

现代指数形式理论评析

杨灿

一、 指数的编制形式和测验方法

统计指数是一种“对比性”指标。作为狭义理解的“总指数”的两种常用形式，无论综合指数抑或平均指数，它们都具有“综合性”和“平均性”两个特征：前者是指必须综合反映多种(两种以上)商品的价格或物量对比关系，后者是指必须反映多种商品价格或物量的平均变动(或差异)程度。

指数常常需要测验，这些测验实质上就是对指数分析性质的评价。现有的测验方法体系包括：时间(基位)互换测验和弱时间(基位)互换测验，因素互换测验和弱因素互换测验，循环测验，比例性(平均数)测验，中值测验，恒等(一致性)测验，单调性测验，公度性(单位共通性)测验，扩展性测验，正定性(非负性)测验，线性齐次测验，增删(进退)测验，确定性测验。这一体系可能存在的问题是：测验的种类过多；个别测验排斥了某些可用的指数公式；各种测验标准并非处于同一层次上，它们彼此之间有包含关系；另有个别测验缺乏实际意义。

二、 指数理论形式化的意义

指数分析与数学方法的不断融合，孕育了现代指数理论的“形式化”因素。形式化是现代数学和逻辑学高度发展的重要产物，它旨在以一套形式语言(符号)系统地表述和研究有关的理论与方法体系。指数公式及其性质测验种类繁多，难见其系统性。形式化方法使得指数问题的表述更为简明扼要，整个方法体系更为严谨，达到某种“整体上的简明性”，这样，既有利于理论的归纳和积累，也有利于方法的发展和创新。应该说，指数研究领域内的形式化发展目前仍处于初步阶段，但所取得的成就却不容忽视。

经济分析对于指数方法的要求是多方面的，怎样针对不同问题构造出相应的指数公式，曾经是令众多经济学家和统计学家泥足深陷的研究领域。80年前，欧文·费雪独辟蹊径，依据少数基本公式和几条构造规则制定了一套包容所有前人研究成果的指数构造体系，甚至人们今天才发展出的某些新方法也能够被适当扩充后的费雪体系所包容。这一体系所具有的自我生成的方式与现代的“公理系统”有着惊人的相似之处。费雪的研究成果之所以数十年来在指数领域占有不容否认的权威地位，其方法论的进步无疑是一个重要因素。

三、 怎样的函数可以成为指数

记基期和现期的价格与物量资料为：

$$p_t = (p_{t1}, p_{t2}, \dots, p_{tm})' \quad p_{ti} > 0, t = 0, 1$$

$$q_t = (q_{t1}, q_{t2}, \dots, q_{tin})' \quad q_{ti} > 0, t = 0, 1$$

〔定义 1〕若函数：

$$f(p_0, p_1 | q_0, q_1)$$

满足单调性、比例性、扩展性和公度性四条具有公理性质的测验，则称之为时期 1 与时期 0 对比的价格指数，记为：

$$I_p^{1/0} = f(p_0, p_1 | q_0, q_1)$$

该函数括号中的前一部分为指数化指标(即指数所反映的变量)，后一部分则为指数的同度量因素或权数(即计算指数的参数)。

与价格指数同理，若函数：

$$g(q_0, q_1 | p_0, p_1)$$

满足与上类似的四条公理，则称之为时期 1 与时期 0 对比的物量指数：

$$I_q^{1/0} = g(q_0, q_1 | p_0, p_1)$$

以上四条公理作为指数的必要条件具有分析上的直观性，且彼此相互独立。研究表明，任意已知的若干个指数的“幂平均数”仍然是一个指数，可见该公理系统所包含的指数实际上有无穷多个(其中，究竟哪些指数对于所论问题具有优良分析性质，则有待通过测验加以评价)。但依据上述定义，某些人们通常称之为“指数”的指标或函数(如总值指数和可变构成的平均指标指数)将不再是严格意义上的指数。

四、 优良指数的基本标准

已经证明，由上述公理系统给出的指数必定具有正定性、恒等性和中值性。因此，在给定的公理系统中，上述性质(包括公理中的四条性质)已经失去了测验的必要。舍弃缺乏实际意义的确定性测验，现在需要考虑的指数测验只剩下七条(其中两条还是已被弱化了了的测验)：时间(基位)互换测验和弱时间(基位)互换测验，因素互换测验和弱因素互换测验，循环测验，线性齐次测验，增删(进退)测验。据此，可以进一步检验和评价公理系统中有关指数公式的分析性质。尤其时间互换测验、因素互换测验和循环测验对于评价指数的性能具有重要意义，故通常被人们称作指数的“三大测验”。应该指出，指数的“三大测验”并非完全都是

“数学形式主义”的东西，对于相应的经济分析问题，它们是具有显著实际意义的。

五、怎样构造新的优良指数公式

在给定的指数公理系统中，可以依据某一重要测验标准，采用适当公式和方法构造新的优良指数。这里首先需要考虑的当然是指数的“三大测验”。欧文·费雪曾分别依据时间互换测验和因素互换测验，制订过满足这些要求的指数构造方法，即“时间对偶交叉法”和“因素对偶交叉法”，其典型结果就是“理想指数公式”。

时间互换测验和因素互换测验在费雪的指数理论体系中占有突出地位，而循环测验却没有得到应有的重视。究其原因，一方面是因为在当时的情况下，已经获得的符合循环测验的指数都不能符合因素互换测验；另一方面，在国际经济对比（尤其是多边对比）尚未得到充分重视的条件下，传递性要求的实践意义并不十分明显，而就一般的动态指数来说，相对于循环测验的些许偏差被认为是可以接受的（至少费雪在经过数据验证后认为是这样）。实践中，人们常常借助于连锁等方法协调环比指数与定基指数的关系。随着世界经济一体化格局的形成，各国之间的多边对比也逐渐上升到重要地位，作为一种必要的分析工具，指数能否满足可传递或可循环的要求才日益成为实际应用中难以回避的问题。

为了构造满足循环测验的指数公式，不能简单地沿用对偶的原理（事实上并不存在某个指数的“循环对偶”）。现代的指数研究者通过各种方式研制了可传递（循环）指数的构造方法。如国际对比中常用的 EKS 公式，其基本分析思路与费雪的方法仍然一脉相承，实质上不过是一种“广义的理想指数”。费雪的“理想指数”成了 EKS 指数的特例，而且广义理想指数的分析性质比理想指数来得更为“理想”，这一点也许是该指数原来的命名者费雪始料未及的。

六、形式化和公理化的局限性

应该指出，现阶段的指数公理体系仍然存在着不尽完善之处。这尤其表现在它未能涵盖某些理论上重要、实践中有用的指数研究成果。最早的简单综合指数姑且勿论，就连经济涵义非常直观的众数指数和中位数指数，甚至国际对比中非常流行的 PPP 指数（如多边的 G-K 价格指数）等，都难免遗珠之憾。曾有论者认为费雪的优良指数标准太过苛严，其实在费雪那里，指数之成为指数的条件还是非常

宽松的，它只须具备起码的直观“对比性”就行了。反观指数的形式理论，一方面，它固然通过几条公理将一些分析性质欠佳的公式逐出了指数的门外；与此同时，却又大开另一扇方便之门，允许更多不同形式的函数成为指数，其中难免掺杂种种并不具有明确经济意义的函数。须知，截至费雪的时代，人们积数百年之研究积累下来的指数公式充其量不过百余种（费雪仅推荐其中的13种），而现在我们面对的却是无穷多。倘若没有适当的分析目标和经济直觉作指导，要在其中寻找真正可用的指数方法，岂不是大海捞针！从这个意义上说，现有的指数公理系统还有待改进。但改造指数公理系统又是一个两难问题：一则要限制指数的种类，必须增强公理条件；再则要广为包容，又必须降低公理条件。鱼与熊掌如何兼得，仅仅在形式化的框架内未必能从根本上解决问题。

可见，任何事物都有其两面性。数学和逻辑学的方法固然有助于指数理论的精密化、严谨化，但也不是万能的。指数的形式理论只具有相对的独立性，形式化的东西往往还需要由非形式化的东西来加以解释，指数形式理论尤其不能完全脱离经济分析内容和具体应用条件，变成象牙塔中的虚构学问。

指数理论是经济统计学中既传统又常青的研究课题之一，源远流长，积累丰厚。现代指数理论业已形成三个分支，即统计理论（主要研究指数的具体编制方法和分析性质问题）、经济理论（主要讨论指数在经济学上的解释问题）和形式理论（主要利用数学工具对指数问题进行形式化或公理化的处理）。三者之中，归根结蒂，关于指数的统计理论才是最为基础、也是最重要的，因为，无论指数的形式理论或经济理论都要以它作为基本材料和最终归宿。指数理论研究不应忽略这一事实，当然也要注意沟通它们之间的联系。

（作者单位：厦门大学计统系）