应用时间序列分析　第一次作业

题目

请用特征根法求解 2 阶线性差分方程的通解.

$$y_t = 0.5 + 1.3y_{t-1} - 0.4y_{t-2} + \varepsilon_t$$

解答

由题意，可得该方程的特征方程为：$\lambda^2 - 1.3\lambda + 0.4 = 0 \iff (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.8) = 0$；

则特征根为：$\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.8$；

因此该方程对应的齐次方程的解为：$y_t^h = k_1 0.5^t + k_2 0.8^t$；

该方程的特解为：

$$\begin{aligned}
y_t^p &= \frac{0.5}{1 - 1.3 - (-0.4)} + \frac{\varepsilon_t}{1 - 1.3L - (-0.4)L^2} \\
&= \frac{0.5}{0.1} + \frac{\varepsilon_t}{1 - 1.3L + 0.4L^2} \\
&= 5 + \frac{\varepsilon_t}{(1 - 0.5L)(1 - 0.8L)} \\
&= 5 - \frac{5}{3} \times \frac{\varepsilon_t}{1 - 0.5L} + \frac{8}{3} \times \frac{\varepsilon_t}{1 - 0.8L} \\
&= 5 - \frac{5}{3}\sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i L^i \varepsilon_t + \frac{8}{3}\sum_{i=0}^{\infty} 0.8^i L^i \varepsilon_t \\
&= 5 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3} \times 0.8^i - \frac{5}{3} \times 0.5^i\right) \varepsilon_{t-i}
\end{aligned}$$

综上，该方程的通解为：$y_t = y_t^h + y_t^p = k_1 0.5^t + k_2 0.8^t + 5 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3} \times 0.8^i - \frac{5}{3} \times 0.5^i\right) \varepsilon_{t-i}$.