《数理金融学》部分习题参考答案

答案仅供参考。

目录

第一章　基础知识

1. 考虑下列定义于资产 X 上的效用函数为风险厌恶型投资者的效用函数。

   (1) $U(X)=\ln(X)$

   (2) $U(X)=-\dfrac{1}{X}$

   证:

   (1) $U'(X)=\dfrac{1}{X}\geqslant 0, U''(X)=-\dfrac{1}{X^2}\leqslant 0, \forall X>0$, 不等号恒成立，故这是风险厌恶型投资者的效用函数。

   (2) $U'(X)=\dfrac{1}{X^2}\geqslant 0, U''(X)=-\dfrac{2}{X^3}\leqslant 0, \forall X\neq 0$, 不等号恒成立，故这是风险厌恶型投资者的效用函数。

2. 若下列效用函数为风险厌恶型投资者的效用函数，求 a 的取值范围。

   (1) $U(X)=-X^{-a}$

   (2) $U(X)=-\mathrm{e}^{-aX}$

   (3) $U(X)=\dfrac{X^a}{a}$

   解:

   (1) $U'(X)=\dfrac{a}{X^{a+1}}\geqslant 0, U''(X)=-\dfrac{a(a+1)}{X^{a+2}}\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0$，而 $a=0$ 时，$U(X)=-1, U'(X)=0, U'(X)=0$ 不满足至少存在一点使得不等号成立，故 $a>0$.

   (2) $U'(X)=a\mathrm{e}^{-aX}\geqslant 0, U''(X)=-a^2\mathrm{e}^{-aX}\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0$, 而 $a=0$ 时, $U(X)=-1, U'(X)=0, U'(X)=0$ 不满足至少存在一点使得不等号成立，故 $a>0$.

   (3) $U'(X)=X^{a-1}\geqslant 0, U''(X)=(a-1)X^{a-2}\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant 1$，而 $a=1$ 时，$U(X)=X, U'(X)=1, U'(X)=0$ 不满足至少存在一点使得不等号成立，故 $a<1$.

3. 考虑以下两种投资 A 和 B:

A		B	
收益	概率	收益	概率
2	0.2	3	0.6
3	0.3	6	0.4
5	0.5		

   分别利用三个随机优势准则分析哪种投资更优，并说明原因。

   解:

   (1) FSD 准则：写出两者的分布函数：

$$F_A(r)=\begin{cases}0, & r<2\\ 0.2, & 2\leqslant r<3\\ 0.5, & 3\leqslant r<5\\ 1, & r\geqslant 5\end{cases}, F_B(r)=\begin{cases}0, & r<3\\ 0.6, & 3\leqslant r<6\\ 1, & r\geqslant 6\end{cases}$$

当 $2 \leqslant r < 3$ 和 $5 \leqslant r < 6$ 时，B 更优，当 $3 \leqslant r \leqslant 5$ 时，A 更优。

(2) SSD 准则：写出两者分布函数的分布函数：

$$F_{FA}(r) = \begin{cases} 0, & r < 2 \\ 0.2, & 2 \leqslant r < 3 \\ 0.7, & 3 \leqslant r < 5 \\ 1.7, & r \geqslant 5 \end{cases}, F_{FB}(r) = \begin{cases} 0, & r < 3 \\ 0.6, & 3 \leqslant r < 6 \\ 1.6, & r \geqslant 6 \end{cases}$$

B 更优。

(3) TSD 准则：写出两者分布函数的分布函数的分布函数：

$$F_{FFA}(r) = \begin{cases} 0, & r < 2 \\ 0.2, & 2 \leqslant r < 3 \\ 0.9, & 3 \leqslant r < 5 \\ 2.6, & r \geqslant 5 \end{cases}, F_{FFB}(r) = \begin{cases} 0, & r < 3 \\ 0.6, & 3 \leqslant r < 6 \\ 2.2, & r \geqslant 6 \end{cases}$$

而 $\mu_A = 3.8 \leqslant \mu_B = 4.2$，则无法判断 A、B 的优劣。

4. 假设一个投资方案 A 的分布函数由以下函数给出，描述 FSD 准则。

$$F_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.1, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0.8, & 2 \leqslant x < 4 \\ 1, & x \geqslant 4 \end{cases}$$

假设另外三个投资方案 B、C 和 D 的收益分布函数由以下函数给出，分析投资机会 A 优于以下哪个投资方案？

$$F_B(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.2, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0.7, & 2 \leqslant x < 4 \\ 1, & x \geqslant 4 \end{cases} \quad F_C(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.1, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0.6, & 2 \leqslant x < 4 \\ 1, & x \geqslant 4 \end{cases} \quad F_D(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.1, & 1 \leqslant x < 3 \\ 0.6, & 3 \leqslant x < 4 \\ 1, & x \geqslant 4 \end{cases}$$

解:

描述 FSD 准则：对于投资机会 A 与其他任意投资机会 Z，A 优于 Z 的充要条件是 $\forall x \in R$，$F_A(x) \leqslant F_Z(x)$(不等号至少在一点上成立)。

当 $1 \leqslant x < 2$ 时，A 优于 B。

5. 假设三个投资方案 A、B 和 C 的收益分布函数均服从正态分布，其期望和标准差由以下表格给出：

投资方案	期望 (μ)	标准差 (σ)
A	12%	4%
B	10%	3%
C	5%	1%

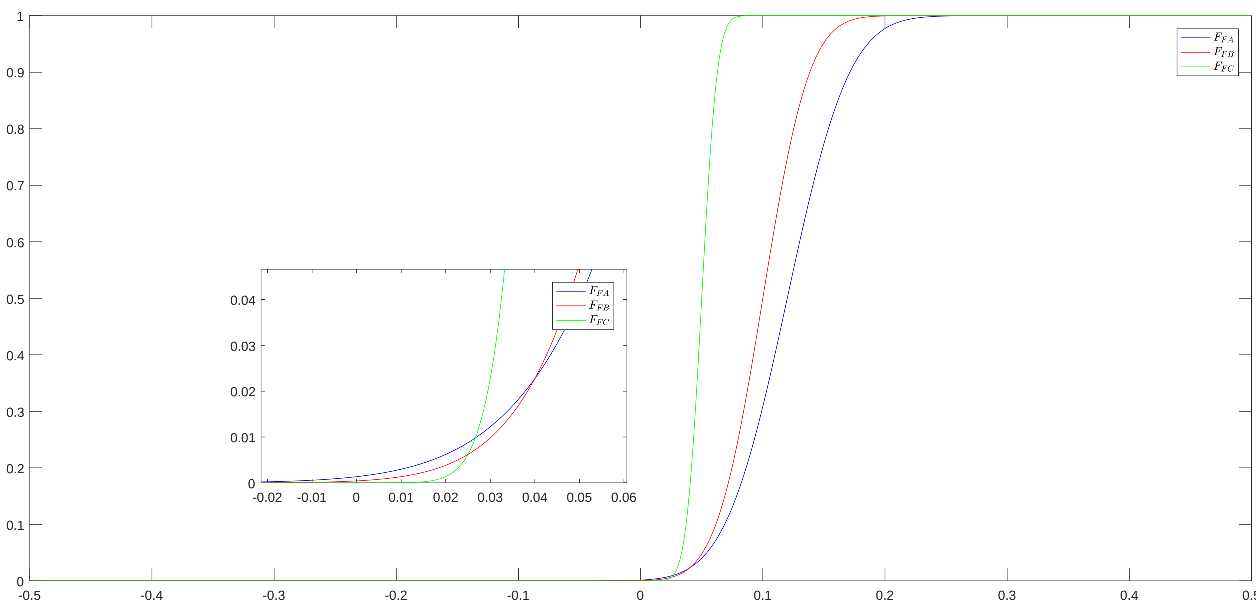
利用 SSD 准则判断这三个投资机会之间的优劣，并说明原因。

解:

利用标准正态函数计算分布函数，$\forall x$,

$$\begin{aligned}
F_{FA}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.04\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-0.12)^2}{0.0032}\right] \mathrm{d}x = \Phi\left(\frac{x-0.12}{0.04}\right), \\
F_{FB}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.03\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-0.1)^2}{0.0018}\right] \mathrm{d}x = \Phi\left(\frac{x-0.1}{0.03}\right), \\
F_{FC}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0.02\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-0.05)^2}{0.0002}\right] \mathrm{d}x = \Phi\left(\frac{x-0.05}{0.01}\right).
\end{aligned}$$

可以大致画出曲线：



则当 $x < 0.025$ 时，C 更优，当 $0.025 < x < 0.04$ 时，B 更优，当 $x > 0.04$ 时，A 更优。

Matlab 绘图命令如下：

```
x = -0.5:0.001:0.5;
ffa = normcdf(x, 0.12, 0.04);
ffb = normcdf(x, 0.1, 0.03);
ffc = normcdf(x, 0.05, 0.01);
plot(x, ffa, 'b');
hold on;
plot(x, ffb, 'r');
plot(x, ffc, 'g');
```

第二章　组合投资理论

1. 投资组合的标准差一定小于每一项构成资产的标准差吗？为什么？

   解:

   不一定。根据式 (2-7)，$\sigma^2(R_p)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$，显然这与 $x_i,x_j,\rho_{ij},\sigma_i,\sigma_j$ 都有关。或者举个例子，假设两种股票 $\sigma_1=0.2,\sigma_2=0.4$，相关系数为 1，$X=(0.5,0.5)^{\mathrm{T}}$，则 $\sigma(R_p)=0.5\times0.2+0.5\times0.4=0.3>0.2$。

2. 什么是资本市场上投资者对于股票投资收益的同质预期，这一假设对于资产配置分析起到什么作用？

   解:

   同质预期：所有投资机会的期望收益值和方差 (协方差) 均有相同的估计，是资本资产定价模型 (CAPM 模型) 的模型假设之一。

   作用：为资产配置分析提供了新的模型，在均值-方差模型的基础上拓展出了资本资产定价模型。

3. 什么是资产配置？马科维茨均值-方差模型怎样适合资产配置活动的？

   解:

   资产配置：根据投资需求将投资资金在不同资产类别之间进行分配，通常是将资产在低风险、低收益证券与高风险、高收益证券之间进行分配。

   均值-方差模型的基本假设是投资者从根本上讲都是回避风险的，这一假定意味着投资者若接受高风险的话，则必定要有高回报率来补偿。所以，如果在具有相同回报率的两个证券之间进行选择的话，则任何投资者都将会选择风险较小的，从而舍弃风险较大的，这一假定意味着投资者要使期望效用最大化，而不仅仅是使期望的回报率最大化。

4. 若一投资组合包含 A、B 两种股票，股票 A 的期望收益率为 14%，标准差为 10%；股票 B 的期望收益率为 18%，标准差为 16%，两种股票的相关系数为 0.4，投资股票 A 的权重为 40%，B 的权重为 60%，则该投资组合的期望收益率与标准差分别是多少？

   解:

$$
\begin{aligned}
&E(R_p)=0.4\times14\%+0.6\times18\%=16.4\%,\\
&\sigma(R_p)=\sqrt{0.4^2\times(10\%)^2+2\times0.4\times0.6\times0.4\times10\%\times16\%+0.6^2\times(16\%)^2}=11.78\%.
\end{aligned}
$$

5. 某企业有甲、乙两个独立性投资项目，计划投资额均为 1000 万元，其收益率的概率分布如下表所示，计算两个项目的期望收益率、标准差，以及投资组合的期望收益率和标准差。

市场状况	概率	甲项目/%	乙项目/%
好	0.3	20	30
一般	0.5	10	10
差	0.2	5	−5

解:

$$
\begin{cases}E(\text{甲})=12\%,\\ \sigma(\text{甲})=\dfrac{\sqrt{31}}{100}\approx5.6\%\end{cases},\quad
\begin{cases}E(\text{乙})=13\%,\\ \sigma(\text{乙})=\dfrac{\sqrt{39}}{50}\approx12.5\%\end{cases}
$$

由于甲、乙是独立的且投资数额相同，所以其相关系数为 0，权重均为 50%，则

$$E(R_p) = 0.5 \times 12\% + 0.5 \times 13\% = 12.5\%,$$

$$\sigma(R_p) = \sqrt{0.5^2 \times (5.6\%)^2 + 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0 \times 5.6\% \times 12.5\% + 0.5^2 \times (12.5\%)^2} = \frac{\sqrt{187}}{200} \approx 6.8\%.$$

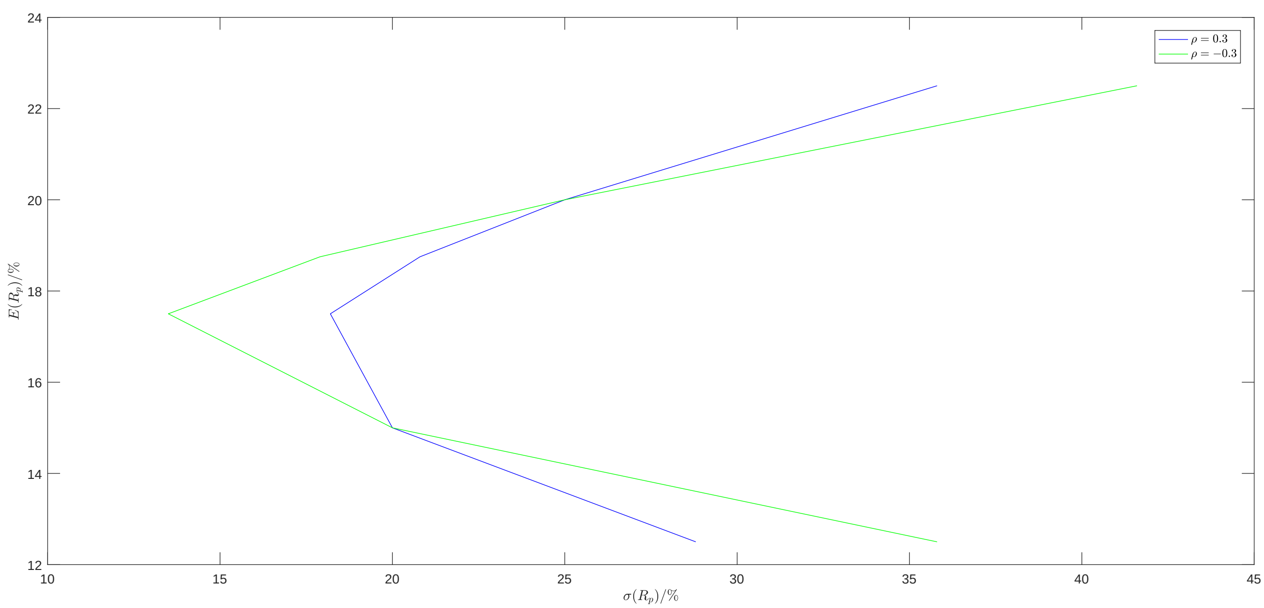
6. 投资组合中有两只构成股票，股票 A 的期望收益率为 15%，标准差为 20%，股票 B 的期望收益率为 20%，标准差为 25%。如果两只股票的相关系数为 0.3，制作使用两只股票进行组合的可能组合曲线。如果相关系数变为 -0.3，再次制作曲线，并进行比较。

解:

可以计算得到两种情况下，投资组合的期望收益率和标准差

$\rho = 0.3$			$\rho = -0.3$		
α	$E(R_p)$	$\sigma(R_p)$	α	$E(R_p)$	$\sigma(R_p)$
-0.5	22.5%	35.8%	-0.5	22.5%	41.6%
0	20%	25%	0	20%	25%
0.25	18.75%	20.8%	0.25	18.75%	17.9%
0.5	17.5%	18.2%	0.5	17.5%	13.5%
1	15%	20%	1	15%	20%
1.5	12.5%	28.8%	1.5	12.5%	35.8%

曲线如下：



比较：$\rho = -0.3$ 比 $\rho = 0.3$ 凸得更厉害。

Matlab 绘图命令如下：

```
y = [22.5, 20, 18.75, 17.5, 15, 12.5];
x1 = [35.8, 25, 20.8, 18.2, 20, 28.8];
```

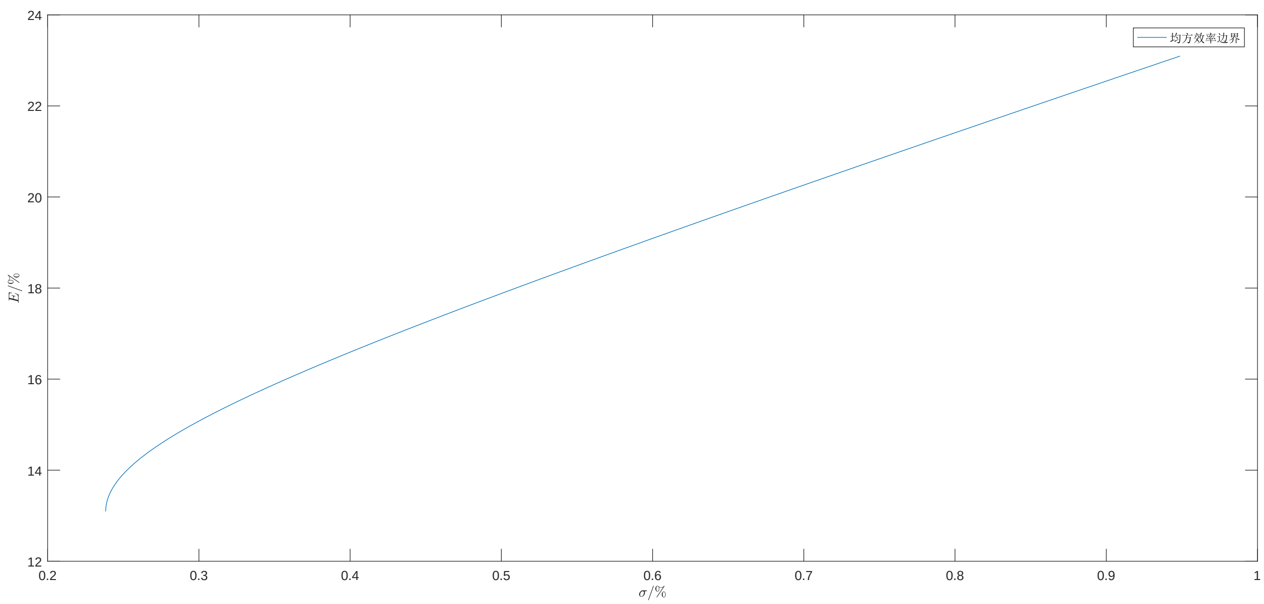
```
x2 = [41.6, 25, 17.9, 13.5, 20, 35.8];
plot(x1, y, 'b');
hold on;
plot(x2, y, 'g');
```

7. 依据下表求均方效率边界，至少得到 10 个点，并画图。(注意下表的划分与书本不同，书本有误)

证券	协方差/%					收益率/%
1	2.30	0.93	0.62	0.74	−0.23	15.10
2	0.93	1.40	0.22	0.56	0.26	12.50
3	0.62	0.22	1.80	0.78	−0.27	14.70
4	0.74	0.56	0.78	3.40	−0.56	9.02
5	−0.23	0.26	−0.27	−0.56	2.60	17.68

解:

图如下:



Matlab 绘图命令如下:

```
S = [2.3, 0.93, 0.62, 0.74, -0.23; 0.93, 1.40, 0.22, 0.56, 0.26; 0.62, 0.22,
    1.8, 0.78, -0.27; 0.74, 0.56, 0.78, 3.4, -0.56; -0.23, 0.26, -0.27, -0.56,
    2.6];
r = [15.1; 12.5; 14.7; 9.02; 17.68];
a = r' * S * r;
b = ones(1, 5) * S * r;
c = ones(1, 5) * S * ones(5, 1);
d = a * c - b ^ 2;
```

```
y = b / c : 0.01 : b / c + 10;
x = sqrt(c / d * (y - b / c) .^ 2 + 1 / c);
plot(x, y);
legend('均方效率边界');
```

8. 三个证券的期望收益率、收益标准差和相关系数见下表：

证券	预期收益率	标准差	相关系数
A	0.08	0.20	0.18
B	0.12	0.25	0.20
C	0.15	0.15	−0.15

求绝对最小方差资产组合的期望收益率和标准差，该资产组合系数是多少？

解:

$$V=\begin{pmatrix}0.2^2 & 0.2\times0.25\times(-0.15) & 0.2\times0.15\times0.2\\ 0.2\times0.25\times(-0.15) & 0.25^2 & 0.25\times0.15\times0.18\\ 0.2\times0.15\times0.2 & 0.25\times0.15\times0.18 & 0.15^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.04 & -0.0075 & 0.006\\ -0.0075 & 0.0625 & 0.00675\\ 0.006 & 0.00675 & 0.0225\end{pmatrix}$$

则

$$X=\frac{V^{-1}i}{i'V^{-1}i}=(0.3174,0.2103,0.4723)^{\mathrm{T}}.$$

则向 A 证券投资 31.74%，向 B 证券投资 21.03%，向 C 证券投资 47.23%。

$$\begin{aligned}E(R_p)&=0.3174\times0.08+0.2103\times0.12+0.4723\times0.15=0.121473,\\ \sigma^2(R_p)&=0.3174^2\times0.2^2+0.2103^2\times0.25^2+0.4723^2\times0.15^2\\ &\quad+2\times0.3174\times0.2103\times(-0.15)\times0.2\times0.25\\ &\quad+2\times0.3174\times0.4723\times0.2\times0.2\times0.15\\ &\quad+2\times0.2103\times0.4723\times0.18\times0.25\times0.15=0.01435,\\ \sigma(R_p)&=0.1198.\end{aligned}$$

9. 对于上题中的三个证券构成的资产组合，假设其期望收益为 18%，在所有有效资产组合中，计算方差最小的资产组合。

解:

由上题可知，

$$A=\begin{pmatrix}0.08 & 0.12 & 0.15\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}V^{-1}\begin{pmatrix}0.08 & 1\\ 0.12 & 1\\ 0.15 & 1\end{pmatrix},$$

$$X=V^{-1}\begin{pmatrix}0.08 & 1\\ 0.12 & 1\\ 0.15 & 1\end{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix}0.18\\ 1\end{pmatrix}=(-0.4306,0.0047,1.4259)^{\mathrm{T}}.$$

则向 A 证券投资 −43.06%，向 B 证券投资 0.47%，向 C 证券投资 142.59%。

10. 假设市场证券组合的期望收益为 23%，市场利率为 7%。市场证券组合的标准差为 32%。假设市场是有效的，请给出资本市场线的方程。考虑一个期望收益为 39% 的有效边界上的资产组合，计算该资产组合的标准差。如用 1000 元进行投资，该如何投资才能得到收益？若投资 300 元用于无风险证券，700 元用于市场证券组合，那么年底的收益为多少？

解:

由题知：$i = 0.07, r_m = 0.23, \sigma_m = 0.32$，则

$$r = 0.07 + \frac{0.23 - 0.07}{0.32}\sigma = 0.07 + 0.5\sigma,$$

故资本市场线方程为 $r = 0.07 + 0.5\sigma$.

取 $r = 0.39$，则

$$0.39 = 0.07 + 0.5\sigma \Rightarrow \sigma = 0.64,$$

故该资产组合的标准差 $\sigma = 0.64$.

设 1000 元中 x 元用于市场证券组合，$1000 - x$ 元用于无风险证券，而本题无风险证券的期望收益为 7%，标准差为 0，由于要得到收益，即期望收益要达到 0，则

$$E(R_p) = \frac{x}{1000} \times 0.23 + \frac{1000 - x}{1000} \times 0.07 = 0 \Rightarrow x = -437.5.$$

故用 1000 元，无论如何投资，都能得到收益。

若投资 300 元用于无风险证券，700 元用于市场证券组合，则

$$E(R_p) = 0.3 \times 0.23 + 0.7 \times 0.07 = 0.118 \Rightarrow R_p = 0.118 \times 1000 = 118.$$

故年底的收益为 118 元。

第三章　资本资产定价模型

1. 请比较证券市场线和资本市场线。

   解:

   资本市场线 (CML) 与证券市场线 (SML)，都描述了证券投资收益与风险之间的关系，横轴都是风险，纵轴都是收益，两条线都向右上方倾斜，表明高风险高收益。但仔细观察，发现它们在适用范围变量选择和应用作用等方面存在着区别。

   (1) 适用范围不同。SML 描述的是任何一种资产或者资产组合的期望收益与系统风险之间的关系，它是一个有效市场给出的定价，但实际证券的收益可能偏离 SML；而 CML 则描述有效资产组合与总风险的关系，任何资产 (组合) 的期望收益不可能高于 CML。

   (2) 二者的风险变量选择不同。SML 的横坐标是系统风险 β，考虑的仅是总风险的一部分；而 CML 的横坐标是总风险 σ，其中既包括系统风险又包括非系统风险。

   (3) 二者在应用上有所不同。SML 作为 CAPM 模型的图像形式，主要应用于资产定价，计算证券的期望收益；而 CML 主要用于确定市场组合，构造投资组合，因此 CML 也称为有效的资本配置线。

2. 如果一种证券位于证券市场直线的上方，那它是被高估了还是低估了？

   解:

   位于证券市场线上方，所以其期望收益应更高，但人们把它的价值定在证券市场线在该 β 值对应的期望收益上，所以是被低估了。

3. 如果无风险收益率和市场预期收益率分别是 6% 和 11%，某 β 值为 1.1 的证券预期收益率是多少？

   解:

   由题知：$i = 6\%, E(R_m) = 11\%, \beta_j = 1.1$，则

   $$E(R_p) = i + [E(R_m) - i]\beta_j = 6\% + (11\% - 6\%) \times 1.1 = 11.5\%.$$

   故证券预期收益率是 11.5%。

4. 设无风险利率为 9%，期望的市场回报率为 15%。试画出证券市场线，并指出进取型的证券位于何处，以及防御型的证券将位于何处？

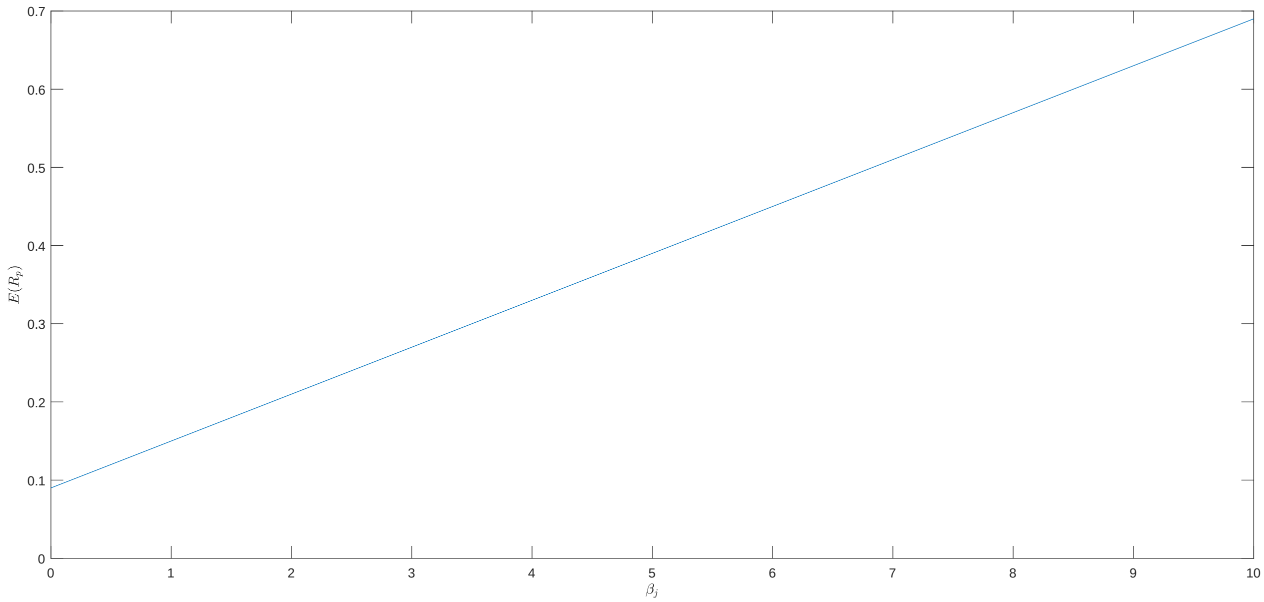
   解:

   由题知：$i = 9\%, E(R_m) = 15\%$，则

   $$E(R_p) = i + [E(R_m) - i]\beta_j = 0.09 + 0.06\beta_j,$$

   证券市场线方程为 $E(R_p) = 0.09 + 0.06\beta_j$。

   证券市场线图如下：



进取型证券 $\beta_j > 1$，其风险大于市场证券组合的风险，期望收益也大于市场证券组合的期望收益 $E(R_m)$，其直线位于证券市场线的上方，被低估了；
防御型证券 $\beta_j < 1$，其风险小于市场证券组合的风险，期望收益也小于市场证券组合的期望收益 $E(R_m)$，其直线位于证券市场线的下方，被高估了。
Matlab 绘图命令如下：

```
x = 0:0.001:10;
y = 0.09 + 0.06 * x;
plot(x, y);
```

5. 证券 L 的 β 值为 0.70，而证券 K 的 β 值为 1.30。运用上题的有关证券市场直线的数据，计算各证券的期望回报率。

解:

由上题：$i = 9\%, E(R_m) = 15\%$，则证券 L 的期望回报率为

$$E(R_L) = 0.09 + 0.06 \times 0.7 = 13.2\%,$$

故证券 L 的期望回报率为 13.2%。
证券 K 的期望回报率为

$$E(R_K) = 0.09 + 0.06 \times 1.3 = 16.8\%,$$

故证券 K 的期望回报率为 16.8%。

6. 证券 A、B 的预期收益率和 β 值见下表：

证券	预期收益率/%	β 值
A	14.80	16.30
B	1.24	1.82

如果市场收益率是 12.5%，无风险收益率是 3.6%，哪一只证券更值得购买？

解:

由 CAPM 模型，A、B 两证券在市场均衡时的期望收益率为

$$E(R_A) = 3.6\% + (12.5\% - 3.6\%) \times 16.3 = 148.67\% > 14.80\%,$$
$$E(R_B) = 3.6\% + (12.5\% - 3.6\%) \times 1.82 = 19.798\% > 1.24\%.$$

显然，A、B 证券实际投资的期望收益率均低于市场均衡时的期望收益率，且 B 证券两者的期望收益率之差更接近 0，则 B 证券更值得购买。

7. 用实证分析检验 CAPM 模型。

   略.

8. 假设市场证券组合的期望收益为 9%，标准差为 30%，市场利率为 3%，求证券市场线的方程，假设证券 A 的 β 值为 0.6，根据 CAPM 模型计算该证券的期望收益。若证券 B 的标准差为 0.6，其与市场证券组合的相关系数为 0.25，根据 CAPM 模型，计算该证券的期望收益率。

   解:

   由题知：$i = 3\%, E(R_m) = 6\%$，则

   $$E(R_p) = i + [E(R_m) - i]\beta_j = 0.03 + 0.03\beta_j,$$

   故证券市场线方程为 $E(R_p) = 0.03 + 0.03\beta_j$。

   证券 A 的 $\beta_A = 0.6$，则

   $$E(R_A) = 0.03 + 0.03 \times 0.6 = 4.8\%,$$

   故证券 A 的期望收益为 4.8%。

   证券 B 的 $\beta_B = \dfrac{\rho_{Bm}\sigma_B}{\sigma_m} = \dfrac{0.25 \times 0.6}{0.3} = 0.5$，则

   $$E(R_B) = 0.03 + 0.03 \times 0.5 = 4.5\%,$$

   故证券 B 的期望收益为 4.5%。

9. 假设股票 A 的风险为 0.32，β 值为 1.42，而股票 B 的风险为 0.68，β 值为 0.75。哪个股票的总风险更大呢？哪个股票的市场风险更大？假设市场利率为 2%，市场期望收益率为 10%，哪个公司(公司改为股票)的价值更高？

   解:

   由题知：$\sigma_A^2 = 0.32, \beta_A = 1.42, \sigma_B^2 = 0.68, \beta_B = 0.75$，则

   $$\sigma^2(R_A) = \beta_A^2\sigma_A^2 = 0.32 \times 1.42^2 = 0.645248,$$
   $$\sigma^2(R_B) = \beta_B^2\sigma_B^2 = 0.68 \times 0.75^2 = 0.3825.$$

   故股票 A 的总风险、市场风险更大。

   $$E(R_A) = 0.02 + (0.1 - 0.02) \times 1.42 = 0.1336,$$
   $$E(R_B) = 0.02 + (0.1 - 0.02) \times 0.75 = 0.08.$$

   故股票 A 的价值更高。

第四章　Ross 套利定价模型

1. 套利定价模型在形式上与因子模型是否一致?

   解:

   套利定价模型在形式上与因子模型是理论一致的，套利定价模型是将因子模型与无套利条件相结合从而得到期望收益和风险之间的关系的模型。

2. 请比较套利定价模型和 CAPM 模型，两个模型得出的共同结论是什么?

   解:

   比较：

   (1) 模型的假定条件不同

   APT 假定证券收益率的产生同某些共同因子有关，但这些共同因子到底是什么以及有多少个，模型并没有事先人为地加以指定，而 CAPM 事先假定证券收益率同市场证券组合的收益率有关。此外，CAPM(无论是简化的 CAPM 还是扩展的 CAPM) 的一个基本假定是投资者都以期望收益率和标准差作为分析基础，并按照收益-风险准则选择投资方案，而 APT 无此假定。

   (2) 建立模型的出发点不同

   APT 考察的是当市场不存在无风险套利而达到均衡时，资产如何均衡定价。而 CAPM 考察的是当所有投资者都以相似的方法投资，市场最终调节到均衡时，资产如何定价。

   (3) 描述形成均衡状态的机理不同

   当市场面临证券定价不合理而产生价格压力时，按照 APT 的思想，即使是少数几个投资者的套利行为也会使市场尽快地重新恢复均衡。而按 CAPM 的思想，所有投资者都将改变其投资策略，调整他们选择的投资组合，他们共同行为的结果才促使市场重新回到均衡状态。

   (4) 风险的来源不同

   在 CAPM 中，证券的风险只与市场组合的 β 相关，它只给出了市场风险大小，而没有表明风险来自何处。APT 承认有多种因素影响证券价格，从而扩大了资产定价的思考范围 (CAPM 认为资产定价仅有一个因素)，也为识别证券风险的来源提供了分析工具。

   (5) 定价范围及精度不同

   CAPM 是从它的假定条件经逻辑推理得到的，它提供了关于所有证券及证券组合的期望收益率-风险关系的明确描述，只要模型条件满足，以此确定的任何证券或证券组合的均衡价格都是准确的。而 APT 是从不存在无风险套利的角度推出的，由于市场中有可能存在少数证券定价不合理而整个市场处于均衡的状态 (证券数少到不足以产生无风险套利)，所以 APT 提供的均衡定价关系有可能对少数证券不成立。换言之，在满足 APT 的条件的情况下，用 APT 的证券或证券组合确定均衡价格，对少数证券的定价可能出现偏差。

   共同结论：资本市场的均衡关系是固定的。

3. 假设你用一个双因子模型估计股票 z 的回报率，表达式如下：

$$r_z = 0.5 + 0.8R_m + 0.2R_L + e_z$$

   其中，R_m 是市场指数的回报率，L 代表未料到的流动性的变化。

(1) 如果市场回报率是 10%，未料到的流动性的变化是 3%，那么股票 z 的回报率是多少？

(2) 如果 L 不变，R_m 下降 5%，那么股票 z 的回报率将怎样变化？

解:

(1) 由题知：$R_m = 10\%, R_L = 3\%$，则

$$r_z = 0.5 + 0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.03 = 58.3\%,$$

故股票 z 的回报率是 58.3%。

(2) 由题知：$R_m = -5\%, R_L = 0$，则

$$r_z = 0.5 + 0.8 \times (-0.05) + 0.2 \times 0 = 46\%,$$

故股票 z 的回报率下降 4%。

4. 假定市场可以用下面的三种系统风险及相应的风险溢价进行描述。

风险因素	β 值	风险因素价格(%)
宏观因素 F_1	0.5	6
宏观因素 F_2	0.3	8
宏观因素 F_3	1.2	3

问：

(1) 如果无风险收益率为 3%，则合理定价下该股票的期望收益率为多少？

(2) 假定三种宏观因素的市场预测值分别为 5%，3% 和 2%, 而实际值是 4%，6% 和 0，则该股票修正后的收益率为多少？

解:

(1) $E(R_p) = 3\% + 0.5 \times 6\% + 0.3 \times 8\% + 1.2 \times 3\% = 12\%$，故该股票的期望收益率为 12%。

(2) 各个因素的预测值与实际值不相等，这些非预期变化对资产收益率的影响为:

$$0.5 \times (4\% - 5\%) + 0.3 \times (6\% - 3\%) + 1.2 \times (0 - 2\%) = -2\%,$$

则修正后的收益率为 $12\% - 2\% = 10\%$。

5. 考虑一个双因子模型，因子 a 和 b 对应的风险溢价分别为 4% 和 6%。股票 A 在因子 a 上的 β 为 1.2，在因子 b 上的 β 为 0.9。股票 A 的预期收益率是 16%。如果不存在套利机会，无风险收益率是多少？

解:

设无风险收益率为 i，由题意：$E(R_p) = i + 1.2F_1 + 0.9F_2 + \varepsilon$，则

$$16\% = i + 1.2 \times 4\% + 0.9 \times 6\% \Rightarrow i = 5.8\%,$$

故无风险收益率是 5.8%。

6. 考虑单因子套利定价模型，由三个证券组成的充分分散的资产组合的有关数据见下表。

证券	预期收益率/%	β 系数
A	10	1
B	9	2/3
C	4	0

根据以上数据，该资产组合是否存在套利机会？投资者应该如何制定套利策略？

解:

投资者使用这 3 种证券构成一个无套利投资组合的条件如下:

(1) 零投资。分别以 x_1, x_2, x_3 表示构成的无套利组合中各个证券的权重，则应满足如下方程：

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

(2) 无风险。分别以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 表示各个证券对某个因子的敏感度，投资组合对该因素的敏感度等于各证券敏感度的加权平均。

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$$

(3) 零收益。

$$x_1E(r_1) + x_2E(r_2) + x_3E(r_3) = 0$$

符合上述三个条件的投资组合为无套利组合。如果仅符合前两个条件，而组合的投资收益大于 0，则为套利组合。不妨设 $x_1 = t$，解由前两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} t + x_2 + x_3 = 0, \\ t + \dfrac{2}{3}x_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $x_2 = -1.5t, x_3 = 0.5t$，代入第三个条件，则

$$x_1E(r_1) + x_2E(r_2) + x_3E(r_3) = -1.23t$$

则只需 $t < 0$，就可以构造套利组合。不妨设 $x_1 = t = -0.1$，则 $x_2 = 0.15, x_3 = -0.05$，即存在套利组合 $(-0.1, 0.15, -0.05)$，期望收益率为 12.3%。比如购买 150 元证券 B，卖出 100 元证券 A、50 元证券 C，可以获利 123 元。

第五章　债券投资与期度分析

1. 假设市场利率为 10%，一个剩余期限还有 18 个月、息率为 7% 的债券 (每年付息两次，刚付完半年的利息)，求该债券价格。18 个月期的零息债券的到期收益率为多少？

   解:

   由题知：$i = 10\%, M = 1.5\text{年}, C = 7\%$，则

   $$p = 100 \times \frac{7\%}{10\%} \times \left[1 - \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^{-3}\right] + 100 \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^{-3} = 95.92,$$

   故该债券价格为 95.92 元。

   并且 $N = 3\text{期}$，则

   $$95.92 = 100 \times \frac{7\%}{r/2}\left[1 - \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{-3}\right] + 100 \times \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{-3} \Rightarrow r = 17.20\%,$$

   则该债券的到期收益率为 17.20%。

2. 一个 2 年期债券的息率为 8%，每年付息两次，债券的当前现金价格为 103 元，那么债券的收益率是多少？

   解:

   由题知：$N = 4\text{期}, C = 8\%$，则

   $$103 = 100 \times \frac{8\%}{r/2}\left[1 - \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{-4}\right] + 100\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{-4} \Rightarrow r = 14.22\%,$$

   则收益率是 7.11%。

3. 假设一个投资者在 2013 年 1 月 1 日购买了一个 5 年期息率为 8% 的债券，当时市场利率为 6%。该债券的面值为 100000 元，到期日为 2015 年 12 月 31 日。计算投资者购买之前的价格，假设债券 1 年付息一次。

   解:

   由题意：$i = 6\%, 2M = 2\text{年}, C = 8\%, V = 100000$，则

   $$P = \frac{8\% \times 100000}{6\%} \times \left[1 - (1 + 6\%)^{-2}\right] + 100000 \times (1 + 6\%)^{-2} = 340999.17,$$

   故投资者购买之前的价格为 340999.17 元。

4. 假设一个债券的收益率为 10%，计算一年期面值为 1000 元的零息债券的价格；2 年期面值为 1000 元的零息债券的价格；3 年期面值为 10000 元的零息债券的价格。

   解:

   若该债券 1 年付息一次，则

   $$p_1 = 1000(1 + 10\%)^{-1} = 909.09,$$
   $$p_2 = 1000(1 + 10\%)^{-2} = 826.45,$$
   $$p_3 = 10000(1 + 10\%)^{-3} = 7513.15.$$

故零息债券的价格分别为 909.09 元、826.45 元、7513.15 元。

若该债券半年付息一次，则

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1000(1+10\%/2)^{-2} = 907.03,\\
p_2 &= 1000(1+10\%/2)^{-4} = 822.70,\\
p_3 &= 10000(1+10\%/2)^{-6} = 7462.15.
\end{aligned}$$

故零息债券的价格分别为 907.03 元、822.70 元、7462.15 元。

5. 一个年收益率为 10% 的 3 年期债券，其息率为 10%(每年支付一次)，面值为 10000 元，计算该债券的价格。

解:

$$p = 10000 \times \frac{10\%}{10\%}[1-(1+10\%)^{-3}] + 10000(1+10\%)^{-3} = 10000,$$

故该债券的价格为 10000 元。

6. 一个年收益率为 12% 的 4 年期债券，其息率为 8%(每年支付一次)，面值为 10000 元，计算该债券的期度。

解:

先计算 $P(i)$，则

$$\begin{aligned}
P(i) &= \frac{800}{2i}\left[1-(1+i)^{-4}\right] + 10000(1+i)^{-4}\\
&= \frac{400}{i}\left[1-(1+i)^{-4}\right] + 10000(1+i)^{-4},\\
\frac{\mathrm{d}\,P(i)}{\mathrm{d}\,i} &= \frac{1600}{i(1+i)^5} - \frac{40000}{(1+i)^5} + \frac{400\left(\frac{1}{(1+i)^4}-1\right)}{i^2}.
\end{aligned}$$

期度为

$$\begin{aligned}
D(8\%) &= -\left.\frac{\mathrm{d}\,P(i)}{\mathrm{d}\,i}\right|_{i=8\%} \cdot \frac{1+8\%}{P(8\%)}\\
&= 3.76
\end{aligned}$$

故该债券的期度为 3.76 年。

7. 假设你接下来两年需要在年末支付每年 11700 元的学费。目前市场利率为 7%。计算这笔款项的现值和其期度。

解:

显然这笔款项是零息的，则

$$p = 11700(1+7\%)^{-2} = 10219.23,$$

故这笔款项的现值为 10219.23 元。计算 $P(i)$，则

$$\begin{aligned}
P(i) &= 11700(1+i)^{-2} = \frac{11700}{(1+i)^2},\\
\frac{\mathrm{d}\,P(i)}{\mathrm{d}\,i} &= -\frac{23400}{(1+i)^3}.
\end{aligned}$$

期度为

$$
\begin{aligned}
D(7\%) &= -\left.\frac{\mathrm{d}\,P(i)}{\mathrm{d}\,i}\right|_{i=7\%} \cdot \frac{1+7\%}{P(7\%)} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

这笔款项的期度为 2 年。

8. 计算以下四种债券的价格和期度。哪个债券对于市场利率的变动最为敏感?

证券	息率 (半年付息一次)/%	面值/元	期限/年	市场利率 (年利率)/%
A	10	1000	1.5	15
B	5	1000	1.5	15
C	0	1000	1.5	15
D	0	1000	1	15

解:
证券 A:

$$
\begin{aligned}
P_A(i) &= \frac{100}{i}\left[1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-3}\right]+1000\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-3}, \\
P_A(15\%) &= 934.99, \\
\frac{\mathrm{d}\,P_A(i)}{\mathrm{d}\,i} &= \frac{100\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}-1\right)}{i^2}-\frac{1500}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^4}+\frac{150}{i\left(\frac{i}{2}+1\right)^4}, \\
D_A(i) &= \frac{\left(\frac{i}{2}+1\right)\left(\frac{100\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}-1\right)}{i^2}-\frac{1500}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^4}+\frac{150}{i\left(\frac{i}{2}+1\right)^4}\right)}{\frac{100\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}-1\right)}{i}-\frac{1000}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}}, \\
D_A(15\%) &= 1.42712.
\end{aligned}
$$

故证券 A 的价格为 934.99 元，期度为 1.42712 年。

证券 B：

$$P_B(i) = \frac{50}{i}\left[1 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-3}\right] + 1000\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-3},$$

$$P_B(15\%) = 869.97,$$

$$\frac{\mathrm{d}\, P_B(i)}{\mathrm{d}\, i} = \frac{100\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3} - 1\right)}{i^2} - \frac{1500}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^4} + \frac{150}{i\left(\frac{i}{2}+1\right)^4},$$

$$D_B(i) = \frac{\left(\frac{i}{2}+1\right)\left(\frac{50\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}-1\right)}{i^2} - \frac{1500}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^4} + \frac{75}{i\left(\frac{i}{2}+1\right)^4}\right)}{\frac{50\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}-1\right)}{i} - \frac{1000}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3}},$$

$$D_B(15\%) = 1.46084.$$

故证券 B 的价格为 869.97 元，期度为 1.46084 年。

证券 C：

$$P_C(i) = 1000\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-3},$$

$$P_C(15\%) = 804.96,$$

$$\frac{\mathrm{d}\, P_C(i)}{\mathrm{d}\, i} = \frac{100\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3} - 1\right)}{i^2} - \frac{1500}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^4} + \frac{150}{i\left(\frac{i}{2}+1\right)^4},$$

$$D_C(i) = 1.5,$$

$$D_C(15\%) = 1.5.$$

故证券 C 的价格为 804.96 元，期度为 1.5 年。

证券 D：

$$P_D(i) = 1000\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-2},$$

$$P_D(15\%) = 865.33,$$

$$\frac{\mathrm{d}\, P_D(i)}{\mathrm{d}\, i} = \frac{100\left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^3} - 1\right)}{i^2} - \frac{1500}{\left(\frac{i}{2}+1\right)^4} + \frac{150}{i\left(\frac{i}{2}+1\right)^4},$$

$$D_D(i) = 1,$$

$$D_D(15\%) = 1.$$

故证券 D 的价格为 865.33 元，期度为 1 年。

考虑变动时，我们不妨将市场利率改变为 15.1%，则

$$\begin{aligned}
D_A(15.1\%) &= 1.42706,\\
D_B(15.1\%) &= 1.46081,\\
D_C(15.1\%) &= 1.5,\\
D_D(15.1\%) &= 1.
\end{aligned}$$

显然，证券 A 的变动幅度最大，债券 A 对于市场利率的变动最为敏感。

9. 考虑两个债券组合。资产组合 A 由一个本金为 2000 元的 1 年期零息债券和 1 个面值为 6000 元的 10 年期零息债券组成。资产组合 B 由一个面值为 5000 元的 5.95 年期的零息债券组成。每个债券的收益率为 10%。证明这两个资产组合具有相同的期度。

证:

先计算资产组合 A 的期度：

$$\begin{aligned}
P_{A1}(i) &= 2000(1+i)^{-1},\\
P_{A2}(i) &= 2000(1+i)^{-10},\\
D_{A1}(10\%) &= -\frac{\mathrm{d}\,P_{A1}(i)}{\mathrm{d}\,i}\bigg|_{i=10\%}\cdot\frac{1+10\%}{P_{A1}(10\%)} = 1,\\
D_{A2}(10\%) &= -\frac{\mathrm{d}\,P_{A2}(i)}{\mathrm{d}\,i}\bigg|_{i=10\%}\cdot\frac{1+10\%}{P_{A2}(10\%)} = 10,\\
D_A(10\%) &= \frac{1\times P_{A1}(10\%)+10\times P_{A2}(10\%)}{P_{A1}(10\%)+P_{A2}(10\%)} = 6.
\end{aligned}$$

资产组合 B 的期度：

$$D_B(10\%) = -\frac{\mathrm{d}\,P_B(i)}{\mathrm{d}\,i}\bigg|_{i=10\%}\cdot\frac{1+10\%}{P_B(10\%)} = 6.$$

故这两个资产组合具有相同的期度。

第六章　远期与期货

1. 金融期货的定价方法是什么?

   解:

   现货-远期平价定理，即现货-期货平价定理。

2. 举例说明股指期货的定价。

   解:

   参见书本 161 页。

3. 金融期货套期保值的基本原理何在?

   解:

   某一特定商品的期货价格和现货价格受相同经济因素的影响和制约，价格走势是一致的。

4. 套期保值的种类有哪些?

   解:

   套期保值可分为多头套期保值 (买入套期保值) 和空头套期保值 (卖出套期保值)。

5. 简述买入套期保值和卖出套期保值的适用对象及范围。

   解:

   买入套期保值的适用对象及范围：准备在将来某一时间内必须购进某种商品时价格仍能维持在目前认可的水平的商品者。一般用于商品者担心实际买入现货商品时价格上涨。

   卖出套期保值的适用对象及范围：准备在未来某一时间内在现货市场上售出实物商品的生产经营者。一般用于生产经营者担心实际卖出现货商品时价格下跌。

6. 在持有股票组合时，投资者如何利用股指期货进行套期保值?

   解:

   如果要保值的股票组合与指数组合不同，我们采用交叉套期保值。当要保值的资产价值与所用的期货合约的标的资产的变化不是完全同步时，要考察两者价格变化的相关关系，并确定合适的套期保值比率。

7. 分析下面案例：某经销商将在 3 个月后购买 1000 吨大豆。在 3 个月内每吨大豆的价格变化的标准方差为 0.056。公司选择购买豆粕期货合约的方法来进行套期保值。在 3 个月内豆粕期货价格变化的标准方差为 0.080，且 3 个月内大豆价格的变化与 3 个月内豆粕期货价格变化之间的相关系数为 0.9。求最佳的套期比率和经销商应购买的期货合约数目。(题中的标准方差指的是标准差)

   解:

   由题知：$\sigma_s = 0.056, \sigma_f = 0.08, \rho = 0.9$，则

   $$h = \frac{\rho\sigma_s}{\sigma_f} = \frac{0.9 \times 0.056}{0.08} = 0.63,$$

   故最佳的套期比率为 0.63，经销商应购买的期货合约数目为 1 份。

8. 考虑下面例子中货币期货的套期保值：某年 3 月 1 日，美国一家进口商与瑞士一家出口商签订了一份进口 2000 只瑞士表的合同，约定于 3 个月后交货付款，每只手表的价格为 380 瑞士法郎。当时即期汇率为每瑞士法郎 0.6309 美元。如按这一汇率计算，美国进口商用 479484 美元即可购得所需的 760000 瑞士

法郎。为避免这一因汇率的不确定变动而可能造成的损失，美国进口商便决定从 IMM(芝加哥国际货币市场) 买进同年 6 月份到期的瑞士法郎期货合约，以实施外汇期货的多头套期保值，过程如下，试分析这一过程：

日期	现货市场	期货市场
3 月 1 日	签订进口合约，约定 3 个月后付款 760000 瑞士法郎，按当时即期汇率 (1 瑞士法郎 = 0.6309 美元) 计算，应支付 479484 美元。	买进 6 月份到期的瑞士法郎期货合约 6 份，成交期货汇率为 0.6450，合约总价值为 483750 美元。
6 月 1 日	即期汇率升至 1 瑞士法郎 = 0.6540 美元，按此汇率购买 760000 瑞士法郎，共支付 497040 美元。	卖出 6 月份到期的瑞士法郎期货合约 6 份，成交期货汇率为 0.6683，合约总价值为 501225 美元。
损益		
结果		

解:

日期	现货市场	期货市场
3 月 1 日	签订进口合约，约定 3 个月后付款 760000 瑞士法郎，按当时即期汇率 (1 瑞士法郎 = 0.6309 美元) 计算，应支付 479484 美元。	买进 6 月份到期的瑞士法郎期货合约 6 份，成交期货汇率为 0.6450，合约总价值为 483750 美元。
6 月 1 日	即期汇率升至 1 瑞士法郎 = 0.6540 美元，按此汇率购买 760000 瑞士法郎，共支付 497040 美元。	卖出 6 月份到期的瑞士法郎期货合约 6 份，成交期货汇率为 0.6683，合约总价值为 501225 美元。
损益	比预期多支付 $497040 - 479484 = 17556$ 美元，即亏损了 17556 美元。	盈利 $501225 - 483750 = 17475$ 美元。
结果	收获 $-17556 + 17475 = -81$ 美元，亏损 18 美元，投资者没有避免利率上升的损失。	

第七章　期权定价

1. 解释出售一个看涨期权与购买一个看跌期权的区别。

   解:

   看涨期权：它给予期权的持有者在给定时间或在此时间之前的任一时刻按规定的价格买入一定数量某种资产的权利，但不负有必须买进的义务。

   看跌期权：它给予其持有者在给定时间或在此时间之前的任一时刻按规定的价格卖出一定数量某种资产的权利，但不负有必须卖出的义务。

2. 从金融期权交易的基本策略来看，期权购买者与期权出售者的盈亏有何特点?

   解:

   期权购买者的收益随市场价格的变化而波动，是不固定的，其亏损则只限于购买期权的保险费；期权出售者的收益只是出售期权的保险费，其亏损则是不固定的。期货的交易双方则都面临着无限的盈利和无止境的亏损。

3. 风险中性定价机制的内容是什么?

   解:

   在市场不存在任何套利可能性的条件下，如果衍生证券的价格依然依赖于可交易的基础证券，那么这个衍生证券的价格是与投资者的风险态度无关的。

4. 投资者相信股票价格将有巨大变动但方向不确定。请说明投资者能采用哪些不同策略，并解释它们之间的不同点。

   解:

   投资者能采用以下六种策略：宽跨式期权 (Strangle)、跨式期权 (Straddle)、落式期权 (Strip)、吊式期权 (Strap)、倒置日历价差期权及倒置蝶式价差期权。

   当股价有巨大变动，这些策略都能有正的利润。宽跨式期权较跨式期权便宜，但要求股价有更大变动以确保正利润；落式期权及吊式期权都比跨式期权贵，当股价有大幅度下降，落式期权将有更大利润，当股价有大幅度上升，吊式期权将有更大利润。宽跨式期权、跨式期权、落式期权及吊式期权的利润都随股价变动范围增大而增加。相比而言，倒置价差期权存在潜在利润而无论股价波动幅度多大。

5. 什么是保护性的看跌期权? 看涨期权的什么头寸等价于有保护性的看跌期权?

   解:

   有保护的看跌期权由看跌期权多头与标的资产多头组成，由期权平价公式可知，其等价于看涨期权多头与一笔固定收入的组合。

6. 多头同价对敲和空头同价对敲分别适用于何种场合? 如何操作?

   解:

   多头同价对敲：当投资者预期股票价格有较大波动时。同时买入标的股票、施权价、到期日都完全相同的看涨期权和看跌期权。

   空头同价对敲：当投资者预期股票价格没有较大被动时。同时卖出标的股票、施权价、到期日都完全相同的看涨期权和看跌期权。

7. 一个看涨期权的 δ 值为 0.8 意味着什么？

   解:

   如果某看涨期权之标的物的市场价格上涨 1 元，则该期权的期权费上涨 0.8 元，是平价看涨期权。

8. 某年 3 月，投资者预期在两个月后可取得一笔资金，总额为 500000 元。他对 A 公司股票看好，所以他计划在收到这笔资金后即全部投资于 A 公司股票。假定当时 A 公司股票的市场价格为 25 元/股，则该投资者预期收到的 500000 元资金可购买 A 公司股票 20000 股。但是，他担心 A 公司股票在未来的两个月内将有较大幅度的上涨，从而使他失去由股价上涨而产生的收益。为此，他决定以 A 公司股票的看涨期权作套期保值。其具体的操作是购买以 A 公司股票为标的物的看涨期权 200 个。这种期权的敲定价格为 25 元/股 (即平价期权)；弃权费为 1 元/股，所以 200 个期权的期权费总额为 20000 元，期限为两个月，期权样式为欧式。在两个月后，A 公司股票的市场价格可能有如下三种不同情况：

   (1) 市场价格不变，即仍然为 25 元/股。

   (2) 市场价格下跌，如跌至 20 元/股。

   (3) 市场价格果真大幅上涨，如涨至 35 元/股。

   分析这三种情况下，投资者的收益情况。如果投资者在两个月后未能如期收到该笔资金，而 A 公司的股票价格已经上涨，他又应该怎么操作？

   解:

   先计算 1 个看涨期权有 x 股股票，则

   $$200x \times 25 = 20000 \Rightarrow x = 4,$$

   则该投资者一共购买了 800 股股票，则

   (1) 投资人收益为

   $$800 \times 25 - 20000 - 800 \times 1 = -800\text{元},$$

   故投资者亏损 800 元，还持有 499200 元。

   (2) 投资人收益为

   $$800 \times 20 - 20000 - 800 \times 1 = -4800\text{元},$$

   故投资者亏损 4800 元，还持有 495200 元。

   (3) 投资人收益为

   $$800 \times 35 - 20000 - 800 \times 1 = 7200\text{元},$$

   故投资者盈利 7200 元，还持有 507200 元。

   如果投资者在两个月后未能如期收到该笔资金，则考虑两种情况，原行为与新行为。

   原行为：

   $$-500000 + 20000 \times 35 = 200000\text{元}.$$

   新行为：

   $$-20000 + 800 \times 35 - 800 \times 1 = 7200\text{元}.$$

   故如果投资者在两个月后未能如期收到该笔资金，投资者应该采取原行为，即直接购买 A 公司股票 20000 股。

9. 假设当前股票价格为 19 元，对于该股票的欧式看涨期权和看跌期权的执行价格均为 20 元，期限为 3 个月，这两个期权价格均为 3 元，目前无风险年利率为 10%，问是否存在套利机会？

解:

由题知：$S_0 = 19, K = 20, P_c = P_p = 3, T = \frac{1}{4}$年$, r = 10\%$，则

$$
\begin{aligned}
P_c + K(1+r)^{-T} &= 22.53, \\
P_p + S_0 &= 22 < 22.53.
\end{aligned}
$$

由看涨期权和零息债券 (存款) 构成的投资组合在今天的价值 22.53 高于由看跌期权和股票构成的投资组合在今天的价值 22。因此我们可以通过购入价值低的证券组合同时卖出价值高的证券组合来制造套利机会。

10. 考虑一个有效期为 6 个月、执行价格为 40 元的欧式看涨期权。已知无风险年利率为 10%，波动率为 20%，当前股票价格为 42 元。该看涨期权的价格应该是多少？具有相同有效期和执行价格的欧式看跌期权的价格又为多少呢？

解:

由题知：$\tau = 0.5, K = 40, r = 10\%, \sigma = 20\%, S_t = 42$，则

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{42}{40}\right) + \left(0.1 + \frac{0.2^2}{2}\right) \times 0.5}{0.2 \times \sqrt{0.5}} = 0.769, \\
d_2 &= d_1 - 0.2 \times \sqrt{0.5} = 0.628, \\
N(d_1) &= 0.7791, \\
N(d_2) &= 0.7350, \\
C_t &= S_t N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\tau} N(d_2) \\
&= 42 \times 0.7791 - 40\mathrm{e}^{-0.1\times 0.5} \times 0.7350 \\
&= 4.76.
\end{aligned}
$$

故看涨期权的价格是 4.76 元。

$$
\begin{aligned}
P_t &= K\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \\
&= 40\mathrm{e}^{-0.1\times 0.5} \times 0.2650 - 42 \times 0.2209 \\
&= 0.81.
\end{aligned}
$$

故看跌期权的价格为 0.81 元。

第八章　债券模型和利率衍生品定价

1. 假设 10000 元用于 2 年期的投资，以下四种投资方案哪种收益最佳?

   A. 简单复利年利率为 9.5%。

   B. 年利率为 9%，第一年每月复利一次，第二年每半年复利一次。

   C. 年利率为 9.2%，第一年每三个月复利一次，第二年每月复利一次。

   D. 连续复利年利率为 9%。

   解:

   A. $10000 \times (1+9.5\%)^2 = 11990.25.$

   B. $10000 \times \left(1+\dfrac{9\%}{12}\right)^{12} \times \left(1+\dfrac{9\%}{2}\right)^{2} = 11944.64.$

   C. $10000 \times \left(1+\dfrac{9.2\%}{4}\right)^{4} \times \left(1+\dfrac{9.2\%}{12}\right)^{12} = 12003.43.$

   D. $10000 \times \left(\mathrm{e}^{9\%}\right)^2 = 11972.17.$

   故投资方案 C 收益最佳。

2. 假设到期日为 T 的零息债券在 $t(t \leqslant T)$ 时刻的价格为

$$B(t,T) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}, \quad r > -1$$

分别计算简单复利和连续复利下的即息利率和远期利率。

解:

简单复利的即息利率:

$$L(t,T) = -\frac{B(t,T)-1}{(T-t)B(t,T)} = -\frac{\left((1+r)^{t-T}-1\right)(1+r)^{T-t}}{T-t}.$$

连续复利的即息利率:

$$R(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t} = \ln(1+r).$$

简单复利的远期利率:

$$L(t,S,T) = -\frac{B(t,T)-B(t,S)}{(T-S)B(t,T)} = \frac{(1+r)^S-(1+r)^T}{(S-T)(1+r)^S}.$$

连续复利的远期利率:

$$R(t,S,T) = -\frac{\ln B(t,T)-\ln B(t,S)}{T-S} = \ln(1+r).$$

3. 假设到期日为 T 的零息债券在 $t(t \leqslant T)$ 时刻的价格为

$$B(t,T) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

分别计算简单复利和连续复利下的即息利率和远期利率。

解:

简单复利的即息利率：

$$L(t,T) = -\frac{B(t,T)-1}{(T-t)B(t,T)} = -\frac{\mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\mathrm{e}^{-r(T-t)}-1\right)}{T-t}.$$

连续复利的即息利率：

$$R(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t} = r.$$

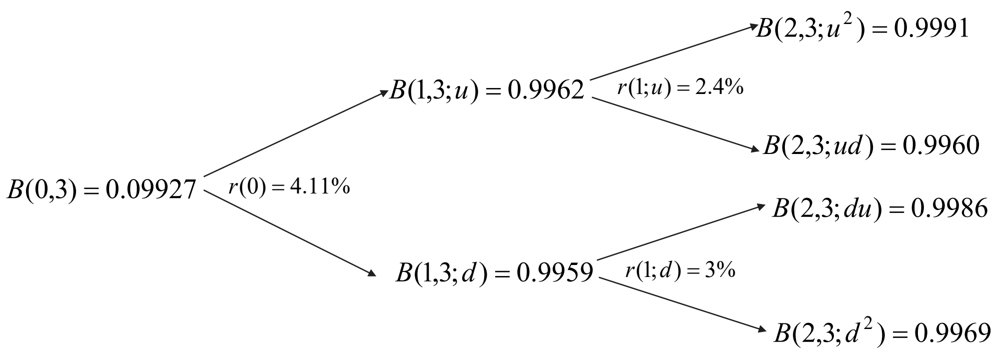
简单复利的远期利率：

$$L(t,S,T) = -\frac{B(t,T)-B(t,S)}{(T-S)B(t,T)} = \frac{\mathrm{e}^{r(T-S)}-1}{T-S}.$$

连续复利的远期利率：

$$R(t,S,T) = -\frac{\ln B(t,T)-\ln B(t,S)}{T-S} = r.$$

4. 对于下图给出的时间 4 到期的零息债券价格树，请计算出其余不同到期日的债券价格和短期利率，画出债券价格期限结构二叉树模型。(补充：时间步长 $\delta = \dfrac{1}{12}$，下图中的 $B(0,3) = 0.9927$)



解:

短期利率读图便可知：

$$r(0) = 4.11\%, r(1;u) = 2.4\%, r(1;d) = 3\%.$$

为计算债券价格，首先我们可以计算出二叉树上每一步的风险中性概率

$$p(0) = \frac{B(0,3)[1+\delta r(0)] - B(1,3;d)}{B(1,3;u) - B(1,3;d)} = 0.6667,$$

$$p(1;u) = \frac{B(1,3;u)[1+\delta r(1;u)] - B(2,3;ud)}{B(2,3;u^2) - B(2,3;ud)} = 0.7072,$$

$$p(1;d) = \frac{B(1,3;d)[1+\delta r(1;d)] - B(2,3;d^2)}{B(2,3;du) - B(2,3;d^2)} = 0.8763.$$

对于不同到期日的债券价格，我们以倒推的形式从二叉树末尾往前推到树的起点。因为 $B(2,2)=1$，利用式 (8-13) 可得

$$B(1,2;u) = \frac{1}{1+\delta r(1;u)}[p(1;u)B(2,2) + [1-p(1;u)]B(2,2)] = 0.9980,$$

$$B(1,2;d) = \frac{1}{1+\delta r(1;d)}[p(1;d)B(2,2) + [1-p(1;d)]B(2,2)] = 0.9975.$$

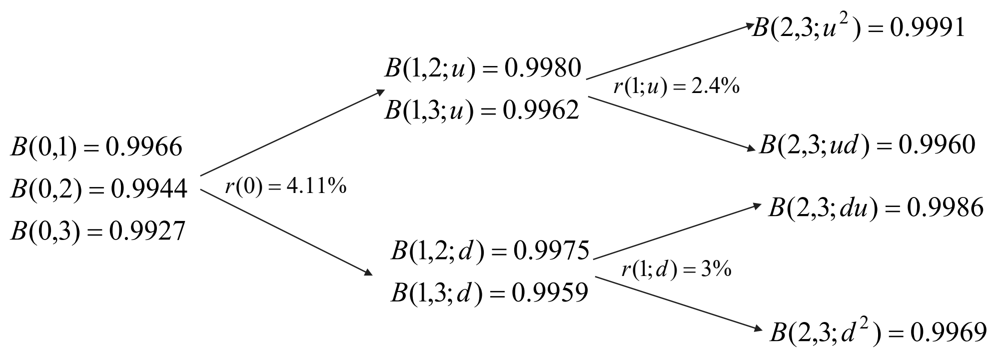
接着再利用式 (8-13) 从后往前计算

$$B(0,2) = \frac{1}{1+\delta r(0)}[p(0)B(1,2;u) + (1-p(0))B(1,2;d)] = 0.9944,$$

同样地因为 $B(1,1) = 1$，因此利用式 (8-13) 可得

$$B(0,1) = \frac{1}{1+\delta r(0)}[p(0)B(1,1) + (1-p(0))B(1,1)] = 0.9966.$$

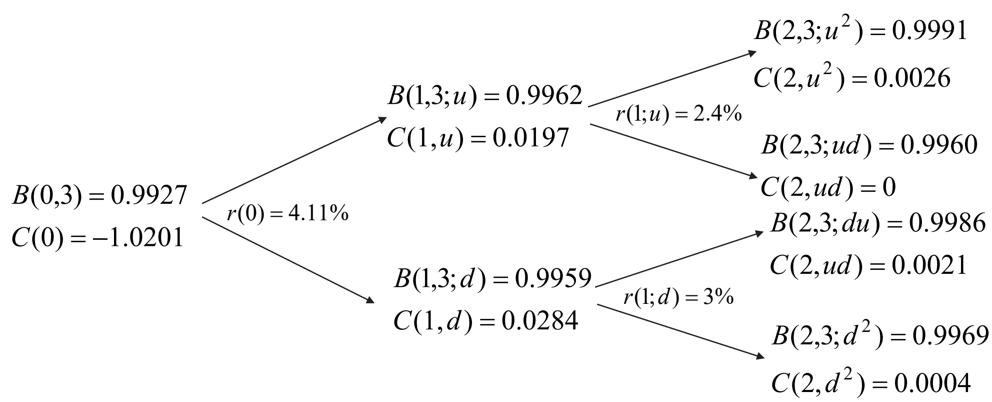
最后我们可以得到如下图所示的债券价格期限结构二叉树：



5. 利用上题中的期权价格，计算在时间 3 到期的零息债券看涨期权，该期权的施权日 2，施权价为 0.9965。求该期权的价格。

解:

首先我们根据上图最后 1 列债券的价格计算出期权的最终收益，再利用风险中性概率和短期利率进行贴现，同时结合式 (7-9) 和式 (7-10)，从树的末端往前倒推最终计算出期权的价格，见下图。



6. 假设 $t < S < T$。请利用简单复利即息利率 $L(t,S)$ 和 $L(t,T)$ 给出简单复利远期利率 $L(t,S,T)$ 的表达式；利用连续复利即息利率 $R(t,S)$ 和 $R(t,T)$ 给出连续复利远期利率 $R(t,S,T)$ 的表达式。假设 $L(0,1/2) = 7\%, L(0,1) = 6\%$，请计算远期利率 $L(0,1/2,1)$ 和 $R(0,1/2,1)$。

解:

因为 $L(t,T)=-\dfrac{B(t,T)-1}{(T-t)B(t,T)}$，所以 $B(t,T)=\dfrac{1}{1+L(t,T)(T-t)}, B(t,S)=\dfrac{1}{1+L(t,S)(S-t)}$，则

$$\begin{aligned}L(t,S,T)&=-\frac{B(t,T)-B(t,S)}{(T-S)B(t,T)}=-\frac{\frac{1}{1+L(t,T)(T-t)}-\frac{1}{1+L(t,S)(S-t)}}{(T-S)\frac{1}{1+L(t,T)(T-t)}}\\&=-\frac{1-\frac{1+L(t,T)(T-t)}{1+L(t,S)(S-t)}}{T-S}=\frac{L(t,T)(T-t)-L(t,S)(S-t)}{(T-S)[1+L(t,S)(S-t)]}\end{aligned}$$

故 $L(t,S,T)=\dfrac{L(t,T)(T-t)-L(t,S)(S-t)}{(T-S)[1+L(t,S)(S-t)]}$。

因为 $R(t,T)=-\dfrac{\ln B(t,T)}{T-t}$，所以 $B(t,T)=\dfrac{1}{\exp[R(t,T)(T-t)]}, B(t,S)=\dfrac{1}{\exp[R(t,S)(S-t)]}$，则

$$\begin{aligned}R(t,S,T)&=-\frac{\ln B(t,T)-\ln B(t,S)}{T-S}=-\frac{\ln\frac{1}{\exp[R(t,T)(T-t)]}-\ln\frac{1}{\exp[R(t,S)(S-t)]}}{T-S}\\&=-\frac{R(t,S)(S-t)-R(t,T)(T-t)}{T-S}=\frac{R(t,T)(T-t)-R(t,S)(S-t)}{T-S}\end{aligned}$$

故 $R(t,S,T)=\dfrac{R(t,T)(T-t)-R(t,S)(S-t)}{T-S}$。

因为 $L(0,1/2)=7\%, L(0,1)=6\%$，所以

$$L(0,1/2,1)=\frac{L(0,1)(1-0)-L(0,1/2)(1/2-0)}{(1-1/2)[1+L(0,1/2)(1/2-0)]}=4.83\%,$$

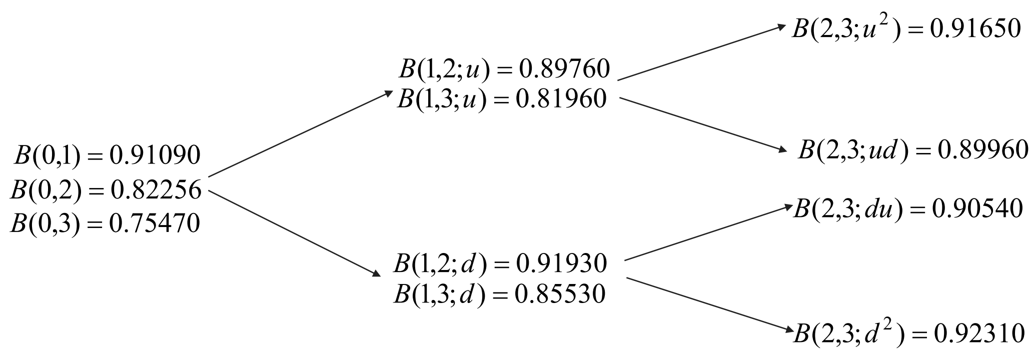
故 $L(0,1/2,1)=4.83\%$。

因为 $L(0,1/2)=7\%, L(0,1)=6\%$，所以 $B(0,1/2)=\dfrac{200}{207}, B(0,1)=\dfrac{50}{53}$，所以

$$R(0,1/2,1)=-\frac{\ln B(0,1)-\ln B(0,1/2)}{1-1/2}=4.77\%,$$

故 $R(0,1/2,1)=4.77\%$。

7. 给定如下零息债券价格树模型，考虑是否会出现套利机会？若有，请构造一个套利策略。



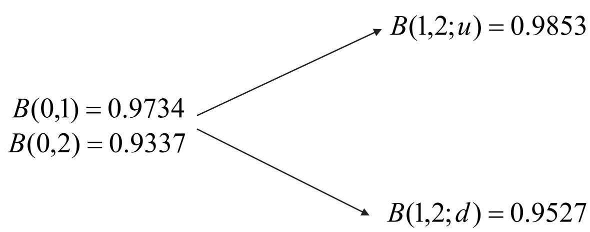
解:

计算风险中性概率：

$$
\begin{aligned}
p(0,2) &= \frac{B(0,2) - B(0,1)B(1,2;d)}{B(0,1)B(1,2;u) - B(0,1)B(1,2;d)} \approx 0.75 \in (0,1), \\
p(0,3) &= \frac{B(0,3) - B(0,1)B(1,3;d)}{B(0,1)B(1,3;u) - B(0,1)B(1,3;d)} \approx 0.75 \in (0,1), \\
p(1,3;u) &= \frac{B(1,3;u) - B(1,2;u)B(2,3;ud)}{B(1,2;u)B(2,3;u^2) - B(1,2;u)B(2,3;ud)} \approx 0.7989 \in (0,1), \\
p(1,3;d) &= \frac{B(1,3;d) - B(1,2;d)B(2,3;d^2)}{B(1,2;d)B(2,3;du) - B(1,2;d)B(2,3;d^2)} \approx -0.4114 \notin (0,1)
\end{aligned}
$$

故该债权价格二叉树模型不存在套利机会。

8. 利用下图的债券价格二叉树，计算时间 2 施权，施权利率为 3% 的利率下限在时间 0 的价格。



解:

由题知：$F = 100, \delta = 1, K = 0.03, j = 0$，则

$$
\frac{F(1+\delta K)}{B(j,j+1)} \max\left\{B(j,j+1) - \frac{1}{1+\delta K}, 0\right\} = 0.2673.
$$

故价格为 0.2673。

第九章　信用衍生品

1. 假设 A 是信用保护买方，B 是信用保护卖方，A 以每年 500 基点购买 C 公司面值 100 万美元的 2 年期 CDS，假设以现金交割，在如下两种情况下，分析 B 公司的收益情况：

 (1) 两年末 C 违约。

 (2) 两年末 C 未违约。

 解:

 (1) 若 C 违约，则卖方需向买方最多支付

$$1000000 \times 0.05 \times 2 = 100000,$$

 故 B 公司最多亏损 10 万美元。

 (2) 若 C 未违约，则买方需向卖方支付

$$1000000 \times 0.05 \times 2 = 100000,$$

 故 B 公司盈利 10 万美元。

2. 假设一家银行 A 以 10% 的固定利率向 X 公司贷款 1 亿美元，该银行可以通过与 B 签订一份总收益互换来对冲。在这份总收益互换中，银行承诺换出这笔贷款的利息加上贷款市场价值的变动部分之和，获得相当于 LIBOR+50bp 的收益。如果现在的 LIBOR 为 9%，并且一年后贷款的价值从 1 亿美元跌至 9500 万美元，分析 B 的收益情况。

 解:

 B 要进行两项支付与一项获利：

 (1) 向银行 A 支付 $100,000,000 \times (9 + 0.5)\% = 9,500,000$ 美元；

 (2) 贷款价值下降的支付 $100,000,000 - 95,000,000 = 5,000,000$ 美元；

 (3) 固定利率带来的获利 $100,000,000 \times 10\% = 10,000,000$ 美元。

 故 B 亏损 450 万美元。

3. X 银行在市场上筹集到一笔 1000 万元资金，期限 1 年，年利率 5%。

 假设 1：X 银行将筹集的 1000 万元转贷给 Y 企业，期限 1 年，贷款利率 6%。

 假设 2：X 银行决定与 Z 银行做一笔信用违约互换，期望转移这笔贷款的信用风险，须支付 0.5% 的买入保护费用。

 在假设 1 的情况中，根据有关规定，X 银行必须保证最低 8% 的资本金，企业对这笔贷款的风险权重是 100%。在假设 2 的情况中，即购买了信用违约互换，X 银行与 Z 银行的债权风险权重为 20%。在这两种假设下，分别计算 X 银行的回报率。

 解:

 假设 1：X 银行的年利润为 $8\% \times (1000 \times 1 \times 6\% - 1000 \times 1 \times 5\%) = 0.8$ 万元，回报率为 $\dfrac{0.8}{1000} = 0.08\%$；

 假设 2：X 银行的年利润为 $1000 \times 1 \times 6\% \times 20\% - 1000 \times 0.5\% = 7$ 万元，回报率为 $\dfrac{7}{1000} = 0.7\%$。

4. 假设参考资产为 100 个 1 年期债券，总面值为 100 亿元，票面利率均为 8.0%，信用评级为 BBB。该债务抵押证券发行 A、B、C 三个层次的 1 年期债券，A、B 为付息债券，期末一次还本付息，C 为零息债券。A、B 层分别为 70 亿元和 20 亿元，对应的票面利率分别为 6.0% 和 7.5%，信用评级分别为 AAA 和 A。C 层为股本层，未评级。A 层的本息优先于 B 层，股本层仅在 A、B 层的本息偿还完毕后才能得到偿付。股本层的金额为 10 亿元，在全部参考资产均不违约的情况下，收益率为 23%。

资产			负债			
数量/亿元	平均利率/%	信用评级	层次	数量/亿元	收益率/%	信用评级
100	8	BBB	A 层	70	6.0	AAA
			B 层	20	7.5	A
			股本层	10	23.0	未评级

(1) 假设资产只在到期日违约，违约导致 5% 的损失和 5000 万元费用。

(2) 假设违约导致 15% 的损失和 5000 万元费用。

在这两种情况下，分析各分券层的损失和收益情况。

解:

(1) A 层完全不受损失，期末获得 70 亿元本金和 4.2 亿元利息，收益率 6%；
B 层完全不受损失，期末获得 20 亿元本金和 1.5 亿元利息，收益率 7.5%；
股本层得到 $100\times(1-5\%)+100\times8\%-0.5-70-4.2-20-1.5=6.8$ 亿元,收益率为 $\dfrac{6.8-10}{10}=-32\%$。

(2) A 层完全不受损失，期末获得 70 亿元本金和 4.2 亿元利息，收益率 6%；
B 层仅能得到 $100\times(1-15\%)+100\times8\%-0.5-70-4.2=18.3$ 亿元, 收益率为 $\dfrac{18.3-20}{20}=-8.5\%$；
股本层全部损失，收益率 -100%。

5. CDS 合同的一方如果违约，分析合同买方和卖方的损益情况。

解:

损益情况见下表：

买方违约，风险加价上升，CDS 合同卖方有利得	卖方违约，风险加价上升，CDS 合同买方有利损
买方违约，风险加价下降，CDS 合同卖方有利损	卖方违约，风险加价下降，CDS 合同买方有利得

6. 查资料，分析一份我国的信用衍生品合约。

略.