《金融数学》Stampfli 课后习题解答 (Ch 1 $\sim$ 7)

目录

第 1 章　金融市场

本章无习题

第 2 章　二叉树、资产组合复制和套利

2.1　衍生产品定价的三种方法

本节无习题

2.2　博弈论方法

1. **解**：本题中的 10 美元应为 110 美元.

   法一 (博弈论方法)：

$$\begin{aligned}
a &= \frac{U-D}{S_u-S_d} = \frac{10-0}{130-100} = \frac{1}{3}, \\
V_0 &= aS_0 + (U - aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau} \\
&= \frac{1}{3}\times 110 + \left(10 - \frac{1}{3}\times 130\right)\mathrm{e}^{-0.04} \\
&= 4.62\ (\text{美元})\ \text{或}4.64\ (\text{美元})
\end{aligned}$$

   若 $\mathrm{e}^{-0.04}$ 取近似值 $\frac{1}{1.04}$，结果为 4.62 美元；若不近似，直接计算，结果为 4.64 美元.

   法二 (期望价值定价方法)：

   先计算风险中性概率：

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d} = \frac{\mathrm{e}^{0.04}\times 110 - 100}{130-100} = 0.48\ \text{或}0.4830$$

   其中，0.48 是取近似结果，0.4830 是直接计算结果.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{e}^{-r\tau}[qU + (1-q)D] \\
&= \mathrm{e}^{-0.04}(10q + 0) \\
&= 4.62\ (\text{美元})\ \text{或}4.64\ (\text{美元})
\end{aligned}$$

   其中，4.62 是取近似结果，4.64 是直接计算结果.

   法三 (概率方法)：

$$E(\Pi_1) = 130p + 100(1-p) = 30p + 100 = 110\times 1.04 = 114.4 \Rightarrow p = 0.48$$

   则

$$E(C) = 0.48\times 10 + 0.52\times 0 = 4.8 \Rightarrow V_0 = \frac{E(C)}{1.04} = 4.62$$

   所以，价格为 4.62 美元.

2. **解**：

   法一 (博弈论方法)：

由题意：$U = S_u - X = 130 - 100 = 30, D = 0$，则

$$\begin{aligned}
a &= \frac{U-D}{S_u - S_d} = \frac{30-0}{130-100} = 1, \\
V_0 &= aS_0 + (U - aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau} \\
&= 1 \times 110 + (30 - 1 \times 130)\,\mathrm{e}^{-0.04} \\
&= 13.85\ (\text{美元})\ \text{或} 13.92\ (\text{美元})
\end{aligned}$$

若 $\mathrm{e}^{-0.04}$ 取近似值 $\dfrac{1}{1.04}$，结果为 13.85 美元；若不近似，直接计算，结果为 13.92 美元.

法二 (期望价值定价方法)：

先计算风险中性概率：

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d} = \frac{\mathrm{e}^{0.04} \times 110 - 100}{130 - 100} = 0.48\ \text{或} 0.4830$$

其中，0.48 是取近似结果，0.4830 是直接计算结果.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{e}^{-r\tau}[qU + (1-q)D] \\
&= \mathrm{e}^{-0.04}(30q + 0) \\
&= 13.85\ (\text{美元})\ \text{或} 13.92\ (\text{美元})
\end{aligned}$$

其中，13.85 是取近似结果，13.92 是直接计算结果.

法三 (概率方法)：

$$E(\Pi_1) = 130p + 100(1-p) = 30p + 100 = 110 \times 1.04 = 114.4 \Rightarrow p = 0.48$$

则

$$E(C) = 0.48 \times 30 + 0.52 \times 0 = 14.4 \Rightarrow V_0 = \frac{E(C)}{1.04} = 13.85$$

所以，价格为 13.85 美元.

3. **解**：

法一 (博弈论方法)：

$$\begin{aligned}
a &= \frac{U-D}{S_u - S_d} = \frac{0-5}{130-90} = -\frac{1}{8}, \\
V_0 &= aS_0 + (U - aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau} \\
&= -\frac{1}{8} \times 100 + \left(0 + \frac{1}{8} \times 130\right)\mathrm{e}^{-0.05} \\
&= 2.96
\end{aligned}$$

所以，结果为 2.96 美元.

法二 (期望价值定价方法)：

先计算风险中性概率：

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d} = \frac{\mathrm{e}^{0.05} \times 100 - 90}{130 - 90} = 0.3782$$

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D] \\
&= \mathrm{e}^{-0.05}(0q+5(1-q)) \\
&= 2.96
\end{aligned}
$$

所以，结果为 2.96 美元.

法三 (概率方法)：

$$E(\Pi_1)=130p+90(1-p)=40p+90=100\times 1.05=105 \Rightarrow p=0.375$$

则

$$E(C)=0.375\times 0+0.625\times 5=3.125 \Rightarrow V_0=\frac{E(C)}{1.05}=2.99$$

所以，价格为 2.99 美元.

4. **解**：

法一 (博弈论方法)：

由题意：$U=0, D=X-S_d=10$，则

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{U-D}{S_u-S_d}=\frac{0-10}{75-50}=-\frac{2}{5}, \\
V_0 &= aS_0+(U-aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau} \\
&= -\frac{2}{5}\times 60+\left(0+\frac{2}{5}\times 75\right)\mathrm{e}^{-0.05} \\
&= 4.54
\end{aligned}
$$

所以，结果为 4.54 美元.

法二 (期望价值定价方法)：

先计算风险中性概率：

$$q=\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}=\frac{\mathrm{e}^{0.05}\times 60-50}{75-50}=0.5231$$

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D] \\
&= \mathrm{e}^{-0.05}(0q+10(1-q)) \\
&= 4.54
\end{aligned}
$$

所以，结果为 4.54 美元.

法三 (概率方法)：

$$E(\Pi_1)=75p+50(1-p)=25p+50=60\times 1.05=63 \Rightarrow p=0.52$$

则

$$E(C)=0.52\times 0+0.48\times 10=4.8 \Rightarrow V_0=\frac{E(C)}{1.05}=4.57$$

所以，价格为 4.57 美元.

2.3 资产组合复制

本节无习题

2.4 概率方法

1. 解：

法一 (博弈论方法)：

$$
S_0 = 90 \begin{array}{l} \nearrow S_u = 105 \\ \\ \searrow S_d = 80 \end{array}
\qquad\qquad
V_0 = ? \begin{array}{l} \nearrow U = 110 - 105 = 5 \\ \\ \searrow D = 110 - 80 = 30 \end{array}
$$

我们通过买入 1 股期权和卖出 a 股股票构造资产组合. 资产组合的初始价值是：

$$\Pi_0 = V_0 - aS_0$$

我们可以选择 a 的值使得资产组合的价值与股票的最终状态无关.

$$\text{上升时：} \Pi_u = U - aS_u$$

$$\text{下降时：} \Pi_d = D - aS_d$$

如果令：

$$U - aS_u = D - aS_d$$

那么，我们可以选择

$$a = \frac{U - D}{S_u - S_d} = \frac{5 - 30}{105 - 80} = -1$$

我们把 a 引入计算：

$$\text{资产组合的初始成本} = V_0 - aS_0$$

$$\text{资产组合的最终价值} = U - aS_u$$

因为该资产组合投资没有风险，则有：

$$V_0 - aS_0 = \mathrm{e}^{-r\tau}(U - aS_u) \Rightarrow V_0 = aS_0 + (U - aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau}$$

代入数值，若 $\mathrm{e}^{-0.04}$ 取近似值 $\dfrac{1}{1.04}$，结果为 15.77 美元；若不近似，直接计算，结果为 15.69 美元.

法二 (期望价值定价方法)：

先计算风险中性概率：

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d} = \frac{\mathrm{e}^{0.04} \times 90 - 80}{105 - 80} = 0.544 \text{ 或} 0.5469$$

其中，0.544 是取近似结果，0.5469 是直接计算结果.

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D] \\ &= \mathrm{e}^{-0.04}[5q+30(1-q)] \\ &= 15.77\ (\text{美元})\ \text{或} 15.69\ (\text{美元}) \end{aligned}$$

其中，15.77 是取近似结果，15.69 是直接计算结果.

法三 (概率方法)：

$$E(\Pi_1) = 105p+80(1-p) = 25p+80 = 90\times 1.04 = 93.6 \Rightarrow p = 0.544$$

则

$$E(C) = 0.544\times 5+0.456\times 30 = 16.4 \Rightarrow V_0 = \frac{E(C)}{1.04} = 15.77$$

所以，价格为 15.77 美元.

2. **解**：

法一 (博弈论方法)：

由题意：$U=0, D=X-S_d=8$，则

$$\begin{aligned} a &= \frac{U-D}{S_u-S_d} = \frac{0-8}{122-102} = -\frac{2}{5}, \\ V_0 &= aS_0+(U-aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau} \\ &= -\frac{2}{5}\times 110+\left(0+\frac{2}{5}\times 122\right)\mathrm{e}^{-0.04} \\ &= 2.89 \end{aligned}$$

所以，结果为 2.89 美元.

法二 (期望价值定价方法)：

先计算风险中性概率：

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d} = \frac{\mathrm{e}^{0.04}\times 110-102}{122-102} = 0.6245$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D] \\ &= \mathrm{e}^{-0.04}(0q+8(1-q)) \\ &= 4.54 \end{aligned}$$

所以，结果为 2.89 美元.

法三 (概率方法)：

$$E(\Pi_1) = 122p+102(1-p) = 20p+102 = 110\times 1.04 = 114.4 \Rightarrow p = 0.62$$

则

$$E(C) = 0.62\times 0+0.38\times 8 = 3.04 \Rightarrow V_0 = \frac{E(C)}{1.04} = 2.92$$

所以，价格为 2.92 美元.

3. 证：

即证：

$$aS_0+(U-aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau}-\mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D]=0$$

所以，

$$\begin{aligned}&aS_0+(U-aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau}-\mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D]\\=&\frac{U-D}{S_u-S_d}S_0+\mathrm{e}^{-r\tau}\left(U-\frac{U-D}{S_u-S_d}S_u\right)-\mathrm{e}^{-r\tau}\left(\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}U+\frac{S_u-\mathrm{e}^{r\tau}S_0}{S_u-S_d}D\right)\\=&\mathrm{e}^{-r\tau}\left[\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0U-\mathrm{e}^{r\tau}S_0D}{S_u-S_d}+U-\frac{U-D}{S_u-S_d}S_u+\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}U+\frac{S_u-\mathrm{e}^{r\tau}S_0}{S_u-S_d}D\right]=0\end{aligned}$$

4. 略.

5. 证：

因为 $U=S_u-X,D=S_d-X$，则

$$\begin{aligned}V_0&=\mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D]=\mathrm{e}^{-r\tau}\left(\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}U+\frac{S_u-\mathrm{e}^{r\tau}S_0}{S_u-S_d}D\right)\\&=\mathrm{e}^{-r\tau}\left(\frac{\mathrm{e}^{r\tau}US_0-US_d+DS_u-\mathrm{e}^{r\tau}DS_0}{U-D}\right)\\&=\mathrm{e}^{-r\tau}\left[\frac{\mathrm{e}^{r\tau}US_0-U(D+X)+D(U+X)-\mathrm{e}^{r\tau}DS_0}{U-D}\right]\\&=\mathrm{e}^{-r\tau}\left[\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0(U-D)-X(U-D)}{U-D}\right]\\&=\mathrm{e}^{-r\tau}(\mathrm{e}^{r\tau}S_0-X)\\&=S_0-\mathrm{e}^{-r\tau}X\end{aligned}$$

6. 解：

(a) 先计算风险中性概率：

$$q=\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}=\frac{\mathrm{e}^{0.04}\times100-90}{115-90}=0.5632$$

$$\begin{aligned}V_0&=\mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D]\\&=\mathrm{e}^{-0.04}(0q+5(1-q))\\&=2.10\end{aligned}$$

所以，结果为 2.10 美元.

(b) 先计算风险中性概率：

$$q=\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}=\frac{\mathrm{e}^{0.04}\times100-90}{115-90}=0.5632$$

$$\begin{aligned}V_0&=\mathrm{e}^{-r\tau}[qU+(1-q)D]\\&=\mathrm{e}^{-0.04}(0q+15(1-q))\\&=6.20\end{aligned}$$

所以，结果为 6.20 美元.

解释：由于 $U=0$，$D_b=3D_a$，所以，结果为 3 倍

2.5 风险

1. **解：**本题中的 $r=0.55$ 应为 $r=0.05$.

(a) 由题意：$U=S_u-X=60-55=5, D=0$，则

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{U-D}{S_u-S_d}=\frac{5-0}{60-40}=\frac{1}{4},\\
V_0 &= aS_0+(U-aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau}\\
&= \frac{1}{4}\times 50+\left(5-\frac{1}{4}\times 60\right)\mathrm{e}^{-0.05/2}\\
&= 2.75\ (\text{美元})
\end{aligned}
$$

所以看涨期权的公平市场价格 $V_0=2.75$ 美元.

(b)

$$
\Delta=\frac{U-D}{S_u-S_d}=\frac{1}{4},\quad \Delta\times N=250
$$

所以需要买入 250 股股票.

(c) 根据 (b) 问，买入 250 股股票的成本为 $250\times 50=12500$ 美元，并通过看涨期权收入 $2.85\times 1000=2850$ 美元，需要借入 $12500-2850=9650$ 美元贷款购买股票.

若股价上升到 60，股票值 $60\times 250=15000$ 美元，需用 $5\times 1000=5000$ 美元赎回看涨期权，用 $9650\times \mathrm{e}^{0.025}=9894.29$ 美元赎回贷款，此时，净头寸为

$$
15000-(5000+9894.29)=105.71\ (\text{美元})
$$

若股价下跌到 50，股票值 $40\times 250=10000$ 美元，用 $9650\times \mathrm{e}^{0.025}=9894.29$ 美元赎回贷款，此时，净头寸为

$$
10000-9894.29=105.71\ (\text{美元})
$$

所以不依赖于股价结果的利润是 105.71 美元.

2. **解：**

(a) 由题意：$U=0, D=X-S_d=15$，则

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{U-D}{S_u-S_d}=\frac{0-15}{60-40}=-\frac{3}{4},\\
V_0 &= aS_0+(U-aS_u)\mathrm{e}^{-r\tau}\\
&= -\frac{3}{4}\times 50+\left(0+\frac{3}{4}\times 60\right)\mathrm{e}^{-0.05/4}\\
&= 6.94\ (\text{美元})
\end{aligned}
$$

所以看涨期权的公平市场价格 $V_0=6.94$ 美元.

(b)

$$\Delta = \frac{U-D}{S_u - S_d} = -\frac{4}{4}, \quad \Delta \times N = -3750$$

所以需要卖出 3750 股股票.

(c) $5000 \times 0.12 = 600$ 美元.

3. **解**：
见下表：

期权序号	(a) 问	(b) 问	(c) 问
(a)	5.68	$2/3 \times N = 4000/3$	209.83
(b)	1.94	$-1/4 \times N = -250$	100
(c)	17.14	$5/6 \times N = 5000/3$	202.31
(d)	2.59	$-2/3 \times N = -4000$	600
(e)	2.47	$1/2 \times N = 2000$	406.31
(f)	0.91	$-1/5 \times N = -600$	300

2.6 多期二叉树和套利

本节无习题

2.7 附录：套利方法的局限性

本节无习题

2.8 复习题

1. **解**：本题中 (a) 的 S_u, S_d 应该交换.
见下表：

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
a	$7/15$	$1/4$	$1/3$	$5/3$	$3/2$	$-2/3$
价格	28.46	2.81	1.73	25.03	6.61	9.43

2. 由于报价低于理论价格，应买入期权，利润为 $20.46N$(N 为期权的股数).

3. 由于报价高于理论价格，应卖出期权，利润为 $0.19N$(N 为期权的股数).

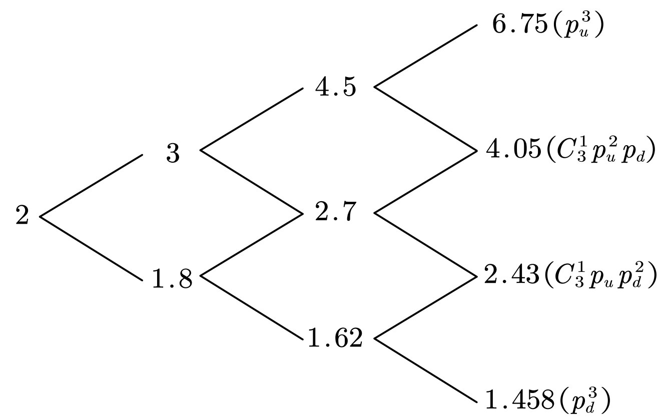
4. 由于报价高于理论价格，应卖出期权，利润为 $0.27N$(N 为期权的股数).

5. $\Delta \times N = \frac{1}{4} \times 1000000 = 250000$，应买入 250 000 股股票，利润约为 100 000 美元.

第 3 章　股票与期权的二叉树模型

3.1　股票价格模型

1. 解：



所以，

$$\mathbb{E} = 6.75 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4.05 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 2.43 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1.458 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2.662$$

2. 解：
因为

$$E(S_2) = S_0(pu+qd)^2 = 1.04^2 S_0 = 27.15 \Rightarrow S_0 = 25.10$$

所以

$$S_1 = [30.12, 20.08], S_2 = [36.14, 24.10, 16.06]$$

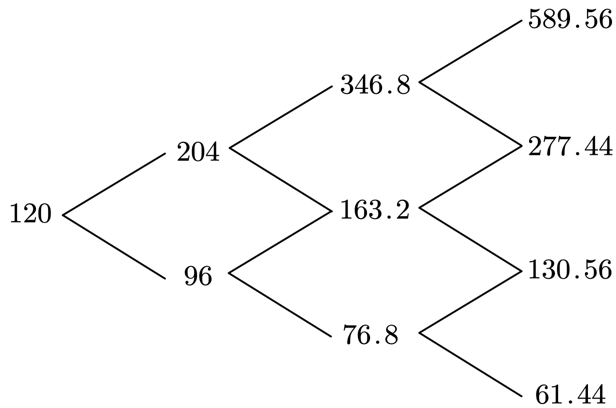
3. 解：
这就是二叉树模型和折现法的应用，同时 $pu + (1-p)d = 1$.

3.2　用二叉树模型进行看涨期权定价

1. 解：
先计算 q：

$$q = \frac{\mathrm{e}^{r\tau} S_0 - S_d}{S_u - S_d} = \frac{\mathrm{e}^{0.06} \times 120 - 0.8 \times 120}{1.7 \times 120 - 0.8 \times 120} = 0.2909,$$

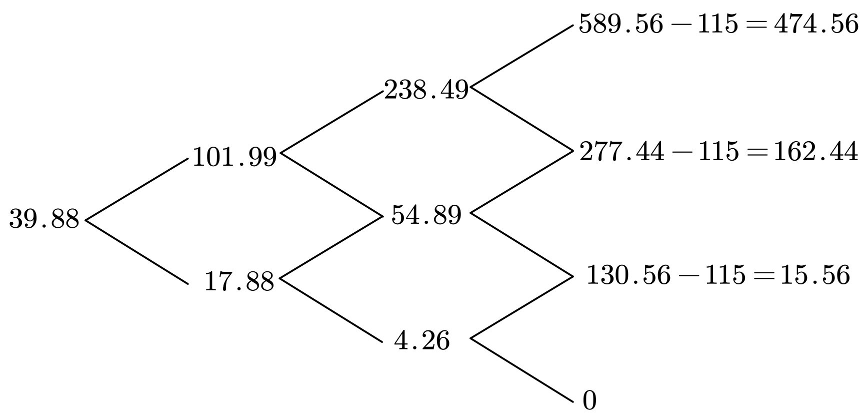
股票的二叉树模型为：



利用

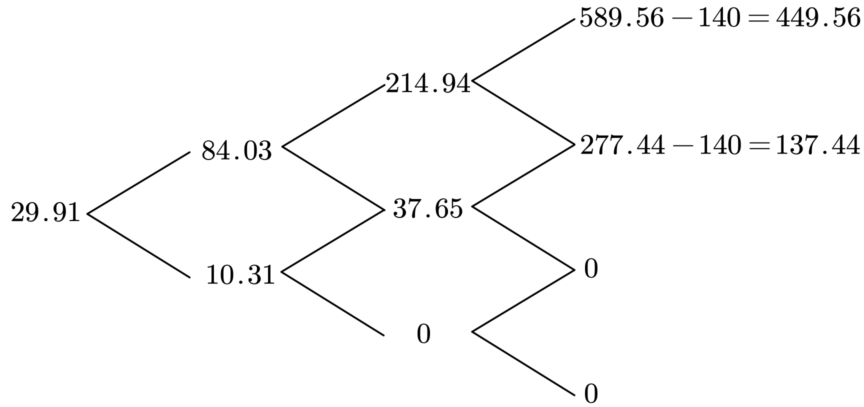
$$x = \mathrm{e}^{-r\tau}[qa + (1-q)b] = \mathrm{e}^{-0.06}[0.2909a + (1-0.2909)b],$$

可得期权的二叉树模型为：



所以在 $t=0$ 时该期权的价格为 39.88 美元.

2. **解：**
股票二叉树模型同上一题，期权的二叉树模型为：



所以在 $t = 0$ 时该期权的价格为 29.91 美元.

3. **解:**
期权的二叉树为:

$$V_4 = [236, 44, 0, 0, 0];$$
$$V_3 = [109.90, 16.06, 0, 0];$$
$$V_2 = [48.79, 5.86, 0];$$
$$V_1 = [20.98, 2.14];$$
$$V_0 = 8.81$$

所以在 $t = 0$ 时该期权的价格为 8.81 美元.

4. **略.**

3.3 美式期权定价

1. **解:**
见下表:

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
价格	14.79	7.40	12.26	11.54	9.04	42.02	27.84

2. **解:**
见下表:

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
价格	0.75	16.09	11.25	1.45	1.79	20.91	3.33

3. **解:**
见下表:

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
价格	1.16	20.00	15.59	1.67	2.96	26.11	3.97

4. **证：**

即证美式看跌期权的价格高于欧式看跌期权的价格，而

$$V_{eu}=\frac{0.8\times(110-X)+0.2\times 0}{1.06}=0.7547(110-X)$$
$$V_{am}=\max\{V_{eu},\max(100-X,0)\}=\max\{0.7547(110-X),\max(100-X,0)\}$$

所以应提前行权.

3.4 一类奇异期权——敲出期权的定价

1. **解：**

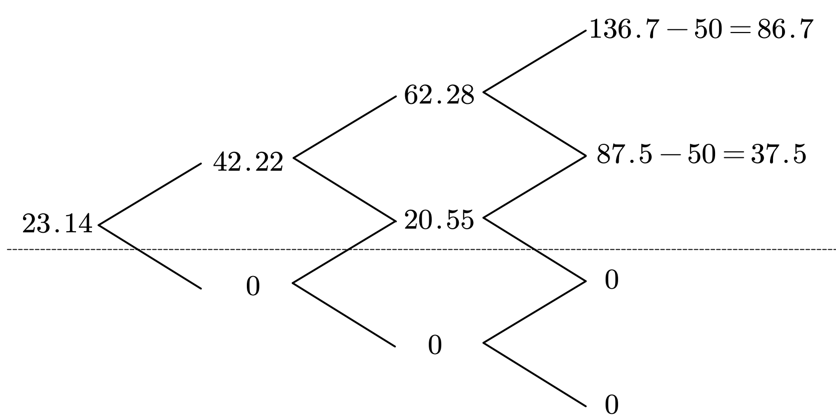
先计算 q：

$$q=\frac{\mathrm{e}^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}=\frac{\mathrm{e}^{0.06}\times 70-56}{87.5-56}=0.5819,$$

利用向下敲出障碍期权的性质和

$$x=\mathrm{e}^{-r\tau}[qa+(1-q)b]=\mathrm{e}^{-0.06}[0.5819a+(1-0.5819)b],$$

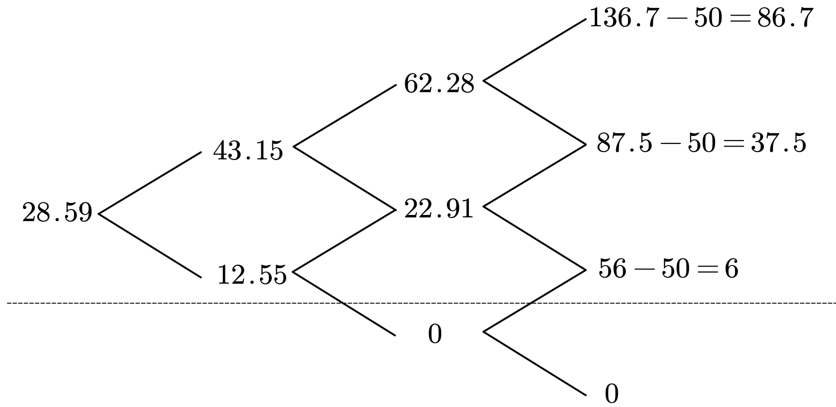
可得期权的二叉树模型为：



所以 $t=0$ 时刻看涨期权的价格为 23.14 美元.

2. **解：**

基本数据同上一题，期权的二叉树模型为：



所以 $t=0$ 时刻看涨期权的价格为 28.59 美元.

3. **解：**

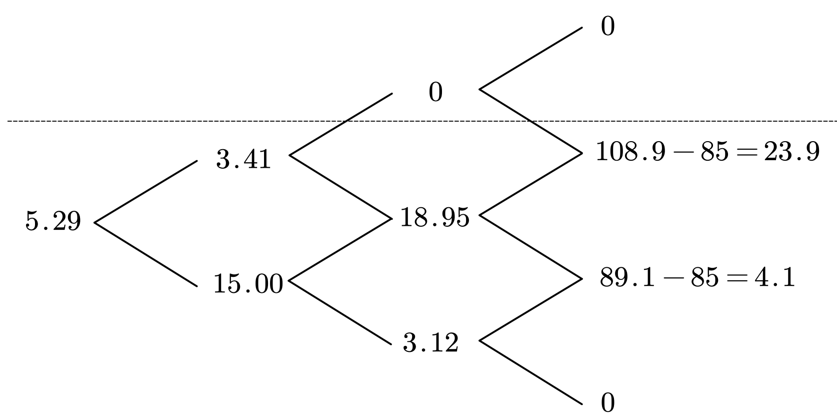
先计算 q：

$$q=\frac{e^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}=\frac{e^{0.06}\times 100-90}{110-90}=0.8092,$$

利用向下敲出障碍期权的性质和

$$x=e^{-r\tau}[qa+(1-q)b]=e^{-0.06}[0.8092a+(1-0.8092)b],$$

可得期权的二叉树模型为：



所以 $t=0$ 时刻看涨期权的价格为 5.29 美元.

3.5 奇异期权——回望期权定价

1. **解：**使用该节例题中的基本数据

期权的二叉树为：

$$V_2 = [144, 120, 108, 100];$$
$$V_1 = [127.80, 102.35];$$
$$V_0 = 110.73$$

所以在 $t = 0$ 时该期权的价格为 110.73 美元.

2. **解**：
具体数据见下表：

路径	概率	最高价
uu	$q^2 = 0.1206$	144
ud	$q(1-q) = 0.2267$	120
du	$(1-q)q = 0.2267$	108
dd	$(1-q)^2 = 0.4260$	100

所以

$$E(V_2) = 111.65 \Rightarrow V_0 = E(V_2)\mathrm{e}^{r\tau} = 110.26$$

所以在 $t = 0$ 时该期权的价格为 110.26 美元.

3. **解**：使用该节例题中的基本数据
具体数据见下表：

路径	概率	最高价
uu	$q^2 = 0.1206$	78.13
ud	$q(1-q) = 0.2267$	62.5
du	$(1-q)q = 0.2267$	50
dd	$(1-q)^2 = 0.4260$	50

所以

$$E(V_2) = 56.23 \Rightarrow V_0 = E(V_2)\mathrm{e}^{r\tau} = 55.53$$

所以在 $t = 0$ 时该期权的价格为 55.53 美元.

3.6 实证数据下二叉树模型分析

本节无习题

3.7 N 期二叉树模型的定价和对冲风险

1. **解**：
对于路径 $uuuu$，德尔塔值是 0.57，0.69，0.89，1.0. 对于路径 $udud$，德尔塔值是 0.57，0.69，0. 43，0.64. 对于路线 $dudu$，德尔塔值是 0.57，0.30，0.43，0.0.

2. 略.

3. 解：

对于路径 $uuuu$，德尔塔值是 -0.74，-0.17，0.0，0.0. 对于路径 $dddd$，德尔塔值是 -0.74，-0.93，-1，-1. 对于路径 $dudu$，德尔塔值是 -0.74，-0.93，-0.75，-1.

第 4 章　用表单计算股票和期权的价格二叉树

本章习题为操作题，按照书本步骤操作即可，具体答案略

第 5 章　连续时间模型和 Black-Scholes 公式

5.1　连续时间股票模型

本节无习题

5.2　离散模型

本节无习题

5.3　连续模型的分析

本节习题为操作题，按照书本步骤操作即可，具体答案略

5.4　Black-Scholes 公式

1. **解：**
   见下表：

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
价格	11.8450	1.9493	2.3693	12.3034	4.9206	14.4496	2.3096	1.5473

2. **解：**
   见下表：

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
价格	0.9754	7.2926	10.0166	10.4868	11.1416	10.7882	0.1607	1.2367

5.5　Black-Scholes 公式的推导

本节无习题

5.6　看涨期权与看跌期权平价

1. **证：**

(a) 因为 Z 是标准正态随机变量，所以 $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{2}\right), z\in\mathbb{R}$，则

$$\begin{aligned}
E(\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{t}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(z^2-2\sigma\sqrt{T}z)\right]\mathrm{d}z\\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2T}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right]\mathrm{d}z}_{\sim N(\sigma\sqrt{T},1)}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2T}{2}}
\end{aligned}$$

所以，对任何 $T>0$，$E[\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z}]=\mathrm{e}^{\sigma^2T/2}$.

(b) 因为 $S_T=S_0\exp\left[\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z\right]$，则

$$\begin{aligned}
E(S_T) &= S_0E\left\{\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z\right]\right\}\\
&= S_0E\left\{\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z\right)\right\}\\
&= S_0\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]E\left[\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z\right)\right]\\
&= S_0\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2T}{2}}\\
&= \mathrm{e}^{rT}S_0
\end{aligned}$$

所以，$E(S_T)=\mathrm{e}^{rT}S_0$.

2. 证：

$\because S_T=S_0\exp\left[\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z\right]$，

$\therefore \ln S_T=\ln S_0+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z$.

$\because Z\sim N(0,1)$，

$\therefore \ln S_T\sim N\left(\ln S_0+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T,\sigma^2T\right)$，

$$\begin{aligned}
P(S_T>X) &= P(\ln S_T>\ln X)=1-P(\ln S_T\le\ln X)\\
&= 1-\Phi\left[\frac{\ln X-\ln S_0-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]\\
&= \Phi\left[\frac{\ln\frac{S_0}{X}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]=N(d_2)
\end{aligned}$$

所以，$P(S_T>X)=N(d_2)$.

3. 证：

$$
\begin{aligned}
d_1(d_2) &= \frac{\ln \frac{S_0}{X} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln \frac{F_T \mathrm{e}^{-r\tau}}{X} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln \frac{F_T}{X} - r\tau + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln \frac{F_T}{X}}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \sigma\sqrt{\tau}/2
\end{aligned}
$$

4. 略.

5.7 二叉树模型和连续时间模型

1. 解：
   令 $X = 2.7386Z + 30$，$P(Z > 3.6515) = 0.001$.

2. 略.

3. 解：
   $u = 1.0166$，$d = 0.9837$，$q = 0.4979$.

4. 略.

5. 解：
   用 $n = 50$ 步：$u = 1.036$，$d = 0.9653$，$q = -0.4951$.

6. 略.

5.8 几何布朗运动股价模型应用的注意事项

本节无习题

第 6 章　Black-Scholes 模型的解析方法

6.1　微分方程推导的思路

本节无习题

6.2　$V(S,t)$ 的扩展

本节无习题

6.3　$V(S,t)$ 的扩展与简化

本节无习题

6.4　投资组合的构造方法

1. **解：**
   $a=1$ 时，这是远期合约.

2. **证：**
   由于

$$
\begin{aligned}
V_t &= a\mathrm{e}^{at}S^2,\\
V_S &= 2\mathrm{e}^{at}S,\\
V_{SS} &= 2\mathrm{e}^{at}
\end{aligned}
$$

   则

$$
\begin{aligned}
&V_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{SS}+rSV_S-rV\\
=&a\mathrm{e}^{at}S^2+\sigma^2S^2\mathrm{e}^{at}+2rS^2\mathrm{e}^{at}-r\mathrm{e}^{at}S^2\\
=&\mathrm{e}^{at}S^2(a+\sigma^2+r)=0\\
\Rightarrow&a=-(\sigma^2+r)
\end{aligned}
$$

3. **证：**
   由于

$$
\begin{aligned}
&V_t=r\mathrm{e}^{rt}G+\mathrm{e}^{rt}G_t=rV+\mathrm{e}^{rt}G_t,\\
&V_S=\mathrm{e}^{rt}G_S,\\
&V_{SS}=\mathrm{e}^{rt}G_{SS}
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
& V_t+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}+rSV_S-rV \\
=& rV+\mathrm{e}^{rt}G_t+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\mathrm{e}^{rt}G_S+rS\mathrm{e}^{rt}G_{SS}-rV \\
=& \mathrm{e}^{rt}\left(G_t+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 G_{SS}+rSG_S\right)=0
\end{aligned}
$$

所以，$V(S,t)=\mathrm{e}^{rt}G(S,t)$ 满足 Black-Scholes 方程.

6.5 Black-Scholes 微分方程求解方法

本节无习题

6.6 期货期权

1. **证：**
   方程 (6-17) 表明：

$$
\begin{aligned}
& C=\mathrm{e}^{-r(T-t)}[FN(d_1)-XN(d_2)], \\
& d_1=\frac{\ln\frac{F}{X}+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
& d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=\frac{\ln\frac{F}{X}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
N'(d_1)=N'(d_2+\sigma\sqrt{T-t}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{d_2^2}{2}-\sigma d_2\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right] \\
&= N'(d_2)\exp\left[-\sigma d_2\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right] \\
&= N'(d_2)\exp\left[\frac{\sigma^2(T-t)}{2}-\ln\frac{F}{X}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right] \\
&= N'(d_2)\frac{X}{F}
\end{aligned}
$$

所以，$FN'(d_1)=XN'(d_2)$.
因为

$$
\frac{\partial d_1}{\partial t}-\frac{\partial d_2}{\partial t}=\frac{\partial(d_1-d_2)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\sqrt{T-t})=-\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
C_t &= r\mathrm{e}^{-r(T-t)}[FN(d_1)-XN(d_2)]+\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[FN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t}-XN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] \\
&= rC+\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[XN'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial t}-XN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] \\
&= rC+\mathrm{e}^{-r(T-t)}XN'(d_2)\frac{\partial(d_1-d_2)}{\partial t} \\
&= rC-\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}XN'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

又因为

$$\frac{\partial d_1}{\partial F}-\frac{\partial d_2}{\partial F}=\frac{\partial(d_1-d_2)}{\partial F}=\frac{\partial}{\partial F}(\sigma\sqrt{T-t})=0$$

所以

$$\begin{aligned}C_F&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[N(d_1)+FN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial F}-XN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial F}\right]\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[N(d_1)+XN'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial F}-XN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial F}\right]\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[N(d_1)+XN'(d_2)\frac{\partial(d_1-d_2)}{\partial F}\right]\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_1)\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\partial d_1}{\partial F}=\frac{\partial}{\partial F}\left[\frac{\ln\frac{F}{X}+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]=\frac{1}{\sigma F\sqrt{T-t}}$$

因此

$$C_{FF}=\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial F}=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_1)}{\sigma F\sqrt{T-t}}$$

所以

$$\begin{aligned}&C_t+\frac{1}{2}\sigma^2F^2C_{FF}-rC\\=&rC-\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}XN'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}+\frac{1}{2}\sigma^2F^2\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_1)}{\sigma F\sqrt{T-t}}-rC\\=&-\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}XN'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}+\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}FN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}}\\=&\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}\sigma}{2\sqrt{T-t}}[-XN'(d_2)+FN'(d_1)]=0\end{aligned}$$

综上，方程 (6-17) 中的期权价格满足偏微分方程 (6-18).

2. **解：**

由题意：

$$F=1472, T-\tau=\frac{3}{12}=0.25\text{年}, \sigma=0.2, X=1460, r=0.05$$

则

$$d_1=\frac{\ln\frac{F}{X}+\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}=0.1319, d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=0.0319, N(d_1)=0.5525, N(d_2)=0.5127$$

于是

$$G=\mathrm{e}^{-r(T-t)}[FN(d_1)-XN(d_2)]=63.93$$

所以，期权的理论价格是 63.93 美元.

3. **证：**

根据方程 (6-10)，有

$$V_t+\frac{1}{2}\sigma^2F^2V_{FF}=0,$$

于是有

$$
\begin{aligned}
G_t &= r\mathrm{e}^{-r(T-t)}V + \mathrm{e}^{-r(T-t)}V_t = rG + \mathrm{e}^{-r(T-t)}V_t,\\
G_F &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}V_F,\\
G_{FF} &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}V_{FF}
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&G_t + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 G_{FF} - rG\\
=&rG + \mathrm{e}^{-r(T-t)}V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \mathrm{e}^{-r(T-t)}V_{FF} - rG\\
=&\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 V_{FF}\right) = 0
\end{aligned}
$$

所以，$G(S,t)$ 满足方程 (6-18).

6.7 附录：资产组合的微分

本节无习题

第 7 章　对冲

7.1　德尔塔对冲

本节无习题

7.2　股票或资产组合的对冲方法

本节无习题

7.3　隐含波动率

1. **解：**
见下表：

期权序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
价格	0.4481	0.2493	0.1954	0.2496	1.0357	0.0484	1.0163

7.4　参数 Δ、Γ 和 Θ

1. **解：**
根据
$$\Delta = N(d_1), \Gamma = \frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi T}}\mathrm{e}^{-d_1^2/2}, \Theta = -r\mathrm{e}^{-rT}XN(d_2) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma$$
所以

序号	d_1	d_2	$N(d_2)$	Δ	Γ	Θ
(a)	-0.2254	-0.4375	0.3309	0.4108	0.0367	-5.0127
(b)	0.1613	-0.0037	0.4985	0.5641	0.0398	-9.3323
(c)	0.7731	0.5421	0.7061	0.7803	0.0160	-10.8693
(d)	-0.7862	-1.0121	0.1557	0.2159	0.0324	-3.5424
(e)	1.9191	1.8170	0.9654	0.9725	0.0207	-1.7779
(f)	-0.6970	-0.9423	0.1730	0.2429	0.0638	-2.0663

2. **解：**
根据
$$C_{\text{新}}(\text{近似级数法}) \approx C_{\text{旧}} + \Theta \mathrm{d}t + \Delta \mathrm{d}S + \frac{1}{2}\Gamma(\mathrm{d}S)^2$$
BS 法计算时，S_0 取 $S_{\text{新}}$，τ 取 $T-\mathrm{d}t$，所以

序号	$C_{旧}$	dt	dS	$C_{新}$ (近似级数法)	$C_{新}$ (BS 法)
(a)	2.7935	$2/52$	1	3.0299	3.0177
(b)	4.3192	$3/52$	-1	3.2366	3.2172
(c)	13.8892	$4/52$	2	14.6457	14.6484
(d)	1.0022	$6/52$	1.5	0.9538	0.8787
(e)	5.2409	$2/52$	-1.5	3.7370	3.7241
(f)	0.6269	$3/52$	-1	0.2967	0.3216

7.5 德尔塔对冲法则的推导

本节无习题

7.6 购买股票后的德尔塔对冲

本节无习题