三、ARMA 模型的性质

目录

AR 模型

- AR 模型的定义
  - AR(p) 的定义：$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \iff \Phi(B)x_t = \varepsilon_t$
  - 限制条件：$\phi_p \neq 0$，$E(\varepsilon_t) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0(s \neq t)$，$E(x_s\varepsilon_t) = 0(s < t)$
  - 延迟算子 B：$x_{t-i} = B^i x_t$，$B^0 = 1$
  - p 阶自回归系数多项式：$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$

AR 模型

- AR 模型的平稳性的判别
  - 特征根判别：

    平稳 $\iff \forall$ 特征根 $|\lambda_i| < 1$
  - 平稳域判别：

    AR(1)：平稳 $\iff |\phi_1| < 1$

    AR(2)：平稳 $\iff |\phi_2| < 1, \phi_2 \pm \phi_1 < 1$

AR 模型

- Green 函数
  - 定义：$x_t = G_0\varepsilon_t + G_1\varepsilon_{t-1} + \cdots$
  - AR(1) 的 Green 函数：$G_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \phi_1^j, & j \geq 1 \end{cases}$
  - AR(p) 的 Green 函数：$G_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \sum_{k=1}^{j} \phi_k' G_{j-k}, & j \geq 1 \end{cases}$,

    其中 $\phi_k' = \begin{cases} \phi_k, & k \leq p \\ 0, & k > p \end{cases}$

AR 模型

- 平稳 AR 模型的统计性质
  - 均值：$\mu = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$
  - 方差：$\mathrm{Var}(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 \sigma_\varepsilon^2$

    AR(1)：$\mathrm{Var}(x_t) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$

    AR(2)：$\mathrm{Var}(x_t) = \dfrac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$

AR 模型

- 平稳 AR 模型的统计性质
  - 自协方差函数：$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p}$

    AR(1)：$\gamma_k = \dfrac{\phi_1^k \sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$

    AR(2)：$\begin{cases} \gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)} \\ \gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2} \\ \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \end{cases}$

AR 模型

- 平稳 AR 模型的统计性质
  - 自相关系数：$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}$

    AR(1)：$\rho_k = \phi_1^k$

    AR(2)：$\begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & k=1 \\ \phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}, & k\geq 2 \end{cases}$

    拖尾性：ρ_k 不会在 $k > k_0$ 后恒为 0

AR 模型

- 平稳 AR 模型的统计性质
  - 偏自相关系数：$\phi_{kk}=\dfrac{E[(x_t-\hat{E}x_t)(x_{t-k}-\hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k}-\hat{E}x_{t-k})^2]}$

    AR(1)：$\phi_{kk}=\begin{cases}\phi_1, & k=1\\ 0, & k\geq 2\end{cases}$

    AR(2)：$\phi_{kk}=\begin{cases}\frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & k=1\\ \phi_2, & k=2\\ 0, & k\geq 3\end{cases}$

    p 阶截尾性：$\phi_{kk}=0(\forall k>p)$

MA 模型

- MA 模型的定义
  - MA(q) 的定义：$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - -\theta_q \varepsilon_{t-q} \iff x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$
  - 限制条件：$\theta_q \neq 0$，$E(\varepsilon_t) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 (s \neq t)$
  - q 阶移动平均系数多项式：$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$
- MA 模型的统计性质
  - 均值：$E(x_t) = \mu$
  - 方差：$\mathrm{Var}(x_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$

MA 模型

- MA 模型的统计性质
  - 自协方差函数 (q 阶截尾)：$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2, & k=0 \\ \left(-\theta_k + \sum\limits_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{k+i}\right)\sigma_\varepsilon^2, & 1 \le k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}$
  - 自相关系数 (q 阶截尾)：$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{k+i}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2}, & 1 \le k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}$

MA 模型

- MA 模型的统计性质
  - 自相关系数 (q 阶截尾)：

$$\text{MA}(1)\text{：}\ \rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k=1 \\ 0, & k\geq 2 \end{cases}$$

$$\text{MA}(2)\text{：}\ \rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=1 \\ \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=2 \\ 0, k\geq 3 \end{cases}$$

MA 模型

- MA 模型的可逆性判别和逆函数
  - 可逆性条件：可逆 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 特征根 $|\lambda_i| < 1$

    AR(1)：可逆 $\Longleftrightarrow$ $|\theta_1| < 1$

    AR(2)：可逆 $\Longleftrightarrow$ $|\theta_2| < 1, \theta_2 \pm \theta_1 < 1$
  - 逆函数：$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \theta_k' I_{j-k}, \quad j \geq 1 \end{cases}$，其中 $\theta_k' = \begin{cases} \theta_k, & k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$
  - AR(1) 的偏自相关系数：$\phi_{kk} = \dfrac{-\theta_1^k}{\sum\limits_{j=0}^{k} \theta_1^{2j}}$
  - MA(q) 偏自相关系数的拖尾性

ARMA 模型

- ARMA 模型的定义
  - ARMA(p,q) 的定义：

    $x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \Longleftrightarrow$

    $\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$
  - 假定条件：$\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$，$E(\varepsilon_t) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 (s \neq t)$,

    $E(x_s \varepsilon_t) = 0 (s < t)$
  - 平稳性同 AR 模型
  - 可逆性同 MA 模型

ARMA 模型

- ARMA 模型的 Green 函数与逆函数
  - $\phi'_j = \begin{cases} \phi_j, & 1 \le j \le p \\ 0, & j > p \end{cases}$，$\theta'_k = \begin{cases} \theta_k, & 1 \le k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}$
  - Green 函数：$\begin{cases} G_0 = 1 \\ G_k = \sum_{j=1}^{k} \phi'_j G_{k-j} - \theta'_k, & k \ge 1 \end{cases}$
  - 逆函数：$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_k = \sum_{j=1}^{k} \theta'_j I_{k-j} - \phi'_k, & k \ge 1 \end{cases}$

ARMA 模型

- ARMA 模型的统计性质
  - 均值：$E(x_t)=\dfrac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$
  - 自协方差函数：$\gamma_k=\sigma_\varepsilon^2\sum\limits_{i=0}^{\infty}G_iG_{i+k}$
  - 自相关系数 (拖尾性)：$\rho_k=\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{\infty}G_jG_{j+k}}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}G_j^2}$
  - 偏自相关系数：拖尾性