“如果非平稳变量之间存在协整关系，那么必然可以建立误差修正模型；而如果非平稳变量可以建立误差修正模型，那么该变量之间必然存在着协整关系。”

“希望建立一些有用的模式，来为政策制定人提供一种分析。有時候制定政策，我们不能够完全肯定未来它会产生什么样的结果。但是，我们要尽可能把这个具体结果分析出来。因为，经济政策是非常重要的，可以引申出很多政策解释方面的问题。”

——C. 格兰杰

第八章　时间数列分析

本章重点讨论动态变化的统计数据分析方法问题。具体来讲，要求通过本章的学习，①了解时间数列的含义、构成要素与编制原则，注意不同类型时间数列的区别与联系；②掌握水平指标的计算，特别是序时平均数的计算；③掌握各类速度指标的计算，特别是平均速度指标的计算；④了解时间数列变动要素的分解，掌长期趋势的测定方法，重点是基于最小平方法的趋势方程拟合；⑤了解季节变动的含义及测定方法。

第一节　时间数列的基本问题

一、时间数列的含义及其类型

1、时间数列的定义

事物总是发展的，统计研究的具体对象也是如此。从一段较长的时间上观察一个现象的发展变化，可以更好地把握其发展规律。例如，我们可以考察一个国家若干年来 GDP 的变动情况，可以观察几个月来上证总指数的涨跌情况，可以考察一个企业数年来出口贸易成交额的变化。要作这些研究，需要有相应的统计数据，即时间数列。表 8-1 就是我国 1990-2004 年 GDP 及其构成状

况的几个时间数列。

不难看出，时间数列是某一指标数值按时间先后顺序加以排列而形成的统计序列。由于时间数列是从动态上反映社会经济现象的数量发展变化的，所以又称动态数列。

表 8—1　　国内生产总值及其构成统计表

年份	国民总收入（GNI）（亿元）	国内生产总值（GDP）（亿元）	第一产业增加值比重（%）	第二产业增加值比重（%）	第三产业增加值比重（%）	均 GDP（元/人）

1990	18598.4	18547.9	27.05	41.61	31.34	1634
1991	21662.5	21617.8	24.46	42.11	33.43	1879
1992	26651.9	26638.1	21.77	43.92	34.31	2287
1993	34560.5	34634.4	19.87	47.43	32.70	2939
1994	46670.0	46759.4	20.23	47.85	31.93	3923
1995	57494.9	58478.1	20.51	48.80	30.69	4854
1996	66850.5	67884.6	20.39	49.51	30.09	5576
1997	73142.7	74462.6	19.09	49.99	30.93	6054
1998	76967.2	78345.2	18.57	49.29	32.13	6308
1999	80579.4	82067.5	17.63	49.42	32.95	6551
2000	88254.0	89468.1	16.35	50.22	33.42	7086
2001	95727.9	97314.8	15.84	50.10	34.07	7651
2002	103935.3	105172.3	15.32	50.37	34.30	8214
2003	116741.2	117390.2	14.42	52.20	33.38	9111
2004	136584.3	136875.9	15.17	52.89	31.94	10561

资料来源：www.stats.gov.cn（《中国统计年鉴 2005 年》，中国统计出版社）

2、时间数列的构成要素

由表 8-1 还可以看出构成时间数列有两个基本要素：一是现象所属的时间，即表中的第一列。实践中，构成时间数列的时间单位长短视研究目的与现象性质而定，社会经济现象时间序列中的时间单位通常是年份、季度、月份或天。但个别情况之下可能是若干年（如五年或十年）为一个时间单位，或者以旬、周、小时等为时间单位。二是现象在相应时间所达到的水平（即指标数值），即表中第二至七各列指标数值。

3、时间数列分析的意义

时间数列的统计研究具有重要的意义。主要有：

（1）通过观察时间数列，可以了解社会经济现象总体的动态变化全过程，便于人们客观、全面地认识事物的发展方向和速度。

（2）通过对时间数列的分析，可以研究哪些因素对时间数列的指标数值大小在起作用，可以进一步掌握事物发展变化的趋势和规律性。

（3）根据时间数列原有的发展变化规律，进行短期或长期预测，是生产、管理、决策过程中不可缺少的有利工具。

二、时间数列的种类

时间数列按指标性质的不同，可分为总量指标时间数列、相对指标时间数列、平均指标时间数列。其中总量指标时间数列是最基础的数列，后两种数列是由其派生出来的 。

（一）总量指标时间数列

总量指标时间数列也称绝对数时间数列，是由总量指标按时间先后顺序排列而形成的统计数列，它反映现象在不同时间上所达到的规模、水平或工作总量。表 8-1 中反映国民总收入（GNI）和国内生产总值（GDP）绝对数量的时间数列就属于总量指标时间数列。

由于总量指标按其反映的时间状态不同有时期指标和时点指标之分，因此相应的绝对数时间数列也有时期数列和时点数列之分。

1、时期数列

时期数列是指同类的时期指标按时间先后顺序形成的数列，数列中的各期指标值反映社会经济现象在一定时期内累计达到的总量。上表中的国内生产总值时间数列就是时期数列。 时期数列的特点是：

（1）数列中不同时间的指标数值可以累计。

（2）指标值的大小和时期长短有直接关系。一般来说，时期越长，数值越大。

（3）指标值一般是通过连续登记获取的。

相应的由社会商品零售额、居民总收入、进出口贸易总额等指标构成的时间数列均为时期数列。

2、时点数列

时点数列是指时点指标按时间先后顺序排列而形成的统计数列，其指标反映经济现象在某一时点或某一瞬间所达到的水平，表 8-2 中“年末人口总数”、“男性人口总数”、“女性人口总数” 等指标均为时点数列。与时期数列相反，时点数列的特点是：

（1）数列中不同时点上数值不可以累计（或相加没有意义）。

（2）指标数值的大小和时间长短无直接关系。

（3）时点指标的数值一般是通过不连续登记取得的。

相应的由商品库存数、企业数、存款于额等指标构成的时间数列均为时点数列。

表 8-2 1991-2004 年全国年末人口数及其构成

年份	年末人口总数（万人）	男性人口数（万人）	女性人口数（万人）	城镇人口数（万人）	城镇人口比重（%）	乡村人口数（万人）	乡村人口比重（%）
1991	115823	59466	56357	31203	26.94	84620	73.06
1992	117171	59811	57360	32175	27.46	84996	72.54
1993	118517	60472	58045	33173	27.99	85344	72.01
1994	119850	61246	58604	34169	28.51	85681	71.49
1995	121121	61808	59313	35174	29.04	85947	70.96
1996	122389	62200	60189	37304	30.48	85085	69.52
1997	123626	63131	60495	39449	31.91	84177	68.09
1998	124761	63940	60821	41608	33.35	83153	66.65
1999	125786	64692	61094	43748	34.78	82038	65.22
2000	126743	65437	61306	45906	36.22	80837	63.78
2001	127627	65672	61955	48064	37.66	79563	62.34
2002	128453	66115	62338	50212	39.09	78241	60.91
2003	129227	66556	62671	52376	40.53	76851	59.47
2004	129988	66976	63012	54283	41.76	75705	58.24

资料来源：www.stats.gov.cn（《中国统计年鉴 2005 年》，中国统计出版社）

（二）相对数时间数列

相对指标按时间先后顺序形成的数列称为相对数时间数列，它反映社会经济现象之间数量对比关系的发展变化过程。相对指标有很多，但大多数是由两个总量指标对比派生出来的，因此可以分别研究绝对指标时间数列，再进行对

比。两个对比的时间数列可以都是时间数列，如第三产业产值时间数列与社会总产值时间数列对比就构成第三产业增加值构成的相对数时间数列：也可以是两个时点数列之比，如第三产业从业人数与社会劳动者人数两个时点数列对比就构成第三产业从业人数结构的相对数时间数列；同样一个时期数列和一个时点数列之比也可以构成相对数时间数列，如商品流转次数书记数列就是由商品销售额时期数列与商品库存时点数列对比而成的。

表 8-1 中三次产业产值占 GDP 的比重以及人均 GDP 的时间数列均为相对指标时间数列。

由于相对指标计算时抽象了基数（或绝对数）的差异，因此相对指标不仅在空间上不具有直接可加性，而且在时间上也不具有直接可加性。也就是说，相对数时间数列是不可直接相加的。

（三）平均数时间数列

平均指标按时间先后顺序排列形成的数列为平均数时间数列，它反映现象的一般水平在不同时间上的发展变化情况。与相对指标时间数列类似，它也是由两个总量指标时间数列对比形成的派生数列。例如反映居民人均支出、职工平均工资的时间数列就是平均数时间数列。只是与相对指标时间数列不同的是，平均指标时间数列的分子分母之间的关系是总体单位总数与总体标志总量之间的关系。与相对数时间数列类似，平均指标时间数列同样在时间上不具有可加性。

表 8-3 中“平均每个医疗机构拥有的病床数” 与 “平均每个医疗机构拥有医务人员数”即为平均数时间数列。

表 8-3　1990-2003 年台湾省医疗设施指标

年份	年末医疗机构数（个）	年末医院病床数（床）	年末医务人员数（人）	平均每个机构拥有病床数（床）	平均每个机构拥有医务人员数（床）
1990	12902	89151	91153	6.91	7.07
1991	13661	92785	96921	6.79	7.09
1992	14468	96084	102977	6.64	7.12
1993	15062	100570	109538	6.68	7.27
1994	15752	103733	114076	6.59	7.24
1995	16109	112379	118248	6.98	7.34
1996	16645	114923	123829	6.90	7.44
1997	17398	121162	137829	6.96	7.92
1998	17731	124564	144070	7.03	8.13
1999	17770	122937	152385	6.92	8.58
2000	18082	126476	159212	6.99	8.80
2001	18265	127676	165855	6.99	9.08
2002	18228	133398	175444	7.32	9.62
2003	18777	136331	183103	7.26	9.75

资料来源：www.stats.gov.cn（《中国统计年鉴 2005 年》，中国统计出版社）

三、时间数列的影响要素

进行时间数列分析，首先要弄清时间数列中的各指标数值的大小受哪些因素

的影响。在社会经济现象发展变化的过程中，往往有很多因素对它起着这样那样的作用，影响其数值的大小，有的来自自然方面的因素，也有来自社会、习俗等方面的因素。这些因素大致可归为四种类型：长期趋势，季节趋势，循环变动和不规则变动。下面分别加以说明。

1、长期趋势（Secular trend 或 Long-term tend）

长期趋势是指时间数列中指标数值在较长一段时间内，由于受普遍的、持续的、决定性的基本因素的作用，使发展水平沿着一个方向持续向上或向下发展或持续不变的基本态势。例如 ，表 8-1 中我国 GNI 和 GDP 及人均 GDP 指标都表现出持续上升的势态（这是整个国民经济发展的基本状态），表 8-2 中随着城市化进程的推进，乡村人口占比呈逐年下降趋势。这些表现均属于“长期趋势”。

在经济学里，“长期”可以指十年或更长。即所谓“长期”必须足够长才能判断有否趋向，而相对较短的时间数列，即使观察值紧密地围绕在一条直线周围也不能判断其具有长期趋势。长期趋势在经济现象中出现的例子很多，如自然资源中煤、石油、贵金属等储量由于资源的有限性和使用呈逐渐减少的趋势。通过长期趋势分析，可以了解经济现象在一段相当长时间内发展变化的方向、趋势和规律，进而进行预测和决策，此外如果时间数列中还有其他影响因素，消除长期趋势影响可以更好的研究其他各种变动。

2、季节变动（Seasonal variation）

季节变动是指数列中各期指标值随着季节交替而出现周期性的、有规则的重复变动，这里的时间通常指一年。例如羽绒衣的销售在每年的冬季形成旺季，冷饮销售则集中在夏天，旅馆、餐饮业又总是节假日生意红火，杭州以春、秋的气候最宜人，因而每年 5 月左右、10 月左右总呈现出游客高峰。

值得一提的是，季节变动的概念可以进一步扩展，只要呈现重复变动，不仅是年中的季节，每月、每周、每天甚至每小时的周期性变动，均可称为季节变动。例如人们日用水量的波动和日用电量的波动在 24 小时就会呈现季节变动，超市或购物商场营业额在一周之内也有明显的规律性变化。据研究，股票市场某些指标的波动有显著的“周一效应”与“周末效应”，这也可归入“季节变动”。

测定季节变动，分析其规律，有利于有关部门科学计划、合理安排好生产、流通和消费，确保社会生产和人民生活正常、有序地进行。

3、循环变动（Cyclical variation）

与季节变动的情形相类似，循环变动也是时间数列中的各指标随着时间变动发生周期性的重复变化，但循环变动所需的时间更长，重复变动的规律性、变动周期，时间也没有季节来得稳定，可以预料。

图 8-1 是典型的商业周期过程。经济活动经历了从衰退、萧条到复苏、繁荣，接着又开始衰退、萧条，再复苏，再繁荣，如此周而复始的过程，这个过程短则需要若干年，长则需要数十年，而且很难判断每种变化情形要持续多久，下一个拐点何时出现等等，这就是循环变动。产生循环变动的原因很多，如自然灾害，战争，人口的大量增加或减少，开发新的基建项目，经济的萧条和复苏等都会导致经济现象有循环变动。

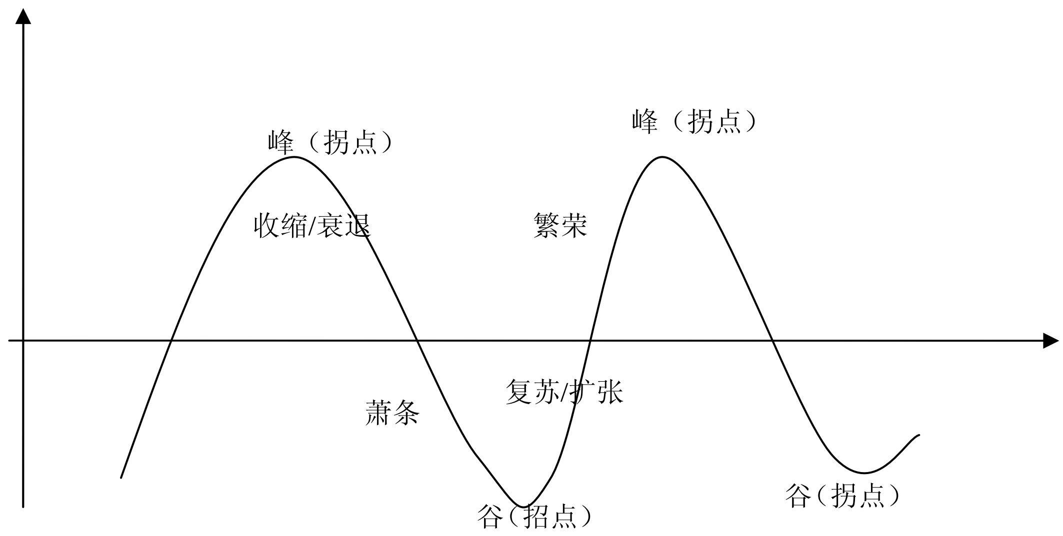

图 8-1 经济周期示图

4、不规则变动（Irregular movements）

不规则变动是由未能得到解释的一些短期波动所组成的，常指时间数列由于受偶然因素或意外条件影响，在一段时间内（通常指短期内）呈现不规则的或自然不可预测的变动。例如：由于受随机气候变动的影响，商品销售量的时间数列会产生短期的不规则变动。如果一个时间数列变动不受长期趋势、季节变动、或循环变动影响，那么通常就认为其受不规则变动的影响，不规则变动有时也称剩余变动。不规则变动是无法预知的。

将时间数列的变动分解成上述四种因素，为描述时间序列提供了方便。时间数列的波动可以解释为这四种变动的综合后果。这种综合的数学模型通常有两种，分别是“加法模型”和“乘法模型”。

加法模式：当时间数列的四种变动因素相互独立时，时间数列就是各因素的代数和。即：

$$Y = T + S + C + I \qquad (8\text{-}1)$$

Y 代表时间数列的观察值，T 是长期趋势值，S 为季节变动值，C 是循环变动值，I 为不规则变动值。在加法模式中，S，C，I，是关于 T 的数量变量，用绝对数表示。

乘法模型：当时间数列的四种变动因素相互影响时，时间数列就是各因素的乘积。

$$Y = T \times S \times C \times I \qquad (8\text{-}2)$$

乘法模型是最常用的一种形式，模式中只有长期趋势值 T 用其原始单位（绝对量）表示，而另三个因素用系数或百分数表示

事实上，上述四个因素之间的关系远非（8-1）、（8-2）那么简单。还有如混合模型等形式，读者可参阅有关经济周期分析方面的著作。

四、时间数列的编制原则

编制时间数列是进行时间数列分析的前提。由于时间数列反映了现象在一段时期之内的发展变化情况，为了对比分析需要，必须要求保持数列中各指标具有高度的可比性或一致性。这一基本原则可称为“可比性”原则。具体来说，

时间数列的可比性原则主要表现为：

1、时间的一致性

对于时期数列，由于其指标数值大小跟时期长短有直接关系，因此每个时期指标所含时间长短应该相等，以利于分析。如果时期数列的各指标在时间上还有间隔，那么其时间间隔 也尽可能相等。

对于时点数列，虽然其值大小与时间长短没有直接关系，但每一数值所处时点应该统一，例如，都采用年末数据或都采用年初数据，出现年初、年中、年末数据混合的情况一般是不合适的，不利于统计分析。

2、总体范围的一致性

总体范围包括空间范围与单位范围两个层面。对于那些基于区域的统计指标，应该注意区域范围上的一致性，如果行政区划有过变动，则前后指标值就不能直接对比，要作相应调整。同样的，时间数列中各期指标值所包括的总体单位标准应该是相同的。例如，在编制某地区居民家庭消费支出时间序列时，家庭户及人口是指常住人口还是户籍人口，显然需要作出统一规定；编制某地区商贸企业商品销售总额时间序列时，是“规模以上”还是“全行业”也应该作出统一，“规模以上”的数量标准最好也是统一的。

3、经济内容的一致性

经济内容是指一个理论形态统计指标的内涵及与之相适应的外延。一个指标名称完全相同的指标由于所处的年代、统计制度、理论依据的不同，在含义与计算项目上常常会有很大的区别。例如，MPS 的国民收入和 SNA 的国民收入完全不同。如今我国政府统计中的“农业总产值”与上世纪八十年代的“农业总产值”也有很大的差异。经济内容发生了变化的指标不能直接构成时间序列，需要通过技术处理。

广义上讲，对于价值量指标，计算内容的一致性还包括计算价格的可比性。

4、计算方法的一致性

计算方法也是统计指标三要素之一。同一指标的不同计算方法有时是理论上的恒等关系或近似相等关系，但有时却不是。若理论上不具有恒等关系或不具有近似相等关系，则意味着是两个性质不同的指标（计算内容的不同）。例如，工业总产值的计算一直有“产品法”与“工厂法”之分，二者大相径庭。即使理论上是恒等关系的经济指标，由于计算基点或数据来源或假设条件的差异，不同方法的计算结果常常会有所出入（且有较大的出入）。例如，国内生产总值（GDP）有按生产法计算的，也有按收入法和最终使用法计算的，理论上讲应该满足“三阶段相等原则”，但实际统计工作中由于资源渠道的不同，不同方法之间的结果会有误差的，一个高质量的 GDP 时间数列应尽量采用同一方法计算 GDP。

第二节　时间数列的水平分析

编制时间数列的目的是从中寻找现象数量发展变化的统计特征与统计规律。因此，时间数列的进一步统计分析非常关键。

一般来说，对一个时间数列进行统计分析的方法不外乎两类：综合指标法、统计模型法。前者就是通过计算各种统计指标来描述、刻画、测度现象总体的

动态变化特征，包括“水平指标”与“速度指标”两类；后者则是借助数学模型来描述、拟合现象总体的动态趋势与规律，包括“趋势分析”、“季节变动分析”、“循环波动分析”等。本节主要讨论时间数列水平指标的计算原理。

时间数列的水平指标主要有：发展水平、平均发展水平、增长量（水平）、平均增长量（水平）[①]。

一、发展水平指标

发展水平是反映现象实际已经达到的规模和水平，是时间数列的最基本指标。时间数列中的各项指标数值，就是发展水平。通常用$a_1, a_{2,} \cdots, a_n$表示。

为便于区别，习惯上常把时间数列中第一项的水平称为最初水平，用a_0（时点数列）或a_1（时期数列）来表示。最末一项的水平称为最末水平，用a_n表示，中间各项则称中间水平。同时，一般把被研究的时期称为“报告期”，相应的发展水平称为“报告期发展水平”，而把研究中作为比较基数的时期称为“基期”，相应的发展水平称为“基期发展水平”。

对于时间数列中各期发展水平的文字表述习惯用“增加（降低）到”、“增加（降低）为”表示。例如，我国 1990 年的人均国内生产总值为 1634 元，2004 年增加到 10561 元。

二、平均发展水平指标

一个现象在不同时间上有高低不等的水平值，因此反映这个现象在这一段时间之内的总体水平或“代表性水平”需要通过平均数来刻画，即计算“平均发展水平”。

平均发展水平又称“序时平均数”或“动态平均数”。

在动态分析中，计算平均发展水平可把现象在不同时间上的数量差异抽象化，消除短期波动对它的影响，便于各段时间内的分析对比。

序时平均数和一般平均数既有联系又有差别：其共性是都反映现象的一般水平或代表性水平，都是平均数；但一般平均数是把同质总体某一数量标志在某一时间上的水平抽象化，从静态上反映现象的一般水平或代表性水平，而序时平均数则把同一现象在不同时间上的差异抽象化，从动态上反映现象的一般水平或代表性水平；一般平均数是根据变量数列计算的，而序时平均则根据时间数列来计算。

时间数列中指标形式有“绝对数”、“相对数”、“平均数”之分，“绝对数时间数列”还有“时期数列”和“时点数列”的区别，不同形式的时间数列由于指标性质的差异，时间与空间上可加性的不同，导致了其序时平均数的计算方法也极不相同。下面分别“时期数列”、“时点数列”、“相对数时间数列”、“平均数时间数列”四种情况介绍序时平均数的计算。

（一）时期数列序时平均数的计算

对时期数列而言，由于其各期指标值可以累计，它的序时平均可直接用简单算术平均法计算。记各期发展水平为$a_1, a_{2,} \cdots, a_n$，则序时平均数$\bar{a}$为：

[①]也有一些教材把后两项指标归入到“速度指标”，并命名为“绝对速度”。如果把速度解释为一种增加，不论是绝对量的增加还是相对幅度的变化或提高，都称为“速度”，那么这种做法是有道理的。

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n} \tag{8-3}$$

[例 8.1]根据表 8-1，可分别计算 2000-2004 年间国民总收入、国内生产总值的年平均值。

年均国民总收入：$\bar{a}=\frac{88254.0+95727.9+103935.3+116741.2+136584.3}{5}$

$=\frac{541206.7}{5}=108241.34(亿元)$

年均国内生产总值：$\bar{a}=\frac{89468.1+97314.8+105172.3+117390.2+136875.9}{5}$

$=\frac{546221.3}{5}=109244.26(亿元)$

（二）时点数列序时平均数的计算

时点数列序时平均数的计算较时期数列要复杂得多。根据时点指标登记的连续性及时间间隔的不同，有四种情况：连续且等间隔、连续但不等间隔、不连续但等间隔、不连续且不等间隔。所谓连续，通常指的是“每天都登记”（但如果时间数列的时间单位以小时或分钟或秒来表示时，则连续便分别指是“每小时都登记”、“每分钟都登记”、“每秒钟都登记”）。

1、连续登记间隔相同的时点数列

对于每天都登记或逐日排列的时点指标，其序时平均数就是时点登记值的简单算术平均数。若 n 个时点的登记值分别记为 $a_1,a_{2,}\cdots,a_n$，则序时平均数为：

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n} \tag{8-4}$$

[例 8-2]某储蓄所从 1 月上旬（1 月 1 日到 1 月 10 日）逐日中午登记的某类存款帐面余额分别为 1240 万元、1245 万元、1268 万元、1400 万元、1380 万元、1460 万元、1540 万元、1340 万元、1280 万元、1366 万元，则平均余额为（这个数据是考察“可运作”资金规模的基本依据之一）：

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$=\frac{1240+1245+1268+1400+1380+1460+1540+1340+1280+1366}{10}$$

$$=\frac{13519}{10}=1351.9(万元)$$

2、连续登记间隔不同的时点数列

对于有些时点数列，如职工人数，并非每天都在发生变化。因此连续登记就演变为“变化登记”。两次登记之间的时间间隔这可能完全相等，间隔的时间长度（通常是天数）代表了相应发展水平“稳定不变”的天数，因此其序时平均数的计算从形式上看是一个以间隔天数为权数的加权算术平均数。若记不同间

隔点（发生变化的时点）登记值为$a_1, a_{2,} \cdots, a_n$，相应每一登记值持续的时间长度（间隔）为 $f_1, f_{2,} \cdots, f_n$，则序时平均值为：

$$\bar{a} = \frac{a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad (8\text{-}5)$$

[例 8-3]某企业 1 月 1 日至 15 日的职工人数有 100 人，16 日至 25 日为 120 人，26 日至 31 日 108 人，则一月份的职工平均人数就是：

$$\bar{a} = \frac{100 \times 15 + 120 \times 10 + 108 \times 6}{31} = 108(\text{人})$$

3、不连续登记间隔相等的时点数列

不连续登记是指：资料非逐日登记取得，而往往是月（年）初（末）登记一次，或几个月（年）登记一次（一般情况下时点数列的资料多为不连续登记）。由于相邻两个时点的发展水平是在变化的，但又缺乏实际数值，通常假设两点之间的变化是均匀的，或者是“中点对称”的。例如，当知道某企业 9 月初的职工人数是 200 人，9 月末的职工人数是 230 人，月内增加了 30 人，计算月劳动效率（如人均产值）时，作为分母的“职工人数”显然既不能用月初的 200 人，也不能用月末的 230 人，只能取月内一般水平。但由于缺乏具体每一天的人数（否则可用前面“连续登记”情况之下的序时平均数公式计算），只能对 9 月份的人数作出假定。显然，月中的数值（如 9 月 15 日）是最有代表性的，在现有的资料情况之下，只能假定月内人数增加是均匀的或上半月与下半年是对称的，进而只能采用月初与月末的平均值代替“月中”水平，虽然实际情况千差万别，但只有这个假定“最有道理”。因此，统计学中经常借助（8-6）式确定期内的平均水平，这一做法通常称为“首尾折半法”。

$$\text{期内一般水平} = \frac{\text{期初发展水平} + \text{期末发展水平}}{2} \qquad (8\text{-}6)$$

根据这个思路，对于不连续但间隔相等的时点数列$a_0, a_1, a_{2,} \cdots, a_n$，其序时平均值就是各期“首尾折半法”结果的简单算术平均值，即[①]：

[①] 注意此处时间数列符号下标的起点，它对（8-7）的分母有影响。如果写成随意起点，如 $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{n-1}, a_n (n > k)$，则（8-7）的公式就成为：

$$\bar{a} = \frac{\frac{a_k + a_{k+1}}{2} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2}}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}}{n - k}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &= \frac{\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \cdots + \overline{a}_n}{n} \\
&= \frac{\dfrac{a_0 + a_1}{2} + \dfrac{a_1 + a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_{n-1} + a_n}{2}}{n} \qquad （8\text{-}7） \\
&= \frac{\dfrac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \dfrac{a_n}{2}}{n}
\end{aligned}
$$

[例 8-4]某企业 2005 年有关月的月初职工人数是：

1 月 1 日为 240 人；4 月 1 日为 240 人；7 月 1 日为 260 人，10 月 1 日为 250 人；12 月 31 日为 260 人，要求确定 2005 年职工平均人数。

由于登记的时间间隔都为三个月，故用（8-7）式计算该企业年平均职工人数：

$$\bar{a} = \frac{240/2 + 240 + 260 + 250 + 260/2}{4} = 250(\text{人})$$

4、不连续登记间隔不等的时点数列

如果时点指标不连续登记，且间隔也不完全相同时，则用间隔的时间长度作权数，在公式（8-7）的基础之上计算加权的序时平均数。仍然记不连续登记的指标值为 $a_0, a_1, a_{2,} \cdots, a_n$，记相邻两次登记的时间间隔为 $f_1, f_{2,} \cdots, f_n$，则序时平均值为：

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &= \frac{\overline{a}_1 f_1 + \overline{a}_2 f_2 + \overline{a}_3 f_3 + \cdots + \overline{a}_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} \\
&= \frac{\dfrac{a_0 + a_1}{2} f_1 + \dfrac{a_1 + a_2}{2} f_2 + \cdots + \dfrac{a_{n-1} + a_n}{2} f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f} \qquad （8\text{-}8）
\end{aligned}
$$

[例 8-5]某银行第一分理处 2005 年若干个月份月初的企业存款余额如下：

1 月初 360 亿元，4 月初 300 亿元，9 月初 420 亿元，12 月初 440 亿元，12 月末 480 亿元，则全年企业存款平均余额为：

$$
\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{\dfrac{(360+300)}{2} \times 3 + \dfrac{(300+420)}{2} \times 5 + \dfrac{(420+440)}{2} \times 3 + \dfrac{(440+480)}{2} \times 1}{3+5+3+1} \\
&= 378.33(\text{亿元})
\end{aligned}
$$

（三）相对数和平均数序时平均数的计算

从形式上看，无论是相对数还是平均数，都是两个指标对比的结果，因此相对数时间数列与平均数时间数列的序时平均数的计算原理是相同的。

如果采用一般化的符号表示，一个相对指标或平均指标的分子指标记为 a，分母指标记为 b，则该相对指标或平均指标记为 c，即有：

$$c = \frac{a}{b}$$

对于一个动态数列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，其分子指标 a 的时间序列是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$（也可能是由 a_0 作起点，即 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$），其分母指标 b 时间序列是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$（同

样可能是由b_0作起点，即$b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n$）。则$c_1,c_2,\cdots,c_n$的序时平均基本公式是：

$$\bar{c}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \qquad (8\text{-}9)$$

也就是说，相对指标或平均指标 c 的时间序列，其序时平均计算时，应该先分别计算分子指标和分母指标时间序列的序时平均值$\bar{a}$和$\bar{b}$，然后再把两个序时平均值作对比，即为指标 c 的序时平均值$\bar{c}$。而$\bar{a}$和$\bar{b}$的计算则需要分别根据$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$的指标性质决定采用（8-3）~（8-9）的某一个公式。

一般来说，不外乎三种情况：$a_1,a_2,\cdots,a_n$、$b_1,b_2,\cdots,b_n$均为时期数列；$a_1,a_2,\cdots,a_n$、$b_1,b_2,\cdots,b_n$均为时点数列；一个是时期数列，另一个是时点数列。对于相对指标，分子或分母还可能又是“相对数”或“平均数”，此时同样考虑它们各自的分子分母指标性质选择相应的公式即可。

总之，相对数或平均数时间数列的序时平均数计算的关键是搞清楚这一相对数或平均数的分子分母指标内容与性质。

[例 8-6]某商业企业 2005 年各季商品销售及季初库存资料如表 8-4 所示，计算全年平均每季的商品流转次数和平均每季的流通费用率。

表 8-4　某企业 2005 年商品流转的有关资料(万元)

	1 季度	2 季度	3 季度	4 季度
销售额	11	12	10	15
期初库存	4	5	6	3
流通费用	1.1	1.3	1	2

注：又知年末库存为 2 万元

商品流转次数是商品销售额与平均库存额的对比，分子是时期指标，分母是时点指标。

则按相应的方法可以计算序时平均数：

全年平均每季销售额：

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{11+12+10+15}{4}=12(\text{万元})$$

全年平均库存额：

$$\bar{b}=\frac{\frac{b_0}{2}+b_1+b_2+b_3+\frac{b_4}{2}}{4}=\frac{4/2+5+6+3+2/2}{4}=4.25(\text{万元})$$

平均每季的商品流转次数为：

$$\bar{c}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}=\frac{12}{4.25}=2.8235(\text{次/季})$$

全年的商`　品流转次数为：

$$\frac{11+12+10+15}{\frac{4/2+5+6+3+2/2}{4}}=11.29(次/年)$$

类似地：流通费用率等于流通费用除以商品销售额，分子分母均为时期指标，则：

平均每季流通费用额：

$$\frac{1.1+1.3+1+2}{4}=1.35(万元)$$

平均每季的商品流通费用率为：

$$\frac{1.35}{12}=0.1125=11.25\%$$

由于分子分母均为时期指标，所以平均每季的商品流通费用率等于全年的商品流通费用率，均为 11.25%。

三、增长量指标

1、增长量的含义

时间数列反映了一个现象的动态过程，因此通过数量对比便可以分析现象数量上变化的程度。增长量指标是反映现象数量变动的常用指标，它是指现象在一定时期内发展水平增加或减少的绝对数量，用公式表示，即为：

增长量=报告期发展水平—基期发展水平　　　　　　　　（8-10）

差额为正，说明报告期水平值较基期有所提高，差额为负则表示为减少。

2、增长量的种类

由于对比的基期不同，增长量有逐期增长量（也称“环比增长量”）和累计增长量（也称“定基增长量”）两种，逐期增长量是两个相邻时期发展水平之差，即：

逐期增长量=报告期发展水平 — 上一期发展水平　　　　　（8-11）

累计增长量反映报告期发展水平比某一固定时期发展水平的增加量，即：

累计增长量=报告期发展水平 — 上一期发展水平　　　　　（8-12）

若用 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 表示时间序列各期数值，则（8-11）和（8-12）可分别写为：

第 i 期的逐期（环比）增长量 $=a_i-a_{i-1}\quad(i>1)$　　　　（8-13）

第 i 期的累计（定基）增长量 $=a_i-a_0\quad(i\ge1)$　　　　（8-14）

不难看出，增长量本身也是一个时间序列，称为“增长量序列”。分别是：

逐期增长量序列：$a_1-a_0,a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1}$　　　　（8-15）

累计增长量序列：$a_1-a_0,a_2-a_0,a_3-a_0,\cdots,a_n-a_0$　　　　（8-16）

容易证明，逐期增长量与累计增长量之间存在一定的数量关系。

第一，逐期增长量之和等于相应的累计增长量，即：

$$(a_1-a_0)(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_o \qquad (8-17)$$

第二，两相邻累计增长量之差等于相应的逐期增长量，即：

$$(a_i - a_o) - (a_{i-1} - a_o) = a_i - a_{i-1} \qquad (8\text{-}18)$$

增长量指标在实际运用中，常用“增加了”,“减少了”或“提高了”,“降低了”表示。例如，我国 1991 年年末人口数为 115823 万人，2004 年年末人口数增加到 129988 万人，2004 年年末人口数比 1991 年增加了 14165 万人。

3、基于增长量的相关指标

（1）年距增长量指标

对于以月份、季度为时间单位的时间数列，其增长量的计算通常并不是与“上月”或“上季”相减，而是采用“与上年同月”或“上年同季”发展水平相减，以计算所谓的“年距增长量”，即：

年距增长量=报告期某月（季）发展水平 — 上年同月（季）发展水平（8-19）

这一指标可以消除季节性变化对时间序列发展水平的影响，因此特别适宜于有季节性波动的现象增长量分析。从理论上讲，也可以有类似的“逐期”（上年）和“定基”（固定年）之分，但实践中通常只采取与上年的对比。据此计算的增长量，政府统计工作者通常称为“同比增长量”。

（2）边际倾向指标

当考察两项性质不同但有联系的经济指标时间序列增量之间的关系时，人们通常可计算边际倾向指标。设有 a 、b 两项指标，在一定时间内，a 指标从 a_0 发展到 a_n ，b 指标从 b_0 发展到 b_n 。则边际倾向指标为：

$$m = \frac{a_n - a_0}{b_n - b_0} = \frac{\Delta a}{\Delta b} \qquad (8\text{-}20)$$

这一指标的含义是：指标 b 每增加一个单位引起指标 a 增加的绝对量。因此它常常用来测度指标 b 增长对指标 a 增长的贡献大小。

四、平均增长量指标

1、平均增长量的含义

由（8-15）可知，逐期（环比）增长量构成了一个时间序列，由于每一期增量有多有少，很自然想到可以用“平均增长量”也刻画增量序列的一般水平。因此，平均增长量实际上是逐期增长量的序时平均数，用来说明现象在一定期内平均每期增加的数量，等于各期逐期增长量相加除以其个数。用公式表示：

平均增长量=逐期增长量之和÷逐期增长量个数　　　　　　　　（8-21）

根据（8-13），逐期增长量之和即为相应的累计增长量，故有：

平均增长量=最末时间的累计增长量÷（动态数列项数-1）　（8-22）

（8-20）、（8-21）可用符号表示，有：

$$\text{平均增长量} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})}{n} = \frac{a_n - a_0}{n} \qquad (8\text{-}23)$$

事实上，按上述公式计算的平均增长只是一个理论值，它只保证基期水平按平均增长量发展，达到的最后一年的理论水平和实际水平一致，但不保证中

间期的理论值一致。即通常情况之下会有：

$a_n \equiv a_0 + n \times$平均增长量　　　　　（最末一年的推算水平等于实际水平）

$a_i \neq a_0 + i \times$平均增长量　　$(i < n)$　（中间某年的推算水平不等于实际水平）

因此，这种计算增长量的方法通常称为“水平法”，此外也可以按累计法计算平均增长量。其思路是：

设基期的发展水平为 a_0，平均每期的增长量为 $\overline{\Delta}$，则第一期发展水平为 $a_0+\overline{\Delta}$，第二期发展水平为 $a_0+2\overline{\Delta}$，…，第 n 期发展水平为 $a_0+n\overline{\Delta}$。

按累计法要求有：

$$(a_0+\overline{\Delta})+(a_0+2\overline{\Delta})+\cdots+(a_0+n\overline{\Delta})=a_1+a_2\cdots+a_n$$

$$na_0+(1+2+\cdots+n)\overline{\Delta}=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\text{则}\overline{\Delta}=2\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_0)/n(n+1)$$

具体使用时，应根据经济现象的实际情况进行选择。

此外，平均增长速度还可以采用最小平方法进行估算，即采用最小平方法拟合直线趋势方程 $y=a+bt$，当时间变量 t 每增加一个单位代表 1 年时，方程中的斜率 b 即为年平均增长量。直线趋势方程确定参见本章第四节。

第三节　时间数列的速度分析

根据时间数列反映现象发展变化的速度指标主要有：发展速度和增长速度，平均发展速度和平均增长速度等。

一、发展速度指标

1、含义

发展速度是以相对数表现的动态分析指标，是报告期发展水平与基期发展水平的商，说明报告期发展水平是基期的多少倍或百分之几，亦称动态系数。即：

$$\text{发展速度}=\frac{\text{报告期发展水平}}{\text{基期发展水平}} \qquad (8\text{-}24)$$

当发展速度大于 1 时，说明报告期水平较基期上升；发展速度小于 1，说明报告期水平较基期下降；发展速度=1，则报告期水平和基期持平。

2、种类

与增长量类似，发展速度也可根据基期的不同分为环比发展速度和定基发展速度。环比发展速度是报告期发展水平和前一期水平之比，说明现象逐期变化的相对程度。即：

环比发展速度=报告期发展水平÷前一期发展水平　　　（8-25）

定基发展速度是报告期发展水平与某个固定时期发展水平的对比，即：

定基发展速度=报告期发展水平÷某一固定时期发展水平　　（8-26）

不难发现，对于时间序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$，发展速度指标也构成了一个时间序列，即：

环比发展速度序列：$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$　（8-27）

定基发展速度序列：$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}$　（8-28）

不难看出，环比发展速度与定基发展速度之间存在以下两点的数量关系：

第一，定期发展速度等于各期环比发展速度的连乘积，即

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \tag{8-29}$$

第二，相邻两个定基发展速度的商等于相应的环比发展速度，即

$$\frac{a_i}{a_0} \div \frac{a_{i-1}}{a_0} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \tag{8-30}$$

3、其它相关指标

（1）年距发展速度

与增长量指标一样，当时间序列的时间单位是月份或季度时，同样存在着季节变动的影响，为此，发展速度指标的计算就应该是考虑采取“同比”的方式[①]，即计算“年距发展速度”。其公式为：

$$\text{年距发展速度}=\frac{\text{报告年某月(季)发展水平}}{\text{上年同月(季)发展水平}} \tag{8-31}$$

年距发展速度指标消除了季节性因素的影响。

（2）超过速度（速度比）

当我们需要同时考察两个关联的时间序列发展速度对比关系时，可以计算所谓的“超过速度”或“速度比”指标。以判定哪一个现象发展速度更加快及相对幅度。例如，人口再生产与物质资料再生产之间存在着一条基本规律：物质资料再生产的速度应该比人口再生产的速度快——至少不慢，这样才能够保证人均物质资料拥有水平不会降低。这时，采用公式（8-32）的速度比指标进行分析是合适的。

设有a、b两项指标，在一定时间内，a指标从a_0发展到a_n，b指标从b_0发展到b_n。则速度比指标为：

[①] 对于月份或季度数据，一般统计学著作中都认为采取“同比”方式进行分析是重要的，但都没有认识到简单的前后期对比的价值。其实，在某些更加关注短期波动的现象中，即使存在年度内的季节性波动，这种前后期对比也是很有意义的，表示现象瞬间动态变化速率。且通过这种前后期对比可以揭示季节性规律。

$$速度比=\frac{a现象发展速度}{b现象发展速度}=\frac{a_n/a_0}{b_n/b_0}=\frac{a_n/b_n}{a_0/b_0}=\frac{(a/b)_n}{(a/b)_0} \quad （8-32）$$

从（8-32）可以看出，速度比实质上就是相对指标（a/b）的发展速度。

二、增长速度指标

1、含义

增长速度是反映现象增长程度的相对指标，是报告期增长量与基期发展水平之比。写成公式是：

$$增长速度=\frac{报告期增长量}{基期发展水平} \quad （8-33）$$

$$=\frac{报告期发展水平-基期发展水平}{基期发展水平} \quad （8-34）$$

$$=发展速度-100\% \quad （8-35）$$

增长速度为正，说明现象数量的增加程度，增长速度为负，反映现象数量的减少程度，即负增长。

2、种类

与发展速度一样，增长速度也有定基增长速度和环比增长速度之分。

$$定基增长速度=\frac{报告期累计(定基)增长量}{固定基期发展水平}$$

（8-36）

$$=\frac{报告期发展水平-固定基期发展水平}{固定基期发展水平} \quad （8-37）$$

$$=定基发展速度-100\% \quad （8-38）$$

$$环比增长速度=\frac{报告期逐期(环比)增长量}{上一期发展水平} \quad （8-39）$$

$$=\frac{报告期发展水平-上一期发展水平}{上一一期发展水平} \quad （8-40）$$

$$=环比发展速度-100\%$$

（8-41）

3、其它相关指标

（1）年距增长速度

对于以月份或季度为时间单位的时间序列，为避免季节性波动的影响，可以计算年距增长速度。它可根据年距增长量除以上年同月或同季发展水平求得，或者直接由年距发展速度减去100%得到。

（2）弹性系数

当把两个现象的增长速度直接对比，可以用来反映一个现象相对变动对另一个现象变动的相对影响程度，在经济学中称为“弹性系数”。设有 a 、b 两项指标，在一定时间内，a 指标从 a_0 发展到 a_n ，b 指标从 b_0 发展到 b_n 。则弹性系数为：

$$e=\frac{(a_n-a_0)/a_0}{(b_n-b_0)/b_0}=\frac{\Delta a/a_0}{\Delta b/b_0} \tag{8-42}$$

（3）增长 1%的水平值

用增长速度进行分析时，应注意速度背后的绝对水平，因为基数不同，增长速度是不可比的，为此需要把增长速度和增长量结合起来，计算增长 1%的绝对值。计算公式为：

$$\begin{aligned}\text{增长1\%水平值}&=\text{基期发展水平}\times 1\%\\&=\frac{\text{基期发展水平}}{100}\\&=\frac{\text{报告期增长量}}{\text{增长速度}\times 100}\end{aligned} \tag{8-43}$$

三、平均发展速度指标

1、含义

对于一个以发展速度构成的序列，同样也可以计算其“一般水平”即平均发展速度。由于定基发展速度的时间跨度不尽相同，据之计算“一般水平”没有意义，而环比发展速度的时间长度一致，因而可以计算其平均值。平均发展速度就是各期环比发展速度的序时平均数，用以说明现象在较长一段时间内的发展变化的平均速度。

2、计算方法

平均发展速度的常用计算方法有水平法和累计法两种。

（1）水平法

水平法也称几何平均法。对于一个时间序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ ，设其平均速度为 $\overline{x}$ ，则意味着以 a_0 为起点，此后各年发展水平的理论值分别为：

$$a_0\overline{x},a_0\overline{x}^2,a_0\overline{x}^3,\cdots,a_0\overline{x}^n$$

如果从最后一年（终点）所达到的水平看，其实际值 a_n 应该等于按平均速度推算的理论值，即：

$$a_0\overline{x}^n=a_n \tag{8-44}$$

即可推得平均发展速度为：

$$\overline{x}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_o}} \tag{8-45}$$

式（8-45）关注的是最后一年的发展水平，所以叫“水平法”，它是定基发展速度的 *n* 次方根。

因为定基发展速度是各环比发展速度的连乘积，所以式（8-45）也可以写成下式：

$$\overline{x}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i} \qquad (8\text{-}46)$$

式中，x_i 为各期环比发展速度。显然，(8-46）表示平均发展速度就是环比发展速度的几何平均数，这是“几何平均法”名称的由来。

（2）累计法

累计法也称方程式法。

其计算思路是：设最初水平为 a_0，以后每期以 $\overline{x}$ 的平均速度发展，则经过 n 期后达到的理论总水平应该等于其实际总水平。即

$$a_0\overline{x}+a_0\overline{x}^2+a_0\overline{x}^3+\cdots+a_0\overline{x}^n=a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad (8\text{-}47)$$

$$a_0(\overline{x}+\overline{x}^2+\cdots+\overline{x}^n)=\sum_{i=1}^{n}a_i \qquad (8\text{-}48)$$

$$\overline{x}+\overline{x}^2+\cdots+\overline{x}^n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_0}=\text{定基发展速度总和} \qquad (8\text{-}49)$$

解此式，即求得平均发展速度。式（8-47）考察的是全期累计总量，故称为累计法，式（8-49）是一高次方程，故由又称为“方程式法”。

累计法平均速度的计算较水平法复杂，通常是编制计算机程序进行迭代逼近计算，或者查阅《平均增长速度查对表》确定。具体方法是先求出 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_0}$ （称为总速度 R)，再将它除以时期数 n。如结果>1,则在递增部分找,如果<1,在递减部分找。然后在年份数 n 指定的列寻找总速度 R 所处的位置，对应的速度刻度值即为所求的平均速度。当 R 介于两个数值之间时，可采用插值法求出近似的平均发展速度的值。

（3）水平法与累计法的比较

计算平均发展速度的上述两种方法是存在差异的。

水平法平均速度侧重于考察最末一年的实际发展水平，因此按水平法平均发展速度推算最末一年发展水平，可以保证推算值与实际值相等。但从公式来看，水平法平均发展速度只取决于最初水平和最末水平，而与中间各期的水平无关，所以不能据此来推算中间各期的水平。在实际运用中，如果现象发展在计划期内是持续上涨或下降，目的是考察计划期最后一年的水平，如社会商品零售额、人口增长等指标时，可用此法计算平均发展速度。

累计法平均速度侧重于考察全期实际累计总量，因此按累计法平均发展速度推算的最末一年水平通常不等于其实际水平，但推算的各期发展水平累计值等于实际各期发展水平的累计值，累计法平均速度受期内各期发展水平的影响。

在实际运用中，如果关注的是全期总的发展情况而不仅仅是最后一年的水平高低，如考察基本建设投资完成额、植树造林面积数、累计安排再就业岗位数，或者期内各期水平大起大落时，采用累计法计算平均发展速度更加适宜。

顺便指出，与平均增长量计算相类似，如果把一个时间序列各期发展水平用一条指数曲线 $y = ab^t$ 来拟合（通常是采用最小平方法），则该曲线中指数的底 b 值便是单位时间（t）的平均发展速度，当 t 每增加 1 个单位代表一年时，b 即为“最小平方法”的平均发展速度。

四、平均增长速度

1、含义与基本公式

平均增长速度是说明现象在较长时期内逐期平均增长的相对程度。显然，从含义上看，它是环境增长速度的统计平均，是平均发展速度基础之上减 100%。即：

平均增长速度=平均发展速度 — 100%　　　　　　　　　　（8-50）

式（8-50）称为平均增长速度的基本公式。

2、计算平均增长速度应该注意的问题

由于平均发展速度有“水平法”与“累计法”之分，因此平均增长速度也有“水平法”与“累计法”之分。但必须注意的是，由于环比增长速度不具有连乘的关系，因此不能直接根据环比增长速度的几何平均值，必须且只能先进水平计算平均环比发展速度，然后再采用（8-50）式计算平均增长速度。

[例 8-7]表 8-5 第二列是某专业市场近期商品销售额的时间序列。根据本节及上节有关时间序列描述指标公式，可计算出相应的增长量序列、发展速度序列、增长速度序列及增长 1%水平值序列。结果如表 8-5 有关列所示。

表 8-5　某专业市场 2000-2005 年商品销售额及增长情况

年份	符号	商品销售总额（万元）	累计增长量（万元）	逐期增长量（万元）	定基发展速度（%）	环比发展速度（%）	定基增长速度（%）	环比增长速度（%）	增长 1%绝对值（万元）
2000	a_0	400	/	/	/	/	/	/	/
2001	a_1	500	100	100	125.00	125.00	25	25	4
2002	a_2	615	215	115	153.75	123.00	53.75	23	5
2003	a_3	736	336	121	184.00	119.67	84	19.67	6.15
2004	a_4	852	452	116	213.00	115.76	113	15.76	7.36
2005	a_5	970	570	118	242.50	113.85	142	13.85	8.52

此外，还可以计算其他相关序时平均指标：

平均发展水平（2001-2005 年均销售额）

$$\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{500+615+736+852+970}{5} = 734.6(\text{万元})$$

年平均增长量（2000-2005 销售额年均增加量）

$$\bar{\Delta}=\frac{a_n-a_0}{n}=\frac{970-400}{5}=114(\text{万元})$$

$$\text{或}\bar{\Delta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})}{n}=\frac{100+115+121+116+118}{5}=\frac{570}{5}=114(\text{万元})$$

年平均发展速度

$$\bar{x}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}=\sqrt[5]{\frac{970}{400}}=\sqrt[5]{2.425}=119.38\%$$

$$\text{或}\bar{x}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i-1}}}=\sqrt[5]{1.25\times1.23\times1.1967\times1.1576\times1.1385}$$

$$=\sqrt[5]{2.425}=119.38\%$$

年平均增长速度

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}-1=119.38\%-100\%=19.38\%$$

第四节　　长期趋势的测定

长期趋势是时间数列变动影响因素中最基本、最常见的因素。测定长期的目的在于从起伏激宕的序列过程中归纳总结出现象变化的基本走势。采用一定的方法对时间数列进行修匀，使修匀后的数列排除季节变动、循环变动、不规则变动等因素的影响，就可以凸现其基本趋势或长期趋势。

长期趋势的测定发方法很多，最简捷、直观的方法是随手描绘法，即把时间数列中的时间和因变量值在直角坐标上描述出来，统计上称为历史图。据此观察现象变动的基本形状，拟合适当的趋势线。这一方法虽然简单易行，但据此描述的趋势线其准确性很有限，所以一般只适于对长期趋势进行初步判断。实践中更常用的长期趋势测定方法有“时距扩大法”、“移动平均法”和“函数拟合法（数学模型法）”三类。其中“时距扩大法”是通过时间合并的方式，把时间数列中各期水平所包括的时间长度扩大，这样虽然会使时间序列项数减少，但可以消除季节变动、循环变动但规律性因素的影响。例如，把以月份或季度表现的数据通过合并变成以年份为时间单位的时间序列，把以年份为单位的时间序列又合并成为以“五年”为时间单位（这符合我国社会经济发展五年规划的制度）。下面仅就移动平均法与数学模型法进行介绍。

一、移动平均法

移动平均法是通过对时间数列计算移动平均的方式，消除数列中隐藏的季节变动、循环变动和不规则变动的影响，进而反映长期趋势的方法。它的操作思路是，对原有时间数列的数据逐项递推移动（如 k 项数据移动），计算一系列的序时平均数，并以这些移动平均数作为对应时期的趋势值。

[例 8-8]表 8-6 是某商店 1988 年到 2005 年的年销售收入时间数列。拟采用移动平均法进行修匀，估算相应年份的“长期趋势值”。

移动平均值计算时，移动项数 k 不同，结果也不完全相同。因此，任何方法计算的“趋势值”都只是对真实趋势值的一种估计。

如果采用三项移动平均，则意味着把 1988、1989、1990 三年的销售收入相加，再除以 3（求简单算术平均），作为 1989 年（中间年份）的“趋势值”，然后又把 1989、1990、1991 三年的销售收入数据相加，再除以 3，作为 1990 年（中间年份）的“趋势值”。依此类推，最后将 2003 年、2004、2005 三年的销售收入数据相加再除以 3 得到 1999 年的趋势值。结果如表 8-6 第三列。

如果采用五项移动平均，则需要把 1988、1989、1990、1991、1992 五年的销售收入相加求简单算术平均，作为中间年份 1990 年的“趋势值”，把 1989、1990、1991、1992、1993 这五年的销售收入相加求简单算术平均，作为 1991 年的“趋势值”。依此类推，结果如表 8-6 第四列。

移动平均法的关键是移动项数。应用时，还需要注意以下一些特点：

（1）移动平均的项数越多，对数列修匀的作用也越大。但当项数太多时，移动平均值（趋势值）在图形上会表现出很平缓，与实际趋势反而不相吻合。因为相邻两个移动平均值之间有 k-1 项数据是一样的，只有一项数据是不一样的。当 k 无限扩大，则相邻两个移动平均值会越来越接近，最后趋于相等。因此移动项数应该适中。

（2）移动平均的项数可以是奇数，也可以是偶数，如果为奇数项移动平均，则移动一次就可以得出趋势值，如果移动项数是偶数，如表 8-6 第五列采用了 4 项移动平均，此时的简单平均值落在两个相邻年份的中间，为此需要进行“校正”，即再作一次“两项移动移动平均”即可。表 8-6 中的第六列即为校正之后的移动平均值。

（3）如何确定移动平均的项数应视具体情形而定，一般当时间数列的数值存在自然周期的，移动项数应与其自然周期相一致。例如，对于以季度为时间单位的时间数列，通常要进行四项移动平均（因为相邻四项之和恰好为一个自然年度，避免了季节因素的影响），然后再作一次“两项移动平均”以“校正”时间位置；对于以月份为时间单位的时间数列，通常要进行十二项移动平均，然后再作一次“两项移动平均”。对于以天为时间单位的时间数列，如果存在星期规律（如所谓的“周一效应”或“周末效应”），则以星期内数据个数为移动项数，如股票价格指数一般是采取五项移动平均（因为一周有五个交易日）。当时间数列足够长时，以上述周期数的整数倍为移动项数也是可以考虑的。

如果时间数列中无自然周期，则以奇数项移动为好。

（4）由于移动平均值的计算采用了简单算术平均，因此各期指标值对趋势值的影响被等权处理了，实践中也可以采取“加权”方式计算移动平均值，以体现“厚古薄今”的原则。例如，以“中间年份”为中心，离“中心年份”近的年份指标值给相对大的权重，离“中心年份”远的年份指标值给相对小的权重，然后加权平均。例如，表 8-6 采用三项移动平均时，1989 年的趋势值采取 1：2：1 的权数（此权数比值可根据需要设定）对 1988、1989、1990 三年销售收入进行加权。1990 年的趋势值也采取 1：2：1 的权数对 1989、1990、1991 三年的销售收入进行加权；五项移动平均时，1990 年的趋势值可采用 1：2：3：2：1 的权数对 1988、1989、1990、1991、1992 五年销售收入进行加权平均。这样做的目的是“扩大近期水平的影响，削弱远期水平的影响”。

（5）移动平均法的主要缺点是，会损失时间数列的项数，上例中，如果三项移动平均，则损失了 1988 年和 2005 年的趋势值。如果采用五项移动平均，

则会损失 1988 年、1989 年、2004 年和 2005 年的趋势值，移动项数越多损失的趋势值也越多。为此，有人专门研究“首尾缺失趋势值”的填补技术。

（6）如果每次都直接计算移动平均值，则会让计算工作变得十分繁琐。其实，移动平均法也可以通过下面的方式加以简化：

设时间数列的观察值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，计算 k 项移动平均值时，先计算 k 项总量 T_i，即：

$$T_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

$$T_2 = y_2 + y_3 + \cdots + y_{k+1} = T_1 + (y_{k+1} - y_1)$$

$$T_3 = y_3 + y_4 + \cdots + y_k + y_{k+1} + y_{k+2} = T_2 + (y_{k+2} - y_2)$$

一般化，有：

$$T_i = y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+k-1} = T_{i-1} + (y_{i+k-1} - y_{i-1})(i = 1, 2, \cdots, n-k+1)$$

（8-51）

T_i 可以分解成 T_{i-1} 加上一个观察值再减去一个观察值，这样可大大减少计算量。

最后一次性求相应的平均值（T_i/k），即为各期的的趋势值。

（7）此外，由于移动平均法不能得到实际的方程式，因而无法作为预测的常用工具，但当现象发展较稳定时，也可用来进行外推预测。第 t+1 期的预测公式为：

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \cdots + y_{t-k+1}}{k} \qquad (t > k)$$

（8-52）

表 8-6 移动平均法计算实例 单位：万元

年份	销售收入	三年移动平均	五年移动平均	四年移动平均	二次移动
1988	1	/	/	/	/
1989	14	9.67	/	13.25	/
1990	14	17.33	15.6	19.25	16.25
1991	24	21	19.2	20.5	19.875
1992	25	22.67	18	19	19.75
1993	19	17.33	18.6	17.25	18.125
1994	8	14.67	16.8	14.75	16
1995	17	13.33	20.6	21	17.875
1996	15	25.33	24.8	29	25
1997	44	33	28.2	31	30
1998	40	26.33	26.6	29.5	30.250
1999	25	24.67	30.6	27.25	28.375
2000	9	23	28.8	26	26.625
2001	35	26.33	31.8	33.5	29.75
2002	35	41.67	31.2	36.75	35.125

2003	55	37.33	39	40	38.375
2004	22	41.97	/	/	/
2005	48	/	/	/	/

二、数学模型法

这是测定长期趋势最广泛适用的方法，是采用适当的数学模型（函数）给动态数列拟合一个方程式，并据此计算各期的趋势值。模型可以有线性的，也可以有非线性模型，但前者是基础。模型参数可以是通过确定若干个“点”来求解，也可以基于某一最优化目标函数求解，前者通常根据方程待定参数多少把时间数列划分为相应“段”，求出每一段的“重心”位置坐标（即“平均点”），要求所拟合的方程经过这些点，解相应的联立方程组即可确定参数值，这类方法在直线趋势方程参数求解过程中一般称为“半数平均法”，在二次曲线趋势方程确定时通常称为“三点法”或“分段求和法”。后者通常采用“误差平方和最小”这一目标函数，故称为“最小平方法”。

（一）半数平均法

这是测定时间数列趋势方程最为简便的一种方法。对于直线趋势方程，即把时间数列分成相等的两段，计算每一段观测值的算术平均数，作为趋势线的两点，连接两点构成的直线就是它的趋势线。

设时间数列为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，相应的时间变量记为 t，写为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$。

则其直线趋势方程为：

$$y = a + bt \tag{8-53}$$

方程中的参数 a,b 待定。时间变量通常取自然数，即 $t = 1, 2, \cdots, n$，实践中也可根据需要采用某一等差数列构造 t 值。

用半数平均法求解参数的步骤为：

第一步，将时间数列分成相等的两部分（如时间数列的项数是奇数，则通常去掉第一项，但如果保留第一项，则一般第一段项数可多一项）；

第二步，分别计算两部分指标值和时间变量的简单算术平均数 $(\overline{t_1}, \overline{y_1})$、$(\overline{t_2}, \overline{y_2})$。这两个点就是两部分数据的“重心”。所求的直线趋势方程必须“经过”这两点。

$$\overline{t_1} = \frac{1}{n/2}\sum_{i=1}^{n/2} t_i = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_{n/2}}{n/2}, \quad \overline{t_2} = \frac{1}{n/2}\sum_{i=1+n/2}^{n} t_i = \frac{t_{1+n/2} + t_{2+n/2} + \ldots + t_n}{n/2}$$

$$\overline{y_1} = \frac{1}{n/2}\sum_{i=1}^{n/2} y_i = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n/2}}{n/2}, \quad \overline{y_2} = \frac{1}{n/2}\sum_{i=1+n/2}^{n} y_i = \frac{y_{1+n/2} + y_{2+n/2} + \ldots + y_n}{n/2}$$

第三步，由上述两点即可唯一确定一直线方程。即解下面的方程组：

$$\begin{cases}\bar{y}_1 = a + b\bar{t}_1 \\ \bar{y}_2 = a + b\bar{t}_2\end{cases} \qquad (8\text{-}54)$$

很容易解得最后的方程将是：

$$\frac{y-\bar{y}_1}{\bar{y}_2-\bar{y}_1} = \frac{t-\bar{t}_1}{\bar{t}_2-\bar{t}_1}$$

$$y = \left(\bar{y}_1 - \frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{t}_2-\bar{t}_1}\bar{t}_1\right) + \left(\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{t}_2-\bar{t}_1}\right)t \qquad (8\text{-}55)$$

第四步，趋势方程的应用。

利用趋势方程一方面可以导出各期趋势值的估计值 $\hat{y}_i$——只需把 t 值代入趋势方程即可：

$$\hat{y}_i = a + bt_i$$

另一方面，可以对现象今后发展趋势作出粗略预测。此外，还可以对参数 a、b 的经济含义作出适当的解释。特别是 b 通常可解释为平均增长量。

[例 8-9]现以某市居民收入资料为例说明半数平均法的求解过程（数据见表 8-7）。

表 8-7　某市居民人均收入资料

年份	t_i	人均年收入(元) y_i	半数平均值	趋势值的估计 $\hat{y}_i$
1998	1	6230	$(\bar{t}_1,\bar{y}_1)$ =(2.5,7600)	6156.25
1999	2	7120		7118.75
2000	3	8070		8081.25
2001	4	8980		9043.75
2002	5	9960	$(\bar{t}_2,\bar{y}_2)$ =(6.5,11450)	10006.25
2003	6	11020		10968.75
2004	7	11980		11931.25
2005	8	12840		12893.75

原数列有 8 项，一分为二后每部分 4 项，则：

$$\bar{y}_1 = \frac{6230+7120+8070+8980}{4} = \frac{30400}{4} = 7600$$

$$\bar{t}_1 = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$$

$$\bar{y}_2 = \frac{9960+11020+11980+12840}{4} = \frac{45800}{4} = 11450$$

$$\bar{t}_2 = \frac{5+6+7+8}{4} = 6.5$$

由（8-54），有：

$$\begin{cases}7600 = a + 2.5b \\ 11450 = a + 6.5b\end{cases}$$

$$b = \frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{t}_2 - \overline{t}_1} = \frac{11450 - 7600}{6.5 - 2.5} = \frac{3850}{4} = 962.5$$

$$a = \overline{y}_1 - b\overline{t}_1 = 7600 - 962.5 \times 2.5 = 5193.75$$

即得到如下的趋势方程：

$$\hat{y} = 5193.75 + 962.5t$$

把 t=1~8 代入这一趋势方程，即可得到相应各期的趋势值（估计），如表 8-7 所示。

同时，若假设该市居民收入今后仍然依此趋势发展（提高），则可预测 2006 年的人均收入（t=9）为：

$$\hat{y}_{2006} = 5193.75 + 962.5 \times 9 = 13856.25(\text{元} / \text{人})$$

由这一趋势方程，还可知道该地区居民人均收入平均每年增加 962.5 元。

上述确定直线趋势方程的“半数平均法”还可以推广到求解非线性趋势方程中的参数，例如：对变动趋势属于二次曲线的情形，设 $y = a + bt + ct^2$ ，求解参数的思路是：

第一步，将时间数列分成相等的三部分（如有多余项，则通常舍弃）。

第二步，求出各部分的指标平均数和时间变量平均数，即三个点为 $(\overline{t}_1, \overline{y}_1)$ 、$(\overline{t}_2, \overline{y}_2)$ 、$(\overline{t}_3, \overline{y}_3)$ 。

第三步，代入二次曲线方程，解联立方程，求出参数 a, b, c 。联列方程为：

$$\begin{cases}\overline{y}_1 = a + b\overline{t}_1 + c\overline{t}_1^{\,2} \\ \overline{y}_2 = a + b\overline{t}_2 + c\overline{t}_2^{\,2} \\ \overline{y}_3 = a + b\overline{t}_3 + c\overline{t}_3^{\,2}\end{cases} \qquad (8\text{-}56)$$

一般方程中有几个未知参数，就将原始数列分成几等份，再求解方程组。

同样的，对于修正指数曲线、逻辑曲线、龚伯兹曲线的参数估计原理也与此类似。

（二）最小平方法

最小平方法亦称最小二乘法，它是回归方程拟合时最常用的方法（我们在第七章已经作了详细的介绍），同样适用于趋势方程的拟合：时间序列中的时间变量可简单地视为回归分析中的“自变量”。

其基本思路是：拟合一条趋势线，使原数列各点到该趋势线的距离平方各最短。即满足：

(1)原数列的实际值 y_i 与趋势值 $\hat{y}_i$ 之间的平均离差或离差总和为 0，即

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)=0 \qquad （8-57）$$

（2）原数列的实际值 y_i 与趋势值 $\hat{y}_i$ 之间的离差平方总和最小，即

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2 \Rightarrow \min \qquad （8-58）$$

据此可以建立直线或曲线趋势方程。

1、直线趋势

如果时间数列的一级增长量（即环比增长量）大致相等，则可拟合直线模型。

设拟合的直线方程为 $\hat{y}=a+bt$，则与第七章类似，由（8-58）应该有：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-bt_i\right)^2 \Rightarrow \min \qquad （8-59）$$

进而有以下联立方程组：

$$\begin{aligned}&\sum y=na+b\sum t\\&\sum ty=a\sum t+b\sum t^2\end{aligned} \qquad （8-60）$$

解得

$$\begin{cases}b=\dfrac{n\sum ty-\sum t\sum y}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\dfrac{\overline{ty}-\overline{t}\,\overline{y}}{\overline{t^2}-\overline{t}^2}\\ a=\overline{y}-b\overline{t}\end{cases} \qquad （8-61）$$

从而有趋势方程`：$\hat{y}=a+bt$

与“半数平均法”的结果类似，参数 b 的含义是 t 每增加一个单位 y 的平均增加量，即平均增长量，当 t 增加一个单位代表一年时，b 即为年平均增长量，a 是 t=0 时间的趋势值。

与第七章的回归分析不同，这里的时间变量 t 取值是人为设定的，只是观察点按时间顺序排列的一个序数值，甚至于直接就是时间值（如年份），只要符合时间变化规律即可。对于连续时间等隔的时间序列，t 值呈等差数列即可，最常用的取值方式是令 t 为一自然数（1~n）。

必须注意的是，不同的 t 值规则，将会得到不完全相同的参数解 a,b,从而直线趋势方程的形式就会有区别。但是，这些“形式上不同”的趋势方程所求得的趋势值却是相同的。

实践中为计算方便，人们常常改变 t 的取值起点，把时间数列划分为两段，前半段的 t 值为负，后半段的 t 值为正，呈等差数列，且满足 $\sum t=0$。这时（8-61）可简化为：

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum ty}{\sum t^2}=\dfrac{\overline{ty}}{\overline{t^2}} \\ a=\overline{y} \end{cases} \qquad (8\text{-}62)$$

这种确定参数的方法称为简捷法，与之对应的（8-61）称为“普通法”。但是，运用简捷法确定趋势方程的参数时应注意 t 的正确取值规则：

当时间数列为奇数项时（n 为奇数），取中间一项（原点）为 0，原点以前的年份设为-1，-2，-3…，原点之后各年设为 1，2，3，…，时间变量 t 呈公差为 1 的等差数列，此时 b 为年平均增长量；当时间数列为偶数项时（n 为偶数），原点落在中间两项的中点，此时可取中间两项分别为-1，+1，往上下方向为-3，-5，-7，-9，…，和+3，+5，+7，9，…，时间变量 t 呈公差为 2 的等差数列，此时 2*b* 为年平均增长量。

在简捷法中，*a* 也可视为“序时平均值”。

由于直线趋势分析的理论基础是回归分析，因此也可计算相关系数、作方差分析。

下面举例说明最小平方法在直线趋势方程拟珍贵中的应用。

[例 8-10]某工业企业 1998 年至 2005 年的销售收入资料如表 8-8 所示，分别用最小二乘法的普通法和简捷法拟合直线趋势方程并预测 2008 年可能销售收入。

从表 8-8 的销售收入资料可以看出，其环比（逐期）增长量大致在 200 万元左右，因此可判断为一直线趋势。令直线趋势方程为：

$$\hat{y}=a+bt$$

由最小平方法，可得（有关中间结果见表 8-8）：

表 8-8　某企业 1998~2005 年的销售收入资料

年份	t	t^2	销售收入（万元）y	ty	趋势值 $\hat{y}$
1998	1	1	1820	1820	1816.6667
1999	2	4	2010	4020	2015.8333
2000	3	9	2200	6600	2215
2001	4	16	2420	9680	2414.1667
2002	5	25	2630	13150	2613.3333
2003	6	36	2820	16920	2812.5
2004	7	49	3010	21070	3011.6667
2005	8	64	3200	25600	3210.8333
合计	36	204	20110	98860	98860

$$b=\frac{n\sum ty-\sum t\sum y}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\frac{8\times 98860-36\times 20110}{8\times 204-36^2}=199.1667$$

$$a=\overline{y}-b\overline{t}=\frac{20110}{8}-199.1667\times 4.5=1617.5$$

则趋势方程为：

$\hat{y} = 1617.5 + 199.1667t$

当预测 2008 年产值时，t =11，则

$\hat{y}_{2008} = 1617.5 + 199.1667 \times 11 = 3808.3333$(万元)

利用这一趋势方程，可估计出每一年的“趋势值”，如表 8-8 第 6 列所示。

如果用简捷法，则时间变量 t 的取值应该是-7，-5，-3，-1，1，3，5，7，满足等差（公差为 2）数列，相应的中间结果就不同，如表 8-9 所示。

表 8-9　简捷法情况之下的结果

年份	t	t^2	销售收入（万元）y	ty	趋势值 $\hat{y}$
1998	-7	49	1820	-12740	1816.6667
1999	-5	25	2010	-10050	2015.8333
2000	-3	9	2200	-6600	2215
2001	-1	1	2420	-2420	2414.1667
2002	1	1	2630	2630	2613.3333
2003	3	9	2820	8460	2812.5
2004	5	25	3010	15050	3011.6667
2005	7	49	3200	22400	3210.8333
合计	0	168	20110	16730	98860

由于 $\sum t = 0$，因而由（8-62）有：

$$a = \bar{y} = \frac{20110}{8} = 2513.75$$

$$b = \frac{\sum ty}{\sum t^2} = \frac{16730}{168} = 99.5833$$

趋势方程为：

$\hat{y} = 2513.75 + 99.5833t$

预测 2008 年产值时，根据公差为 2 推算，2008 年的 t =13。

$\hat{y}_{2008} = 2513.75 + 99.5833 \times 13 = 3808.3333$(万元)

同样也可以根据简捷法的趋势方程推算出各年的趋势值，如表 8-9 所示。

对比表 8-8 与表 8-9，可以看出用两种方法计算的趋势方程形式不同。普通法中的 b 为年平均增长量，而简捷法中的 b 为半年的增长量，故不难发现两者的倍数关系。且由于时间变量的零点规定不同（普通法的零点时间是 1997 年，简捷法的零点时间是 2001 下半年至 2002 上半年），因而直线方程的截距项也不同。尽管如此，两种方法的预测值是完全一致的（不考虑计算误差）。正是基于这一关系，我们很容易从一种方法的结果导出另一种方法的结果，也很容易导出其它 t 值取法之下的最小平方法直线趋势方程，这点留给读者作练习。

2、指数曲线趋势方程

当现象发展水平每期按大体相等的增长速度变化时（即各期的环比发展速度大致相等），则时间数列适宜于拟合指数曲线。

设拟合的指数曲线趋势方程为：

$\hat{y} = ab^t$

式中，t 为时间变量，$\hat{y}$ 为实际观察指标 y 的估计值。则通过对数化（对数底数不影响最终结果），就有以下线性模型：

$\ln \hat{y} = \ln a + t \ln b$

令 $\hat{y}^* = \ln \hat{y}, A = \ln a, B = \ln b$，即可写成：

$\hat{y}^* = A + Bt$

根据最小平方法原理，希望满足：$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - \ln \hat{y}_i\right)^2 \Rightarrow \min$。若记 $y^* = \ln y$，则满足 $Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^* - \hat{y}_i^*\right)^2 \Rightarrow \min$。所以有以下联立方程组：

$$\begin{cases} \sum y^* = nA + B\sum t \\ \sum ty^* = A\sum t + B\sum t^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \sum \ln y = n\ln a + \ln b\sum t \\ \sum t\ln y = \ln a\sum t + \ln b\sum t^2 \end{cases} \quad （8\text{-}63）$$

$$\begin{cases} B = \dfrac{n\sum ty^* - \sum t\sum y^*}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2} = \dfrac{\overline{ty^*} - \bar{t}\,\overline{y^*}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2} \\ A = \overline{y^*} - B\bar{t} \end{cases} \quad （8\text{-}64）$$

$$a = e^A, b = e^B \quad （8\text{-}65）$$

根据指数曲线的数学性质不难发现，当 t 每增加一个单位代表 1 年时，b 的经济含义即为“平均发展速度”。如果 t=1,2,…,取自然数，则 a 即相当于第二节介绍的时间数列发展水平中的“最初水平”（a_0）。

与直线趋势方程拟合原理类似，指数曲线方程拟合时也可采用“简捷法”，此时（8-63）及（8-64）简化为：

$$\begin{cases} \sum y^* = nA \\ \sum ty^* = B\sum t^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \sum \ln y = n\ln a \\ \sum t\ln y = \ln b\sum t^2 \end{cases} \quad （8\text{-}66）$$

$$\begin{cases} B = \dfrac{\sum ty^*}{\sum t^2} = \dfrac{\overline{ty^*}}{\overline{t^2}} \\ A = \overline{y^*} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B = \dfrac{\sum t\ln y}{\sum t^2} = \dfrac{\overline{t\ln y}}{\overline{t^2}} \\ A = \overline{\ln y} \end{cases} \quad （8\text{-}67）$$

[例 8-11]表 8-9 是某商业网站近几年来网上交易额（万元）统计资料，要求拟合适当的趋势方程。

表 8-9　某商业网站成交额动态趋势

年份	t	t^2	网上交易（万元）y	$y^* = \ln y$	$ty^* = t\ln y$	趋势值 $\hat{y}$
1999	1	1	12.0	2.484907	2.484907	12.02416
2000	2	4	17.5	2.862201	5.724402	17.43601
2001	3	9	25.3	3.230804	9.692412	25.28364
2002	4	16	36.6	3.600048	14.400192	36.66334
2003	5	25	53.1	3.972177	18.860885	53.16483
2004	6	36	77.0	4.343805	26.062830	77.09335
2005	7	49	112.0	4.718499	33.029493	111.79167
合计	28	140	333.5	25.212441	111.255121	333.5

由于网上交易额大致每年递增 45%左右，因此适合用指数曲线方程来拟合这一长期趋势。

令趋势方程为 $y = ab^t$，在对数化之下，有 $\ln y = \ln a + t\ln b$，记 $A = \ln a, B = \ln b$，由（8-63）可得到以下联立方程组：

$$\begin{cases} 25.212441 = 7A + 28B \\ 111.255121 = 28A + 140B \end{cases}$$

可解得，$A = 2.1152977, B = 0.3716199$。于是

$$a = e^A = 8.29205, b = e^B = 1.45008$$

网上成交额的指数曲线趋势方程为：

$$\hat{y} = 8.29205 \times 1.45008^t$$

由 b 值可知，近年来该网站网上成交额平均每年大致以 45.008%的速度增长。根据这一趋势方程，可推算各年的长期趋势值，如表 8-9 所示。同样可预测 2008 年的趋势值（t=10），即：

$$\hat{y}_{2008} = 8.29205 \times 1.45008^{10} = 340.868(\text{万元})$$

本例也可以采用“简捷法”计算。计算过程留给读者完成，结果如表 8-10 所示。趋势方程为：

$$\hat{y} = 36.66334 \times 1.45008^t$$

表 8-10　某商业网站成交额动态趋势拟合的简捷法

年份	t	t^2	网上交易（万元）y	$y^* = \ln y$	$ty^* = t\ln y$	趋势值 $\hat{y}$
1999	-3	9	12.0	2.484907	-7.454721	12.02416
2000	-2	4	17.5	2.862201	-5.724402	17.43601
2001	-1	1	25.3	3.230804	-3.230804	25.28364

2002	0	0	36.6	3.600048	0	36.66334
2003	1	1	53.1	3.972177	3.972177	53.16483
2004	2	4	77.0	4.343805	8.687610	77.09335
2005	3	9	112.0	4.718499	14.155497	111.79167
合计	0	28	333.5	25.212441	10.405358	333.5

3、二次曲线方程

当一个时间数列的增长量以大致相同的增量变化（即二级增长量大致相等）时，可拟合二次曲线趋势方程，其形式为（拟合后，不含误差项）：

$$\hat{y}=a+bt+ct^2$$

式中，当 t 取自然数时，2c 即为二级增长量。该式中有三个待定参数 a,b,c。按最小二乘法或得出以下正规方程组：

$$\begin{cases}\sum y=na+b\sum t+c\sum t^2\\ \sum ty=a\sum t+b\sum t^2+c\sum t^3\\ \sum t^2y=a\sum t^2+b\sum t^3+c\sum t^4\end{cases}\qquad(8\text{-}68)$$

通过消元法即可解得相应参数。

与上述趋势方程拟合相类似，也可以采用简捷法。当$\sum t=\sum t^3=0$时，（8-68）简化为下式：

$$\begin{cases}\sum y=na+c\sum t^2\\ \sum ty=b\sum t^2\\ \sum t^2y=a\sum t^2+c\sum t^4\end{cases}\qquad(8\text{-}69)$$

二次趋势曲线可根据需要推广到更多次。例如，当时间数列各期发展水平的三级增长量大致相等时，就可以拟合如下形式的三次曲线方程：

$$\hat{y}=a+bt+ct^2+dt^3$$

由最小平方法，可得到如下标准方程组：

$$\begin{cases}\sum y=na+b\sum t+c\sum t^2+d\sum t^3\\ \sum ty=a\sum t+b\sum t^2+c\sum t^3+d\sum t^4\\ \sum t^2y=a\sum t^2+b\sum t^3+c\sum t^4+d\sum t^5\\ \sum t^3y=a\sum t^3+b\sum t^4+c\sum t^5+d\sum t^6\end{cases}\qquad(8\text{-}70)$$

对应于（8-70）的简捷法，有$\sum t=\sum t^3=\sum t^5=0$，从而联立方程组是：

$$\begin{cases}\sum y=na+c\sum t^2\\ \sum ty=b\sum t^2+d\sum t^4\\ \sum t^2y=a\sum t^2+c\sum t^4\\ \sum t^3y=b\sum t^4+d\sum t^6\end{cases}\qquad(8\text{-}71)$$

求解参数 a、b、c、d，可得三次曲线的趋势方程。

顺便指出，对于二次或三次趋势曲线，如果把 t, t^2, t^3 分别视作三个不同的自变量 x_1, x_2, x_3，则参数求解实际上就是第七章的多元线性回归模型估计问题。因此，同样可以采用第七章的有关原理作方程拟合效果检验与分析，同样可以作趋势外推的区间估计。

第五节　季节变动的测定

在社会经济领域有很多现象的数量变化呈现出季节性规律，其最简单的表现方式是有“淡季”与“旺季”之别。显然，认识并测定季节变动的规律对于正确指导生产、流通、消费都具有重要的意义。

季节变动的测定需要计算季节指数或称季节比率。它是反映现象总体在某特定时期（月份或季度或星期）达到的数量水平（发展水平）与年内一般水平之间比例关系的统计指标，通常是以 100%或基数，当季节指数大于 100%，则说明该 月（或季）的发展水平高于“一般水平”因而属于“旺季”，其值越大，旺季也越旺；反之，当季节指数小于 100%，则说明该 月（或季）的发展水平低于“一般水平”因而属于“淡季”，其值越小，淡季也越淡。当季节指数等于 100%时，表明该期无季节波动。

显然，季节指数也呈一数列，其平均水平为 100%。若一个现象受季节性因素影响很大，则表现在季节指数序列有剧烈的波动，图形显示为跌宕起伏明显，否则，图形将趋于平缓。

为避免偶然因素影响，测定季节变动时，掌握的资料年份数应该尽量多一些，一般需要三至五年以上的分月（季）资料。当然，由于多种原因，特定现象的季节性规律也许会发生迁移，因此太长的年份数有时也未必是合适的，反而会淡化近期的季节规律。

测定季节变动的方法很多，大致可分为“简单按月（季）平均法”和“趋势剔除法”两种。后者还可根据趋势值的计算方法不同又有“移动平均趋势剔除法”、“统计模型趋势剔除法”之别。

一、按月平均法

若把一年划分为若干个时间片断（通常是四个季度或十二个月份，但实践中也可根据具体问题以其它时间单位分割，或以两个月为一个时间片断，以旬为时间片断，以半月为时间片断，甚至于以星期为时间片断——如果有意义的话），则考察若干个年份的数据，就可得到如表 8-11。C=12 即为月份数据，C=4 即为季度数据。

表 8-11　季节变动测度基本数据格式

年份	1 期	2 期	3 期	…	C 期
第一年	y_{11}	y_{12}	y_{13}	…	y_{1C}
第二年	y_{21}	y_{22}	y_{23}	…	y_{2C}

…	…	…	…	…	…
第 R 年	y_{R1}	y_{R2}	y_{R3}	…	y_{RC}

对表 8-11 时间数列进行季节变动分析时，可以发现两种情况，一是各年原始资料中有明显的季节变动，但历年同期（同月或同季）的资料无明显趋势变动，这时时间数列仅受季节变动影响，而不存在长期趋势；二是时间数列中即存在明显的季节特征又有长期趋势，表现在“同比增长量”非零。对于前一种情形，可以用按月（季）平均法来测定季节变动。

按月（季）平均法的基本步骤是：

第一步，计算时间数列中各年同期（同月或同季）的平均数 $\bar{y}_{\cdot j}(j=1,2,\cdots,C)$。

$$\bar{y}_{\cdot j}=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}y_{ij}\qquad(j=1,2,\cdots,C)\qquad\text{（8-72）}$$

若有必要，也可以按“厚今薄古”原则对年度进行加权处理。

第二步，计算期内总平均 $\bar{y}$。

$$\bar{y}=\frac{1}{RC}\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{C}y_{ij}=\frac{1}{C}\sum_{j=1}^{C}\bar{y}_{\cdot j}=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\bar{y}_{i\cdot}\qquad\text{（8-73）}$$

若同期平均是加权的，则总平均计算时也应该按相应权重加权处理。

第三步，计算季节比率（季节指数）$S_j(j=1,2,\cdots,C)$

$$S_j=\frac{\bar{y}_{\cdot j}}{\bar{y}}\times 100\%\qquad(j=1,2,\cdots,C)\qquad\text{（8-74）}$$

第四步，对季节比率进行分析，绘制季节指数波动图（如图 8-2 所示），利用季节指数进行时间序列的预测分析等。

上述各步骤可列在一个表格内完成，如表 8-12 所示。

表 8-12　季节变动测定的按月平均法

年份	1 期	2 期	3 期	…	C 期	全年总量	平均每期水平
第一年	y_{11}	y_{12}	y_{13}	…	y_{1C}	$\sum y_{1j}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
第二年	y_{21}	y_{22}	y_{23}	…	y_{2C}	$\sum y_{2j}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
…	…	…	…	…	…	…	…
第 R 年	y_{R1}	y_{R2}	y_{R3}	…	y_{RC}	$\sum y_{1j}$	$\bar{y}_{R\cdot}$
同期总量	$\sum y_{i1}$	$\sum y_{i2}$	$\sum y_{i3}$	…	$\sum y_{iC}$	$\sum\sum y_{ij}$	$R\bar{y}$
同期平均	$\bar{y}_{\cdot 1}$	$\bar{y}_{\cdot 2}$	$\bar{y}_{\cdot 3}$	…	$\bar{y}_{\cdot C}$	$C\bar{y}$	$\bar{y}$

季节比率(%)	S_1	S_2	S_3	$\cdots$	S_c	C	100

不难验证，当时间序列中不存在趋势变动，则意味着趋势值为一常数，同时由于年份不长，循环变动可以忽略（等于 100%），或假设年份长度与周期长度相等，则经过求和或平均之后即可消除循环因素影响。在乘法模型之下，应该有：

$$y_{ij}=T\times S_j\times I_{ij} \tag{8-75}$$

式中T即等于表 8-12 中的$\bar{y}$。

于是，式（8-72）的同期（同月或同季）平均即为：

$$\bar{y}_{\cdot j}=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(T\times S_j\times I_{ij}\right)=\bar{y}S_j\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}I_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots,C)$$

当年份数足够多时，不规则变动的平均值（期望）为 100%（相互抵消），即

$$\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}I_{ij}=1 \quad (j=1,2,\cdots,C)$$

所以，式（8-74）计算的同期平均与总平均的比率为：

$$S_j=\frac{\bar{y}_{\cdot j}}{\bar{y}}\times 100\%=\frac{S_j\times\bar{y}}{\bar{y}}\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}I_{ij}=S_j \qquad (j=1,2,\cdots,C)$$

[例 8-12]表 8-13 是某企业最近五年来四个季度的产品产量资料。因趋势不明显，故可采用按季平均法计算季节指数。

表 8-13　某企业近五年各产品产量（万件）情况

年份	春	夏	秋	冬	各季合计(全年)	平均每季(各季合计÷4)
2001	270	440	210	150	1070	267.5
2002	245	450	230	160	1085	271.25
2003	260	420	190	180	1050	262.5
2004	250	460	200	160	1070	267.5
2005	280	450	220	170	1120	280
五年同季合计	1305	2220	1050	820	5395	1348.75
同季平均(同季合计÷5)	261	444	210	164	1079	269.75
季节指数(%)(同季平均÷总平均)	96.756	164.597	77.850	60.797	400	100

计算过程见表 8-13。根据计算结果可知，该产品产量夏季是旺季，秋、冬为淡季，春季产量回升，接近平均水平。如力 8-2 所示。因此，实际生产管理过程中应该注意人力、财力、原材料等方面的准备工作与此生产季节性规律相吻合，同时还需要做好市场研究工作，通过适当的营销手段来调整季节规律，避免过于剧烈的季节性因素导致生产要素供给的不足、生产能力分配的严重失衡等不利现象出现。

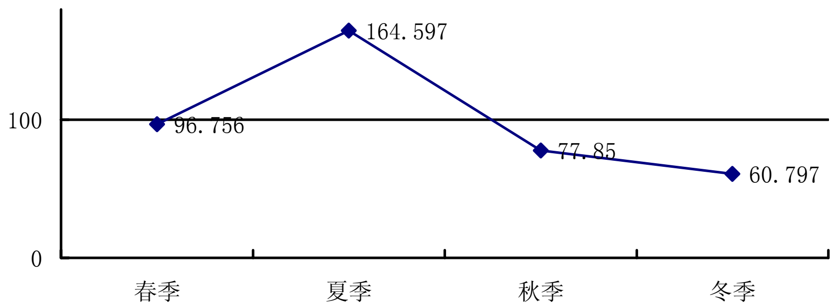

图 8-2　某企业产量季节指数曲线

根据计算的季节比率，还可进一步进行预测或制定分季度生产计划。

例如，若预计 2006 年的全年总产量可能达到 1400 万件，则平均每季为 350 万件，各季产量初步计划可按下式进行估计：

各季初步产量计划=各季季节指数×季平均产量

据此测算出各季的预测值，分别为：

春季：$0.96756 \times 350 = 338.646 \approx 339$（万件）

夏季：$1.64597 \times 350 = 576.09 \approx 576$（万件）

秋季：$0.7785 \times 350 = 272.475 \approx 272$（万件）

冬季：$0.60797 \times 350 = 212.79 \approx 213$（万件）

当然，这只是一个参考数据。实际工作中还需要结合生产要素与生产能力进行权衡调整（如综合考虑库存成本等因素之下，春季适当多生产一些，以减轻夏季生产任务的压力）。

再如，亦可以根据下一年开始几月（季）的实际数值来推算以后各月（季）的数值，推算公式为：

$$\text{某月(季)预测值} = \text{该月季节指数} \times \frac{\text{已知月份(季度)的实际值合计}}{\text{已知月份(季度)的季节比率合计}} \qquad (8\text{-}76)$$

按月（季）平均法的优点是计算简便，容易理解。但它没有考虑长期趋势，如果时间数列的资料存在趋势上升或趋势下降时，用按月（季）平均法就不合适了，应先剔除长期趋势的影响，再计算季节比率。

二、趋势剔除法

该法是先对原时间数列中的长期趋势进行剔除，再计算季节比率。

对于如表 8-11 的季节变动数据，趋势剔除法的基本步骤如下：

第一步，根据原始数据序列 y_{ij} 计算时间数列的长期趋势值（T_{ij}）。

这一步可以用的方法很多，如果采用移动平均法，则先计算 12 个月的移动平均数（若是季度资料，则计算四个季度的移动平均数），可简单移动平均也可计算加权移动平均值。移动项数是偶数时（如 12 或 4），需进行两次移动修正平均，求得相应各期趋势值 T_{ij}（第 i 年第 j 期）。如果采用拟合趋势方程的形式，则先用半数平均法或最小而乘法对原时间数列拟合直线或曲线方程，并根据方程式求出各期的趋势值 T_{ij}（第 i 年第 j 期）。

第二步，消除原始数据中的趋势变动。即计算各年内每月（季）的实际值与相应的趋势值的比率，称为“修匀比率”或“暂定比率” r_{ij}。

$$r_{ij}=\frac{\text{实际值}}{\text{趋势值}}=\frac{y_{ij}}{T_{ij}} \quad (i=1,2,\cdots,R;\ j=1,2,\cdots,C)$$

(注意：当移动趋势剔除时，首尾各缺失若干项. j的起点终点作适当调整)

（8-77）

假设时间数列中不存在循环变动，则时间序列原始数据分解式为：

$$y_{ij}=T_{ij}\times S_j\times I_{ij}$$

经过（8-77）处理，修匀比率或暂定比率的含义即为：

$$r_{ij}=\frac{y_{ij}}{T_{ij}}=\frac{T_{ij}\times S_j\times I_{ij}}{T_{ij}}=S_jI_{ij} \qquad (8\text{-}78)$$

这是一个包含不规则变动在内的季节指数序列。因此，作进一步修匀，消除不规则因素影响，即可分离出季节指数。

第三步，把修匀比率按表 8-11 形式重新排列，计算同期平均，显然可以消除不规则变动的影响，即：

$$S_j=\frac{1}{R^*}\sum_{i=1}^{R^*}r_{ij}=\frac{1}{R^*}\sum_{i=1}^{R^*}S_jI_{ij}=S_j\frac{1}{R^*}\sum_{i=1}^{R^*}I_{ij}=S_j \quad (j=1,2,\cdots,C) \qquad (8\text{-}79)$$

(移动平均趋势剔除法中, $R^*=R-1$; 模型趋势剔除法中, $R^*=R$)

第四步，从理论上讲，全期季节比率之和应该等于 C（对于月份资料，C=1200%，对于季度资料，C=400%）。但在趋势剔除过程中，常常会出现 $\sum_{j=1}^{C}S_j\neq C$。为此，需要进行调整。调整之后的季节指数记为 S_j^*：

$$S_j^*=S_j\div\left(\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{C}S_k\right) \qquad (8\text{-}80)$$

式中，$\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{C}S_k$ 称为调整系数，可记为 λ。实际上是调整前季节指数总和与目标值 C 之间的比值。比值大于 1，表示调整前的季节指数偏大，需要缩小，此时 S_j 除以调整系数即达到缩小效果。反之，比值小于 1，表示调整前的季节

指数偏小，需要放大，此时S_j除以调整系数即达到放大效果。

其实，调整系数也是调整前季节指数S_j的简单平均值。修正过程形式上看就是“同期平均除以总平均”。因此，如果把第三步和第四步放在表 8-12 中处理，则修正后的季节指数实际上就等于“对暂定比率r_{ij}采取按月（季）平均法”处理。第三、四两步的过程可列成表 8-13 形式。

表 8-13　根据修匀比率计算季节指数的过程

年份	1 期	2 期	3 期	…	C 期	平均
第一年	r_{11}	r_{12}	r_{13}	…	r_{1C}	$\overline{r}_{1\cdot}$
第二年	r_{21}	r_{22}	r_{23}	…	r_{2C}	$\overline{r}_{2\cdot}$
…	…	…	…	…	…	…
第 R 年	r_{R1}	r_{R2}	r_{R3}	…	r_{RC}	$\overline{r}_{R\cdot}$
同期平均(季节比率)	S_1	S_2	S_3	…	S_c	$\lambda=\frac{1}{C}\sum_{j=1}^{C}S_j$
修正季节比率 $S_j^*=S_j\div\lambda$	$S_1^*=\frac{S_1}{\lambda}$	$S_2^*=\frac{S_2}{\lambda}$	$S_3^*=\frac{S_3}{\lambda}$	…	$S_C^*=\frac{S_C}{\lambda}$	C

第五步，对季节比率进行分析，绘制季节指数波动图，利用季节指数进行时间序列的预测分析等。

[例 8-13]表 8-14 第四列是某批发市场某类衬衫最近 5 年的销售量资料（万件）。不难看出，季节性波动中混合有长期趋势变动，因此我们可以设想本来应该“水平型”周而复始的季节规律被趋势推进为“螺旋式”上升，趋势波动如一条主轴贯穿于其中。所以应该先对趋势值作出估计。本例采用趋势方程来求解各期趋势值，假设长期趋势为直线方程。采用最小平方法，可得到如下趋势方程（详细计算过程由读者自己借助软件完成）：

$$T=169.4947+3.8053t$$

据之得到趋势值序列 T，实际销售量除以趋势值，即得到“修匀比率”序列。结果见表 8-14。

表 8-14　某类衬衫销售量统计及季节变动测度

年份	季节	时间变量 t	销售量 Y (万件)	趋势值（T）	修匀比率 (Y/T)%
2001	春	1	182	173.30000	1.050202
	夏	2	253	177.10526	1.428529
	秋	3	122	180.91053	0.674367
	冬	4	85	184.71579	0.460166
2002	春	5	204	188.52105	1.082107
	夏	6	306	192.32632	1.591046
	秋	7	130	196.13158	0.662820
	冬	8	92	199.93684	0.460145
2003	春	9	244	203.74211	1.197592
	夏	10	328	207.54737	1.580362
	秋	11	141	211.35263	0.667132
	冬	12	102	215.15789	0.474070
2004	春	13	292	218.96316	1.333558
	夏	14	385	222.76842	1.728252
	秋	15	161	226.57368	0.710586
	冬	16	108	230.37895	0.468793
2005	春	17	329	234.18421	1.404877
	夏	18	441	237.98947	1.853023
	秋	19	172	241.79474	0.711347
	冬	20	112	245.60000	0.456026

把修匀比率（暂定比率）按照表 8-13 形式整理，计算“同季平均”及“总平均”。同季平均除以总平均即为修正后的季节比率，最终结果如表 8-15 所示。

表 8-15　调整后季节比率计算表

年份	春	夏	秋	冬	年内各季平均
2001	1.050202	1.428529	0.674367	0.460166	0.903316
2002	1.082107	1.591046	0.662820	0.460145	0.949030
2003	1.197592	1.580362	0.667132	0.474070	0.979789
2004	1.333558	1.728252	0.710586	0.468793	1.060297
2005	1.404877	1.853023	0.711347	0.456026	1.106318
平均比率（%）（修正前）	121.3667	163.6242	68.5250	46.3840	99.975
季节比率（%）（修正后）	121.397	163.665	68.542	46.396	100.000

由表 8-15 可以得到基本的季节规律：春夏为旺季，秋冬为淡季。同样根据季节指数可作相应的预测和决策。

本例若采用“移动平均”计算趋势值，则结果会有所不同，读者可尝试完成并比较。

第六节　　循环变动的测定

循环变动通常用来描述自由经济现象中的一般循环，与季节变动类似，循环变动也是一种周期性的变化，但不同的是，循环变动的周期在若干年而不是一年之内的规律，且循环波动的周期缺乏规则和稳定性，循环周期长短不一，短则三五年，长则数十年，有时多种不同长度的周期会混杂在一起。所以我们很难像预测季节变动那样预测循环变动。但是利用时间数列几种变动因素间的相互关系（主要利用乘法模型），可以通过对原始数列的分解来大致测定循环变动状态。以下介绍两种测定循环变动的常用方法。

一、对年度资料的循环变动测定

如果时间数列是由按年统计的，则季节变动的影响已经消除，因为年度资料中包含了所有季节。此时，短期的不规则变动亦趋于消失，可以忽略不计。这样时间数列只受两种因素的影响，长期趋势和循环变动。根据乘法模型，就变成：

Y=T×C　即 C=Y/T

把原时间数列的实际值（Y）除以长期趋势值（T）后就得到了循环变动值 C，这个值乘以 100%，叫循环变动系数。

这种方法计算简便，容易理解，是常用的循环变动测定法，但是它有一定的假定性。当动态数列是按月或按季的资料表现时，就不能采用此方法。

二、对月度（季度）资料测定循环变动

在分月（季）资料中，存在季节变动的影响，同样还受不规则变动的影响，为了同时消除长期趋势和季节变动，我们可以先把原始数列实际值除以长期趋势值和季节变动指数，得到循环不规则系数 CI。通过对 CI 计算加权移动平均值，即可消除不规则变动 I，最后得出的平均数就是循环变动系数 C。

具体的计算步骤如下：

第一步，测定原始数据序列中的长期趋势值 T

第二步，测定原始序列中的季节比率 S

第三步，计算时间序列中的“正同值”TS，即长期趋势值乘以相应的季节指数。

第四步，计算“循环不规则序列”CI，即：

$$\frac{Y}{T\times S}=\frac{T\times S\times C\times I}{T\times S}=CI$$

第五步，对 CI 序列进行移动平均（可加权），则可消除不规则影响，得到循环变动序列 C。

测定循环变动，掌握经济波动的一些规律，预测下一个循环变动可能产生的原因、影响和变动趋势对计划、决策者来说有很大的意义，但值得注意的是循环变动预测与长期趋势预测不同，其不确定因素太多，因此循环变动预测在很大程度上要依靠经济分析，把经济分析和统计分析相结合才能客观地把握现象发展的规律性。

本章小结

1、统计指标按时间顺序排列形成的序列称为时间数列。指标值及其所属时

间是其两个基本要素。通过时间数列分析，不仅可以看出一个现象过去的发展水平与速度，而且可以了解其现状，预计其发展趋势。时间数列有时期数列、时点数列、平均数数列、相对数数列等类型。可比性是编制时间数列的基本原则。

2、时间数列中各期实际水平称为发展水平。发展水平的平均数即为序时平均数，它与静态平均数是有区别的。不同性质的时间数列，其序时平均数的计算方法是有很大区别的。时间数列的水平指标还包括增长量与平均增长量及年距增长量。其中增长量因基期的不同可分为逐期增长量与累计增长量，二者之间有两条基本数量关系。两个现象增长量序列对比时，可计算“边际倾向”指标。

3、时间序列的速度指标有发展速度、增长速度、平均发展速度、平均增长速度等。发展速度按基期不同可分为环比发展速度与定基发展速度。环比发展速度的边乘积等于相应的定基发展速度，相邻两个定基发展速度之比即为相应的环比发展速度。为了消除季节因素，通常需要计算“年距发展速度”。发展速度减 1（即基期相对水平）后就是发增长速度。平均发展速度在含义上是环比发展速度的统计平均值，常用的计算方法有水平法（几何平均法）和累计法（方程式法）两种，二者侧重点与适用条件不同。平均增长速度计算时则必须注意只能在平均发展速度的基础之上减去 100%之后确定。比较两个现象速度快慢时，可采用“超过系数”，它是两个现象发展速度的比值。比较现象增长弹性时，可采它们的增长速度的比值。为了提示相对数背后的绝对数水平，可计算增长1%的水平值指标。

4、测定长期趋势有许多方法，移动平均法与统计模型法是最常用的两种。移动平均法的重要因素是移动项数，实践中应该根据具体情况选择。采用统计模型拟合现象发展趋势的基本方法是最小平方法。一般应该根据时间数列变化特点选择适当的趋势模型。如果现象一级增长量大致相同，可选择直线趋势方程；如果现象二级增长量大致相同，可选择二次曲线趋势方程；如果现象环比增长速度大致相同，可选择指数曲线趋势方程。趋势方程中的参数有着特殊的经济含义。判断趋势方程优劣的基本指标是计算比较拟合的平均误差。

5、测定季节变动的基本指标是季节比率或季节指数。若时间序列中没有明显增长或下降趋势，可采用按月（季）平均法计算季节比率，否则需要先计算趋势值（可采用移动平均或统计模型测算），再从实际值剔除趋势，凸现其中的季节性规律即“修匀比率”。通过对修匀比率作进一步的统计平均，即可测得相应的季节指数。

6、循环变动的测定也是基于乘法时间序列模型进行的，即在测得趋势变动和季节变动的基础之上，从实际观察值中消除这两项变动，剥离出循环与不规则变动，再通过统计平均来确定相应循环系数。

练习与思考

一、判断题

1、两个总量指标时间数列相对比得到的时间数列一定是相对数时间数列。

2、构成时间数列的两个基本要素是时间和指标数值。

3、所谓序时平均数就是将同一总体的不同时期的平均数按时间先后顺序排列起来。

4、间隔相等的时期数列计算平均发展水平时，应用首尾折半的方法。

5、累计增长量除以时间数列的项数等于平均增长量。

二、单项选择题

1、某企业2002年1-4月初的商品库存额如下表：（单位：万元）

月份	1	2	3	4
月初库存额	20	24	18	22

则第一季度的平均库存额为（　　）

A、（20+24+18+22）/4　　B、（20+24+18）/3

C、（10+24+18+11）/3　　D、（10+24+9）/3

2、上题中如果把月初库存额指标换成企业利润额，则第一季度的平均利润额为（　　）

A、（20+24+18+22）/4　　B、（20+24+18）/3

C、（10+24+18+11）/3　　D、（10+24+9）/3

3、某企业1998年的产值比1994年增长了200%，则年平均增长速度为（　）

A、50%　　B、13.89%　　C、31.61%　　D、29.73%

4、1990某市年末人口为120万人，2000年末达到153万人，则年平均增长量为（　）

A、3.3万人　　B、3万人　　C、33万人　　D、30万人

5、上题中人口的平均发展速度是（　　）

A、2.46%　　B、2.23%　　C、102.23%　　D、102.46%

6、当时期数列分析的目的侧重于研究某现象在各时期发展水平的累计总和时，应采用(　　)方法计算平均发展速度。

A、算术平均法　　B、调和平均法

C、方程式法　　D、几何平均法

7、如果时间数列逐期增长量大体相等，则宜拟合(　)。

A、直线模型；　B、抛物线模型；　C、曲线模型；　D、指数曲线模型。

8、当时间数列的逐期增长速度基本不变时，宜拟合（　　）。

A、直线模型　B、二次曲线模型　C、逻辑曲线模型　D、指数曲线模型

9、当一个时间数列是以年为时间单位排列时，则其中没有（　　）

A、长期趋势　B、季节变动　C、循环变动　D、不规则变动

10、若无季节变动，则季节指数应该是（　　）

A、等于零　B、等于1　C、大于1　D、小于零

11、某一时间数列，当时间变量t=1,2,3……，n时，得到趋势方程为y=38+72t，那么若取t=0,2,4,6,8……时，方程中的b将为（　　）

A、144　　B、36　　C、110　　D、34

12、上题中，a的取值应为多少（　　）

三、简答题

1、序时平均数与静态平均数有何异同?

2、时期数列与时点数列有哪些区别?

3、动态数列采用的分析指标主要有哪些？

4、环比增长量和定基增长量有什么关系？

5、环比发展速度和定基发展速度之间有什么关系？

6、 什么是平均发展速度?说说水平法和累计法计算平均发展速度的基本思路。各在什么样的情况下选用？
7、为什么要注意速度指标和水平指标的结合运用？
8、测定长期趋势有哪些常用的方法？测定的目的是什么？
9、用移动平均法确定移动项数时应注意哪些问题？
10、最小平方法的数学要求是什么?写出以最小平方法拟合直线趋势、二次曲线趋势时的标准方程式。

四、计算题

1、某企业 2000-2005 年期间不变价工业总产值的资料如下：

年份	2000	2001	2002	2003	2004	2005
工业总产值(万元)	660	700	732	756	780	820

计算 2001-2005 年工业总产值的平均发展水平、年平均增长量及平均增长速度。

2、某储蓄所一年的居民储蓄余额资料如下：

月份	1	4	8	12
月末存款余额（万元）	3000	3200	2400	2800

又知上年末的存款余额为 3500 万元
计算：该时间数列的序时平均数，说明其经济含义。

3、某超市 1-4 月商品销售及人员资料如下：

月份	1	2	3	4
商品销售额(万元)	300	350	280	250
月初销售员人数(人)	40	45	40	42

计算：(1)第一季度该店平均每月商品销售额；
(2)第一季度平均售货员人数；
(3)第一季度平均每售货员的销售额；
(4)第一季度平均每月每个售货员的销售额。

4、根据下表资料：(单位：万元)

时间	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月
销售额	12	12.4	12.8	14	14.2	15	15.4
月初库存额	5.8	5.2	6	6.5	7.2	7	6.8
流通费用额	1	1.2	1.1	1.5	1.5	1.8	2

分别计算：（1）该企业一季度、二季度、和上半年的商品流转次数
（2）该企业一季度、二季度、和上半年平均每月的商品流转次数
（3）该企业一季度、二季度、和上半年的商品流通费用率
（4）该企业一季度、二季度、和上半年平均每月的商品流通费用率

（5）比较（1）与（2）；（3）与（4）的结果说明什么问题

（6）编制该企业上半年“商品流转次数”和“商品流通费用率”的时间数列，说明它们属于哪一类的时间数列。

（提示：商品流转次数=销售额/平均库存额； 流通费用率=流通费用额/商品销售额）

5、下表是我国今年 1-6 月份工业增加值的时间数列，根据资料计算各种动态分析指标，填入表中相应空格内。

时间		一月份	二月份	三月份	四月份	五月份	六月份
工业总产值(亿元)		2662	2547	3134	3197	3190	3633
增长量(亿元)	逐期	/					
	累计	/					
发展速度(%)	环比	/					
	定基	/					
增长速度(%)	环比	/					
	定基	/					
增长 1%的绝对值							

6、某地 1950-1978 年期间（以 1949 年为基期），工农业总产值平均每年以 25%的速度增长，而 1979-2006 年间工农业总产值平均每年的速度增长是 30%，则 1950-2006 年间，工农业总产值平均每年的增长速度是多少？

7、某地 1980 年的人口是 120 万人,1981-2000 年间人口平均的自然增长率为 1.2%,之后下降到 1%,按此增长率到 2008 年人口会达到多少?如果要求到 2012 年人口控制在200万以内,则2006年以后人口的增长速度应控制在什么范围内?

8、某地区化肥产量历年的资料如下：

年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
化肥产量(万吨)	5.2	5.5	5.8	6.0	6.4	6.7	8.0	8.5

用最小平方法配合趋势直线方程，并预计到 2010 年该地区的化肥产量。

9、某企业历年产值资料如下（单位：万元）

年份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
产值（万元）	10	12	15	18	20	24	28

要求（1）分别用最小平方法的普通法和简捷法配合直线方程，并预测该地区 2010 年这种产品可能达到的产量。

（2）比较两种方法得出的结果有何异同

10、某企业的销售收入资料如下：

年份	一季	二季	三季	四季

2002	79	48	68	107
2003	97	66	85	134
2004	113	91	100	148
2005	13	105	125	174

分别用“按月平均法”“移动趋势剔除法”测定季节变动
比较两种方法的使用条件，你认为哪种方法更适用于本例题。

人物介绍

克莱夫.格兰杰(Clive Granger，1934——)：美国著名经济学家、统计学家。1934年出生于英国威尔士，早期就读于诺丁汉大学，接受当时英国第一个经济学数学双学位教育，1955年留校任教，1957年在天文学杂志上他发表了第一篇论文：“关于太阳黑子活动的一个统计模型”。1959年，他在诺丁汉大学获得统计学博士学位。在20世纪60年代早期，格兰杰去普林斯顿大学做访问学者,在著名学者约翰.图基(John Tukey)和奥斯卡.摩根斯坦(Oscar Morgenstein)门下深造。1974 年移居美国，成为圣迭亚哥加州大学经济学院教授。随后,他开创了该学院的计量经济学研究工作，并使之成为全世界最出色的计量经济学研究基地之一。他的论文几乎涵盖了过去40年间该领域的主要进展，主要著作有：《经济时间序列的谱分析》(与 Hatanaka 合著)，《股价的可预测性》(与 Morgenstern合著)，《商品价格的投机、套利和预测》(与Labys合著)，《经济时间序列预测》(与Newbold合著)，《双线性时间序列模型导论》,，《经济序列建模：:经济计量方法阅读材料》，《经济学的实证建模：设定和估计》等。高中时期，在所有学生公开表达自己的理想的一次机会上，格兰杰因为一时口吃随口说出了统计学家，他说那一时的口吃决定了他将来的职业。他与美国经济学家恩格(Robert F. Engle)同获 2003年诺贝尔经济学奖。