关于统计指数型偏误理论的深层思考

■焦　鹏

一、统计指数型偏误理论问题的提出

在整个统计指数理论中，型偏误理论是重要的组成部分，然而在我国目前关于指数的论著中，针对该问题的阐释却显得相对比较薄弱，甚至有些篇章中的论述还出现了错误，实在令人惋惜。针对此问题，笔者特撰此文，以期达到抛砖引玉的效果。

“偏误”一词在指数理论中的提出缘于鲍利，而将整个偏误理论发扬光大的当属费雪。在费雪的经典名著《指数的构造》当中，他将该问题分析得淋漓尽致。费雪为对指数的优劣进行甄别，在前人的基础上归纳并独创地提出了一套检验方法，此套方法所涵盖的检验条目共有八项：确定性检验、恒等性检验、同度量检验、比例性检验、时间互换检验、因子互换检验、循环检验、进退检验。其中与型偏误理论息息相关的为时间互换检验，现将该检验与型偏误理论详述如下：将 $P(p_0, p_1, q_0, q_1)$ 定义为指数公式的一般函数形式，其中 p_0,p_1 分别代表基期与比较期价格；q_0,q_1 分别代表基期与比较期物量。时间互换检验可以解释为：将原指数公式 $P(p_0,p_1,q_0,q_1)$ 中的构成要素时期进行互换（具体表现为0、1的互换），得到 $P(p_1,p_0,q_1,q_0)$。根据费雪的解释，如果 $P(p_0,p_1,q_0,q_1)$ 是一个具有优良性质的指数，其应当满足：$P(p_0,p_1,q_0,q_1)P(p_1,p_0,q_1,q_0)=1$；如果不满足该式，则称 $P(p_0,p_1,q_0,q_1)$ 存在型偏，其中型上偏为 $P(p_0,p_1,q_0,q_1)P(p_1,p_0,q_1,q_0)>1$；型下偏为 $P(p_0,p_1,q_0,q_1)P(p_1,p_0,q_1, q_0)<1$。

二、利用型偏误理论对第一、二代指数公式进行考察

(一)对于第一代指数公式的型偏误考察

首先，我们将第一代指数公式：简单综合指数、简单算术平均数指数、简单调和平均数指数、简单几何指数分别用s、a、h、g进行表示；同时将相对应的具体数学表达式陈列如下：

$$s=\frac{\sum p_1}{\sum p_0};a=\frac{\sum p_{1/0}}{n};h=\frac{n}{\sum p_{0/1}};g=\sqrt[n]{\prod p_{1/0}}$$

（注：$p_{1/0}=\frac{p_1}{p_0}$）；将各项分别进行时间转换得到：

$$s'=\frac{\sum p_1}{\sum p_0};a'=\frac{\sum p_{0/1}}{n};h'=\frac{n}{\sum p_{1/0}};g'=\sqrt[n]{\prod p_{0/1}}。$$

将上面四个公式分别进行型偏误检验，检验结果如下：

(1)$s\cdot s'=1$，说明简单综合指数不存在型偏误。

(2)$g\cdot g'=1$，说明简单几何指数不存在型偏误。

(3)对于简单算术平均数指数、简单调和平均数指数的型偏误检验，可利用平均数的性质加以判断，由于 $h<g<a$，可以得出 $hh'<gg'=1<aa'$；因此，简单调和平均数具有型下偏，而简单算术平均数具有型上偏。

(二)对于第二代指数公式的型偏误考察

第二代公式的典型特征是为了使指数公式更具有经济意义添加了物量要素作为权数，在此附带说明一个长期以来被人们误解的问题，认为第二代指数公式相对于第一代指数公式就是多了权数，这样理解并不准确。我们以第一代简单综合指数公式s为例进行说明：$s=\frac{\sum p_1}{\sum p_0}$，可以将其变形为 $s=\sum p_{1/0}\cdot\frac{p_0}{\sum p_0}$，如此一来s也是包含了 p_0 的加权算术平均数，因此本文为了更为科学严谨，着重说明第二代价格指数公式相对于第一代价格指数公式的不同是添加了含有物量要素的权数。

首先，我们将第二代指数中综合指数、加权算术平均数、加权调和平均数、加权几何平均数，分别用S、A、H、G进行表示；同时将所它们对应的具体数学表达式陈列如下：

$$S=\frac{\sum p_1q_x}{\sum p_0q_x}=\sum p_{1/0}\frac{p_0q_x}{\sum p_0q_x}$$

$$A=\sum p_{1/0}\frac{q_xp_0}{\sum q_xp_0};\quad H=\frac{\sum q_xp_1}{\sum\frac{q_xp_1}{p_{1/0}}}$$

$$G=(\prod p_{1/0}^{v_i})^{\frac{1}{\sum v_i}}$$

将S、A、H、G四项指数公式，分别进行时间转换变形，得到：

$$S'=\sum p_{0/1}\frac{\sum p_1q_x}{\sum p_1q_x}$$

$$A'=\sum p_{0/1}\frac{q_xp_1}{\sum q_xp_1}$$

$$H'=\frac{\sum q_xp_0}{\sum\frac{q_xp_0}{p_{0/1}}};\quad G'=(\prod p_{0/1}^{v_i})^{\frac{1}{\sum v_i}}$$

上面的公式经过适当的变形可以得到S=A=H，当然同理有S'=A'=H'。

(1)当x不取0、1时，即脱离基期与比较期的某一特定时期，那么此时由于x不涉及到时间转置的过程中，所以SS'=1，同时由于S=A=H且S'=A'=H'可以得出：S、A、H都不存在型偏误。

(2)当x取0时，则上述公式S、A、H的具体表达式中 q_x 将变为 q_0，以S为例进行具体分析：$S=\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$，$S'=\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_1q_1}$；$S\cdot S'\neq1$；因此S、A与H都存在型偏误。

(3)当x取1时，则上述公式S、A、H的具体表达式中将 q_x 变为 q_1，仍以S为例进行具体分析：$S=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$，$S'=\frac{\sum p_0q_0}{\sum p_1q_0}$；$S\cdot S'\neq1$；因此S、A与H都存在型偏误。

(4)关于加权几何平均数G的讨论可以按上述过程分别进行，此处仅将分析结果列示如下：当x取非0、1时G不存在型偏误；当x取0或1时G存在型偏误。

三、型偏误理论对于第三代指数公式诞生的意义

从第一、二、三代指数公式的形式中可以发现，第一代指数公式没有考虑各个产品的相对重要性，也就不能反映客观现实中的经济情况；第二代指数尽管添加了物量因素作为同度量因素也考虑

了不同产品的相对重要性，但是又存在偏误现象，不具备费雪所提出的优良性质。因此怎样去构造一批既符合经济现实又不存在偏误的指数公式就摆在了指数专家的面前，这也是促成第三代指数诞生的积极因素。应当说第三代指数更多的是在对第二代指数的“矫正”过程中孕育而生的，本人之所以突出“矫正”二字是由于我们通过研究可以发现整个第三代指数并没有什么实质性的创新，而更多的是围绕第二代指数加以变形，其目的就是为了使变形后的公式不存在偏误。关于这一点就连费雪也不避讳。当然，一针见血的点出问题本质的恐怕要算帕尔科夫斯，在其论著《指数理论与经济现实》中，他直接以“交叉时间对偶——第三代指数公式”作节。

针对消除型偏误的目的，主要手段为“交叉”，而“交叉”又可以细分为“型交叉”与“权交叉”。现以各自的代表性杰作分别说明：

1.型交叉的代表——费雪理想公式

费雪理想公式为：$F=[\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\cdot\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}]^{1/2}$；对其进行时间转置得到 $F'=[\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_1q_1}\cdot\frac{\sum p_0q_0}{\sum p_1q_0}]^{1/2}$；最终有 $FF'=1$；由此可知费雪理想指数不具有型偏误。

2. 权交叉的代表——Edgeworth-Marshall 公式

Edgeworth-Marshall 公式为：$S=E=\frac{\sum\frac{q_0+q_1}{2}p_1}{\sum\frac{q_0+q_1}{2}p_0}=\frac{\sum(q_0+q_1)p_1}{\sum(q_0+q_1)p_0}$；对其进行时间转置得到 $S'=\frac{\sum(q_1+q_0)\cdot p_0}{\sum(q_1+q_0)\cdot p_1}$；$SS'=1$，满足时间互换检验，不存在型偏误。

四、关于型偏误理论的深度思考

首先，当我们所研究的指数公式为零偏误，或者说不存在型偏误时，这在经济学中究竟意味着什么？这个问题在我国理论界通常的分析过程为，举出一组针对基期与报告期的价格及数量资料，分别利用传统的L氏指数和P氏指数进行价格指数运算，将运算结果中数值大的公式定义为上偏或叫“高估”，而将数值小的公式定义为下偏或叫“低估”。此说法并不科学，因为这种“高”、“低”之论就连最基本的统一比较标准都没有。如果有“好事者”询问当某一指数公式不存在偏误或者说存在“零偏误”时，究竟意味着什么呢，这一点恐怕很难解释，因为就连诺贝尔经济学奖得主萨谬尔森也是这样评论的“人们无法知道零偏误的精确意义何在”，所以关于本文所论述得偏误问题，理论界还有很长得路要走。

其次，在谈及关于型偏误的指数文献中，有一部分论著指出经济学所考虑的经济现象严格沿时间一维变化，任何经济现象的发生都是在特定的环境、地点下出现的结果，时间互换检验成立的前提是时间维的可逆性，不符合经济学的研究方法。如果是研究同一个经济现象，取时间轴上的某一点为基期，然后根据“向前看”的原则，记录比较期的相应数据来运用相应的指数公式进行测量上述观点并无可厚非的；但如果所研究的问题是在某一特定的时间点上，比较两个地区的一般价格水平呢？例如：$P_{1/0}$代表1号地区相对于0号地区的平均相对价格水平；$P_{0/1}$代表0号地区相对于1号地区的平均相对价格水平，则 $P_{1/0}P_{0/1}=1$ 此时便成了必须成立的。关于此点论述较为精辟的要数杨灿教授的文章《指数性质的数学测验问题》。在该文中，杨教授指出空间指数所反映的现象对比关系有其特殊性，社会现象在时间上是“继起”，而在空间上“并存”。空间指数所考虑的两个相互联系的经济现象可以互为对比的基准，并且，要求交换对比基准后的指数分析结论一致。

最后，指数的型偏误理论绝对不是某些理论研究者的的游戏，例如在国民经济核算领域的年度和季度核算中，美国和加拿大都已经使用链式费雪指数，它是多方考虑了价格指数理论和经济理论的成果；另外，在国际经济对比中的价格换算指数的编制，和反映地域差别的生活费用指数的编制也都考虑了型偏误理论。

（作者单位/厦门大学经济学院）

（责任编辑/浩　天）