第十一讲：转换函数模型

概要：本讲介绍多元时间序列的最简单的转换函数模型 Transfer Function Model，即一个输出变量 single-output 和一个输出变量 single-input 的线性关系。主要内容包括：模型结构、基本性质（转换函数、脉冲响应函数和互相关系数）、模型识别、参数估计和模型校验。最后介绍转换函数模型的应用案例。

在前八讲中，我们讨论了单变量时间序列的时域分析。而在宏观经济分析中，更多的是要考虑多变量时序的关系，比如：原油价格和 GDP 的相互影响，为此，除了分别研究原油价格时间序列的内部关系（单变量时序）和 GDP 时间序列内部关系（单变量时序）之外，更要研究这两个时间序列之间的相互影响，这就是多变量时间序列分析，与之前一样，我们考虑的是时域分析。本讲讲授一个输出序列（响应序列）single-output 与一个输入序列 single-input 的转换函数模型，，这个模型的应用范围很广，例如，销售可能与广告支出有关；每日用电量可能与某些天气变量有关（每日室外最高温度、相对湿度等）。本讲在讲授转换函数模型基本特征后，讨论模型识别、模型估计和模型检验。最后给出转换函数模型的实际应用案例——干预分析模型。

一、模型结构

假定一个输出序列$\{y_t\}$（因变量序列）和一个输入序列$\{x_t\}$（自变量序列）都是**平稳**的，且输出序列和输入序列之间存在着线性相关关系。考虑到输入序列对输出序列的影响，可能会有不同的延迟作用时间和作用时长，如果x_t对y_t的影响要延迟 b 期才发生作用，有效作用期长为 n 期，则输入序列和输出序列可以构建以下模型：

$$y_t = v_0 x_{t-b} + v_1 x_{t-b-1} + \cdots + v_n x_{t-b-n} + \varepsilon_t \qquad 9.1$$

式 9.1 就是转换函数模型 Transfer Function Model，系数参数$v_0, v_1, \ldots, v_n$被称为**脉冲响应权重** Impulse Response Weights，这些值与作用时点 j 有关，又称为**脉冲响应函数** Impulse Response Function，即$v_j = f(j) \quad b \le j \le n$，当$\sum_{j=0}^{n} |v_j| < \infty$，转换函数模型是稳定的 Stable，有界输入总是产生有界输出，**ε_t代表外界随机干扰项，也称为噪声** Noise，**但在这个模型中，不一定是白噪声序列。**x_t**和**ε_t**是相互独立的**。采用延迟算子形式，式 9.1 可以写成：

$$y_t = \upsilon(B)\, x_t + \varepsilon_t \qquad 9.2$$

$$\upsilon(B) = (\upsilon_0 + \upsilon_1 B + \cdots + \upsilon_n B^n) B^b \qquad 9.3$$

转换函数模型建模就是要得到$\upsilon(B)$以及 ε_t可能的模型形式（如果是 White Noise，就不需要咯）。图 9.1 给出了转换函数模型的直观理解。

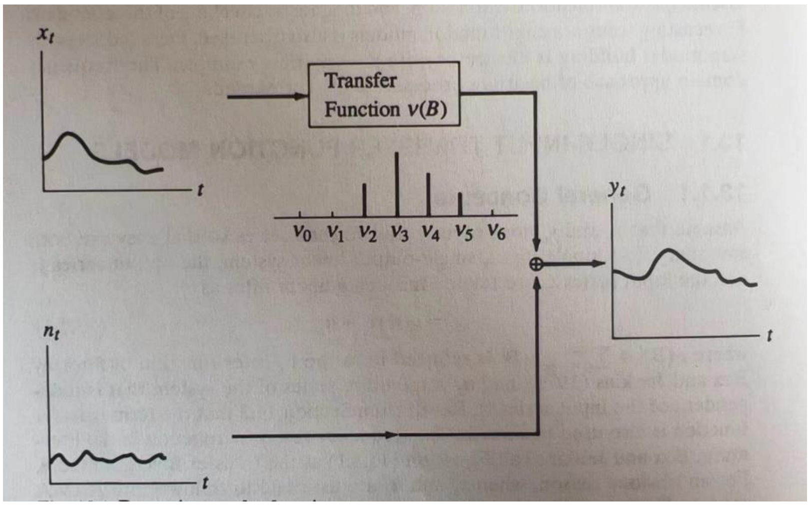


图 9.1 单一输入变量和单一输出变量的转换函数模型系统

输入序列对输出序列的有效作用时期长度 n 可长可短。如果 n 很长，那么式 9.1 的回归参数就会很多。为了减少回归参数，Box 和 Jekins 认为可以将输出序列的自回归结构引入式 9.1，这样可以有效减少具有长期相关关系的回归模型的阶数，即式 9.2 可以改进为：

$$y_t = \frac{\omega(B) B^b}{\delta(B)} x_t + \varepsilon_t \qquad 9.4$$

即式 9.2 采用的是 AR 模型的表达方式，而式 9.4 采用的是 ARMA 模型的表达方式，则转换函数$\upsilon(B)$就写成：

$$\upsilon(B) = \frac{\omega(B) B^b}{\delta(B)} \qquad 9.5$$

其中：$\omega(B)$类似于 ARMA 模型的移动平均系数多项式，$\delta(B)$类似于 ARMA 模型的自回归系数多项式。由于输入序列$\{x_t\}$和输出序列$\{y_t\}$均平稳，平稳序列的线性组合仍然是平稳的，所以噪声序列$\{\varepsilon_t\}$依然是平稳序列：

$$\varepsilon_t = y_t - \frac{\omega(B) B^b}{\delta(B)} x_t \qquad 9.6$$

使用 ARMA 模型继续提取噪声序列$\{\varepsilon_t\}$的相关信息：

$$\varepsilon_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \alpha_t \qquad 9.7$$

式 9.7 中，$\Theta(B)$为噪音序列的移动平均系数多项式，$\Phi(B)$为噪声序列的自回归系数多项

式，α_t 为零均值的白噪声序列。

综上，转换函数模型的最终形式为：

$$y_t = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)}x_t + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\alpha_t \qquad 9.8$$

式 9.8 又称为动态回归模型（ARMAX Model）。

二、转换函数与脉冲响应函数

转换函数$\upsilon(B)$可以写成 ARMA 结构形式，目的是减少估计参数，即：

$$\upsilon(B) = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)} \qquad 9.5$$

设定：

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \cdots - \omega_q B^q \qquad 9.9$$

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \cdots - \delta_p B^p \qquad 9.10$$

这里要求$p+q$要远小于 n。将式 9.9 和式 9.10 代入式 9.5 得：

$$\left(1 - \delta_1 B - \cdots - \delta_p B^p\right)\left(\upsilon_0 + \upsilon_1 B + \cdots + \upsilon_n B^n\right) = \left(\omega_0 - \omega_1 B - \cdots - \omega_q B^q\right)B^b \qquad 9.11$$

两边展开，对应可以得到系数参数（脉冲响应权重）$\upsilon_j, j = 0,1,2 \ldots, n$的关系式：

$$\upsilon_j = 0 \qquad j < b$$

$$\upsilon_j = \delta_1\upsilon_{j-1} + \delta_2\upsilon_{j-2} + \cdots + \delta_p\upsilon_{j-p} + \omega_0 \qquad j = b$$

$$\upsilon_j = \delta_1\upsilon_{j-1} + \delta_2\upsilon_{j-2} + \cdots + \delta_p\upsilon_{j-p} + \omega_{j-b} \qquad j = b+1, b+2, \ldots, b+q$$

$$\upsilon_j = \delta_1\upsilon_{j-1} + \delta_2\upsilon_{j-2} + \cdots + \delta_p\upsilon_{j-p} \qquad j > b+q$$

p 个脉冲响应权重$\upsilon_{b+q}, \upsilon_{b+q-1}, \ldots, \upsilon_{b+q-p+1}$可作为差分方程

$$\delta(B)\upsilon_j = 0 \qquad j > b+q \qquad 9.12$$

的初始值。换句话说，式 9.5 所决定的脉冲响应权重υ_j具有以下性质：

（1）b 个零权重，即$\upsilon_0 = \upsilon_1 = \cdots = \upsilon_{b-1} = 0$。符合假定，$x_t$对$y_t$的影响要延迟 b 期才发生作用，之前的作用均为零；

（2）$q-p+1$个权重$\upsilon_b, \upsilon_{b+1}, \ldots, \upsilon_{b+q-p}$没有一个固定值；

（3）p 个个初始脉冲响应权重$\upsilon_{b+q-p+1}, \upsilon_{b+q-p+2}, \ldots, \upsilon_{b+q-p+1}, \upsilon_{b+q}$；

（4）对于 $j > b+q$，υ_j的值是式 9.12 的解；

总之，b 的值是由 $j < b$时$\upsilon_j = 0$，而$\upsilon_b \neq 0$确定的。p 的值是由脉冲响应权重的形式来决定的，类似识别单变量 ARIMA 模型的阶数 p。对于一个给定的 b 值，如果$p = 0$，那

么 q 的值可以由 $j > b + q$ 时$v_j = 0$求得；如果$p \neq 0$，那么 q 的值可以通过检验脉冲响应权重模式何时开始衰减求得。

在实际应用中，式 9.5 中 p 和 q 的值很少超过 2。一些典型的转换函数模型结构如下：

结构一： $p = 0$，这种情况下，转换函数包含有限数量的脉冲响应权重，以$v_b = \omega_0$开始，以$v_{b+q} = -\omega_q$结束。具体形式见表 9.1。

表 9.1，$p = 0$时的转换函数（表中，*r*=*p*, *s*=*q*）

(b，r，s)	转换函数	脉冲权重类型
(2，0，0)	$v(B)x_t = \omega_0 x_{t-2}$	
(2，0，1)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B)x_{t-2}$	
(2，0，2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)x_{t-2}$	

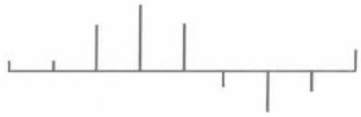
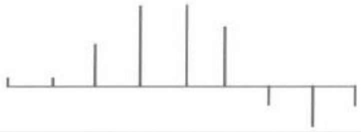
结构二：$p = 1$，这种情况下，脉冲响应权重呈现指数型衰减。如果$q = 0$, 衰减从v_b开始，如果$q = 1$，衰减从v_{b+1}开始，$q = 2$，衰减从v_{b+2}开始。具体形式见表 9.2。

表 9.2，$p = 1$时的转换函数（表中，*r*=*p*, *s*=*q*）

(b，r，s)	转换函数	脉冲权重类型
(2，1，0)	$v(B)x_t = \frac{\omega_0}{(1-\delta_1 B)}x_{t-2}$	
(2，1，1)	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1-\delta_1 B)}x_{t-2}$	
(2，1，2)	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1-\delta_1 B)}x_{t-2}$	

结构三：$p = 2$，这种情况下，脉冲响应权重呈现指数型或正弦函数，这取决于$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 = 0$的根的情况，如果是实根，那么脉冲响应权重服从指数型，如果是复根，那么脉冲响应权重服从正弦。具体形式见表 9.3（给出的是正弦波动的例子）。

表 9.3，$p=2$时的转换函数（表中，$r=p, s=q$）

（b，r，s）	转换函数	脉冲权重类型
（2，2，0）	$v(B)x_t=\frac{\omega_0}{(1-\delta_1 B-\delta_2 B^2)}x_{t-2}$	
（2，2，1）	$v(B)x_t=\frac{(\omega_0-\omega_1 B)}{(1-\delta_1 B-\delta_2 B^2)}x_{t-2}$	
（2，2，2）	$v(B)x_t=\frac{(\omega_0-\omega_1 B-\omega_2 B^2)}{(1-\delta_1 B-\delta_2 B^2)}x_{t-2}$	

三、互相关系数与转换函数

给定两个平稳的随机序列$\{x_t\}$和$\{y_t\}$，采用互协方差函数 cross-covariance function 度量两个随机变量之间的关系，即：

$$\gamma_{xy}(k)=E[x_t-E(x_t)][y_{t+k}-E(y_t)] \qquad 9.13$$

其中，$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$，是延迟阶数。式 9.13 标准化后，就得到互相关系数函数 cross-correlation function CCF，即：

$$\rho_{xy}(k)=\frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x\sigma_y} \qquad 9.14$$

其中，σ_x,σ_y分别代表$\{x_t\}$和$\{y_t\}$的标准差，两个序列都是平稳序列，标准差相等，即$\sigma_y=\sigma_{y-k}$，$\sigma_x=\sigma_{x-k}$。$\gamma_{xy}(k)$和$\rho_{xy}(k)$是γ_k(自协方差函数，auto-covariance function)及ρ_k(自相关系数函数，auto-correlation function)的一般形式，$\gamma_{xx}(k)=\gamma_k$，$\rho_{xx}(k)=\rho_k$。与自相关系数函数不同的是，互相关系数函数不存在对称性，即$\rho_{xx}(k)=\rho_{xx}(-k)$，或$\rho_k=\rho_{-k}$，而$\rho_{xy}(k)\neq\rho_{xy}(-k)$。但是，

$$\gamma_{xy}(k)=E[x_t-E(x_t)][y_{t+k}-E(y_t)]=E[y_{t+k}-E(y_t)][x_t-E(x_t)]=\gamma_{yx}(-k) \qquad 9.15$$

因此，$\rho_{xy}(k)=\rho_{yx}(-k)$，互相关系数函数 CCF 不仅度量了两个随机序列关系的大小，还给出了关系的作用方向。

$k>0$，计算的是序列$\{y_t\}$滞后于序列$\{x_t\}$ k期的 CCF，如果已知$\{y_t\}$是因变量，$\{x_t\}$是自变量的情况下，只需要考虑$k>0$的 CCF。如果$k<0$，计算的是序列$\{x_t\}$滞后于序列$\{y_t\}$ k期的 CCF。在序列$\{x_t\}$和$\{y_t\}$无法确定彼此之间的因果关系时，需要同时考察$k>0$和

$k<0$的 CCF，以确定这两个序列谁是输入序列，谁是输出序列。

和自相关系数函数 ACF、偏自相关系数函数 PACF 一样，根据 Barlett 定理，CCF 近似服从零均值的正态分布：

$$\widehat{\rho_{xy}(k)} \sim N\left(0, \frac{1}{n-|k|}\right)$$

超过 2 倍标准差的 CCF 可以认为是显著非零，即：

$$\widehat{\rho_{xy}(k)} > \frac{2}{n-|k|}$$

说明$\{y_t\}$和$\{x_{t-k}\}$之间具显著关系。CCF 图的判断方式和 ACF 图、PACF 图一样。

在$t+k$时刻，不存在延迟影响$b=0$且影响期数为无穷$n=\infty$的传递函数模型可以写成：

$$y_{t+k} = v_0 x_{t+k} + v_1 x_{t+k-1} + v_1 x_{t+k-2} \dots + \varepsilon_{t+k} \qquad 9.16$$

假定$E(x_t)=0$，$E(y_t)=0$，在式 9.16 两边同乘以x_t并取期望得：

$$E(x_t y_{t+k}) = E(v_0 x_t x_{t+k} + v_1 x_t x_{t+k-1} + v_2 x_t x_{t+k-2} \dots + x_t \varepsilon_{t+k})$$

$$\gamma_{xy}(k) = v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + v_2 \gamma_{xx}(k-2) + \cdots \qquad 9.17$$

这里，$E(x_t \varepsilon_{t+k})=0$，式 9.17 两边同除以$\sigma_x \sigma_y$，得：

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}[v_0 \rho_{xx}(k) + v_1 \rho_{xx}(k-1) + v_2 \rho_{xx}(k-2) + \cdots + v_k \rho_{xx}(0) + \cdots \qquad 9.18$$

式 9.18 可以看出，互相关系数$\rho_{xy}(k)$和脉冲响应函数v_j的关系是不确定的，受到$\{x_t\}$的自相关系数$\rho_{xx}(k)$等的影响，也就是说，无法直接通过样本互相关系数$\widehat{\rho_{xy}(k)}$的特征来确定脉冲响应函数的特征。如果输入序列$\{x_t\}$是白噪声，即$\rho_{xx}(k)=0, \ k \neq 0$，代入式 9.18 得

$$v_k = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy}(k) \qquad 9.19$$

脉冲响应函数v_k与互相关系数函数$\rho_{xy}(k)$成正比，可以通过$\widehat{\rho_{xy}(k)}$的图像特征推断v_k的图像特征，从而确定转换函数$v(B)$。

以下说明几个要点，在转换函数模型建模中要注意：

（1）当x_t和y_t是联合二元平稳过程时，互相关系数函数 CCF，$\rho_{xy}(k)$才有意义；

（2）在一般的转换模型

$$y_t = v(B)\, x_t + \varepsilon_t \qquad 9.2$$

假定$\{x_t\}$是平稳过程，满足 ARMA 模型，即：

$$\Phi_x(B) x_t = \Theta_x(B) \alpha_{x,t}$$

$$\alpha_{x,t} = \frac{\Phi_x(B)}{\Theta_x(B)} x_t \qquad 9.20$$

式 9.20 称为$\{x_t\}$的预白化过程 pre-whitened input series，$\{\alpha_{x,t}\}$是$\{x_t\}$的白噪声序列。同样，可以得到$\{y_t\}$的预白化过程，x_t和y_t都是平稳过程，呈现因果关系，因此，x_t和y_t的 ARMA 结构是一样的：

$$\alpha_{y,t}=\frac{\Phi_x(B)}{\Theta_x(B)}y_t \qquad 9.21$$

$\{\alpha_{y,t}\}$是$\{y_t\}$的白噪声序列。将式 9.20 和式 9.21 代入式 9.2，得到：

$$\alpha_{y,t}=\upsilon(B)\alpha_{x,t}+\frac{\Phi_x(B)}{\Theta_x(B)}\varepsilon_t \qquad 9.22$$

这样，依据式 9.19，脉冲响应函数υ_k就由以下决定：

$$\upsilon_k=\frac{\sigma_{\alpha_{y,t}}}{\sigma_{\alpha_{x,t}}}\rho_{\alpha_{x,t}\alpha_{y,t}}(k) \qquad 9.23$$

式 9.23 给出了转换函数模型识别 Model Identification 的原理。

四、模型识别步骤

依据二与三的讨论，转换函数$\upsilon(B)$的识别包含以下步骤：

第一步：检验$\{x_t\}$和$\{y_t\}$的平稳性，只有二者都是平稳的非白噪声序列，才能构建转换函数模型。

第二步：预白化输入序列$\{x_t\}$：

$$\Phi_x(B)x_t=\Theta_x(B)\alpha_{x,t}$$

$$\alpha_{x,t}=\frac{\Phi_x(B)}{\Theta_x(B)}x_t$$

$\alpha_{x,t}$是均值为零$E(\alpha_{x,t})=0$，方差为$Var(\alpha_{x,t})=\sigma_{\alpha_x}^2$的白噪声序列。

第三步：预白化输出序列$\{y_t\}$：

$$\alpha_{y,t}=\frac{\Phi_x(B)}{\Theta_x(B)}y_t$$

第四步：计算$\alpha_{x,t}$和$\alpha_{y,t}$的样本互相关系数$\rho_{\widehat{\alpha_{x,t}\alpha_{y,t}}}(k)$，然后利用以下公式估计样本脉冲响应函数$\widehat{\upsilon_k}$：

$$\widehat{\upsilon_k}=\frac{\widehat{\sigma_{\alpha_{y,t}}}}{\widehat{\sigma_{\alpha_{x,t}}}}\rho_{\widehat{\alpha_{x,t}\alpha_{y,t}}}(k) \qquad 9.24$$

$\rho_{\widehat{\alpha_{x,t}\alpha_{y,t}}}(k)$和$\widehat{\upsilon_k}$的值计算得到后，它们的显著性依前述的 Barlett 定理判断。

第五步：延迟期数 b 的识别。观察$\widehat{\upsilon_k}$图（脉冲响应函数图，脉冲响应权重图）的特征，匹配表 9.1，表 9.2 和表 9.3，就可以得到$\omega(B)=\omega_0-\omega_1B-\cdots-\omega_qB^q$ 和$\delta(B)=1-$

$\delta_1 B - \cdots - \delta_p B^p$ 的样本形式，同时也可以确定延迟期数 b。因此，可以得到样本转换函数

$$\widehat{\upsilon(B)} = \frac{\widehat{\omega(B)} B^b}{\widehat{\delta(B)}} \qquad 9.25$$

第六步：在得到样本转换函数后，计算噪声序列$\widehat{\varepsilon_t}$：

$$\widehat{\varepsilon_t} = y_t - \widehat{\upsilon(B)} x_t = y_t - \frac{\widehat{\omega(B)} B^b}{\widehat{\delta(B)}} x_t \qquad 9.26$$

依据单变量时间序列 ARMA 模型的构建步骤，通过观察噪声序列$\{\widehat{\varepsilon_t}\}$序列 ACF 图和 PACF 图的特征，判定 ARMA 模型的具体形式，从而得到：

$$\Phi(B)\varepsilon_t = \Theta(B)\alpha_t \qquad 9.27$$

第七步：结合式 9.25 和式 9.27，可以得到转换函数模型：

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \alpha_t \qquad 9.28$$

五、参数估计

在模型识别后，可以得到式 9.28 的具体形式，接下来，需要估计参数$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{p_1})$ $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{q_1})$，$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{q_2})$，$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{p_2})$和$\sigma_\alpha^2$。可以把式 9.28 写成：

$$\delta(B)\Phi(B) y_t = \Phi(B)\omega(B) x_{t-b} + \delta(B)\Theta(B)\alpha_t \qquad 9.29$$

简化成：

$$\boldsymbol{c}(B) y_t = \boldsymbol{d}(B) x_{t-b} + \boldsymbol{e}(B)\alpha_t \qquad 9.30$$

其中：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}(B) = \delta(B)\Phi(B) &= \left(1 - \delta_1 B - \cdots - \delta_{p_1} B^{p_1}\right)\left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_{q_2} B^{q_2}\right) \\ &= 1 - c_1 B - c_2 B^2 - \cdots - c_{p_1+q_2} B^{p_1+q_2} \qquad 9.31\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(B) = \Phi(B)\omega(B) &= \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_{q_2} B^{q_2}\right)\left(\omega_0 - \omega_1 B - \cdots - \omega_q B^{q_1}\right) \\ &= d_0 - d_1 B - d_2 B^2 - \cdots - d_{q_1+q_2} B^{q_1+q_2} \qquad 9.32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(B) = \delta(B)\Theta(B) &= \left(1 - \delta_1 B - \cdots - \delta_{p_1} B^{p_1}\right)\left(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_{p_2} B^{p_2}\right) \\ &= 1 - e_1 B - e_2 B^2 - \cdots - e_{p_1+p_2} B^{p_1+p_2} \qquad 9.33\end{aligned}$$

将式 9.31、9.32、9.33 代入式 9.30，并移项得：

$$\begin{aligned}\alpha_t = {} & y_t - c_1 y_{t-1} - \cdots - c_{p_1+q_2} y_{t-(p_1+q_2)} - d_0 x_{t-b} + d_1 x_{t-b-1} + \cdots + d_{q_1+q_2} x_{t-b-(q_1+q_2)} \\ & + e_1 \alpha_{t-1} + \cdots + e_{p_1+p_2} \alpha_{t-(p_1+p_2)} \qquad 9.34\end{aligned}$$

式 9.34 中，c_i，d_j，e_k都是δ_i，ω_j，θ_k，ϕ_l的函数。假定α_t服从正态分布$\alpha_t \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$，且是白噪声，则可以得到以下似然函数 Likelihood Function：

$$L(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega},\Theta,\Phi,\sigma_\alpha^2|b,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{a}_0)=(2\pi\sigma_\alpha^2)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\alpha^2}\sum_{t=1}^{n}\alpha_t^2\right] \qquad 9.35$$

式中，$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{a}_0$是迭代计算的初始值，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$是观测值。对数似然函数为 ：

$$lnL(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega},\Theta,\Phi,\sigma_\alpha^2|b,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{a}_0)=-\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma_\alpha^2)-\frac{1}{2\sigma_\alpha^2}\sum_{t=1}^{n}\alpha_t^2 \qquad 9.36$$

得到式 9.36 以及初始值，就可以采用数值方法进行迭代计算，即 MLE 估计，最后得到所有的参数。注意：在参数估计的过程中，假定影响延迟期数b是已知的。

六、模型检验

在模型识别和模型估计后，就要进行模型检验，除了常规的拟合优度检验、参数显著性检验之外，转换函数模型还需要一些特有的检验。在转换函数模型中（式 9.28），假定α_t是白噪声序列，且与输入序列x_t是相互独立的，因此，α_t与x_t的预白化序列$\alpha_{x,t}$也应该是相互独立的。由此，必须检验模型的残差序列$\widehat{\alpha_t}$和x_t的预白化序列$\alpha_{x,t}$来判定是否支持假设。具体如下：

（1）互相关检验。检验噪声序列α_t和x_t的相关性，就是检验$\widehat{\alpha_t}$和$\alpha_{x,t}$之间是否显著互相关，即检验样本互相关系数 CCF $\rho_{\widehat{\alpha_t\,\alpha_{x,t}}}(k)$是否显著为零，即：

$$H_0{:}\,\rho_{\widehat{\alpha_t}\,\alpha_{x,t}}(1)=\rho_{\widehat{\alpha_t}\,\alpha_{x,t}}(2)=\cdots=\rho_{\widehat{\alpha_t}\,\alpha_{x,t}}(k)$$

$$H_1{:}\,\rho_{\widehat{\alpha_t}\,\alpha_{x,t}}(1),\rho_{\widehat{\alpha_t}\,\alpha_{x,t}}(2),\dots,\rho_{\widehat{\alpha_t}\,\alpha_{x,t}}(k)\text{中至少有一个不为零}$$

其检验统计量的构造与白噪声 LB 检验统计量的构造类似，即 Portmanteau Q Test：

$$Q=m(m+2)\sum_{j=0}^{k}\frac{\rho_{\widehat{\alpha_t\,\alpha_{x,t}}}(j)}{m-j} \qquad 9.37$$

满足自由度为$(k+1)-m$的χ^2分布，其中，$m=n-t_0+1$，是计算得到的残差$\widehat{\alpha_t}$数量，m是转换函数$v(B)=\omega(B)/\delta(B)$中估计出的δ_i和ω_j的数量。

（2）自相关检验。检验α_t是否为白噪声序列，即检验$\widehat{\alpha_t}$的自相关系数 ACF$\rho_{\widehat{\alpha_t}}(k)$是否显著为零，即：

$$H_0{:}\,\rho_{\widehat{\alpha_t}}(1)=\rho_{\widehat{\alpha_t}}(2)=\cdots=\rho_{\widehat{\alpha_t}}(k)$$

$$H_1{:}\,\rho_{\widehat{\alpha_t}}(1),\rho_{\widehat{\alpha_t}}(2),\dots,\rho_{\widehat{\alpha_t}}(k)\text{中至少有一个不为零}$$

采用 Portmanteau Q Test，即：

$$Q = m(m+2)\sum_{j=0}^{k}\frac{\rho_{\widehat{\alpha_t}}(j)}{m-j} \qquad 9.38$$

满足自由度为$k-p-q$的χ^2分布，其中，p，q分别是α_t的 ARMA 模型中自回归系数的数量和移动平均系数的数量。

如果上述检验通不过，可能是以下两种情况造成的：

情况一：传递函数$\upsilon(B)$估计错误。在这种情况下，无论α_t序列是否为白噪声，都会对于某些k，出现$\rho_{\widehat{\alpha_t\,\alpha_{x,t}}}(k)\neq 0$以及$\rho_{\widehat{\alpha_t}}(k)\neq 0$。具体分析如下：假定正确的转换函数模型是

$$y_t = \upsilon(B)\,x_t + \psi(B)\alpha_t \qquad 9.39$$

但是，我们得到了错误的转换函数$\upsilon_0(B)$，由此，残差序列也变成了$\alpha_{0,t}$，即：

$$y_t = \upsilon_0(B)\,x_t + \psi_0(B)\alpha_{0,t} \qquad 9.40$$

将式 9.39 减去式 9.40，并移项得到：

$$\alpha_{0,t} = \frac{\upsilon(B)-\upsilon_0(B)}{\psi_0(B)}\,x_t + \frac{\psi(B)}{\psi_0(B)}\alpha_t \qquad 9.41$$

$\alpha_{0,t}$不仅和x_t互相关，也与α_t互相关，同时也自相关。即使$\psi(B)=\psi_0(B)$也是如此。因此，在这种情况下，先修正转换函数，再修正噪音ε_t的模型。

情况二：传递函数$\upsilon(B)$是正确的，但ε_t的模型不恰当。在这种情况下，对于所有k，都有$\rho_{\widehat{\alpha_t\,\alpha_{x,t}}}(k)=0$，对于某些$k$，$\rho_{\widehat{\alpha_t}}(k)\neq 0$。$\rho_{\widehat{\alpha_t}}(k)$的形式可以用来修正噪音$\varepsilon_t$的模型，$[\Theta(B)/\Phi(B)]\alpha_t$。