七、条件异方差模型

目录

异方差问题与诊断

- 异方差问题

$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$

- 异方差的诊断
  - 残差图 $t - \varepsilon_t$
  - 残差平方图 $t - \varepsilon_t^2$：$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$

方差齐性变换

- 方差齐性变换
  - 使用场合：$\sigma_t^2 = h(\mu_t)$，$\mathrm{Var}[g(x_t)] = \sigma^2$
  - 转换函数的确定：$g(\mu_t) = \ln \mu_t$
  - 缺陷：

    不是所有序列都能使用对数变换进行异方差信息提取

    没有办法确定序列的方差函数与均值函数之间的函数关系

    不是提取波动性信息的主流方法

ARCH 模型

- 条件异方差模型 (ARCH 模型)
  - 集群效应：在消除确定性非平稳因素的影响后，残差序列在大部分时段小幅波动，但是会在某些时段出现持续大幅波动
  - 假设：$E(\varepsilon_t) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = h_t$
  - ARCH(q) 的结构：$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, e_t \sim N(0,1) \\ h_t = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases}$
  - 参数约束条件：$0 \leq \lambda_i < 1$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_q < 1$

GARCH 模型

- 广义条件异方差模型 (GARCH 模型)
  - GARCH(p,q) 的结构：$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, e_t \sim N(0,1) \\ h_t = \lambda_0 + \sum\limits_{j=1}^{p} \eta_j h_{t-j} + \sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases}$
  - 参数约束条件：$0 \leq \lambda_i, \eta_j < 1$，$0 \leq \sum\limits_{j=1}^{p} \eta_j + \sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i < 1$

GARCH 模型

- PP 检验
  - 条件：$E(\varepsilon_t)=0$，$\sup_t E(|\varepsilon_t|^2)<\infty, \sup_t E(|\varepsilon_t|^{a^2+2})<\infty$，$\sigma_S^2=\lim_{T\to\infty} E(T^{-1}S_T^2)$ 存在且为正值
  - 统计量：$Z(\tau)=\tau(\hat{\sigma}^2/\hat{\sigma}_{Sl}^2)-\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{Sl}^2-\hat{\sigma}^2)T\sqrt{\hat{\sigma}_{Sl}^2\sum_{t=2}^{T}(x_{t-1}-\bar{x}_{t-1})^2}$
  - $\hat{\sigma}^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2$
  - $\hat{\sigma}_{Sl}^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{l}\hat{\varepsilon}_t^2+2T^{-1}\sum_{j=1}^{t}\phi_j(l)\sum_{t=j+1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-j}$，$\phi_j(l)=1-\frac{1}{l+1}$
  - $\bar{x}_{T-1}=\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}x_t$
  - $H_0:\phi_1=1$ (非平稳)，$H_1:\phi_1\neq 1$ (平稳)

GARCH 模型

- ARCH 检验
  - Portmanteau Q 检验：

    H_0 : 残差平方序列纯随机 (方差齐性)，H_1 : 残差平方序列自相关 (方差非齐)

    $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_q = 0$，$H_1 : \exists \rho_i \neq 0$

    统计量：$Q(q) = n(n+2)\sum_{i=1}^{q} \frac{\rho_i^2}{n-i} \to \chi^2(q-1)$

    $$\rho_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=i+1}^{n}(\varepsilon_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\varepsilon_{t-i}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}{n}$$

- ARCH 检验
  - LM 检验:

    H_0 : 残差平方序列纯随机 (方差齐性)，H_1 : 残差平方序列自相关 (方差非齐)

    $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_q = 0$，$H_1 : \exists \lambda_i \neq 0$

    统计量：$\mathrm{LM}(q) = \dfrac{(SST - SSE)/q}{SSE/(T-2q-1)} \to \chi^2(q-1)$

    $SST = \sum_{t=q+1}^{T} \varepsilon_t^2$，$SSE = \sum_{t=q+1}^{T} e_t^2$，$SSR = SST - SSE$

GARCH 模型

- 拟合检验
  - 参数显著性检验
  - 模型显著性检验
  - 分布检验：

    $H_0: \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \sim N(0,1)$，$H_1: \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \nsim N(0,1)$

    图检验：QQ 图、直方图

    JB 检验：$\mathrm{JB} = \frac{T}{6}b_1^2 + \frac{T}{24}(b_2^2 - 3)^2 \sim \chi^2(2)$

GARCH 模型

- 模型预测
  - 均值模型为 ARIMA(p,d,q)
  - $\hat{h}_{t+k} = \hat{\lambda}_0 + (\hat{\eta}_1 + \hat{\lambda}_1)\hat{h}_{t+k-1}$
  - 95% 置信区间：$(\hat{x}_{t+k} - 2\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{x}_{t+k})}, \hat{x}_{t+k} + 2\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{x}_{t+k})})$

GARCH 衍生模型

- 指数 GARCH 模型 (EGARCH 模型)
  - 结构：
  $$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, e_t \sim N(0,1) \\ \ln h_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \eta_j \ln h_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g(e_{t-j}) \\ g(e_t) = \theta e_t + \gamma[|e_t| - E|e_t|] \end{cases}$$
  - 放松了对 GARCH 模型的参数非负约束
  - 通常取 $\gamma = 1$，此时 $g(e_t) = \begin{cases} (\theta+1)e_t - \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & e_t > 0 \\ (\theta-1)e_t - \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & e_t < 0 \end{cases}$

GARCH 衍生模型

- 方差无穷 GARCH 模型 (IGARCH 模型)
  - 结构：
  $$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, e_t \sim N(0,1) \\ h_t = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{p} \eta_j h_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_{t-i}^2 \\ \sum_{j=1}^{p} \eta_j + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1 \end{cases}$$
  - 残差序列的方差无界 (允许方差无穷大)
  - $\sigma_t^2(j) = j\omega + \sigma_t^2$

GARCH 衍生模型

- 依均值 GARCH 模型 (GARCH-M 模型)
  - 风险投资期望收益 = 无风险收益 + 风险溢价
  - 序列均值会受到序列条件方差的影响
  - 结构：
$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + \delta\sqrt{h_t} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, e_t \sim N(0,1) \\ h_t = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{p} \eta_j h_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases}$$