

指数性质的数学测验问题

杨 灿

关于指数的数学形式及其性质的讨论有一个共同的特征,就是带有浓厚的数学形式主义和主观主义色彩。因此,它们不能科学地解释各种测验的实际经济分析涵义,更无法正确地阐明评价经济指数的基本标准是什么,以及不同性质的测验在指数的评价方法体系中占有何种地位。指数的数学性质测验只有与具体的经济分析问题联系起来,才有实际意义,从而构成经济指数评价方法体系中的一个有机部分。

一、时间(基位)互换测验与指数的“对称反演性”评价

指数的时间互换测验首先是对动态指数提出来的。其基本要求是:根据同一指数形式构造的向前指数与向后指数互为倒数,即①

$$K_{01} \cdot K_{10} = 1 \quad (1)$$

将该测验推及非动态指数(如空间对比指数),可以更一般地称之为“基位互换测验”。其基本要求是:交换对比基础后的两个指数之间互为倒数或其乘积为1。据此对各种指数形式进行基位互换测验,结果大致为:

1. 所有个体指数均能满足测验;
2. 简单指数中,除调和平均指数外,均能满足测验;
3. 基本的加权指数(指未含交叉构造者)中,只有固定加权的综合指数及几何平均指数满足测验;
4. 经“型”或“权”交叉后的加权指数能满足测验者较多,但经济上可用的主要有马歇尔-艾奇渥斯公式(以物价指数为例)

$$K_p = \frac{\sum p_1 (q_0 + q_1)}{\sum p_0 (q_0 + q_1)} \quad (2)$$

以及费歇的“理想公式”

$$K_p = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \quad (3)$$

时间互换测验和因素互换测验曾被费歇认定为优良指数的一般标准。但时间互换测验,更一般地,基位互换测验在指数的经济分析中究竟有何现实意义?它对于一般经济指数是否具有普遍性?这些问题应该客观地分析。

首先考察动态指数的情形。动态指数所反映的是社会经济现象在时间上的变动程度,具体地说,这种变动是通过指数化指标的现期取值与基期取值的某种形式的综合对比来表现的。在这里,时间互换测验要求交换基期和现期之后的指数互为倒数,实质上就是要求指数具有时间上的“对称反演”性质。但是,社会经济现象的动态本质上都是不可逆的过程,要求指数具备它所反映的现象本身所不具备的性质,显然是有悖于逻辑的。同时,把这种外在的、异己的形式要求强加于作为一种经济指标的指数,很难说有什么实际意义。因此,时间互换测验不宜作为一般动态指数的评价标准。

其次讨论计划指数。计划指数的任务是综合分析某类计划指标的执行情况,这种分析是通过实际指标与计划指标的综合对比来实现的。在这里,计划指标在先,实际指标在后,应该以计划指标作为衡量实际指标

①以符号“K”记各种综合指数或平均指数。其脚码表示指数所对比的两个时期;下标则区别不同的因素指数。

的基准,而不是相反^①。因此,基位互换测验同样不能成为计划指数的评价标准。

那么,空间指数的情况又怎样呢?应该认识到,空间指数所反映的现象对比关系是有其特殊性的,这与动态指数及计划指数有所不同。社会经济现象在时间上是“继起”的,在空间上却是“并存”的;动态过程中的现在和将来不会影响过去,而空间分布中的各个组成部分却可以互相影响、互相参照。据此,空间指数所考察的两个相互联系的经济现象(或指标)可以互为对比基准;并且,有理由要求交换对比基准后的指数分析结论不产生歧义。这表明,对空间指数提出“对称反演性”的要求有其合理性,因而,采用基位互换测验作为空间指数,特别是那种具有相互对比性质的空间指数的评价标准之一是可取的。但是,这并不意味着所有空间指数都必须满足这一标准。事实上,对于某些具体问题,可能“不对称”的指数形式在经济分析上意义更为显著。可见,即使在关于空间指数的评价上,也应该具体问题具体分析,不可一概而论,更不能把基位互换测验的准则绝对化。

满足“对称反演”要求的加权指数都具有“交叉权数”或“固定权数”,后一种构造由于难以适应权数构成的实际变化,故除长期考察外很少采用。实践中获得部分应用的是马歇尔-艾奇渥斯公式和“理想公式”,主要应用领域有:经济指标国际对比中的价格换算指(系)数的编制,反映地域差别的生活费指数(或消费者物价指数)的编制等等。此外,这类指数也被某些国家用于编制动态性质的对外贸易物价指数。但是应该指出,这里实际上并非利用该指数所具有的“对称反演性”,而是利用了交叉权数可以调和外贸商品成交数量大起大落影响的作用,这一点有时被人们误解了。

简言之,基位(时间)互换测验不能成为动态指数和计划指数的评价标准,但可以

考虑有条件地作为空间指数的评价标准之一。

二、循环测验与指数的“连续可分性”评价

循环测验是动态指数的时间互换测验的推衍。如前所述,时间互换测验对于动态指数不具有现实经济意义,因而不能成为它的评价标准。那么,这一结论对于循环测验是否适用?这个问题还需要进一步分析。

循环测验的一般形式要求是:根据同一指数形式构造的任意个相互衔接的环比指数之连乘积为1,即:

$$K_{01} \cdot K_{12} \cdot K_{23} \cdots K_{(N-1)N} \cdot K_{N0} = 1 \quad (4)$$

其中的前N个环比指数构成相应的连锁指数记之为“ \widetilde{K}_{0N} ”,故上式又可表示为:

$$\widetilde{K}_{0N} \cdot K_{N0} = 1 \quad (4')$$

根据循环测验的性质规定,有以下推论:

1. 循环测验包含基位互换测验,也即指数若满足循环测验,则也必满足基位互换测验(这一点只要在式(4')中令 $N=1$,即可得证)。

2. 指数只要对任意三个时期式(4)成立,则对于任意多个时期也必成立。换言之,若对于任意三个自然数 i, j, s ($i < j < s$),有

$$K_{ij} \cdot K_{js} \cdot K_{si} = 1 \quad (5)$$

则该指数必满足式(4)(这一点可由归纳法得证)。这表明,如欲判断某一指数公式是否符合循环测验,只须任选三个时期根据式(5)进行检验即可。据此,对各种指数进行考察,结果大致为:

^①应该注意,指数中作为对比基准的指标相对于另一指标来说,通常处于分母的地位;但是这一点也不能绝对化。譬如,在劳动生产率逆指标的有关指数中,作为对比基准的计划(或基期)指标就处于分子的地位。然而,这与“基位互换”却完全是两码事。

1. 所有个体指数均能满足测验;

2. 简单指数中, 仅有综合指数与几何平均指数满足测验;

3. 基本加权指数中, 仍然只有固定加权的综合指数及几何平均指数满足测验;

4. 一般经济上可用的交叉指数都难于满足测验, 只有形式如下的指数是例外的:

$$K_p = \frac{\sum p_{t_1} (q_1 + q_2 + \dots + q_N)}{\sum p_{t_2} (q_1 + q_2 + \dots + q_N)} \quad (6)$$

其中: $t_1, t_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$,
且 $t_1 \neq t_2$

它是马歇尔-艾奇渥斯公式的推广, 其中采用了所有考察阶段内的平均权数构成, 这实际上也是“标准权数”的一种形式, 在整个考察系列中具有不变权数的性质。

循环测验在经济分析上有没有现实意义, 以及它与基位互换测验之间是什么关系呢?

从分析的角度看, 循环测验系由两个不同的要件所构成:

$$K_{N0} = 1/K_{0N} \text{ 或 } K_{0N} \cdot K_{N0} = 1 \quad (7)$$

$$\widetilde{K}_{0N} = K_{0N} \text{ 或 } K_{01} \cdot K_{12} \cdots K_{(N-1)N} = K_{0N} \quad (8)$$

第一部分即表示“基位互换”要求。第二部分则表示一种“连续性”要求, 其涵义就是通常所说的“环比指数连乘积等于相应的定基指数”; 不仅如此, 它还同时包含一种“可分性”要求, 因为由式(8)必有

$$K_{0N}/K_{0M} = K_{MN}, \quad M < N \quad (9)$$

它们表明: 按照符合循环测验的指数公式编制的动态指数, 一方面可以把相互分割的各个时期上的变动联结起来进行统一考察, 另一方面又可以把包含若干时期的长期变动分割开来细部研究。

可以说, 满足循环测验的动态指数的优点, 不在于“时间互换性”而在于“连续可分性”。因此, 循环测验可以作为选择或评价某些用于长期动态分析的指数的标准之一。在所述三种满足该测验的加权指数中, 形如式(6)的指数通常难以实际用于编制长期动态指数, 余下的两种中又以固定加权

综合指数应用较多, 我国长期以来也是根据这种形式编制工业和农业的生产指数(总产品指数)。但是, 任何指数形式都不是万能的、尽善尽美的。固定加权指数也有明显缺点, 主要表现在: 固定权数使用过久, 难以反映实际权数构成的变动情况; 一旦修改了原有的固定权数, 则势必影响到整个长期动态考察的连续性。此外, 对于使用固定加权综合指数形式编制生产指数来说, 需要根据极详细的全面资料逐项计算、层层汇总, 在实践上也是一项耗费颇大的繁重工作。这些方面, 在指数的选择和评价问题中也不能不予以考虑。

循环测验也可以用于空间指数的评价。某些不同空间上的经济对比分析, 由于涉及到多个比较对象, 有理由要求各组对象的比较结论具有某种“传递性”, 这实质上类似于动态指数的“连续可分性”。譬如, 国际统计资料对比中的一个尚未解决的问题, 就是需要编制一套价格指数体系, 用于比较若干个国家的货币购买力。最理想的情况就是这套指数体系应当建立在一大批实际商品的基础之上, 同时还能满足特定的换算性质。通俗地说, 这种性质的含义就是, 如果比较甲、乙两国的购买力, 又比较乙、丙两国的购买力, 那么把这两者结合起来, 就应当同甲与丙两国直接比较的结果相一致^①。用公式来说明就是

$$K_{12} \cdot K_{23} = K_{13}$$

更一般地, 若对N个国家进行比较, 就要求

$$K_{t_1 t_2} \cdot K_{t_2 t_3} \cdots K_{t_{(N-1)} t_N} = K_{t_1 t_N}$$

这里, 似乎可以考虑利用形如式(6)的价格指数来解决。其中的权数 $(q_1 + q_2 + \dots + q_N)$ 对任意两国的购买力比较都具有固定权数的性质, 在这里, 它的具体经济内容就是所有对比国家的某种平均消费构成。这个指

^①汉斯·斯尼维斯:《联邦德国和西欧统计现状》(余澄扬译),《统计译文》1985年第1期。

数的缺点是资料规格较高。

三、因素互换测验与指数体系的“系统适应性”评价

因素互换测验是本世纪20年代初由欧文·费歇提出的。他认为,根据同一指数构造方式得到的物价指数与相应的物量指数之乘积,应该等于它们的总值指数,即

$$K_p \cdot K_q = V \quad (10)$$

其中: $V = \sum p_1 q_1 / \sum p_0 q_0$ 。

这里特别强调两个不同因素指数必须具有同一构造方式。当然,也可以换一个角度考虑问题。将上式变形,得到

$$\begin{cases} K_p = V/K_q \\ K_q = V/K_p \end{cases} \quad (11)$$

这是因素互换性要求的另一表现形式。用费歇制定的术语来说,因素互换测验,就是要求各因素指数与其因素对偶等价。在这里, K_p 和 K_q 的因素对偶分别就是 V/K_q 和 V/K_p 。显然,任一指数的因素对偶,不过是蕴涵于相应的总值变动之中的同一因素的某种指数形式;因此,从现象内部的因素联系性和总量上的系统限制性的角度考察问题,要求互为因素对偶的指数彼此适应,这才是因素互换测验所包含的真正具有实际内容的分析思想。

由于费歇将因素互换测验作为优良指数的基本衡量标准之一,他所做的大量工作就是寻找或构造满足该测验的指数形式。为此,费歇建立了如下准则:互为因素对偶的指数公式经交叉后,可以调和其偏差;而经几何平均形式交叉的指数,可以完全满足因素互换测验,因为

$$\sqrt{K_p \cdot \frac{V}{K_q}} \cdot \sqrt{K_q \cdot \frac{V}{K_p}} = V \quad (12)$$

据此构造并检验各种指数,如果大致为:

(1) 所有个体指数均能满足测验;(2) 所有简单指数及基本加权指数均不能满足测验;(3) 经形如式(12)的交叉之后能满

足测验的指数有若干种;但据费歇称,经济上真正可用的仅有“理想公式”一种,它是互为因素对偶的拉斯佩雷斯指数与派许指数的交叉。

关于因素互换测验本身的合理性问题,东、西方指数理论界历来存在截然不同的见解。西方的大多数研究者持肯定或默认的态度,东方指数理论界则基本上持否定的观点。肯定者,其依据主要是指指数所论现象的现实联系,特别是物价、物量与其总值之间的现实联系。否定者,则从三个方面论证自己的观点:(1) 指数作为经济指标必须具有明确的经济内容。(2) 科学的指数体系应该按照“连锁替换”的原则构造,因素指数的变动顺序是数量指数在先,质量指数在后。不能象因素互换测验所要求的那样,把各因素的变动置于平行的位置上。(3) 因素互换测验混淆了不同性质的经济指数之间的差别,错用了“经济因素等价性”的假说。我们认为,以苏联为代表的东方指数理论中否定因素互换测验的观点有其合理的一面,但也难免存在若干简单、机械的成分。

应该肯定,因素互换测验是关于现象因素变动的整体联系性的一种非常朴素的思想。从这一意义上说,费歇在建立因素互换测验的同时,实际上也就有意无意地引出了指数体系的问题。诚然,指数所论现象的这种因素联系性是客观存在的。但是,还应认识到,由于指数本身只是一种相对有限的经济分析形式,这就决定了按照特定方式构造的、反映现象之间因素联系的指数体系是有假定性的;从而,在确定的经济内容要求下,不能过于苛求不同因素指数间的形式对称,否则就有可能影响指数本身的经济内容。因素互换测验从基本思路上看,虽然表述了一种利用指数对现象变动进行因素分析的思想,但在自身形式框架的狭隘限制下却无法实践这一思想。这种分析思想的合理内核,

(下转第68页)

影响,因而不同时空的调查结果很难进行对比,即使要比,也必须考虑上述主观因素的影响,审慎行事。

从纵向看,由于不同历史时期的人们具有不同的思想意识和价值观念,对社会政治、经济文化生活的主观评价和需求是建立在不同的心理基础上的。对社会现象不同时期的主观评价的变化,既包含有社会现象的变化,也包含有被调查者心理因素的变化。因此,在运用主观指标进行不同时期的社会调查时很可能出现虽然政府的各项政策不断完善,各种经济文化事业不断发展,人民生活水平不断提高,而被调查者因受自身心理因素变化的影响,对这一切的主观评价却变化不大。因此,将主观指标进行纵向比较,应考虑消除被调查者由于不同时期不同的思想意识和价值观念对调查结果的影响,使对比结果客观反映对象发展变化的真实情况。

从横向看,不同地区、不同国度的人们具有不同的价值观念、思想意识,并受其传统观念、意识和自身生活环境、生活基础的影响,因而对社会政治、经济建设、人民生活有不同的认识、评价和需求,不同地区和国家同一主观指标存在较大的不可比因素。因此,在运用主观指标进行横向对比时应审慎地考虑上述不同地区人民不同的价值观念、传统的思想意识对调查结果产生的不同空间的不可比因素。

五、主观指标综合评价标准的选择应适当

对于主观指标的汇总综合,一般是先分别对各种选择结果加总,然后计算各种选择的比重或比例,最后在此基础上公布调查结果和分析评价。但评价的标准如何选定、怎样看待。我们不时读到这样的民意调查报告,一种是只列出某些计算结果,轻描淡写作点说明,没有任何确定性的判断和评价,是好是坏由读者自己去理解;一种是任意主观武断,不顾相对数指标应与绝对数指标结合运用的原则和判别某一现象好坏或某一措施可行与否的客观尺度,片面地依据过半数或达到了某一百分比就匆匆下结论。这种做法是非常有害的。例如,要调查人们对价格改革的态度,是否可以依据赞成或基本赞成的达到了一定百分比就断定这一改革可否进行了呢?显然不能。因为在我们这样一个人口众多的大国,即使只有百分之几的人持相反意见,其绝对量也很大。单凭相对指标下结论,不利于作出正确的判断和决策。可见,主观指标评价标准的选定是至关重要的。我们应该对具体问题,进行具体的分析处理,尽量避免使用单一标准和片面地看问题,注重运用复合标准,联系地、多方面地分析、评定主观指标及其所反映的对象。

(作者工作单位:王心赤,四川省统计局研究室;李朝鲜,中国人民大学统计系)

(上接第56页)

已为后来在拉斯佩雷斯和派许奠定的基础上建立指数体系的创造性研究所吸收。从而,因素互换测验已经不再能够起到指数评价标准的作用,这一任务理应由科学的指数体系理论来承担。

指数体系作为指数的评价标准之一也是有条件的。经济指数并非总是联成体系的,

许多指数常常只是单独地用于测定某种现象因素的变动程度或其影响。只有对于特定的“因素分析”或“指数推算”问题,才需要根据相应的指数体系对有关指数进行“系统适应性”评价。

(作者工作单位:厦门大学计统系)