),
$$

其中 $\omega=\dfrac{rt+\sigma^2t/2-\ln[K/S(0)]}{\sigma\sqrt{t}}$，所以当 $t\to+\infty$ 时，$\omega\to+\infty,\omega-\sigma\sqrt{t}\to+\infty$，所以 $C\to S(0)$，它的价格会趋向于 $S(0)$.

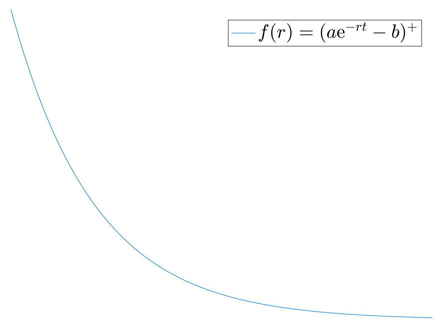
7.16 解:

根据 Black-Scholes 公式：

$$C = S(0)\Phi(\omega) - K\mathrm{e}^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}),$$

其中 $\omega = \dfrac{rt + \sigma^2 t/2 - \ln[K/S(0)]}{\sigma\sqrt{t}}$，所以当 $\sigma \to 0$ 时，$\omega \to 0, \omega - \sigma\sqrt{t} \to 0$，所以 $C \to \dfrac{S(0) - K\mathrm{e}^{-rt}}{2}$，它的价格会趋向于 $\dfrac{S(0) - K\mathrm{e}^{-rt}}{2}$.

7.17 解:



7.18 解:

没有绝对的凹凸性.

第 8 章　关于期权的其他结果

8.1 **解**:

成立.

8.2 **解**:

服从一个漂移参数为 $r-\dfrac{\sigma^2}{2}-f$，波动参数为 σ 的几何布朗运动.

8.3 **解**:

$C(s(1-f)^2,K,t,r,\sigma)$.

8.4 **证**:

在没有分红时，不应该提前执行看涨期权，所以不应该在 t_d 之前或在 (t_d,t) 之间执行看涨期权，即所证.

8.5 **解**:

上限期权的收益是 (K,t) 看涨期权和 $(K+B,t)$ 看涨期权收益的差，因此，根据一价律，无套利价格为 $C(s,K,t,r,\sigma)-C(s,K+B,t,r,\sigma)$.

8.6 **解**:

在风险中性几何布朗运动下，该投资的预期收益为

$$E[(1+\beta)s+\alpha(S(1)-(1+\beta)s)^+]=(1+\beta)s+\alpha\mathrm{e}^rC(s,t,(1+\beta)s,\sigma,r),$$

由于无套利存在，所以上式等于 $s\mathrm{e}^r$，可解得

$$\alpha=\frac{s(\mathrm{e}^r-1-\beta)}{\mathrm{e}^rC(s,t,(1+\beta)s,\sigma,r)}.$$

8.7 **证**:

在风险中性几何布朗运动下，当 $K>(1+\beta)s$ 时，该投资的预期收益为

$$E[(1+\beta)s+(S(1)-(1+\beta)s)^+-(S(1)-K)^+]=(1+\beta)s+\mathrm{e}^rC(s,t,(1+\beta)s,\sigma,r)-\mathrm{e}^rC(s,t,K,\sigma,r),$$

由于无套利存在，所以上式等于 $s\mathrm{e}^r$，化简即可得

$$C(s,1,K,\sigma,r)=C(s,1,s(1+\beta),\sigma,r)+s(1+\beta)\mathrm{e}^{-r}-s.$$

同时，因为 $s(1+\beta)\mathrm{e}^{-r}-s<0$，而 $C(s,t,K,\sigma,r)$ 关于 K 递减，所以 $K>(1+\beta)s$ 一定成立，即上式必成立.

8.8 **证**:

$$\begin{aligned}C(s\mathrm{e}^{-ft},t,K,\sigma,r)&=\mathrm{e}^{-rt}E[(s\mathrm{e}^{-ft}\mathrm{e}^W-K)^+]=\mathrm{e}^{-rt}E[(s\mathrm{e}^{-ft}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t}Z+(r-\sigma^2/2)t}-K)^+]\\&=\mathrm{e}^{-rt}E[(s\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t}Z+(r-f-\sigma^2/2)t}-K)^+]\\&=\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{-(r-f)t}E[(s\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t}Z+(r-f-\sigma^2/2)t}-K)^+]\\&=\mathrm{e}^{-rt}C(s,t,K,\sigma,r-f)\end{aligned}$$

8.9 **证**:

a) 比起在时刻 $s < t_1$ 执行看涨期权支付 K_1，显然在时刻 t_1 执行看涨期权支付 K_1 会更好.

b) 因为在时刻 t_1，看涨期权的价格为 $C(x, t-t_1, K, \sigma, r)$，同时 $S(t_1) = x$.

c) 因为 $C(y, t-t_1, K, \sigma, r)$ 关于 y 严格单调递增.

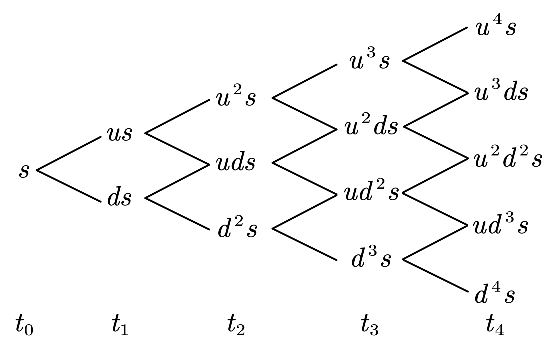
d) 因为在时刻 t_1 行使购买看涨期权的期权是最佳策略当且仅当 $S(t_1) \geq x$.

8.10 **证**:

a) 若在时刻 t_2 执行期权，支付 $K_2 e^{-rt_2}$；若在时刻 t_1 执行期权，支付 $K_1 e^{-rt_1}$. 因为 $K_1 > e^{-r(t_2-t_1)} K_2 \Rightarrow K_2 e^{-rt_2} < K_1 e^{-rt_1}$，所以不应该在时刻 t_1 执行期权.

b) 若在时刻 t_1 期权不执行且 $S(t_1) = y$，此时的风险中性收益为 $C(y, t_2 - t_1, K_2, \sigma, r)$. 若在时刻 t_1 期权执行，此时的收益为 $y - K_1$. 所以当 $S(t_1) = y$ 时，若 $C(y, t_2 - t_1, K_2, \sigma, r) < y - K_1$ 则应该在时刻 t_1 执行期权，证毕.

8.11 **解**:



8.12 **解**:

a) 正确，原因略.

b) 错误，原因略.

c) 错误，原因略.

d) 正确，原因略.

8.13 **解**:

本题中的参数为

$$t = \frac{1}{4}, r = 0.06, \sigma = 0.3, K = 10, S(0) = s = 9,$$

则

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \ln[K/S(0)]}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{0.06/4 + 0.3^2/8 - \ln(10/9)}{0.3/\sqrt{4}} = -0.5274,$$

而 $\Phi(-0.5274) = 0.2990, \Phi(-0.6774) = 0.2491$，所以

$$P = S(0)\Phi(\omega) - Ke^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) + Ke^{-rt} - s = 9 \times 0.2990 - 10e^{-0.06/4} \times 0.2491 + 10e^{-0.06/4} - 9 = 1.0882.$$

8.14 **解**:

取 $n=5$，利用参数，有

$$u=e^{0.3\sqrt{0.05}}=1.0964, d=e^{-0.3\sqrt{0.05}}=0.9351, p=0.5056, 1-p=0.4944, \beta=e^{-rt/n}=0.997,$$

在时刻 t_5 该证券所有可能的价格是

$$10d^5=7.150, 10ud^4=8.383, 10u^2d^3=9.829, 10u^id^{5-i}>10(i=3,4,5),$$

因此

$$V_5(0)=2.850, V_5(1)=1.162, V_5(2)=0.171, V_5(i)=0(i=3,4,5),$$

所以

$$V_4(2)=\max\{1, \beta pV_5(2)+\beta(1-p)V_5(1)\}=1, V_4(1)=10-10ud^3=1.035,$$
$$V_4(0)=10-10d^4=2.354, V_4(3)=\beta pV_5(4)+\beta(1-p)V_5(3)=0, V_4(4)=0$$

类似地

$$V_3(0)=1.682, V_3(1)=1.014, V_3(2)=0.493, V_3(3)=0,$$
$$V_2(0)=1.340, V_2(1)=1.014, V_2(2)=0.243,$$
$$V_1(0)=1.172, V_1(1)=0.622,$$
$$V_0(0)=0.891$$

即，看跌期权的风险中性价格近似为 0.891.

8.15 **解**:

当价格大于 K 时，应执行期权. 可通过第 3 章中导出的布朗运动最大时间 t 公式来定价. 它可以用 N 周期二项模型来近似，采用与美式看跌期权定价相同的状态，从后往前递推出 $V_0(0)$. 与确定美式看跌期权的风险中性价格相比，因为美式资产的最优策略或无价值看涨期权是已知的，它的工作量会少一点.

8.16 **略**.

8.17 **解**:

(a) Matlab 代码如下：

```
% 导入数据
C = ...; X = [];
for i = 1:length(C) - 1
    X(i) = log(C(i + 1) / C(i));
end
sqrt(sum(X - mean(X)) / (length(X) - 1)) * sqrt(252)
```

所以此时的 σ 的估计值为 1.2767×10^{-8}.

(b) Matlab 代码如下：

```matlab
% 导入数据
O = ...; C = ...;
num = 0;
for i = 1:length(C) - 1
    num = num + (log(C(i + 1)) - log(O(i + 1))) ^ 2 + (log(C(i)) - log(O(i + 1))) ^ 2;
end
sqrt(252 * num / (length(C) - 1))
```

所以此时的 σ 的估计值为 0.7181.

(c) Matlab 代码如下：

```matlab
% 导入数据
O = ...; H = ...; L = ...; C = ...;
num = 0;
for i = 1:length(C) - 1
    num = num + 0.5 * (log(max(H)) - log(max(L))) ^ 2 - 0.39 * (log(C(i + 1)) - log(O(i + 1))) ^ 2 + (log(C(i)) - log(O(i + 1))) ^ 2;
end
sqrt(252 * num / (length(C) - 1))
```

所以此时的 σ 的估计值为 0.6003.

第 9 章　期望效用估值法

9.1 **解**:

$$E[u(X_1)] = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2},$$
$$E[u(X_2)] = 1 - \int_0^{2} e^{-x}\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} + e^{-2},$$

所以应该选择第二种投资方式.

9.2 **解**:

$E(X) = -0.4 + 0.1 + 0.25 = -0.05 < 0$，所以 $a = 0$.

9.3 **证**:

令 $f(\alpha) = \ln x + p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)$，所以

$$f'(\alpha) = \frac{p}{1+\alpha} - \frac{1+p}{1-\alpha} = -\frac{(2p+1)\alpha+1}{1-\alpha^2},$$

若 $p \le \frac{1}{2}$，则 $f'(\alpha) \le 0$，则最优投资额为 $\alpha x = 0$.

9.4 **证**:

令 $f(\alpha) = \ln x + p\ln(1+r+\alpha-\alpha r) + (1-p)\ln(1+r) + (1-p)\ln(1-\alpha)$，所以

$$f'(\alpha) = \frac{p(1-r)}{1+r+\alpha-\alpha r} - \frac{1-p}{1-\alpha} = \frac{(1-\alpha)(2p-1-r)}{(1+r+\alpha-\alpha r)(1-\alpha)},$$

若 $p \le \frac{1}{2}$，则 $f'(\alpha) \le 0$，则最优投资额为 $\alpha x = 0$.

9.5 **解**: 注意：这里翻译有误，是例 9.3b.

设 $w_1 = y, w_2 = 100 - y$，则

$$E[W] = 100 + 0.15y + 0.18(100-y) = 118 - 0.03y,$$

又由于 $c(1,2) = \rho v_1 v_2 = 0$，则

$$\mathrm{Var}[W] = y^2(0.04) + (100-y)^2(0.0625) = 0.1025y^2 - 12.5y + 625,$$

所以应该选择 y，使下式的值达到最大：

$$118 - 0.03y - 0.005(0.1025y^2 - 12.5y + 625)/2,$$

易知 $y = -\dfrac{-0.03 + 0.005 \times 12.5/2}{-2 \times 0.005 \times 0.1025/2} = 2.439$，上式的值达到最大，即投资 2.439 于证券 1，投资 97.561 于证券 2.

9.6 **解**:

设 $w_1 = y, w_2 = 100 - y$，则

$$E[W] = 100 + 0.16y + 0.18(100-y) = 118 - 0.02y,$$

又由于 $c(1,2)=\rho v_1 v_2=-0.02$，则

$$\mathrm{Var}[W]=y^2(0.04)+(100-y)^2(0.0625)-2y(100-y)(0.02)=0.1425y^2-16.5y+625,$$

所以应该选择 y，使下式的值达到最大：

$$118-0.02y-0.005(0.1425y^2-16.5y+625)/2,$$

易知 $y=\dfrac{0.02125}{0.0007125}=29.825$，上式的值达到最大. 最大期望效用为

$$1-\exp\{-0.005[117.404-0.005(259.646)/2]\}=0.4422.$$

a) $y=1$ 时，期望效用为

$$1-\exp\{-0.005[116.98-0.005(608.6425)/2]\}=0.4386.$$

b) $y=0$ 时，期望效用为

$$1-\exp\{-0.005[118-0.005(625)/2]\}=0.4413.$$

9.7 **证**:

因为

$$W=w\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i,$$

若 $U(x)=\ln x$，则

$$\begin{aligned}E[U(W)]=E[\ln W]&=E\left[\ln\left(w\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)\right]\\&=E\left[\ln w+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)\right]\\&=\ln w+E\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)\right]\end{aligned}$$

显然，a_i 与 w 相互独立，即需要投资到各证券的财富比例不依赖于初始财富的数量.

9.8 **证**:

a)

$$U'(x)=ax^{a-1},U''(x)=a(a-1)x^{a-2},U'''(x)=a(a-1)(a-2)x^{a-3}>0,$$

所以 $U''(x)$ 关于 x 非减.

b)

$$U'(x)=b\mathrm{e}^{-bx},U''(x)=-b^2\mathrm{e}^{-bx},U'''(x)=b^3\mathrm{e}^{-bx}>0,$$

所以 $U''(x)$ 关于 x 非减.

c)

$$U'(x)=\frac{1}{x},U''(x)=-\frac{1}{x^2},U'''(x)=\frac{2}{x^3}>0,$$

所以 $U''(x)$ 关于 x 非减.

9.9 **解**:

因为

$$W = w\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i,$$

若 $U(x) = \ln x$，则

$$U[E(W)] - U''[E(W)]\mathrm{Var}(W)/2 = \ln[E(W)] - \frac{\mathrm{Var}(W)}{2[E(W)]^2} = \ln w + \ln\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)\right] - \frac{w^2\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)}{2w^2 E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)},$$

显然，a_i 与 w 相互独立，即每个证券的财富比例不依赖于初始财富的数量.

9.10 **解**: 注意：这里题干有误，是例 9.3b.

设 $w_1 = y, w_2 = 100 - y$，则

$$E[W] = 100 + 0.15y + 0.18(100 - y) = 118 - 0.03y,$$

又由于 $c(1,2) = \rho v_1 v_2 = -0.02$，则

$$\mathrm{Var}[W] = y^2(0.04) + (100 - y)^2(0.0625) - 2y(100 - y)(0.02) = 0.1425y^2 - 16.5y + 625,$$

所以应该选择 y，使下式的值达到最大：

$$1 - \exp[-0.005(118 - 0.03y)] - 0.000025\exp[-0.005(118 - 0.03y)](0.1425y^2 - 16.5y + 625)/2,$$

可解得 $y = 16.408$ 时，上式的值达到最大.

9.11 **解**:

$$P(W > g) = P\left(Z > \frac{g - E(W)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}}\right),$$

所以最大化 $P(W > g)$ 即最小化 $\dfrac{g - E(W)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}}$，即最大化

$$\frac{E(W) - g}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}}.$$

9.12 **解**: 注意：这里翻译有误，是例 9.3b.

有

$$E(W) = 118 - 0.03y, \mathrm{Var}(W) = 0.1425y^2 - 16.5y + 625.$$

a) 根据上一题，需最大化

$$\frac{118 - 0.03y - 110}{0.1425y^2 - 16.5y + 625} = \frac{8 - 0.03y}{0.1425y^2 - 16.5y + 625},$$

可得 $y = 55.432$，所以投资 55.432 于证券 1，投资 44.568 于证券 2.

b) 根据上一题，需最大化

$$\frac{118-0.03y-115}{0.1425y^2-16.5y+625}=\frac{3-0.03y}{0.1425y^2-16.5y+625},$$

可得 $y=47.019$，所以投资 47.019 于证券 1，投资 52.981 于证券 2.

c) 根据上一题，需最大化

$$\frac{118-0.03y-120}{0.1425y^2-16.5y+625}=\frac{-2-0.03y}{0.1425y^2-16.5y+625},$$

可得 $y=5.363$，所以投资 5.363 于证券 1，投资 94.637 于证券 2.

d) 根据上一题，需最大化

$$\frac{118-0.03y-125}{0.1425y^2-16.5y+625}=\frac{-7-0.03y}{0.1425y^2-16.5y+625},$$

可得 $y=0$，所以投资 0 于证券 1，投资 100 于证券 2.

9.13 **解**: 注意：这里题干有误，是例 9.3d.

利用软件等，可以解得

$$\alpha=0.0763.$$

9.14 **解**:

有 $\beta_i=0.80, R_m=0.07$，则

$$r_f=0.05\Rightarrow R_i=r_f+\beta_i(R_m-r_f)=0.066,$$
$$r_f=0.10\Rightarrow R_i=r_f+\beta_i(R_m-r_f)=0.076.$$

9.15 **解**:

$\beta=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\beta_i.$

9.16 **解**:

对比 $R_i=r_f+\beta_i(R_m-r_f)$，显然 CAPM 是个单因素模型，且 $a_i=(1-\beta_i)r_f, b_i=\beta_i, F=R_m$.

9.17 **解**:

a) 能，因为 $E(X_1+X_2)=2$，并由詹森不等式，风险厌恶者会更偏爱最终财富为 2.

b) 能，因为 $E(2X_1)=E(X_1+X_2)=2, \mathrm{Var}(2X_1)=4>\mathrm{Var}(X_1+X_2)=2$.

c) 不能，这取决于效用函数的具体表达式，$3X_1$ 同时具有更大的均值和方差.

d) 因为

$$E[1-\mathrm{e}^{-X_1-X_2}]=1-\mathrm{e}^{-2+2/2}=1-\mathrm{e}^{-1},$$
$$E[1-\mathrm{e}^{3X_1}]=1-\mathrm{e}^{-3+9/2}=1-\mathrm{e}^{1.5}<1-\mathrm{e}^{-1},$$

所以选择 X_1+X_2.

9.18 证:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{Cov}\left(\mu_i + \sum_{s=1}^{n} a_{is} Z_s, \mu_j + \sum_{t=1}^{n} a_{jt} Z_t\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} Z_s, \sum_{t=1}^{n} a_{jt} Z_t\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(a_{is} Z_s, a_{jt} Z_t\right) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(a_{ir} Z_r, a_{jr} Z_r\right) + \sum_{r=1}^{n} \sum_{r \neq k} \mathrm{Cov}\left(a_{ir} Z_r, a_{jk} Z_k\right) \\
&= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{jr} \mathrm{Cov}\left(Z_r, Z_r\right) + \sum_{r=1}^{n} \sum_{r \neq k} a_{ir} a_{jk} \mathrm{Cov}\left(Z_r, Z_k\right) \\
&= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{jr}
\end{aligned}
$$

第 10 章　随机序关系

10.1 证:

利用一阶随机占优的定义：

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 \geq 0) = 1 = P(X_2 \geq 0),\\
&P(X_1 \geq 1) = p_1 \geq P(X_2 \geq 1) = p_2,
\end{aligned}
$$

所以 $X_1 \geq_{st} X_2$.

10.2 证:

令 $I_j = \begin{cases} 1, & \text{概率为} p \\ 0, & \text{概率为} 1-p \end{cases}$，而 $\sum_{j=1}^{n} I_j = X(n,p) \sim B(n,p)$，则

$$X(n+1,p) = \sum_{j=1}^{n+1} I_j \geq \sum_{j=1}^{n} I_j = X(n,p),$$

所以 $X(n+1,p) \geq_{st} X(n,p)$.

10.3 证:

令 $I_j = \begin{cases} 1, & \text{概率为} p_1 \\ 0, & \text{概率为} 1-p_1 \end{cases}, J_j = \begin{cases} 1, & \text{概率为} \dfrac{p_2}{p_1} \\ 0, & \text{概率为} 1-\dfrac{p_2}{p_1} \end{cases}$，

而 $\sum_{j=1}^{n} I_j = X(n,p_1) \sim B(n,p_1), \sum_{j=1}^{n} I_j J_j = X(n,p_2) \sim B(n,p_2)$，则

$$X(n,p_2) = \sum_{j=1}^{n} I_j J_j \leq \sum_{j=1}^{n} I_j = X(n,p_1),$$

所以 $X(n,p_1) \geq_{st} X(n,p_2)$.

10.4 证:

利用似然比大于的定义：

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right]}{\exp\left[-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}\right]} = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu_2)^2-(x-\mu_1)^2\right]\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\mu_1-\mu_2)x+\mu_2^2-\mu_1^2\right]\right\},$$

因为 $\mu_1 \geq \mu_2$，所以 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 关于 x 单调递增，即 $X_1 \geq_{lr} X_2$.

10.5 证:

利用似然比大于的定义：

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}}{\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 x}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x},$$

因为 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，所以 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 关于 x 单调递增，即 $X_1 \geq_{lr} X_2$.

10.6 证:

利用似然比大于的定义：

$$\frac{P(X_1=x)}{P(X_2=x)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1}\lambda_1^x/x!}{\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^x/x!}=\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^x,$$

因为 $\lambda_1 \geq \lambda_2$，所以 $\dfrac{P(X_1=x)}{P(X_2=x)}$ 关于 x 单调递增，即 $X_1 \geq_{lr} X_2$.

10.7 证:

有詹森不等式：若 $u(X)$ 是凹函数，则

$$E[u(X)] \geq u[E(X)],$$

因为 X 是特殊的凹函数，则令 $u(X)=X$，所以

$$E[u(X)]=E(X) \geq u[E(X)]=u(X)=X,$$

即 $E(X) \geq_{icv} X$.

10.8 证:

因为 $h(x)$ 是凹函数，则 $h''<0$，所以 h' 是减函数，有

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} h'\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\sigma_2}^{-\sigma_1} h'\,\mathrm{d}x \Rightarrow h(\sigma_2)-h(\sigma_1) \leq h(-\sigma_1)-h(-\sigma_2) \Rightarrow h(-\sigma_1)+h(\sigma_1) \geq h(-\sigma_2)+h(\sigma_2).$$

10.9 证:

令 h 也是一个递增的凹函数，取 $f(x)=h[g(x)]$，显然 $f(x)$ 是增函数，同时

$$f'(x)=h'[g(x)]g'(x), f''(x)=h''[g(x)][g'(x)]^2+h'[g(x)]g''(x),$$

因为 $h'',g''<0$，所以

$$f''(x)<0,$$

因此 $f(x)$ 是递增的凹函数. 因为 $X \geq_{icv} Y$，则

$$E[f(X)] \geq E[f(Y)] \Rightarrow E[h(g(X))] \geq E[h(g(Y))] \Rightarrow g(X) \geq_{icv} g(Y).$$

第 11 章　最优化模型

11.1 解:

设在 f_2 上投资 x，在 f_1 上投资 $6-x$，则要最大化

$$f(x)=2\ln(7-x)+\sqrt{x},$$

利用求导法可解得最优的 $x=15-4\sqrt{11}\approx 1.73$，所以在整数金额投资时，第 1 种方案投资 4，第 2 种方案投资 2，最大回报为 $2\ln 5+\sqrt{2}=4.63$.

11.2 解:

令 $V_1(x)=f_1(x)=\dfrac{10x}{1+x}, y_1(x)=x$，因为

$$V_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{f_2(y)+V_1(x-y)\}=\max\left\{\sqrt{y}+\frac{10(x-y)}{1+x-y}\right\},$$

则有

$$\begin{aligned}
&V_2(1)=5, && y_2(1)=0,\\
&V_2(2)=20/3, && y_2(2)=0,\\
&V_2(3)=23/3, && y_2(3)=1,\\
&V_2(4)=8.5, && y_2(4)=1,\\
&V_2(5)=9, && y_2(5)=1,\\
&V_2(6)=\sqrt{2}+8, && y_2(6)=2,\\
&V_2(7)=\sqrt{2}+25/3, && y_2(7)=2,\\
&V_2(8)=\sqrt{3}+25/3, && y_2(7)=3.
\end{aligned}$$

继续计算可以得到

$$V_3(x)=\max_{0\le y\le x}\{f_3(y)+V_2(x-y)\}=\max\{10(1-\mathrm{e}^{-y})+V_2(x-y)\},$$

利用

$$\begin{aligned}
&1-\mathrm{e}^{-1}=0.632, 1-\mathrm{e}^{-2}=0.865, 1-\mathrm{e}^{-3}=0.950, 1-\mathrm{e}^{-4}=0.982,\\
&1-\mathrm{e}^{-5}=0.993, 1-\mathrm{e}^{-6}=0.998, 1-\mathrm{e}^{-7}=0.999, 1-\mathrm{e}^{-8}=1.000.
\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
V_3(8)=\max\{&10.065, 6.32+9.748, 8.65+9.414, 9.5+9,\\
&9.82+8.5, 9.93+7.667, 9.98+6.667, 9.99+5, 10\}=18.50, y_3(8)=3.
\end{aligned}$$

这样，投资 8 个单位金额可以得到的最大回报总和为 18.50；投资到项目 3 中的最佳投资金额为 $y_3(8)=3$；投资到项目 2 中的最佳投资金额为 $y_2(5)=1$；投资到项目 1 中的最佳投资金额为 $y_1(4)=4$.

11.3 **解:**

令 $x_i(j)$ 表示将总量 j 用来投资时，投资于项目 i 的最佳金额. 因为

$$\max\{f_1(1), f_2(1), f_3(1)\} = \max\{5, 1, 6.32\} = 6.32,$$

则有 $x_1(1) = 0, x_2(1) = 0, x_3(1) = 1$.

由

$$\max_i\{f_i[x_i(1)+1] - f_i[x_i(i)]\} = \max\{5, 1, 8.65 - 6.32\} = 5,$$

有 $x_1(2) = 1, x_2(2) = 0, x_3(2) = 1$.

因为

$$\max_i\{f_i[x_i(2)+1] - f_i[x_i(2)]\} = \max\{20/3 - 5, 1, 8.65 - 6.32\} = 2.33,$$

有 $x_1(3) = 1, x_2(3) = 0, x_3(3) = 2$.

因为

$$\max_i\{f_i[x_i(3)+1] - f_i[x_i(3)]\} = \max\{20/3 - 5, 1, 9.50 - 8.65\} = 1.67,$$

有 $x_1(4) = 2, x_2(4) = 0, x_3(4) = 2$.

因为

$$\max_i\{f_i[x_i(4)+1] - f_i[x_i(4)]\} = \max\{30/4 - 20/3, 1, 9.50 - 8.65\} = 1,$$

有 $x_1(5) = 2, x_2(5) = 1, x_3(5) = 2$.

因为

$$\max_i\{f_i[x_i(5)+1] - f_i[x_i(5)]\} = \max\{30/4 - 20/3, 0.414, 9.50 - 8.65\} = 0.85,$$

有 $x_1(6) = 2, x_2(6) = 1, x_3(6) = 3$.

现在从

$$\max_i\{f_i[x_i(6)+1] - f_i[x_i(6)]\} = \max\{30/4 - 20/3, 0.414, 9.82 - 9.50\} = 0.83,$$

有 $x_1(7) = 3, x_2(7) = 1, x_3(7) = 3$.

最后由

$$\max_i\{f_i[x_i(7)+1] - f_i[x_i(7)]\} = \max\{8 - 30/4, 0.414, 9.82 - 9.50\} = 0.50,$$

得到 $x_1(8) = 4, x_2(8) = 1, x_3(8) = 3$.

因此，最大回报为 $6.32 + 5 + 2.33 + 1.67 + 1 + 0.85 + 0.83 + 0.50 = 18.50$.

11.4 **证:**

当 $n = 1$ 时，结论显然成立. 当 $n = 2$，即只有 2 个项目时，假设在最优投资策略下项目 i 投资金额为 k，项目 j 投资金额为 r，则有

$$f_i(k) + f_j(r) \geq f_i(k-1) + f_j(r+1) \Rightarrow f_i(k) - f_i(k-1) \geq f_j(r+1) - f_j(r),$$

而由于 $f_i(x)$ 是凸的，则

$$f_i(k+1) - f_i(k) \geq f_i(k) - f_i(k-1), \quad f_j(r+1) - f_j(r) \geq f_j(r) - f_j(r-1),$$

所以

$$f_i(k+1)-f_i(k)\geq f_i(k)-f_i(k-1)\geq f_j(r+1)-f_j(r)$$
$$\geq f_j(r)-f_j(r-1)\Rightarrow f_i(k+1)+f_j(r-1)\geq f_i(k)+f_j(r)$$

继续递推，得

$$f_i(k+r)+f_j(0)\geq f_i(k)+f_j(r),$$

即存在最优投资策略将全部资金投资于一个项目.

若当 $n=p$ 时，结论成立，则当 $n=p+1$ 时，假设 $n=p$ 时，全部资金投资于项目 i，则在项目 i 与项目 $p+1$ 两者间，与 $n=2$ 时类似，同理可得，必存在最优投资策略将全部资金投资于一个项目. 综上，证毕.

11.5 **证**:

a) 假设这 n 个变量中有某两个值分别为 $k+i,k-j$，假设 $k+i+1,k-j+1$ 对应的函数值比前者大，则

$$f(k+i)+f(k-j)\leq f(k+i+1)+f(k-j+1)\Rightarrow f(k+i)-f(k+i+1)\leq f(k-j+1)-f(k-j),$$

这也符合凹函数的性质，说明假设正确. 因此当变量取值越来越靠近时，函数值越来越大，即最大值是 $kf(n)$.

b) 根据上一题的结论，最大值为 $f(kn)$.

11.6 **解**:

继续可得

$$\begin{aligned}
&V(19)=\max\{7+V(14),12+V(10),22+V(4)\}=26, && i(19)=1\text{或}2,\\
&V(20)=\max\{7+V(15),12+V(11),22+V(5)\}=29, && i(20)=1\text{或}3,\\
&V(21)=\max\{7+V(16),12+V(12),22+V(6)\}=29, && i(21)=1\text{或}3,\\
&V(22)=\max\{7+V(17),12+V(13),22+V(7)\}=29, && i(22)=1\text{或}3,\\
&V(23)=\max\{7+V(18),12+V(14),22+V(8)\}=31, && i(23)=1\text{或}2,\\
&V(24)=\max\{7+V(19),12+V(15),22+V(9)\}=34, && i(24)=2\text{或}3,\\
&V(25)=\max\{7+V(20),12+V(16),22+V(10)\}=36, && i(25)=1\text{或}3.
\end{aligned}$$

所以对于资金 25，最佳的投资策略是分别购买一份项目 $i(25)=1,i(20)=1,i(15)=3$ 或 $i(25)=1,i(20)=3,i(5)=1$ 或 $i(25)=3,i(10)=1,i(5)=1$. 这就是说，如果有资金 25，那么最佳的投资是购买 2 份项目 1 和 1 份项目 3，可以得到的回报总额为 36.

11.7 **解**:

a) $V_1(x)=\sqrt{x}$.

b) $V_2(x)=\max\limits_{0\leq y\leq x}\{\sqrt{y}+V_1[(1+r)(x-y)]\}=\max\limits_{0\leq y\leq x}\left\{\sqrt{y}+\sqrt{(1+r)(x-y)}\right\}$.

c) $V_n(x)=\max\limits_{0\leq y\leq x}\{\sqrt{y}+V_{n-1}[(1+r)(x-y)]\}$.

d) 先改写 $V_2(x)$ 的表达式，并令 $\beta = 1+r$，则

$$V_2(x) = \max_{0\le\alpha\le1}\left\{\sqrt{\alpha x}+\sqrt{\beta(x-\alpha x)}\right\} = \sqrt{x}\max_{0\le\alpha\le1}\left\{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta(1-\alpha)}\right\},$$

记 $f(\alpha)=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta(1-\alpha)}$，则

$$f'(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha^{-1/2}-\sqrt{\beta}\frac{1}{2}(1-\alpha)^{-1/2}=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{1+\beta},$$

所以 $V_2(x)=\sqrt{(1+\beta)x}$. 于是

$$V_3(x)=\max_{0\le\alpha\le1}\left\{\sqrt{\alpha x}+V_2[\beta(1-\alpha)x]\right\}=\sqrt{x}\max_{0\le\alpha\le1}\left\{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta(1+\beta)(1-\alpha)}\right\},$$

同理可得，满足条件的 $\alpha=\dfrac{1}{1+\beta(1+\beta)}$，此时 $V_3(x)=\sqrt{(1+\beta+\beta^2)x}$. 依此类推，

$$V_n=\sqrt{x\sum_{i=1}^{n}\beta^{i-1}},$$

所以最佳的投资额和消费额为 $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}(1+r)^{i-1}}$.

11.8 **解**:

a)

$$V(S)=\max_{i\in S}\left\{R_i\left(x_i+\sum_{k\notin S}x_k\right)+V(S-i)\right\}.$$

b) 首先假设 S 是一个单点集，进行求解；然后当它是两点集时，再求解，依此类推.

11.9 **解**:

在第一种投资中，若投资 x，则承担 $0.2x$ 的风险，其期望效益为 $\ln(x)+0.6\ln(1.2)+0.4\ln(0.8)=\ln(x)+0.0201$. 在第二种投资中，投资 x，若赢的概率为 0.4 则不承担风险，若赢的概率为 0.8 则承担 $0.6x$ 的风险，其期望效益为 $\ln(x)+0.3[0.8\ln(1.6)+0.2\ln(0.4)]=\ln(x)+0.0578$. 所以选择第二种投资.

11.10 **证**:

(11-7) 式：即证 $\sqrt{149x}=\max_{0\le y\le x}\left\{10\sqrt{y}+7\sqrt{x-y}\right\}=\sqrt{x}\max_{0\le\alpha\le1}\left\{10\sqrt{\alpha}+7\sqrt{1-\alpha}\right\}$，

令 $f(\alpha)=10\sqrt{\alpha}+7\sqrt{1-\alpha}$，则

$$f'(\alpha)=5\alpha^{-1/2}-\frac{7}{2}(1-\alpha)^{-1/2}=0\Rightarrow\alpha=\frac{100}{149},$$

所以

$$\max_{0\le\alpha\le1}\left\{10\sqrt{\alpha}+7\sqrt{1-\alpha}\right\}=10\times\frac{10}{\sqrt{149}}+7\times\frac{7}{\sqrt{149}}=\sqrt{149},$$

即 $\max_{0\le y\le x}\left\{10\sqrt{y}+7\sqrt{x-y}\right\}=\sqrt{149x}$.

(11-8) 式：$y_2(x)=\alpha x=\dfrac{100}{149}x$.

11.11 **证:**

为了确定可以到达节点 j 的最短时间，要先确定到达节点 j 前到达的节点. 若是节点 i，设在时刻 s 到达节点 i，则到达节点 j 的时间为 $s+t_s(i,j)$，而 $s+t_s(i,j)$ 关于 s 递增，所以这就是最短时间，所以

$$T(j)=\min_i\left\{T(i)+t_{T(i)}(i,j)\right\}.$$

第 12 章　随机动态规划

12.1 解:

a) 令 $q(j)=1-p(j)$，所以

$$V_k(n)=\begin{cases}0, & k>n\\ \max\limits_{1\le j\le n}\{p(j)V_{k-1}(n-j)+q(j)V_k(n-j)\}, & k\le n.\end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned}
&V_1(1)=p(1)=0.2,\quad a_1(1)=1,\\
&V_1(2)=\max p(1)+q(1)V_1(1),p(2)=0.4,\quad a_1(2)=2,\\
&V_1(3)=\max p(1)+q(1)V_1(2),p(2)+q(2)V_1(1),p(3)=0.6,\quad a_1(3)=3,\\
&V_2(2)=p^2(1)=0.04,\quad a_2(2)=1,\\
&V_2(3)=\max p(1)V_1(2)+q(1)V_2(2),p(2)V_1(1)=0.112,\quad a_2(3)=1,\\
&V_2(4)=\max p(1)V_1(3)+q(1)V_2(3),p(2)V_1(2)+q(2)V_2(2),p(3)V1(1)=0.2096,\quad a_2(4)=1,
\end{aligned}$$

所以最大概率为 0.2096. 最优策略为：当仍然需要 j 台机器，并且还有剩余的 i 台机器需要建造时，先投资 1 台，然后再投资 $a_j(i)$.

12.2 解:

有 $V(i,0)=i,V(0,i)=0$，则

$$\begin{aligned}
V(1,1)&=\max\left\{0,0+\frac{1}{2}\right\}=1/2,\\
V(2,1)&=\max\left\{0,\frac{1}{3}+\frac{2}{3}V(1,1)+\frac{1}{3}V(2,0)\right\}=4/3,\\
V(1,2)&=\max\left\{0,-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}V(0,2)+\frac{2}{3}V(1,1)\right\}=0,\\
V(2,2)&=\max\left\{0,0+\frac{1}{2}V(1,2)+\frac{1}{2}V(2,1)\right\}=2/3,\\
V(1,3)&\le V(1,2)=0,V(1,4)\le V(1,3)=0,\\
V(2,3)&=\max\left\{0,-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}V(1,3)+\frac{3}{5}V(2,2)\right\}=1/5,\\
V(2,4)&=\max\left\{0,-\frac{2}{6}+\frac{2}{6}V(1,4)+\frac{4}{6}V(2,3)\right\}=0,\\
V(3,1)&=\max\left\{0,\frac{1}{2}+\frac{3}{4}V(2,1)+\frac{1}{4}V(3,0)\right\}=9/4,\\
V(3,2)&=\max\left\{0,\frac{1}{5}+\frac{3}{5}V(2,2)+\frac{2}{5}V(3,1)\right\}=3/2,\\
V(3,3)&=\max\left\{0,0+\frac{1}{2}V(2,3)+\frac{1}{2}V(3,2)\right\}=17/20,\\
V(3,4)&=\max\left\{0,-\frac{1}{7}+\frac{3}{7}V(2,4)+\frac{4}{7}V(3,3)\right\}=12/35.
\end{aligned}$$

12.3 **证**:

可利用数学归纳法完成 $V_n(x)$ 与 α^* 的证明. 因为 $\ln x$ 是凹函数，则

$$E[\ln(\alpha Y+1-\alpha)] \leq \ln[\alpha E(Y)+1-\alpha] \leq \ln 1 = 0,$$

所以 $\alpha^*=0$.

12.4 **解**: 注意：这里题干有误，应该是例 12.2a.

此时的最优策略就是求满足下列条件的 i：

$$i(1-\beta) > \beta E[(X-i)^+ - c].$$

12.5 **解**:

a) 在你赢了 k 局前，一定会赢 $k-1$ 局. 所以最优策略就是以最低的期望成本赢 $k-1$ 局，并在下一场游戏中投入 x.

b) 在以最低的期望成本赢 $k-1$ 局并在下一场游戏中投入 x 后，赢 $k-1$ 局的次数服从参数为 $p(x)$ 的几何分布. 所以赢 k 局的最低的期望成本满足 $V_k=\min\limits_{x\geq 1}\dfrac{V_{k-1}+x}{p(x)}$.

c) 令 $H(j)$ 为连续赢 j 局时，连续赢 n 局的最低期望成本. 于是有

$$H(j)=\min_x\{x+p(x)H(j+1)+(1-p(x))V_n\}, j<n.$$

从 $j=n-1$ 开始，下一步是 $j=n-2$，由此可以递归求解. 最小化等式右侧的 x 就是连续赢 j 局时的最佳投资金额.

12.6 **解**:

a) 状态是当前已收到的赠券的种类；决策是是收集还是停止收集.

b) 令 $V(j)$ 是当前已收到的赠券的种类为 j 时，净回报的最大期望. 最优化函数为

$$V(j)=\max\left\{jr,-1+\frac{j}{n}V(j)+\frac{n-j}{n}V(j+1)\right\}.$$

c) 状态是 j 时的一阶前向策略为

$$jr \geq -1+\frac{j}{n}jr+\frac{n-j}{n}(j+1)r,$$

并且若 $r\dfrac{n-j}{n}<1$ 则停止收集.

d) 这是最优策略，因为状态无法减少，停止状态集是闭集.

e) 状态是当前已收到的赠券的种类的子集.

f) 记子集为 S，若 $r\sum\limits_{i\notin S}p_i=1$，则一阶前向策略将会停止. 这是最优策略，因为当前已收到的赠券一定是一个人所有收到的赠券的子集.

12.7 **解**:

当红球数小于或等于黑球数时，一阶前向策略将会停止. 这是一个很差的策略.

第 13 章　奇异期权

13.1 证:

若 $u \le r$. 令时刻 $y(y<t)$ 期权的价格为 s. 相比在时刻 y 执行期权，在时刻 t 执行期权，在时刻 y 的期望收益为

$$e^{-r(t-y)}[se^{r(t-y)} - Ke^{ut}] = s - Ke^{ut-r(t-y)} \ge s - Ke^{uy},$$

所以若 $u \le r$，那么永远不会提前执行这个看涨期权.

13.2 略.

13.3 解:

详细过程见书，$E(V) = S(0)\dfrac{1-e^{r(n+1)/N}}{1-e^{r/N}}$.

13.4 证:

a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(W) &= \mathrm{Cov}\left(Y + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i, Y + \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) \\
&= \mathrm{Cov}(Y,Y) + 2\mathrm{Cov}\left(Y, \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) + \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i, \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) \\
&= \mathrm{Var}(Y) + 2\sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{Cov}(Y, X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \mathrm{Var}(Y) + 2\sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{Cov}(Y, X_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j \ne i} c_i c_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \mathrm{Var}(Y) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{Cov}(Y, X_i)
\end{aligned}$$

b) 两边同时对 c_i 求偏导，并让偏导等于 0，可得

$$2c_i \mathrm{Var}(X_i) + 2\mathrm{Cov}(Y, X_i) = 0 \Rightarrow c_i = -\frac{\mathrm{Cov}(Y, X_i)}{\mathrm{Var}(X_i)}.$$

13.5 略.

13.6 略.

13.7 解:

与 13.8 节类似，只是等式变成了

$$V_k(i) = \max\{su^i d^{k-i} - K, pV_{k+1}(i+1) + (1-p)W_{k+1}(i)\}.$$

13.8 解:

障碍看涨期权的期望支付值以概率 p 乘以 u，以概率 $1-p$ 乘以 d. 如果乘以 d，则需要确认新的价格是否低于障碍值.

第 **14** 章　非几何布朗运动模型

本章节无习题.

第 15 章　自回归模型和均值回复

15.1 解:

因为 $\dfrac{\sigma^2}{N}=0.2, a=\dfrac{\mu}{N}=5$，则 $\mu=\dfrac{1260}{365}, \sigma^2=\dfrac{50.4}{365}$，则

$$P[L(n+10)>L(n)]=P\left(Z>\frac{0-1260/365\times 10/365}{\sqrt{50.4/365\times 10/365}}\right)=1-\Phi(-1.5377)=0.9379.$$

15.2 解:

因为 $L(n)\sim N[m(n),v(n)]$，其中

$$m(n)=\frac{a(1-b^n)}{1-b}+b^nL(0), v(n)=\frac{\sigma^2(1-b^{2n})}{N(1-b^2)},$$

并且有

$$a=1.2, b=0.7, n=60, \frac{\sigma^2}{N}=0.1, r=0.1, K=50,$$

a) 此时 $g=L(0)=48$，则

$$m(60)=\frac{1.2(1-0.7^{60})}{1-0.7}+0.7^{60}\times 48=4, v(60)=\frac{0.1(1-0.7^{120})}{1-0.7^2}=\frac{10}{51}, h=\frac{\ln K-m(60)}{\sqrt{v(60)}}=-0.1987,$$

而 $\Phi[\sqrt{v(n)}-h]=\Phi(0.6415)=0.7394, \Phi(-h)=\Phi(0.1987)=0.5788$，所以

$$E=\mathrm{e}^{-rn/N}\{\mathrm{e}^{m(n)+v(n)/2}\Phi[\sqrt{v(n)}-h]-K\Phi(-h)\}=15.2214.$$

b) 此时 $g=L(0)=50$，则

$$m(60)=\frac{1.2(1-0.7^{60})}{1-0.7}+0.7^{60}\times 50=4, v(60)=\frac{0.1(1-0.7^{120})}{1-0.7^2}=\frac{10}{51}, h=\frac{\ln K-m(60)}{\sqrt{v(60)}}=-0.1987,$$

而 $\Phi[\sqrt{v(n)}-h]=\Phi(0.6415)=0.7394, \Phi(-h)=\Phi(0.1987)=0.5788$，所以

$$E=\mathrm{e}^{-rn/N}\{\mathrm{e}^{m(n)+v(n)/2}\Phi[\sqrt{v(n)}-h]-K\Phi(-h)\}=15.2214.$$

c) 此时 $g=L(0)=52$，则

$$m(60)=\frac{1.2(1-0.7^{60})}{1-0.7}+0.7^{60}\times 52=4, v(60)=\frac{0.1(1-0.7^{120})}{1-0.7^2}=\frac{10}{51}, h=\frac{\ln K-m(60)}{\sqrt{v(60)}}=-0.1987,$$

而 $\Phi[\sqrt{v(n)}-h]=\Phi(0.6415)=0.7394, \Phi(-h)=\Phi(0.1987)=0.5788$，所以

$$E=\mathrm{e}^{-rn/N}\{\mathrm{e}^{m(n)+v(n)/2}\Phi[\sqrt{v(n)}-h]-K\Phi(-h)\}=15.2214.$$

15.3 略.

15.4 解:

会回复到

$$s^*=\exp\left(\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right)=64.50.$$

15.5 **证**:

因为 $s > s^*$，所以

$$s > \exp\left(\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right) \Rightarrow s^{1-b} > \left[\exp\left(\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right)\right]^{1-b} = \mathrm{e}^{a+\sigma^2/2N} \Rightarrow s > \mathrm{e}^{a+\sigma^2/2N} s^b,$$

即 $E[S_d(n)] < s$. 同时

$$s > \exp\left(\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right) \Rightarrow s^b > \exp\left(\frac{b(a+\sigma^2/2N)}{1-b}\right) = \exp\left[\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b} - (a+\sigma^2/2N)\right],$$

所以

$$E[S_d(n)] = \mathrm{e}^{a+\sigma^2/2N} s^b > \exp\left[\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b} - (a+\sigma^2/2N) + (a+\sigma^2/2N)\right] = \exp\left(\frac{a+\sigma^2/2N}{1-b}\right) = s^*,$$

综上

$$s^* < E[S_d(n)] < s.$$

15.6 **证**:

对上一题的不等式，两边取极限 $\lim\limits_{s\to s^*}$，利用夹逼定理，可立得

$$E[S_d(n)] = s^*.$$