五、无季节效应的非平稳序列分析

目录

差分平稳

- 差分运算与差分方式的选择
  - 一阶差分：$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$
  - p 阶差分：$\nabla^p x_t = \nabla^{p-1} x_t - \nabla^{p-1} x_{t-1}$
  - k 步差分：$\nabla_k x_t = x_t - x_{t-k}$
  - 差分运算的实质：$\nabla^d x_t = (1-B)^d x_t = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} x_{t-i}$
  - 显著的线性趋势：一阶差分
  - 曲线趋势：低阶 (二阶或三阶) 差分
  - 固定周期的序列：步长为周期长度的差分
  - 过差分的实质：过多次数的差分导致有效信息的无谓浪费，降低了拟合的精度

ARIMA 模型

- ARIMA 模型的结构
  - ARIMA(p,d,q) 的定义：$\Phi(B)\nabla^d x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \iff x_t = \Psi(B)\varepsilon_t$
  - 假定条件：$E(\varepsilon_t) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0(s \neq t)$，
    $E(x_s\varepsilon_t) = 0(s < t)$
  - $d = 0$ 时，ARIMA$(p,d,q) \iff$ ARMA(p,q)
  - $p = 0$ 时，ARIMA$(p,d,q) \iff$ IMA(d,q)
  - $q = 0$ 时，ARIMA$(p,d,q) \iff$ ARI(p,d)
  - $d = 1, q = p = 0$ 时，ARIMA$(p,d,q) \iff$ 随机游走模型 (醉汉模型)

ARIMA 模型

- ARIMA 模型的性质与预测
  - 平稳性：ARIMA(p,d,q) 模型共有 $p+d$ 个特征根，p 个根在单位圆内，d 个根在单位圆上；当 $d \neq 0$ 时，ARIMA(p,d,q) 模型不平稳
  - 方差齐性：ARIMA$(0,1,0)$ 的 $\mathrm{Var}(\nabla x_t) = \sigma_\varepsilon^2$
  - 广义自相关函数：$\Phi^*(B) = \Phi(B)(1-B)^d = 1 - \tilde{\phi}_1 B - \tilde{\phi}_2 B^2 - \cdots$
  - ARMA 的 Green 函数：$\begin{cases} \Psi_1 = \tilde{\phi}_1 - \theta_1 \\ \Psi_j = \tilde{\phi}_1 \Psi_{j-1} + \cdots + \tilde{\phi}_{p+d} \Psi_{j-p-d} - \theta_j \end{cases}$，

    其中 $\Psi_j = \begin{cases} 0, & j < 0 \\ 1, & j = 0 \end{cases}$
  - $\hat{x}_t(l) = \Psi_l \varepsilon_t + \Psi_{l+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots$；$\mathrm{Var}[e_t(l)] = \sum_{i=0}^{l-1} \Psi_i^2 \sigma_\varepsilon^2$

疏系数模型

- 疏系数模型
  - ARIMA$((p_1,\cdots,p_m),d,(q_1,\cdots,q_n))$，其中两者下标不必连续
  - 可以通过自相关系数图与偏自相关系数图中 k 阶大于 2 倍标准差，认为疏系数中包括该 k 阶自回归或移动平均