# 六、有季节效应的非平稳序列分析

# 目录

# 因素分解理论

- 确定性因素分解理论
  - 长期趋势 $T$：序列呈现出明显的长期递增或递减的变化趋势
  - 循环波动 $C$：序列呈现出从低到高再由高到低的反复循环波动。循环周期可长可短，不一定是固定的
  - 季节性变化 $S$：序列呈现出和季节变化相关的稳定周期性波动，后来季节性变化的周期拓展到任意稳定周期
  - 随机波动 $I$：除了长期趋势、循环波动和季节性变化之外，其他不能用确定性因素解释的序列波动，都属于随机波动
  - 加法模型：$x_t = T_t + C_t + S_t + I_t$
  - 乘法模型：$x_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t$

# 因素分解理论

- 因素分解改进模型
  - 将循环因素 $C$ 改为交易日因素 $D$
  - 加法模型：$x_t = T_t + S_t + D_t + I_t$
  - 乘法模型：$x_t = T_t \times S_t \times D_t \times I_t$
  - 伪加法模型：$x_t = T_t \times (S_t + D_t + I_t)$
  - 对数加法模型：$\ln x_t = \ln T_t + \ln S_t + \ln D_t + \ln I_t$

# 因素分解模型

- 因素分解模型的选择
  - 加法模型：随着趋势的递增，每个季节的振幅维持相对稳定，这说明季节效应没有受到趋势的影响，即 $x_t = T_t + S_t + I_t$
  - 乘法模型：随着趋势的递增，每个季节的振幅也在增大，这说明季节效应受到趋势的影响，即 $x_t = T_t \times S_t \times I_t$

# 因素分解模型

- 趋势效应的提取
  - 移动平均函数：$M(x_t) = \sum_{i=-k}^{f} \theta_i x_{t-i}$
  - $n$ 是奇数：$M_n(x_t) = \sum_{i=-k}^{k} \frac{x_{t-i}}{n}$
  - $n$ 是偶数 $P \times Q$：$M_{P\times Q}(x_t) = \sum_{i=0}^{P-1} \frac{1}{P} M_Q(x_{t+i})$，其中 $M_Q(x_{t+i}) = \frac{x_{t-P+i} + x_{t-P+i+1} + \cdots + x_{t-P+Q-1}}{Q}$
  - 有效提取低阶趋势，实现拟合方差最小，有效消除季节效应

# 因素分解模型

- 季节效应的提取
  - 加法模型：

    (1) 从原序列中消除趋势效应：$y_t = x_t - T_t$

    (2) 计算序列总均值：$\bar{y} = \dfrac{\sum\sum y_{ij}}{km}$

    (3) 计算季度均值：$\bar{y}_j = \dfrac{\sum\limits_i y_{ij}}{k}$

    (4) 季度均值减总均值，得到季节指数：$S_j = \bar{y}_j - \bar{y}$

# 因素分解模型

- 季节效应的提取
  - 乘法模型：

    (1) 从原序列中消除趋势效应：$y_t = \frac{x_t}{T_t}$

    (2) 计算序列总均值：$\bar{y} = \dfrac{\sum\sum y_{ij}}{km}$

    (3) 计算季度均值：$\bar{y}_j = \dfrac{\sum\limits_i y_{ij}}{k}$

    (4) 季度均值减总均值，得到季节指数：$S_j = \dfrac{\bar{y}_j}{\bar{y}}$

# 因素分解模型

- X11 季节调节模型
  - Henderson 加权移动平均：

    在 $\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1$ 和 $\sum_{i=-k}^{k}i\theta_i=0$ 下，$\min S^2=\sum_{i=-k}^{k}(\nabla^3\theta_i)^2$
  - Musgrave 非对称移动平均：

    在 $\sum_{i=-k}^{k}\theta_i=1$、方差最小、光滑度最优和 $\sum_{i=-k}^{k-d}\phi_i=1$ 下，

    $$\min\left\{E\left(\sum_{i=-k}^{k}\theta_i x_{t-i}-\sum_{i=-(k-d)}^{k}\phi_i x_{t-i}\right)\right\}^2$$

# 指数平滑预测模型

- 简单指数平滑
  - 前提：无长期趋势，无季节效应
  - 简单指数平滑预测模型：

    $\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \cdots$
  - 实际应用上：$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{x}_t$
  - 简单指数平滑法预测任意期的预测值都为常数：$\hat{x}_{t+l} = \hat{x}_{t+1}$

# 指数平滑预测模型

- Holt 两参数指数平滑
  - 前提：有长期趋势，无季节效应
  - 适用于含有线性趋势的序列
  - 记 $b(t-1) = x_{t-1} - \varepsilon_{t-1}$，$b(t) = b + \varepsilon_t$
  - 平滑系数递推公式：

    截距：$\hat{a}(t) = ax_t + (1-\alpha)[\hat{a}(t-1) + \hat{b}(t-1)]$

    斜率项：$\hat{b}(t) = \beta[\hat{a}(t) - \hat{a}(t-1)] + (1-\beta)\hat{b}(t-1)$
  - 向前 $k$ 期的预测值：$\hat{x}_{t+k} = \hat{a}(t) + \hat{b}k$

# 指数平滑预测模型

- Holt-Winters 三参数指数平滑
  - 前提：有或无长期趋势，有季节效应
  - 加法模型：

    记 $a(t-1)=x_{t-1}-c_{t-1}-\varepsilon_{t-1}$，$b(t)=b+\varepsilon_t$，$c(t)=S_j+e_t$

    截距：$\hat{a}(t)=\alpha[x_t-c(t-m)]+(1-\alpha)[\hat{a}(t-1)+\hat{b}(t-1)]$

    斜率：$\hat{b}(t)=\beta[\hat{a}(t)-\hat{a}(t-1)]+(1-\beta)\hat{b}(t-1)$

    季节指数：$\hat{c}(t)=\gamma[x_t-\hat{a}(t)]+(1-\gamma)c(t-m)$

    向前 $k$ 期的预测值：$\hat{x}_{t+k}=\hat{a}(t)+\hat{b}(t)k+\hat{c}(t+k)$

# 指数平滑预测模型

- Holt-Winters 三参数指数平滑
  - 乘法模型：

    记 $a(t-1)=\dfrac{x_{t-1}}{c_{t-1}}-\varepsilon_{t-1}$，$b(t)=b+\varepsilon_t$，$c(t)=S_j+e_t$

    截距：$\hat{a}(t)=\alpha[x_t/c(t-m)]+(1-\alpha)[\hat{a}(t-1)+\hat{b}(t-1)]$

    斜率：$\hat{b}(t)=\beta[\hat{a}(t)-\hat{a}(t-1)]+(1-\beta)\hat{b}(t-1)$

    季节指数：$\hat{c}(t)=\gamma[x_t/\hat{a}(t)]+(1-\gamma)c(t-m)$

    向前 $k$ 期的预测值：$\hat{x}_{t+k}=[\hat{a}(t)+\hat{b}(t)k]\hat{c}(t+k)$

# ARIMA 季节模型

- ARIMA 加法模型
  - 季节加法模型：$x_t = S_t + T_t + I_t$
  - 模型结构：$\nabla_S \nabla^d x_t = \dfrac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$
  - 记为 $\text{ARIMA}(p,(d,S),q)$ 或 $\text{ARIMA}(p,d,q) \times (0,1,0)_S$
- ARIMA 乘法模型
  - 模型结构：$\nabla^d \nabla_S^D x_t = \dfrac{\Theta(B)\Theta_S(B)}{\Phi(B)\Phi_S(B)} \varepsilon_t$
  - 记为 $\text{ARIMA}(p,d,q) \times (P,D,Q)_S$

- 拟合结果分析

N 是序列长度；NRESID 是非缺失数据个数；DF 是拟合模型自由度；

WEIGHT1 是平滑系数 $\alpha$ 的值；WEIGHT2 是平滑系数 $\beta$ 的值；

WEIGHT3 是平滑系数 $\gamma$ 的值；SIGMA 是残差标准差；

CONSTANT 是该序列时间趋势模型的常数或截距参数的估计；

LINEAR 是该序列时间趋势模型的线性或斜率参数的估计；

S_1_1 是第一季度季节指数；S_1_2 是第二季度季节指数；

S_1_3 是第三季度季节指数；S_1_4 是第四季度季节指数；

SST 是总误差平方和；SSE 是残差平方和；MSE 是均方误差；

RMSE 是均方误差开根号；MAPE 是平均绝对百分数误差；

MPE 是平均百分误差；MAE 是平均绝对误差；

ME 是平均误差；RSQUARE 是拟合 $R^2$